ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.Б.07 Высшая математика

Направление подготовки (специальность) 35.03.01 Лесное дело

Профиль образовательной программы Лесное хозяйство

Форма обучения заочная

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1. 1 Лекция № 1 (2 часа).

Тема: «Дифференциальное исчисление ФОП»

1.1.1 Вопросы лекции:

1. Понятие производной, ее геометрический и механический смыслы.
2. Основные правила дифференцирования.
3. Основные формулы дифференцирования.
4. Дифференциал функции и его геометрический смысл.
5. Монотонность и экстремум функции.
6. Направление выпуклости, точки перегиба.
7. Исследование ФОП и построение их графиков.

1.1.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие производной, ее геометрический и механический смыслы.

Рассмотрим в прямоугольной декартовой системе координат график непрерывной функции $y=f(x)$ и любую точку $M_0(x_0;f(x_0))$, принадлежащую графику.

Придадим аргументу x в точке x_0 произвольное приращение $\Delta x\neq 0$. На графике получим точку $M(x_0+\Delta x;f(x_0+\Delta x))$. Через точки M_0 и M проведем секущую, в точке M_0 проведем касательную к графику функции.

Рассмотрим прямоугольный треугольник M_0NM:

Угловой коэффициент секущей M_0M $k_{\text{сек}} = tg\alpha = \dfrac{NM}{M_0N} = \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Определение. Касательной к кривой в точке M_0 называется предельное положение секущей M_0M, когда точка M, двигаясь по кривой стремится совпасть с точкой M_0

Угловой коэффициент секущей ($k_{\text{сек}}$) будет стремиться к угловому коэффициенту касательной $M\to M_0,\quad \alpha\to\varphi,\quad tg\alpha\to tg\varphi \qquad tg\varphi=\lim\limits_{\Delta x\to 0} tg\alpha$, т.е. $k_{\text{кас}}=\lim\limits_{\Delta x\to 0} k_{\text{сек}}$.

Тогда $k_{\text{кас}}=\lim\limits_{\Delta x\to 0} k_{\text{сек}}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, если этот предел существует и конечен.

Задача о мгновенной скорости.

Пусть материальная точка движется по закону $S=S(t)$, где S – пройденный путь, t – время. Найдем скорость движения в момент времени t_0 (мгновенная скорость).

Зафиксируем момент времени t_0, придадим аргументу t в точке t_0 произвольное приращение $\Delta t\neq 0$. Функция $S=S(t)$ получит приращение $\Delta S=S(t_0+\Delta t)-S(t_0)$. За промежуток времени Δt средняя скорость точки будет $V_{cp}=\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$. Устремим Δt к нулю. Чем меньше Δt, тем меньше средняя скорость отличается от скорости в момент времени t_0. Поэтому под скоростью точки в момент времени t_0 (мгновенная скорость) понимается предел средней скорости за промежуток от t_0 до $t_0+\Delta t$, когда $\Delta t\to 0$, т.е. $V=\lim\limits_{\Delta t\to 0}V_{cp}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$.

В первой и во второй задачах, а также во многих других, мы приходим к необходимости вычислять пределы определенного вида, а именно $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Регулярное использование этого предела повлекло за собой необходимость введения нового понятия – понятие производной.

<u>Определение.</u> **Производной** функции *f(x)* в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

<u>Геометрический и механический смыслы производной.</u>

Уравнение касательной к кривой: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Уравнение нормали к кривой: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Фактически производная функции показывает как бы скорость изменения функции, как изменяется функция при изменении переменной.

Физический смысл производной функции f(t), где t- время, а f(t)- закон движения (изменения координат) – мгновенная скорость движения.

2. Основные правила дифференцирования.

Правила дифференцирования

1) $C' = 0$;

2) $y = x,\ y' = 1$;

3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

4) $(u \cdot v)' = u'v + u \cdot v'$;

5) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$;

где $u = u(x), v = v(x)$ - дифференцируемые на множестве X функции .

Заметим: *а)* $(C \cdot u)' = C \cdot u'$;

б) $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}$.

3. Основные формулы дифференцирования.

