ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Математика и теоретическая механика»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Высшая математика

Направление подготовки 35.03.01 Лесное дело

Профиль образовательной программы Лесное хозяйство

Форма обучения очная

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1. 1 Лекция № 1-2 (4 часа).

Тема: «Линии на плоскости и в пространстве»

1.1.1 Вопросы лекции:

1. Способы задания прямой.
2. Взаимное расположение двух прямых.
3. Кривые второго порядка на плоскости.
4. Плоскость и прямая в пространстве.

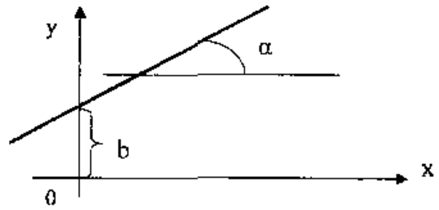
1.1.2 Краткое содержание вопросов:

1. Способы задания прямой.

Это уравнение может быть записано в некоторых специальных видах:

1) Уравнение прямой с угловым коэффициентом

y=kx+b, где $k=tg\alpha$, *b* - отрезок, отсекаемый графиком на ОУ



2) уравнение прямой проходящей через две заданные точки $(x_1; y_1)$ *и* $(x_2; y_2)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

3) Уравнение прямой проходящей через заданную точку в заданном направлении:

точка $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит прямой l, $\vec{a}=(m;n)$ - направляющий вектор прямой, т.е. вектор, лежащий на данной прямой или на параллельной ей прямой

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$$ **каноническое уравнение прямой**

2. Взаимное расположение двух прямых.

Признаком параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов $k_1=k_2$

Признаком перпендикулярности двух прямых является выполнение соотношения: $k_1k_2=-1$ *или* $k_2=\frac{1}{k_1}$.

Пусть уравнения прямых записаны в общем виде.

Теорема. Пусть

$L_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ и $L_2: A_2x+B_2y+C_2=0$

– общие уравнения двух прямых на координатной плоскости Oxy. Тогда

1) если $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$, то прямые L_1 и L_2 совпадают;

2) если $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$, то прямые L_1 и L_2 параллельные;

3) если $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$, то прямые пересекаются.

Заметим, что если прямые пересекаются, то для нахождения координат их точки пересечения достаточно решить систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2 \end{cases}.$$

Следствие. Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ – определитель системы . Если $\Delta \neq 0$, то прямые пересекаются в одной точке и система имеет единственное решение

Если $\Delta = 0$, то прямые или параллельны и тогда система не имеет решений, или прямые совпадают и тогда система имеет бесконечно много решений.

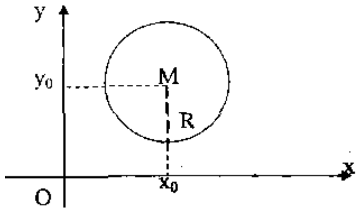
Итак, в декартовых координатах каждая прямая на плоскости определяется уравнением первой степени, и каждое уравнение первой степени определяет прямую на плоскости.

3. Кривые второго порядка на плоскости.

Кривые второго порядка - это линии на плоскости, координаты точек которых связаны уравнениями второй степени относительно x и y в декартовой системе координат. Рассмотрим следующие виды кривых второго порядка: окружность, эллипс, гипербола и парабола.

Окружность.

Окружность - это совокупность точек на плоскости, равноудаленных от одной фиксированной точки (центра). Расстояние от точки, лежащей на окружности, до центра называется радиусом окружности.

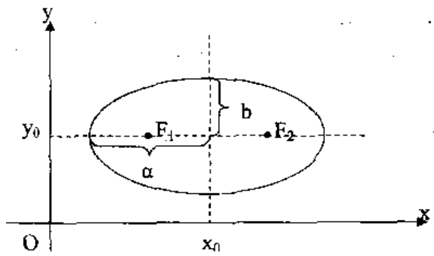


Каноническое уравнение окружности имеет вид: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2,\ \ где\ \ M(x_0, y_0)$-центр окружности, R –радиус.

Эллипс.

Эллипсом называется геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина, большая, чем расстояние между фокусами.

Постоянную сумму расстояний произвольной точки эллипса до фокусов примято обозначать через 2a. Фокусы эллипса обозначают буквами $F_1\ и\ F_2$, расстояние между ними - через 2c. По определению эллипса 2a > 2c или a > c.



Данная фигура обладает двумя осями симметрии и центром симметрии.

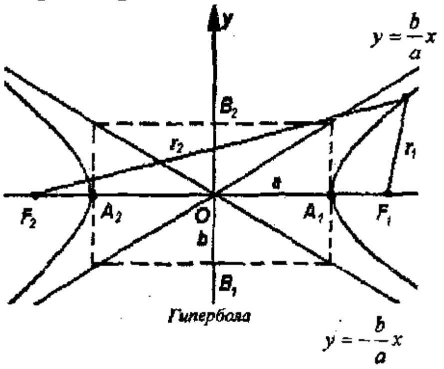
Если фокусы ($F_1\ и\ F_2$) расположенные на прямой, параллельной оси OX, то каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Здесь точка $A(x_0;y_0)$ - центр эллипса, a и b - большая и малая полуоси эллипса. Фокусы эллипса F_1 и F_2 расположены в точках, удаленных на расстоянии $c=\sqrt{a^2-b^2}$ от центра эллипса. Отношение $\frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса и обозначается ε.

Гипербола.

Гиперболой называется геометрическое место точек, для которых разность расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина; указанная разность берется по абсолютному значению и обозначается обычно через 2a. Фокусы гиперболы обозначают буквами F_1 и F_2 расстояние между ними - через 2c. По



определению гиперболы 2a < 2c или a < c.

Данная фигура также обладает двумя осями симметрии и центром. Если фокусы F_1 и F_2 расположены на оси Ox, то ее каноническое уравнение имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Здесь точка $A(x_0;y_0)$ - центр гиперболы, a и b - действительная и мнимая полуось.

Прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы.

Парабола.

Параболой называется геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, называемой директрисой.

Фокус параболы обозначается буквой F, расстояние от фокуса до директрисы - буквой p. Число p называется параметром параболы.

Фигура обладает осью симметрии. Если директриса параболы перпендикулярна Ox (Ox - ось симметрии), то уравнение параболы имеет вид:

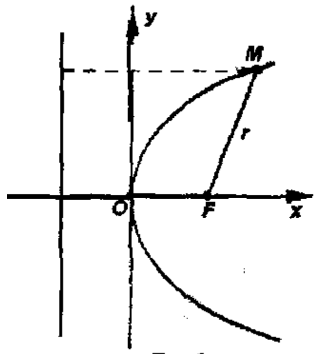
$(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$, где p - расстояние от фокуса до директрисы, точка (x_0; y_0) - вершина параболы.

Уравнение директрисы: $x=x_0-\frac{p}{2}$.

Фокус в точке $F\left(x_0+\frac{p}{2};y_0\right)$.

Если Oy - ось симметрии, то уравнение параболы имеет вид:

$(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$. Уравнение директрисы: $y=y_0-\frac{p}{2}$. Фокус в точке $F\left(x_0;y_0+\frac{p}{2}\right)$.



Парабола

4. Плоскость и прямая в пространстве.

В декартовых координатах каждая плоскость определяется уравнением первой степени относительно x,y,z и каждое такое уравнение определяет плоскость.

Ax+By+Cz+D=0 - общее уравнение плоскости.

Пусть точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ - фиксированная точка плоскости, а точка M(x;y;z) - текущая точка плоскости,

$\overline{M_0M}$ - вектор, лежащий в описываемой плоскости

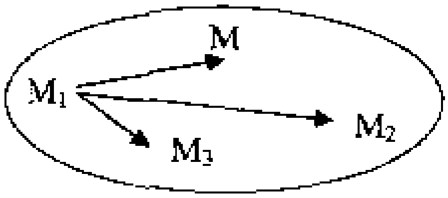
$\vec{n}=(A;B;C)$ - вектор, перпендикулярный данной плоскости.

Следовательно, $\overline{M_0M}\perp\vec{n}$. Рассмотрим скалярное произведение этих векторов:

$A(x-x_0)+b(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ - каноническое уравнение плоскости.

Составим теперь уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1;y_1;z_1), M_2(x_2;y_2;z_2), M_3(x_3;y_3;z\ )$

Пусть точка M(x;y;z) - текущая точка плоскости. Рассмотрим три вектора $\overline{M_1M},\overline{M_1M_2},\overline{M_1M_3}$, которые лежат в одной плоскости и, следовательно, являются <u>компланарными.</u> Воспользуемся условием компланарности векторов:



$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

Полученное равенство определяет <u>уравнение плоскости, проходящей через три точки.</u>

Неполные уравнения плоскости.

Если хотя бы одно из чисел *A, B, C, D* равно нулю, уравнение (8.2) называют неполным.

Рассмотрим возможные виды неполных уравнений:

1) $D = 0$ – плоскость $Ax + By + Cz = 0$ проходит через начало координат.

2) $A = 0$ – $\boldsymbol{n} = \{0,B,C\}\perp Ox$, следовательно, плоскость $By + Cz + D = 0$ параллельна оси *Ox*.

3) $B = 0$ – плоскость $Ax + Cz + D = 0$ параллельна оси *Oy*.

4) $C = 0$ – плоскость $Ax + By + D = 0$ параллельна оси *Oz*.

5) $A = B = 0$ – плоскость $Cz + D = 0$ параллельна координатной плоскости *Oxy* (так как она параллельна осям *Ox* и *Oy*).

6) $A = C = 0$ – плоскость $By + D = 0$ параллельна координатной плоскости *Oxz*.

7) $B = C = 0$ – плоскость $Ax + D = 0$ параллельна координатной плоскости *Oyz*.

8) $A = D = 0$ – плоскость $By + Cz = 0$ проходит через ось *Ox*.

9) $B = D = 0$ – плоскость $Ax + Cz = 0$ проходит через ось Oy.

10) $C = D = 0$ - плоскость $Ax + By = 0$ проходит через ось Oz.

11) $A = B = D = 0$ – уравнение $Cz = 0$ задает координатную плоскость Oxy.

12) $A = C = D = 0$ – получаем $By = 0$ – уравнение координатной плоскости Oxz.

13) $B = C = D = 0$ – плоскость $Ax = 0$ является координатной плоскостью Oyz.

Прямая в пространстве.

Прямая в пространстве может быть задана как линия пересечения двух плоскостей. Так как точка прямой принадлежит каждой из плоскостей, то ее координаты обязаны удовлетворять уравнениям обеих плоскостей, то есть удовлетворять системе из двух уравнений.

Итак, если уравнения двух непараллельных плоскостей -- $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, то прямая, являющаяся их линией пересечения, задается системой уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

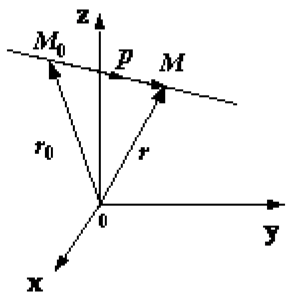
И наоборот, точки, удовлетворяющие такой системе уравнений, образуют прямую, являющуюся линией пересечения плоскостей, чьи уравнения образуют эту систему.

Уравнения называют общими уравнениями прямой в пространстве.

Можно задать прямую в пространстве и другим способом.

Ненулевой вектор, лежащий на прямой (параллельный ей) называется направляющим вектором прямой.

Пусть для прямой γ известны ее направляющий вектор $\mathbf{p} = (k; l; m)$ и точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$, лежащая на этой прямой. Пусть $M(x; y; z)$ -- произвольная (текущая) точка прямой γ. Обозначим через $\mathbf{r}_0$ и **r** радиус-векторы точек M_0 и M соответственно



.Векторное уравнение прямой

Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарен вектору **p** и, следовательно, $\overrightarrow{M_0M} = t\mathbf{p}$, где t -- некоторое число. Из рис. видно, что

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{p}.$$

Это уравнение называется векторным уравнением прямой или уравнением в векторной форме. При каждом значении параметра t мы будем получать новую точку M на прямой γ.

Замечание. Если в качестве параметра t взять время, то точка M будет двигаться по прямой со скоростью $|\mathbf{p}|$, причем в момент времени $t=0$ ее положение совпадает с точкой M_0. Вектор скорости точки совпадает с вектором **p**.

От векторного соотношения перейдем к соотношениям координат. Так как $(x;y;z)$ - - координаты точки M, то $\mathbf{r}=(x;y;z)$, $\mathbf{r}_0=(x_0;y_0;z_0)$, $t\mathbf{p}=(tk;tl;tm)$. Из формулы получим

$$\begin{cases} x=kt+x_0, \\ y=lt+y_0, \\ z=mt+z_0. \end{cases}$$

Полученная система уравнений называется параметрическими уравнениями прямой.

Обратим внимание на то, что по параметрическим уравнениям легко установить направляющий вектор прямой и координаты одной из ее точек. Коэффициенты перед параметром t дают координаты направляющего вектора, а свободные члены в правой части -- координаты точки на прямой.

Так как направляющий вектор прямой определяется с точностью до умножения на число, отличное от нуля, а в качестве точки M_0 можно взять любую точку прямой, то одна и та же прямая может задаваться бесконечным множеством систем параметрических уравнений. Причем разные системы могут быть не похожими друг на друга.

Из уравнений выразим параметр t:

$$t=\frac{x-x_0}{k},\quad t=\frac{y-y_0}{l},\quad t=\frac{z-z_0}{m}.$$

Так как во всех трех соотношениях параметр t имеет одно и то же значение, то

$$\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{m}.$$

Эти уравнения называются каноническими[1] уравнениями прямой.

Замечание. В канонических уравнениях прямой допускается в знаменателе писать 0. Это не означает, что можно выполнить деление на 0. Просто из канонических уравнений мы получаем информацию о том, что направляющий вектор прямой имеет координаты $k,\ l,\ m$, из которых одна нулевая.

1. 2 Лекция № 3 (2 часа).

Тема: « Функция одной переменной»

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Основные понятия.
2. Способы задания функции.
3. Основные свойства функции.
4. Предел функции в точке.
5. Теоремы о пределах.
6. Предел функции на бесконечности.
7. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства.
8. Замечательные пределы.
9. Непрерывность функции в точке. Точки разрыва.

10. Асимптоты графика функции.

1.2.2 Краткое содержание вопросов:

1. Основные понятия.

Величины в математике делятся на постоянные и переменные.

Постоянной называется величина, которая в условиях данного эксперимента сохраняет одно и то же значение.

Примерами таких величин могут быть: $t°$ кипения воды при постоянном давлении; длина R одной и той же окружности.

Некоторые постоянные величины сохраняют свое значение при любых условиях, то есть являются **абсолютно постоянными**. Например, сумма внутренних углов в треугольнике или число секунд в минуте.

Переменной называется величина, которая в условиях данного эксперимента может принимать различные значения.

В практических задачах часто имеют дело с переменными величинами, которые связаны между собой так, что значение одной величины однозначно определяет значение другой. Например, $V_{\text{шара}}=\frac{4}{3}\pi R^3$.

Рассмотрим две переменные величины x и y и пусть y зависит от x.

Зависимость y от x, при которой каждому значению переменной x соответствует единственное, вполне определенное, значение переменной y, называется **функциональной.**

Правило или закон, по которому осуществляется функциональная зависимость y от x, называется **функцией.**

Обозначение*:* $y=f(x)$ (y есть функция от x), где x - независимая переменная или аргумент; y - зависимая от x переменная.

В примере с объемом шара объем есть функция радиуса: $V=f(R)$.

Совокупность всех значений аргумента x, при которых функциональное выражение имеет смысл, называется **областью определения функции.** Обозначение: $D(y)$ или Df

2. Способы задания функции.

Имеется несколько способов задания функций, но наиболее часто используются следующие: 1) аналитический; 2) табличный; 3) графический.

Графиком функции $y=f(x)$ называется линия на плоскости XOY, состоящая из точек, у которых абсцисса есть значение аргумента, а ордината соответствует значению функции.

3. Основные свойства функции.

Монотонность функции.

Возрастающая функция (в некотором промежутке) - функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции.

Убывающая функция (в некотором промежутке) - функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.

Четность (нечетность) функции.

Четная функция - функция, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для любого х из области определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Нечетная функция - функция, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для любого х из области определения справедливо равенство $f(-x) = - f(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Ограниченная и неограниченная функции.

Функция называется *ограниченной*, если существует такое положительное число М, что $|f(x)| \le M$ для всех значений х . Если такого числа не существует, то функция - *неограниченная*.

Периодичность функции.

Функция $f(x)$ - периодическая, если существует такое отличное от нуля число Т, что для любого х из области определения функции имеет место: $f(x+T) = f(x)$. Такое наименьшее число называется периодом функции. Все тригонометрические функции являются периодическими.

Неэлементарные функции.

Функции, полученные из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических действий, называются **элементарными**.

Элементарные функции - класс функций, включающий в себя многочлены, рациональные функции, показательные, степенные, логарифмические и тригонометрические функции, а также функции, получаемые из перечисленных с помощью четырёх арифметический действий (сложение, вычитание, умножение, деление) и суперпозиции (образования сложной функции), применённых конечное число раз, эти действия называются элементарными алгебраическими. Элементарные функции могут быть простыми и сложными. Понятие сложной функции рассмотрим далее.

Действия: логарифмирование, возведение в степень с иррациональным показателем, вычисление синусов, косинусов, тангенсов, котангенсов, секансов, косекансов, арксинусов, арккосинусов, арктангенсов, арккотангенсов, арксекансов, арккосекансов, - называются трансцендентными элементарными действиями.

Если функцию можно задать формулой, содержащей элементарные действия, в состав которых входят алгебраические и трансцендентные действия, то её называют трансцендентной функцией (в переводе - "превосходящей", а именно превосходящей силу алгебраических операций).

Другое определение трансцендентной функции: функция y=f(x) называется трансцендентной, если она не удовлетворяет никакому алгебраическому уравнению вида P(x,y)=0, где P(x,y) - многочлен относительно переменных x и y.

Трансцендентная функция может быть простейшей трансцендентной функцией, график которой известен, например: y = sin x, y = lnX, y = arccos x

Таким образом, к простейшим трансцендентным функциям относятся:

- Показательная функция
- Логарифмическая функция
- Степенная функция с иррациональным показателем
- Тригонометрическая функция
- Обратнотригонометрическая функция

Если функцию можно задать формулой, не содержащей трансцендентные действия, её называют алгебраической функцией.

К неэлементарным функциям относят функции, содержащие неэлементарные действия, к таким действиям относятся действия взятия целой части от числа, дробной части от числа, модуля числа и другие

4 Предел функции в точке.

Рассмотрим функцию *y=f(x)*. Придавая переменной *x* различные значения, получим $x_1; x_2; x_3; \dots x_n \dots$ - последовательность значений аргумента. Ей соответствует: $f(x_1); f(x_2); f(x_3); \dots; f(x_n); \dots$ - последовательность соответствующих значений функции.

Определение. Если из того, что любая последовательность значений аргумента, взятая из области определения функции и ε-окрестности точки a ($x_n \neq a$) сходится к a ($x \to a$) следует, что последовательность соответствующих значений функции сходится к числу A $\left(f(x) \to A\right)$, то число A называется пределом функции $f(x)$ в точке a.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A.$

5 Теоремы о пределах.

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ существуют и конечны, то

Теорема 1. $\lim\limits_{x\to a} C = C$, где C = const.

Теорема 2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Теорема 3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Следствие. $\lim\limits_{x\to a} C\cdot f(x) = C\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$

Теорема 4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

Теорема 5. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)^n] = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n$

Теорема 6. Если $g(x) \le f(x) \le u(x)$ вблизи точки $x = a$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} u(x) = A$, то и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Нарушение ограничений, накладываемых на функции при вычислении их пределов, приводит к **неопределенностям**.

Например, зная лишь, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} q(x) = \infty$ нельзя сказать заранее, чему равен $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$. В таком случае говорят, что имеет место неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

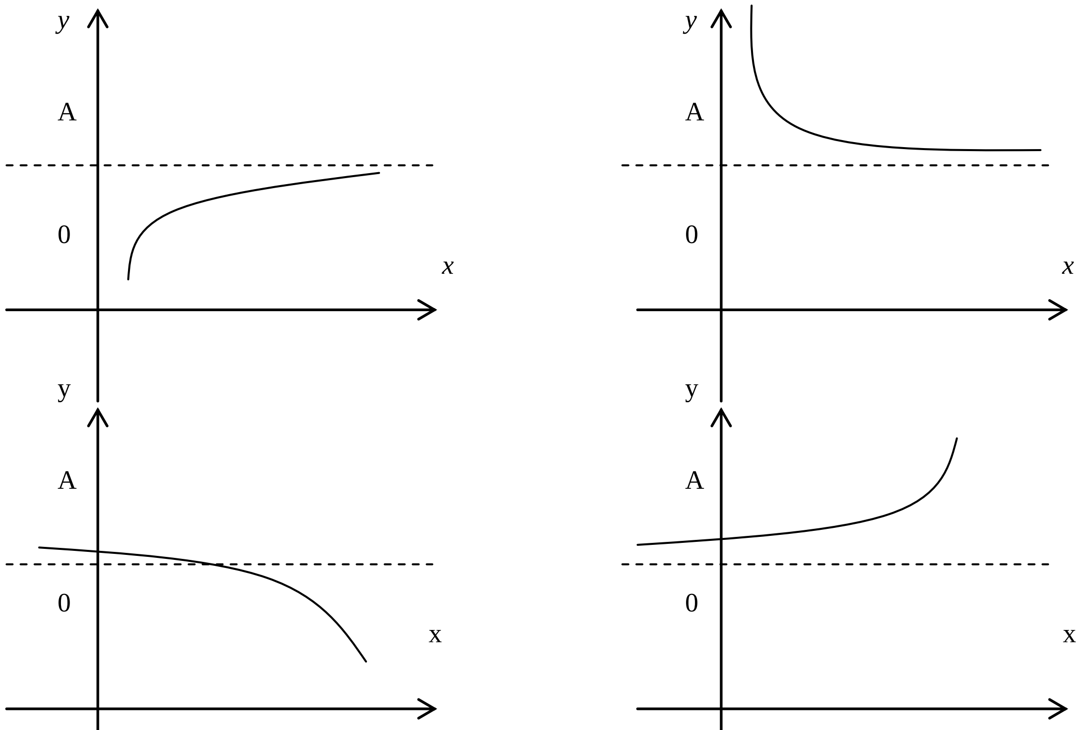
6 Предел функции на бесконечности.

<u>Определение.</u> Число А называется **пределом** функции f(x) при $x\to\infty$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число М>0, что для всех х, $|x|>M$ выполняется неравенство

$$\left|A-f(x)\right|<\varepsilon$$

При этом предполагается, что функция f(x) определена в окрестности бесконечности.Записывают: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A.$

Графически можно представить:



Аналогично можно определить пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ для любого x>M и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ для любого x<M.

7 Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства.

<u>Определение.</u> Функция f(x) называется **бесконечно малой** при $x\to a$, где a может быть числом или одной из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$.

Бесконечно малой функция может быть только если указать к какому числу стремится аргумент х. При различных значениях а функция может быть бесконечно малой или нет.

<u>Пример.</u> Функция f(x) = x^n является бесконечно малой при $x\to 0$ и не является бесконечно малой при $x\to 1$, т.к. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$.

<u>Теорема.</u> *Для того, чтобы функция f(x) при* $x\to a$ *имела предел, равный А, необходимо и достаточно, чтобы вблизи точки х = а выполнялось условие*

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ *– бесконечно малая при* $x\to a$ *(*$\alpha(x)\to 0$ *при* $x\to a$*).*

<u>Свойства бесконечно малых функций:</u>

1) Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при $x\to a$ тоже бесконечно малая функция при $x\to a$.
2) Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при $x\to a$ тоже бесконечно малая функция при $x\to a$.
3) Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки $x=a$ является бесконечно малой функцией при $x\to a$.
4) Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю есть величина бесконечно малая.

<u>Определение.</u> Предел функции f(x) при $x\to a$, где $a-$ число, **равен бесконечности**, если для любого числа $M>0$ существует такое число $\Delta>0$, что неравенство

$$\left|f(x)\right| > M$$

выполняется при всех x, удовлетворяющих условию

$$0 < \left|x - a\right| < \Delta$$

Записывается: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

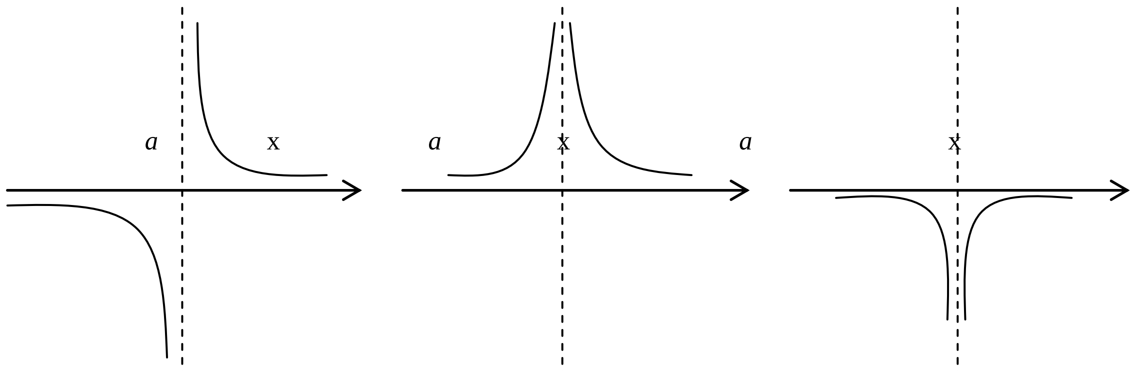
Собственно, если в приведенном выше определении заменить условие $\left|f(x)\right| > M$ на $f(x) > M$, то получим:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty,$$

а если заменить на $f(x) < M$, то:

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

Графически приведенные выше случаи можно проиллюстрировать следующим образом:



<u>Определение.</u> Функция называется **бесконечно большой** при $x \to a$, где а – число или одна из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, где А – число или одна из величин ∞, +∞ или -∞.

Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций осуществляется в соответствии со следующей теоремой.

<u>Теорема.</u> Если $f(x) \to 0$ при $x \to a$ (если $x \to \infty$) и не обращается в ноль, то

$$y = \frac{1}{f(x)} \to \infty$$

Отсюда следует:

а) Произведение постоянной величины на бесконечно малую есть величина бесконечно малая.

б) Произведение переменной величины, стремящейся к пределу, на бесконечно малую есть величина бесконечно малая.

в) Произведение двух бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.

5. Отношение двух бесконечно малых величин не обязательно есть величина бесконечно малая.

Отношение двух бесконечно малых величин может быть величиной конечной, бесконечно малой и даже бесконечно большой величиной.

Об отношении двух бесконечно малых величин иногда говорят, что оно представляет собой "неопределенность" вида $\frac{0}{0}$.

Вычисление предела отношения двух бесконечно малых часто называется также раскрытием "неопределенности" вида $\frac{0}{0}$.

2. Бесконечно большие функции, их свойства.

Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой величиной при $x \to a$, если для каждого положительного сколь угодно большого числа N найдется соответствующее сколь угодно малое положительное число

$y = f(x)$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, будет выполняться неравенство $|f(x)| > N$: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой величиной при $x \to \infty$, если для каждого положительного сколь угодно большого числа N найдется соответствующее сколь угодно большое число K(N) такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > K$, будет выполняться неравенство $|f(x)| > N$: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Сумма бесконечно больших величин есть величина бесконечно большая:

$$\lim_{x \to a} (\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) = \infty.$$

Произведение бесконечно больших величин есть величина бесконечно большая:

$$\lim_{x \to a} (\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) = \infty.$$

Произведение бесконечно большой величины на константу *C*, или на функцию, имеющую конечный предел $\lim\limits_{x \to a} f_3(x) = A$, есть величина бесконечно большая:

$$\lim_{x \to a} C\varphi_1(x) = \infty, \quad \lim_{x \to a} \varphi_1(x) \cdot f_3(x) = \infty.$$

Связь бесконечно малой и бесконечно большой величины

Величина, обратная бесконечно малой величине, есть величина бесконечно большая, и наоборот, величина, обратная бесконечно большой величине, есть величина бесконечно малая.

Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \infty$, тогда $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$ и $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{\varphi(x)} = 0$.

Символически можно записать:

$$\frac{1}{0} = \infty \quad \text{и} \quad \frac{1}{\infty} = 0$$

Сравнение бесконечно малых функций.

Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$. Будем обозначать эти функции α, β и γ соответственно. Эти бесконечно малые функции можно сравнивать по быстроте их убывания, т.е. по быстроте их стремления к нулю.

Например, функция $f(x) = x^{10}$ стремится к нулю быстрее, чем функция $f(x) = x$.

<u>**Определение.**</u> Если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = 0$, то функция α называется **бесконечно малой более высокого порядка**, чем функция β.

<u>**Определение.**</u> Если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = A, \quad A \neq 0, \quad A = const$, то α и β называются **бесконечно малыми одного порядка**.

<u>**Определение.**</u> Если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = 1,$ то функции α и β называются **эквивалентными бесконечно малыми**. Записывают $\alpha \sim \beta$.

