ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет среднего профессионального образования

Учебно-методическая документация по освоению дисциплины

ОП.10 Математика

Специальность 35.02.12 Садово-парковое и ландшафтное строительство

Форма обучения очная

Оренбург, 2023 г.

Лекция № 1 (2 часа)

Тема: «Матрицы и определители»

1 Вопросы лекции:

1.1 Матрицы, виды матриц.

1.2 Действия над матрицами. Приведение матрицы к ступенчатому виду.

1.3 Определители квадратных матриц и их свойства.

1.4. Миноры и алгебраические дополнения. Вычисление определителей.

1.5. Обратная матрица.

2. Краткое содержание вопросов

Матрицы, виды матриц.

Определение. Матрицей называется прямоугольная таблица чисел.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Обозначения: А – матрица, a_{ij} - элемент матрицы, $i-$ номер строки, в которой стоит данный элемент, $j-$ номер соответствующего столбца; m – число строк матрицы, n – число ее столбцов.

Определение. Числа m и n называются размерностями матрицы.

Определение. Матрица называется квадратной, если m = n. Число n в этом случае называют порядком квадратной матрицы.

Определение. Матрица вида $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ называется нулевой.

Определение. Матрица вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ называется единичной.

Действия над матрицами. Приведение матрицы к ступенчатому виду.

Определение. Транспонированием матрицы называется замена ее строк столбцами с теми же номерами.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для удобства все операции будем вводить для матриц размерности 3х3.

1. Сложение матриц: Чтобы сложить две матрицы нужно сложить соответствующие элементы этих матриц:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

2. Вычитание матриц: Выполняется аналогично сложению.

3. Умножение матрицы на число: Чтобы умножить матрицу на число необходимо каждый элемент матрицы умножить на данное число:

$$k\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}$$

4. Умножение матриц:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}+a_{13}\cdot b_{31} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22}+a_{13}\cdot b_{32} & a_{11}\cdot b_{13}+a_{12}\cdot b_{23}+a_{13}\cdot b_{33} \\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21}+a_{23}\cdot b_{31} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}+a_{23}\cdot b_{32} & a_{21}\cdot b_{13}+a_{23}\cdot b_{21}+a_{23}\cdot b_{33} \\ a_{31}\cdot b_{11}+a_{32}\cdot b_{21}+a_{33}\cdot b_{31} & a_{31}\cdot b_{12}+a_{32}\cdot b_{22}+a_{33}\cdot b_{32} & a_{31}\cdot b_{13}+a_{32}\cdot b_{23}+a_{33}\cdot b_{33} \end{pmatrix}$$

*Определение.*Элементарными преобразованиями матрицы называют следующие операции:

1. перестановка любых двух строк (столбцов) матрицы;
2. умножение любой строки (столбца) на призвольное, отличное от нуля, число;
3. сложение любой строки (столбца) с другой строкой (столбцом), умноженной (умноженным) на произвольное, отличное от нуля, число.

Определение. Матрица вида $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ называется ступенчатой.

Любую матрицу можно привести к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований над элементами матрицы.

Определители квадратных матриц и их свойства.

Каждой квадратной матрице можно поставить в соответствие число, определяемое единственным образом с использованием всех элементов матрицы. Это число называется определителем.

$$\Delta_A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

*Определение***.**Определителем второго порядка называется число, полученное с помощью элементов квадратной матрицы 2-го порядка следующим образом:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

.

При этом из произведения элементов, стоящих на так называемой главной диагонали матрицы (идущей из левого верхнего вправый нижний угол) вычитается произведение элементов, находящихся на второй, или побочной, диагонали.

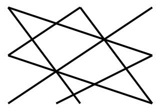
Определение. Определителем третьего порядка называется число, определяемое с помощью элементов квадратной матрицы 3-го порядка следующим образом:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Замечание. Для того чтобы легче запомнить эту формулу, можно использовать так называемое правило треугольников. Оно заключается в следующем: элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «+», располагаются так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

образуя два треугольника, симметричных относительно главной диагонали. Элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «-», располагаются аналогичным образом относительно побочной диагонали: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$



Основные свойства определителей.

Сформулируем и докажем основные свойства определителей 2-го и 3-го порядка (доказательство проведем для определителей 3-го порядка).

Свойство 1. Определитель не изменяется при транспонировании, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Замечание. Следующие свойства определителей будут формулироваться только для строк. При этом из свойства 1 следует, что теми же свойствами будут обладать и столбцы.

Свойство 2. При умножении элементов строки определителя на некоторое число весь определитель умножается на это число, т.е.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 3. Определитель, имеющий нулевую строку, равен 0.

Свойство 4. Определитель, имеющий две равные строки, равен 0.

Свойство 5. Определитель, две строки которого пропорциональны, равен 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 6. При перестановке двух строк определителя он умножается на –1.

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 7.

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 8. Величина определителя не изменится, если к элементам одной строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Миноры и алгебраические дополнения. Вычисление определителей.

Определение. Минором элемента определителя называется определитель, полученный из данного путем вычеркивания строки и столбца, в которых стоит выбранный элемент.

Обозначение: a_{ij} – выбранный элемент определителя, M_{ij} – его минор.

Пример. Для $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ $a_{21} = -5, M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11.$

Определение. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента определителя называется его минор, если сумма индексов данного элемента i+j есть число четное, или число, противоположное минору, если i+j нечетно, т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Обратная матрица.

Определение. Квадратная матрица A называется обратимой, если существует квадратная матрица X той же размерности, удовлетворяющая соотношениям A·X=X·A=E.

Матрица X называется обратной к матрице A и обозначается A^{-1}, т.е. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Обратную матрицу A^{-1} *можно найти по следующей формуле:*

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A_*^T$, где $|A|$ – определитель матрицы A, A_*^T – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A.

Лекция № 2 (2 часа)

Тема: «Системы линейных алгебраических уравнений»

1 Вопросы лекции:

1.1 Определение системы линейных уравнений.

1.2 Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

1.3 Решение систем линейных уравнений методом Крамера.

2. Краткое содержание вопросов

Определение системы линейных уравнений.

Определение. Системой линейных уравнений (линейной системой) называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (1)$$

где a_{ij}, b_i - числа, x_j - неизвестные, n – число неизвестных, m – число уравнений.

Определение. Решением линейной системы называется набор чисел $x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}$, которые при подстановке вместо неизвестных обращают каждое уравнение системы в верное равенство.

Решение системы линейных уравнений методом Гаусса.

Замечание. Линейная система может иметь единственное решение, бесконечно много решений или не иметь ни одного решения.

Условия существования и количества решений линейной системы будут изучены в дальнейшем, а пока рассмотрим способы нахождения единственного решения системы, в которой число уравнений равно числу неизвестных: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$

Пусть $a_{11} \neq 0$ (этого всегда можно добиться, поменяв уравнения местами). Разделим обе части первого уравнения на a_{11} и вычтем полученное уравнение из каждого из остальных уравнений системы, умножив его предварительно на a_{i1}, где i – номер очередного уравнения. Как известно, полученная при этом новая система будет равносильна исходной. Коэффициенты при x_1 во всех уравнениях этой системы, начиная со второго, будут равны 0, т.е. система выглядит так:

$$\begin{cases} x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{\tilde{b}}_1 \\ \quad \tilde{a}_{22}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{\tilde{b}}_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \tilde{a}_{n2}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{nn}x_n = \tilde{\tilde{b}}_n \end{cases}.$$

Таким же образом можно исключить x_2 из третьего и последующих уравнений. Продолжая эту операцию для следующих неизвестных, приведем систему к так называемому треугольному виду:

$$\begin{cases} x_1 + \ddot{a}_{12}x_2 + \ldots + \ddot{a}_{1n}x_n = \ddot{b}_1 \\ \quad x_2 + \ldots + \ddot{a}_{2n}x_n = \ddot{b}_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad x_n = \ddot{b}_n \end{cases}$$

Здесь символами $\tilde{a}_{ij}, \ddot{a}_{ij}, \dot{\tilde{\tilde{b}}}_i$ и $\ddot{b}_i$ обозначены изменившиеся в результате преобразований числовые коэффициенты и свободные члены.

Из последнего уравнения системы единственным образом определяется x_n, а затем последовательной подстановкой – остальные неизвестные.

Замечание. Иногда в результате преобразований в каком-либо из уравнений обращаются в 0 все коэффициенты и правая часть, то есть оно превращается в тождество 0=0. Исключив его из системы, мы уменьшим число уравнений по сравнению с числом неизвестных. Такая система не может иметь единственного решения.

Если же в процессе применения метода Гаусса какое-нибудь уравнение превратится в равенство вида 0=1 (коэффициенты при неизвестных обратились в 0, а правая часть приняла ненулевое значение), то исходная система не имеет решения, так как подобное равенство является неверным при любых значениях неизвестных.

Решение систем линейных уравнением методом Крамера.

Правило Крамера.

Рассмотрим систему (1). Назовем главным определителем этой системы определитель Δ, элементами которого являются коэффициенты при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Предположим сначала, что $\Delta \neq 0$. Умножим каждое уравнение системы на алгебраические дополнения $A_{1j}, A_{2j}, \ldots, A_{nj}$ элементов j-го столбца Δ.

Сложив затем все уравнения, получим:

$$\sum_{i-1}^{n} x_i (a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + ... + a_{ni}A_{nj}) = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + ... + b_nA_{nj}$$.

Отметим, что

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + ... + a_{ni}A_{nj} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1i} & ... & a_{1i} & ...a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2i} & ... & a_{2i} & ...a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ...... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{ni} & ... & a_{ni} & ...a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(j-й столбец)

(Результат получен из разложения определителя по j-му столбцу). Такой определитель равен 0 при $i \neq j$ и равен Δ при i=j. Правая часть равенства представляет собой определитель Δ, в котором вместо i-го столбца стоит столбец свободных членов системы. Назовем такой определитель Δ_{x_i}. Рассматривая i=1,2,…,n, получим систему, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} \Delta \cdot x_1 = \Delta_{x_1} \\ \Delta \cdot x_2 = \Delta_{x_2} \\ .... \\ \Delta \cdot x_n = \Delta_{x_n} \end{cases}.$$

Разделив все уравнения на Δ, найдем единственное решение: $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, ..., x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$.

Предположим теперь, что Δ=0. Тогда система (2.6) примет вид:

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 = \Delta_{x_1} \\ 0 \cdot x_2 = \Delta_{x_2} \\ .... \\ 0 \cdot x_n = \Delta_{x_n} \end{cases}.$$

В этом случае, если все Δ_{x_i}=0, система выглядит так:

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 = 0 \\ 0 \cdot x_2 = 0 \\ .... \\ 0 \cdot x_n = 0 \end{cases}$$

и имеет бесконечно много решений. Если же хотя бы один из $\Delta_{x_i} \neq 0,$ система решений не имеет.

Таким образом, правило Крамера позволяет найти единственное решение системы или сделать вывод о существовании бесконечного числа решений либо об их отсутствии:

1) Если $\Delta \neq 0,$ система (1) имеет единственное решение, определяемое по формулам: $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, ..., x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$.

2) Если $\Delta = \Delta_{x_i}$=0, система имеет бесконечно много решений.

3) Если Δ=0, а хотя бы один из $\Delta_{x_i} \neq 0,$ система не имеет решений.

Лекция № 3 (2 часа)

Тема: «Пределы и непрерывность»

1 Вопросы лекции:

1.1 Предел функции в точке. Теоремы о пределах.

1.2 Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их связь и основные свойства.

1.3 Раскрытие неопределенностей.

1.4 Первый и второй замечательные пределы. Обобщенный второй замечательный предел.

1.5 Таблица эквивалентных бесконечно малых, ее использование при вычислении пределов.

1.6 Непрерывность функции в точке и на промежутке.

2. Краткое содержание вопросов

Предел функции в точке. Теоремы о пределах.

Пусть *a* – точка числовой прямой, $a \in (b;c)$. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $E = \{x | \; x \in (b;c) \backslash \{a\}\}$.

Число *A* называется *пределом функции* $f(x)$ при *x*, стремящемся к*a* (обозначается $A = \lim_{x \to a} f(x)$), если для любого положительного числа ε($\forall \varepsilon > 0$) существует такое положительное число $\delta\ (\exists \delta > 0)$что для любого $x\ (\forall x)$такого, что $0 < |x - a| < \delta, x \in E$, выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Число A_1 называется *пределом функции* $f(x)$ *слева* в точке *a*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in (a - \delta; a)$выполняется неравенство $|f(x) - A_1| < \varepsilon$.

Число A_2 называется *пределом функции* $f(x)$ *справа* в точке *a*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in (a; a + \delta)$выполняется неравенство $|f(x) - A_2| < \varepsilon$.

Предел слева обозначается $A = \lim_{x \to a-0} f(x)$предел справа – $A = \lim_{x \to a+0} f(x)$.

Эти пределы характеризуют поведение функции слева и справа от точки *a*. Их часто называют односторонними пределами.

Если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая δ-окрестность точки *a*, что для всех *x*, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, выполняется неравенство $|f(x)| > \varepsilon$, то говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке *a* бесконечный предел: $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

Если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого $x > \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, то говорят, что предел функции $f(x)$ при *x*, стремящемся к плюс бесконечности, равен *A*: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$.

Аналогично формулируется определение предела при *x*, стремящемся к минус бесконечности: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$.

Свойства пределов

Если существует $\lim_{x \to a} f(x) = A$ и существует $\lim_{x \to a} g(x) = B$, то:

1) $\lim_{x \to a}\big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = A + B$;

2) $\lim_{x \to a}\big(f(x) - g(x)\big) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = A - B$;

3) $$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)=A\cdot B;$$

4) $$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{A}{B}\quad(B\neq 0).$$

Теорема: Если в некоторой окрестности точки a выполняется неравенство $g(x)<f(x)<h(x)$ и $\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}h(x)=A$, то $\lim_{x\to a}f(x)=A$.

Замечание. В дальнейшем будем пользоваться тем, что для любой элементарной функции $f(x)$ и любой точки a из ее области определения справедливо соотношение $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их связь и основные свойства.

Определение. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x\to a$, если для любого положительного числа C существует окрестность точки a такая, что $|f(x)|>C$ для любого x из выбранной окрестности точки a и принадлежащего области определения функции $f(x)$. Обозначение

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty\quad(\lim_{x\to a}f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to a}f(x)=-\infty).$$

Определение. Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x\to a$, если для любого положительного числа C существует окрестность точки a такая, что $|f(x)|<C$ для любого x из выбранной окрестности точки a и принадлежащего области определения функции $f(x)$. Обозначение

$$\lim_{x\to a}f(x)=0.$$

Сформулируем основные соотношения для бесконечно больших и бесконечно малых функций.

Если $\lim_{x\to a}f(x)=0, f(x)\neq 0,$ то $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\infty$, и обратно, если $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$, то $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=0$.

Если $\lim_{x\to a}f_1(x)=\infty$ и $\lim_{x\to a}f_2(x)=A$, то $\lim_{x\to a}(f_1(x)+f_2(x))=\infty$.

Если $\lim_{x\to a}f_1(x)=+\infty$ и $\lim_{x\to a}f_2(x)=+\infty$, то $\lim_{x\to a}(f_1(x)+f_2(x))=+\infty$.

Если $\lim_{x\to a}f_1(x)=\infty$ и $\lim_{x\to a}f_2(x)=A\neq 0$, то $\lim_{x\to a}(f_1(x)\cdot f_2(x))=\infty$.

Если $\lim_{x\to a}f_1(x)=A\neq 0,\ f_2(x)\neq 0$ и $\lim_{x\to a}f_2(x)=0$, то $\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\infty$.

Если $\lim_{x\to a}f_1(x)=A$ и $\lim_{x\to a}f_2(x)=\infty$, то $\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=0$.

Раскрытие неопределенностей.

Вычисление предела в случае неопределенности

При вычислении пределов могут возникнуть ситуации, когда непосредственное применение теорем о свойствах пределов, бесконечно больших и бесконечно малых функций не дает возможность их вычислить. Такое положение возможно в следующих случаях:

1) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$:

а) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ (символически обозначается $\left[\frac{0}{0}\right]$);

б) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$ (символически обозначается $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$).

2) $\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)$:

$\lim_{x\to a} f(x) = 0,\ \lim_{x\to a} g(x) = \infty$ (символически обозначается $[0\cdot\infty]$).

3) $\lim_{x\to a}\big(f(x) - g(x)\big)$:

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$ (символически обозначается $[\infty - \infty]$).

В том случае, когда имеет место неопределенность, для вычисления предела – “ раскрытия неопределенности” – преобразовывают выражение так, чтобы получить возможность его вычислить. Для таких преобразований используются или тождественные соотношения или сравнения поведения функций при стремлении $x \to a$ (соотношения эквивалентностей).

Первый и второй замечательные пределы.

Для вычисления пределов часто используют так называемые замечательные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Таблица эквивалентных бесконечно малых, ее использование при вычислении пределов.

Функция $f(x)$ эквивалентна функции $g(x)$ при $x \to a\ (f(x)\sim g(x)\ \text{при}\ x\to a)$, если существует такая функция $\alpha(x)$, что $f(x) = \alpha(x)\cdot g(x)$, где $\alpha(x)\to 1$ при $x \to 0$.

Основные эквивалентности при $x \to 0$

$$\sin x \sim x$$

$$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

$$\operatorname{tg} x \sim x$$

$$\arcsin x \sim x$$

$$\operatorname{arctg} x \sim x$$

$$e^x - 1 \sim x$$

$$a^x - 1 \sim x\ln a$$

$$\ln(1+x) \sim x$$

$$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$$

$$(1+x)^m - 1 \sim mx$$

Непрерывность функции в точке и на промежутке.

Функция y = f(x) называется непрерывной в точке x_0, если предел функции при $x \to x_0$ равен значению функции в этой точке.

Функция y = f(x) называется непрерывной на некотором промежутке, если она непрерывна в каждой точке данного промежутка.

Лекция № 4 (2 часа)

Тема: «Производная»

1 Вопросы лекции:

1.1 Приращение аргумента и приращение функции.

1.2 Понятие производной функции.

1.3 Геометрический, механический, биологический смыслы производной.

1.4 Правила дифференцирования.

1.5 Производные основных элементарных функций.

2. Краткое содержание вопросов

Приращение аргумента и приращение функции.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на некотором интервале $(a; b)$.