1. $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$

2. $(a^{x})' = a^{x} \cdot \ln a$

$(e^{x})' = e^{x}$

3. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

4. $(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(tg\ x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(ctg\ x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

5. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\left(arctg\ x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$\left(arcctg\ x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Примеры: а) $\left(x^4+4\sqrt{x}-\dfrac{1}{x^3}\right)'$; б) $\left(e^x\cdot\cos x\right)'$; в) $\left(\dfrac{x+3}{tgx}\right)'$.

4. Дифференциал функции и его геометрический смысл. Приложения дифференциала к приближенным вычислениям.

Пусть функция $y=f(x)$ имеет производную в точке x:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$$

Тогда можно записать: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha$, где $\alpha\to 0$, при $\Delta x\to 0$.

Следовательно: $\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$.

Величина $\alpha\cdot\Delta x-$бесконечно малая более высокого порядка, чем $f'(x)\Delta x$, т.е. $f'(x)\Delta x$ - главная часть приращения Δy.

Определение. Дифференциалом функции $f(x)$ в точке x называется главная линейная часть приращения функции.

Обозначается: dy или $df(x)$.

Из определения следует, что $dy=f'(x)\Delta x$.

Дифференциалом аргумента называется приращение аргумента, т.е. $dx=\Delta x$. Поэтому можно дать другое определение дифференциалу функции: $dy=f'(x)dx$

Можно также записать: $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$

Основные теоремы о дифференциалах:

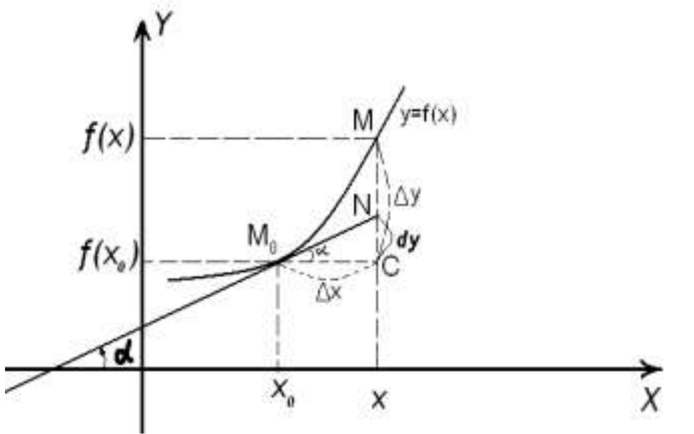
1. $d(u+v)=du+dv$.
2. $d(u\cdot v)=vdu+udv$.
3. $d(C\cdot u)=Cdu$, где $C=const$.
4. $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{vdu-udv}{v^2}$.
5. Если $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$, то $dy=y'_u\cdot du$ (инвариантность формы первого дифференциала).

Пример. Вычислить дифференциал функций:

а) $y=\cos^2 x$; б) $f(x)=x^3\cdot\sin 4x$

<u>Геометрический смысл дифференциала.</u>

Рассмотрим функцию $y=f(x)$. Проведём касательную к графику функции в точке $M_0(x_0;f(x_0))$, α - угол наклона касательной.



Выберем точку $M(x; f(x))$, где $x = x_0 + \Delta x$. Рассмотрим
$\triangle NCM_0 : \angle C = 90^\circ, M_0C = \Delta x, \angle CM_0N = \alpha$.

$\Rightarrow \frac{NC}{M_0C} = tg\alpha = f'(x_0),$

$\Rightarrow NC = f'(x_0) \cdot M_0C = f'(x_0) \cdot \Delta x,$

$\Rightarrow NC = dy$

Вывод: дифференциал равен изменению ординаты касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$, при изменении x_0 на Δx.

Дифференциалы высших порядков.

Пусть $y = f(x)$ дифференцируемая функция, а ее аргумент x - независимая переменная. Тогда ее первый дифференциал $dy = f'(x)dx$ есть также функция от x, следовательно, можно найти дифференциал этой функции.

Определение. Дифференциал от дифференциала функции $y = f(x)$ называется ее вторым дифференциалом (или дифференциалом второго порядка) и обозначается d^2y или $d^2 f(x)$.

$$d^2y = f''(x)dx^2 = f''(x)(dx)^2$$

Аналогично определяется и находится дифференциал третьего порядка:

$$d^3y = d(d^2y) = f'''(x)dx^3 = f'''(x)(dx)^3$$

Определение. Дифференциал $n-$го порядка есть дифференциал от дифференциала $(n-1)-$го порядка:

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)dx^n$$

Из каждого полученного равенства можно выразить производную функции:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \; f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \; f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}, \; \ldots, \; f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

Пример. Найти дифференциал третьего порядка для функции $y = e^{4x} + x^2$.