<u>Пример.</u> Сравним бесконечно малые при $x \to 0$ функции $f(x) = x^{10}$ и $f(x) = x$.

$$\lim_{x \to a} \frac{x^{10}}{x} = \lim_{x \to a} x^9 = 0$$

т.е. функция $f(x) = x^{10}$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $f(x) = x$.

<u>**Определение.**</u> Бесконечно малая функция α называется **бесконечно малой порядка k** относительно бесконечно малой функции β, если предел $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha}{\beta^k}$ конечен и отличен от нуля.

Однако следует отметить, что не все бесконечно малые функции можно сравнивать между собой. Например, если отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ не имеет предела, то функции несравнимы.

Пример. Если $\alpha = x\sin x, \quad \beta = x$, то при x→0 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x^2} = 1$, т.е. функция α - бесконечно малая порядка 2 относительно функции β.

Пример. Если $\alpha = x\sin\frac{1}{x}, \quad \beta = x$, то при x→0 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}$ не существует, т.е. функция α и β несравнимы.

Свойства эквивалентных бесконечно малых.

1) α ~ α, $\left(\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\alpha} = 1\right)$

2) Если α ~ β и β ~ γ, то α ~ γ, $\left(\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\gamma} = \lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\gamma}\right) = 1\cdot 1 = 1\right)$

3) Если α ~ β, то β ~ α, $\left(\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha} = \lim\limits_{x\to a}\frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}} = 1\right)$

4) Если α ~ α_1 и β ~ β_1 и $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = k$, то и $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1} = k$ или $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1}$.

Следствие: а) если α ~ α_1 и $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = k$, то и $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta}$

б) если β ~ β_1 и $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = k$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta_1}$

Свойство 4 особенно важно на практике, т.к. оно фактически означает, что предел отношения бесконечно малых не меняется при замене их на эквивалентные бесконечно малые. Этот факт дает возможность при нахождении пределов заменять бесконечно малые на эквивалентные им функции, что может сильно упростить вычисление пределов.

8 Замечательные пределы.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ - первый замечательный предел.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ или $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ - второй замечательный предел.

Правила раскрытия неопределенностей

$\left(\frac{0}{0}\right)$	$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$	$(\infty - \infty)$	$(0\cdot\infty)$	(1^∞)
1. Разложение числителя и знаменателя на множители и сокращение дроби 2. Домножение числителя и знаменателя на сопряженное выражение радикалу	Деление на степень с наибольшим показателем	Домножение числителя и знаменателя на сопряженное выражение	Приведение к неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$	Применение второго замечательного предела и свойств степеней

3. Применение таблицы эквивалентных бесконечно малых				

Элементарными приемами раскрытия неопределенностей являются:
1) сокращение на множитель, создающий неопределенность;
2) деление числителя и знаменателя на старшую степень аргумента (для отношения многочленов при $x \to \infty$);
3) применение эквивалентных бесконечно малых и бесконечно больших;
4) применение первого замечательного предела и второго замечательного предела

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Кроме того, при вычислении пределов полезно запомнить следующее:

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=0$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$, т.е. $\left(\dfrac{c}{\infty}\right)=0$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\infty$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$, т.е. $\left(\dfrac{c}{0}\right)=\infty$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=0$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=c$, т.е. $\left(\dfrac{0}{c}\right)=0$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\infty$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=c$, т.е. $\left(\dfrac{\infty}{c}\right)=\infty$

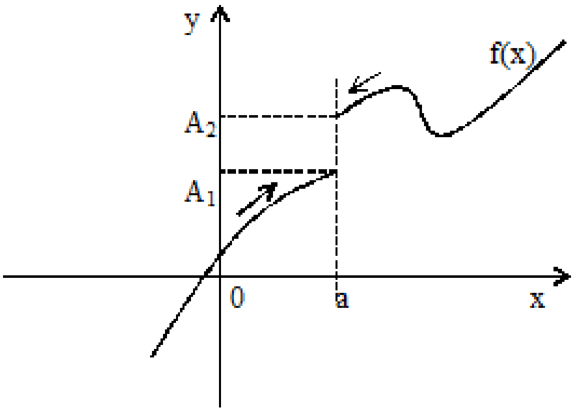
Может также понадобится таблица бесконечно малых в окрестности x_0 функций, эквивалентных данным.

$$\left.\begin{array}{l} tgmx \sim mx \\ \sin mx \sim mx \\ \sqrt[3]{x+1}-1 \sim \dfrac{1}{3}x \\ arctg\, mx \sim mx \\ \sqrt{x+1}-1 \sim \dfrac{x}{2} \\ 1-\cos^2 x \sim \dfrac{3}{2}\sin^2 x \\ \arcsin mx \sim mx \\ 1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2} \end{array}\right\} при \quad x \to 0$$

9 Непрерывность функции в точке. Точки разрыва.
Односторонние пределы.

Определение. Если $f(x)\to A_1$ при $x\to a$ только при $x<a$, то $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=A_1$ - называется **пределом** функции $f(x)$ в точке $x=a$ **слева**, а если $f(x)\to A_2$ при $x\to a$ только при $x>a$, то $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A_2$ называется **пределом** функции $f(x)$ в точке $x=a$ **справа**.

Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция $f(x)$ не определена в самой точке $x=a$, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.



Пределы A_1 и A_2 называются также **односторонними пределами** функции $f(x)$ в точке $x = a$.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Можно дать еще одно определение непрерывности функции, опираясь на понятия приращения аргумента и функции.

Определение. Пусть переменная величина x в некоторый начальный момент равна x_0, в другой (конечный) момент равна x_1; тогда разность $\Delta x = x_1 - x_0$ называется приращением переменной x.

Определение. Пусть исходное (начальное) значение функции равно $y_0 = f(x_0)$, а новое (конечное) значение функции равно $y_1 = f(x_1) = f(x_0 + \Delta x)$; тогда разность $\Delta y = y_1 - y_0 = f(x + \Delta x) - f(x_0)$ называется приращением функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Геометрический смысл Δx и Δy: каждому изменению величины x, соответствует изменение величины y, т.е. Δy зависит от Δx.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции; т.е. существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 $\Leftrightarrow$ предел функции при $x \to x_0$ равен значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Теорема. Если $y = f(x)$ - элементарная функция, определённая в некоторой окрестности точки x_0; то она непрерывна в точке x_0.

Определение. Функция $y = f(x)$, непрерывная в каждой точке заданного интервала, называется непрерывной на всём интервале.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она имеет односторонние пределы, равные между собой и равные в свою очередь значению функции в точке x_0.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной, если она непрерывна на своей области определения.

Заметим: все элементарные функции непрерывны на своих областях определения.

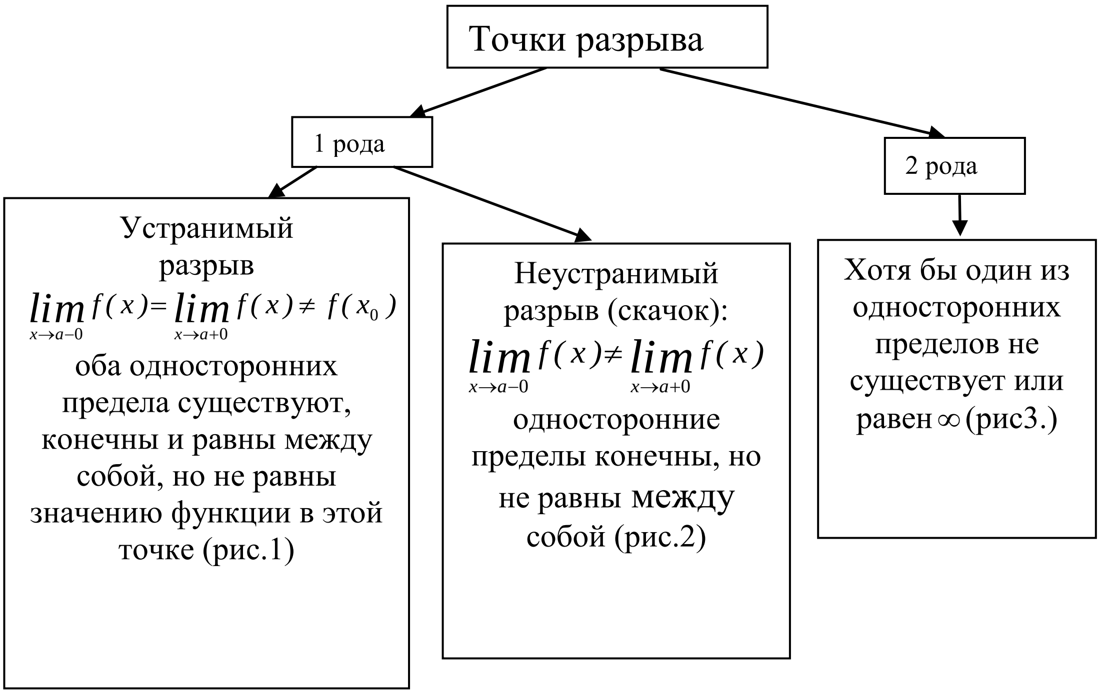
Определение 1. Точка, в которой не выполняется условие непрерывности, называется точкой разрыва.

Определение 2. Если функция $y = f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, в точке x_0 не определена или её предел в точке x_0 не равен значению функции в этой точке; то говорят, что функция имеет разрыв в точке x_0, а точку x_0 называют точкой разрыва.

Определение. Точка x_0 называется точкой разрыва 1-го рода, если функция имеет конечные левосторонний $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ и правосторонний пределы $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$, но $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$.

Заметим: $\left| f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0) \right|$ - называется скачком функции в точке x_0.

Определение. Если хотя бы один из односторонних пределов функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен бесконечности или вообще не существует, то x_0 - точка разрыва второго рода.



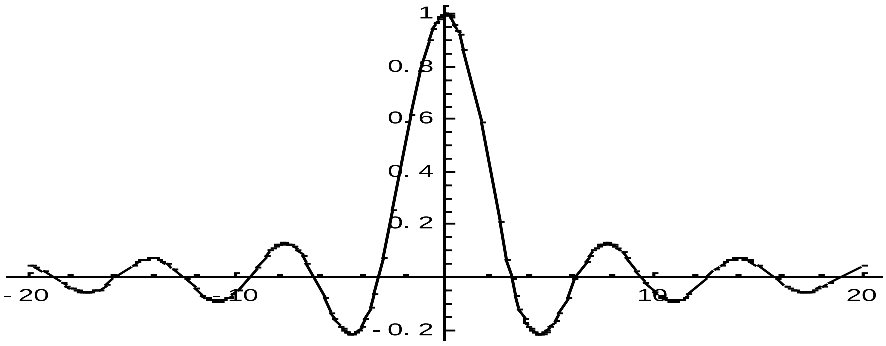
Пример.

$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

Функция не определена в точке $x = 0$, но имеет в ней конечный предел $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$, т.е. в точке $x = 0$ функция имеет точку разрыва 1 – го рода. Это – устранимая точка разрыва, т.к. если доопределить функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & при \quad x \neq 0 \\ 1, & при \quad x = 0 \end{cases}$$

График этой функции:



Непрерывность функции на интервале и на отрезке.

Определение. Функция f(x) называется **непрерывной на интервале (отрезке)**, если она непрерывна в любой точке интервала (отрезка).

При этом не требуется непрерывность функции на концах отрезка или интервала, необходима только односторонняя непрерывность на концах отрезка или интервала.

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Свойство 1: (Первая теорема Вейерштрасса (Вейерштрасс Карл (1815-1897)- немецкий математик)). Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке, т.е. на отрезке [a, b] выполняется условие $-M \le f(x) \le M$.

Доказательство этого свойства основано на том, что функция, непрерывная в точке x_0, ограничена в некоторой ее окрестности, а если разбивать отрезок [a, b] на бесконечное количество отрезков, которые “стягиваются” к точке x_0, то образуется некоторая окрестность точки x_0.

Свойство 2: Функция, непрерывная на отрезке [a, b], принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.

Т.е. существуют такие значения x_1 и x_2, что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$, причем

$$m \le f(x) \le M$$

Отметим эти наибольшие и наименьшие значения функция может принимать на отрезке и несколько раз (например – f(x) = sinx).

Разность между наибольшим и наименьшим значением функции на отрезке называется **колебанием** функции на отрезке.

Свойство 3: (Вторая теорема Больцано – Коши). Функция, непрерывная на отрезке [a, b], принимает на этом отрезке все значения между двумя произвольными величинами.

Свойство 4: Если функция f(x) непрерывна в точке $x = x_0$, то существует некоторая окрестность точки x_0, в которой функция сохраняет знак.

Свойство 5: (Первая теорема Больцано (1781-1848) – Коши). Если функция f(x)- непрерывная на отрезке [a, b] и имеет на концах отрезка значения противоположных знаков, то существует такая точка внутри этого отрезка, где f(x) = 0.

3.10 Асимптоты графика функции.

Назовём асимптотами прямые линии, к которым неограниченно приближается график функции, когда точка графика неограниченно удаляется от начала координат. В зависимости от поведения аргумента при этом, различаются два вида асимптот: вертикальные и наклонные.

Определение. Вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется вертикальная прямая $x = a$, если $f(x) \to +\infty$ или $f(x) \to -\infty$ при каком-либо из условий: $x \to a+0$, $x \to a-0$, $x \to a$. Заметим, что мы при этом не требуем, чтобы точка a принадлежала области определения функции $f(x)$, однако она должна быть определена по крайней мере в какой-либо из односторонних окрестностей этой точки: $(a-\delta;\, a)$ или $(a;\, a+\delta)$, где $\delta > 0$.

Итак, для нахождения вертикальных асимптот графика данной функции нужно исследовать точки разрыва функции и точки, лежащие на границах области определения функции, и выяснить, при приближении аргумента к каким из этих точек значения функции стремятся к бесконечности.

Определение. Наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ называется прямая $y = kx + b$, если выполнены два условия:

1) некоторый луч $(a;\, +\infty)$ целиком содержится в $D(f)$;

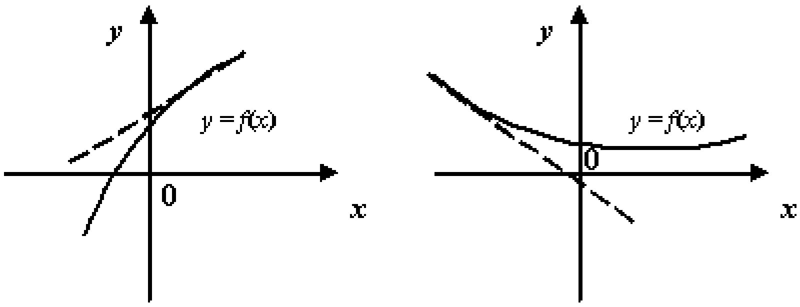
2) расстояние по вертикали между графиком и прямой стремится к 0 при $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\, f(x) - (kx+b)\right] = 0$$

Определение. Наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$ называется прямая $y = kx + b$, если

1) некоторый луч $(-\infty; a)$ целиком содержится в $D(f)$;

2) расстояние по вертикали между графиком и прямой стремится к 0 при $x \to -\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(kx+b)\right]=0$.



Графики функций, имеющие наклонные асимптоты при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$

В случае если наклонная асимптота расположена горизонтально, то есть при $k = 0$, она называется горизонтальной асимптотой. Таким образом, горизонтальная асимптота - частный случай наклонной асимптоты; прямая $y = c = const$ является горизонтальной асимптотой графика $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$, если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = c$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = c$

1. 3 Лекция № 4-5 (4 часа).

Тема: «Дифференциальное исчисление ФОП»

1.3.1 Вопросы лекции:

1. Понятие производной, ее геометрический и механический смыслы.
2. Основные правила дифференцирования.
3. Основные формулы дифференцирования.
4. Дифференциал функции и его геометрический смысл. Приложения дифференциала к приближенным вычислениям.
5. Правило Лопиталя.

1.3.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие производной, ее геометрический и механический смыслы.

Рассмотрим в прямоугольной декартовой системе координат график непрерывной функции *y=f(x)* и любую точку $M_0(x_0;f(x_0))$, принадлежащую графику.

Придадим аргументу x в точке x_0 произвольное приращение $\Delta x\neq 0$. На графике получим точку $M(x_0+\Delta x;f(x_0+\Delta x))$. Через точки M_0 и M проведем секущую, в точке M_0 проведем касательную к графику функции.

Рассмотрим прямоугольный треугольник M_0NM:

Угловой коэффициент секущей M_0M $k_{сек} = tg\alpha = \dfrac{NM}{M_0N} = \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Определение. Касательной к кривой в точке M_0 называется предельное положение секущей M_0M, когда точка M, двигаясь по кривой стремится совпасть с точкой M_0

Угловой коэффициент секущей ($k_{сек}$) будет стремиться к угловому коэффициенту касательной $M \to M_0, \quad \alpha \to \varphi, \quad tg\alpha \to tg\varphi \qquad tg\varphi = \lim\limits_{\Delta x\to 0} tg\alpha$, т.е. $k_{кас} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} k_{сек}$.

Тогда $k_{кас} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} k_{сек} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, если этот предел существует и конечен.

Задача о мгновенной скорости.

Пусть материальная точка движется по закону *S=S(t),* где *S* – пройденный путь, *t* – время. Найдем скорость движения в момент времени t_0 (мгновенная скорость).

Зафиксируем момент времени t_0, придадим аргументу t в точке t_0 произвольное приращение $\Delta t\neq 0$. Функция *S=S(t)* получит приращение $\Delta S=S(t_0+\Delta t)-S(t_0)$. За промежуток времени Δt средняя скорость точки будет $V_{cp}=\frac{\Delta S}{\Delta t}$. Устремим Δt к нулю. Чем меньше Δt, тем меньше средняя скорость отличается от скорости в момент времени t_0. Поэтому под скоростью точки в момент времени t_0 (мгновенная скорость) понимается предел средней скорости за промежуток от t_0 до $t_0+\Delta t$, когда $\Delta t\to 0$, т.е. $V=\lim\limits_{\Delta t\to 0}V_{cp}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}$.

В первой и во второй задачах, а также во многих других, мы приходим к необходимости вычислять пределы определенного вида, а именно $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Регулярное использование этого предела повлекло за собой необходимость введения нового понятия – понятие производной.

<u>**Определение.**</u> **Производной** функции *f(x)* в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

<u>Геометрический и механический смыслы производной.</u>

Уравнение касательной к кривой: $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

Уравнение нормали к кривой: $y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

Фактически производная функции показывает как бы скорость изменения функции, как изменяется функция при изменении переменной.

Физический смысл производной функции f(t), где t- время, а f(t)- закон движения (изменения координат) – мгновенная скорость движения.

2. Основные правила дифференцирования.

Правила дифференцирования

1) $C'=0$;

2) $y=x,\ y'=1$;

3) $(u\pm v)'=u'\pm v'$;

4) $(u\cdot v)'=u'v+u\cdot v'$;

5) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$;

где $u=u(x), v=v(x)$ - дифференцируемые на множестве X функции .

Заметим: *а)* $(C\cdot u)'=C\cdot u'$;

б) $\left(\frac{u}{c}\right)'=\frac{u'}{c}$.

3. Основные формулы дифференцирования.

1. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

2. $\left(a^{x}\right)' = a^{x} \cdot \ln a$

$\left(e^{x}\right)' = e^{x}$

3. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$

4. $\left(\sin x\right)' = \cos x$

$\left(\cos x\right)' = -\sin x$

$\left(tg\ x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\left(ctg\ x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

5. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\left(arc\cos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\left(arctg\ x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$\left(arcctg\ x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Примеры: а) $\left(x^4 + 4\sqrt{x} - \dfrac{1}{x^3}\right)'$; б) $\left(e^x \cdot \cos x\right)'$; в) $\left(\dfrac{x+3}{tgx}\right)'$.

4. Дифференциал функции и его геометрический смысл. Приложения дифференциала к приближенным вычислениям.

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Тогда можно записать: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$, при $\Delta x \to 0$.

Следовательно: $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Величина $\alpha \cdot \Delta x -$бесконечно малая более высокого порядка, чем $f'(x)\Delta x$, т.е. $f'(x)\Delta x$ - главная часть приращения Δy.

Определение. Дифференциалом функции $f(x)$ в точке x называется главная линейная часть приращения функции.

Обозначается: dy или $df(x)$.

Из определения следует, что $dy = f'(x)\Delta x$.

Дифференциалом аргумента называется приращение аргумента, т.е. $dx = \Delta x$. Поэтому можно дать другое определение дифференциалу функции: $dy = f'(x)dx$

Можно также записать: $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$

Основные теоремы о дифференциалах:

1. $d(u+v)=du+dv$.
2. $d(u\cdot v)=vdu+udv$.
3. $d(C\cdot u)=Cdu$, где $C=const$.
4. $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{vdu-udv}{v^2}$.
5. Если $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$, то $dy=y'_u\cdot du$ (инвариантность формы первого дифференциала).

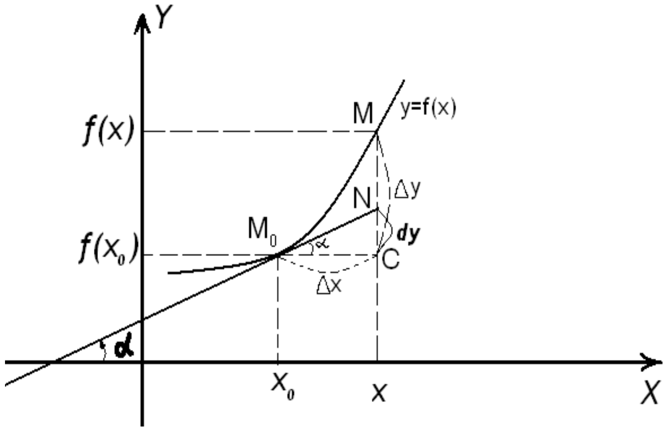
Пример. Вычислить дифференциал функций:

а) $y=\cos^2 x$; б) $f(x)=x^3\cdot\sin 4x$

<u>Геометрический смысл дифференциала.</u>

Рассмотрим функцию $y=f(x)$.

Проведём касательную к графику функции в точке $M_0(x_0;f(x_0))$, α - угол наклона касательной.



Выберем точку $M(x;f(x))$, где $x=x_0+\Delta x$. Рассмотрим $\triangle NCM_0: \angle C=90^\circ, M_0C=\Delta x, \angle CM_0N=\alpha$.

$\Rightarrow \dfrac{NC}{M_0C}=tg\alpha=f'(x_0),$

$\Rightarrow NC=f'(x_0)\cdot M_0C=f'(x_0)\cdot\Delta x,$

$\Rightarrow NC=dy$

Вывод: дифференциал равен изменению ординаты касательной, проведённой к графику функции $y=f(x)$ в точке $(x_0;f(x_0))$, при изменении x_0 на Δx.

<u>Дифференциалы высших порядков.</u>

Пусть $y=f(x)$ дифференцируемая функция, а ее аргумент x - независимая переменная. Тогда ее первый дифференциал $dy=f'(x)dx$ есть также функция от x, следовательно, можно найти дифференциал этой функции.

Определение. Дифференциал от дифференциала функции $y=f(x)$ называется ее вторым дифференциалом (или дифференциалом второго порядка) и обозначается d^2y или $d^2f(x)$.

$$d^2y=f''(x)dx^2=f''(x)(dx)^2$$

Аналогично определяется и находится дифференциал третьего порядка:

$$d^3y=d(d^2y)=f'''(x)dx^3=f'''(x)(dx)^3$$

Определение. Дифференциал $n-$го порядка есть дифференциал от дифференциала $(n-1)-$го порядка:

$$d^ny=d(d^{n-1}y)=f^{(n)}(x)dx^n$$

Из каждого полученного равенства можно выразить производную функции:

$$f'(x)=\frac{dy}{dx},\ f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2},\ f'''(x)=\frac{d^3y}{dx^3},\ \ldots,\ f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}$$

Пример. Найти дифференциал третьего порядка для функции $y=e^{4x}+x^2$.

<u>Приложение дифференциала к приближенным вычислениям.</u>

Замена приращения функции её дифференциалом означает замену части графика функции M_0M отрезком касательной M_0N (или $\Delta y \approx dy$). Чем меньше $|\Delta x|$, тем меньше касательная отклоняется от графика функции, тем точнее приближённая формула: $f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx$.

Пример. Найти приближенное значение приращения функции $y = x^3 - 2x + 1$ при $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}01$.

Пример. Вычислить приближенно $arctg 1{,}03$.

5. Правило Лопиталя.

Мы уже знакомы с приемами нахождения пределов отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций, т.е. раскрытие неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Рассмотрим новые правила для раскрытия этих неопределенностей – **правила Лопиталя**.

Теорема. Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций (неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$) равен пределу отношения их производных $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\Psi(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{\Psi'(x)}$, если предел правой части этого равенства существует.

Поясним на примерах.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin 5x}{x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin 5x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{(sin 5x)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{5 cos 5x}{1} = 5 \lim_{x\to 0} cos 5x = 5$$

Если отношение производных опять представляет собой неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, то можно снова применить правило Лопиталя, т.е. перейти к отношению вторых производных и т.д.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - cos 4x}{x^2}$

Числитель и знаменатель дроби одновременно стремятся к нулю. Применяя два раза правило Лопиталя, находим

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - cos 4x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{4 sin 4x}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{16 sin 4x}{2} = 8 \lim_{x\to 0} cos 4x = 8$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$

Числитель и знаменатель дроби представляют собой бесконечно большие функции при $x\to\infty$. Применяя два раза правило Лопиталя, находим

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

Кроме рассмотренных случаев неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, правила Лопиталя позволяют раскрывать неопределенности других видов.

Неопределенность вида (∞-∞). Под раскрытием такой неопределенности понимают нахождение предела (здесь и в дальнейшем под *c* следует понимать как число, так и бесконечность) $\lim\limits_{x\to c}[\,f(x)-\Psi(x)\,]$, когда *f(x)* и *Ψ(x)* являются бесконечно большими функциями одного знака, т.е. $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to c}\Psi(x)=\infty$. Этот случай преобразованием выражения $(f(x)-\psi(x))$ сводится к неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)$

Если $x\to 1$, то $\frac{1}{\ln x}\to\infty$ и $\frac{x}{\ln x}\to\infty$; следовательно, имеем неопределенность вида $(\infty-\infty)$. Приведем дроби к общему знаменателю, тогда при $x\to 1$ числитель и знаменатель в последнем выражении одновременно стремятся к нулю. Таким образом, получаем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Применяя правило Лопиталя, найдем:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{\frac{1}{x}}=-1.$$

Неопределенность вида (0·∞). Под раскрытием такой неопределенности понимают нахождение предела $\lim\limits_{x\to c}[\,f(x)\Psi(x)\,]$, если $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to c}\Psi(x)=\infty$. Этот случай также преобразованием выражения *(f(x) Ψ(x))* сводится к раскрытию неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)tgx$.

Так как $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\to 0$ и $tgx\to\infty$ при $x\to\frac{\pi}{2}$, то имеем неопределенность вида $(0\cdot\infty)$. Преобразуем данное выражение так:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)tgx=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{ctgx}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=-1$$

Неопределенность вида 1^{∞}. Под раскрытием такой неопределенности понимаем нахождение предела $\lim\limits_{x\to c}[\,f(x)\,]^{\Psi(x)}$, если $\lim\limits_{x\to c} f(x)=1$ и $\lim\limits_{x\to c}\Psi(x)=\infty$.

Неопределенность вида 0^0. Под раскрытием такой неопределенности понимают нахождение предела $\lim\limits_{x\to c}[\,f(x)\,]^{\Psi(x)}$, если $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to c}\Psi(x)=0$.

Неопределенность вида ∞^0. Под раскрытием такой неопределенности понимают нахождение предела $\lim\limits_{x\to c}[\,f(x)\,]^{\Psi(x)}$, если $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to c}\Psi(x)=0$.

Неопределенности вида 1^{∞}, 0^0, и ∞^0 приводятся к случаям неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ обычно с помощью логарифмирования $[f(x)]^{\Psi(x)}$ при условии, что $f(x) > 0$.

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$

В этом случае $(1+x^2)\to+\infty$, $\frac{1}{x}\to 0$, и мы имеем неопределенность вида ∞^0.

Обозначим $y=(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$, т.к. $1+x^2>0$, то логарифмируя, находим

$$\ln y = \ln(1+x^2)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\ln(1+x^2) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$$

Так как при $x\to+\infty$ числитель и знаменатель стремятся к бесконечности, то получаем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty} \ln y = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1} = 0$$

Так как $z=\ln y$ – функция непрерывная на D_z, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln y = \ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty} y\right)$;

следовательно, $\ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty} y\right)=0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} y = e^0 = 1$. Итак $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{x}} = 1$.

1. 4 Лекция № 6 (2 часа).

Тема: «Дифференциальное исчисление ФОП»

1.4.1 Вопросы лекции:

1 Монотонность и экстремум функции.
2 Направление выпуклости, точки перегиба.
3 Исследование ФОП и построение их графиков.

1.4.2 Краткое содержание вопросов:

1 Монотонность и экстремум функции.