Определение. Разность $x - x_0 = \Delta x \ \left(x, x_0 \in (a; b)\right)$ называют *приращением аргументах* в точке x_0.

Определение. Разность $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$ называют *приращением функции* $f(x)$ в точке x_0.

Понятие производной функции.

Определение. Если существует предел отношения приращения функции к приращению аргумента, при условии, что приращение аргумента стремится к 0, то его называют *производной функции в точке* x_0 и обозначают $f'(x_0)$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Нахождение производной называется дифференцированием функции.

Геометрический, механический, биологический смыслы производной.

Геометрический смысл производной состоит в том, что производная есть угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в данной точке x_0; ***физический смысл*** – в том, что производная от пути по времени есть мгновенная скорость движущейся точки при прямолинейном движении $s = s(t)$ в момент времени t_0; ***биологический смысл***: если зависимость между числом особей популяции микроорганизмов y и временем t ее размножения задана уравнением $y = p(t)$, то $p'(t)$ – производительность жизнедеятельности популяции микроорганизмов в момент времени t.

Правила дифференцирования.

1. $\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$;
2. $\left(f(x) - g(x)\right)' = f'(x) - g'(x)$;
3. $\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$;
4. $\left(c \cdot f(x)\right)' = c \cdot f'(x)$, где c – число;
5. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}, g(x) \neq 0$.

Производные основных элементарных функций.

$(c)' = 0$;

$(x^n)' = nx^{n-1}$;

частные случаи: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$;

$(a^x)' = a^x \ln a$;

частный случай: $(e^x)' = e^x$;

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$;

частный случай: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

$(\sin x)' = \cos x$;

$(\cos x)' = -\sin x$;

$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;

$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$;

$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Лекция №5 (2 часа)

Тема: «Приложение производной»

1 Вопросы лекции:

1.1 Исследование функции с помощью производных. Общий план исследования.

1.2 Признаки возрастания и убывания функции. Необходимое и достаточное условие существования экстремума.

1.3 Признаки выпуклости и вогнутости функции. Нахождение точек перегиба.

2. Краткое содержание вопросов

Исследование функции с помощью производных. Общий план исследования.

1. Найти область определения функции.
2. Определить поведение функции на границах области определения.
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
4. Найти промежутки знакопостоянства.
5. Исследовать функцию на четность и периодичность.
6. Найти промежутки монотонности функции.
7. Найти экстремумы функции.
8. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба графика функции.
9. Исследовать функцию на существование вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптот.
10. Построить график функции.

Признаки возрастания и убывания функции. Необходимое и достаточное условие существования экстремума.

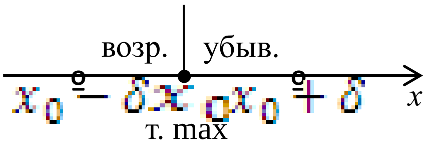
Теорема. Для того чтобы дифференцируемая на промежутке *X* функция $y = f(x)$ была возрастающей (убывающей) на этом промежутке, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in X$ выполнялось условие $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$.

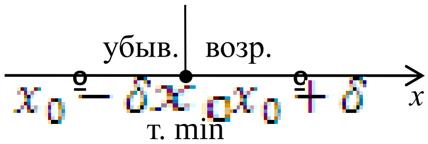
Определение. Точку $x_0 \in D(f)$ называют *точкой максимума* (*минимума*) функции $y = f(x)$ с областью определения *D*(*f*), если существует интервал $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, где $\delta > 0$, содержащийся в *D*(*f*), такой, что для каждого $x \neq x_0$ из этого интервала выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ $\left(f(x) > f(x_0)\right)$.

Другими словами, точка $x_0 -$ точка максимума (минимума), если значение функции в этой точке больше (меньше), чем значение функции во всех других точках интервала $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ с центром в точке x_0, принадлежащего области определения.

Определение. Точки максимума и минимума называют *точками экстремума* функции, а значения функции в этих точках называют *экстремумами функции*.

Признак экстремума: Если функция *y* = *f*(*x*) возрастает (убывает) на некотором интервале $(x_0 - \delta;\ x_0)$, содержащемся в *D*(*f*) и убывает (возрастает) на интервале $(x_0;\ x_0 + \delta)$, содержащемся в *D*(*f*), то точка $x_0 \in D(f) -$ точка локального максимума (минимума) функции *y*





= *f*(*x*).

Признаки выпуклости и вогнутости функции. Нахождение точек перегиба.

Определение. Функция $y = f(x)$ *выпукла вверх* (*выпукла вниз*) в точке x_0, если существует интервал $(x_0 + \delta; x_0 - \delta), \delta > 0$ такой, что для всех его точек *x* касательная к графику функции в точке $M(x_0; y_0)$ лежит выше (ниже) графика.

Теорема: Для того чтобы график дважды дифференцируемой на интервале (*a*; *b*) функции *y* = *f*(*x*) был выпуклым вверх (выпуклым вниз) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in (a; b)$ выполнялось неравенство

$$f''(x) \leq 0 \quad (f''(x) \geq 0).$$

Точки, в которых $f''(x) = 0$ или не существует, называют точками перегиба графика функции *y* = *f*(*x*).

Лекция № 6 (2 часа)

Тема: «Неопределенный и определенный интеграл»

1 Вопросы лекции:

1.1 Первообразная и ее свойства.

1.2 Неопределенный интеграл, его свойства.

1.3 Таблица неопределенных интегралов.

1.4 Простейшие приемы интегрирования: непосредственное интегрирование, метод подстановки. Метод интегрирования по частям. Интегрирование рациональных дробей. Рекуррентная формула.

1.5 Задача о нахождении площади криволинейной трапеции. Понятие интегральной суммы. Определенный интеграл.

1.6 Формула Ньютона-Лейбница. Основные свойства определенного интеграла.

1.7 Простейшие приложения определенного интеграла.

2. Краткое содержание вопросов

Первообразная и ее свойства.

*Определение.*Функция$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ называется первообразной для функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ на интервале $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ (конечном или бесконечном), если в каждой точке этого интервала $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ является производной для $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, т.е. $F'(x) = f(x)$.

Из этого определения следует, что задача нахождения первообразной обратна задаче дифференцирования: по заданной функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ требуется найти функцию $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, производная которой равна $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Первообразная определена неоднозначно: для функции $\frac{1}{1+x^2}$ первообразными будут и функция arctg$\boldsymbol{x}$, и функция arctg$\boldsymbol{x}$-10: $(\operatorname{arctg} x)' = (\operatorname{arctg} x - 10)' = \frac{1}{1+x^2}$. Для того, чтобы описать все множество первообразных функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, рассмотрим

Свойства первообразной.

1. Если функция $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ - первообразная для функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ на интервале $\boldsymbol{X}$, то функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}$, где $\boldsymbol{C}$ - произвольная постоянная, тоже будет первообразной для $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ на этом интервале. (Док-во: $F'(x) = \left(F(x) + C\right)' = f(x)$).
2. Если функция $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ - некоторая первообразная для функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ на интервале $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, то любая другая первообразная $\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{x})$ может быть представлена в виде $\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}$, где $\boldsymbol{C}$ - постоянная на $\boldsymbol{X}$ функция.
3. Для любой первообразной $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ выполняется равенство $\boldsymbol{dF}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{dx}$.

Из этих свойств следует, что если $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ - некоторая первообразная функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ на интервале $\boldsymbol{X}$, то всё множество первообразных функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ (т.е. функций, имеющих производную $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ и дифференциал $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{dx}$) на этом интервале описывается выражением $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}$, где $\boldsymbol{C}$ - произвольная постоянная.

Неопределенный интеграл, его свойства.

Определение. Множество всех первообразных $F(x) + C$ для функции $f(x)$ на $(a;b)$ называют *неопределенным интегралом* и обозначают $\int f(x)dx$. $f(x)$ называется подинтегральной функцией, $f(x)dx$ – подинтегральным выражением, x – переменной интегрирования.

Свойства неопределенного интеграла

1. $\int\big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;
2. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$;
3. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$;
4. $(\int f(x)dx)' = f(x)$;
5. $\int dF(x) = F(x) + C$;

Таблица неопределенных интегралов.

1) $\int 0dx = C$;
2) $\int 1dx = x + C$;
3) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ \ (\alpha \neq -1)$;
4) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \ \ (x \neq 0)$;
5) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ \ (a > 0,\ a \neq 1),\ \int e^x dx = e^x + C$;

6) $\int \sin x\, dx = \cos x + C$;

7) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$;

8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z\right)$;

9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \quad (x \neq \pi k, k \in Z)$;

10) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$;

11) $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arcctg} x + C$;

12) $\int \frac{dx}{1-x^2} = \ln \frac{1+x}{1-x} + C$;

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;

14) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C$.

Простейшие приемы интегрирования: непосредственное интегрирование, метод подстановки. Метод интегрирования по частям. Интегрирование рациональных дробей. Рекуррентная формула.

1. ***Метод непосредственного интегрирования.***

Интеграл вычисляется с помощью таблицы основных неопределенных интегралов и правил интегрирования.

2. ***Метод замены переменной.***

Пусть требуется найти неопределенный интеграл $\int f(x)dx$, который нельзя вычислить с помощью таблицы интегралов и правил интегрирования. Обозначим подинтегральную функцию или ее часть за новую переменную $g(x) = t$. Выразим переменную x через t: $x = \varphi(t)$ и найдем dx:

$$dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)dt.$$

Таким образом, $\int f(x)dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt$.

3. ***Метод интегрирования по частям.***

Пусть функции $U(x)$ и $V(x)$ имеют непрерывные производные на некотором промежутке $(a; b)$. Тогда на этом промежутке справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int UdV = UV - \int VdU.$$

Как правило, данным методом пользуются, когда подинтегральная функция представлена произведением функций. Тогда одну функцию обозначают за U, а оставшееся выражение за dV, так чтобы вновь полученный интеграл стал легче.

4. Для ***интегрирования рациональной функции*** $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - полиномы, используется следующая последовательность шагов:

1. Если дробь неправильная (т.е. степень $P(x)$ больше степени $Q(x)$), преобразовать ее в правильную, выделив целое выражение;
2. Разложить знаменатель $Q(x)$ на произведение одночленов и/или несократимых квадратичных выражений;
3. Разложить рациональную дробь на простейшие дроби, используя *метод неопределенных коэффициентов*;
4. Вычислить интегралы от простейших дробей.

Рассмотрим указанные шаги более подробно.

Шаг 1. Преобразование неправильной рациональной дроби

Если дробь неправильная (т.е. степень числителя $P(x)$ больше степени знаменателя $Q(x)$), разделим многочлен $P(x)$ на $Q(x)$. Получим следующее выражение:

$\dfrac{P(x)}{Q(x)} = F(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$, где $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная рациональная дробь.

Шаг 2. Разложение знаменателя на простейшие дроби

Запишем многочлен знаменателя $Q(x)$ в виде

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha} \cdots (x-b)^{\beta} \left(x^2 + px + q\right)^{\mu} \cdots \left(x^2 + rx + s\right)^{\nu},$$

где квадратичные функции являются несократимыми, то есть не имеющими действительных корней.

Шаг 3. Разложение рациональной дроби на сумму простейших дробей.

Запишем рациональную функцию в следующем виде:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \ldots + \frac{B}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} +$$

$$+ \frac{Kx+L}{\left(x^2+px+q\right)^{\mu}} + \frac{K_1x+L_1}{\left(x^2+px+q\right)^{\mu-1}} + \ldots + \frac{K_{\mu-1}x+L_{\mu-1}}{x^2+px+q} + \ldots + \frac{Mx+N}{\left(x^2+rx+s\right)^{\nu}} + \frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+rx+s\right)^{\nu-1}} + \ldots + \frac{M_{\nu-1}x+N_{\nu-1}}{x^2+rx+s}.$$

Общее число неопределенных коэффициентов A_i ,B_i , K_i , L_i , M_i , N_i , ... должно быть равно степени знаменателя $Q(x)$.

Затем умножим обе части полученного уравнения на знаменатель $Q(x)$ и приравняем коэффициенты при слагаемых с одинаковыми степенями x. В результате мы получим систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов A_i ,B_i , K_i , L_i , M_i , N_i , ... Данная система всегда имеет единственное решение. Описанный алгоритм представляет собой *метод неопределенных коэффициентов*.

Шаг 4. Интегрирование простейших рациональных дробей.

Простейшие дроби, полученные при разложении произвольной правильной рациональной дроби, интегрируются с помощью следующих шести формул:

1. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = \ln|x-a|$

2. $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \frac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}}$

У дробей с квадратичным знаменателем сначала необходимо выделить полный квадрат:

$$\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k} = \int \frac{Ax+B'}{\left(t^2+m^2\right)^k},$$

где $t = x + \dfrac{p}{2},\ m^2 = \dfrac{4q-p^2}{4},\ B' = B - \dfrac{Ap}{2}.$ Затем применяются следующие формулы:

3. $\displaystyle\int \frac{tdt}{t^2+m^2} = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+m^2\right)$

4. $\displaystyle\int \frac{tdt}{\left(t^2+m^2\right)^k} = \frac{1}{2(1-k)\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}$

5. $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2+m^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{m}$

Интеграл $\displaystyle\int \frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^k}$ может быть вычислен за k шагов с помощью формулы редукции

6. $\displaystyle\int \frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^k} = \frac{t}{2m^2(k-1)\left(t^2+m^2\right)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2(k-1)}\int \frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}.$

1. Формулы приведения позволяют понизить или повысить степень подынтегральной функции и последовательно свести интеграл к известному. Этот процесс можно рассматривать как задание *рекуррентной функции*, то есть такой функции, вид которой определяется через её значения при меньшем значении некоторого параметра. В нашем случае этим параметром будет показатель степени.

Рассмотрим интеграл вида:

$$\int [f(x)]^n\,dx,$$ где $n \in \mathbb{N}$.

Применим к нему интегрирование по частям, полагая $u=[f(x)]^n$, тогда:

$$\int [f(x)]^n\,dx = x[f(x)]^n - n\int [f(x)]^{n-1} x f'(x)\,dx.$$

Если удастся каким-либо способом представить интеграл $\int [f(x)]^{n-1} x f'(x)\,dx = \varphi(x) + C\int [f(x)]^{n-1}\,dx$, где $\varphi(x)$— некоторая функция (возможно содержащая какой-то интеграл функции от x и $f'(x)$, но не содержащая в явной форме интеграл от $[f(x)]^k,\ k\in\mathbb{N}$), $C=\mathrm{const}$, то мы можем выразить интеграл через интеграл с меньшей степенью:

$$\int [f(x)]^n\,dx = \varphi(x) + C\int [f(x)]^{n-1}\,dx$$

или, если рассматривать интеграл как функцию параметра n:

$$I_n = \varphi(x) + CI_{n-1}.$$

Заменяя n на $n+1$, будем иметь выражение, связывающее последующее значение с предыдущим:

$$I_{n+1} = \varphi(x) + CI_n.$$

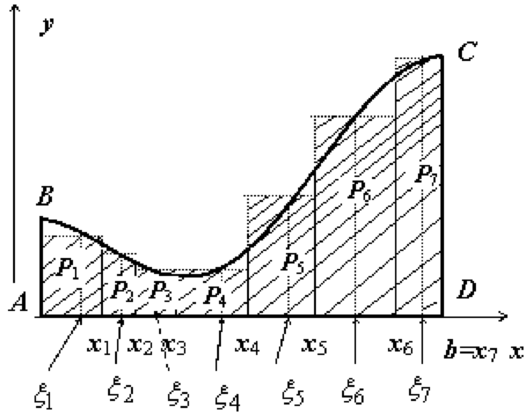
В общем случае:

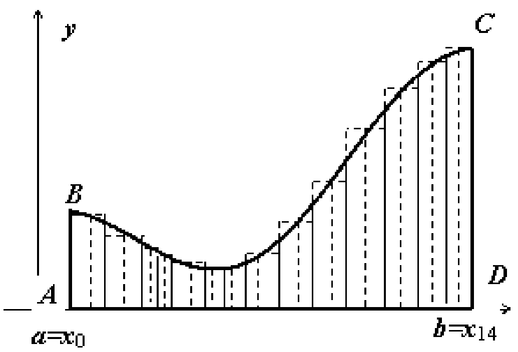
$$I_{n+1} = \varphi(x) + C_1 I_n + C_2 I_{n-1} + \ldots$$

Задача о нахождении площади криволинейной трапеции. Понятие интегральной суммы. Определенный интеграл.

Вычисление площади криволинейной трапеции.

Пусть на отрезке [$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$] ($\boldsymbol{b}$>$\boldsymbol{a}$) задана непрерывная функция $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, принимающая на этом отрезке неотрицательные значения : $f(x) \geq 0$ при $x \in [a,b]$. Требуется определить площадь $\boldsymbol{S}$ криволинейной трапеции $\boldsymbol{ABCD}$, ограниченной снизу отрезком [$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$], слева и справа - прямыми $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, сверху – функцией $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.





Для решения этой задачи разделим произвольным образом основание $\boldsymbol{AD}$ фигуры точками $x_0 = a,\ x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} = a,\ x_n = b$ на $\boldsymbol{n}$ частей $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, …, $[x_{i-1}, x_i]$, …, $[x_{n-1}, x_n]$; символом Δx_i будем обозначать длину $\boldsymbol{i}$-го отрезка: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1};\ i = 1,2,\ldots,n$. На каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i, найдём $f(\xi_i)$, вычислим произведение $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)\Delta x_i$ (это произведение равно площади прямоугольника P_i с основанием $[x_{i-1}, x_i]$ и высотой ξ_i) и просуммируем эти произведения по всем прямоугольникам. Полученную сумму обозначим $S_{\text{ступ}}$:

$$S_{\text{ступ}} = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

$S_{\text{ступ}}$ равно площади ступенчатой фигуры, образованной прямоугольниками P_i, $i = 1,2,\ldots,n$; на левом рисунке эта площадь заштрихована. $S_{\text{ступ}}$ не равна искомой площади S, она только даёт некоторое приближение к S. Для того, чтобы улучшить это приближение, будем увеличивать количество n отрезков таким образом, чтобы максимальная длина этих отрезков $\max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \Delta x_i$ стремилась к нулю (на рисунке ступенчатые фигуры изображены при $n = 7$ (слева) и при $n = 14$ (справа)). При $\max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \Delta x_i \to 0 \ (n \to \infty)$ разница между $S_{\text{ступ}}$ и S будет тоже стремиться к нулю, т.е.

$$S = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ i=1,2,\ldots,n}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Определение определённого интеграла.