Приложение дифференциала к приближенным вычислениям.

Замена приращения функции её дифференциалом означает замену части графика функции M_0M отрезком касательной M_0N (или $\Delta y \approx dy$). Чем меньше $|\Delta x|$, тем меньше касательная отклоняется от графика функции, тем точнее приближённая формула: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx$.

Пример. Найти приближенное значение приращения функции $y = x^3 - 2x + 1$ при $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}01$.

Пример. Вычислить приближенно $arctg1{,}03$.

5 Монотонность и экстремум функции.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей (убывающей)** на интервале $(a; b)$, если для любых значений x_1 и x_2 аргумента x, таких что $a < x_1 < x_2 < b$ выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ ($f(x_2) < f(x_1)$).

Для нахождения интервалов возрастания и убывания функции нужно пользоваться **достаточными признаками монотонности**:

Если производная дифференцируемой функции положительна (отрицательна) на некотором интервале и стационарные точки (те в которых $f'(x) = 0$) не заполняют сплошь никакого отрезка, то функция возрастает (убывает) на этом интервале.

Определение. Если в некоторой окрестности точки x_0 для всех $x \neq x_0$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ или $f(x) > f(x_0)$, то точка x_0 называется точкой экстремума функции $f(x)$ (соответственно точкой максимума или минимума).

Необходимое условие экстремума: Если функции $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум и дифференцируема в этой точке, то первая производная $f'(x)$ равна нулю. Таким образом, экстремум может наблюдаться в точках, в которых $f'(x) = 0$ или не существует.

Достаточное условие экстремума: Если x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, то ее первая производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0: с плюса на минус – при максимуме, с минуса на плюс – при минимуме.

6 Направление выпуклости, точки перегиба.

Определение. Кривая обращена выпуклостью **вверх** на интервале $(a; b)$, если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется **выпуклой**, а кривая, обращенная выпуклостью вниз – называется **вогнутой**.

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию $f''(x) > 0$. Тогда кривая $y = f(x)$ выпукла вниз в точке с абсциссой x_0. Если же $f''(x) < 0$, то кривая $y = f(x)$ в этой точке выпукла вверх.

Определение. Точка с абсциссой x_0 называется **точкой перегиба** кривой $y = f(x)$, если при переходе через точку x_0 меняется направление выпуклости.

Необходимое условие точки перегиба: если x_0 - точка перегиба кривой $y = f(x)$, то вторая производная $f''(x)$ либо равна нулю, либо не существует.

Достаточное условие точки перегиба*:* x_0 является точкой перегиба кривой $y = f(x)$, если в достаточно малой окрестности точки x_0 при переходе через точку x_0 вторая производная меняет знак.

При исследовании функций часто бывает, что при удалении координаты x точки кривой в бесконечность кривая неограниченно приближается к некоторой прямой.

7 Исследование ФОП и построение графиков.

Общая схема исследования функции и построения ее графика.

I. Элементарное исследование:

1) найти область определения функции;
2) исследовать функцию на четность (нечетность);
3) исследовать функцию на периодичность;
4) определить, если это не вызовет особых затруднений, точки пересечения графика с координатными осями.

II. Исследование графика функции по первой производной:

1) найти $f'(x)$;
2) используя необходимый признак существования экстремума найти точки, «подозрительные» на экстремум, т.е. точки в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует;
3) нанести критические точки на область определения и найти знак производной во всех получившихся интервалах;
4) используя признаки монотонности определить характер монотонности функции на каждом интервале;
5) используя достаточный признак существования экстремума установить наличие

экстремума и их характер;
6) вычислить значение функции в точках экстремума, если они есть.

III. Исследование графика функции по второй производной:

1) найти $f''(x)$;

2) используя необходимый признак существования точек перегиба, найти точки «подозрительные» на перегиб, т.е. точки в которых $f''(x)=0$ или $f'(x)$ не существует;

3) нанести полученные точки на область определения и найти знак второй производной в каждом из получившихся интервалов;

4) используя теорему о форме кривой установить характер выпуклости (вогнутости) графика функции на каждом промежутке;

5) используя достаточный признак существования точек перегиба установить их наличие;

6) вычислить значения функции в абсциссах точек перегиба.