Определение. Функция $y=f(x)$ называется **возрастающей (убывающей)** на интервале $(a;b)$, если для любых значений x_1 и x_2 аргумента x, таких что $a<x_1<x_2<b$ выполняется неравенство $f(x_2)>f(x_1)$ ($f(x_2)<f(x_1)$).

Для нахождения интервалов возрастания и убывания функции нужно пользоваться **достаточными признаками монотонности**:

Если производная дифференцируемой функции положительна (отрицательна) на некотором интервале и стационарные точки (те в которых $f'(x)=0$) не заполняют сплошь никакого отрезка, то функция возрастает (убывает) на этом интервале.

Определение. Если в некоторой окрестности точки x_0 для всех $x\neq x_0$ выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$ или $f(x)>f(x_0)$, то точка x_0 называется точкой экстремума функции $f(x)$ (соответственно точкой максимума или минимума).

Необходимое условие экстремума: Если функции $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум и дифференцируема в этой точке, то первая производная $f'(x)$ равна нулю. Таким образом, экстремум может наблюдаться в точках, в которых $f'(x)=0$ или не существует.

Достаточное условие экстремума: Если x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, то ее первая производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0: с плюса на минус – при максимуме, с минуса на плюс – при минимуме.

2 Направление выпуклости, точки перегиба.

Определение. Кривая обращена выпуклостью **вверх** на интервале $(a;b)$, если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется **выпуклой**, а кривая, обращенная выпуклостью вниз – называется **вогнутой**.

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию $f''(x)>0$. Тогда кривая $y=f(x)$ выпукла вниз в точке с абсциссой x_0. Если же $f''(x)<0$, то кривая $y=f(x)$ в этой точке выпукла вверх.

Определение. Точка с абсциссой x_0 называется **точкой перегиба** кривой $y=f(x)$, если при переходе через точку x_0 меняется направление выпуклости.

Необходимое условие точки перегиба: если x_0 - точка перегиба кривой $y=f(x)$, то вторая производная $f''(x)$ либо равна нулю, либо не существует.

Достаточное условие точки перегиба*:* x_0 является точкой перегиба кривой $y=f(x)$, если в достаточно малой окрестности точки x_0 при переходе через точку x_0 вторая производная меняет знак.

При исследовании функций часто бывает, что при удалении координаты х точки кривой в бесконечность кривая неограниченно приближается к некоторой прямой.

3 Исследование ФОП и построение графиков.

Общая схема исследования функции и построения ее графика.

I. Элементарное исследование:

1) найти область определения функции;
2) исследовать функцию на четность (нечетность);
3) исследовать функцию на периодичность;
4) определить, если это не вызовет особых затруднений, точки пересечения графика с координатными осями.

II. Исследование графика функции по первой производной:

1) найти $f'(x)$;
2) используя необходимый признак существования экстремума найти точки, «подозрительные» на экстремум, т.е. точки в которых $f'(x)=0$ или $f'(x)$ не существует;
3) нанести критические точки на область определения и найти знак производной во всех получившихся интервалах;
4) используя признаки монотонности определить характер монотонности функции на каждом интервале;
5) используя достаточный признак существования экстремума установить наличие экстремума и их характер;
6) вычислить значение функции в точках экстремума, если они есть.

III. Исследование графика функции по второй производной:

1) найти $f''(x)$;

2) используя необходимый признак существования точек перегиба, найти точки «подозрительные» на перегиб, т.е. точки в которых $f''(x)=0$ или $f'(x)$ не существует;

3) нанести полученные точки на область определения и найти знак второй производной в каждом из получившихся интервалов;

4) используя теорему о форме кривой установить характер выпуклости (вогнутости) графика функции на каждом промежутке;

5) используя достаточный признак существования точек перегиба установить их наличие;

6) вычислить значения функции в абсциссах точек перегиба.

IV. Исследовать поведение функции на границах области определения.

V. Исследовать кривую $y=f(x)$ на наличие асимптот и указать область значений функции.

VI. Построить график функции.

Пример. Провести полное исследование и построить график функции $y=\dfrac{2}{1+x^2}$

1. 5 Лекция № 7 (2 часа).

Тема: «Дифференциальное исчисление функции двух переменных (ФДП)»

1.5.1 Вопросы лекции:

1 Понятие функции двух переменных. Область определения ФДП.

2 Частные приращения.

3 Предел и непрерывность функции двух переменных.

1.5.2 Краткое содержание вопросов:

1. ОДЗ функции двух переменных и ее геометрическое изображение.

При рассмотрении функций нескольких переменных ограничимся подробным описанием функций двух переменных, т.к. все полученные результаты будут справедливы для функций произвольного числа переменных.

Определение. Если каждой паре независимых друг от друга чисел $(x;\, y)$ из некоторого множества по какому - либо правилу ставится в соответствие единственное значение переменной z, то переменная z называется **функцией двух переменных.**

Обозначается: $z=f(x;\, y)$

Определение. Областью определения функции двух переменных называется совокупность пар $(x;\, y)$, при которых функция z существует.

Пример. Найти область определения функции $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, изобразить ее на координатной плоскости.

2. Частные приращения.

Определение. Пусть в некоторой области задана функция $z=f(x;\, y)$. Возьмем произвольную точку $M(x;\, y)$ и зададим приращение Δx для переменной x. Тогда величина $\Delta_x z=f(x+\Delta x; y)-f(x; y)$ называется частным приращением функции по переменой x.

Аналогично, определим частное приращение по переменной y:

$$\Delta_y z=f(x; y+\Delta y)-f(x; y)$$

Определение. Для функции двух переменных $z=f(x;\, y)$ выражение $\Delta z=f(x+\Delta x; y+\Delta y)-f(x; y)$ называется **полным приращением**.

Пример. Найти частные и полное приращения функции $z=x^2+xy$.

3 Предел и непрерывность функции двух переменных.

Определение. Окрестностью точки $M_0(x_0\,;y_0)$ радиуса r называется совокупность всех точек $(x;\,y)$, которые удовлетворяют условию $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r$.

Определение. Число A называется **пределом** функции $z=f(x;\,y)$ при стремлении точки $M(x;\,y)$ к точке $M_0(x_0\,;y_0)$, если для каждого числа $\varepsilon>0$ найдется такое число $r>0$, что для любой точки $M(x;\,y)$, для которых верно условие $MM_0<r$ также верно и условие $|f(x,y)-A|<\varepsilon$.

Записывают: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to -1}}\dfrac{3x+4y}{x^2+y^2}$.

Пример. Доказать, что предела функции $z=\dfrac{x+y}{xy}$ в точке $M_0(0;\,0)$ не существует.

Определение. Пусть точка $M_0(x_0\,;y_0)$ принадлежит области определения функции $z=f(x;\,y)$. Тогда функция $z=f(x;\,y)$ называется **непрерывной** в точке $M_0(x_0\,;y_0)$, если $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$ причем точка $M(x;\,y)$ стремится к точке $M_0(x_0\,;y_0)$ произвольным образом.

Если в какой – либо точке условие не выполняется, то эта точка называется **точкой разрыва** функции $z=f(x;\,y)$. Это может быть в следующих случаях:

1) Функция $z=f(x;\,y)$ не определена в точке $M_0(x_0\,;y_0)$.
2) Не существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$.
3) Этот предел существует, но он не равен $f(x_0\,;y_0)$.

Аналогично, можно дать определение непрерывности функции $z=f(x;\,y)$ через приращения.

Определение. Функция $z=f(x;\,y)$ называется **непрерывной** в точке $M_0(x_0\,;y_0)$, если $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0$

Определение. Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, непрерывная в этой области.

1. 6 Лекция № 8 (2 часа).

Тема: «Дифференциальное исчисление функции двух переменных (ФДП)»

1.6.1 Вопросы лекции:

1 Частные производные первого и второго порядка. Теорема Шварца.
2 Понятие экстремума.
3 Необходимое и достаточное условие экстремума.

1.6.2 Краткое содержание вопросов:

1 Частные производные первого и второго порядка. Теорема Шварца.

Можно записать $\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$.Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется **частной производной** функции z = f(x, y) по x.

Обозначение: $\frac{\partial z}{\partial x}$; z'_x; $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$; $f'_x(x,y)$.

Аналогично определяется частная производная функции по у. $\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$

Геометрическим смыслом частной производной (допустим $\frac{\partial z}{\partial x}$) является тангенс угла наклона касательной, проведенной в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$ к сечению поверхности плоскостью $y = y_0$.

Если функция f(x, y) имеет непрерывные частные производные, то

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) + f(x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = \left[f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)\right] + \left[f(x, y+\Delta y) - f(x,y)\right]$$

$$f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = \Delta y \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} \quad f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x}$$

здесь $\bar{y} \in (y, y+\Delta y)$; $\bar{x} \in (x, x+\Delta x)$

Тогда получаем $\Delta z = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y}$

Т.к. частные производные непрерывны, то можно записать равенства:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \qquad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

Определение. Выражение $\Delta z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$ называется **полным приращением** функции $z = f(x;y)$ в некоторой точке (x, y), где α_1 и α_2 – бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ соответственно.

Если функция $z = f(x;y)$ определена в некоторой области D, то ее частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ тоже будут определены в той же области или ее части.

Будем называть эти производные **частными производными первого порядка.**

Производные этих функций будут **частными производными второго порядка.**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x,y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y);$$

Продолжая дифференцировать полученные равенства, получим частные производные более высоких порядков.

Определение. Частные производные вида $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial y}$ и т.д. называются **смешанными производными.**

Теорема. Если функция $z = f(x;y)$ и ее частные производные $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ определены и непрерывны в точке $M(x;y)$ и ее окрестности, то верно соотношение:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Т.е. частные производные высших порядков не зависят от порядка дифференцирования.

2 Понятие экстремума.

Если для функции $z = f(x;\, y)$, определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0\,;\, y_0)$ верно неравенство $f(x_0, y_0) > f(x, y)$, то точка $M_0(x_0\,;\, y_0)$ называется *точкой максимума*.

Если для функции $z = f(x;\, y)$, определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0\,;\, y_0)$ верно неравенство $f(x_0, y_0) < f(x, y)$, то точка $M_0(x_0\,;\, y_0)$ называется *точкой минимума*.

3 Необходимое и достаточное условия экстремума.

Необходимые условия экстремума: Если функция $z = f(x;\, y)$ в точке (x_0, y_0) имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю $f'_x(x_0, y_0) = 0,\quad f'_y(x_0, y_0) = 0$, либо хотя бы одна из них не существует.

Эту точку (x_0, y_0) называют *критической*.

Достаточные условия экстремума: Пусть в окрестности критической точки $M_0(x_0\,;\, y_0)$ функция $z = f(x;\, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно.

Рассмотрим выражение: $D(x, y) = f''_{x^2}(x, y) \cdot f''_{y^2}(x, y) - \left[f''_{xy}(x, y)\right]^2$.

1) Если $D(x_0\,;\, y_0) > 0$, то в точке $M_0(x_0\,;\, y_0)$ функция $z = f(x;\, y)$ имеет экстремум, если $f''_{x^2}(x_0, y_0) < 0$ - максимум, если $f''_{x^2}(x_0, y_0) > 0$ - минимум.

2) Если $D(x_0\,;\, y_0) < 0$, то в точке $M_0(x_0\,;\, y_0)$ функция $z = f(x;\, y)$ не имеет экстремума.

3) В случае если $D = 0$, вывод о наличии экстремума сделать нельзя.

Пример. Исследовать функцию $z = 3xy - x^2 - 3y^2 - 6x + 9y + 2$ на экстремум.

1. 7 Лекция № 9 (2 часа).

Тема: «Интегральное исчисление. Неопределенный интеграл»

1.7.1 Вопросы лекции:

1. Первообразная функция и ее свойства.
2. Понятие неопределенного интеграла, основные свойства.
3. Таблица интегралов. Непосредственное интегрирование. Замена переменной.
4. Интегрирование по частям.

1.7.2 Краткое содержание вопросов:

1 Первообразная функция и ее свойства.

Определение: Функция F(x) называется первообразной функцией функции f(x) на отрезке [a, b], если в любой точке этого отрезка верно равенство: $F'(x) = f(x)$.

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число. $F_1(x) = F_2(x) + C$.

2 Понятие неопределенного интеграла, основные свойства.

Определение: Неопределенным интегралом функции f(x) называется совокупность первообразных функции.

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C;$

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Свойства:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x);$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$
3. $\int dF(x) = F(x) + C;$
4. $\int (u+v-w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$

где u, v, w – некоторые функции от x.

5. $\int C\cdot f(x)dx = C\cdot \int f(x)dx;$

3 Таблица интегралов. Непосредственное интегрирование. Замена переменной.

Нахождение значения неопределенного интеграла связано главным образом с нахождением первообразной функции. Для некоторых функций это достаточно сложная задача. Ниже будут рассмотрены способы нахождения неопределенных интегралов для основных классов функций – рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных и др.

Для удобства значения неопределенных интегралов большинства элементарных функций собраны в специальные таблицы интегралов, которые бывают иногда весьма объемными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций. Но большинство представленных в этих таблицах формул являются следствиями друг друга, поэтому ниже приведем таблицу основных интегралов, с помощью которой можно получить значения неопределенных интегралов различных функций.

1). $\int du = u + C$

2). $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ (n \neq -1)$

3). $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

4). $\int e^u du = e^u + C$

5). $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

6). $\int \sin u du = -\cos u + C$

7). $\int \cos u du = \sin u + C$

8). $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$

9). $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C$

10). $\int tgudu = -\ln|\cos u| + C$

11). $\int ctgudu = \ln|\sin u| + C$

12). $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$

13). $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C$

14). $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

15). $\int \frac{1}{\cos x}dx = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

16). $\int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$

17). $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$

Непосредственное интегрирование

Рассмотрим три основных метода интегрирования.

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием.

Рассмотрим применение этого метода на примере:

Требуется найти значение интеграла $\int \frac{dx}{x}$. На основе известной формулы дифференцирования $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. можно сделать вывод, что искомый интеграл равен $\ln x + C$, где С – некоторое постоянное число. Однако, с другой стороны $(\ln(-x))' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. Таким образом, окончательно можно сделать вывод: $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

Метод непосредственного интегрирования применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются способы, описанные ниже.

Замена переменной.

Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены x = φ(t) и dx = φ′(t)dt получается: $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$.

Сделаем замену t = sinx, dt = cosxdt.

$$\int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x + C.$$

Пример. $\int x(x^2+1)^{3/2}dx.$

Замена $t = x^2 + 1; \quad dt = 2xdx; \quad dx = \frac{dt}{2x};$ Получаем:

$$\int t^{3/2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C;$$

4 Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

(uv)′ = u′v + v′u

где u и v – некоторые функции от x.

В дифференциальной форме: d(uv) = udv + vdu

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$uv = \int udv + \int vdu$ или $\int udv = uv - \int vdu$;

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Пример. $\int x^2 \sin x dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2; & dv = \sin x dx; \\ du = 2xdx; & v = -\cos x \end{matrix}\right\} = -x^2\cos x + \int \cos x \cdot 2xdx =$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x; & dv = \cos x dx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{matrix}\right\} = -x^2\cos x + 2\left[x\sin x - \int \sin x dx\right] = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

Пример.

$$\int e^{2x}\cos x dx = \begin{cases} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \cos x dx; & v = \sin x \end{cases} = e^{2x}\sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x}dx =$$

$$= \begin{cases} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \sin x dx; & v = -\cos x; \end{cases} = e^{2x}\sin x - 2\left[-e^{2x}\cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x}dx\right] = e^{2x}\sin x +$$

$$+ 2e^{2x}\cos x - 4\int \cos x e^{2x}dx$$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5\int e^{2x}\cos x dx = e^{2x}(\sin x + 2\cos x)$$

$$\int e^{2x}\cos x dx = \frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C.$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.

1. 8 Лекция № 10 (2 часа).

Тема: «Определенный интеграл»

1.8.1 Вопросы лекции:

1. Определенный интеграл, его геометрический смысл. Свойства.
2. Формула Ньютона-Лейбница. Методы интегрирования определенного интеграла.
3. Геометрические приложения определенного интеграла: площадь плоской фигуры, объем тела вращения, длина дуги плоской кривой, площадь поверхности вращения.

1.8.2 Краткое содержание вопросов:

1Определенный интеграл, его геометрический смысл. Свойства.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция f(x).

Найти площадь фигуры.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на части (не обязательно одинаковые) n точками.

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

Тогда $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, … ,$x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$;

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε.

$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, \quad x_1 < \varepsilon < x_2, \ \ldots \ , x_{n-1} < \varepsilon < x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции f(x) на отрезке $[a, b]$.

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

Обозначим $max\Delta x_i$ – наибольший отрезок разбиения. Если $max\Delta x_i \to 0$, то число отрезков разбиения отрезка [a, b] стремится к бесконечности.

Если $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$, то $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = S.$

<u>Определение:</u> Если при любых разбиениях отрезка $[a, b]$ таких, что $max\Delta x_i \to 0$, и произвольном выборе точек ε_i интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ стремится к пределу S, то данный предел называется определенным интегралом от $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Обозначение: $\int\limits_a^b f(x)dx.$ a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, $[a, b]$ – отрезок интегрирования.

<u>Теорема:</u> Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

<u>Геометрический и физический смыслы.</u>

Геометрический смысл определенного интеграла: Определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ от неотрицательной и непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, с боков – прямыми $x = a$ и $x = b$, снизу – осью абсцисс.

Если $v(t)$ – скорость изменения функции за промежуток времени от t_1 до t_2, то определенный интеграл $\int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)dt$ численно равен пути, пройденный телом при неравномерном прямолинейном движении за промежуток времени от t_1 до t_2. Это физический смысл определенного интеграла.

<u>Основные свойства определенного интеграла.</u>

1) $\int\limits_a^b Af(x)dx = A\int\limits_a^b f(x)dx;$

2) $\int\limits_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx$

3) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$

4) Если $f(x) \le \varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$ и $a < b$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b \varphi(x)dx$

5) Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то:

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

6) **<u>Теорема о среднем.</u>** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке существует точка ε такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$$

7) Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

Разумеется, это равенство выполняется, если существует каждый из входящих в него интегралов.

8) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$

2 Формула Ньютона – Лейбница. Методы интегрирования определенного интеграла.

Пусть в интеграле $\int_a^b f(x)dx$ нижний предел $a = const$, а верхний предел b изменяется. Очевидно, что если изменяется верхний предел, то изменяется и значение интеграла.

Обозначим $\int_a^x f(t)dt = \Phi(x)$. Найдем производную функции $\Phi(x)$ по переменному верхнему пределу x.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Аналогичную теорему можно доказать для случая переменного нижнего предела.

Теорема. Для всякой функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a; b]$, существует на этом отрезке первообразная, а значит, существует неопределенный интеграл (без доказательства).

Теорема. (Теорема Ньютона – Лейбница)

Если функция $F(x)$ – какая- либо первообразная от непрерывной функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

Доказательство. Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$. Тогда в соответствии с приведенной выше теоремой, функция $\int_a^x f(t)dt$ - первообразная функция от $f(x)$. Но т.к. функция может иметь бесконечно много первообразных, которые будут отличаться друг от друга только на какое – то постоянное число С, то

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$$

при соответствующем выборе С это равенство справедливо для любого x, т.е. при $x = a$:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C$$

$$0 = F(a) + C$$

$$C = -F(a)$$

Тогда $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.

А при $x = b$: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Заменив переменную t на переменную x, получаем формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

<u>Приемы интегрирования.</u>

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов.

Замена переменных

Пусть задан интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a, b]$. Введем новую переменную в соответствии с формулой $x = \varphi(t)$.

Тогда, если

1) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$

2) $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$

3) $f(\varphi(t))$ определена на отрезке $[\alpha, \beta]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Тогда $\int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$

Пример.

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{Bmatrix} x = \sin t; \\ \alpha = 0; \beta = \pi/2 \end{Bmatrix} = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}.$$

При замене переменной в определенном интеграле следует помнить о том, что вводимая функция (в рассмотренном примере это функция sin) должна быть непрерывна на отрезке интегрирования.

Интегрирование по частям

Если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu.$$

Вывод этой формулы абсолютно аналогичен выводу формулы интегрирования по частям для неопределенного интеграла, который был весьма подробно рассмотрен выше, поэтому здесь приводить его нет смысла.

3 Геометрические приложения определенного интеграла: площадь плоской фигуры, объем тела вращения, длина дуги плоской кривой, площадь поверхности вращения.

Известно, что определенный интеграл на отрезке представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$. Если график расположен ниже оси Ох, т.е. $f(x) < 0$, то площадь имеет знак “-“, если график расположен выше оси Ох, т.е. $f(x) > 0$, то площадь имеет знак “+”.

Для нахождения суммарной площади используется формула $S = \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|$.

Площадь фигуры, ограниченной некоторыми линиями может быть найдена с помощью определенных интегралов, если известны уравнения этих линий.

Для нахождения площади криволинейного сектора введем полярную систему координат. Уравнение кривой, ограничивающей сектор в этой системе координат, имеет вид ρ = f(φ), где ρ - длина радиус – вектора, соединяющего полюс с произвольной точкой кривой, а φ - угол наклона этого радиус – вектора к полярной оси.

Площадь криволинейного сектора может быть найдена по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f^2(\varphi)d\varphi$$

Нахождение объема тела вращения.

Пусть имеется тело объема V. Площадь любого поперечного сечения тела Q, известна как непрерывная функция Q = Q(x). Разобьем тело на “слои” поперечными сечениями, проходящими через точки x_i разбиения отрезка [a, b]. Т.к. на каком- либо промежуточном отрезке разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ функция Q(x) непрерывна, то принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. Обозначим их соответственно M_i и m_i.

Если на этих наибольшем и наименьшем сечениях построить цилиндры с образующими, параллельными оси x, то объемы этих цилиндров будут соответственно равны $M_i\Delta x_i$ и $m_i\Delta x_i$ здесь $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Произведя такие построения для всех отрезков разбиения, получим цилиндры, объемы которых равны соответственно $\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ и $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$.

При стремлении к нулю шага разбиения λ, эти суммы имеют общий предел:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \int_a^b Q(x)dx$$

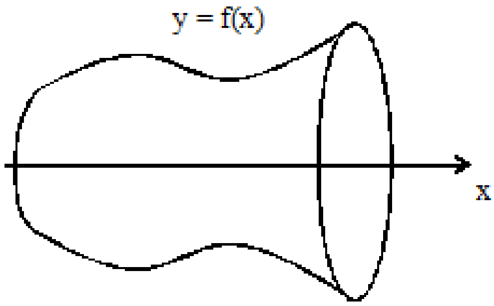
Таким образом, объем тела может быть найден по формуле:

$$V = \int_a^b Q(x)dx$$

Недостатком этой формулы является то, что для нахождения объема необходимо знать функцию Q(x), что весьма проблематично для сложных тел.

Объем тел вращения.

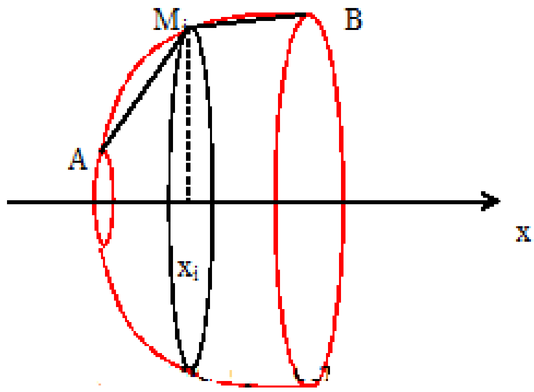
Рассмотрим кривую, заданную уравнением y = f(x). Предположим, что функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b]. Если соответствующую ей криволинейную трапецию с основаниями a и b вращать вокруг оси Ох, то получим так называемое **тело вращения**.



Т.к. каждое сечение тела плоскостью x = const представляет собой круг радиуса $R = |f(x)|$, то объем тела вращения может быть легко найден по полученной выше формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Площадь поверхности тела вращения.



<u>**Определение:**</u> **Площадью поверхности вращения** кривой AB вокруг данной оси называют предел, к которому стремятся площади поверхностей вращения ломаных, вписанных в кривую AB, при стремлении к нулю наибольших из длин звеньев этих ломаных.
Площадь поверхности, описанной ломаной равна:

$$P_n = \pi \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)\sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)}\Delta x_i$$

Эта сумма не является интегральной, но можно показать, что

$$P = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)\sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)}\Delta x_i = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} 2f(\varepsilon_i)\sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)}\Delta x_i$$

Тогда $P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx$ - формула вычисления **площади поверхности тела вращения.**

<u>Вычисление длины дуги кривой.</u>

Длина ломаной линии, которая соответствует дуге, может быть найдена как $S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$.

Тогда длина дуги равна $S = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$.

Из геометрических соображений: $\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$

В то же время $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i}$

Тогда можно показать , что

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Т.е. $S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

Если уравнение кривой задано параметрически, то с учетом правил вычисления производной параметрически заданной функции, получаем

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt ,$$

где x = φ(t) и y = ψ(t).

Если задана **пространственная кривая**, и x = φ(t), y = ψ(t) и z = Z(t), то

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [Z'(t)]^2}\, dt$$

Если кривая задана в **полярных координатах**, то

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\, d\varphi, \quad \rho = f(\varphi).$$

Вычисление работы переменной силы.

Пусть под действием некоторой силы $f(x)$ материальная точка М движется по прямой в направлении оси OX. Требуется найти работу, произведённую силой $f(x)$ при перемещении точки М из положения $x = x_1$ в положение $x = x_2$.

1) Если сила постоянна $f(x) = C$, то работа выражается следующим образом $A = C(x_2 - x_1)$.

2) Если сила переменная величина, то $A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$.

Пример: Два электрических заряда $e_0 = \frac{1}{3} \cdot 10^{-7} k$ и $e_1 = \frac{2}{3} \cdot 10^{-7} k$ находятся на оси OX соответственно в точках $x_0 = 0$ и $x_1 = 1$. Какая работа будет произведена, если второй заряд переместится в точку $x_2 = 10$? (Сила взаимодействия зарядов $f(x) = 9 \cdot 10^9 \frac{e_0 e_1}{x^2}\, H$).

Решение:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{1}^{10} 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{\frac{1}{3} \cdot 10^{-7} \cdot \frac{2}{3} \cdot 10^{-7}}{x^2} dx = 2 \cdot 10^{-5} \int_{1}^{10} \frac{1}{x^2} dx = -2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1}{x}\Big|_{1}^{10} =$$

$$= 2 \cdot 10^{-5} - 2 \cdot 10^{-6} = 18 \cdot 10^{-6}.$$

Координаты центра тяжести.

Центром тяжести совокупности материальных точек называется центр параллельных сил тяжести, приложенных в этих точках.

Для материальной дуги АВ плоской кривой $y = f(x)$ прямоугольные координаты центра тяжести C определяются формулами $(a \le x \le b)$:

$$x_c = \frac{\int_a^b x\sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx}, \qquad y_c = \frac{\int_a^b y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx}.$$

Для материальной однородной криволинейной трапеции, прилежащей к оси OX и имеющей верхнюю границу $y = y(x)$, центр тяжести имеет координаты

$$x_c = \frac{\int_a^b xy(x)dx}{S}, \qquad y_c = \frac{\int_a^b y^2(x)dx}{2S},$$

где S – площадь криволинейной трапеции.

Центр тяжести произвольной плоской, ограниченной графиком функции $y_1 = f_1(x)$ сверху и $y_2 = f_2(x)$ снизу, определяется формулами

$$x_c = \frac{\int_a^b x(y_1(x) - y_2(x))dx}{S}, \quad y_c = \frac{\int_a^b (y_1^2(x) - y_2^2(x))dx}{2S}.$$

Задача. Бассейн высоты *H* наполнен водой. Вычислить давление воды на прямоугольную стенку бассейна с основанием прямоугольника, равным *a*.

Разделим высоту *H* на *n* равных частей (Δh). Стенка разделится на «элементы». Так как кубометр воды весит тонну, то давление столба жидкости высоты h_i м, имеющего сечение 1 м^2, равно h_i тоннам.

Давление же воды на элемент, находящийся на глубине h_i, равно произведению h_i на площадь элемента: $h_i a\ \Delta h$. Обозначим произведение $h_i a$ через $F(h_i)$. Тогда величина давления на всю стенку приближенно равна

$P_n \approx F_1(h_1)\Delta h_1 + \ldots + F_n(h_n)\ \Delta h_n$.

Данную сумму называют интегральной суммой функции *F(h)* на отрезке [*0; H*]. При этом предполагается, что функция *F(h)* непрерывна на отрезке [*0; H*] и может принимать любые значения. Если $n \to \infty$ и высоты «элементов» стремятся к нулю, то точное выражение суммы равно $\lim\limits_{\Delta h \to 0} P_n$. Его называют определенным интегралом от функции *F(h)* на отрезке [*0; H*] и обозначают $\int_0^H F(h)dh$.

1. 9 Лекция № 11 (2 часа).