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана функция $y = f(x)$. Разобьём отрезок $[a,b]$ произвольным образом на n частей точками $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, …, $[x_{i-1}, x_i]$, …, $[x_{n-1}, x_n]$; длину i-го отрезка обозначим Δx_i: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; $i = 1,2,\ldots,n$; максимальную из длин отрезков обозначим λ: $\lambda = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \Delta x_i$. На каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i и составим сумму

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Сумма σ называется интегральной суммой. Если существует (конечный) предел последовательности интегральных сумм σ при $\lambda \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на части $[x_{i-1}, x_i]$, ни от выбора точек ξ_i, то функция $f(x)$ называется интегрируемой по отрезку $[a,b]$, а этот предел называется определённым интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Функция $f(x)$, как и в случае неопределённого интеграла, называется подынтегральной, числа a и b - соответственно, нижним и верхним пределами интегрирования.

Кратко определение иногда записывают так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ i=1,2,\ldots,n}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

В этом определении предполагается, что $b>a$. Для других случаев примем, тоже по определению:

Если $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$, то $\int\limits_a^b f(x)dx=0$; если $\boldsymbol{b}<\boldsymbol{a}$, то $\int\limits_a^b f(x)dx=-\int\limits_b^a f(x)dx$.

Теорема существования определённого интеграла.

Если функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ непрерывна на отрезке $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$, то она интегрируема по этому отрезку.

Геометрический смысл определённого интеграла.

Если $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})>0$ на отрезке $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ равен площади криволинейной трапеции ***ABCD***, ограниченной снизу отрезком $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$, слева и справа - прямыми $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, сверху – функцией $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

Формула Ньютона-Лейбница. Основные свойства определенного интеграла.

Вычисление определённого интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.

Если $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ непрерывна на отрезке $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, и $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ - некоторая первообразная функции $f(x)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

Формула интегрирования по частям для определённого интеграла. Если $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ - непрерывно дифференцируемые функции, то

$$\int\limits_a^b u\cdot dv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b v\cdot du.$$

Замена переменной в определённом интеграле. Теорема. Пусть функция $x=\varphi(t)$

1. определена, непрерывно дифференцируема и монотонна на отрезке $[\alpha,\beta]$,
2. $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$,
3. функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Свойства определённого интеграла.

1. Линейность. Если функции $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(x)$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{g}(x)$ интегрируемы по отрезку $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$, то по этому отрезку интегрируема их линейная комбинация $\boldsymbol{Af}(x)+\boldsymbol{Bg}(x)$ ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ = const),

$$\int\limits_a^b[Af(x)+Bg(x)]dx=A\int\limits_a^b f(x)dx+B\int\limits_a^b g(x)dx.$$

2. Аддитивность. Если $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ интегрируема по отрезку $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ и точка $\boldsymbol{c}$ принадлежит этому отрезку, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx.$$

3. **Интеграл от единичной функции($\boldsymbol{f}(x)=1$).** Если $\boldsymbol{f}(x)=1$**,** то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b dx = b - a.$$

4. **Теорема об интегрировании неравенств**. Если в любой точке $x \in [a,b]$ выполняется неравенство $f(x) \le g(x)$, и функции $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы по отрезку $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

5. **Теоремы об оценке интеграла**.

5.1. Если на отрезке $[a,b]$ функция удовлетворяет неравенству $m \le f(x) \le M$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

5.2. Если функция $f(x)$ интегрируема по отрезку $[a,b]$, то

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

6. Теорема о среднем. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существует точка $c \in [a,b]$, такая что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Простейшие приложения определенного интеграла.

Выше был описан геометрический смысл определенного интеграла – площадь криволинейной трапеции.

Если же $f(x) \le 0$ на $[a;b]$, то $-f(x) \ge 0$ на $[a;b]$. Поэтому площадь Sсоответствующей криволинейной трапеции находится по формуле

$$S = -\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{или} \quad S = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \qquad (2)$$

Наконец, если линия $y = f(x)$ пересекает ось Ox, то отрезок $[a;b]$ надо разбить на части, в пределах которых $f(x)$ не меняет знака, и к каждой части применить ту из формул (1) или (2), которая ей соответствует.

Вычисление длины дуги и площади поверхности.

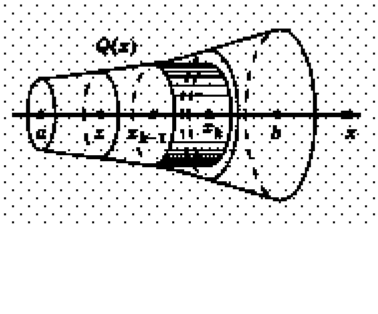
Длиной дуги называется предел, к которому стремится длина ломаной линии, вписанной в эту дугу, когда длина наибольшего звена ломаной стремится к нулю.

Длина*l* дуги AB, заданной уравнением $y = f(x),\ x \in [a;b]$ ($f(x)$ — функция, имеющая на $[a;b]$ непрерывную производную), выражается формулой

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx \qquad (4)$$

а площадь S поверхности вращения этой дуги вокруг осиOx — формулой

Объем VтелаB, заключенного между плоскостями $x = a$ и $x = b$, у которого площадь перпендикулярного оси Ox сечения для каждого x из отрезка $[a;b]$ есть функция $Q(x)$ ($Q(x)$ непрерывна на$[a;b]$), находится по формуле



$$V = \int_a^b Q(x)\,dx \qquad (6)$$

В частности, если тело образовано вращением вокруг осиOx криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $y =$

$f(x)$ ($f(x) \geq 0$), осью Ox и прямыми $x = a, x = b, \ (a < b)$, то $Q(x) = \pi f^2(x)$, а значит, $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$ или $V = \pi \int_a^b y^2\,dx$ (7)

Лекция №7 (2 часа)
Тема: «Дифференциальные уравнения»

1 Вопросы лекции:
1.1 Основные понятия.
1.2 Дифференциальные уравнения первого порядка.
1.3 Дифференциальные уравнения второго порядка.

2. Краткое содержание вопросов

Основные понятия.

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

Решение различных геометрических, физических и инженерных задач часто приводят к уравнениям, которые связывают независимые переменные, характеризующие ту ил иную задачу, с какой – либо функцией этих переменных и производными этой функции различных порядков.

Скорость распада радия пропорциональна количеству радия в данный момент времени (период полураспада равен 1600 лет).

Скорость охлаждения воды пропорциональна разности температур воды в резервуаре и в окружающей его среде.

Частные и общие решения.Задача Коши.

*Дифференциальным уравнением*называется уравнение, связывающее независимую переменную, функцию этой переменной и производные (или дифференциалы) этой функции.

Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется *порядком дифференциального уравнения.*

*Общим интегралом*дифференциального уравнения называется любое уравнение, не содержащее производных и дифференциалов, для которого данное дифференциальное уравнение является следствием.

*Интегральной кривой*называется график $y = \varphi(x)$ решения дифференциального уравнения на плоскости xOy.

*Общим решением*дифференциального уравнения первого порядка называется такая дифференцируемая функция $y = \varphi(x, C)$, которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

Если при каких-либо начальных условиях $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$ существует такое значение $C = C_0$, при котором решением дифференциального уравнения является функция $y = \varphi(x, C_0)$, то функция $y = \varphi(x, C_0)$ называется *частным решением*дифференциального уравнения первого порядка.

*Задачей Коши*называется нахождение частного решения дифференциального уравнения вида $y = \varphi(x, C_0)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$.

Дифференциальные уравнения первого порядка.

Дифференциальные уравнениясразделенными и разделяющимися переменными.

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если его можно записать в виде $y' = \alpha(x)\beta(y)$.

Такое уравнение можно представить также в виде: $X(x)dx + Y(y)dy = 0$;

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C$$

После нахождения соответствующих интегралов получается общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

Если заданы начальные условия, то при их подстановке в общее решение находится постоянная величина С, а, соответственно, и частное решение.

Линейныедифференциальные уравнения первого порядка.

Дифференциальное уравнение называется *линейным* относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

при этом если правая часть *Q(x)* равна нулю, то такое уравнение называется *линейным однороднным*дифференциальным уравнением, если правая часть *Q(x)* не равна нулю, то такое уравнение называется *линейным неоднороднным*дифференциальным уравнением.

Суть метода Бернулли заключается в том, что искомая функция представляется в виде произведения двух функций $y = uv$.

При этом очевидно, что $y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$ - дифференцирование по частям.

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + P(x)uv = Q(x) \quad \text{или} \quad u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) = Q(x)$$

Далее следует условие – выражение в скобках приравнивается к нулю и находится функция $u = u(x)$, затем другая функция.

Однородные дифференциальные уравнения.

Функция $f(x; y)$ называется *однородной n – го измерения* относительно своих аргументов x и y, если для любого значения параметра t (кроме нуля) выполняется тождество: $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$.

Дифференциальное уравнение вида $y' = f(x, y)$ называется **однородным**, если его правая часть $f(x; y)$ есть однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов.

Любое уравнение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ является однородным, если функции *P(x, y)* и *Q(x, y)* – однородные функции одинакового измерения.

Решение любого однородного уравнения основано на приведении этого уравнения к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой вида $t = \frac{y}{x}$, $y' = t'x + t$.

Дифференциальные уравнения второго порядка.

Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.

Дифференциальным уравнением порядка n называется уравнение вида:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

В некоторых случаях это уравнение можно разрешить относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}).$$

Так же как и уравнение первого порядка, уравнения высших порядков имеют бесконечное количество решений.

Решение $y=\varphi(x)$ удовлетворяет начальным условиям $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$, если $\varphi(x_0)=y_0$, $\varphi'(x_0)=y_0'$, ... , $\varphi^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$.

Нахождение решения уравнения $F(x,y,y',...,y^{(n)})=0$, удовлетворяющего начальным условиям $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$, называется *решением задачи Коши*.

Теорема Коши. (Теорема о необходимых и достаточных условиях существования решения задачи Коши): *Если функция (n-1) –й переменных вида $f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ в некоторой области D (n-1)- мерного пространства непрерывна и имеет непрерывные частные производные по $y, y', ..., y^{(n-1)}$, то какова бы не была точка ($x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$) в этой области, существует единственное решение $y=\varphi(x)$ уравнения $y^{(n)}=f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$, определенного в некотором интервале, содержащем точку x_0, удовлетворяющее начальным условиям $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$.*

Дифференциальные уравнения высших порядков, решение которых может быть найдено аналитически, можно разделить на несколько основных типов.

Уравнения вида $y''=f(x)$, $F(x;y';y'')=0$, $F(y;y';y'')=0$ называются *неполными дифференциальными уравнениями*, допускающими понижение порядка.

Понижение порядка дифференциального уравнения – основной метод решения уравнений высших порядков. Этот метод дает возможность сравнительно легко находить решение, однако, он применим далеко не ко всем уравнениям.

Вид ДУ	Особенность	Способ решения
$y''=f(x)$	Не содержащее y и y'	Двукратное интегрирование
$F(x;y';y'')=0$	Не содержащее y	Подстановка $y'=p(x)$, $y''=p'(x)$
$F(y;y';y'')=0$	Не содержащее x	Подстановка $y'=p(y)$, $y''=p'\cdot p$

Структура общего решения линейного однородного дифференциальные уравнения. Характеристическое уравнение.

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются *линейно независимыми* на интервале $(a;b)$, если равенство $\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)=0$, где $\alpha_1,\alpha_2\in R$, выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha_1=\alpha_2=0$.

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ *линейно зависимы* на интервале $(a;b)$ тогда и только тогда, когда они пропорциональны, т.е. для всех $x\in(a;b)$ выполняется равенство $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}=\lambda$, $\lambda - const$.

Линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ)второго порядка называется уравнение вида $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, где $p(x)$ и $q(x)$ – функции, зависящие от аргумента x.

Теорема. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются частными решениями уравнения $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, то решением этого уравнения является также функция $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Фундаментальной системой решений ЛОДУ второго порядка называется совокупность двух линейно независимых решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

Теорема (структура общего решения ЛОДУ второго порядка). Если два частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ ЛОДУ второго порядка образуют фундаментальную систему, то общим решением этого уравнения является совокупность функций $y = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$, где $C_1, C_2 \in R$.

Если коэффициенты p и q постоянны, то уравнение $y'' + py' + qy = 0$ называется *линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.*

Характеристическим уравнением ЛОДУ второго порядка $y'' + py' + qy = 0$ называется квадратное уравнение вида $k^2 + pk + q = 0$.

Вид ДУ	Название	Способ решения
$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$	ЛОДУ с постоянными коэффициентами	С помощью характеристического уравнения $k^2 + p \cdot k + q = 0$: а) $D > 0$: $k_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2} \Rightarrow y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$; б) $D = 0$: $k_1 = k_2 = \frac{-p}{2} \Rightarrow y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x}$; в) $D < 0$: $a = \frac{-p}{2}$; $b = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} \Rightarrow$ $y = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx$;

Подбор частного решения по виду правой части линейного неоднородного дифференциальные уравнения.

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ)второго порядка называется уравнение вида $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$, где $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – функции, зависящие от аргумента x.

Теорема (структура общего решения ЛНДУ второго порядка). Общим решением $y_{о.н}$ ЛНДУ второго порядка $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$ является сумма общего решения $y_{о.о}$ соответствующего ЛОДУ второго порядка $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$ и его произвольного частного решения $y_{ч.н}$: $y_{о.н} = y_{о.о} + y_{ч.н}$.

Вид ДУ	Название	Способ решения
$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$	ЛНДУ с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида	Вид правой части: I. $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x) \Rightarrow y_{ч.н} = x^l \cdot e^{\alpha x} \widehat{P}_n(x)$ II. $f(x) = e^{\alpha x} \cdot \left(P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x\right) \Rightarrow$ $y_{ч.н} = x^l \cdot e^{\alpha x} \left(\widehat{P}_s(x) \cos \beta x + \widehat{Q}_s(x) \sin \beta x\right)$ l – число совпадений $\alpha + \beta i$ с корнями характеристического уравнения; $s = \max\{n; m\}$; $\widehat{P}_0(x) = A$; $\widehat{P}_1(x) = Ax + B$; $\widehat{P}_2(x) = Ax^2 + Bx + C$ – многочлены с неопределенными коэффициентами

Лекция № 8 (2 часа)
Тема: «Теория вероятности и математическая статистика»

1 Вопросы лекции:

1.1 Теория вероятностей.
1.2 Элементы комбинаторики: размещения, перестановки, сочетания.
1.3 События, виды событий: достоверное, невозможное, случайное. Случайные процессы.
1.4 Относительная частота событий и ее свойства. Классическое определение вероятности и ее свойства.
1.5 Сложение и умножение событий.
1.6 Совместные, несовместные, зависимые и независимые события.
1.7 Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условная вероятность.
1.8 Теорема полной вероятности. Формулы Байеса.
1.9 Понятие случайной величины. Примеры случайных величин. Виды случайных величин.
1.10 Дискретная случайная величина, ее закон распределения.
1.11 Числовые характеристики дискретной случайной величины: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение. Свойства математического ожидания и дисперсии ДСВ.
1.12 Непрерывная случайная величина. Интегральная функция распределения и ее свойства.

2. Краткое содержание вопросов

Теория вероятностей.

Теория вероятностей – это математическая наука о количественных закономерностях моделей случайных явлений независимо от их конкретной природы.

Элементы комбинаторики: размещения, перестановки, сочетания.

Комбинаторикой называется раздел математики, изучающий вопрос о том, сколько комбинаций определенного типа можно составить из данных предметов (элементов).

Размещениями из n различных элементов по m элементов ($m \le n$) называются комбинации, составленные из данных n элементов по m элементов и отличающиеся либо самими элементами, либо порядком элементов.

Число различных размещений из n элементов по m элементов (обозначение: A_n^m) определяется по формуле $A_n^m = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots(n-m+1)$.

Перестановками из n различных элементов называются размещения их этих n элементов по n.

Как видно из определений, перестановки можно считать частным случаем размещений при $m = n$.

Следовательно, число всех перестановок из n элементов (обозначение: P_n) находится по формуле $P_n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1 = n!$

Сочетаниями из n различных элементов по m элементов называются комбинации, составленные из данных n элементов по m элементов и отличающиеся хотя бы одним элементом.

Отметим ***разницу*** между сочетаниями и размещениями: в сочетаниях не учитывается порядок элементов, а в размещениях — учитывается. Число сочетаний из n элементов по m элементов (обозначение: C_n^m, иногда $\binom{n}{m}$) находится по формуле $C_n^m = \dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$

Свойства сочетаний. 1. $C_n^1 = n;\ C_n^0 = C_n^n = 1$

2. $C_n^m = C_n^{n-m}\ (m = 0, 1, 2, 3, \ldots, n)$

3. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$ 4. $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$

События, виды событий: достоверное, невозможное, случайное.

Опыт, эксперимент, наблюдение явления называются ***испытаниями***. Примерами испытаний являются: бросание монеты, извлечение шара из урны, бросание игральной кости.

Результат, исход испытания называются ***событием***.

Событиями являются: выпадение герба или цифры, взятие белого или черного шара, появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости. Для обозначения событий используются заглавные буквы латинского алфавита: *A, B, C* и т. д.

Два события называются ***совместными***, если появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же испытании.

Два события называются ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании.

Два события A и $\bar{A}$ называются противоположными, если в данном испытании они несовместны и одно из них обязательно происходит.

Событие называется ***достоверным***, если в данном испытании оно является единственно возможным его исходом, и ***невозможным***, если в данном испытании оно заведомо не может произойти.

Событие A называется ***случайным***, если оно объективно может наступить или не наступить в данном испытании.

Относительная частота событий и ее свойства. Классическое определение вероятности и ее свойства.

Определение. *Относительной частотой (частостью) события называется число*

$$P^*(A) = \frac{M}{N}, \qquad (11.4.1)$$

где M — число появлений события A, N — общее число проведенных испытаний.

Свойства частости события.