IV. Исследовать поведение функции на границах области определения.

V. Исследовать кривую $y=f(x)$ на наличие асимптот и указать область значений функции.

VI. Построить график функции.

Пример. Провести полное исследование и построить график функции $y=\dfrac{2}{1+x^2}$

1. 2 Лекция № 2 (2 часа).

Тема: « Неопределенный интеграл»

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Первообразная функция и ее свойства.
2. Понятие неопределенного интеграла, основные свойства.
3. Таблица интегралов. Непосредственное интегрирование. Замена переменной.
4. Интегрирование по частям.
5. Определенный интеграл, его геометрический смысл. Свойства.
6. Формула Ньютона-Лейбница. Методы интегрирования определенного интеграла.
7. Геометрические приложения определенного интеграла: площадь плоской фигуры, объем тела вращения.

1.2.2 Краткое содержание вопросов:

1 Первообразная функция и ее свойства.

Определение: Функция F(x) называется первообразной функцией функции f(x) на отрезке [a, b], если в любой точке этого отрезка верно равенство: $F'(x) = f(x)$.

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число. $F_1(x) = F_2(x) + C$.

2 Понятие неопределенного интеграла, основные свойства.

Определение: Неопределенным интегралом функции f(x) называется совокупность первообразных функции.

Записывают: $\int f(x)dx = F(x)+C$;

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Свойства:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x)$;

2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$

3. $\int dF(x) = F(x) + C;$

4. $\int (u + v - w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$

где u, v, w – некоторые функции от x.

5. $\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx;$

3 Таблица интегралов. Непосредственное интегрирование. Замена переменной.

Нахождение значения неопределенного интеграла связано главным образом с нахождением первообразной функции. Для некоторых функций это достаточно сложная задача. Ниже будут рассмотрены способы нахождения неопределенных интегралов для основных классов функций – рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных и др.

Для удобства значения неопределенных интегралов большинства элементарных функций собраны в специальные таблицы интегралов, которые бывают иногда весьма объемными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций. Но большинство представленных в этих таблицах формул являются следствиями друг друга, поэтому ниже приведем таблицу основных интегралов, с помощью которой можно получить значения неопределенных интегралов различных функций.

1). $\int du = u + C$

2). $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \ (n \neq -1)$

3). $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

4). $\int e^u du = e^u + C$

5). $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

6). $\int \sin u du = -\cos u + C$

7). $\int \cos u du = \sin u + C$

8). $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$

9). $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C$

10). $\int tgudu = -\ln|\cos u| + C$

11). $\int ctgudu = \ln|\sin u| + C$

12). $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$

13). $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C$

14). $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

15). $\int \frac{1}{\cos x}dx = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

16). $\int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$

17). $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$

Непосредственное интегрирование

Рассмотрим три основных метода интегрирования.

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием.

Рассмотрим применение этого метода на примере:

Требуется найти значение интеграла $\int \frac{dx}{x}$. На основе известной формулы дифференцирования $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. можно сделать вывод, что искомый интеграл равен $\ln x + C$, где С – некоторое постоянное число. Однако, с другой стороны $(\ln(-x))' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. Таким образом, окончательно можно сделать вывод: $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

Метод непосредственного интегрирования применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются способы, описанные ниже.

Замена переменной.

Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены x = φ(t) и dx = φ′(t)dt получается: $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$.

Сделаем замену t = sinx, dt = cosxdt.

$$\int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x + C.$$

Пример. $\int x(x^2+1)^{3/2} dx.$

Замена $t = x^2 + 1; \quad dt = 2xdx; \quad dx = \frac{dt}{2x};$ Получаем:

$$\int t^{3/2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C;$$

4 Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

(uv)′ = u′v + v′u

где u и v – некоторые функции от x.