Тема: «Дифференциальные уравнения»

1.9.1 Вопросы лекции:

1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
2. Частные и общие решения.
3. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши.
4. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

1.9.2 Краткое содержание вопросов:

1 Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

Решение различных геометрических, физических и инженерных задач часто приводят к уравнениям, которые связывают независимые переменные, характеризующие ту ил иную задачу, с какой – либо функцией этих переменных и производными этой функции различных порядков.

В качестве примера можно рассмотреть простейший случай равноускоренного движения материальной точки.

Известно, что перемещение материальной точки при равноускоренном движении является функцией времени и выражается по формуле:

$$S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$$

В свою очередь ускорение *a* является производной по времени *t* от скорости *V*, которая также является производной по времени *t* от перемещения *S*. Т.е.

$$V = \frac{dS}{dt}; \qquad a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2};$$

Тогда получаем: $S = f(t) = V_0 t + \frac{f''(t) \cdot t}{2}$ - уравнение связывает функцию $f(t)$ с независимой переменной *t* и производной второго порядка функции $f(t)$.

Определение. Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

Определение. Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется **обыкновенным дифференциальным уравнением**, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется **дифференциальным уравнением в частных производных.**

Определение. Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения.**

Пример.

$x^3y' + 8y - x + 5 = 0$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 1 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y') = 0$.

$x\dfrac{d^2y}{dx^2} + xy\dfrac{dy}{dx} + x^2 = y$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 2 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y', y'') = 0$

$y^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ - дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка.

2 Частные и общие решения.

Определение. Общим решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция $y = \varphi(x, C)$, которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

Свойства общего решения

1) Т.к. постоянная C – произвольная величина, то вообще говоря, дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений.

2) При каких- либо начальных условиях $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$ существует такое значение $C = C_0$, при котором решением дифференциального уравнения является функция $y = \varphi(x, C_0)$.

Определение. Решение вида $y = \varphi(x, C_0)$ называется **частным решением** дифференциального уравнения.

Определение. Интегралом дифференциального уравнения называется любое уравнение, не содержащее производных, для которого данное дифференциальное уравнение является следствием

Определение. Интегральной кривой называется график $y = \varphi(x)$ решения дифференциального уравнения на плоскости XOY.

3 Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши.

Определение. Дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение, связывающее функцию, ее первую производную и независимую переменную, т.е. соотношение вида:

$$F(x, y, y') = 0$$

Если такое соотношение преобразовать к виду $y' = f(x, y)$ то это дифференциальное уравнение первого порядка будет называться уравнением, **разрешенным относительно производной.**

Преобразуем такое выражение далее:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); \quad dy = f(x, y)dx; \quad f(x, y)dx - dy = 0;$$

Функцию f(x,y) представим в виде: $f(x,y) = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, \quad Q(x,y) \neq 0;$ тогда при подстановке в полученное выше уравнение имеем:

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ это так называемая **дифференциальная форма** уравнения первого порядка.

Далее рассмотрим подробнее типы уравнений первого порядка и методы их решения.

Пусть функция $f(x)$ – определена и непрерывна на некотором интервале $a < x < b$. В таком случае все решения данного дифференциального уравнения находятся как $y = \int f(x)dx + C$. Если заданы начальные условия x_0 и y_0, то можно определить постоянную C.

Определение. Задачей Коши называется нахождение любого частного решения дифференциального уравнения вида $y = \varphi(x, C_0)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$.

Теорема Коши. (теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения 1- го порядка)

Если функция f(x, y) непрерывна в некоторой области D в плоскости XOY и имеет в этой области непрерывную частную производную $y' = f(x,y)$, то какова бы не была точка (x_0, y_0) в области D, существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения $y' = f(x,y)$, определенное в некотором интервале, содержащем точку x_0, принимающее при $x = x_0$ значение $\varphi(x_0) = y_0$, т.е. существует единственное решение дифференциального уравнения.

Определение. Интегралом дифференциального уравнения называется любое уравнение, не содержащее производных, для которого данное дифференциальное уравнение является следствием.

4 Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Определение. Уравнение вида $f(x)dx + g(y)dy = 0$ называется дифференциальным уравнением с разделенными переменными.

Способ решения: интегрирование обеих частей равенства.

Пример. $(1 + x^3)dx - y^2dy = 0$

Определение. Дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$ называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его можно записать в виде $y' = \alpha(x)\beta(y)$.

Такое уравнение можно представить также в виде:

$$y' - \alpha(x)\beta(y) = 0; \quad dy - \alpha(x)\beta(y)dx = 0; \quad \frac{dy}{\beta(y)} - \alpha(x)dx = 0 \textit{ при } \beta(y) \neq 0;$$

Перейдем к новым обозначениям $\alpha(x) = -X(x); \quad \frac{1}{\beta(y)} = Y(y);$

Получаем: $X(x)dx + Y(y)dy = 0;$

$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C$

После нахождения соответствующих интегралов получается общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

Если заданы начальные условия, то при их подстановке в общее решение находится постоянная величина С, а, соответственно, и частное решение.

Решить уравнение $y' = x(y^2 + 1)$.

$$\frac{dy}{dx} = x(y^2 + 1)$$

$$\frac{dy}{y^2+1} = xdx$$

$$\int \frac{dy}{y^2+1} = \int xdx; \qquad arctgy = \frac{x^2}{2} + C;$$

$$y = tg\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

Допустим, заданы некоторые начальные условия x_0 и y_0. Тогда:

$$arctgy_0 = \frac{x_0^2}{2} + C_0; \quad \Rightarrow \quad C_0 = arctgy_0 - \frac{x_0^2}{2};$$

Получаем частное решение $y = tg\left(\frac{x^2}{2} + arctgy_0 - \frac{x_0^2}{2}\right)$.

1. 10 Лекция № 12 (2 часа).

Тема: «Дифференциальные уравнения первого порядка»

1.10.1 Вопросы лекции:

1 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
2 Однородные дифференциальные уравнения и приводящиеся к ним.
3 ДУ второго порядка, допускающие понижение порядка.

1.10.2 Краткое содержание вопросов:

1 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Определение. Дифференциальное уравнение называется **линейным** относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

При этом, если правая часть *Q(x)* равна нулю, то такое уравнение называется **линейным однородным** дифференциальным уравнением, если правая часть *Q(x)* не равна нулю, то такое уравнение называется **линейным неоднородным** дифференциальным уравнением.

P(x) и *Q(x)* – функции, непрерывные на некотором промежутке $a < x < b$.

Метод Бернулли. Суть метода заключается в том, что искомая функция представляется в виде произведения двух функций $y = uv$.

При этом очевидно, что $y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$ - дифференцирование по частям.

Подставляя в исходное уравнение, получаем: $u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + P(x)uv = Q(x)$

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) = Q(x)$$

Далее следует важное замечание – т.к. первоначальная функция была представлена нами в виде произведения, то каждый из сомножителей, входящих в это произведение, может быть произвольным, выбранным по нашему усмотрению. Например, функция $y = 2x^2$ может быть представлена как $y = 1 \cdot 2x^2; \quad y = 2 \cdot x^2;\ y = 2x \cdot x;$ и т.п.

Таким образом, можно одну из составляющих произведение функций выбрать так, что выражение $\frac{du}{dx} + P(x)u = 0$.

Таким образом, возможно получить функцию *u*, проинтегрировав, полученное соотношение как однородное дифференциальное уравнение по описанной выше схеме:

$$\frac{du}{u}=-P(x)dx; \qquad \int\frac{du}{u}=-\int P(x)dx; \qquad \ln|u|=-\int P(x)dx;$$

$$\ln|C_1|+\ln|u|=-\int P(x)dx; \qquad u=Ce^{-\int P(x)dx}; \quad C=1/C_1;$$

Для нахождения второй неизвестной функции *v* подставим поученное выражение для функции *u* в исходное уравнение $u\frac{dv}{dx}+v\left(\frac{du}{dx}+P(x)u\right)=Q(x)$ с учетом того, что выражение, стоящее в скобках, равно нулю.

$$Ce^{-\int P(x)dx}\frac{dv}{dx}=Q(x); \qquad Cdv=Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$$

Интегрируя, можем найти функцию *v*:

$$Cv=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_1; \qquad v=\frac{1}{C}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_2;$$

Т.е. была получена вторая составляющая произведения $y=uv$, которое и определяет искомую функцию.

Подставляя полученные значения, получаем:

$$y=uv=Ce^{-\int P(x)dx}\cdot\frac{1}{C}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_2\right)$$

Окончательно получаем формулу: $y=e^{-\int P(x)dx}\cdot\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_2\right)$, C_2- произвольный коэффициент.

Это соотношение может считаться решением неоднородного линейного дифференциального уравнения в общем виде по способу Бернулли.

Пример. Решить $xy'-3y=x^5$.

Метод Лагранжа решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений еще называют методом **вариации произвольной постоянной**.

Вернемся к поставленной задаче: $y'+P(x)y=Q(x)$. Первый шаг данного метода состоит в отбрасывании правой части уравнения и замене ее нулем. $y'+P(x)y=0$. Далее находится решение получившегося однородного дифференциального уравнения: $y=C_1e^{-\int P(x)dx}$.

Для того, чтобы найти соответствующее решение неоднородного дифференциального уравнения, будем считать постоянную C_1 некоторой функцией от x.

Тогда по правилам дифференцирования произведения функций получаем:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dC_1(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx}+C_1(x)e^{-\int P(x)dx}\cdot(-P(x));$$

$$\frac{dC_1(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx}-C_1(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}+P(x)C_1(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x) \quad \frac{dC_1(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx}=Q(x);$$

Из этого уравнения определим переменную функцию $C_1(x)$:

$dC_1(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$ Интегрируя, получаем: $C_1=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C;$

Подставляя это значение в исходное уравнение,

получаем: $y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$.

Таким образом, мы получили результат, полностью совпадающий с результатом расчета по методу Бернулли.

При выборе метода решения линейных дифференциальных уравнений следует руководствоваться простотой интегрирования функций, входящих в исходный интеграл.

Уравнения Бернулли. Метод Бернулли.

Определение. Уравнением Бернулли называется уравнение вида $y' + Py = Q \cdot y^n$, где *P* и *Q* – функции от *x* или постоянные числа, а *n* – постоянное число, не равное 1.

Для решения уравнения Бернулли применяют подстановку $z = \frac{1}{y^{n-1}}$, с помощью которой, уравнение Бернулли приводится к линейному.

Для этого разделим исходное уравнение на y^n. $\frac{y'}{y^n} + P\frac{1}{y^{n-1}} = Q$;

Применим подстановку, учтя, что $z' = -\frac{(n-1)y^{n-2}}{y^{2n-2}} \cdot y' = -\frac{(n-1)y'}{y^n}$.

$-\frac{z'}{n-1} + Pz = Q \quad z' - (n-1)Pz = -(n-1)Q$

Т.е. получилось линейное уравнение относительно функции z.

Решение этого уравнения будем искать в виде: $z = e^{-\int Pdx}\left(\int Q_1 e^{\int P_1 dx} dx + C\right)$

$$Q_1 = -(n-1)Q; \qquad P_1 = -(n-1)P.$$

2 Однородные дифференциальные уравнения и приводящиеся к ним.

Определение. Функция $f(x, y)$ называется **однородной n – го измерения** относительно своих аргументов *x* и *y*, если для любого значения параметра *t* (кроме нуля) выполняется тождество:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

Пример. Является ли однородной функция $f(x, y) = x^3 + 3x^2 y$?

$$f(tx, ty) = (tx)^3 + 3(tx)^2 ty = t^3x^3 + 3t^3x^2y = t^3(x^3 + 3x^2y) = t^3 f(x, y)$$

Таким образом, функция $f(x, y)$ является однородной 3- го порядка.

Определение. Дифференциальное уравнение вида $y' = f(x, y)$ называется **однородным**, если его правая часть f(x, y) есть однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов.

Любое уравнение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ является однородным, если функции *P(x, y)* и *Q(x, y)* – однородные функции одинакового измерения.

Решение любого однородного уравнения основано на приведении этого уравнения к уравнению с разделяющимися переменными.

Рассмотрим однородное уравнение $y' = f(x, y)$.

Т.к. функция $f(x, y)$ – однородная нулевого измерения, то можно записать:

$$f(tx, ty) = f(x, y).$$

Т.к. параметр *t* вообще говоря произвольный, предположим, что $t = \frac{1}{x}$. Получаем:

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

Правая часть полученного равенства зависит фактически только от одного аргумента $u = \frac{y}{x}$, т.е.

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \varphi(u);$$

Исходное дифференциальное уравнение таким образом можно записать в виде:

$$y' = \varphi(u)$$

Далее заменяем $y = ux$, $y' = u'x + ux'$.

$$u'x + ux' = \varphi(u); \quad u'x + u = \varphi(u); \quad u' = \frac{\varphi(u) - u}{x};$$

таким образом, получили уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции u.

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C;$$

Далее, заменив вспомогательную функцию *u* на ее выражение через x и *y* и найдя интегралы, получим общее решение однородного дифференциального уравнения.

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах.

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка вида:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

называется **уравнением в полных дифференциалах**, если левая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u = F(x, y)$.

Интегрирование такого уравнения сводится к нахождению функции *u*, после чего решение легко находится в виде: $du = 0; \quad u = C.$

Таким образом, для решения надо определить:

1) в каком случае левая часть уравнения представляет собой полный дифференциал функции *u*;

2) как найти эту функцию.

Если дифференциальная форма $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции *u*, то можно записать:

$$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Т.е. $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) \end{cases}.$

Найдем смешанные производные второго порядка, продифференцировав первое уравнение по *y*, а второе – по *x*:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial M(x, y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial N(x, y)}{\partial x} \end{cases}$$

Приравнивая левые части уравнений, получаем **необходимое и достаточное условие** того, что левая часть дифференциального уравнения является полным дифференциалом. Это условие также называется **условием тотальности.**

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Теперь рассмотрим вопрос о нахождении собственно функции *u*.

Проинтегрируем равенство $\dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$:

$$u = \int M(x, y)dx + C(y).$$

Вследствие интегрирования получаем не постоянную величину C, а некоторую функцию C(y), т.к. при интегрировании переменная *y* полагается постоянным параметром.

Определим функцию C(y).

Продифференцируем полученное равенство по *y*.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + C'(y).$$

Откуда получаем: $C'(y) = N(x,y) - \dfrac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx.$

Для нахождения функции С(у) необходимо проинтегрировать приведенное выше равенство. Однако, перед интегрированием надо доказать, что функция С(у) не зависит от *x*. Это условие будет выполнено, если производная этой функции по *x* равна нулю.

$$\left[C'(y)\right]_x' = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\right) =$$

$$= \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0.$$

Теперь определяем функцию $C(y)$:

$$C(y) = \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy + C$$

Подставляя этот результат в выражение для функции *u*, получаем:

$$u = \int M(x,y)dx + \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}M(x,y)dx\right]dy + C.$$

Тогда общий интеграл исходного дифференциального уравнения будет иметь вид:

$$\int M(x,y)dx + \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}M(x,y)dx\right]dy = C.$$

Следует отметить, что при решении уравнений в полных дифференциалах не обязательно использовать полученную формулу. Решение может получиться более компактным, если просто следовать методу, которым формула была получена.

<u>Пример.</u> Решить уравнение $(3x^2 + 10xy)dx + (5x^2 - 1)dy = 0$

Проверим условие тотальности: $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial(3x^2+10xy)}{\partial y} = 10x;$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial(5x^2 - 1)}{\partial x} = 10x.$$

Условие тотальности выполняется, следовательно, исходное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Определим функцию *u*.

$$u = \int M(x,y)dx + C(y) = \int(3x^2 + 10xy)dx + C(y) = x^3 + 5x^2y + C(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 5x^2 + C'(y) = N(x,y) = 5x^2 - 1;$$

$$C'(y) = -1; \quad C(y) = \int(-1)dy = -y + C_1;$$

Итого, $u = x^3 + 5x^2y - y + C_1$.

Находим общий интеграл исходного дифференциального уравнения:

$$u = x^3 + 5x^2y - y + C_1 = C_2;.$$

$$x^3 + 5x^2y - y = C.$$

3 Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Понижение порядка дифференциального уравнения – основной метод решения уравнений высших порядков. Этот метод дает возможность сравнительно легко находить решение, однако, он применим далеко не ко всем уравнениям. Рассмотрим случаи, когда возможно понижение порядка.

1) Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

Если $f(x)$ – функция непрерывная на некотором промежутке $a < x < b$, то решение может быть найдено последовательным интегрированием.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2 = \int dx\int f(x)dx + C_1 x + C_2;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y = \int dx\int dx\dots\int f(x)dx + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_n;$$

2) Уравнения, не содержащие явно искомой функции и ее производных до порядка $k-1$ включительно.

Это уравнения вида: $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)},\dots, y^{(n)}) = 0.$

В уравнениях такого типа возможно понижение порядка на k единиц. Для этого производят замену переменной: $y^{(k)} = z;\quad y^{(k+1)} = z';\quad \dots\quad y^{(n)} = z^{(n-k)}.$

Тогда получаем: $F(x, z, z',\dots, z^{(n-k)}) = 0.$

Теперь допустим, что полученное дифференциальное уравнение проинтегрировано и совокупность его решений выражается соотношением: $z = \psi(x, C_1, C_2,\dots, C_{n-k}).$

Делая обратную подстановку, имеем: $y^{(k)} = \psi(x, C_1, C_2,\dots, C_{n-k})$

Интегрируя полученное соотношение последовательно k раз, получаем окончательный ответ: $y = \varphi(x, C_1, C_2,\dots, C_n).$

3) Уравнения, не содержащие явно независимой переменной.

Это уравнения вида $F(y, y',\dots, y^{(n)}) = 0.$

Порядок таких уравнений может быть понижен на единицу с помощью замены переменных $y' = p.$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p;$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dy''}{dy}p = \frac{d\left(\frac{dp}{dy}p\right)}{dy}p = \frac{d^2p}{dy^2}p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p;\ \text{и т.д.}$$

Подставляя эти значения в исходное дифференциальное уравнение, получаем:

$$F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy},\dots,\frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0$$

Если это уравнение проинтегрировать, и $\varPhi(y, p, C_1, C_2,\dots, C_{n-1}) = 0$ - совокупность его решений, то для решения данного дифференциального уравнения остается решить уравнение первого порядка:

$$\varPhi(y, y', C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0.$$

Примеры: а) $y''' = \cos 2x - 7$; б) $x^3 y'' + x^2 y' = 1$; в) $2yy'' = (y')^2$.

1. 11 Лекция № 13 (2 часа).

Тема: «Знакоположительные и знакочередующиеся числовые ряды»

1.11.1 Вопросы лекции:

1 Понятие числового ряда.
2 Примеры сходящихся и расходящихся рядов.
3 Свойства рядов.
4 Признаки сходимости знакоположительных рядов.
5 Эталонные ряды.
6 Понятие знакочередующегося ряда.
7 Признак Лейбница.
8 Абсолютная и условная сходимость.

1.11.2 Краткое содержание вопросов:

1 Понятие числового ряда

Пусть задана последовательность действительных чисел (a_n): $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

Опр: Символ $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ называется *числовым рядом*, а числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ его *членами*, a_n ($n \in N$) называется *общим членом.*

Обозначим: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ (1)

Опр: Суммы
$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
называются *частичными суммами* ряда (1).

2 Примеры сходящихся и расходящихся рядов

Опр: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм сходится к какому-нибудь числу S (т е $\exists$ конечный предел $\lim_{n\to\infty} S_n = S$), при этом S-*сумма ряда.*

В этом случае $S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ или $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\boxed{S = \lim_{n\to\infty} S_n}$ -сумма ряда

Опр: Если не существует $\lim_{n\to\infty} S_n$ или $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$, то ряд (1) называется *расходящимся.*

Пример: Выяснить, сходится ли данный ряд, если сходится, найти его сумму. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$$

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1 \;\Rightarrow\; \textit{ðÿä ñõîäèòñÿ è åãî ñóììà} \quad S=1$$

<u>ТЕОРЕМА</u> (<u>*Необходимое условие сходимости ряда):*</u> Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то его общий член стремится к 0 (т е $\lim_{n\to\infty}a_n=0$)

<u>**Замечание**: Обратная теорема не верн</u>а.

<u>СЛЕДСТВИЕ</u>: Если $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится.

<u>Пример:</u> Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{3n+2}$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{3n+2}=\frac{4}{3}\neq 0\Rightarrow \textit{ряд}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{3n+2} \quad \textit{расходится}$$

3 Свойства рядов

1) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится (расходится), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{N}a_n$, где $\tilde{N}\in R$ тоже сходится (расходится). Обратное верно при $C\neq 0$

2) Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ сходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$, который называется суммой данных рядов, тоже сходится.

4 Признаки сходимости знакоположительных рядов

<u>ОПР:</u> Ряд, все члены которого положительны, называется <u>*знакоположительным.*</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\quad a_n>0\quad (n\in N) \qquad (2)$$

Достаточные условия сходимости ряда:

1) ТЕОРЕМА (<u>*Признак сравнения*</u>): Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\, a_n>0$ (А) и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n, b_n>0$ (В), $(n\in N)$.и выполняется неравенство $a_n\le b_n,\forall n\in N$,

тогда из сходимости ряда (В)$\Rightarrow$ сходимость ряда (А),

а из расходимости ряда (А) $\Rightarrow$ расходимость ряда (В).

ТЕОРЕМА (<u>*Предельный признак сравнения):*</u> Пусть даны два знакоположительных ряда (А) и (В). Если $\exists\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$, где $k>0$, то оба знакоположительных ряда (А) и (В) в плане сходимости ведут себя одинаково (т. е. либо оба сходятся, либо оба расходятся).

<u>Пример:</u> Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$ (А)

Сравним с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (В)-ряд сходится, т к p=2>1

$K=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot n^2}{n^3+1}=1,\ K>0\Rightarrow$ ряды (A) и (B) в плане сходимости ведут себя одинаково, $\Rightarrow$ ряд (A) -сходятся.

2) ТЕОРЕМА (<u>*Признак Даламбера)*</u>: Пусть дан знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\ a_n>0$ (2). Если начиная с некоторого значения n члены ряда (2) удовлетворяют неравенству $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le 1$, то ряд (2) сходится, а если начиная с некоторого значения n выполняется неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$, то ряд (2) расходится

ТЕОРЕМА (<u>*Предельная форма признака Даламбера):*</u> Пусть дан знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\ a_n>0$ Если $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=D$, то

$$\begin{cases} \text{если } D<1-\text{ряд сходится}\\ \text{если } D>1\ (D=\infty)-\text{ряд расходится}\\ D=1-\text{вопрос о сходимости ряда не решён, признак не подходит.}\end{cases}$$

<u>Пример:</u> Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{9^n}{n^2}$

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n};\quad a_n=\frac{9^n}{n^2};\quad a_{n+1}=\frac{9^{n+1}}{(n+1)^2}=\frac{9\cdot 9^n}{(n+1)^2}$$

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{9\cdot 9^n\cdot n^2}{(n+1)^2\cdot 9^n}=9>1\Rightarrow \text{ряд расходится.}$$

3) ТЕОРЕМА (<u>*Признак Коши*</u>): Пусть дан знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\ a_n>0$ (2). Если начиная с некоторого
значения n выполняется неравенство $\sqrt[n]{a_n}\le 1$, то ряд (2) сходится, а если $\sqrt[n]{a_n}>1$, то ряд (2) расходится

ТЕОРЕМА 2 (<u>*Предельная форма признака Коши):*</u> Если $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=K$, то

$$\begin{cases} \text{если } K<1-\text{ряд сходится}\\ \text{если } K>1\ (D=\infty)-\text{ряд расходится}\\ K=1-\text{вопрос о сходимости ряда не решён, признак не подходит.}\end{cases}$$

4) <u>Интегральный признак Коши.</u>

Если φ(x) – непрерывная положительная функция, убывающая на промежутке [1;∞), то ряд φ(1) + φ(2) + …+ φ(n) + … = $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$ и несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty}\varphi(x)dx$ одинаковы в смысле сходимости.

Пример. Ряд $1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+...+\frac{1}{n^{\alpha}}+...$ сходится при α>1 и расходится α≤1 т.к. соответствующий несобственный интеграл $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится при α>1 и расходится α≤1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ называется **общегармоническим** рядом.

Следствие. Если *f(x)* и *φ(x)* – непрерывные функции на интервале (a, b] и $\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=h,\quad h\neq 0,$ то интегралы $\int_{a}^{b}f(x)dx$ и $\int_{a}^{b}\varphi(x)dx$ ведут себя одинаково в смысле сходимости.

Примеры: Исследовать на сходимость ряды

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

$4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24;\quad n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n;\quad (2n)!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2n$

$a_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!};\quad a_{n+1}=\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}$

Применим предельный признак Даламбера:

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot(n+1)!\cdot(2n)!}{(2n+2)!\cdot n!\,n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2}=\frac{1}{4},\quad D=\frac{1}{4}<1\Rightarrow \text{\textit{ряд сходится.}}$$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}$

Применим предельный признак Коши:

$$K=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt[n]{n}}=\frac{2}{1}=2,\quad K=2>1\Rightarrow \text{\textit{ряд расходится}}$$

5 Эталонные ряды

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - гармонический ряд, расходится.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, *ãäå* $p\in R$ если p>1, то ряд сходится, если p$\le$1, то ряд расходится

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{a}\cdot\mathrm{q}^{\mathrm{n}}$, $a\in R$ если $|q|\ge 1$, то ряд расходится, если $|q|<1$, то ряд сходится

6 Понятие знакочередующегося ряда

ОПР: Ряд $a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots$, где $a_n>0$ (3) называется *знакочередующимся рядом*

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ (3)

(3”) $-a_1+a_2-a_3+a_4-\ldots$, где $a_n>0$ тоже знакочередующийся ряд

Обозначим $u_n=(-1)^n a_n$ *òî* $|u_n|=a_n$

7 Признак Лейбница

ТЕОРЕМА (*Признак Лейбница):* Если общий член знакочередующегося ряда удовлетворяет условиям: $\left.\begin{array}{l}1)\ |u_n|\ \text{\textit{строго убывает}}\\ 2)\ \lim_{n\to\infty}|u_n|=0\end{array}\right\}$ *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *сходится.*

Если хотя бы одно из этих условий нарушается, то ряд расходится.

Пример: Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{7}{n^2}$

$= -7 + \frac{7}{4} - \frac{7}{9} + \frac{7}{16} - ... + (-1)^n \frac{7}{n^2} + ... - \textit{знакочередующийся}.$

1) $|u_n| = \frac{7}{n^2}$; $|u_{n+1}| = \frac{7}{(n+1)^2}$

$|u_{n+1}| < |u_n| \Rightarrow |u_n| - \textit{строго убывает}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n^2} = 0$

$\Rightarrow$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{7}{n^2}$ – *сходится по признаку Лейбница.*

8 Абсолютная и условная сходимость

ОПР: Если ряд сходится вместе с рядом, составленным из модулей его членов, то такой ряд называется *абсолютно сходящимся.*

ОПР: Если знакочередующийся ряд сходится, а ряд, составленный из модулей его членов расходится, то такой ряд называется *условно сходящимся.*

Пример: (продолжим предыдущий пример)

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{7}{n^2}$-сходится $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{n^2} = 7\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \textit{гармонический ряд } p = 2 > 1 \Rightarrow \textit{ряд сходится} \Rightarrow$

Данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{7}{n^2}$-сходится абсолютно

1. 12 Лекция № 14 (2 часа).

Тема: «Степенные ряды»

1.12.1 Вопросы лекции:

1. Понятие функционального ряда.
2. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус и интервал сходимости степенного ряда.
3. Ряд Тейлора и Маклорена. Разложение элементарных функций в ряд.
4. Применение рядов в приближенных вычислениях.

1.12.2 Краткое содержание вопросов:

1 Понятие функционального ряда.

Определение. Если членами ряда будут не числа, а функции от *x*, то ряд называется **функциональным**.

Определение. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ называется **сходящимся** в точке ($x=x_0$), если в этой точке сходится последовательность его частных сумм. Предел последовательности $\{S_n(x_0)\}$ называется **суммой** ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ в точке x_0.

Определение. Совокупность всех значений *x*, для которых сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ называется **областью сходимости** ряда.

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ называется **равномерно сходящимся** на отрезке [a,b], если равномерно сходится на этом отрезке последовательность частичных сумм этого ряда.

Для равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *необходимо и достаточно, чтобы для любого числа ε>0 существовал такой номер N(ε), что при* n*>N и любом целом* p*>0 неравенство*

$$\left|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)\right| < \varepsilon$$

выполнялось бы для всех x на отрезке [a,b].

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится равномерно и притом абсолютно на отрезке [a,b], если модули его членов на том же отрезке не превосходят соответствующих членов сходящегося числового ряда с положительными членами :*

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_n + \ldots$$

т.е. имеет место неравенство:

$$|u_n(x)| \le M_n.$$

<u>Свойства равномерно сходящихся рядов.</u>

1) Теорема о непрерывности суммы ряда.

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *- непрерывные на отрезке [a,b] функции и ряд сходится равномерно, то и его сумма S(x) есть непрерывная функция на отрезке [a,b].*

2) Теорема о почленном интегрировании ряда.