1°. *Частость события — величина безразмерная и изменяется на множестве*

$$[0, 1] = \{P^*(A) : 0 \leq P^*(A) \leq 1\}. \qquad (11.4.2)$$

2°. *Частость достоверного события равна* 1.

3°. *Частость невозможного события равна* 0.

4°. *Частость случайного события изменяется на множестве* (0, 1).

Свойства 1° — 4° легко доказываются с помощью определения частоты и классификации событий. Так, например, пусть событие A достоверно. Это означает, что в серии из N испытаний оно наступило N раз

$$P^*(A) = \frac{N}{N} = 1.$$

Вероятностью $P(A)$ события A называется отношение числа элементарных событий, благоприятствующих событию A, к числу всех элементарных событий, т. е. $P(A) = \frac{m}{n}$.

Из классического определения вероятности следует: 1) ***вероятность достоверного события*** равна единице; 2) ***вероятность невозможного события*** равна нулю; 3) ***вероятность любого события А*** удовлетворяет условию $0 \leq P(A) \leq 1$; 4) ***элементарные события являются равновероятными***, т. е. обладают одной и той же вероятностью.

Сложение и умножение событий.

Суммой событий А и В называют событие С, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий А или В.

Произведением событий А и В называют событие С, состоящее в совместном наступлении событий и А и В.

Совместные, несовместные, зависимые и независимые события.

Два события называются ***совместными***, если появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же испытании.

Два события называются ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании.

Два события A и B называются ***независимыми***, если вероятность появления каждого из них не зависит от того, появилось другое событие или нет.

В противном случае события A и B называют зависимыми.

Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условная вероятность.

Теорема. Вероятность суммы двух несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий: $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Точно так же формулируется теорема и для любого конечного числа попарно несовместимых событий.

Следствие. Сумма вероятностей противоположных событий A и $\bar{A}$ равна единице: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Пусть A и B — зависимые события. ***Условной вероятностью*** $P_A(B)$ события B называется вероятность события B, найденная в предположении, что событие A уже наступило.

Теорема 1. Вероятность произведения двух зависимых событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое событие уже наступило: $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$ (1)

Теорема 2. Вероятность произведения двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ (2)

Теорема. Вероятность суммы двух совместимых событий A и B равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ Если события A и B несовместимы, то их произведение $A\,B$ — невозможное событие и, следовательно, $P(A\,B) = 0$, т. е. $P(A+B) = P(A) + P(B)$

Теорема полной вероятности. Формулы Байеса.

Т е о р е м а . Пусть интересующее нас случайное событие может произойти при некоторых условиях H_1, H_2, … ,H_n (гипотезы), которые сами являются образующими полную группу случайными событиями: $\sum_{i=1}^{n} H_i = E$ и $H_i \cdot H_j = U$ – невозможное событие при любых $i \neq j$. Тогда вероятность события А при этих условиях может быть определена соотношением

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\mathbf{H}_i) \cdot P_{H_i}(A).$$

В ряде случаев приходится иметь дело с опытами, в которых случайным образом может присутствовать то или иное условие. Проводится опыт и по полученным результатам возникает необходимость выяснить, какова вероятность того, что в проведенном опыте присутствовало одно из возможных случайных условий.

Т е о р е м а (Б а й е с а) . Пусть $H_1, H_2, \ldots H_n$ – полная группа событий. Тогда

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) P_{H_i}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) P_{H_i}(A)}.$$

Понятие случайной величины. Примеры случайных величин. Виды случайных величин.

Случайной величиной называется переменная, которая может принимать те или иные значения в зависимости от различных обстоятельств.

Случайная величина называется дискретной, если все ее значения изолированы и их можно занумеровать.

Случайная величина называется непрерывной, если ее значения заполняют конечный или бесконечный промежуток.

Случайные величины обозначают заглавными латинскими буквами А, В, С, и т.д., а их значения малыми латинскими буквами x_1, x_2, x_3, и т.д.

Дискретная случайная величина, ее закон распределения.

Закон распределения дискретной случайной величины

Функция $P(x)$, связывающая значения случайной величины с соответствующими им вероятностями, представляет собой закон распределения дискретной, случайной величины. Его удобно задавать в виде таблицы, в верхней строчке которой расположены всевозможные значения случайной величины, а в нижней строчке расположены соответствующие им вероятности: $p_i = P(X = x_i)$.

Значение	x_1	x_2	…	x_n
Вероятность	p_1	p_2	…	p_n

События $X = x_i$ (i = 1,2, … ,n) являются несовместимыми и единственно возможными, т.е. они образуют полную систему событий. Поэтому сумма вероятностей их равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Закон распределения можно представить графически. Для этого на плоскости в прямоугольной системе координат строят точки с координатами (x_i, p_i). А затем соединяют их последовательно отрезками прямой. В результате получают многоугольник распределения вероятностей случайной величины.

Числовые характеристики дискретной случайной величины: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение. Свойства математического ожидания и дисперсии ДСВ.

Математическое ожидание

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Свойства:

1) $M(C) = C$, C - постоянная;

2) $M(CX) = CM(X)$;

3) $M(X_1 + X_2) = M(X_1) + M(X_2)$, где X_1, X_2 - независимые случайные величины;

4) $M(X_1X_2) = M(X_1)M(X_2)$.

Дисперсия

$$D(X) = M\,|\left((X - M(X))^2\right), \quad D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

Свойства:

1) $D(C) = 0$;

2) $D(CX) = C^2D(X)$;

3) $D(X_1 + X_2) = D(X_1) + D(X_2)$, где X_1, X_2 - независимые случайные величины.

Среднее квадратическое отклонение случайной величины X

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Непрерывная случайная величина. Интегральная функция распределения и ее свойства.

Интегральной функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, выражающая для каждого x вероятность того, что случайная величина X примет какое-нибудь значение, меньшее x :

$F(x) = P(X<x)$.

Свойства функции распределения

1. Если $F(x)$ – интегральная функция распределения, то $0 \le F(x) \le 1$ для любого x. Это следует из определения функции распределения, поскольку вероятность любого события заключена в промежутке от 0 до 1.
2. Функция распределения не убывает и $P(x_1 \le X<x_2) = F(x_2) – F(x_1)$.
3. Если F – функция распределения, то $F(x) \to 1$ при $x \to +\infty$ и $F(x) \to 0$ при $x \to -\infty$.
4. Если x – есть точка непрерывности функции распределения случайной величины X, то $P(X = x) = 0$.
5. Если x_1 – есть точка непрерывности для функции распределения F случайной величины X, то

$p(x_1 \le X<x_2) = p(x_1<X<x_2) = F(x_2) – F(x_1)$.

График функции распределения непрерывной случайной величины имеет вид

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет среднего профессионального образования

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
ОП.10 Математика

Специальность 35.02.12 Садово-парковое и ландшафтное строительство

Форма обучения очная

Оренбург, 2023 г.

1 ***Матрицы и определители.***

1.1 Вопросы к занятию

1. Действия с матрицами.
2. Обратная матрица.
3. Миноры и алгебраические дополнения.
4. Определители второго порядка.
5. Определители третьего порядка.
6. Определители высших порядков.

1.2 При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на следующих вопросах: условия, накладываемые на матрицы для операций сложение, вычитание и произведение матриц; условия существования обратной матрицы. При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на следующих вопросах: правило треугольника, применение миноров и алгебраических дополнений к вычислению определителей: разложение определителя по элементам строки или столбца.

Пример 1. Даны 2 матрицы A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ и B=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Найти: A + B, A – B, AxB, $A^т$.

Решение: Согласно определению операций над матрицами:

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+2 & 2+1 & 0+1 \\ 4+0 & 2+1 & 1+2 \\ 1+3 & 1+1 & 3+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-2 & 2-1 & 0-1 \\ 4-0 & 2-1 & 1-2 \\ 1-3 & 1-1 & 3-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A\times B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot2+2\cdot0+0\cdot3 & 1\cdot1+2\cdot1+0\cdot1 & 1\cdot1+2\cdot2+0\cdot3 \\ 4\cdot2+2\cdot0+1\cdot3 & 4\cdot1+2\cdot1+1\cdot1 & 4\cdot1+2\cdot2+1\cdot3 \\ 1\cdot2+1\cdot0+3\cdot3 & 1\cdot1+1\cdot1+3\cdot1 & 1\cdot1+1\cdot2+3\cdot3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 11 & 7 & 11 \\ 11 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

Пример 2. Методом элементарных преобразований найти A^{-1} для матрицы: A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Приписываем к исходной матрице справа единичную матрицу того же порядка:

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. С помощью элементарных преобразований столбцов приведем левую “половину” к единичной, совершая одновременно точно такие преобразования над правой матрицей.

Для этого поменяем местами первый и второй столбцы:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$. К третьему столбцу прибавим первый, а ко второму - первый, умноженный на -2: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Из первого столбца вычтем удвоенный второй, а из третьего - умноженный на 6 второй; $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -2 & 13 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

Прибавим третий столбец к первому и второму: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 18 & 11 & 13 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$. Умножим последний столбец на -1: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 18 & 11 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$. Полученная справа от вертикальной черты квадратная матрица является обратной матрицей к данной матрице А. Итак,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Пример 3. Вычислить определители:

$$|A| = \begin{vmatrix} 9 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 9\cdot 2 - 7\cdot 3 = 18 - 21 = -3,$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8\cdot 2 - 7\cdot 2 = 16 - 14 = 2,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 - 7\cdot 1 = 4 - 7 = -3,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 2 - 7\cdot 0 = -2 - 0 = -2$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 7 & 3 \\ -1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 1\cdot 7\cdot(-4) + 0\cdot 3\cdot(-1) + (-2)\cdot 2\cdot 0 -$$

$$-(-2)\cdot 7\cdot(-1) - 0\cdot 2\cdot(-4) - 1\cdot 3\cdot 0 = -28 + 0 + 0 - 14 - 0 - 0 = -42$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & 7 & 3 \\ -3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 3\cdot 7\cdot(-4) + 0\cdot 3\cdot(-3) + (-2)\cdot 6\cdot 0 -$$

$$-(-2)\cdot 7\cdot(-3) - 0\cdot 6\cdot(-4) - 3\cdot 3\cdot 0 = -84 + 0 + 0 - 42 - 0 - 0 = -126$$

Пример 4. Составить минор M_{23}, полученную из исходной матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{9} & \mathbf{13} \\ \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{10} & \mathbf{14} \\ \mathbf{3} & \mathbf{7} & \mathbf{11} & \mathbf{15} \\ \mathbf{4} & \mathbf{8} & \mathbf{12} & \mathbf{16} \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$M_{23}=\begin{vmatrix}1 & 5 & 9 & 13\\ 2 & 6 & 10 & 14\\ 3 & 7 & 11 & 15\\ 4 & 8 & 12 & 16\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 5 & 13\\ 3 & 7 & 15\\ 4 & 8 & 16\end{vmatrix}$$

Пример 5. Найти алгебраические дополнения всех элементов матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$.

Решение:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5 & 8\\ 6 & 9\end{vmatrix}=-3;\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 8\\ 3 & 9\end{vmatrix}=-6;\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & 6\end{vmatrix}=-3;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}4 & 7\\ 6 & 9\end{vmatrix}=-6;\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 7\\ 3 & 9\end{vmatrix}=-12;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 6\end{vmatrix}=-6;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}4 & 7\\ 5 & 8\end{vmatrix}=-3;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 7\\ 2 & 8\end{vmatrix}=-6;\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\end{vmatrix}=-3.$$

Пример 6. Вычислить $|A|=\begin{vmatrix}-1 & -4 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 5 & 4\\ 3 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2 & 2\end{vmatrix}$

Решение.

$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & -4 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 5 & 4\\ 3 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2 & 2\end{vmatrix}=(-4)\cdot A_{12}+1\cdot A_{22}+1\cdot A_{32}+0\cdot A_{42}=$$

$$=(-4)\cdot A_{12}+A_{22}+A_{32}=(-4)\cdot(-1)^{1-2}\cdot\begin{vmatrix}0 & 5 & 4\\ 3 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 2\end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{2-2}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 0 & -2\\ 3 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 2\end{vmatrix}+(-1)^{3-2}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 0 & -2\\ 0 & 5 & 4\\ -1 & 2 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=4\cdot(-2)+(-16)-(-12)=-12$$

2. Системы линейных уравнений.

2.1 Вопросы к занятию

1. Системы линейных уравнений. Операции над уравнениями систем.
2. Основная и расширенная матрицы.
3. Ранг системы линейных уравнений. Критерий совместности системы.
4. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
5. Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера.

2.2. При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на составлении основной и расширенной матриц для системы и составлении системы по известным основной и расширенной матрицам, на правилах приведения матрицы к треугольному виду, определения ранга системы линейных уравнений, сравнение рангов основной и расширенной матриц.

Пример 1. Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x+2y-5z=-1 \\ 2x-y+3z=13 \\ x+2y-z=9 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

Сначала смотрим на левое верхнее число:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

Почти всегда здесь должна находиться единица. Вообще говоря, устроит и –1 (а иногда и другие числа), но как-то так традиционно сложилось, что туда обычно помещают единицу. Преобразование первое: меняем местами первую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Теперь первая строка у нас останется неизменной до конца решения.

Теперь нужно получить нули вот на этих местах:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Нули получаем как раз с помощью преобразования. Сначала разбираемся со второй строкой (2, –1, 3, 13). Что нужно сделать, чтобы на первой позиции получить ноль? Нужно ко второй строке прибавить первую строку, умноженную на –2. Умножаем первую строку на –2: (–2, –4, 2, –18). И последовательно проводим сложение, ко второй строке прибавляем первую строку, уже умноженную на –2:

$$\begin{array}{cccc} 0 & -5 & 5 & -5 \\ \| & \| & \| & \| \\ -2 & -4 & 2 & -18 \\ + & + & + & + \\ 2 & -1 & 3 & 13 \end{array}$$

Результат записываем во вторую строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Аналогично разбираемся с третьей строкой (3, 2, –5, –1). Чтобы получить на первой позиции ноль, нужно к третьей строке прибавить первую строку, умноженную на –3. Умножаем первую строку на –3: (–3, –6, 3, –27). И к третьей строке прибавляем первую строку, умноженную на –3:

$$\begin{array}{cccc} 0 & -4 & -2 & -28 \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ -3 & -6 & 3 & -27 \\ + & + & + & + \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}$$

Результат записываем в третью строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

На практике эти действия обычно выполняются устно и записываются в один шаг: Не нужно считать всё сразу и одновременно. Порядок вычислений и «вписывания» результатов последователен:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ * & * & * & * \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & * & * & * \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & * & * \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & * \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

Далее нужно получить единицу на следующей «ступеньке»:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

В данном примере это сделать легко, вторую строку делим на –5 (поскольку там все числа делятся на 5 без остатка). Заодно делим третью строку на –2, ведь чем меньше числа, тем проще решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

На заключительном этапе элементарных преобразований нужно получить еще один ноль здесь:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

Для этого к третьей строке прибавляем вторую строку, умноженную на –2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Делим третью строку на 3.

В результате элементарных преобразований получена эквивалентная исходной система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x+2y-z=9 \\ \quad y-z=1 \\ \qquad z=4 \end{cases}$$

Теперь в действие вступает обратный ход метода Гаусса. Уравнения «раскручиваются» снизу вверх.

В третьем уравнении у нас уже готовый результат: $z=4$

Смотрим на второе уравнение: $y-z=1$. Значение «зет» уже известно, таким образом:

$y-4=1$

$y=5$

И, наконец, первое уравнение: $x+2y-z=9$. «Игрек» и «зет» известны:

$x+2\cdot 5-4=9$

$x+6=9$

$x=3$

Ответ: $x=3, y=5, z=4$

Пример 2:

Решить систему по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2+4x_3=21 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=9 \\ 2x_1-x_2-x_3=10 \end{cases}$$

Решение: Решим систему по формулам Крамера.

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=$$

$=3\cdot(-4-2)+2\cdot(-3+4)+4\cdot(-3-8)=-18+2-44=-60\neq 0$, значит, система имеет единственное решение.

$$D_1=\begin{vmatrix} 21 & -2 & 4 \\ 9 & 4 & -2 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix}=21\cdot\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 10 & -1 \end{vmatrix}=$$

$$=21\cdot(-4-2)+2\cdot(-9+20)+4\cdot(-9-40)=-126+22-196=-300$$

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-300}{-60}=5$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 21 & 4 \\ 3 & 9 & -2 \\ 2 & 10 & -1 \end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix}-21\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 10 \end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot(-9+20)-21\cdot(-3+4)+4\cdot(30-18)=33-21+48=60$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{60}{-60}=-1$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 21 \\ 3 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 21 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 21 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (40+9) - 3 \cdot (-20+21) + 2 \cdot (-18-84) = 147 - 3 - 284 = -60$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-60}{-60} = 1$$

Ответ: $x_1 = 5, x_2 = -1, x_3 = 1$.

3 *Пределы и непрерывность.*

3.1 Вопросы к занятию

1. Предел функции.
2. Раскрытие неопределенности «$\frac{0}{0}$».
3. Раскрытие неопределенности «$\frac{\infty}{\infty}$».
4. Раскрытие неопределенности «$\infty - \infty$».
5. Первый замечательный предел.
6. Таблица эквивалентных бесконечно малых.
7. Использование второго замечательного предела для раскрытия неопределенности (1^{∞}).
8. Обобщенный второй замечательный предел.

3.2. При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на связь бесконечно больших и бесконечно малых функций, правила раскрытия основных неопределенностей; на приведении предела к виду первого замечательного придела, использовании таблицы эквивалентных бесконечно малых, приведении предела к виду второго замечательного предела.

Пример 1. Найти $\lim_{x \to -2} \frac{x^2-1}{x^3-2x+1}$.

Решение. Пользуясь свойствами пределов получаем, что

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2-1}{x^3-2x+1} = \frac{\lim_{x \to -2} (x^2-1)}{\lim_{x \to -2} (x^3-2x+1)} = \frac{(-2)^2-1}{(-2)^3-2 \cdot (-2)+1} = \frac{3}{-3} = -1.$$

Пример 2. Вычислить предел $\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^3+2x^2-4}{6x^2+8x+9}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^3+2x^2-4}{6x^2+8x+9} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5x^3}{6x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5x}{6} = \infty.$$

Пример 3. Вычислить предел $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}\right)$.