В дифференциальной форме: d(uv) = udv + vdu

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$uv = \int udv + \int vdu$ или $\int udv = uv - \int vdu$;

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Пример. $$\int x^2 \sin x dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2; & dv = \sin x dx; \\ du = 2xdx; & v = -\cos x \end{matrix}\right\} = -x^2\cos x + \int \cos x \cdot 2xdx =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x; & dv = \cos x dx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{matrix}\right\} = -x^2\cos x + 2\left[x\sin x - \int \sin x dx\right] = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

Пример. $$\int e^{2x}\cos x dx = \left\{\begin{matrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \cos x dx; & v = \sin x \end{matrix}\right\} = e^{2x}\sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x}dx =$$

$$= \begin{cases} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \sin x dx; & v = -\cos x; \end{cases} \Bigg\} = e^{2x}\sin x - 2\left[-e^{2x}\cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x}dx\right] = e^{2x}\sin x +$$

$$+ 2e^{2x}\cos x - 4\int \cos x e^{2x}dx$$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5\int e^{2x}\cos x dx = e^{2x}(\sin x + 2\cos x)$$

$$\int e^{2x}\cos x dx = \frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C.$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.

5Определенный интеграл, его геометрический смысл. Свойства.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция f(x).

Найти площадь фигуры.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на части (не обязательно одинаковые) n точками.

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

Тогда $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, … ,$x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$;

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε.

$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, \quad x_1 < \varepsilon < x_2, \ \ldots \ , x_{n-1} < \varepsilon < x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции f(x) на отрезке $[a, b]$.

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

Обозначим $max\Delta x_i$ – наибольший отрезок разбиения. Если $max\Delta x_i \to 0$, то число отрезков разбиения отрезка [a, b] стремится к бесконечности.

Если $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$, то $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = S.$

Определение: Если при любых разбиениях отрезка $[a, b]$ таких, что $max\Delta x_i \to 0$, и произвольном выборе точек ε_i интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ стремится к пределу S, то данный предел называется определенным интегралом от $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Обозначение: $\int_a^b f(x)dx.$ a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, $[a, b]$ – отрезок интегрирования.

Теорема: Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Геометрический и физический смыслы.

Геометрический смысл определенного интеграла: Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ от неотрицательной и непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, с боков – прямыми $x = a$ и $x = b$, снизу – осью абсцисс.

Если $v(t)-$ скорость изменения функции за промежуток времени от t_1 до t_2, то определенный интеграл $\int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)dt$ численно равен пути, пройденный телом при неравномерном прямолинейном движении за промежуток времени от t_1 до t_2. Это физический смысл определенного интеграла.

Основные свойства определенного интеграла.

1) $\int\limits_a^b Af(x)dx = A\int\limits_a^b f(x)dx;$

2) $\int\limits_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx$

3) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$

4) Если $f(x) \le \varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$ и $a < b$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b \varphi(x)dx$

5) Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то:

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

6) **Теорема о среднем.** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке существует точка ε такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$$

7) Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

Разумеется, это равенство выполняется, если существует каждый из входящих в него интегралов.

8) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$

6 Формула Ньютона – Лейбница. Методы интегрирования определенного интеграла.

Пусть в интеграле $\int\limits_a^b f(x)dx$ нижний предел $a = const$, а верхний предел b изменяется. Очевидно, что если изменяется верхний предел, то изменяется и значение интеграла.

Обозначим $\int\limits_a^x f(t)dt = \Phi(x)$. Найдем производную функции $\Phi(x)$ по переменному верхнему пределу x.

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)dt = f(x)$$

Аналогичную теорему можно доказать для случая переменного нижнего предела.

Теорема. Для всякой функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a;b]$, существует на этом отрезке первообразная, а значит, существует неопределенный интеграл (без доказательства).

Теорема. (Теорема Ньютона – Лейбница)

Если функция $F(x)$ – какая- либо первообразная от непрерывной функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

Доказательство. Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$. Тогда в соответствии с приведенной выше теоремой, функция $\int_a^x f(t)dt$ - первообразная функция от $f(x)$. Но т.к. функция может иметь бесконечно много первообразных, которые будут отличаться друг от друга только на какое – то постоянное число C, то

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$$

при соответствующем выборе C это равенство справедливо для любого x, т.е. при $x = a$:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C$$

$$0 = F(a) + C$$

$$C = -F(a)$$

Тогда $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.

А при $x = b$: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Заменив переменную t на переменную x, получаем формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Приемы интегрирования.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов.

Замена переменных

Пусть задан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a,b]$. Введем новую переменную в соответствии с формулой $x = \varphi(t)$.