Равномерно сходящийся на отрезке [a,b] ряд с непрерывными членами можно почленно интегрировать на этом отрезке, т.е. ряд, составленный из интегралов от его членов по отрезку [a,b] , сходится к интегралу от суммы ряда по этому отрезку.

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} u_n(x)dx; \quad \alpha, \beta \in [a,b]$$

3) Теорема о почленном дифференцировании ряда.

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходящегося на отрезке [a,b] представляют собой непрерывные функции, имеющие непрерывные производные, и ряд, составленный из этих производных* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ *сходится на этом отрезке равномерно, то и данный ряд сходится равномерно и его можно дифференцировать почленно.*

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{du_n(x)}{dx}$$

2 Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус и интервал сходимости степенного ряда.

<u>ОПР: </u>Ряд вида $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots$, где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, x_0 \in R$ - заданные действительные числа, х-переменная, называется <u>*степенным рядом.*</u>

Обозначение $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ (4) или $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ *(5)*

<u>Теорема Абеля.</u> *Если степенной ряд* $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ *сходится при* $x = x_1$ *, то он сходится и притом абсолютно для всех* $|x| > |x_1|$.

Для исследования на сходимость степенных рядов удобно использовать признак Даламбера.

ТЕОРЕМА (<u>*Признак Даламбера для рядов с произвольными членами):*</u> Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = D$,

то

$$\begin{cases} \text{если } D<1 \Rightarrow \text{ряд сходится абсолютно} \\ \text{если } D>1 \Rightarrow \text{ряд расходится} \\ \text{если } D=1 \Rightarrow \text{вопрос о сходимости ряда не решен} \end{cases}$$

Найдем интервал и радиус сходимости степенного ряда, воспользовавшись признаком Даламбера

$D = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a^n(x-x_0)^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)}{a_n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}(x-x_0)\right|$ Пусть D<1, то степенной ряд абсолютно сходится.

$$\Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}(x-x_0)\right| < 1 \quad \Rightarrow |x-x_0| < \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x-x_0 < \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \Rightarrow x < \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| + x_0 \\ x-x_0 > -\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \Rightarrow x > x_0 - \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \end{array}\right.$$

. Т е $x_0 - \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| < x < x_0 + \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

îáîçí . $c_1 < x < c_2$

Значит, на интервале $(c_1;c_2)$ ряд абсолютно сходится.

$R = \left|\frac{c_1-c_2}{2}\right|$-<u>*радиус сходимости ряда.*</u>

Также нужно выяснить вопрос о сходимости ряда на концах интервала, т е при x= c_1 и x=c_2. Таким образом, получим <u>*область сходимости.*</u>

<u>Пример:</u> Найти область и радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n+2}\cdot x^n$

$u_n = \frac{3^n}{n+2}x^n;\quad a_n = \frac{3^n}{n+2};\quad x_0 = 0$

$D = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{3x(n+2)}{n+3}\right| = |3x|$

Ряд абсолютно сходится, если D<1, т е $|3x|<1$, $|x|<\frac{1}{3}$

$x \in (-\frac{1}{3};\frac{1}{3})$-**интервал сходимости ряда.**

R=1\3-**радиус сходимости**.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости:

1) $x = \frac{1}{3} \Rightarrow \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n+2}\cdot\frac{1}{3^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$

Сравним с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – гармонический ряд, расходится

Применим предельный признак сравнения $K = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+2} = 1 > 0 \Rightarrow$ оба ряда в плане сходимости ведут себя одинаково $\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$- расходится. $\Rightarrow$ $x = -\frac{1}{3}$ не входит в область сходимости ряда.

2) $x = -\frac{1}{3} \Rightarrow \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n+2}(-\frac{1}{3})^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}$

$D = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{-n-2}{n+3}\right| = 1 \Rightarrow$ признак Даламбера не подходит

Рассмотрим признак Лейбница:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ |u_n| \ \textit{строго убывает} \\ 2)\ \lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \textit{ряд} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2} \ \textit{сходится}, \quad \textit{причем условно, т к.}$$

Рассмотрим ряд, составленный из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+2}$ -расходится

$x \in [\ -\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3})$ **- область сходимости ряда**

3 Ряд Тейлора и Маклорена. Разложение элементарных функций в ряд.

Применение формулы Тейлора для разложения функций в степенной ряд широко используется и имеет огромное значение при проведении различных математических расчетов. Если при разложении в ряд взять достаточное количество слагаемых, то значение функции может быть найдено с любой наперед заданной точностью. Практически можно сказать, что для нахождения значения любой функции с разумной степенью точности (предполагается, что точность, превышающая 10 – 20 знаков после десятичной точки, необходима очень редко) достаточно 4-10 членов разложения в ряд.

Функция f(x) = e^x.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, \qquad 0 < \theta < 1$$

Функция f(x) = sinx.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x)$$

$$R_{2n}(x) = \frac{f^{(2n+1)}(\varepsilon)}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \pm\frac{\cos\varepsilon}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Функция f(x) = cosx

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x)$$

$$R_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\varepsilon)}{(2n+2)!}x^{2n+2} = \pm\frac{\cos\varepsilon}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$

Функция f(x) = (1 + x)$^\alpha$.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2\cdot 1}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}; \qquad 0 < \theta < 1$$

Если в полученной формуле принять $\alpha = n$, где n- натуральное число и $f^{(n+1)}(x)=0$, то $R_{n+1} = 0$, тогда

$$(1+x)^n = 1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\ldots+x^n$$

Получилась формула, известная как **бином Ньютона**.

Функция f(x) = ln(1 + x).

$$\boxed{\begin{gathered}\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+R_{n+1}(x)\\ R_{n+1}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(n+1)!}\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)^{n+1};\end{gathered}}$$

4 Применение рядов в приближенных вычислениях

Разложение функций в степенные ряды. Ряд Маклорена.

<u>Теорема:</u> Если функция $f(x)$ в интервале $(-R;R)$ разлагается в степенной ряд $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \quad (1)$, то это разложение единственное, причем ряд имеет вид:

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots \quad (2)$$

Ряд (2) называется <u>рядом Маклорена</u> для функции $f(x)$.

<u>Пример:</u> Разложить в ряд Маклорена функцию:

$\boxed{1}$ $f(x)=e^x$ $\qquad f(x)=f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=\cdots=e^x$

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=e^0=1$$

$$1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1\cdot(n+1)!}{n!\cdot 1}\right|=\lim_{n\to\infty}|n+1|=\infty \quad => \quad (-\infty;+\infty)$$

- интервал сходимости данного ряда.

Можно доказать, что $S(x)=f(x)=e^x$.

$$\boxed{e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots, \quad x\in(-\infty;+\infty)} \qquad (3)$$

$\boxed{2}$ $f(x)=\sin x$

$$f'(x)=\cos x;\ f''(x)=-\sin x;\ f'''(x)=-\cos x;\ f^{IV}(x)=\sin x;\ f^{V}(x)=\cos x;\ldots$$

$$f(0)=0;\ f'(0)=1;\ f''(0)=0;\ f'''(0)=-1;\ f^{IV}(0)=0;\ f^{V}(0)=1;\ f^{VI}(0)=0;\ldots$$

$$\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots \quad (*)$$

$(**)\ \frac{|x|}{1!}+\frac{|x|^3}{3!}+\frac{|x|^5}{5!}+\cdots+\frac{|x|^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$ к ряду $(**)$ применим признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+1}(2n-1)!}{(2n+1)!\,|x|^{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^2}{2n(2n+1)}=x^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n(2n+1)}==x^2\cdot 0=0<1$$

, то есть ряд $(**)$ сходится при всех $x\in(-\infty;+\infty)$. Тогда ряд $(*)$ сходится при тех же значениях x, причем сходится абсолютно.

$S(x)=f(x)=\sin x \quad =>$

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots, \quad x \in (-\infty; +\infty)} \quad (4)$$

$\boxed{3}$ $f(x) = \cos x$

1 способ: аналогично предыдущей функции $\sin x$.

2 способ: основан на применении второго свойства смешанных рядов.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \quad (-\infty; +\infty)$$

$$(\sin x)' = (x)' - \left(\frac{x^3}{3!}\right)' + \left(\frac{x^5}{5!}\right)' - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \left(\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)' + \cdots x \in \ (-\infty; +\infty)$$

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad x \in (-\infty; +\infty)} \quad (5)$$

$\boxed{4}$ $f(x) = (1+x)^m$, где m– число целое или дробное, положительное или отрицательное.

$$f(x) = (1+x)^m;\ f'(x) = m(1+x)^{m-1};\ f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2};\ f'''(x) = \\ = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}; \ldots$$

$$f(0) = 1;\ f'(0) = m;\ f''(0) = m(m-1);\ f'''(0) = m(m-1)(m-2); \ldots ; f^{(n)}(0) = \\ m(m-1)(m-2) \cdot \ldots (m-n+1)$$

$$1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdot\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$ - биномиальный ряд.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)\cdot(n+1)!}{n!\cdot m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(m-n)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{m}{n}-1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+0}{0-1}\right| = 1 \quad => \quad (-1;1) -$$

интервал сходимости биномиального ряда.

$$S(x) = f(x) = (1+x)^m;$$

$$\boxed{(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots \quad x \in (-1;1)} \quad (6)$$

Частный случай: $m = -1; f(x) = (1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x}$

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots,\ -1 < x < 1} \quad (7)$$

Пример: Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^n t^n + \cdots,\ -1 < t < 1,$ где $t = x^2$.

$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots,$ где $x \in (-1;1)$

$\boxed{5}$ $f(x) = \ln(1+x)$; Применим третье свойство степенного ряда. Известно, что

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots, \quad x \in (-1;1)$$

$$\int_0^x \frac{d(t+1)}{1+t} = \int_0^x 1dt - \int_0^x tdt + \int_0^x t^2dt - \int_0^x t^3dt + \cdots \quad x(-1;1)$$

$$\ln|1+t|\Big|_0^x = t\Big|_0^x - \frac{t^2}{2}\Big|_0^x + \frac{t^3}{3}\Big|_0^x - \frac{t^4}{4}\Big|_0^x + \cdots$$

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots \quad x \in (-1;1)} \quad (8)$$

$\boxed{6}$ Известно, что $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots, \quad x \in (-1;1)$

$$\int_0^x \frac{dx}{1+t^2} = \int_0^x dt - \int_0^x t^2dt + \int_0^x t^4dt - \int_0^x t^6dt + \cdots$$

$$\boxed{arctg\ x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \quad x \in (-1;1)} \quad (9)$$

$\boxed{7}$ $f(x) = arcsin\, x$.

В формуле (6) $m = -\frac{1}{2}$ и заменив x на $(-x^2)$, получим равенство:

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \cdots \quad x \in [-1;1]$. Тогда

$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x dt + \int_0^x \frac{t^2}{2}dt + \int_0^x \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4dt + \cdots$ или

$arcsin\, x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \cdots, \quad x \in [-1;1]$.

1. 13 Лекция № 15 (2 часа).

Тема: «Случайные события и их вероятности»

1.13.1 Вопросы лекции:

1. Испытание и событие. Виды событий, их классификация.
2. Понятие вероятности случайного события. Свойства вероятности.
3. Комбинаторика (элементы дискретной математики)
4. Сумма и произведение событий. Теоремы сложения и умножения.
5. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.

1.13.2 Краткое содержание вопросов:

1 Испытание и событие. Виды событий, их классификация.

Под испытанием будем понимать опыт, эксперимент, любое действие, приводящее к возникновению определенной совокупности условий. Событием называется результат всякого испытания. Все события делятся на достоверные, невозможные и случайные.

Достоверное событие — это событие, которое обязательно наступает в данном испытании.

Невозможное — это событие, которое никогда не наступает в данном испытании.

Случайное событие – это событие, которое в данном испытании может наступить или не наступить.

Случайные событие называются несовместными в данном испытании, если никакие два из них в этом испытании не могут наступить одновременно.

Случайные события образую полную группу, если являются всеми возможными результатами данного испытания.

Случайные события называются противоположными в данном испытании, если они несовместны и образуют полную группу.

Рассмотрим полную группу равновозможных, несовместных, случайных событий. Такие события будут называться случаями, шансами или исходами.

Операции над событиями

Определение. События А и В называются **равными**, если осуществление события А влечет за собой осуществление события В и наоборот.

Определение. Объединением или **суммой** событий A_k называется событие А, которое означает появление **хотя бы одного** из событий A_k.

$$A = \bigcup_k A_k$$

Определение. Пересечением или **произведением** событий A_k называется событие А, которое заключается в осуществлении **всех** событий A_k.

$$A = \bigcap_k A_k$$

Определение. Разностью событий А и В называется событие С, которое означает, что происходит событие А, но не происходит событие В.

$$C = A \setminus B$$

Определение. Дополнительным к событию А называется событие $\overline{A}$, означающее, что событие А **не происходит.**

Определение. Элементарными исходами опыта называются такие результаты опыта, которые взаимно исключают друг друга и в результате опыта происходит одно из этих событий, также каково бы ни было событие А, по наступившему элементарному исходу можно судить о том, происходит или не происходит это событие.

Совокупность всех элементарных исходов опыта называется **пространством элементарных событий**.

События называются равновозможными, если нет оснований считать, что одно является более возможным, чем другое.

2 Понятие вероятности случайного события. Свойства вероятности.

Определение. Вероятностью события А называется математическая оценка возможности появления этого события в результате опыта.

Классическое определение вероятности события. Вероятностью события А называется отношение:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число благоприятствующих случаев (исходов), а n – число всех возможных случаев (исходов), образующих полную группу равновозможных, несовместных, случайных событий.

Если какому-либо событию благоприятствует все n случаев, образующих полную группу равновозможных, несовместных, случайных событий, то оно является достоверным ($p=1$). Событие, которому не благоприятствует ни один из n случаев, является невозможным ($p=0$).

Ограниченность классического определения вероятности

Классическая формула вероятности события применяется для непосредственного подсчета вероятностей тогда, когда задача сводится к «схеме случаев». Другими словами классическое определение предполагает, что число элементарных исходов испытания конечно. На практике же часто встречаются испытания, число возможных исходов которых бесконечно, то есть далеко не всякий опыт может быть сведен к «схеме случаев». Следовательно, существует класс событий, вероятности которых нельзя вычислить по классической формуле. Например, бросается несимметричная игральная кость. Какова вероятность выпадения нужной грани?

Часто так же невозможно представить результат испытания в виде совокупности элементарных исходов или указать основания, позволяющие считать элементарные события равновозможными.

Указанные недостатки могут быть преодолены введением геометрической и статистической вероятностей.

Геометрические вероятности

Геометрической вероятностью называют вероятность попадания наудачу брошенной точки в область (отрезок, часть плоскости, часть пространства).

Пусть отрезок *l* составляет часть отрезка *L*. На отрезок *L* наудачу поставлена точка. Вероятность попадания точки на отрезок *l* пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения относительно отрезка L:

$$P = \frac{\text{длина l}}{\text{длина L}}.$$

Пусть плоская фигура g составлять часть плоской фигуры G. На G наудачу брошена точка. Вероятность попадания брошенной точки на g пропорциональна площади этой фигуры и не зависит ни от ее расположения относительно G, ни от формы g:

$$P = \frac{\text{площадь g}}{\text{площадь G}}.$$

По аналогии через отношение объемов определяется вероятность попадания наудачу брошенной точки в часть пространства.

Статистическая вероятность события

Введем еще одну количественную оценку возможности появления события в данном испытании, корнями уходящую в опыт, эксперимент.

Относительной частотой наступления события A называется отношение

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

где n – число проведенных опытов (испытаний), а m – число испытаний, в которых событие A наступило.

Заметим, что классическая формула не требует проведения испытаний в действительности, $P(A)$ вычисляется до опыта. Для нахождения относительной частоты испытания должны быть проведены, либо возможно их проведение, $W(A)$ вычисляют после опыта.

При небольшом числе опытов W носит случайный характер и может изменяться. Например, при 10 бросаниях монеты герб может появиться 2 раза, а может 8 раз.

Но при увеличении числа опытов частота утрачивает случайный характер, случайные причины, влияющие на результат каждого отдельного опыта, взаимно «гасят» друг друга и W приближается к некоторой средней, постоянной величине.

Если в одинаковых условиях производят серии опытов и в каждой серии число испытаний довольно велико, то W обнаруживает свойство устойчивости. В таком случае W или близкое к ней число принимают за статистическую вероятность события.

Все свойства вероятности, вытекающие из классического определения, распространяются и на статистическое определение вероятности события.

Для существования статистической вероятности события требуется:

1) возможность, хотя бы принципиальная, производить неограниченное число испытаний, в каждом из которых событие A наступает или нет;

2) устойчивость относительных частот в различных сериях из достаточно большого числа испытаний.

Например, по данным шведской статистики приводится относительная частота рождения девочек по месяцам года: 0,486; 0,489; 0,490; 0,471; 0,478; 0,482; 0,462; 0,484; 0,485; 0,491; 0,482; 0,473.

Значение относительной частоты колеблется около числа 0,482, его можно принять за статистическую вероятность рождения девочки. Статистические данные других стран дают примерно те же значения W и ту же статистическую вероятность.

Рассмотрим другой пример:

Число бросаний монеты	Число появлений герба	W
4040	2048	0,5069
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

Данные таблицы показывают как с увеличением числа испытаний «уточняется» значение относительной частоты.

Недостатком статистического определения является неоднозначность выбора значения относительной частоты при возникновении свойства устойчивости.

При практическом применении вероятностных методов исследования необходимо понимать, принадлежит ли исследуемое случайное явление к категории массовых, для которых выполняется свойство устойчивости частоты и понятие вероятность имеет глубокий практический смысл.

Между относительной частотой события и классической вероятностью существует глубокая, органичная связь. Получая вероятность некоторого события, мы не можем придать этому числу иного реального, практического смысла, чем относительная частота появления данного события при большом числе опытов.

3 Комбинаторика (элементы дискретной математики)

При решении некоторых задач на определение вероятности применяются формулы из комбинаторики. Рассмотрим основные понятия.

Пусть имеется некоторая совокупность элементов какой угодно природы. Из этой совокупности элементов можно составить отдельные группы, отличающиеся одна от другой либо порядком этих элементов, либо самими элементами, либо тем и другим сразу. Эти группы называются *соединениями*.

Пусть количество всех элементов, из которых составляются соединения, равно числу n, а число элементов в каждом соединении равно k. Очевидно, что число k не может быть больше числа n. Различают три вида соединений: размещения, перестановки, сочетания.

Определение. Размещениями из n различных элементов по k элементов называются комбинации k элементов, отличающиеся одно от другого или самими элементами, или их порядком.

Число всевозможных размещений из n элементов по k обозначается символом A_n^k.

Число всевозможных размещений из n элементов по k вычисляется по формуле: $A_n^k = n(n-1)(n-2)(n-3)...(n-k+1)$.

По определению $A_1^0 = 1$.

Определение. Перестановками называются комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающихся только порядком их расположения.

Число всевозможных перестановок из n элементов обозначают символом P_n и вычисляют по формуле: $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n = n!$

Определение. Сочетаниями называются комбинации, составленные из n различных элементов по k элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по k принято обозначать символом C_n^k. Это число вычисляется по формуле: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Следует иметь в виду, что $0! = 1$.

При решении задач комбинаторики используют следующие правила:

Правило суммы.

Если объект A может быть выбран m способами, а объект B может быть выбран другими n способами, то выбор либо A, либо B из объединенной совокупности может быть осуществлен $m+n$ способами.

Правило произведения.

Если объект A может быть выбран m способами и после каждого такого выбора объект B может быть выбран n способами, то выбор пары объектов A и B в указанном порядке может быть осуществлен $m \cdot n$ способами.

Задача. В урне содержится 5 черных и 6 белых шаров. Случайным образом вынимают 4 шара. Найти вероятность того, что среди них имеется: а) ровно 2 белых шара, б) меньше, чем 2 белых шара, в) хотя бы 1 белый шар.

Решение.

а) Пусть событие А – среди вынутых шаров ровно два белых (тогда два других вынутых шара – черные). Вероятность этого события найдем, используя классическую формулу вероятности: $P(A) = \frac{m}{n}$, где n - число всевозможных элементарных исходов, m – число элементарных исходов, благоприятствующих данному событию. Элементарными исходами являются всевозможные сочетания:

$$n = C_{11}^4 = \frac{11!}{4! \cdot (11-4)!} = \frac{11!}{4! \cdot 7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7!} = 330;$$

$$m = C_6^2 C_5^2 = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = 15 \cdot 10 = 150.$$

Получаем: $P(A) = \frac{150}{330} = \frac{5}{11}$.

б) Пусть событие В – среди вынутых шаров меньше, чем два белых шара. Это возможно, когда вынули один белый и три черных шара или ноль белых и четыре черных шара. Поэтому

$$m = C_6^1 C_5^3 + C_6^0 C_5^4 = \frac{6!}{1! \cdot (6-1)!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} + \frac{6!}{0! \cdot (6-0)!} \cdot \frac{5!}{4! \cdot (5-4)!} = 60 + 5 = 65.$$

Получаем: $P(B) = \frac{65}{330} = \frac{13}{66}$.

Задача. Из колоды в 56 карт вынимается одна карта. Какова вероятность того, что она пиковой масти?

Испытание: извлечение карты из колоды.

Событие А: появление пиковой масти.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

Задача. Одновременно подбрасывают две монеты. Какова вероятность выпадения герба на обеих монетах сразу?

Испытание: подбрасывание монет (одновременно).

Событие А: появление герба на двух монетах сразу.

Составим схему возможных случаев:

Первая монета	Вторая монета

герб	герб
герб	цифра
цифра	герб
цифра	цифра

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{4}.$$

Задача. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу, попадет в кольцо, образованное двумя окружностями с радиусами 5 и 10 см.

Площадь кольца (фигура g): $S_g=\pi\left(10^2-5^2\right)=75\pi$

$$S_G=\pi\cdot 10^2=100\pi \qquad P=\frac{75\pi}{100\pi}=0{,}75$$

4 Сумма и произведение событий. Теоремы сложения и умножения.

Определение. Суммой двух событий А и В называется новое событие С, состоящее в появлении хотя бы одного из данных событий.

В частности, если два события несовместные, то сумма этих событий – событие, состоящее в появление одного из этих событий, безразлично какого.

Определение. Суммой нескольких событий называется новое событие, состоящее в появлении хотя бы одного из исходных событий.

Определение. Произведением (совмещением) двух событий А и В называют новое событие С, состоящее в одновременном появлении и события А, и события В.

Определение. Произведением нескольких событий называют новое событие, состоящее в одновременном появлении всех исходных событий.

Зависимые и независимые события. Условная вероятность.

Определение. Событие А называется **независимым** от события В, вероятность события А не зависит от того, произошло событие В или нет. Событие А называется **зависимым** от события В, если вероятность события А меняется в зависимости от того, произошло событие В или нет.

Если при вычислении вероятности события налагаются дополнительные условия, то вероятность события называют условной.

Определение. Вероятность события В, вычисленная при условии, что имело место событие А, называется **условной вероятностью** события В.

Теоремы сложения и умножения.

Теорема (о сложении вероятностей несовместных событий).

Пусть события А и В несовместны в данном испытании (явлении, опыте), причем вероятности этих событий известны.

Теорема. Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Формула из теоремы справедлива для любого числа попарно несовместных слагаемых:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

Следствие. Если случайные события $A_1, A_2, \dots A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то справедливо равенство:

$$P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n)=1$$

Определение. Случайные события А и В называются совместными, если в данном испытании могут наступить оба этих события, т.е. произойдет совмещение событий А и В.

Событие, заключающееся в совмещении событий А и В, будем обозначать (А и В) или (АВ).

Теорема (о сложении вероятностей совместных событий).

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совмещения:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

Событие А называется независимым от события В, если вероятность появления события А не зависит от того, наступило событие В в данном испытании или нет.

Теорема (об умножении вероятностей независимых событий).

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Замечание. Равенство из теоремы справедливо для любых *n* независимых событий:

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$$

Замечание. С учетом теоремы об умножении вероятностей теорема о сложении вероятностей совместных событий записывается следующим образом:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B),$$

если события А и В – совместны, но независимы.

Например, в урне 3 белых и 2 черных шара. Наудачу вынимают один шар, затем еще один. Событие В: появление белого шара при первом вынимании; событие А: появление белого шара при втором вынимании. Тогда $P_B(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Теорема (об умножении вероятностей зависимых событий). Вероятность совмещения двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго, вычисленную в предположении, что первое событие наступило:

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

Из теоремы произведения вероятностей можно сделать вывод о вероятности появления хотя бы одного события.

Если в результате испытания может появиться *n* событий, независимых в совокупности, то вероятность появления хотя бы одного из них равна

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n$$

Здесь событие А обозначает наступление хотя бы одного из событий A_i, а q_i – вероятность противоположных событий $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_n}$.

Пример. Из полной колоды карт (52 шт.) одновременно вынимают четыре карты. Найти вероятность того, что среди этих четырех карт будет хотя бы одна бубновая или одна червонная карта.

Обозначим появление хотя бы одной бубновой карты – событие А, появление хотя бы одной червонной карты – событие В. Таким образом нам надо определить вероятность события С = А + В.

Кроме того, события А и В – совместны, т.е. появление одного из них не исключает появления другого.

Всего в колоде 13 червонных и 13 бубновых карт.

При вытаскивании первой карты вероятность того, что не появится ни червонной ни бубновой карты равна $\frac{26}{52}$, при вытаскивании второй карты - $\frac{25}{51}$, третьей - $\frac{24}{50}$, четвертой - $\frac{23}{49}$.

Тогда вероятность того, что среди вынутых карт не будет ни бубновых, ни червонных равна $P(\overline{C}) = \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50} \cdot \frac{23}{49}$.

Тогда $P(C) = 1 - P(\overline{C}) \approx 0{,}945$

5 Формула полной вероятности. Формулы Байеса.

Теорема (формула полной вероятности)

Пусть некоторое событие А может произойти вместе с одним из несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n$, составляющих полную группу событий. Пусть известны вероятности этих событий $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$ и условные вероятности наступления события А при наступлении события H_i $P(A/H_1), P(A/H_2), ..., P(A/H_n)$.

Теорема. Вероятность события А, которое может произойти вместе с одним из событий $H_1, H_2, ..., H_n$, равна сумме парных произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующие им условные вероятности наступления события А.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$$

Фактически эта формула **полной вероятности** уже использовалась при решении примеров, приведенных выше, например, в задаче с револьвером.

Доказательство.

Т.к. события $H_1, H_2, ..., H_n$ образуют полную группу событий, то событие А можно представить в виде следующей суммы:

$$A = AH_1 + AH_2 + ... + AH_n = \sum_{i=1}^{n} AH_i$$

Т.к. события $H_1, H_2, ..., H_n$ несовместны, то и события AH_i тоже несовместны. Тогда можно применить теорему о сложении вероятностей несовместных событий:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i)$$

При этом $P(AH_i) = P(H_i)P(A/H_i)$

Окончательно получаем: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$. Теорема доказана.

Пример. Один из трех стрелков производит два выстрела. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для первого стрелка равна 0,4, для второго – 0,6, для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что в цель попадут два раза.

Вероятность того, что выстрелы производит первый, второй или третий стрелок равна $\frac{1}{3}$.

Вероятности того, что один из стрелков, производящих выстрелы, два раза попадает в цель, равны:

- для первого стрелка: $p_1^2 = 0{,}4^2 = 0{,}16$;
- для второго стрелка: $p_2^2 = 0{,}6^2 = 0{,}36$;
- для третьего стрелка: $p_3^2 = 0{,}8^2 = 0{,}64$;

Искомая вероятность равна:

$$p=\frac{1}{3}p_1^2+\frac{1}{3}p_2^2+\frac{1}{3}p_3^3=\frac{1}{3}(0{,}16+0{,}36+0{,}64)=\frac{29}{75}$$

Допустим, что событие А уже наступило. Это изменит вероятности гипотез $P(B_1),P(B_2),...,P(B_n)$. Требуется определить условные вероятности этих гипотез $P_A(B_1),...,P_A(B_n)$, в предположении, что событие А уже наступило.

Найдем

$$P(A\cdot B_1)=p(B_1)\cdot P_{B_1}(A)=p(A)\cdot P_A(B_1)\Rightarrow P_A(B_1)=\frac{P(A\cdot B_1)}{P(A)}=\frac{p(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}$$

Заменим $P(A)$ формулой полной вероятности события:

$$P_A(B_1)=\frac{p(B_1)\cdot P_{B1}(A)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}$$

Аналогично определяется $P_A(B_2),...,P_A(B_n)$.

Окончательно получаем формулу Байеса или формулу из теоремы гипотез:

$$P_A(B_k)=\frac{p(B_k)\cdot P_{B_k}(A)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}.$$

1. 14 Лекция № 16-17 (4 часа).

Тема: «Случайные величины»

1.14.1 Вопросы лекции:

1. Определение случайной величины и её виды.
2. Способы задания дискретной случайной величины (ДСВ).
3. Числовые характеристики ДСВ. Их роль и назначения.
4. Виды распределений ДСВ.
5. Способы задания непрерывной случайной величины (НСВ).
6. Числовые характеристики НСВ.
7. Виды распределений НСВ.