Решение. Имеем неопределенность вида $[\infty - \infty]$. Умножим и разделим выражение $\left(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}\right)$ на выражение ему сопряженное, то есть на $\left(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}\right)$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-(x-1)}{(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}=0.$$

Пример 4. Вычислить предел $\lim_{x\to1}\frac{x^2-5x+4}{x^2-4x+3}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

$x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$.

$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-5x+4}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-4)}{(x-3)}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}.$$

Пример 5. Найти предел $\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x)}{2x}$

Решение.

Подставляем значение:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x)}{2x}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle$$

Пришли к неопределенности ноль делить на ноль. Смотрим в таблицу неопределенностейдля определения метода решения. Комбинация синуса и его аргумента подсказывает нам о применении первого замечательного предела, но для этого сначала нужно немного преобразовать выражение. Домножим на 3x и числитель и знаменатель дроби.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x)}{2x}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle=\lim_{x\to0}\frac{3x\cdot\sin(3x)}{3x\cdot(2x)}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot\frac{3x}{2x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin(3x)}{3x}\right)$$

В силу следствия из первого замечательного предела $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\right)=1$, поэтому приходим к результату:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin(3x)}{3x}\right)=\frac{3}{2}\cdot1=\frac{3}{2}$$

Пример 6. Вычислить предел $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(2x)}{3x^2}$

Решение.

Подставляем значение:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(2x)}{3x^2}=\frac{1-\cos(2\cdot0)}{3\cdot0^2}=\frac{1-1}{0}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle$$

Пришли к неопределенности ноль делить на ноль. Преобразуем числитель, используя формулы тригонометрии.

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(2x)}{3x^2}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2(x)}{3x^2}$$

Стало видно, что здесь можно применить первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2(x)}{3x^2}=\lim_{x\to0}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{2}{3}\cdot1\cdot1=\frac{2}{3}$$

Пример 7. Вычислить предел $\lim_{x\to0}\frac{\arcsin(4x)}{3x}$

Решение.

Подставляем значение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(4x)}{3x}=\frac{\arcsin(4\cdot 0)}{3\cdot 0}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle$$

Пришли к неопределенности ноль делить на ноль. Сделаем замену.

Пусть

$$\arcsin(4x)=t\Rightarrow$$

$$\sin(\arcsin(4x))=\sin(t)$$

$$4x=\sin(t)\Rightarrow x=\frac{1}{4}\sin(t)$$

$\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin(4x))=\arcsin(4\cdot 0)=0$, следовательно, $t\to 0$ при $x\to 0$.

Тогда предел после замены переменной примет вид:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(4x)}{3x}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle=\lim_{t\to 0}\frac{t}{3\cdot\frac{1}{4}\sin(t)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{t}{\sin t}\right)=\frac{4}{3}\cdot 1=\frac{4}{3}$$

Пример 8. Пример.

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{4}}$

Решение.

Подставляем бесконечность:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{4}}=\left(1-\frac{2}{\infty^2+1}\right)^{\frac{\infty^2+1}{4}}=(1-0)^{\infty}=\langle 1^{\infty}\rangle$$

Пришли к неопределенности единица в степени бесконечность. Смотрим в таблицу неопределенностей для определения метода решения и останавливаемся на применении второго замечательного предела.

Сделаем замену переменных. Пусть

$$t=-\frac{x^2+1}{2}\Rightarrow\frac{x^2+1}{4}=-\frac{t}{2}$$

Если $x\to\infty$, то $t\to-\infty$

Исходный предел после замены примет вид:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{4}}=\langle 1^{\infty}\rangle=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-\frac{1}{2}\cdot t}=\lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

Пример 9. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$

Решение.

Подставляем бесконечность:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^{x}=\left(\frac{1-0}{1+0}\right)^{\infty}=\langle 1^{\infty}\rangle$$

Пришли к неопределенности единица в степени бесконечность, которая указывает на применение второго замечательного предела. Выделим целую часть в основании показательно степенной функции:

$$\frac{x-1}{x+1}=\frac{x+1-2}{x+1}=\frac{x+1}{x+1}-\frac{2}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}$$

Тогда предел запишется в виде:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}=\left\langle 1^{\infty}\right\rangle=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{x}$$

Сделаем замену переменных. Пусть

$$t=-\frac{x+1}{2}\Rightarrow 2t=-x-1\Rightarrow x=-2t-1$$

Если $x\to\infty$, то $t\to\infty$

Исходный предел после замены примет вид:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x-1}\right)^{x}=\left\langle 1^{\infty}\right\rangle=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t-1}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-1}\right)=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t}\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-1}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{-2}\cdot\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{-1}=e^{-2}\cdot(1+0)^{-1}=e^{-2}$$

В преобразованиях были использованы свойства степени и свойства пределов.

4 ***Производная.***

4.1 Вопросы к занятию

1. Приращение аргумента и приращение функции.
2. Вычисление производной по определению и по правилам и формулам.
3. Геометрический, механический и биологический смыслы производной.
4. Производная сложной функции.
5. Вычисление производных высших порядков.

4.2. При подготовке к вопросам акцентировать внимание на применении таблицы производных основных элементарных функций и правил дифференцирования, применение производной к задачам физики и биологии, правило вычисления производной сложной функции.

Пример 1. Найти производную функции $y=3\cos x$.

Решение:

$$y'=(3\cos x)'=3(\cos x)'=3(-\sin x)$$

Пример 2. Найти производную функции $y=6+x+3x^{2}-\sin x-2\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^{2}}-11ctgx$.

Решение:

$$y' = \left(6 + x + 3x^2 - \sin x - 2\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2} - 11ctgx\right)' =$$

$$= (6)' + (x)' + (3x^2)' - (\sin x)' - \left(2x^{\frac{1}{3}}\right)' + \left(x^{-2}\right)' - (11ctgx)' =$$

$$= (6)' + (x)' + 3(x^2)' - (\sin x)' - 2\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + \left(x^{-2}\right)' - 11(ctgx)' =$$

$$= 0 + 1 + 3 \cdot 2x - \cos x - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} + (-2) \cdot x^{-3} - 11 \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) =$$

$$= 1 + 6x - \cos x - \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{x^3} + \frac{11}{\sin^2 x}$$

Пример 3 Найти производную функции $y = x^3 \arcsin x$.
Решение:

$$y' = (x^3 \arcsin x)' = (x^3)' \arcsin x + x^3 (\arcsin x)' =$$

$$= 3x^2 \arcsin x + x^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 3x^2 \arcsin x + \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Пример 4. Найти производную функции $y = \dfrac{2(3x - 4)}{x^2 + 1}$.
Решение:

$$y' = \left(\frac{2(3x - 4)}{x^2 + 1}\right)' = 2 \cdot \left(\frac{3x - 4}{x^2 + 1}\right)' =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{(3x - 4)'(x^2 + 1) - (3x - 4)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2}\right) =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{3 \cdot (x^2 + 1) - (3x - 4) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{3x^2 + 3 - 6x^2 + 8x}{(x^2 + 1)^2}\right) =$$

$$= \frac{2(-3x^2 + 8x + 3)}{(x^2 + 1)^2}$$

5 Приложение производной.

5.1 Вопросы к занятию

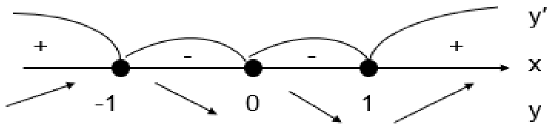
1. Исследовать функцию на монотонность и экстремумы
2. Исследовать функцию на выпуклость и точки перегиба
3. Исследование функций с помощью производной по плану.

5.2. При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на применении признаков монотонности, признаков выпуклости и вогнутости функции к исследованию, вычисление односторонних пределов и применение их к построению графика, нахождении асимптот графика функции.

Пример 1. Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $y = 3x^5 - 5x^3$.

Решение:

1. $y' = 15x^4 - 15x^2$.
2. $y' = 0,\ 15x^4 - 15x^2 = 0,$
   $x^2(x^2-1) = 0,$
   $x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1.$

3. 

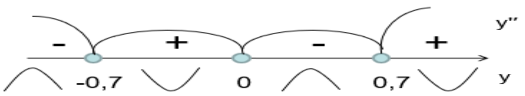
4. $x_{max} = -1,\ y_{max} = y(-1) = 2.$
   $x_{min} = 1,\ y_{min} = y(1) = -2.$

Пример 2. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $y = 3x^5 - 5x^3$.

Решение:

1. $y' = 15x^4 - 15x^2;$
   $y'' = 60x^3 - 30x$
2. $y'' = 0,\ 60x^3 - 30x = 0,$
   $30x\cdot(2x^2 - 1) = 0,$
   $x_1 = -0,7,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,7.$

3.



4. $x_{т.п.} = -0,7,$
   $y_{т.п.}(-0,7) = 1,2.$
   $x_{т.п.} = 0,\quad y_{т.п.}(0) = 0.$
   $x_{т.п.} = 0,7,$
   $y_{т.п.}(0,7) = -1,2.$

Пример 3. Исследовать данную функцию и построить ее график: $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$.

Решение:

1. Функция определена на всей числовой прямой, т.е. $D(y) = (-\infty;\ +\infty)$.

2. Данная функция не является ни четной, ни нечетной (функция общего вида), т.к. $y(-x) \neq \pm\, y(x)$.

3. Вертикальных асимптот нет, так как функция определена при всех действительных значениях x.

4. Поведение функции в бесконечности: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = \pm\infty$, т.е. график данной функции асимптот не имеет.

5. Экстремумы и интервалы монотонности.

Находим первую производную: $y' = (x^3 - 6x^2 + 9x - 3)' = 3x^2 - 12x + 9$

$y' = 0$ при $3x^2 - 12x + 9 = 0.$

Решая данное уравнение, получим:

D = 122 - 4·3·9 = 144 - 108 = 36 = 62;

$x_1 = 1;\quad x_2 = 3,$

т.е. критические точки $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Эти точки делят область определения функции на три промежутка: $(-\infty;\ 1)$, $(1;3)$, $(3;\ +\infty)$.

x	$(-\infty; 1)$	$x_1 = 1$	$(1;3)$	$x_2 = 3$	$(3; +\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y	↗	*max*	↘	*min*	↗

В первом и последнем из них $y'(x) > 0$, в промежутке $x \in (1;3)$ производная $y'(x) < 0$. Следовательно, в промежутках $x \in (-\infty; 1)$, $x \in (3; +\infty)$ функция возрастает, а в промежутке $x \in (1;3)$ – убывает. При переходе через точку x_1 производная меняет знак с плюса на минус, а при переходе через точку x_2 – с минуса на плюс. То есть x_1 и x_2 – точки экстремума.

Находим значение функции в точках экстремума:

$y(1) = 1$; $y(3) = -3$.

Таким образом, (1;1) – точка максимума, (3; –3) – точка минимума.

6. Интервалы выпуклости и точки перегиба.

Находим вторую производную: $y'' = (3x^2 - 12x + 9)' = 6x - 12$; $y'' = 0$ при $6x - 12 = 0$; отсюда получаем $x = 2$.

Точка $x = 2$ делит область определения функции на два промежутка: $x \in (-\infty; 2)$ и $x \in (2; +\infty)$.

x	$(-\infty; 2)$	$x = 2$	$(2; +\infty)$
y''	–	0	+
y	∩	*точка перегиба*	∪

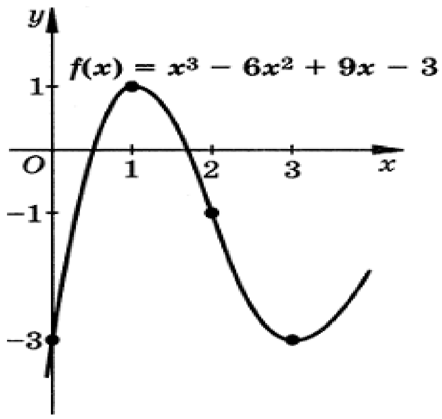
В первом из них $y'' < 0$, т.е. кривая выпукла вверх, а во втором $y'' > 0$, т.е. кривая выпукла вниз. Следовательно, точка $x = 2$ является точкой перегиба. Находим значение функции в этой точке: $y(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 3 = -1$.

Таким образом, (2; -1) – точка перегиба.

7. Находим точку пересечения графика с осью ОУ: при $x = 0$ значение функции $y(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 - 3 = -3$.

Точки пересечения графика функции с осью OX найти затруднительно, так как для этого необходимо решить кубическое уравнение $y(x) = 0$.

По полученным точкам построим приближенный график данной функции.



Пример 4. Исследовать функцию и построить ее график $y = \frac{x}{1+x^2}$.

1. Область определения функции $D(y) = (-\infty; +\infty)$. Точек разрыва нет.

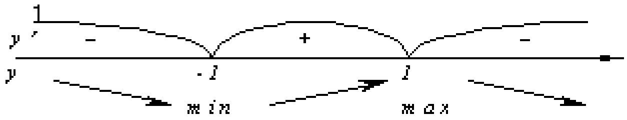
Пересечение с осью Ox: $x = 0, y = 0$.

Функция нечетная, следовательно, можно исследовать ее только на промежутке $[0, +\infty)$.

2. $y' = \frac{1 + x^2 - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1 - x^2}{(1+x^2)^2}$. Критические точки: $x_1 = 1$; $x_2 = -1$.

1

$y_{min} = f(-1)$

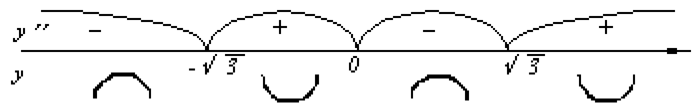


$y_{max} = f(1) =$ 2

$$y'' = \frac{-2x\left(1+x^2\right)^2 - \left(1-x^2\right)2\left(1+x^2\right)2x}{\left(1+x^2\right)^4} = \frac{-2x-2x^3-4x+4x^3}{\left(1+x^2\right)^3} = \frac{2x^3-6x}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

$$\frac{2x^3-6x}{\left(1+x^2\right)^3} = 0. \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -\sqrt{3}, \quad x_3 = \sqrt{3}.$$

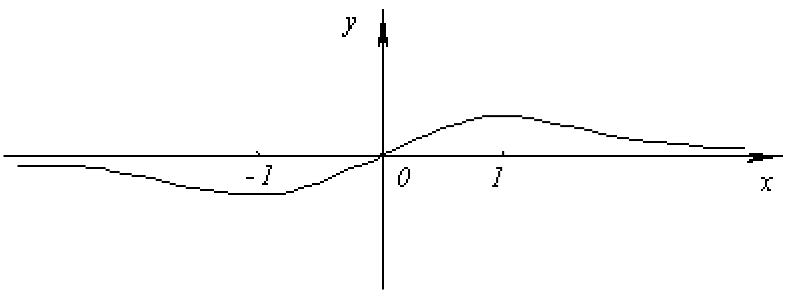
3. $f\left(\sqrt{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}4$



4. а) Вертикальных асимптот нет

б) $x \to +\infty: \quad k = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+x^2} = 0, \quad b = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right) = 0$. Асимптота – $y = 0$.

$x \to -\infty: \quad k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1+x^2} = 0, \quad b = 0. \quad y = 0$



6 Неопределенный и определенный интеграл.

6.1 Вопросы к занятию

1. Вычисление неопределенного интеграла.
2. Метод непосредственного интегрирования.
3. Метод замены переменной в неопределенном интеграле.
4. Метод интегрирования по частям.
5. Интегрирование рациональных дробей.
6. Вычисление определенного интеграла.
7. Вычисление площади криволинейной трапеции.

6.2 При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на то, что интегрирование является обратной операцией к дифференцированию, применении свойств неопределенного интеграла к решению примеров, на формулы замены переменной, и на то, что после отыскания интеграла от новой переменной необходимо вернуться к исходной переменной, сделав обратную подстановку, на то, что после применения формулы интегрирования по частям полученный интеграл может быть решен так же по формуле интегрирования по частям; на проверке отсутствия точек разрыва функции на промежутке интегрирования, применение свойств интеграла для решения примеров, применение формулы Ньютона-Лейбница (очередность подстановки верхнего и нижнего пределов интегрирования), на непрерывность и неотрицательность функции на промежутке интегрирования.

Пример 1. Найти интеграл: $\int \frac{(2\sqrt{x}+1)^3}{x\sqrt{x}}dx$.

Решение:

$$\int \frac{(2\sqrt{x}+1)^3}{x\sqrt{x}}dx = \int \frac{8x^{\frac{3}{2}}+12x+6x^{\frac{1}{2}}+1}{x^{\frac{3}{2}}}dx = \int \left(8+12x^{-\frac{1}{2}}+6\cdot\frac{1}{x}+x^{-\frac{3}{2}}\right)dx =$$

$$= 8\int dx + 12\int x^{-\frac{1}{2}}dx + 6\int \frac{dx}{x} + \int x^{-\frac{3}{2}}dx = 8x + 24\sqrt{x} + 6\,ln|x| - \frac{2}{\sqrt{x}} + C.$$

Пример 2. Найти $\int \frac{dx}{1-2x}$.

Решение. Положим $t = 1-2x$. Тогда $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t$, $dx = d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t\right) = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t\right)'dt = -\frac{1}{2}dt$.

Получаем:

$$\int \frac{dx}{1-2x} = \int \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)dt}{t} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}ln|t| + C = -\frac{1}{2}ln|1-2x| + C.$$

Пример 3. Найти $\int cos(3x+2)dx$.

Решение: $dx = \frac{1}{3}d(3x) = \frac{1}{3}d(3x+2)$.

Тогда:

$$\int \cos(3x+2)\,dx = \int \frac{1}{3}\cos(3x+2)d(3x+2) = \frac{1}{3}\int \cos(3x+2)d(3x+2) = \frac{1}{3}\sin(3x+2) + C$$

Пример 4. Найти $\int xe^{-2x}dx$

Решение. Так как $u = x$, то $du = dx$, $u = x, dv = e^{-2x}dx$, $v = \int dv = \int e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}$.

Тогда:

$$\int xe^{-2x}\,dx = x\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \int\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x} + C = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C$$

Пример 5. Вычислить $\int_0^1 x^2 dx$.

Решение: $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$.