Тогда, если

1) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$

2) $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$

3) $f(\varphi(t))$ определена на отрезке $[\alpha, \beta]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Тогда $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_{\alpha}^{\beta} = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$

Пример.

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left\{\begin{array}{l} x = \sin t; \\ \alpha = 0; \beta = \pi/2 \end{array}\right\} = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}.$$

При замене переменной в определенном интеграле следует помнить о том, что вводимая функция (в рассмотренном примере это функция sin) должна быть непрерывна на отрезке интегрирования.

<u>Интегрирование по частям</u>

Если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du.$$

Вывод этой формулы абсолютно аналогичен выводу формулы интегрирования по частям для неопределенного интеграла, который был весьма подробно рассмотрен выше, поэтому здесь приводить его нет смысла.

7 Геометрические приложения определенного интеграла: площадь плоской фигуры, объем тела вращения.

Известно, что определенный интеграл на отрезке представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$. Если график расположен ниже оси Ох, т.е. $f(x) < 0$, то площадь имеет знак “-“, если график расположен выше оси Ох, т.е. $f(x) > 0$, то площадь имеет знак “+”.

Для нахождения суммарной площади используется формула $S = \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|$.

Площадь фигуры, ограниченной некоторыми линиями может быть найдена с помощью определенных интегралов, если известны уравнения этих линий.

Для нахождения площади криволинейного сектора введем полярную систему координат. Уравнение кривой, ограничивающей сектор в этой системе координат, имеет вид $\rho = f(\varphi)$, где ρ - длина радиус – вектора, соединяющего полюс с произвольной точкой кривой, а φ - угол наклона этого радиус – вектора к полярной оси.

Площадь криволинейного сектора может быть найдена по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)d\varphi$$

<u>Нахождение объема тела вращения.</u>

Пусть имеется тело объема V. Площадь любого поперечного сечения тела Q, известна как непрерывная функция Q = Q(x). Разобьем тело на “слои” поперечными сечениями, проходящими через точки x_i разбиения отрезка [a, b]. Т.к. на каком- либо промежуточном отрезке разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ функция Q(x) непрерывна, то принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. Обозначим их соответственно M_i и m_i.

Если на этих наибольшем и наименьшем сечениях построить цилиндры с образующими, параллельными оси x, то объемы этих цилиндров будут соответственно равны $M_i\Delta x_i$ и $m_i\Delta x_i$ здесь $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Произведя такие построения для всех отрезков разбиения, получим цилиндры, объемы которых равны соответственно $\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ и $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$.

При стремлении к нулю шага разбиения λ, эти суммы имеют общий предел:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \int_a^b Q(x)dx$$

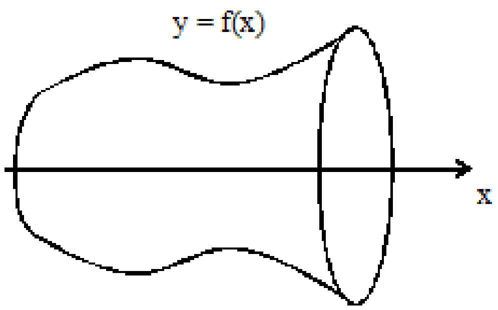
Таким образом, объем тела может быть найден по формуле:

$$V = \int_a^b Q(x)dx$$

Недостатком этой формулы является то, что для нахождения объема необходимо знать функцию Q(x), что весьма проблематично для сложных тел.

Объем тел вращения.

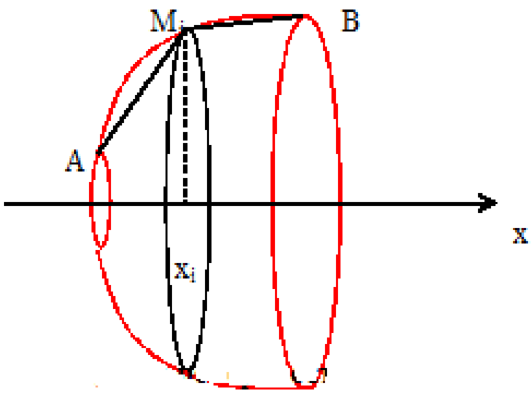
Рассмотрим кривую, заданную уравнением y = f(x). Предположим, что функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b]. Если соответствующую ей криволинейную трапецию с основаниями a и b вращать вокруг оси Ох, то получим так называемое **тело вращения**.