1.14.2 Краткое содержание вопросов:

1 Определение случайной величины и ее виды.

Выше рассматривались случайные события, являющиеся качественной характеристикой случайного результата опыта. Для получения количественной характеристики вводится понятие случайной величины.

Рассмотрим событие: появление определения числа очков на грани игральной кости, выпавшей при бросании. При этом может появляться любое из чисел 1,2,3, … 6. Наперед определить число выпавших очков невозможно, поскольку оно зависит от многих случайных причин, которые полностью не могут быть учтены. В этом смысле число очков есть случайная величина, а числа 1,2, … 6 - возможные значения этой величины.

Определение. Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принимать то или иное значение, причем заранее известно какое именно.

Обозначение: X, Y, Z, … - случайные величины; x, y, z, … - значения случайных величин.

Случайные величины делятся на дискретные (ДСВ) и непрерывные (НСВ).

Определение. Дискретной случайной величиной называется такая величина, которая в результате опыта может принимать определенные значения с определенной вероятностью, образующие счетное множество (множество, элементы которого могут быть занумерованы).

Это множество может быть как конечным, так и бесконечным.

Значения ДСВ отделены промежутками и могут быть перечислены до проведения испытания. Например, число студентов группы, успешно сдавших экзамен по математике.

Определение. Непрерывной случайной величиной называется такая величина, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Очевидно, что число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно. Например, скорость ветра в течение суток в данной местности или отклонение размера детали от стандарта.

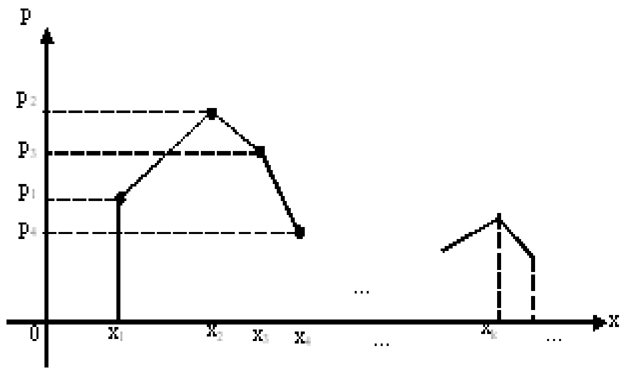
2 Способы задания ДСВ.

Переменная величина X, принимающая в результате испытания одно из конечной или бесконечной последовательности значений $x_1, x_2, \dots x_k$, называется дискретной, если каждому значению x_k соответствует определенная вероятность p_k того, что переменная величина X примет именно это значение.

Функциональная зависимость вероятности p_k от значения x_k называется законом распределения вероятностей ДСВ X (или кратко «закон распределения случайной величины»).

Возможные значения случайной величины	x_1	x_2	x_3	…	x_k	…
Вероятности этих значений	p_1	p_2	p_3	…	p_k	…

Закон распределения можно задать графически:



3 Числовые характеристики ДСВ. Их роль и назначение.

Случайная величина полностью определяется законом распределения.

Однако во многих вопросах практики нет необходимости характеризовать СВ полностью, исчерпывающим образом. Достаточно указать отдельные числовые параметры, характеризующие основные черты распределения. Такие параметры называются числовыми характеристиками случайной величины. Числовые характеристики задают случайную величину косвенно, описывают случайную величину суммарно. В теории вероятностей применяется большое количество числовых характеристик, имеющих различное назначение. Из них рассмотрим только некоторые, наиболее часто встречающиеся характеристики: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Имеется ДСВ X с соответствующим законом распределения:

x	x_1	x_2	…	x_n

$p(X=x_k)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Математическим ожиданием ДСВ *X* (M[x] или m_x) называют сумму произведений всех возможных значений этой величины на вероятности этих значений:

$$M[x]=x_1p_1+\ldots+x_np_n=\sum_{k=1}^{n}x_kp_k \text{ , при этом } \sum_{k=1}^{n}p_k=1 \text{ .}$$

Если значения случайной величины образуют бесконечную последовательность, то $m_x=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\cdot p_k$. Мы будем рассматривать только такие случайные величины, для которых этот ряд сходится.

Замечание. Математическое ожидание случайной величины есть неслучайная (постоянная) величина.

Вероятностный смысл M[*X*]: математическое ожидание приближенно равно (чем больше число испытаний, тем точнее) среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины. На числовой оси возможные значения случайной величины расположены слева и справа от M[*X*]. Поэтому M[*X*] называют центром распределения вероятностей случайной величины (точнее – абсциссой центра).

Свойства математического ожидания:

1. Математическое ожидание постоянной равно самой постоянной $M[c]=c$, где с – ДСВ, которая имеет одно возможное значение с и принимает его с *p*=1. Следовательно, $M[c]=c\cdot 1=c$.

2. Постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания: $M[cX]=c\cdot M[X]$.

3. $M[X\cdot У]=M[X]\cdot M[У]$, $M[X+У]=M[X]+M[У]$

где величины *X* и *У* – независимы.

<u>Дисперсия дискретной случайной величины, целесообразность ее введения. Свойства дисперсии.</u>

Математическое ожидание не полностью характеризует случайную величину. На практике часто требуется оценить рассеяние возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения. Например, насколько кучно лягут снаряды вблизи цели, которая должна быть поражена.

Дисперсией случайное величины *X* называется математическое ожидание квадрата соответствующей центрированной случайной величины:

$$D[X]=M\left[(X-m_x)^2\right] \quad \textit{или} \quad D[X]=\sum_{k=1}^{n}(X_k-m_x)^2\cdot p_k$$

Для вычисления $D[X]$ удобно использовать формулу:

$$D[X]=\sum_{k=1}^{n}(X_k-m_x)^2\cdot p_k=\sum_{k=1}^{n}x_k^2\cdot p_k-2\sum_{k=1}^{n}x_k\cdot m_x\cdot p_k+\sum_{k=1}^{n}m_x^2\cdot p_k=\sum_{k=1}^{n}x_k^2\cdot p_k-$$

$$-2\mathrm{m}_x\sum_{k=1}^{n}x_k\cdot p_k+m_x^2\sum_{k=1}^{n}p_k=M\left[X^2\right]-2\mathrm{m}_x\cdot m_x+m_x^2\cdot 1=M\left[X^2\right]-m_x^2$$

С ледовательно, $D[X]=M\left[X^2\right]-m_x^2$, т.е. дисперсия равна разности математического ожидания квадрата случайной величины и квадрата математического ожидания этой случайной величины.

Свойства дисперсии:

1. $D[C]=M\left[(c-c)^2\right]=M[0]=0$, $M[c]=c$

2. $D[CX] = C^2 \cdot D[X]$
3. $D[X + Y] = D[X] + D[Y]$
4. $D[C + X] = D[C] + D[X] = 0 + D[X] = D[X]$
5. $D[X - Y] = D[X] + D[Y]$

Среднее квадратическое отклонение.

Легко показать, что дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины. В связи с этим в тех случаях, когда желательно, чтобы оценка рассеяния имела размерность случайной величины, вычисляют квадратный корень из дисперсии.

Определение. Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии.

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]}$$

Среднее квадратическое отклонение случайной величины можно вычислить по формуле $\sigma[X] = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - m_x)^2 \cdot p_k}$

Теорема. Среднее квадратичное отклонение суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин равно квадратному корню из суммы квадратов средних квадратических отклонений этих величин.

$$\sigma(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + ... + \sigma^2(X_n)}$$

Пример. Случайная величина X задана законом распределения:

X	2	3	10
p	0,1	0,4	0,5

Найти среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Решение. Найдем математическое ожидание случайной величины X:

$$M(X) = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}4 + 10 \cdot 0{,}5 = 6{,}4$$

Найдем математическое ожидание случайной величины X^2:

$$M(X^2) = 2^2 \cdot 0{,}1 + 3^2 \cdot 0{,}4 + 10^2 \cdot 0{,}5 = 54$$

Найдем дисперсию:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 54 - 6{,}4^2 = 13{,}04$$

Искомое среднее квадратическое отклонение:

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{13{,}04} \approx 3{,}6$

4 Виды распределений ДСВ.

Если производится *n* независимых испытаний, в каждом из которых событие А может появиться с одинаковой вероятностью *p* в каждом из испытаний, то вероятность того, что событие не появится, равна $q = 1 - p$.

Примем число появлений события в каждом из испытаний за некоторую случайную величину Х.

Чтобы найти закон распределения этой случайной величины, необходимо определить значения этой величины и их вероятности.

Значения найти достаточно просто. Очевидно, что в результате *n* испытаний событие может не появиться вовсе, появиться один раз, два раза, три и т.д. до *n* раз.

Вероятность каждого значения этой случайной величины можно найти по формуле Бернулли.

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad k = 0,1,2,...$$

Эта формула аналитически выражает искомый закон распределения. Этот закон распределения называется **биноминальным**.

Числовые характеристики биномиального распределения:

$$M(X) = np\,,\ D(X) = npq\,,\ \sigma(X) = \sqrt{npq}$$

Пример. В партии 10% нестандартных деталей. Наугад отобраны 4 детали. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины Х – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных и построить многоугольник полученного распределения.

Вероятность появления нестандартной детали в каждом случае равна 0,1.

Найдем вероятности того, что среди отобранных деталей:

1) Вообще нет нестандартных.

$$P_4(0) = \frac{4!}{0!\cdot 4!}0{,}1^0 \cdot 0{,}9^4 = 0{,}6561$$

2) Одна нестандартная.

$$P_4(1) = \frac{4!}{1!\cdot 3!}0{,}1^1 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}2916$$

3) Две нестандартные детали.

$$P_4(2) = \frac{4!}{2!\cdot 2!}0{,}1^2 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}0486$$

4) Три нестандартные детали.

$$P_4(3) = \frac{4!}{3!\cdot 1!}0{,}1^3 \cdot 0{,}9^1 = 0{,}0036$$

5) Четыре нестандартных детали.

$$P_4(4) = \frac{4!}{4!\cdot 0!}0{,}1^4 \cdot 0{,}9^0 = 0{,}0001$$

Построим многоугольник распределения.

Пример. Две игральные кости одновременно бросают 2 раза. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины Х – числа выпадений четного числа очков на двух игральных костях.

Каждая игральная кость имеет три варианта четных очков – 2, 4 и 6 из шести возможных, таким образом, вероятность выпадения четного числа очков на одной кости равна 0,5.

Вероятность одновременного выпадения четных очков на двух костях равна 0,25.

Вероятность того, что при двух испытаниях оба раза выпали четные очки на обеих костях, равна:

$$P_2(2) = \frac{2!}{0!\cdot 2!}0{,}25^2 \cdot 0{,}75^0 = 0{,}0625$$

Вероятность того, что при двух испытаниях один раз выпали четные очки на обеих костях:

$$P_2(1) = \frac{2!}{1!\cdot 1!}0{,}25^1 \cdot 0{,}75^1 = 0{,}375$$

Вероятность того, что при двух испытаниях ни одного раза не выпаде четного числа очков на обеих костях:

$$P_2(0) = \frac{2!}{0!\cdot 2!}0{,}25^0 \cdot 0{,}75^2 = 0{,}5625$$

Распределение Пуассона.

Пусть производится n независимых испытаний, в которых появление события А имеет вероятность p. Если число испытаний n достаточно велико, а вероятность появления события А в каждом испытании мало ($p \le 0{,}1$), то для нахождения вероятности появления события А k раз находится следующим образом.

Сделаем важное допущение – произведение np сохраняет постоянное значение:

$$np = \lambda$$

Практически это допущение означает, что среднее число появления события в различных сериях испытаний (при разном n) остается неизменным.

По формуле Бернулли получаем:

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

Найдем предел этой вероятности при $n\to\infty$.

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\right] = \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$P_n(k) \cong \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!}\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

Получаем формулу **распределения Пуассона:**

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Если известны числа λ и k, то значения вероятности можно найти по соответствующим таблицам распределения Пуассона.

Числовые характеристики распределения Пуассона:

$$M(X) = np\,,\ D(X) \approx np\,,\ \sigma(X) \approx \sqrt{np}\,.$$

Пусть имеется некоторая последовательность событий, наступающих в случайные моменты времени (будем называть это потоком событий). *Интенсивность* потока (среднее число событий, появляющихся в единицу времени) равна λ. Пусть этот поток событий - *простейший* (пуассоновский), т.е. обладает тремя свойствами:

1) вероятность появления k событий за определённый промежуток времени зависит только от длины этого промежутка, но не от точки отсчёта, другими словами, интенсивность потока есть постоянная величина (свойство *стационарности*);

2) вероятность появления k событий в любом промежутке времени не зависит от того, появлялись события в прошлом или нет (свойство *«отсутствия последействия»*);

3) появление более одного события за малый промежуток времени практически невозможно (свойство *ординарности*).

Вероятность того, что за промежуток времени t событие произойдёт k раз, равна

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}$$

Геометрическое и гипергеометрическое распределение.

Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события A равна p, и следовательно, вероятность его непоявления равна $q = 1 - p$. Испытания заканчиваются, как только появится событие A. Таким образом, если событие появилось в $k -$м испытании, то в предшествующих $k-1$ испытаниях оно не появлялось.

Обозначим через X дискретную случайную величину – числа испытаний, которые нужно произвести до первого появления события A.

Таблица распределения имеет вид

X	1	2	...	k	...
P	p	$p(1-p)$	...	$p(1-p)^{k-1}$	...

Если количество испытаний не ограничено, т.е. если случайная величина может принимать значения 1, 2, ..., ∞, то математическое ожидание и дисперсию геометрического распределения можно найти по формулам $M(X) = \frac{1}{p}$, $D(X) = \frac{q}{p^2}$, $\sigma(X) = \frac{\sqrt{q}}{p}$.

Гипергеометрическое распределение.

Задача. Пусть в партии из N изделий имеется M стандартных ($M < N$). Из партии случайно отбирают n изделий, причем отобранное изделие перед отбором следующего не возвращается. Обозначим через X случайную величину – число m стандартных изделий среди n отобранных. Вероятность того, что среди n отобранных окажется ровно m стандартных вычисляется по формуле: $P(X = m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$.

Формула определяет распределение вероятностей, которое называют гипергеометрическим.

5 Способы задания непрерывной случайной величины (НСВ).

Во всех рассмотренных выше случаях случайная величина определялась путем задания значений самой величины и вероятностей этих значений.

Однако такой метод применим далеко не всегда. Например, в случае непрерывной случайной величины, ее значения могут заполнять некоторый произвольный интервал. Очевидно, что в этом случае задать все значения случайной величины просто нереально.

Даже в случае, когда это сделать можно, зачастую задача решается чрезвычайно сложно. Рассмотренный только что пример даже при относительно простом условии (приборов только четыре) приводит к достаточно неудобным вычислениям, а если в задаче будет несколько сотен приборов?

Поэтому встает задача по возможности отказаться от индивидуального подхода к каждой задаче и найти по возможности наиболее общий способ задания любых типов случайных величин.

Пусть x – действительное число. Вероятность события, состоящего в том, что X примет значение, меньшее x, т.е. $X < x$, обозначим через F(x).

Определение. Функцией распределения называют функцию F(x), определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x.

$$F(x) = P(X < x)$$

Функцию распределения также называют **интегральной функцией**.

Функция распределения существует как для непрерывных, так и для дискретных случайных величин. Она полностью характеризует случайную величину и является одной из форм закона распределения.

Для дискретной случайной величины функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$$

Знак неравенства под знаком суммы показывает, что суммирование распространяется на те возможные значения случайной величины, которые меньше аргумента x.

Функция распределения дискретной случайной величины X разрывна и возрастает скачками при переходе через каждое значение x_i.

Свойства функции распределения

1) значения функции распределения принадлежат отрезку [0, 1].

$$0 \le F(x) \le 1$$

2) F(x) – неубывающая функция.

$$F(x_2) \ge F(x_1) \text{ при } x_2 \ge x_1$$

3) Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (a, b) , равна приращению функции распределения на этом интервале.

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$$

4) На минус бесконечности функция распределения равна нулю, на плюс бесконечности функция распределения равна единице.

5) Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю.

Таким образом, не имеет смысла говорить о каком – либо конкретном значении случайной величины. Интерес представляет только вероятность попадания случайной величины в какой – либо интервал, что соответствует большинству практических задач.

Перейдем к особенностям функции распределения дискретной и непрерывной случайных величин.

Для ДСВ график $F(x)$ имеет разрывный, ступенчатый вид. График расположен в полосе, ограниченной прямыми $y = 0$, $y = 1$.

Дифференциальная функция распределения непрерывной случайной величины.

Функция распределения полностью характеризует случайную величину, однако, имеет один недостаток. По функции распределения трудно судить о характере распределения случайной величины в небольшой окрестности той или иной точки числовой оси.

Определение. Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называется функция *f(x)* – первая производная от функции распределения F(x).

$$f(x) = F'(x).$$

Плотность распределения также называют **дифференциальной функцией**. Для описания дискретной случайной величины плотность распределения неприемлема.

Смысл плотности распределения состоит в том, что она показывает как часто появляется случайная величина X в некоторой окрестности точки x при повторении опытов.

После введения функций распределения и плотности распределения можно дать следующее определение непрерывной случайной величины.

Определение. Случайная величина X называется **непрерывной**, если ее функция распределения F(x) непрерывна на всей оси OX, а плотность распределения f(x) существует везде, за исключением(может быть, конечного числа точек.

Зная плотность распределения, можно вычислить вероятность того, что некоторая случайная величина X примет значение, принадлежащее заданному интервалу.

Теорема. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b.*

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Доказательство этой теоремы основано на определении плотности распределения и третьем свойстве функции распределения, записанном выше.

Геометрически это означает, что вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью OX, кривой распределения f(x) и прямыми $x = a$ и $x = b$.

Функция распределения может быть легко найдена, если известна плотность распределения, по формуле:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Свойства плотности распределения.

1) вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b: $P(a < X < b) = \int_a^b p(x)dx$;

2) функция распределения может быть легко найдена, если известна плотность распределения, по формуле $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx$;

3) плотность распределения – неотрицательная функция: $p(x) \geq 0$;

4) несобственный интеграл от плотности распределения на бесконечном интервале равен единице: $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1.$

6 Числовые характеристики непрерывной случайной величины.

Пусть непрерывная случайная величина X задана функцией распределения *p(x)*. Допустим, что все возможные значения случайной величины принадлежат отрезку [*a*,*b*].

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку [a,b], называется определенный интеграл вида:

$$M(X) = \int_a^b xp(x)dx$$

Если возможные значения случайной величины рассматриваются на всей числовой оси, то *математическое ожидание* находится по формуле:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

При этом предполагается, что несобственный интеграл сходится.

Дисперсией непрерывной случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 p(x)dx$$

По аналогии с дисперсией дискретной случайной величины, для практического вычисления дисперсии используется формула:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx - [M(X)]^2$$

Средним квадратичным отклонением называется квадратный корень из дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Модой Мо непрерывной случайной величины называется такое значение случайной величины, при которой плотность распределения имеет максимум: $f(M_0) = \max$.

Если кривая распределения случайной величины имеет два или несколько максимумов, то такое распределение называется двумодальным или многомодальным.

Если распределение имеет минимум, но не имеет максимума, то оно называется *антимодальным*.

Медианой Ме случайной величины X называется такое ее значение, относительно которого равновероятно получение большего или меньшего значения случайной величины: $P(X < Me) = P(X > Me)$.

Геометрически медиана – абсцисса точки, в которой площадь, ограниченная кривой распределения, делится пополам.

Пример. Задана непрерывная случайная величина *x* своей функцией распределения $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} A\cos 2x, & \textit{при} \quad -\dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{\pi}{4} \\ 0, & \textit{при} \quad |x| > \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

Требуется определить коэффициент А, найти функцию распределения, построить графики функции распределения и плотности распределения, определить вероятность того, что случайная величина *x* попадет в интервал $\left(\dfrac{\pi}{6}; 2\right)$.

Найдем коэффициент A.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} A\cos 2xdx + \int_{\pi/4}^{\infty} 0dx = \frac{A\sin 2x}{2}\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} = A = 1.$$

Найдем функцию распределения:

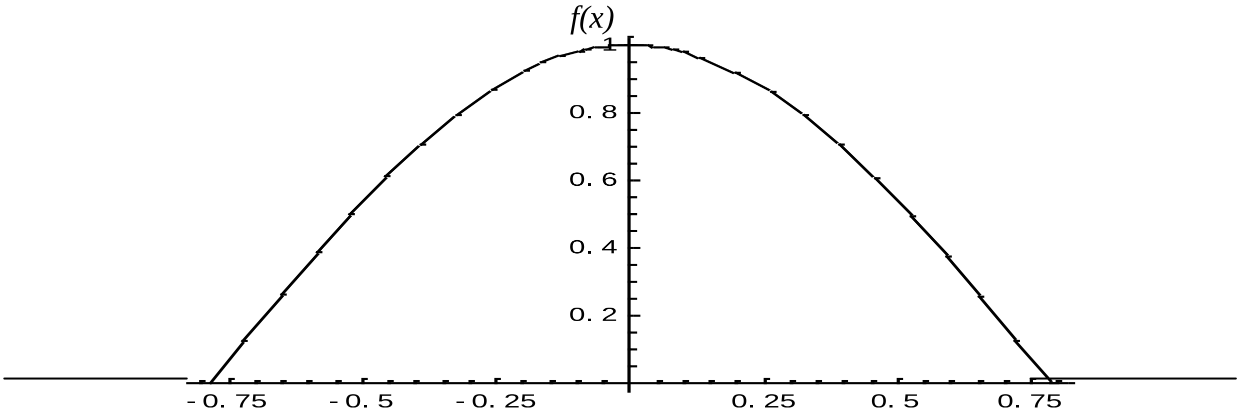
1) На участке $x < -\dfrac{\pi}{4}$: $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0.$

2) На участке $-\dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{\pi}{4}$: $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int_{-\pi/4}^{x} \cos 2xdx = \frac{\sin 2x}{2}\Bigg|_{-\pi/4}^{x} = \frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{2}.$

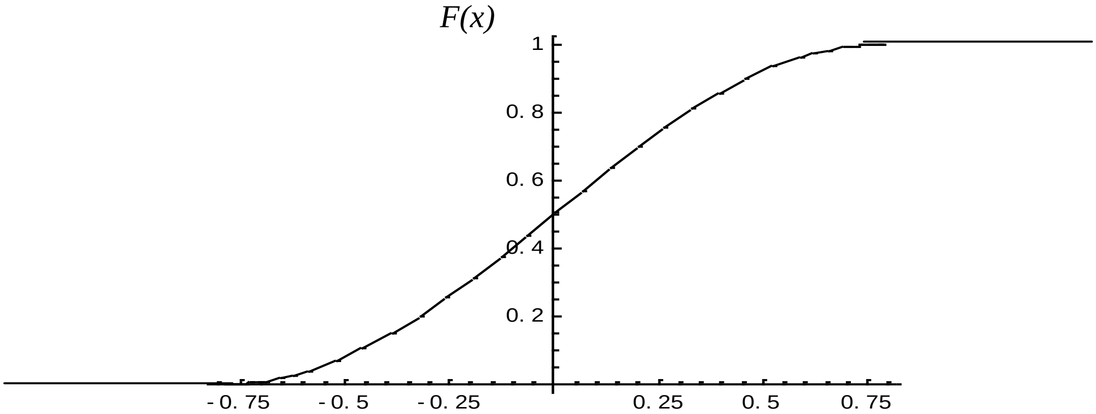
3) На участке $x > \frac{\pi}{4}$: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2x dx + \int\limits_{\pi/4}^{x} 0dx = \frac{\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 1.$

Итого: $f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & при \quad -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4} \\ 0, & при \quad |x| > \frac{\pi}{4} \end{cases}$; $F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < -\frac{\pi}{4} \\ \frac{\sin 2x + 1}{2}, & при \quad -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}; \\ 1, & при \quad x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$

Построим график плотности распределения:



Построим график функции распределения:



Найдем вероятность попадания случайной величины в интервал $\left(\frac{\pi}{6}; 2\right)$.

$$P\left(\frac{\pi}{6} < x < 2\right) = \int\limits_{\pi/6}^{2} f(x)dx = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \cos 2x dx + \int\limits_{\pi/4}^{2} 0dx = \frac{\sin 2x}{2}\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0{,}067;$$

Ту же самую вероятность можно искать и другим способом:

$$P\left(\frac{\pi}{6} < x < 2\right) = F(2) - F(\pi/6) = 1 - \frac{\sin(\pi/3) + 1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0{,}067.$$

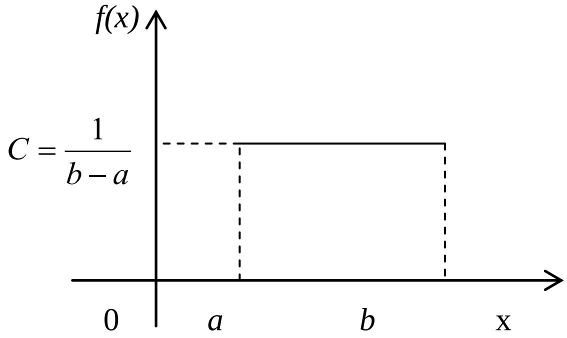
7 Виды распределений НСВ.

<u>Равномерное распределение.</u>

Определение. Непрерывная случайная величина имеет **равномерное** распределение на отрезке $[a;b]$, если на этом отрезке плотность распределения случайной величины постоянна, а вне его равна нулю.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ C, & a\le x\le b\\ 0, & x>b\end{cases}$$

Постоянная величина С может быть определена из условия равенства единице площади, ограниченной кривой распределения.

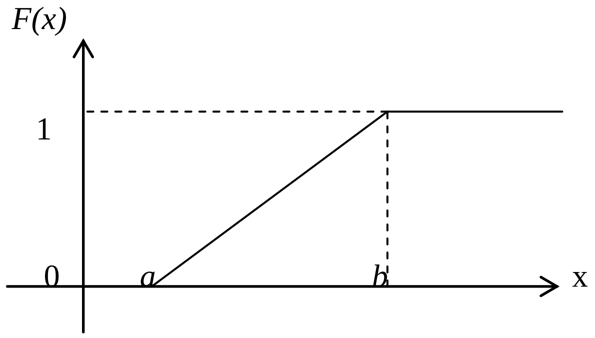


Получаем $C=\dfrac{1}{b-a}$.

Найдем функцию распределения *F(x)* на отрезке $[a;b]$.

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{a}^{x}\frac{1}{b-a}dx=\frac{x}{b-a}\Big|_{a}^{x}=\frac{x-a}{b-a}.$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & при\quad x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & при\quad a\le x\le b\\ 1, & при\quad x>b\end{cases}$$



Для того чтобы случайная величина подчинялась закону равномерного распределения необходимо, чтобы ее значения лежали внутри некоторого определенного интервала, и внутри этого интервала значения этой случайной величины были бы равновероятны.

Определим математическое ожидание и дисперсию случайной величины, подчиненной равномерному закону распределения.

$$m_x=\int_a^b xf(x)dx=\int_a^b\frac{x}{b-a}dx=\frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b=\frac{a+b}{2}.$$

$$m_{x^2}=\int_a^b x^2 f(x)dx=\int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx=\frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

$$D_x=m_{x^2}-m_x^2=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{a^2+2ab+b^2}{4}=\frac{b^2-2ab+a^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

$$\sigma_x=\sqrt{D_x}=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал:

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_\alpha^\beta \frac{dx}{b-a}=\frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

<u>Показательное распределение.</u>

<u>Определение.</u> Показательным (экспоненциальным) называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины Х, которое описывается плотностью

$$f(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & при \quad x\ge 0\end{cases}$$

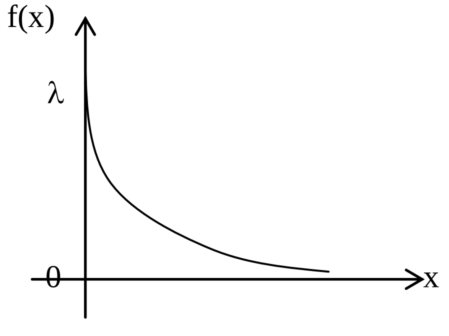
где λ - положительное число.

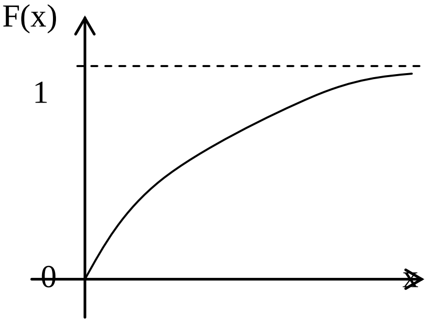
Найдем закон распределения.