Деловая игра по теме: "Вычисление интегралов"

Цели урока:

1. Обучающая цель: Систематизировать практические и теоретические знания, выработать умение находить неопределенный и определенный интегралы. Развивать культуру устного вычисления определенных интегралов

2. Развивающая цель: Развивать мышление и речь обучающихся. Развивать навыки самостоятельного мышления, интеллектуальные навыки (анализ, синтез, сравнение, сопоставление), внимание, память;

3. Воспитательная цель: Содействовать воспитанию интереса к математике, активности, мобильности, используя при этом здоровьесберегающие технологии ведения урока (урок-игра).

Задачи урока:

- ✓ Развитие познавательного интереса к предмету;
- ✓ воспитание самостоятельности, настойчивости при достижении конечного результата.
- ✓ формирование культуры учебной деятельности и информационной культуры;
- ✓ обеспечить повторение основных понятий.

Форма проведения: урок-игра

Тип урока: урок обобщения и закрепления

Оборудование:

1. Меню для каждого столика, табличка с номером стола.
2. Картинки блюд, с разноуровневыми задания.
3. “Хлеб”- бланки со справочными материалами, помогающими при нахождении интегралов.
4. Презентация
5. Задания выполнимые на доске

Предварительная подготовка к проведению урока:

- разбить группу на группы по 4 человека (распределить по столикам в кафе)

- приготовить разноцветные бланки задач соответственно меню, таблички с номерами столов (в том числе vip стол для гостей урока), бланки со справочным материалом, помогающих при нахождении интегралов (так называемый “Хлеб”), картинки предлагаемых блюд с разноуровневыми заданиями.

План урока

1. Организационный момент.
2. Проверка Д.З. Историческая справка. (Сообщение)
3. Работа устно. Проверка “кредитоспособности”.
4. Закрепление изученного материала. Приём официантами заказов от каждого столика.
   - Нахождение неопределенных интегралов. (Холодные закуски).
   - Вычисление определенных интегралов. (Первые блюда).
   - Вычисление площади криволинейной трапеции. (Вторые блюда)
5. Рефлексия. (Напитки).
6. Подведение итогов урока.

Ход урока

1. Организационный момент

- Сегодняшний урок я хочу начать со слов:

“Чтобы переваривать знания,

их надо поглощать с аппетитом”

А.Франс

- мы сегодня с вами посетим необычное кафе, математическое, с названием «Интеграл». Почему такое название, как вы думаете?

- Да, именно потому, что сейчас изучаем эту тему.

- А как вы думаете, откуда возникло понятие интеграла?

Ответы: Понятие интеграла и интегральное исчисление возникли из потребности вычислять площади (квадратуру) любых фигур и объёмы (кубатуру) произвольных тел.

2. Проверка домашнего задания (сообщение)

Евдокс Книдский : - Я доказал теоремы об объёме пирамиды; теоремы о том, что площади двух кругов относятся, как квадраты их радиусов. При доказательстве применил так называемый метод «исчерпывания».

Архимед:Через две тысячи лет метод «исчерпывания» был преобразован в метод интегрирования, с помощью которого удалось объединить самые разные задачи – вычисление площади, объёма, массы, работы, давления, электрического заряда, светового потока и многие, многие другие.

Что представляет собой «метод исчерпывания»?

Официант: Рассмотрим пример, предположим, что надо вычислить объём лимона, имеющего неправильную форму, и поэтому применить какую-либо известную формулу объёма нельзя. С помощью взвешивания найти объём также трудно, так как плотность лимона в разных частях его разная.

Поступим следующим образом. Разрежем лимон на тонкие дольки. Каждую дольку приближённо можно считать цилиндриком, радиус основания, которого можно измерить. Объём такого цилиндра вычислить легко по готовой формуле. Сложив объёмы маленьких цилиндров, мы получим приближенное значение объёма всего лимона. Приближение будет тем точнее, чем на более тонкие части мы сможем разрезать лимон.

Архимед: Я продолжил развивать идеи своих предшественников, определил длину окружности, площадь круга, объём и поверхность шара, показал, что определение объёмов шара, эллипсоида, гиперболоида и параболоида вращения сводится к определению объёма цилиндра, т.е определил интегралы.

Евдокс Книдский : Что же такое интеграл?

Иоганном Бернулли: Слово «интеграл» произошло от латинского integer — целый, то есть целая, вся — площадь.

Лейбниц: Современное обозначение неопределенного интеграла было введено мной в 1675 году. Я адаптировал интегральный символ , образованный из буквы S — в символ$\int_a^b f(\mathrm{x})d\mathrm{x}$.

- Ну, а теперь перейдём к трапезе.

Сегодня, вы должны отведать в нашем кафе комплексный обед, представленный из холодных закусок –нахождение неопределенных интегралов, первые блюда - вычисление определенных интегралов. Вторые блюда - вычисление площади криволинейной трапеции.За каждые блюда вы получаете баллы, официанты фиксируют все набранные баллы и в конце вам предоставят счет.

Первым делом давайте проверим, а кредитоспособны ли вы? Хватит ли у вас знаний по теме ” Интегралы”, чтобы вкусить всю прелесть этих блюд? Ну что же, приступим.

3. Работа устно. Проверка “кредитоспособности”. (См. приложение)

Задание 1.Продолжите предложение: (Вопросы высвечиваются на доске)

1. Если для любого x из множества X выполняется равенство F´(x) = f(x), то функцию F(x) для функции f(x),называют …. **первообразной;**
2. Любая первообразная для функции f на промежутки I может быть записана виде……. **F(x) + C**
3. Совокупность всех первообразных функций F(x) + Сдля данной функции f(x) называется … **неопределенный интеграл функции f(x)**
4. С помощью формулы Ньютона – Лейбница находят…**определенный интеграл;**
5. Пусть на отрезке **[a;b]** оси**Ox** задана непрерывная функция **f(x)**, не имеющая на нем знака. Фигуру, ограниченную графиком этой функции, отрезком **[a;b]** и прямыми **x = a** и**x=b**,называют……**криволинейной трапецией**

Задание 2: Исправите ошибку. (См. приложение)

1). Исправить ошибки в записи $\int 2dx = 2 + C;$ **(2x + C)**

$\int -5dx = 5x.$ **(– 5x + C)**

$\int 3x^2\,dx = 3x^2$ $(\mathbf{x^3 + C})$

$\int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{x}$ $\left(\frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C\right)$

$\int_0^1 4x^3\,dx = 4\int_0^1 x^3 dx = 4 * \frac{x^4}{4}\Big| = 4 - 0 = 1$ $=4\int_0^1 x^3\,dx = 4\cdot\frac{x^4}{4} = 4-0=1$ **(1)**

$\int_0^{\pi} \cos x dx = \sin\pi - \sin 0 = 0$

4.Закрепление изученного материала

Администраторы-официанты принимают заказы.

- Перед вами на столах лежит меню сегодняшнего дня. Самостоятельно выбирайте блюдо, обратите внимание, что предлагаемые блюда разные по сытности и стоимости. Стоимость каждого блюда обозначена в баллах.

1. Официанты разносят холодные закуски.

Приступайте. Желаю вам приятного аппетита!

Задание 1. Найти неопределенные интегралы:

<u>Салат «Весна»</u> - 3 балла

1) $\int(3x^2+5)\,dx$; 2) $\int(2x-7)dx$; 3) $\int(8x^3-\sin x+8)dx$;
4) $\int(6x^2-\cos x+11)\,dx$;

Ответы: 1) x^3+5x+C; 2) x^2+7x+C; 3) $2x^4+\cos x+8x+C$;
4) $2x^3-\sin x+11x+C$;

<u>Салат «Интегральная рапсодия» -</u> 4 балла

1) 3) $\int(9x^2\ +\sin x-15)dx$; 2) $\int x(1-2x)^3dx$

Ответы: 1) $3x^3-\cos x-15x+C$; 2) Решение

$$\int x(1-2x)^3dx=\int x(1-6x+12x^2-8x^3)dx=\int(x-6x^2+12x^3-8x^4)dx=$$
$$=\frac{x^2}{2}-6\cdot\frac{x^3}{3}+12\cdot\frac{x^4}{4}-8\cdot\frac{x^5}{5}+C=\frac{x^2}{2}-2x^3+3x^4-\frac{8x^5}{5}+C,\ \textit{где}\ C=const$$

3)

<u>Салат «Неопределенная мечта» -</u> 5 баллов

1) $\int\sqrt[3]{x^2}dx$

Решение $$\int\sqrt[3]{x^2}dx=\int x^{\frac{2}{3}}dx=\frac{x^{2/3+1}}{2/3+1}+C=\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+C=\frac{3x\cdot\sqrt[3]{x^2}}{5}+C$$

$$\int\frac{x\sin x+\sqrt[3]{x^2}+1}{x}dx$$

Решение.

Разделим почленно на x

$$\int\frac{x\sin x+\sqrt[3]{x^2}+1}{x}dx=\int\left(\sin x+x^{\frac{2}{3}-1}+\frac{1}{x}\right)dx=$$
$$=\int\left(\sin x+x^{-\frac{1}{3}}+\frac{1}{x}\right)dx$$

Согласно свойствам неопределенного интеграла, интеграл от суммы равен сумме интегралов от каждого из слагаемых:

$$\int \frac{x\sin x+\sqrt[3]{x^2}+1}{x}dx=\int \sin x dx+\int x^{-\frac{1}{3}}dx+\int \frac{dx}{x}$$

Получили сумму табличных интегралов, которые в свою очередь равны

$$\int \frac{x\sin x+\sqrt[3]{x^2}+1}{x}dx=\int \sin x dx+\int x^{-\frac{1}{3}}dx+\int \frac{dx}{x}=$$

$$=-\cos x+\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+\ln x+C=-\cos x+\frac{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}{2}+\ln x+C$$

Ответ. $\int \frac{x\sin x+\sqrt[3]{x^2}+1}{x}dx=-\cos x+\frac{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}{2}+\ln x+C$

Обучающиеся выполняют задания.

- Вы так увлечены предлагаемыми блюдами нашей интегральной кухни, что даже забыли о "хлебе"! Сейчас вам "хлеб" будет очень кстати.

- Проводится смена блюд. И сейчас на ваших столах появятся прекрасные интегральные первые блюда.

2. Официанты разносят первые блюда.

Задание 2. Найти определенные интегралы:

<u>Борщ с интегралом</u> - 3 балла

1)$\int_0^1(2x-7)dx$; 2) $\int_0^1(3x^2+1)dx$; 3)$\int_0^1(5x^4-8)dx$;

Ответы: 1) $(x^2-7x)\big|_0^1=-6$; 2)$(x^3+x)\big|_0^1=2$; 3)$(x^5-8x)\big|_0^1=-7$;

<u>Суп из курицы (интегральное искусство)</u> – 4 балла

1)$\int_1^2(3x^2+5)dx$; 2)$\int_1^2 x^{-2}+7)dx$. 3) $\int_1^2\frac{dx}{(2x+1)^2}$

<u>Ответы:</u> 1)$(x^3+5x)\big|_1^2=12$; 2) $(x^{-1}+7x)\big|_1^2=6\frac{1}{2}$

3) $\int_1^2\frac{dx}{(2x+1)^2}=-\frac{1}{2(2x+1)}\Big|_1^2=-\frac{1}{2\cdot5}-\left(-\frac{1}{2\cdot3}\right)=-\frac{1}{10}+\frac{1}{6}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$;

<u>Окрошка</u> - 5 баллов

1) $\int_0^{\frac{\pi}{12}}(1+\cos 2x)dx$ 2) $\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\left(\sin\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{4}\right)^2dx$

1)Решение

$$\int_0^{\frac{\pi}{12}} (1+\cos 2x)dx = \left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{12}} = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{12} - 0 = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{4};$$

2) Решение

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(\sin\frac{x}{4} + \cos\frac{x}{4}\right)^2 dx = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(1 + 2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\right)dx = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(1 + \sin\frac{x}{2}\right)dx =$$

$$= \left(x - 2\cos\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{2\pi}{3}} = \left(\frac{2\pi}{3} - 2\cos\frac{2\pi}{6}\right) - (0 - 2\cos 0) = \frac{2\pi}{3} - 1 + 2 = \frac{2\pi}{3} + 1;$$

(Официанты проверяют работы, выставляют баллы в оценочный лист)

3.Официанты разносят вторые блюда.

Блинчики с мясом «Равновесие»:

Задание 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

Блинчики с «интегралом»- 3 балла

1. y $= x^2$, y = 0, x =0, x = 1. Фигуру необходимо аккуратно изобразить.

Ответы: $\frac{1}{3}$ **кв.ед.,**

Плов «Интегральная фантазия» - 4 балла

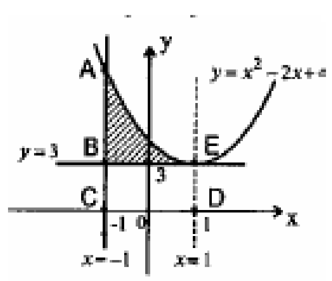
1. $y = x^2 - 2x + 4;\ y = 3;\ x = -1$. Фигуру необходимо аккуратно изобразить.

Ответ: $2\frac{2}{3}$; **кв. ед**

в) $x^2 - 2x + 4 = 3$, $x^2 - 2x + 1 = 0$, $(x-1)^2 = 0$, $x = 1$;

$$S_{ABE} = S_{ACDE} - S_{BCDE} = \int_{-1}^{1} (x^2 - 2x + 4)dx - 2\cdot 3 =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x\right)\Bigg|_{-1}^{1} - 6 = 8\frac{2}{3} - 6 = 2\frac{2}{3};$$



«Интегральный бифштекс»- 5 балла

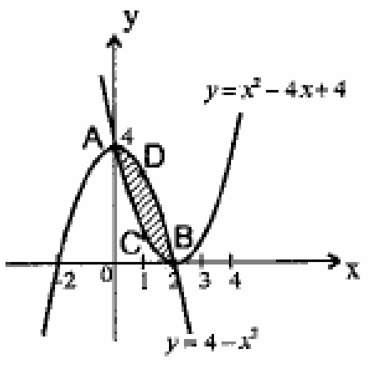
$$y = x^2 - 4x;\ y = 4 - x^2.$$

Ответ: $\frac{8}{3}$. **кв. ед**

а) $x^2 - 4x + 4 = 4 - x^2$;
$2x^2 - 4x = 0$; $x^2 - 2x = 0$; $x = 2$; $x = 0$;

$$S_{ACBD} = S_{AOBD} - S_{AOBC} = \int_0^2 (4 - x^2)dx -$$

$$-\int_0^2 (x^2 - 4x + 4)dx = \int_0^2 (4x - 2x^2)dx = \left(2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_0^2 =$$



$$= 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

(Официанты проверяют работы, выставляют баллы в оценочный лист)

4) Напитки: коктейль «Интеграл» (см. приложение)

(Официанты проверяют работы, выставляют баллы в оценочный лист, суммируют набранные баллы, выводят средний балл)

5) Подведение итогов.

В соответствии с количеством набранных баллов каждый посетитель кафе получит “бонусы” в журнал.

7 *Дифференциальные уравнения*

7.1 Вопросы к занятию

1. Дифференциальные уравнения с разделенными переменными.
2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
4. Уравнения Бернулли
5. ДУ второго порядка, допускающие понижение порядка.
6. ЛОДУ второго порядка.

7.2 При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на основные понятия и методы теории дифференциальных уравнений.

Пример1. Найти общее решение дифференциального уравнения $x^2dx + ydy = 0$

$$\int x^2dx + \int ydy = 0$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} = C$$ - общий интеграл $\Rightarrow y^2 = 2C - \frac{2x^3}{3} \Rightarrow y = \pm\sqrt{2C - \frac{2x^3}{3}}$ - общее решение

Пример2. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy' + y = 0$.

Общее решение дифференциального уравнения ищется с помощью интегрирования левой и правой частей уравнения, которое предварительно преобразовано следующим образом:

$$x\frac{dy}{dx}+y=0$$
$$xdy+ydx=0$$
$$\frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}=0$$

Теперь интегрируем: $$\int\frac{dy}{y}+\int\frac{dx}{x}=C$$
$$\ln y+\ln x=C$$
$$\ln xy=C$$
$$xy=e^C$$
$$xy=C$$

$y=\dfrac{C}{x}$ - это общее решение исходного дифференциального уравнения.

Допустим, заданы некоторые начальные условия: $x_0 = 1$; $y_0 = 2$, тогда имеем
$$2=\frac{C}{1};\quad C=2;$$

При подстановке полученного значения постоянной в общее решение получаем частное решение при заданных начальных условиях (решение задачи Коши).
$$y=\frac{2}{x}$$

<u>Пример3.</u> Решить уравнение $y'+y\cdot\sin x=4xe^{\cos x}$

$$y=\cdot uv,\ y'=u'v+uv'$$
$$u'v+uv'+uv\sin x=4xe^{\cos x}$$
$$u'v+u(v'+v\sin x)=4xe^{\cos x}$$
$$\begin{cases}v'+v\sin x=0\,(1)\\ u'v=4xe^{\cos x}\ (2)\end{cases}$$
(1) $v'+v\sin x=0$
$$\frac{dv}{dx}+v\sin x=0$$
$$\frac{dv}{v}+\sin dx=0$$
$$\int\frac{dv}{v}+\int\sin xdx=0$$
$$\ln|v|-\cos x=0$$
$$\ln|v|=\cos x$$
$$v=e^{\cos x}$$
(2) $u'e^{\cos x}=4xe^{\cos x}$
$$u'=4x$$
$$u=2x^2+C$$
$$y=e^{\cos x}\cdot(2x^2+C)$$

<u>Пример4.</u> Решить уравнения 1) $y''+7y'-8y=0.(\,y=C_1e^x+C_2e^{-8x}.)$

2) $y'' - 8y' + 16y = 0.$ ($y = (C_1 + C_2 x)e^{4x}.$)

3) $y'' - 2y' + 10y = 0.$ ($y = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$)

1)

$y'' + 7y' - 8y = 0$

$k^2 + 7k - 8 = 0$

$k_1 = 1$

$k_2 = -8$

$y_0 = c_1 e^x + c_2 e^{-8x}$

2)

$y'' - 8y' + 16y = 0$

$k^2 - 8k + 16 = 0$

$k_1 = k_2 = 4$

$y_0 = e^{4x}(c_1 + c_2 x)$

3)

$y'' - 2y' + 10y = 0$

$k^2 - 2k + 10 = 0$

$Д = 4 - 4 \cdot 10 = -36$

$k_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = 1 \pm 3i \Rightarrow a = 1, b = 3$

$y_0 = e^x (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$

<u>Пример5.</u> Решить уравнение $y'' - 2y' + y = 3e^x$.