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0dx+\lambda\int_0^x e^{-\lambda x}dx=1-e^{-\lambda x}.$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<0\\ 1-e^{-\lambda x} & при \quad x\ge 0\end{cases}$$

Графики функции распределения и плотности распределения:





Найдем математическое ожидание случайной величины, подчиненной показательному распределению.

$$m_x=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx=\left\{\begin{matrix}u=x; & e^{-\lambda x}dx=dv;\\ du=dx; & -\dfrac{e^{-\lambda x}}{\lambda}=v;\end{matrix}\right\}=\lambda\left(-\frac{xe^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}dx\right)=$$

$$=\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx=-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^\infty=\frac{1}{\lambda}.$$

Результат получен с использованием того факта, что

$$xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{\lambda x}}-0=\left\{\begin{matrix}По \quad правилу\\ Лопиталя\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{-\lambda e^{\lambda x}}=0.$$

Для нахождения дисперсии найдем величину М(Х^2).

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{0}^{\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx$$

Дважды интегрируя по частям, аналогично рассмотренному случаю, получим:

$$M(X^2) = \frac{2}{\lambda^2};$$

Тогда $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$.

Итого: $M(X) = \frac{1}{\lambda}$; $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$; $\sigma_x = \frac{1}{\lambda}$.

Видно, что в случае показательного распределения математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение равны.

Также легко определить и вероятность попадания случайной величины, подчиненной показательному закону распределения, в заданный интервал.

$$P(a < x < b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Показательное распределение широко применяется в приложениях теории вероятностей, в частности, в теории надежности, одним из основных понятий этой теории является функция надежности.

Будем называть элементом любое устройство, независимо от его сложности.

Рассмотрим НСВ *T* – длительность времени безотказной работы элемента.

Функция распределения *T* определяет вероятность отказа элемента за время длительностью *t*: $P(T < t) = F(t)$.

Следовательно, вероятность безотказной работы за то же время:

$P(T \geq t) = 1 - F(t) = R(t)$ определяет функцию надежности.

$R(t) = e^{-\lambda t}; F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$

Часто, но не всегда, случайная величина Т имеет показательное распределение.

<u>Нормальный закон распределения, его параметры.</u>

Нормальным называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью вероятности:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}}$$

Можно легко показать, что параметры a и σ_x, входящие в плотность распределения являются соответственно математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением случайной величины *X*.

Нормальный закон распределения также называется *законом Гаусса*.

Нормальный закон распределения занимает центральное место в теории вероятностей. Это обусловлено тем, что этот закон проявляется во всех случаях, когда случайная величина является результатом действия большого числа различных факторов. К нормальному закону приближаются все остальные законы распределения.

Функция распределения имеет вид: $F(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma_x^2}} dt$.

Вероятность попадания случайной величины, распределенной по нормальному закону, в заданный интервал находится по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \text{где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt \text{ –}$$

функция Лапласа или интеграл вероятностей.

Значения этой функции при различных значениях *x* посчитаны и приводятся в специальных таблицах.

Функцию Лапласа является нечетной, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Существует множество распределений, основанных на нормальном распределении. В частности, χ^2 – распределение (хи-квадрат), распределение Стьюдента, распределение Фишера-Снедекора и другие.

Кривая Гаусса. Ее свойства и график.

График плотности нормального распределения называется *кривой Гаусса.*

Нормальная кривая обладает следующими свойствами:

1) функция определена на всей числовой оси;
2) при всех *x* функция распределения принимает только положительные значения;
3) ось OX является горизонтальной асимптотой графика плотности вероятности, т.к. при неограниченном возрастании по абсолютной величине аргумента *x*, значение функции стремится к нулю;
4) в точке $x = a$ функция имеет максимум, равный $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$;
5) функция является симметричной относительно прямой $x = a$, т.к. разность $(x - a)$ входит в функцию плотности распределения в квадрате;
6) при $x = a + \sigma$ и $x = a - \sigma$ функция имеет перегиб. Значение функции равно $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$.

Построим график функции плотности распределения.

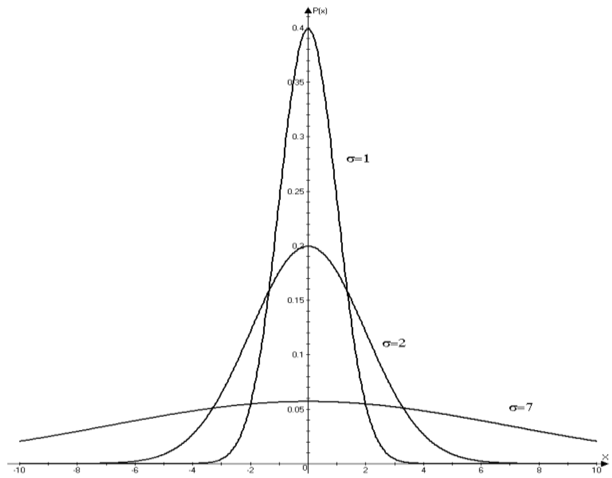


График функции плотности распределения

Построены графики при $a = 0$ и трех возможных значениях среднего квадратичного отклонения $\sigma = 1$, $\sigma = 2$ и $\sigma = 7$.

При $a = 0$ и $\sigma = 1$ кривая называется *нормированной*. Уравнение нормированной кривой: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Функции от случайных величин.

Найдем вероятность попадания случайной величины, распределенной по нормальному закону, в заданный интервал.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx$$

Обозначим $\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}} = t;\quad \frac{a-m}{\sigma\sqrt{2}} = \alpha;\quad \frac{b-m}{\sigma\sqrt{2}} = \beta;$

Тогда $P(a < X < b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_\alpha^\beta e^{-t^2}\sigma\sqrt{2}dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_\alpha^\beta e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\left[\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)\right]$

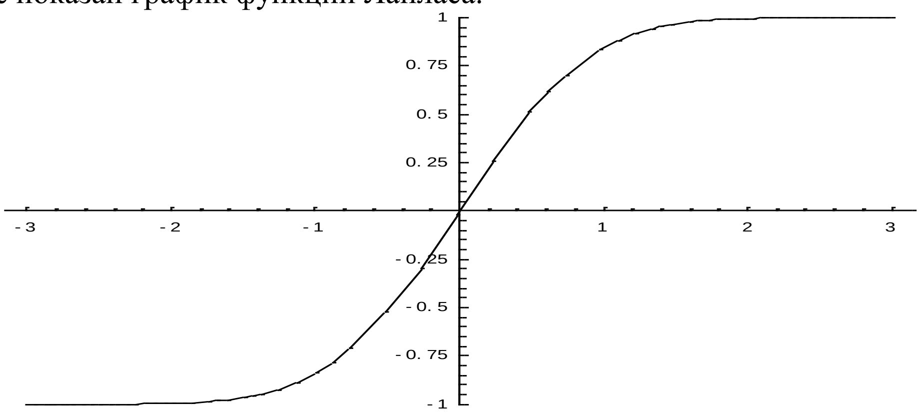
Т.к. интеграл $\int e^{-t^2}dt$ не выражается через элементарные функции, то вводится в рассмотрение функция

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt,$$

которая называется **функцией Лапласа** или **интегралом вероятностей**.

Значения этой функции при различных значениях x посчитаны и приводятся в специальных таблицах.

Ниже показан график функции Лапласа.



Функция Лапласа обладает следующими свойствами:

1) $\Phi(0) = 0$;

2) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;

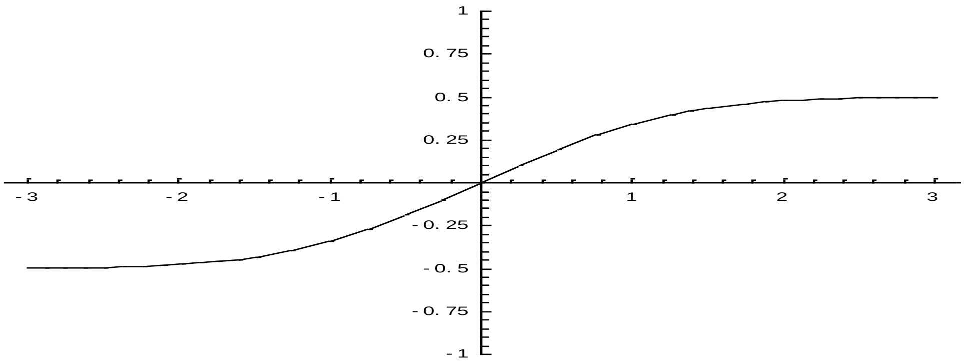
3) $\Phi(\infty) = 1$.

Функцию Лапласа также называют **функцией ошибок** и обозначают erf x.

Еще используется **нормированная** функция Лапласа, которая связана с функцией Лапласа соотношением:

$$\overline{\Phi}(x) = \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt;$$

Ниже показан график нормированной функции Лапласа.



При рассмотрении нормального закона распределения выделяется важный частный случай, известный как **правило трех сигм**.

Запишем вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины от математического ожидания меньше заданной величины Δ:

$$P(|X-m|<\Delta)=\overline{\Phi}\left[\frac{m+\Delta-m}{\sigma}\right]-\overline{\Phi}\left[\frac{m-\Delta-m}{\sigma}\right]=\overline{\Phi}\left[\frac{\Delta}{\sigma}\right]-\overline{\Phi}\left[-\frac{\Delta}{\sigma}\right]=2\overline{\Phi}\left[\frac{\Delta}{\sigma}\right]$$

Если принять Δ = 3σ, то получаем с использованием таблиц значений функции Лапласа:

$$P(|X-m|<3\sigma)=2\overline{\Phi}(3)=2\cdot 0{,}49865=0{,}9973$$

Т.е. вероятность того, что случайная величина отклонится от своего математического ожидание на величину, большую чем утроенное среднее квадратичное отклонение, практически равна нулю.

Это правило называется **правилом трех сигм**.

Не практике считается, что если для какой – либо случайной величины выполняется правило трех сигм, то эта случайная величина имеет нормальное распределение.

Пример. Поезд состоит из 100 вагонов. Масса каждого вагона – случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожидание a = 65 т и средним квадратичным отклонением σ = 0,9 т. Локомотив может везти состав массой не более 6600 т, в противном случае необходимо прицеплять второй локомотив. Найти вероятность того, что второй локомотив не потребуется.

Второй локомотив не потребуется, если отклонение массы состава от ожидаемого (100·65 = 6500) не превосходит 6600 – 6500 = 100 т.

Т.к. масса каждого вагона имеет нормальное распределение, то и масса всего состава тоже будет распределена нормально.

Получаем:

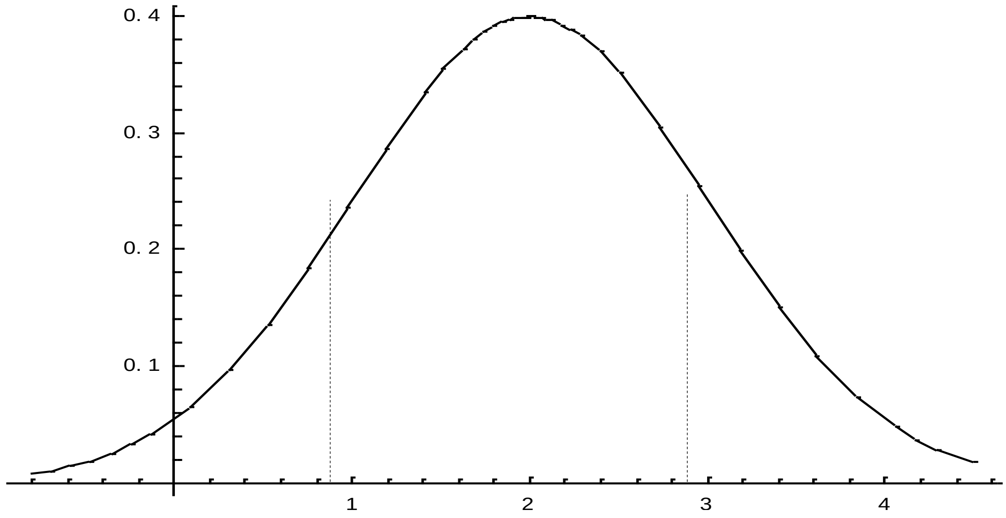
$$P(|X-M(X)|<100=2\overline{\Phi}\left[\frac{100}{100\sigma}\right]=2\overline{\Phi}[1{,}111]=2\cdot 0{,}3665=0{,}733$$

Пример. Нормально распределенная случайная величина X задана своими параметрами – a =2 – математическое ожидание и σ = 1 – среднее квадратическое отклонение. Требуется написать плотность вероятности и построить ее график, найти вероятность того, X примет значение из интервала (1; 3), найти вероятность того, что X отклонится (по модулю) от математического ожидания не более чем на 2.

Плотность распределения имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2}};$$

Построим график:



Найдем вероятность попадания случайной величины в интервал (1; 3).

$$P(1 < X < 3) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{3-2}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{\sqrt{2}}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\Phi(0{,}7071) + \Phi(0{,}7071)\right] = 0{,}6778.$$

Найдем вероятность отклонение случайной величины от математического ожидания на величину, не большую чем 2.

$$P(|X-2| < 2) = \Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma\sqrt{2}}\right) = \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \Phi(\sqrt{2}) \approx 0{,}95.$$

Тот же результат может быть получен с использованием нормированной функции Лапласа.

$$P(|X-2| < 2) = 2\overline{\Phi}\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right) = 2\overline{\Phi}(2) = 2 \cdot 0{,}4772 \approx 0{,}95.$$

1. 15 Лекция № 18 (2 часа).

Тема: «Математическая статистика»

1.15.1 Вопросы лекции:

1. Предмет и задачи математической статистики.
2. Способы отбора статистического материала.
3. Выборочные характеристики статистического распределения.
4. Точечные оценки. Несмещенные и состоятельные оценки.
5. Доверительный интервал. Надежность.
6. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения.

1.15.2 Краткое содержание вопросов:

1 Предмет и задачи математической статистики.

Предметом математической статистики является изучение случайных величин (или случайных событий) по результатам наблюдений.

Для получения опытных данных необходимо провести обследование соответствующих объектов.

Определение. Совокупность всех мысленно возможных объектов данного вида, над которыми проводятся наблюдения с целью получения конкретных значений определённой случайной величины, называется генеральной совокупностью.

Генеральную совокупность будем называть конечной или бесконечной в зависимости от того, конечна или бесконечна совокупность составляющих её элементов.

Определение. Часть отобранных объектов из генеральной совокупности называется выборочной совокупностью или выборкой.

Определение. Число N объектов генеральной совокупности и число n объектов выборочной совокупности будем называть объёмами генеральной и выборочной совокупности соответственно.

Для того чтобы по выборке можно было достаточно уверенно судить о случайной величине, выборка должна быть представительной (репрезентативной). Репрезентативность выборки означает, что объекты выборки достаточно хорошо представляют генеральную совокупность. Она обеспечивается случайностью отбора.

2 Способы отбора статистического материала.

На практике применяют различные способы отбора статистического материала. Принципиально эти два способа можно разделить на два вида:

1) Отбор, не требующий расчленения генеральной совокупности на части. Сюда относятся: а) простой случайный бесповторный отбор; б) простой случайный повторный отбор. Один от другого отличается тем, что элемент генеральной совокупности либо не возвращается обратно, либо возвращается.

2) Отбор, при котором генеральная совокупность разбивается на части. Сюда относятся: а) механический; б) типический и в) серийный отборы.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 – n_2 раз, …, x_k – $n_к$ раз и $\sum n_i = n$ – объем выборки.

Определение. Наблюдаемые значения x_i называют **вариантами**, числа наблюдений n_i – **частотами**.

Определение. Вариационный ряд – ряд из вариант, записанных в возрастающем порядке.

Определение. Относительные частоты – отношения частот к объему выборки: $W_i = \dfrac{n_i}{n}$

Определение. Статистическое распределение выборки – это перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот.

Виды статистических распределений выборки:

1) дискретное распределение выборки:

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_k
n_i	n_1	n_2	n_3	…	n_k

или

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_k
W_i	W_1	W_2	W_3	…	W_k

2) интервальное распределение выборки:

$(x_{i-1};x_i)$	$(x_0;x_1)$	$(x_1;x_2)$	$(x_2;x_3)$	…	$(x_{k-1};x_k)$
n_i	n_1	n_2	n_3	…	n_k

или

$(x_{i-1};x_i)$	$(x_0;x_1)$	$(x_1;x_2)$	$(x_2;x_3)$	…	$(x_{k-1};x_k)$
W_i	W_1	W_2	W_3	…	W_k

Определение. Полигон частот – ломанная, отрезки которой соединяют точки $(x_1;n_1)$, $(x_2;n_2)$, …, $(x_k;n_k)$.

Определение. Полигон относительных частот – ломанная, отрезки которой соединяют точки $(x_1;W_1)$, $(x_2;W_2)$, …, $(x_k;W_k)$.

Определение. Гистограмма частот – ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых являются частичные интервалы длиною Δx, а высотами – значения плотностей частот: $h_i = \dfrac{n_i}{h}$.

Замечание. Площадь гистограммы частот равна объему выборки.

Определение. Гистограмма относительных частот – ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых являются частичные интервалы длиною h, а высотами – соответствующие значения плотностей относительных частот: $P_i^{'} = \dfrac{W_i}{h}$.

Замечание. Площадь гистограммы относительных частот равна единице.

3 Выборочные характеристики статистического распределения.

Для описания основных свойств статистических распределений чаще всего используют *выборочные характеристики* следующих видов:

- *выборочная средняя:* характеризует типичное для выборки значение признака *X*; приближенно характеризует (оценивает) типичное для генеральной совокупности значение признака *X;*
    - *средняя арифметическая*: применяется к вариационному ряду (данные наблюдения не сгруппированы) $\bar{x}_{\text{в}} = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$;
    - *взвешенная средняя арифметическая* (частоты m_i, и частости w_i называют весами): используется, если данные сгруппированы; непосредственно применима только к статистическому распределению дискретного признака (дискретному ряду)

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot m_i\,,\ \bar{x}_{\text{в}} = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot w_i\,;$$

- *медиана* – это серединное значение признака *X*; по определению

$$F^*\left(x_{\text{ме}}\right) = \frac{1}{2}.$$

$x_{\text{ме}} = \dfrac{x_j + x_{j+1}}{2}$,если $n = 2j$ – четное;

$x_{\text{ме}} = x_{j+1}$, если $n = 2j+1$ – нечетное;

- *мода* – наиболее часто встречающееся значение признака *X*. $x_{\text{мо}} = x_i$, если $m_i = m_{\max}$ (справедливо только для дискретного ряда).

Если $\bar{x}_{\text{в}} = x_{\text{мо}} = x_{\text{ме}}$, то распределение симметричное. При нарушении симметрии равенство нарушается.

Характеристики вариации (рассеяния)

- *выборочная дисперсия* есть выборочная средняя арифметическая квадратов отклонений значений признака *X* от выборочной средней $\bar{x}_{\text{в}}$ (равна «среднему квадрату без квадрата средней»):

$$D_{\text{в}} = \overline{(x - \bar{x}_{\text{в}})^2}\,,\ D_{\text{в}} = \overline{x^2} - \bar{x}_{\text{в}}^2\,;$$

Выборочная дисперсия применяется к вариационному ряду (данные наблюдения не сгруппированы):

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x}_{\text{в}})^2 ;$$

- *выборочная взвешенная дисперсия:* используется, если данные сгруппированы; непосредственно применима только к статистическому распределению дискретного признака (дискретному ряду)

$$D_{\text{в}} = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2 \cdot m_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2 \cdot m_i ,\ D_{\text{в}} = \sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2 \cdot w_i ;$$

- *средний квадрат* есть выборочная средняя арифметическая квадратов значений признака *X* (для вариационного ряда и для дискретного распределения соответственно):

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^2 ,\ \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot m_i ;$$

- *выборочное среднее квадратическое отклонение* есть арифметическое значение корня квадратного из дисперсии; оно показывает, на сколько в среднем отклоняются значения x_j признака *X* от выборочной средней $\bar{x}_{\text{в}}$: $\sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}}$;
- *размах вариации:* $R = x_{\max} - x_{\min}$;
- *коэффициент вариации:* применяют для сравнения вариации признаков сильно отличающихся по величине, или имеющих разные единицы измерения (разные наименования): $v = \frac{\sigma_{\text{в}}}{\bar{x}_{\text{в}}} \cdot 100\ \%$.

Если исходный вариационный ряд недоступен, приведенные выше формулы вычисления выборочных характеристик, применимые только к дискретному ряду, могут быть использованы для приближенного вычисления выборочных характеристик непрерывного признака, представленного интервальным рядом. Для этого предварительно каждый интервал x_{i-1}–x_i заменяется его серединой $x_i' = (x_{i-1} + x_i)/2$, то есть производится замена интервального ряда дискретным, соответствующим ему приближенно.

4 Точечные оценки. Несмещенные и состоятельные оценки.

Важной задачей математической статистики является задача оценивания (приближенного определения) по выборочным данным параметров закона распределения признака *X* генеральной совокупности. Другими словами, необходимо по данным выборочного распределения оценить неизвестные параметры теоретического распределения. Статистические оценки могут быть точечными и интервальными.

Пусть признак *X* генеральной совокупности распределен нормально, то есть теоретическое распределение имеет вид:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} ,$$

с параметрами:

$a = M(X) = \bar{x}_{\text{ген}}$ – математическое ожидание признака *X*; $\sigma = \sqrt{M((X - M(X))^2)} = \sigma_{\text{ген}}$ – среднеквадратическое отклонение признака *X*.

Точечной оценкой неизвестного параметра называют число (точку на числовой оси), которое приблизительно равно оцениваемому параметру и может заменить его с достаточной степенью точности в статистических расчетах.

Для того чтобы точечные статистические оценки обеспечивали «хорошие» приближения неизвестных параметров, они должны быть несмещенными, состоятельными и эффективными.

Пусть θ^* – точечная оценка неизвестного параметра θ.

Несмещенной называют такую точечную статистическую оценку θ^*, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру: $M(\theta^*) = \theta$.

Состоятельной называют такую точечную статистическую оценку, которая при $n \to \infty$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру. В частности, если дисперсия несмещенной оценки при $n \to \infty$ стремится к нулю, то такая оценка оказывается и состоятельной.

Эффективной называют такую точечную статистическую оценку, которая при фиксированном n имеет наименьшую дисперсию.

Можно показать, что выборочная средняя $\bar{x}_{\text{в}}$ является несмещенной, состоятельной и эффективной оценкой генеральной средней $\bar{x}_{\text{ген}}$. Точечными оценками генеральной дисперсии $D_{\text{ген}} = \sigma^2$ могут служить выборочная дисперсия $D_{\text{в}}$, или, при малых объемах выборки n, исправленная выборочная дисперсия: $S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_{\text{в}}$.

Точечными оценками для генерального среднеквадратического отклонения $\sigma_{\text{ген}} = \sigma$ могут служить: $\sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}}$ – выборочное среднее квадратическое отклонение или $S = \sqrt{S^2}$ – исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение.

5 Доверительный интервал. Надежность.

Для построения *интервальной оценки* рассмотрим событие, заключающееся в том, что отклонение точечной оценки параметра θ^* от истинного значения этого параметра θ по абсолютной величине не превышает некоторую положительную величину Δ. Вероятность такого события $P\left(\left|\theta - \theta^*\right| < \Delta\right) = \gamma$. Заменив неравенство $\left|\theta - \theta^*\right| < \Delta$ на равносильное, получим: $P\left(\theta^* - \Delta < \theta < \theta^* + \Delta\right) = \gamma$.

Вероятность того, что *доверительный интервал* $(\theta^* - \Delta,\ \theta^* + \Delta)$ заключает в себе (покрывает) неизвестный параметр θ равна γ и называется *доверительной вероятностью* или *надежностью* интервальной оценки. Величину Δ называют *точностью* оценки.

6 Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения.

Построим интервальную оценку параметра $a = \bar{x}_{\text{ген}}$ для двух случаев:

1) параметр σ нормального закона распределения признака X генеральной совокупности *известен*. В этом случае интервальная оценка параметра $a = \bar{x}_{\text{ген}}$ с заданной надежностью γ определяется формулой:

$$\bar{x}_{\text{в}} - \Delta < a < \bar{x}_{\text{в}} + \Delta,$$

где $\Delta = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$,

t – аргумент функции Лапласа: $\Phi(t) = \dfrac{\gamma}{2}$;

2) параметр σ нормального закона распределения признака X генеральной совокупности *неизвестен*. В этом случае интервальная оценка параметра $a = \bar{x}_{\text{ген}}$ с заданной надежностью γ определяется формулой:

$$\bar{x}_{\text{в}} - \Delta < a < \bar{x}_{\text{в}} + \Delta,$$

где $\Delta = \dfrac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}}$,

S – точечная оценка параметра σ,

$t_\gamma = t(\gamma, n)$ – значения распределения Стьюдента, которые находим по таблице.

Итак, доверительный интервал для оценки генеральной средней имеет вид:

$$I_\gamma = \begin{cases} \left(\bar{x} - t_\gamma \cdot \dfrac{s}{\sqrt{n}};\, \bar{x} + t_\gamma \cdot \dfrac{s}{\sqrt{n}}\right), & \text{при } n < 30 \\ \left(\bar{x} - t \cdot \dfrac{s}{\sqrt{n}};\, \bar{x} + t \cdot \dfrac{s}{\sqrt{n}}\right), & \text{при } n \geq 30 \end{cases},$$

где γ – надежность, $t_\gamma = t(n;\gamma)$ – значение в табл. 4;

t – аргумент функции Лапласа, $\Phi(t) = \dfrac{\gamma}{2}$.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1 семестр

2.1 Практическое занятие № ПЗ-1 (2 часа).

Тема: «Решение систем уравнений»

2.1.1 Задание для работы:

1.Входной контроль.

2. Решение систем двух уравнений с двумя переменными.

3. Системы уравнений, имеющие одно, ни одного и бесчисленное множество решений.

2.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

Примерный вариант входного контроля

1. Вычислить: $2\frac{3}{4} : \left(1\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{6}\right) \cdot 1\frac{17}{19}$.

2. Найти a, если $\dfrac{a}{600} = \dfrac{1{,}25 + \frac{1}{4}}{0{,}4 \cdot 4{,}5}$

Решение систем уравнений

1. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x - 3y = -7 \\ 5x + y = 8 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 8x - 5y = 3 \\ 7x + 3y = 10 \end{cases}$

2. Сколько решений имеет система линейных уравнений?

а) $\begin{cases} 2x-3y=-7 \\ 8x-12y=8 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x-3y=-7 \\ 8x-12y=-28 \end{cases}$

3. Решите системы уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x-y-z=-2 \\ 2x+y+z=8 \\ 4x-2y+3z=5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 4x-3y+2z=9 \\ 2x+5y-3z=4 \\ 5x+6y-2z=18 \end{cases}$.

2.1.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы линейной алгебры; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.2 Практическое занятие № ПЗ-2 (2 часа).

Тема «Прямая линия на плоскости»

2.2.1 Задание для работы:

1. Способы задания прямой.
2. Взаимное расположение двух прямых.
3. Составление уравнения линий в треугольнике.

2.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Составить уравнение прямой, если: а) ее угловой коэффициент $\kappa=-5$ и она проходит через точку $A(7;-3)$; б) она проходит через точки $A(-3;5)$ и $B(1;7)$; в) проходит через точки $M(-1;8)$ и $N(-1;-4)$.

2. Даны вершины треугольника $A(-2;1), B(2;3), C(3;-4)$. Составить уравнения: а) стороны AC; б) медианы BM; в) наименьшей высоты.

3. Среди прямых указать параллельные и перпендикулярные: $5x-8y+7=0$, $8x+5y-5=0$, $5x+3y-8=0$, $8x-y-5=0$, $10x+6y-13=0$.

4. Даны две прямые $4x-ay=7$ и $20x-12y=15$. При каком условии они будут параллельны? При каких значениях a они будут пересекаться?

2.2.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы аналитической геометрии; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.3 Практическое занятие № ПЗ-3 (2 часа).

Тема «Кривые второго порядка»

2.3.1 Задание для работы:

1. Канонические уравнения кривых второго порядка.
2. Построение кривых

2.3.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Составьте уравнение окружности, концы диаметра которой имеют координаты $A(-4;5)$ и $B(8;9)$.

2. Составьте уравнение прямой, проходящей через центры окружностей: $x^2+y^2-8x-4y+11=0$ и $x^2+y^2+4x+12y+4=0$.

3. Составьте уравнение эллипса, если он проходит через точки $A(4;0)$ и $B(2;3)$. Найти большую и малую полуоси, расстояние между фокусами и эксцентриситет эллипса.

4. Составьте уравнение эллипса, один из фокусов которого находится в точке $\left(\sqrt{3};0\right)$, а эксцентриситет равен $\frac{1}{3}$.

5. Найти координаты фокусов, расстояние между ними, длины действительной и мнимой осей, эксцентриситет гиперболы $\frac{x^2}{14}-\frac{y^2}{22}=1$.

6. Составить уравнение гиперболы, если длина действительной полуоси равна 8, и гипербола проходит через точку $(-10;-3)$.

7. Даны уравнения асимптот $y=\pm 2x$ и точка $M(5;8)$, лежащая на гиперболе. Составить ее уравнение.

8. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы для параболы $y=0{,}5x^2$.

9. Составить уравнение параболы, если ее фокус находится в точке: а) $F(5;0)$; б) $F(0;-3)$.