Составим характеристическое уравнение для соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения:

$$k^2 - 2k + 1 = 0; \qquad k_1 = k_2 = 1;$$

Общее решение однородного уравнения: $y_0 = C_1 e^x + C_2 x e^x$.

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения в виде:

$$y_ч = x^r e^{\alpha x} Q(x)$$

$$\alpha = 1; \quad r = 2; \quad Q(x) = C;$$

$$y_ч = Cx^2 e^x.$$

Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов.

$$y_ч' = 2Cxe^x + Cx^2 e^x; \qquad y_ч'' = 2Ce^x + 2Cxe^x + 2Cxe^x + Cx^2 e^x.$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$2Ce^x + 4Cxe^x + Cx^2 e^x - 4Cxe^x - 2Cx^2 e^x + Cx^2 e^x = 3e^x.$$

$$2C = 3; \qquad C = \frac{3}{2}.$$

Частное решение имеет вид: $y_ч = \dfrac{3}{2} x^2 e^x$.

Общее решение линейного неоднородного уравнения: $y_н = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{3}{2} x^2 e^x$.

<u>Пример6.</u> Решить уравнение $y'' + y = -\sin 2x$.

Составим и решим характеристическое уравнение: $k^2 + 1 = 0;\qquad k_{1,2} = \pm i;$

Общее решение однородного уравнения: $y_о = C_1 \cos x + C_2 \sin x;$

Для функции $f(x)$ решение ищем в виде: $y_ч = x^r e^{\alpha x}(Q_l(x)\cos\beta x + S_l(x)\sin\beta x)$.

Анализируя функцию $f(x)$, получаем: $M_0(x) = 0;\quad P_0(x) = -1;\quad \alpha = 0;\quad \beta = 2;\quad r = 0;\quad l = 0$

Таким образом, $y_ч = C\cos 2x + D\sin 2x;$

$$y_ч' = -2C\sin 2x + 2D\cos 2x;$$

$$y_ч'' = -4C\cos 2x - 4D\sin 2x;$$

$$-4C\cos 2x - 4D\sin 2x + C\cos 2x + D\sin 2x = -\sin 2x;$$

$$-3C\cos 2x - 3D\sin 2x = -\sin 2x$$

$$C = 0;\quad D = \frac{1}{3};$$

Итого: $y_ч = \frac{1}{3}\sin 2x;$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$y_н = \frac{1}{3}\sin 2x + C_1\cos x + C_2\sin x;$$

8 *Теория вероятности и математическая статистика*

8.1 Вопросы к занятию

1. Сочетания.
2. Размещения.
3. Перестановки.
4. Случайные процессы.
5. Относительная частота события.
6. Подсчет вероятности события.
7. Дискретная случайная величина (ДСВ). Закон распределения ДСВ.
8. Числовые характеристики ДСВ: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение.

8.2 При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на правильность выбора формулы для решения данной задачи, важность порядка в составленных подмножествах, наличие или отсутствие повторений элементов в каждом из составляемых подмножеств; на определении дискретной случайной величины, и на то, что сумма вероятностей в таблице распределения случайной величины равна 1.

Пример 1. Записать все размещения без повторений объемом 2, которые можно составить из элементов множества { 1, 2, 3 }.

Число таких размещений определяем по формуле (4.1) $A_3^2 = 3\cdot 2 = 6$.

Это будут следующие размещения (1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2).

Пример 2. Записать все перестановки из элементов множества { 1,2,3 }.

Число перестановок определяем как $P_3 = 3! = 2 \cdot 3 = 6$. Это будут следующие перестановки

(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1).

Пример 3. Сколькими способами можно составить список из 25 студентов.

Число всех способов, очевидно, определяется числом всех перестановок из 25 разных элементов и вычисляется как $P_{25} = 25!$

Пример 4. Сколькими способами можно выбрать 5 номеров из 36?

Число таких способов будет равно числу неупорядоченных выборок без повторений объемом 5, которые можно составить из 36 элементов, т.е. это будут сочетания по 5 элементов. Число их будет равно

$$C_{36}^{5} = \frac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 376992.$$

Пример 5 Лотерея состоит из 1000 билетов, среди них 200 выигрышных. Наугад вынимается один билет из 1000. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?

Решение: различных исходов в этом примере 1000 (n=1000). В интересующее нас событие А входят 200 исходов (m=200). Таким образом,

$$p(A) = \frac{200}{1000} = 0{,}2$$

Пример 6. В коробке лежат 200 белых, 100 красных и 50 зеленых шаров. Наудачу вынимается один шар. Чему равны вероятности получить шар белого, красного или зеленого цвета?

Решение: Рассмотрим события: А={вынули белый шар}, В={вынули красный шар}, С={вынули зеленый шар}. n=350, тогда

$$P(A) = \frac{200}{350} = \frac{4}{7},$$

$$P(B) = \frac{100}{350} = \frac{2}{7};$$

$$P(C) = \frac{50}{350} = \frac{1}{7}.$$

Пример 7 К каким классам событий (возможное, невозможное, достоверное) относятся: а) расстояние между двумя произвольными городами меньше, чем 50 тысяч километров; б) наугад выбранное слово русского языка заканчивается буквами «нзо»; в) Вася выиграет в лотерее?

Решение.

Первое из событий достоверное, а второе – невозможное. Третье событие может произойти, а может не произойти – оно является возможным, но не достоверным.

Пример 8. Укажите события, противоположные данным: а) на кубике выпало 1; б) Света получила на экзамене «5»; в) после ночи наступает утро?

Решение

а) На кубике не выпало 1; б) Света не получила на экзамене «5» (в том случае, если Света сдавала экзамен, то можно утверждать, что Света получила какую-то другую оценку); в) после ночи не наступает утро. Заметим, что событие, противоположное событию в) является невозможным (во всяком случае, в нашей обыденной жизни).

Пример 9. Совместны ли события: а) на первом кубике выпало 1, а на втором – 2; б) Юра пошёл в школу, а завтра будет дождь; в) Иванов в настоящее время является президентом страны, и Петров является президентом той же страны.
Решение.
Пара событий из примера а) совместна, так как может произойти одновременно. Точно так же совместна и пара событий б). Пара событий в) несовместна, так как не может произойти одновременно.
Пример 10. Пакеты акций компаний A, B и C могут дать доход владельцу с вероятностью 0,7, 0,8, 0,6 соответственно. Найти вероятность того, что владелец пакетов акций различных фирм получит доход а) только по одному пакету акций; б) хотя бы по одному пакету акций.
а) Пусть событие A состоит в том, чтобы получить доход только по одному пакету акций. Рассмотрим такие события:
A1 - получить прибыль от акций предприятия A,
A2 - получить прибыль от акций предприятия B,
A3 - получить прибыль от акций предприятия C.
Соответствующие вероятности событий равны:

$$p(A_1)=0,7,\ p(A_2)=0,8,\ p(A_3)=0,6.$$

$$p(A)=p(A_1)\cdot p(\overline{A}_2)\cdot p(\overline{A}_3)+p(\overline{A}_1)\cdot p(A_2)\cdot p(\overline{A}_3)+p(\overline{A}_1)\cdot p(\overline{A}_2)\cdot p(A_3)=$$
$$=0,7\cdot 0,2\cdot 0,4+0,3\cdot 0,8\cdot 0,4+0,3\cdot 0,2\cdot 0,6=0,188.$$

б) Рассмотрим событие B, состоящее в том, что владелец не получит прибыли. Тогда, принимая обозначения предыдущего пункта, получим:

$$p(B)=p(\overline{A}_1)\cdot p(\overline{A}_2)\cdot p(\overline{A}_3)=0,3\cdot 0,2\cdot 0,4=0,024.$$

Событие $\overline{B}$, противоположное событию B, состоит в том, чтобы получить прибыль хотя бы по одному пакету акций. Следовательно,

$$p(\overline{B})=1-p(B)=0,976.$$

Пример 11. На заводе, изготовляющем болты, первая машина производит 25%, вторая - 35%, третья - 40% всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5, 4 и 2%. а) Какова вероятность того, что случайно выбранный болт дефектный?
б) Случайно выбранный из продукции болт оказался дефектным. Какова вероятность того, что он был произведен первой, второй, третьей машиной?
Решение. Пусть событие A = {выбрать дефектный болт}.
Выдвигаем три гипотезы:
H_1={болт изготовлен первой машиной}, $P(H_1)$=0,25, $P(A/H_1)$=0,05;
H_2={болт изготовлен второй машиной}, $P(H_2)$=0,35, $P(A/H_2)$=0,04;
H_3={болт изготовлен третьей машиной}, $P(H_3)$=0,4, $P(A/H_3)$=0,02.
а) $P(A)=0,25\cdot 0,05+0,35\cdot 0,04+0,4\cdot 0,02=0,0345;$
б) $P(H_1/A)=\dfrac{0,25\cdot 0,05}{0,0345}=\dfrac{25}{69};$

$$P(H_2/A)=\frac{0,35\cdot 0,04}{0,0345}=\frac{28}{69};$$

$$P(H_3/A)=\frac{0,4\cdot 0,02}{0,0345}=\frac{16}{69}.$$

Пример 12. Дискретная случайная величина X задана таблицей распределения:

X	2	3	5	6
P	0,5	0,2	0,2	0,1

Найти M(X), D(X), σ(X).
Решение. Найдем математическое ожидание: M(X)=2·0,5+3·0,2+5·0,2+6·0,1=3,2.

Дисперсию вычислим по формуле $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$.

$M(X^2) = 2^2 \cdot 0{,}5 + 3^2 \cdot 0{,}2 + 5^2 \cdot 0{,}2 + 6^2 \cdot 0{,}1 = 12{,}4$;

$D(X) = 12{,}4 - (3{,}2)^2 = 2{,}16$;

$\sigma(X) = \sqrt{2{,}16} \approx 1{,}47$

Пример 13. Пусть случайная величина имеет следующий закон распределения

ξ	-1	0	2
P	1/4	1/4	1/2

Вычислить математическое ожидание Mξ, дисперсию Dξ и среднеквадратическое отклонение σ.

Решение. По определению математическое ожидание ξ равно

[illegible].

Далее, [illegible], а потому

[illegible].

Среднеквадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{D\xi} =$ [illegible].

Пример 14. Для пары случайных величин из задачи 3 вычислить $M(\xi\eta)$.

Решение. Пользуемся формулой, указанной выше. А именно, в каждой клетке таблицы выполняем указанную операцию (т.е. умножение значений x_i и y_i) и результат умножаем на вероятность в клетке, и все это суммируем по всем клеткам таблицы. В итоге получаем:

[illegible]

Пример 15. Найти интегральную функцию распределения случайной величины X, заданной рядом распределения:

X	1	2	3
P	0,3	0,2	0,5

и построить ее график.

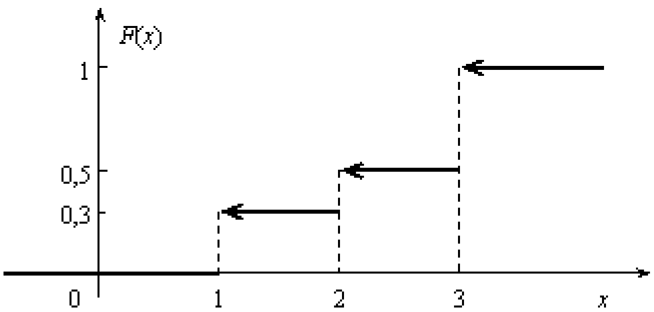
Решение. Пусть $x \le 1$, тогда $F(x) = 0$, так как событие $X < x$ будет невозможным. Если $1 < x \le 2$, то на основании равенства имеем $F(x) = p_1 = 0{,}3$. Если $2 < x \le 3$, то $F(x) = p_1 + p_2 = 0{,}5$.

Если $x > 3$, то $F(x) = p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Окончательно получаем

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 1, \\ 0{,}3, & \text{если } 1 < x \le 2, \\ 0{,}5, & \text{если } 2 < x \le 3, \\ 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

График функции $F(x)$ изображен на рис.



ВВЕДЕНИЕ

Данное учебно-методическое пособие предназначено для выполнения самостоятельных работ по дисциплине «Математика» для студентов специальностей 35.02.12 Садово-парковое и ландшафтное строительство. Пособие соответствует требованиям федерального государственного образовательного стандарта СПО и рабочей программы по дисциплине.

Так как самостоятельная работа является обязательным условием организации учебного процесса, то данное пособие призвано способствовать приобретению студентами необходимых умений и навыков при выполнении индивидуальных работ, развитию логического мышления, умению применять полученные знания в профессиональной деятельности.

Учебно-методическое пособие содержит задания для самостоятельных работ и подробные методические указания по их выполнению с разобранными примерами. Также в пособии присутствуют таблицы и формулы, которые помогут студенту решить задания.

В процессе изучения данной дисциплины студент должен выполнить все предлагаемые задания. Номер варианта в каждом из них дается лично преподавателем и соответствует номеру студента в учебном журнале.

Время, выбранное на самостоятельную работу по данной(ым) теме(ам) обосновано: сложностью материала, большим объемом вычислительных действий и преобразований.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ

Задание 1

Исследуйте данную функцию и постройте ее график.

1) $y = 3x^3 - 15x^2 + 36$
2) $y = x^3 - 9x^2 + 24x$
3) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$
4) $y = 2x^4 - 4x^2 + 3$
5) $y = 6x^2 - 3x^4 + 1$
6) $y = 2x^3 - 3x^2 + 7$
7) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$
8) $y = 3x^4 - 6x^2 + 1$
9) $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$
10) $y = 3x^4 - 8x^3 + 1$
11) $y = x^3 - 12x$
12) $y = x^4 - 2x^2 - 3$
13) $y = x^3 + 3x^2$
14) $y = 2x^4 - x^2$
15) $y = x^3 - 3x^2 - 9x$
16) $y = x^4 - 4x^2 + 3$
17) $y = -x^3 + 6x^2$
18) $y = x^3 - 3x$
19) $y = -x^4 + 2x^2$
20) $y = x^3 - 6x^2 + 5x$
21) $y = x^3 - 12x^2 + 36$
22) $y = 2x^3 - 3x^2 + 15$
23) $y = 6x^2 - 3x^4 + 5$
24) $y = 3x^4 - 8x^3 - 2$
25) $y = x^3 - 3x + 4$

Задание 2

Найдите площадь фигуры, ограниченной указанными линиями. Сделайте чертеж.

1) $y = x - 1$, $y = x^2 - 4x + 3$
2) $y = x - 3$, $y = x^2 + 4x - 3$
3) $y = 1 - x$, $y = 3 - 2x - x^2$
4) $y = x$, $y = 2 + 2x - x^2$
5) $y = x^2 - x + 1$, $y = x + 1$
6) $y = 2 - 2x^2$, $y = x + 1$
7) $y = x^2 + 3x + 1$, $y = -2x - 3$
8) $y = -3x^2 + 21x - 11$, $y = 3x + 4$
9) $y = 2x - 3$, $y = -x^2 + 3x - 1$
10) $y = 3 + 2x - x^2$, $y = x + 1$
11) $y = 2x - 10$, $y = \frac{1}{3}(x - 5)^2$
12) $y = x^2 + 4x + 3$, $y = x + 3$
13) $y = x^2 - 2x - 1$, $y = x - 1$
14) $y = x^2$, $y = x + 2$

15) $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 3x - 1$
16) $y = x^2 - 2x$, $y = x + 1$
17) $y = 9 - x^2$, $y = 0$
18) $y = 4x - x^2$, $y = 0$
19) $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 6$
20) $y = x^2 + 2x + 3$, $y = 6$
21) $y = x^2 - 4x$, $y = 0$
22) $y = x^2 - 3$, OX , $x = -1$, $x = 1$
23) $y = -x^2 + 9$, OX, $x = 0$, $x = 2$
24) $y = x^2 + 1$, OX, $x = 1$, $x = 4$
25) $y = x^2$, OX, $x = -1$, $x = 1$

Задание 3
I. Найти общее решение дифференциального уравнения (легкий уровень):
1) $y'' - 3y' - 4y = 0$
2) $y'' + 5y' + 6y = 0$
3) $y'' - y' - 6y = 0$
4) $y'' + 3y' - 4y = 0$
5) $y'' - 9y' + 20y = 0$
6) $y'' + y' - 20y = 0$
7) $y'' + 4y' + 3y = 0$
8) $y'' - y' - 20y = 0$
9) $y'' + y' - 6y = 0$
10) $y'' - 6y' + 9y = 0$
11) $y'' - 12y' + 36y = 0$
12) $y'' - 14y' + 49y = 0$
13) $y'' - 10y' + 25y = 0$
14) $y'' - 30y' + 225y = 0$
15) $y'' - 2y' + y = 0$
16) $y'' - 16y' + 64y = 0$
17) $y'' - 22y' + 121y = 0$
18) $y'' + 20y' + 100y = 0$
19) $y'' - 18y' + 81y = 0$
20) $y'' + y' - 2y = 0$
21) $y'' - 12y' - 36y = 0$
22) $y'' - 10y' - 25y = 0$
23) $y'' - 2y' - y = 0$
24) $y'' - 16y' - 64y = 0$
25) $y'' - y' - 2y = 0$

II. Найти частное решение дифференциального уравнения при указанных начальных условиях:
1) $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 0$
2) $y'' - 12y' + 35y = 0$, $y(1) = 10$, $y'(1) = 2$
3) $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 0$
4) $y'' + 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
5) $y'' + 25y' = 0$, $y(1) = 20$, $y'(1) = 10$
6) $y'' - y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
7) $y'' - 4y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 8$
8) $y'' - 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

9) $y'' + 9y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(\frac{\pi}{4}) = 1$
10) $y'' - 5y' + 4y = 0,\ y(0) = 5, y'(0) = 8$
11) $y'' + 8y' + 16y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 0$
12) $y'' - 7y' + 6y = 0,\ y(0) = 2, y'(0) = 0$
13) $y'' - 8y' + 15y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = -2$
14) $y'' - 4y' + 4y = 0,\ y(0) = 2, y'(0) = -1$
15) $y'' - 7y' + 10y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = -1$
16) $y'' - 6y' + 9y = 0,\ y(0) = 2, y'(0) = 1$
17) $y'' + 10y' + 25y = 0,\ y(0) = 5, y'(0) = 3$
18) $y'' + 8y' + 7y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = -2$
19) $y'' - 7y' + 12y = 0,\ y(0) = -2, y'(0) = 2$
20) $y'' - 2y' + 5y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$
21) $y'' - 5y' - 4y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 2$
22) $y'' - 7y' - 10y = 0,\ y(0) = 2, y'(0) = -2$
23) $y'' - 2y' - 2y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = -1$
24) $y'' - 6y' - 9y = 0,\ y(0) = -2, y'(0) = 2$
25) $y'' - 4y' - 4y = 0,\ y(0) = -2, y'(0) = 1$

Задание 4

Задан закон распределения случайной величины *X* (в первой строке таблицы даны возможные значения величины *X*, а во второй строке указаны вероятности *p* этих возможных значений). Постройте многоугольник распределения и найдите:
а) математическое ожидание *M(X)*;
б) дисперсию *D(X)*;
в) среднее квадратическое отклонение *σ*;
г) функцию распределения *F(x)* и постройте ее график.