10. Найти координаты точек пересечения кривой второго порядка и прямой: а) $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{25}=1$ и $x+3y-21=0$; б) $16x-y^2=0$ и $2x-y+2=0$. Сделать чертеж.

2.3.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы аналитической геометрии; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.4 Практическое занятие № ПЗ-4 (2 часа).

Тема «Функция одной переменной»

2.4.1 Задание для работы:

1. Способы задания функции.
2. Область определения функций. Область значения функции.
3. Четность и нечетность. Периодичность.

2.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Найти область определения следующих функций:

а) $y=\sqrt{6-x}+\frac{1}{x+5}$; б) $y=\sqrt[7]{3-x^2}$; в) $y=\log_5(4-x^2)$; г) $y=\frac{\sqrt{9-x}}{\ln(4+x)}$.

2. Найдите $E(y)$ двумя способами: а) $y=4\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin(\pi+x)$; б) $y=x^2-6x+5$.

3. Исследовать функцию на четность:

а) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$; б) $f(x)=x^5\cdot\cos x$; в) $f(x)=\sqrt{6x-x^2}$; г) $f(x)=\lg\frac{x+2}{x-2}$.

4. Для функции $f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{49} & при \quad 0 < x \le 7 \\ 1 & при \quad x > 7 \end{cases}$ найти $f(-2),\ f(0),\ f(5),\ f(8)$.

Построить график функции.

2.4.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы математического анализа; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.5 Практическое занятие № ПЗ-5 (2 часа).

Тема «Предел функции»

2.5.1 Задание для работы:

1. Предел. Раскрытие неопределённостей при вычислении пределов.
2. Замечательные пределы.
3. Непрерывность функции и точки разрыва.

2.5.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Начиная с какого номера, значения числовой последовательности $x_n = \dfrac{5n+3}{2n}$ будут отличаться от числа $2{,}5$ на величину, меньшую: а) $\varepsilon = 0{,}2$; б) $\varepsilon = 0{,}01$?

2. Определить число, к которому стремится числовая последовательность:
а) $x_n = \dfrac{3n-6}{2n}$; б) $x_n = \dfrac{1}{2n+1}$.

3. Найти предел функции: а) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-5x+8}{x+x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{1-\cos x}$; в) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{7}{2x-6}$.

4. Найти: 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+6x}{5x^3-12x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-2x-1}{7-x^2-6x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{x^2-49}{\sqrt{9+x}-4}$.

5.Вычислить: 1) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5x^2+3x-9}{7x^2+x-11}$; 2) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5x^2+3x-9}{7x^2+x^5-11}$; 3) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5x^3+3x-9}{7x^2+x-11}$.

6. Найти значение: 1) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{12}{x^3-8} - \dfrac{1}{x-2}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+3x} - x\right)$.

2.5.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы математического анализа; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.6 Практическое занятие № ПЗ-6 (2 часа).

Тема «Дифференциальное исчисление ФОП»

2.6.1 Задание для работы:

1. Правила дифференцирования. Производные элементарных функций.
2. Геометрические и механические приложения производной..

2.6.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Найти производную: а) $y = \dfrac{2x-7}{3}$; б) $y = x^4 - \dfrac{1}{12x^4} + 6 \cdot \sqrt[5]{x^2} + \sin 4$; в) $y = \dfrac{5}{x^7} - \sqrt[9]{x^4} + 3^x$; г) $y = (x^3 + 2) \cdot \sin x$; д) $y = \dfrac{\ln x}{x-4}$.

2. Найти производную от функции и упростить полученное выражение: а) $x \cdot \sin x + \cos x - 8$; б) $x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$; в) $x \cdot arctg\, \dfrac{x}{3} - \dfrac{3}{2}\ln(x^2+9)$.

3. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ в точке его пересечения с осью ординат. Сделать рисунок.

4. Найти скорость и ускорение точки, движущейся прямолинейно по закону $s(t) = 2\sin\dfrac{\pi t}{3}$ в момент времени $t = 1\,c$. Найти кинетическую энергию тела $\dfrac{mv^2}{2}$ через 3 с после начала движения.

2.6.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы математического анализа; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.7 Практическое занятие № ПЗ-7(2 часа).

Тема «Полное исследование и построение графика функции»

2.7.1 Задание для работы:

1. Исследование функции на монотонность.
2. Нахождение точек экстремума.
3. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.
4. Исследование функции на вогнутость и выпуклость.
5. Нахождение точек перегиба.
6. Асимптоты графика функции.

2.7.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вычислить предел функции: а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[7]{x}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-2}{\ln(x+7)}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{7+e^x}-2}{x}$.

2. Исследовать функцию $y = -x^3 + 6x^2 - 4$ и построить ее график.

3. Построить график функции: а) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$; б) $y = e^{-x^2}$.

4. На параболе найти точку, наименее удаленную от прямой $y = 2x - 4$.

5. Требуется выгородить прямоугольное пастбище площадью $1\,км^2$ и разделить его на два прямоугольных участка. Какой наименьшей длины забор при этом может получиться?

2.7.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы математического анализа; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.8 Практическое занятие № ПЗ-1 (2 часа).
Тема «Функция двух переменных»
2.8.1 Задание для работы:

1. Способы задания функции двух переменных.
2. Нахождение ОДЗ функции двух переменных.
3. Частные производные. Частные производные высших порядков. Полный дифференциал. Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях

2.8.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Найти область определения функции двух переменных: а) $z=\dfrac{1}{3y-x}$; б) $z=\ln(y^2-4x+8)$; в) $z=\dfrac{\ln x}{25-x^2-y^2}$; г) $z=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$; д) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$.

2. Вычислить: а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$.

3. Найти частные производные данных функций по каждой независимой переменной: а) $z=x^2-y$; б) $z=\dfrac{x}{y}+3xy^4$; в) $z=\sin(e^x-5y^3)$.

4. Найти значения частных производных: а) $f(x;y)=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$ в точке $(3;\,4)$; б) $z=\ln\left(x+\dfrac{y}{2x}\right)$ в точке $(1;\,2)$.

5. Вычислить частные производные второго порядка и проверить равенство $z''_{xy}=z''_{yx}$ для функций: а) $z=e^x\cdot y^4$; б) $z=arctg(x-2)+\dfrac{y}{3}-7x^6y$.

2.8.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы математического анализа; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.9 Практическое занятие № ПЗ-3 (2 часа).
Тема «Экстремум функции двух переменных»
2.9.1 Задание для работы:

1. Определение экстремума.
2. Исследование функции двух переменных на экстремум.

2.9.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Исследовать на экстремум функции:

а) $z = -4 + 6x - x^2 - xy - y^2$;

б) $z = x^2 - xy + y^2 + 8x - 4y + 15$;

в) $z = 2x^2 - 14xy + y^2 + 2x - 9y + 1$.

2. Значения переменных величин x и y, полученные в результате опыта, представлены в виде таблицы:

x	2	4	6	8	10
y	5,5	8,5	13,6	17,3	20,1

Предполагая, что переменные x и y связаны линейной зависимостью $y = ax + b$, найти способом наименьших квадратов параметры a и b.

2.9.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы математического анализа; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.10 Практическое занятие № ПЗ-10 (2 часа).

Тема «Непосредственное интегрирование функций. Замена переменной в неопределенном интеграле»

2.10.1 Задание для работы:

1. Вычисление неопределенного интеграла по таблице.
2. Непосредственное интегрирование.
3. Интегрирование заменой переменной.

2.10.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Дано уравнение скорости движения тела $v(t) = 2t + 5$. Найти уравнение пути, если за первые $3\,с$ движения тело прошло $32\,м$.

2. Найти интегралы: а) $\int\left(x^4 + \frac{4}{x^3} - 5\sqrt[3]{x^2}\right)dx$; б) $\int 4^x\left(3 + \frac{4^{-x}}{\sqrt[7]{x}}\right)dx$; в) $\int(7\cos x - 10^x)dx$; г) $\int\left[\frac{2}{9+x^2} - \frac{1}{\sqrt{25-x^2}} + \frac{3}{x}\right]dx$; д) $\int\frac{dx}{\cos 2x - \cos^2 x}$; е) $\int\frac{dx}{9x^2+1}$; ж) $\int\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$; з) $\int\frac{dv}{\sqrt{v^2-17}}$.

3. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $(-2; 8)$, если угловой коэффициент касательной в любой точке касания x равен $2x - 4$.

2.10.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы математического анализа; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.11 Практическое занятие № ПЗ-11 (2 часа).

Тема «Методы интегрирования»

2.11.1 Задание для работы:

1. Интегрирование заменой переменной.
2. Интегрирование по частям.

2.11.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вычислить интеграл: а) $\int (5x-1)^7 dx$; б) $\int e^{-5x} dx$; в) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6+1}}$.

2. Преобразовать и вычислить: а) $\int \frac{3tg^2 x+4}{\sin^2 x} dx$; б) $\int \frac{2^x+5^x}{10^x} dx$.

3. Вычислить: а) $\int arccrgxdx$; б) $\int (6x+1)\cdot \sin\frac{x}{3} dx$; в) $\int e^x \sin 2xdx$.

4. Вычислить: а) $\int e^{2x} \cos xdx$; б) $\int e^{\sqrt{x}} dx$; в) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$; г) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[5]{x}} dx$.

2.11.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы математического анализа; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.12 Практическое занятие № ПЗ-12 (2 часа).

Тема «Определенный интеграл. Методы интегрирования определённого интеграла и его свойства.»

2.12.1 Задание для работы:

1. Вычисление по формуле Ньютона – Лейбница.
2. Замена переменной в определенном интеграле.
4. Интегрирование по частям в определенном интеграле.

2.12.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вычислить: а) $\int_2^3 3x^2 dx$; б) $\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$; в) $\int_1^4 (x^2+3)dx$.

2. Найти: а) $\int_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$; б) $\int_0^{T/2} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}-\varphi_0\right)dt$; в) $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$

3. Найти: а) $\int_0^1 \frac{3x^2 dx}{x^3+1}$; б) $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; в) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$.

4. Вычислить определенный интеграл: а) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\cos 3xdx$; б) $\int_0^{0,25} arctg\, 4xdx$.

2.12.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы математического анализа; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.13 Практическое занятие № ПЗ-13 (2 часа).

Тема «ДУ первого порядка»

2.13.1 Задание для работы:

1. Дифференциальные уравнения с разделенными переменными.
2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
4. Уравнения Бернулли.

2.13.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Скорость распада радия пропорциональна количеству радия в данный момент времени. Вычислить, через сколько лет от 100 г радия останется 65 г, если период полураспада равен 1600 лет.

2. Найти общий интеграл ДУ: а) $\sqrt{y}dy = x^3dx$; б) $y^3dy = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. Найти частное решение ДУ $x^2dy + (y-1)dx = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $x_0 = 1,\ y_0 = 2$.

4. Решить дифференциальные уравнения:

а) $(1-x)(y' + y) = e^{-x}$; б) $y' - 4xy = x$.

5. Найти частное решение: $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$, $y_0 = 5, x_0 = -2$

6. Решить: а) $xy' + y = 2x^2y^2$, б) $y' + yctgx = y^2 \sin x \cos x$.

7. Решить задачу Коши:

а) $xy' - 2y = x^2\sqrt{y}$, $y(1) = 1$; б) $y' - \dfrac{3y}{x} = y^2$, $y_0 = -4, x_0 = 1$.

2.13.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы теории дифференциальных уравнений; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.14 Практическое занятие № ПЗ-14 (2 часа).
Тема «ЛОДУ второго порядка»
2.14.1 Задание для работы:

1. ДУ второго порядка, допускающие понижение порядка.
2. Решение ЛОДУ второго порядка. Различные случаи.

2.14.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Проверить, что функции $y = x^3$ и $y = x^4$ линейно независимые. Убедиться, что они образуют ФСР и составить его уравнение.

2. Функции $y = x^3$ и $y = x^2$ удовлетворяют некоторому дифференциальному уравнению второго порядка. Найти частное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

3. Решить ДУ:

1. $y'' + y' - 2y = 0$.	2. $y'' - 2y' + y = 0$
3. $y'' + 2y' - 5y = 0$.	4. $y'' + 5y' = 0$
5. $y'' - 2y' = 0$.	6. $y'' - 3y' + 2y = 0$
7. $y'' - 2y' = 0$.	8. $y'' + 3y' + 2y = 0$.
9. $y'' - 4y = 0$	10. $y'' - y' - 2y = 0$

2.14.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы теории дифференциальных уравнений; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.15 Практическое занятие № ПЗ-15 (2 часа).
Тема «ЛНДУ второго порядка»
2.15.1 Задание для работы:

1. Подбор частного решения ЛНДУ второго порядка по виду правой части.
2. Нахождение общего решения ЛНДУ второго порядка.

2.15.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Решить ДУ второго порядка:
а) $y''+3y'-4y=x^2+1$; б) $y''+8y'-9y=\sin x$; в) $y''-5y'-6y=4xe^{-x}$;
г) $y''-2y'+y=e^{2x}$; д) $y''-y'-2y=3e^{2x}(\sin x+\cos x)$.
2. Решить ДУ: а) $y''+3y'-4y=x^2+1$; б) $y''-5y'-6y=4xe^{-x}$
3. Записать структуру частного решения ЛНДУ по виду функции $f(x)$: $y''+4y=f(x)$; а) $f(x)=4x^3+1$; б) $f(x)=10e^{-x}\cos 2x$; в) $f(x)=x\cdot\sin x$.

2.15.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы теории дифференциальных уравнений; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.16 Практическое занятие № ПЗ-16 (2 часа).
Тема «Знакоположительные ряды»
2.16.1 Задание для работы:

1. Нахождение общего члена ряда.
2. Арифметическая, геометрическая прогрессия.
3. Сумма ряда.
4. Необходимый признак сходимости ряда.
5. Исследование на сходимость знакоположительных рядов.
6. Признаки сходимости.

2.16.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Найти формулу для общего члена ряда:
а) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\ldots$; б) $1+\frac{4}{2}+\frac{9}{6}+\frac{16}{24}+\frac{25}{120}+\ldots$; в) $\frac{2}{3}+\left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(\frac{4}{11}\right)^3+\left(\frac{5}{15}\right)^4+\ldots$
2. Найти частичную сумму первых четырех членов ряда и сумму ряда:
а) $1+8+27+\ldots$; б) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots$; в) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$
3. Проверить, выполняется ли необходимое условие сходимости ряда:
а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5n+3}$; в) $0{,}6+0{,}51+0{,}501+\ldots+\left[0{,}5+0{,}1^n\right]+\ldots$.
4. Исследовать на сходимость ряд:

а) $\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\ldots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n}$; г) $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\left(\frac{4}{9}\right)^4+\ldots$

2.16.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы теории дифференциальных уравнений; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.17 Практическое занятие № ПЗ-17 (2 часа).
Тема «Знакочередующиеся ряды»
2.17.1 Задание для работы:
1. Знакочередующиеся ряды.
2. Теорема Лейбница.
3. Абсолютная и условная сходимость.

2.17.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. По признаку Лейбница исследовать сходимость ряда $\frac{1}{1^2+1}-\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^2+1}-\frac{4}{4^2+1}+\ldots$

2. Исследовать сходимость ряда $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}+\ldots$

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n^2$; б) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\ldots$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$

4. Исследовать сходимость знакопеременных рядов и установить характер сходимости (абсолютная, условная): а) $\frac{1}{2}-\frac{4}{5}+\frac{7}{8}-\frac{10}{11}+\ldots$; б) $\frac{1}{10}+\frac{7}{10^2}-\frac{13}{10^3}+\frac{19}{10^4}+\frac{25}{10^5}-\frac{31}{10^6}+\ldots$;

в) $-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots$

5. Определить сумму ряда $3-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\ldots$ с точностью $0{,}01$ двумя способами.

2.17.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы теории дифференциальных уравнений; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.18 Практическое занятие № ПЗ-18 (2 часа).
Тема «Степенные ряды»
2.18.1 Задание для работы:
1. Точки сходимости и расходимости.
2. Теорема Абеля. Нахождение радиуса интервала сходимости.
3. Ряд Тейлора и Маклорена. Разложение элементарных функций в ряд.
4. Применение рядов к приближенным вычислениям.

2.18.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Написать первые три члена ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{3^n\sqrt{n+1}}$, найти интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на концах интервала.

2. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость ряда на концах интервала. Найти сумму ряда при $x=-1$.

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{5^n\sqrt[3]{n}};\ б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{8^n\sqrt{n}};\ в)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n n^2}.$$

3. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)$:

а) $f(x)=\ln\left(1+\dfrac{x}{4}\right)$; б) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^3}}$; в) $f(x)=\sqrt{x}\cos 2x$

4. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001 путем предварительного разложения подынтегральной функции в степенной ряд и почленного интегрирования этого ряда.

1. $\displaystyle\int_0^{0,5}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}dx$. 2. $\displaystyle\int_0^{0,5}e^{-4x^2}dx$. 3. $\displaystyle\int_0^{0,2}\frac{e^{-x}-1}{x}dx$. 4. $\displaystyle\int_0^{1}\cos\sqrt{x}\,dx$.

5. Записать в виде степенного ряда частное решение уравнения $y''-xy'+y-1=0$ при $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

2.18.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы теории дифференциальных уравнений; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.19Практическое занятие № ПЗ-19 (2 часа).
Тема «Основы теории вероятностей»
2.19.1 Задание для работы:

1. Комбинаторика.
2. Решение задач на нахождение вероятности.

2.19.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вычислить: а) $C_{11}^2\cdot C_{12}^{11}$; б) $C_{16}^3-P_6+A_7^3$.

2. В ящике 20 исправных предохранителей и 5 с дефектом. Необходимо заменить 3 предохранителя. Найти вероятность того, что: а) только 2 предохранителя исправны; б) меньше, чем 2 предохранителя исправны; в) хотя бы 1 предохранитель исправен.

3. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 64 кубика одинакового размера. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик имеет: а) одну окрашенную грань; б) три окрашенных грани.

4. Среди 10 микрокалькуляторов лишь 4 новых, остальные – бывшие в употреблении. Наугад взято три микрокалькулятора. Какова вероятность того, что все они окажутся новыми?

2.19.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы теории вероятностей; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.20 Практическое занятие № ПЗ-20 (2 часа).
Тема «Основные теоремы теории вероятностей»
2.20.1 Задание для работы:

1. Сумма и произведение событий.
2. Теоремы сложения и умножения.
3. Формула полной вероятности.

4. Формулы Байеса.

2.20.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Игральная кость налита свинцом, в результате чего вероятность выпадения каждого числа очков пропорциональна этому числу. Найдите указанные вероятности.
2. Два стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Вероятность поражения мишени каждым из стрелков равна 0,9. Найти вероятность того, что: 1) оба стрелка поразят мишень; 2) хотя бы один стрелок поразит мишень; 3) ни один стрелок не поразит мишень.
3. Студент выучил 16 из 20 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает ответ: а) на два вопроса; б) только на один вопрос из двух, содержащихся в его экзаменационном билете.
4. Магазин получил две, равные по количеству, партии телевизоров одной и той же марки. Известно, что в среднем 14% телевизоров в первой партии и 8% во второй имеют скрытый брак. Найти вероятность того, что купленный в магазине телевизор без брака.
5. Изделие проверяется на стандартность одним из трех товароведов. Вероятность того, что изделие попадет к первому товароведу, равна 0,25, ко второму – 0,26 и к третьему – 0,49. Вероятность того, что изделие будет признано стандартным первым товароведом, равна 0,95, вторым – 0,98, третьим – 0,97. найти вероятность того, что изделие проверено вторым товароведом.

2.20.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы теории вероятностей; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.21 Практическое занятие № ПЗ-21 (2 часа).
Тема «Повторные испытания»

2.21.1 Задание для работы:

1. Схема Бернулли. Формула Бернулли.
2. Локальная теорема Муавра – Лапласа.
3. Формула Пуассона.
4. Интегральная теорема Лапласа.

2.21.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вероятность прорастания семян данного сорта растений равна $0{,}75$. Посеяно 10 семян. Найти наиболее вероятное число всходов.
2. По статистическим данным в некотором районе в течение летнего сезона вероятность выпадения дождя равна $0{,}2$. Найти наиболее вероятное число не дождливых дней, если длительность летнего сезона считать равной 90 дням.
3. Вероятность того, что зерно заражено вредителями, равна $0{,}002$. Найти вероятность того, что из 2000 зерен окажется не более двух зараженных зерен.
4. Вероятность выживания бактерий после радиоактивного облучения равна 0,003. Найти вероятность того, что после облучения из 300 бактерий останется не менее трех.
5. Посредническая фирма заключает договоры с автосалонами на доставку автомобилей. Известно, что от каждого салона заявка на очередной месяц может поступить на фирму с вероятностью 0,4. Определить минимальное количество автосалонов, с которыми фирма должна заключить договоры, чтобы с вероятностью не менее 0,9 от них поступала хотя бы одна заявка на доставку автомобилей на очередной месяц. При найденном значении определить наиболее вероятное число заявок на доставку на очередной месяц и вероятность поступления такого количества заявок.

2.21.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы теории вероятностей; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.22 Практическое занятие № ПЗ-22 (2 часа).
Тема «Случайные величины»
2.22.1 Задание для работы:
1. Дискретная случайная величина.
2. Закон распределения.
3.Числовые характеристики ДСВ.

2.22.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Задан закон распределения случайной величины X.

X	2	3	6	7	8	10
p	0,1	0,2		0,2	0,15	0,1

Найти: 1) математическое ожидание M (X); 2) дисперсию D (X); 3) среднее квадратическое отклонение σ (X); 4) построить многоугольник распределения.

2. Известно, что $M(X)=5, M(Y)=8, D(X)=2, D(Y)=6$. Найти: а) $M(X-3)$; б) $M(9X-4Y)$; в) $M(3Y-2X+5)$; г) $D(Y+4)$; д) $D(X-7)$; е) $D(-2X)$; ж) $D(3X-2Y)$; з) $D(3X+4Y-5)$.

3. Даны законы распределения случайных величин X и У:

X	1	2
p	0,2	0,8

$У$	0,5	1
p	0,3	0,7

Найти $M(X+У)$, $M(X \cdot У)$.

4. ДСВ X принимает только два возможных значения x_1 и x_2 $(x_2 > x_1)$. Известно, что $P(X = x_1) = 0{,}6$. Найти закон распределения ДСВ X, если $M(X)=1{,}4,\ D(X)=0{,}24$.

2.22.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы теории вероятностей; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.23 Практическое занятие № ПЗ-23 (2 часа).
Тема «Числовые характеристики НСВ»
2.23.1 Задание для работы:
1. Функция распределения вероятностей.
2. Плотность распределения вероятностей НСВ.
3. Числовые характеристики НСВ.

2.23.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=2x$ в интервале $(0;1)$, вне этого интервала $f(x)=0$. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

2. Непрерывная случайная величина задана плотностью вероятностей

$$f(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x \le 1 \\ a\,x, & при \quad 1 < x < 3 \\ 0, & при \quad x \ge 3 \end{cases}$$

Найти: 1) параметр a; 2) $D(X)$; 3) $P(2 < X < 2{,}5)$.

3. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \le 0 \\ 3x^2 + 2x, & при \quad 0 < x < \dfrac{1}{3} \\ 1, & при \quad x \ge \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Найти плотность вероятностей, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

2.23.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы теории вероятностей; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.24 Практическое занятие № ПЗ-24 (2 часа).
Тема «Нормальный закон распределения»

2.24.1 Задание для работы:

1. Определение.
2. Нормальный закон распределения.

2.24.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, распределенной равномерно в интервале $(2;8)$.

2. Эколог изучает процесс рассеивания семян определенного растения. Допустим, что семена рассеиваются в среднем на расстояние в 1 м от материнского растения и что распределение вероятностей для этого расстояния экспоненциальное. Какая доля семян рассеивается более чем на 2 м от растения?

3. Нормально распределенная случайная величина задана плотностью вероятностей $f(x) = C \cdot e^{-\frac{(x-13)^2}{32}}$. Найти: 1) значение коэффициента C; 2) произведение $M(X) \cdot D(X)$; 3) промежутки вогнутости функции $f(x)$; 4) ось симметрии нормальной кривой; 5) значение функции $f(x)$ в точках перегиба; 6) вероятность попадания в интервал $(10;14)$.

4. Для некоторого вида млекопитающих масса взрослой особи является нормально распределенной случайной величиной со средним 100 кг и стандартным отклонением 8 кг. Чему равны вероятности того, что животное имеет массу: а) меньше 90 кг; б) от 95 до 110 кг?

5. Случайная величина X – масса одного зерна – распределена нормально с $a = 0{,}18$ г и $\sigma = 0{,}05$ г. Хорошие всходы дают зерна, масса которых больше 0,15 г. Найдите: а) процент семян, которые дадут хорошие всходы; б) величину, которую с вероятностью 0,95 не превысит масса отобранного зерна.

2.24.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы теории вероятностей; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.25 Практическое занятие № ПЗ-25(2 часа).

Тема «Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения»

2.25.1 Задание для работы:

1. Статистическое распределение выборки.
2. Эмпирическая функция распределения.
3. Полигон и гистограмма.

2.25.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Даны измерения 100 обработанных деталей. В таблице указаны значения отклонений от заданного размера и соответствующие им частоты.

$(x_{i-1}; x_i]$	$(-2;-1{,}5]$	$(-1{,}5;-1]$	$(-1;-0{,}5]$	$(-0{,}5;0]$	$(0;0{,}5]$	$(0{,}5;1]$	$(1;1{,}5]$	$(1{,}5;2]$
n_i	2	4	9	18	23	20	15	9

Считая, что признак X – отклонение от проектного размера – подчиняется нормальному закону распределения, 1) построить гистограмму относительных частот; 2) записать дискретное распределение признака X; 3) найти основные выборочные характеристики, взяв в качестве вариант середины интервалов

2.25.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы математической статистики; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.26 Практическое занятие № ПЗ-26(2 часа).

Тема «Статистические оценки параметров распределения. Точечные оценки. Интервальные оценки.»

2.26.1 Задание для работы:

1. Нахождение точечных оценок совокупности. Оценка генеральной средней по выборочной средней.
2. Определение доверительного интервала для оценки математического ожидания нормального распределения.

2.26.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Найти несмещенные оценки для неизвестных математического ожидания и дисперсии случайной величины X, заданной статистическим распределением выборки:

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

2. По выборке объема $n = 16$ из генеральной совокупности определены выборочная средняя $\bar{x} = 41{,}7$ и исправленное среднее квадратическое отклонение $s = 4$. Найти 95-процентный доверительный интервал для генеральной средней и генерального среднего квадратического отклонения.

3. Проведено 25 равноточных измерений некоторой физической величины и найдено среднее арифметическое результатов измерений $\bar{x} = 42{,}5$. Все измерения проведены одним и тем же прибором с известным средним квадратическим отклонением ошибок измерений $\sigma = 2{,}1$. Найти с надежностью $\gamma = 0{,}9$ доверительный интервал для оценки истинного значения измеряемой физической величины.

2.26.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы математической статистики; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.27 Практическое занятие № ПЗ-27 (2 часа).
Тема «Статистическая проверка статистических гипотез»

2.27.1 Задание для работы:

1. Определение нулевой и альтернативной гипотез.
2. Применение статистических критериев проверки гипотез.
3. Решение практических задач. Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей. Сравнение двух средних генеральных совокупностей, дисперсии которых известны (большие независимые выборки).

2.27.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с заданным эмпирическим распределением.

интервалы	3 – 5	5 – 7	7 – 9	9 – 11	11 – 13	13 –15	15 – 17	17 –19	19 – 21
частоты	5	8	10	18	20	16	11	7	5

2. Дано статистическое распределение

варианты	0	1	2	3	4	5	6	7
частоты	7	21	26	21	13	7	3	2

Оценить степень согласованности статистического распределения с распределением Пуассона.

2.27.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и статистические методы обработки экспериментальных данных; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.28 Практическое занятие № ПЗ-28 (2 часа).
Тема «Корреляция»

2.28.1 Задание для работы:

1. Вычисление коэффициента корреляции.
2. Определение параметров линейной регрессии.

2.28.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Получены данные между длиной колоса (X) и числом зерен (Y) в нем:

X	7	8	11	12	9	7	9	10	7	8	10	13	13	14	12	7	9	8	9	10
Y	15	20	28	28	23	17	23	25	16	21	23	28	31	32	30	16	25	20	23	25

По данным составить корреляционную таблицу; построить эмпирическую линию регрессии и записать уравнение теоретической линии регрессии.

2. Методом наименьших квадратов найти уравнение прямой регрессии Y на X по данным, приведенным в корреляционной таблице:

X \ Y	16	26	36	46	56	n_x
20	4					4
25	6	8				14
30		10	32	4		46

35			3	12	1	16
40			9	6	5	20
n_y	10	18	44	22	6	100

3. Были произведены измерения общей длины ствола в см (X) и длины его части без ветвей (Y) десяти молодых сосен. Результаты этого измерения представлены в таблице. Вычислить выборочный коэффициент корреляции и найти уравнение прямой регрессии Y на X .

x_i	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115
y_i	14	18	19	20	23	23	24	26	29	34

2.28.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и статистические методы обработки экспериментальных данных; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.