1)

X	23	25	28	29
p	0,3	0,2	0,1	0,4

2)

X	18	22	23	26
p	0,3	0,1	0,2	0,4

3)

X	12	14	16	20
p	0,5	0,1	0,2	0,2

4)

X	78	80	84	85
p	0,3	0,1	0,2	0,4

5)

X	25	27	30	32

p	0,4	0,2	0,1	0,3

6)

X	35	39	42	46
p	0,3	0,4	0,2	0,1

7)

X	31	34	37	40
p	0,5	0,1	0,3	0,1

8)

X	37	41	43	45
p	0,5	0,2	0,1	0,2

9)

X	24	26	28	30
p	0,2	0,1	0,3	0,4

10)

X	45	47	50	52
p	0,4	0,1	0,3	0,2

11)

X	28	32	34	36
p	0,2	0,5	0,2	0,1

12)

X	25	28	30	33
p	0,2	0,3	0,4	0,1

13)

X	21	25	28	31
p	0,4	0,3	0,1	0,2

14)

X	46	49	51	55
p	0,1	0,2	0,3	0,4

15)

X	17	20	23	27
p	0,3	0,2	0,1	0,4

16)

X	16	21	25	27
p	0,3	0,1	0,2	0,4

17)

X	30	32	35	40
p	0,5	0,2	0,1	0,2

18)

X	60	64	67	70
p	0,3	0,4	0,1	0,2

19)

X	56	58	60	64
p	0,4	0,2	0,3	0,1

20)

X	12	16	19	21
p	0,1	0,5	0,1	0,3

21)

X	42	45	48	52
p	0,4	0,1	0,2	0,3

22)

X	53	55	58	61
p	0,4	0,2	0,1	0,3

23)

X	13	15	18	19
p	0,2	0,2	0,1	0,5

24)

X	34	36	40	42
p	0,3	0,1	0,2	0,4

25)

X	65	68	72	74
p	0,1	0,2	0,4	0,3

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ

Задание 1
Исследуйте данную функцию и постройте ее график: $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$.

При исследовании функций и построении их графиков рекомендуется использовать следующую схему:
1) найти область определения функции;
2) исследовать функцию на четность-нечетность;
3) найти вертикальные асимптоты;
4) исследовать поведение функции в бесконечности, найти горизонтальные или наклонные асимптоты;
5) найти экстремумы и интервалы монотонности функции;
6) найти интервалы выпуклости функции и точки перегиба;
7) найти точки пересечения с осями координат и, возможно, некоторые дополнительные точки, уточняющие график.

Решение
1. Функция определена на всей числовой прямой, т.е. $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
2. Данная функция не является ни четной, ни нечетной (функция общего вида), так как $y(-x) \neq \pm y(x)$.
3. Вертикальных асимптот нет, так как функция определена при всех действительных значениях x.
4. Поведение функции в бесконечности:
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^3-6x^2+9x-3)=\pm\infty$, т.е. график данной функции асимптот не имеет.
5. Экстремумы и интервалы монотонности.
Находим первую производную:
$y'=(x^3-6x^2+9x-3)'=3x^2-12x+9$;
$y' = 0$ при $3x^2 - 12x + 9 = 0$.
Решая данное уравнение, получим:
$D = 12^2 - 4\cdot3\cdot9 = 144 - 108 = 36 = 6^2$;
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{12-6}{6}=1$; $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{12+6}{6}=3$,
т.е. критические точки $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Эти точки делят область определения функции на три промежутка: $(-\infty; 1)$, $(1;3)$, $(3; +\infty)$.

x	$(-\infty; 1)$	$x_1 = 1$	$(1;3)$	$x_2 = 3$	$(3; +\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y	↗	max	↘	min	↗

В первом и последнем из них $y'(x) > 0$, в промежутке $x \in (1;3)$ производная $y'(x) < 0$. Следовательно, в промежутках $x \in (-\infty; 1)$, $x \in (3; +\infty)$ функция возрастает, а в промежутке $x \in (1;3)$ – убывает. При переходе через точку x_1 производная меняет знак с *плюса* на *минус*, а при переходе через точку x_2 – с *минуса* на *плюс*. То есть x_1 и x_2 – точки экстремума. Находим значение функции в точках экстремума:

$y(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 3 = 1$; $y(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 3 = -3$.

Таким образом, (1;1) – точка максимума, (3; –3) – точка минимума.

6. Интервалы выпуклости и точки перегиба.

Находим вторую производную:

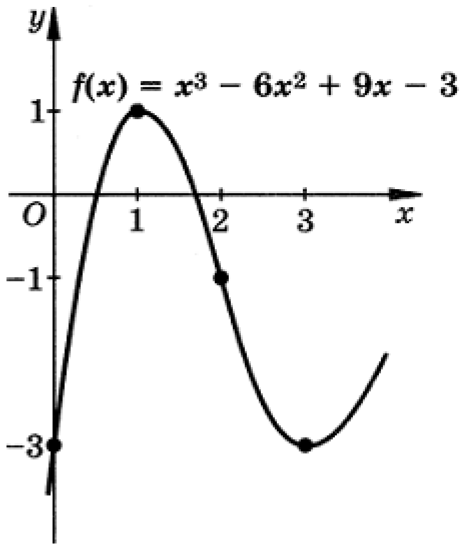
$y'' = (3x^2 - 12x + 9)' = 6x - 12$; $y'' = 0$ при $6x - 12 = 0$; отсюда получаем $x = 2$.

Точка $x = 2$ делит область определения функции на два промежутка: $x \epsilon (-\infty; 2)$ и $x \epsilon (2; +\infty)$.

x	$(-\infty; 2)$	$x = 2$	$(2; +\infty)$
y''	–	0	+
y	$\cap$	*точка перегиба*	$\cup$

В первом из них $y'' < 0$, т.е. кривая выпукла вверх, а во втором $y'' > 0$, т.е. кривая выпукла вниз. Следовательно, точка $x = 2$ является точкой перегиба. Находим значение функции в этой точке:

$y(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 3 = -1$.



Таким образом, (2; -1) – точка перегиба.

7. Находим точку пересечения графика с осью *OY*: при $x = 0$ значение функции

$y(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 - 3 = -3$.

Точки пересечения графика функции с осью *OX* найти затруднительно, так как для этого необходимо решить кубическое уравнение $y(x) = 0$.

По полученным точкам построим приближенный график данной функции.

Задание 2

Найдите площадь фигуры, ограниченной указанными линиями. Сделайте чертеж.

$y = -x; \quad y = 2x - x^2$

Решение

Сделаем чертеж:

$y = -x$ – прямая,

$y = 2x - x^2$ – парабола, ветви направлены вниз, ось симметрии $x = 1$.

Найдем точки пересечения параболы $y = 2x - x^2$ и прямой $y = -x$, решив систему этих уравнений:

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x \end{cases}$$

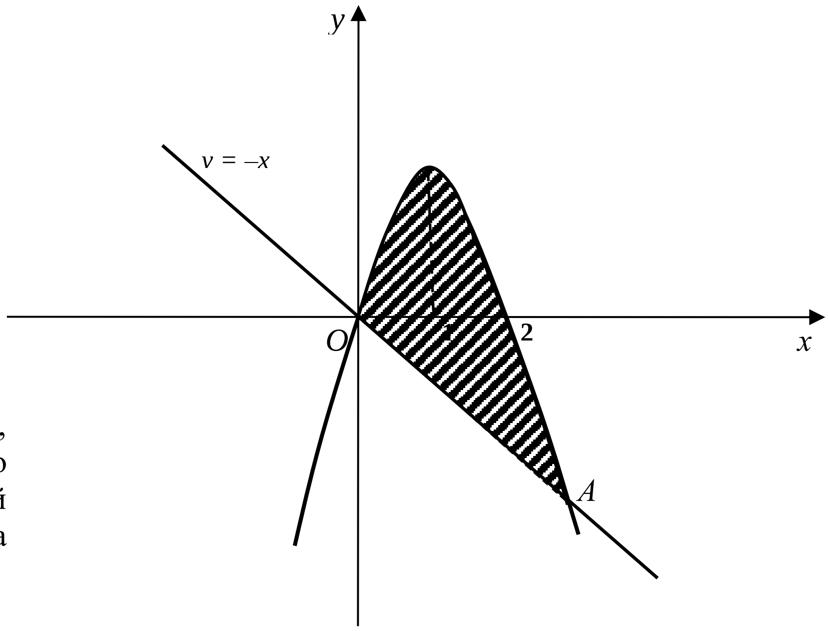
Получим:

$$-x = 2x - x^2$$

$$3x - x^2 = 0$$

$$x(3 - x) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 3$$



Проецируя фигуру на ось абсцисс, видим, что искомая площадь – это площадь фигуры, заключенной между кривыми; при этом на отрезке [0;3]:

$y_2 = 2x - x^2 \geq y_1 = -x$.

Применим формулу для вычисления площадей плоских фигур:

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))\,dx,$$

где пределами интегрирования будут абсциссы точек *O* и *A*:

$$S = \int_0^3 \left((2x - x^2) - (-x)\right) dx$$

С помощью формулы Ньютона – Лейбница вычислим значение площади фигуры:

$$S = \int_0^3 (3x - x^2)\,dx = 3\int_0^3 x\,dx - \int_0^3 x^2\,dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{27}{2} - 9 = \frac{27}{2} - \frac{18}{2} = \frac{9}{2}$$

Ответ: $S = 4{,}5$ (*ед*^{2}).

Задание 3

I. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'' - 3y' + 2y = 0$

Решение.

Решая характеристическое уравнение $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, находим его корни $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$. Тогда общее решение данного уравнения находится по формуле $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ и имеет вид $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$.

II. Найти частное решение дифференциального уравнения при указанных начальных условиях: $y'' - 2y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Решение.

Решая характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, получаем $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Согласно

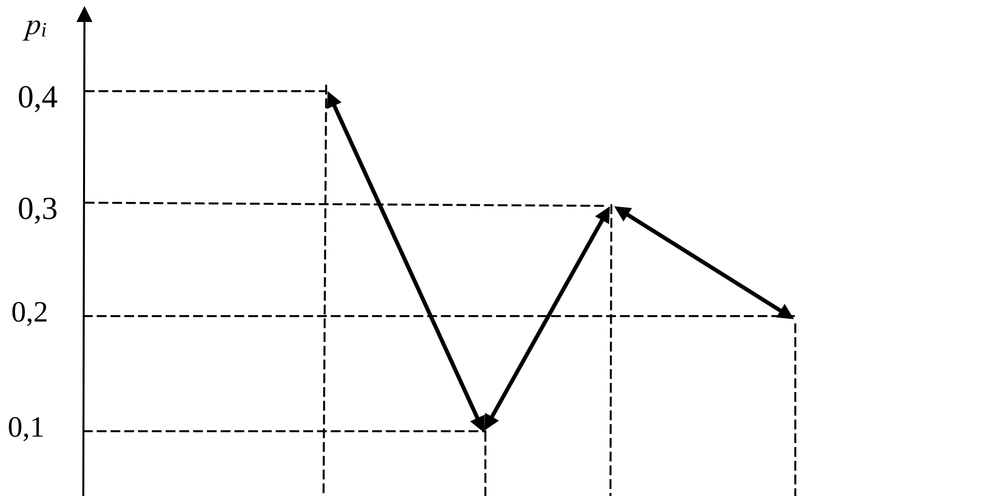
формуле $y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$ теоремы общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y = C_1 e^x + C_2 x e^x = (C_1 + C_2 x)e^x$.
Так как $y(0) = 1$, то $C_1 = 1$ и, поскольку $y' = (C_1 + C_2 x)e^x + C_2 e^x = y + C_2 e^x$ и $y'(0) = 0$, то $C_2 = -1$. Таким образом, окончательно получаем частное решение $y = (1 - x)e^x$.

Задание 4

Задан закон распределения случайной величины *X* (в первой строке таблицы даны возможные значения величины *X*, а во второй строке указаны вероятности *p* этих возможных значений). Постройте многоугольник распределения и найдите:
а) математическое ожидание *M(X)*;
б) дисперсию *D(X)*;
в) среднее квадратическое отклонение σ;
г) функцию распределения *F(x)* и постройте ее график.

X	5	9	12	16
p	0,4	0,1	0,3	0,2

Решение
Построим многоугольник распределения.
Строим прямоугольную систему координат, причем по оси абсцисс будем откладывать возможные значения x_i, а по оси ординат – соответствующие вероятности p_i. Построим точки M_1(5;0,4); M_2(9;0,1); M_3(12;0,3) и M_4(16;0,2). Соединив эти точки отрезками прямых, получим искомый многоугольник распределения.



а) математическое ожидание равно сумме произведений всех возможных значений *X* на их вероятности, т.е.

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Подставляя числовые значения, получим:

[illegible];

б) вычислим дисперсию по формуле $D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$. Для этого нужно найти $M(X^2)$. Запишем закон распределения X^2:

X^2	25	81	144	256
p	0,4	0,1	0,3	0,2

Найдем математическое ожидание $M(X^2)$:

[illegible].

Найдем искомую дисперсию:

$D(X)=$ [illegible];

в) найдем искомое среднее квадратическое отклонение:

$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=$ [illegible];

г) если $x \le 5$, то $F(x)$ = 0. Действительно, значений, меньших числа 5, величина X не принимает.

Следовательно, при $x \le 5$ функция $F(x) = P(X<x)$ = 0.

Если 5 < $x \le 9$, то $F(x)$ = 0,4. Действительно, X может принять значение 5 с вероятностью 0,4.

Если 9 < $x \le 12$, то $F(x)$ = 0,5. Действительно, X может принять значение 5 с вероятностью 0,4 и значение 9 с вероятностью 0,1; следовательно, одно из этих значений, безразлично какое, X может принять (по теореме сложения вероятностей несовместных событий) с вероятностью 0,4 + 0,1 = 0,5.

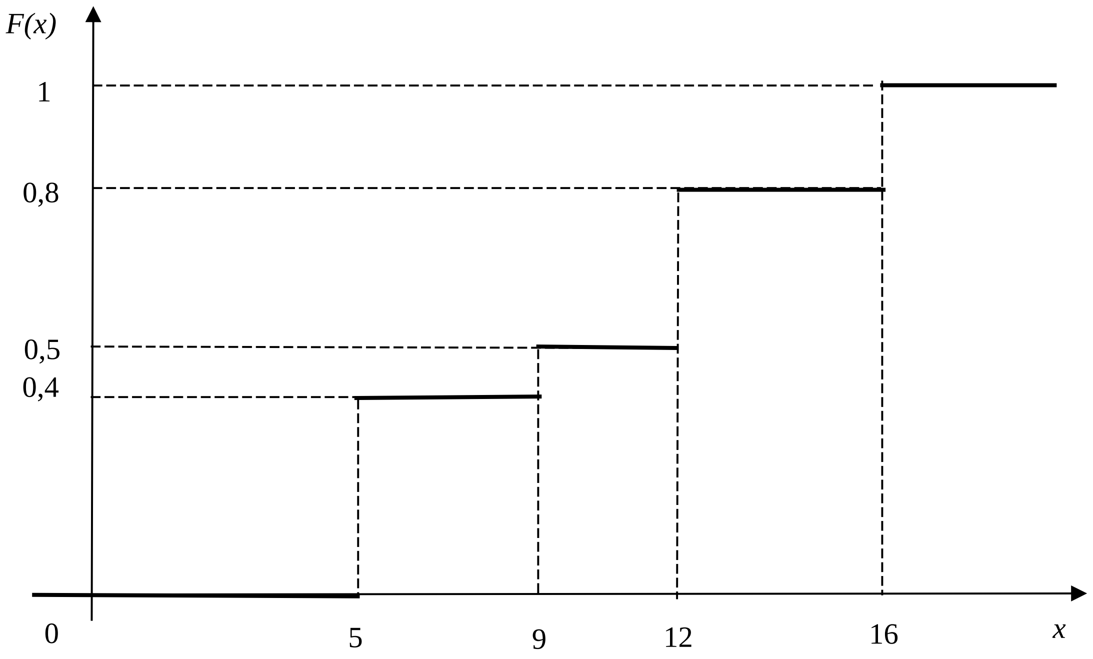
Если 12 < $x \le 16$, то $F(x)$ = 0,8. Действительно, X может принять значение 5 с вероятностью 0,4, значение 9 с вероятностью 0,1 и значение 12 с вероятностью 0,3; следовательно, одно из этих значений, безразлично какое, X может принять (по теореме сложения вероятностей несовместных событий) с вероятностью 0,4 + 0,1 + 0,3 = 0,8.

Если x > 16, то $F(x)$ = 1. Действительно, событие $X \le 16$ достоверно и вероятность его равна единице.

Итак, искомая функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 5 \\ 0{,}4 & \text{при } 5<x\le 9 \\ 0{,}5 & \text{при } 9<x\le 12 \\ 0{,}8 & \text{при } 12<x\le 16 \\ 1 & \text{при } x>16 \end{cases}.$$

Построим график этой функции.


F(x)
1
0,8
0,5
0,4
0
5
9
12
16
x