Т.к. каждое сечение тела плоскостью x = const представляет собой круг радиуса $R = |f(x)|$, то объем тела вращения может быть легко найден по полученной выше формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Площадь поверхности тела вращения.



<u>**Определение:**</u> **Площадью поверхности вращения** кривой АВ вокруг данной оси называют предел, к которому стремятся площади поверхностей вращения ломаных, вписанных в кривую АВ, при стремлении к нулю наибольших из длин звеньев этих ломаных.

Площадь поверхности, описанной ломаной равна:

$$P_n = \pi\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)\sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)}\Delta x_i$$

Эта сумма не является интегральной, но можно показать, что

$$P = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)\sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)}\Delta x_i = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi\sum_{i=1}^{n} 2f(\varepsilon_i)\sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)}\Delta x_i$$

Тогда $P = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx$ - формула вычисления **площади поверхности тела вращения.**

1. 3 Лекция № 3 (2 часа).

Тема: «Дифференциальные уравнения»

1.3.1 Вопросы лекции:

1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
2. Частные и общие решения.
3. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши.
4. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
6. ДУ второго порядка.

1.3.2 Краткое содержание вопросов:

1 Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

Решение различных геометрических, физических и инженерных задач часто приводят к уравнениям, которые связывают независимые переменные, характеризующие ту ил иную задачу, с какой – либо функцией этих переменных и производными этой функции различных порядков.

В качестве примера можно рассмотреть простейший случай равноускоренного движения материальной точки.

Известно, что перемещение материальной точки при равноускоренном движении является функцией времени и выражается по формуле:

$$S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$$

В свою очередь ускорение *a* является производной по времени *t* от скорости *V*, которая также является производной по времени *t* от перемещения *S*. Т.е.

$$V = \frac{dS}{dt}; \qquad a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2};$$

Тогда получаем: $S = f(t) = V_0 t + \frac{f''(t) \cdot t}{2}$ - уравнение связывает функцию $f(t)$ с независимой переменной *t* и производной второго порядка функции $f(t)$.

Определение. Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

Определение. Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется **обыкновенным дифференциальным уравнением**, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется **дифференциальным уравнением в частных производных.**

Определение. Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения.**

Пример.

$x^3 y' + 8y - x + 5 = 0$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 1 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y') = 0$.

$x\dfrac{d^2 y}{dx^2} + xy\dfrac{dy}{dx} + x^2 = y$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 2 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y', y'') = 0$

$y^2 \dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ - дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка.

2 Частные и общие решения.

Определение. Общим решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция $y = \varphi(x, C)$, которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

Свойства общего решения

1) Т.к. постоянная C – произвольная величина, то вообще говоря, дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений.

2) При каких- либо начальных условиях $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$ существует такое значение $C = C_0$, при котором решением дифференциального уравнения является функция $y = \varphi(x, C_0)$.

Определение. Решение вида $y = \varphi(x, C_0)$ называется **частным решением** дифференциального уравнения.

Определение. Интегралом дифференциального уравнения называется любое уравнение, не содержащее производных, для которого данное дифференциальное уравнение является следствием

Определение. Интегральной кривой называется график $y = \varphi(x)$ решения дифференциального уравнения на плоскости XOY.

3 Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши.

Определение. Дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение, связывающее функцию, ее первую производную и независимую переменную, т.е. соотношение вида:

$$F(x, y, y') = 0$$

Если такое соотношение преобразовать к виду $y' = f(x, y)$ то это дифференциальное уравнение первого порядка будет называться уравнением, **разрешенным относительно производной.**

Преобразуем такое выражение далее:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); \quad dy = f(x, y)dx; \quad f(x, y)dx - dy = 0;$$

Функцию f(x,y) представим в виде: $f(x, y) = -\dfrac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, $Q(x, y) \neq 0;$ тогда при подстановке в полученное выше уравнение имеем:

$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ это так называемая **дифференциальная форма** уравнения первого порядка.

Далее рассмотрим подробнее типы уравнений первого порядка и методы их решения.

Пусть функция $f(x)$ – определена и непрерывна на некотором интервале

$a < x < b$. В таком случае все решения данного дифференциального уравнения находятся как $y = \int f(x)dx + C$. Если заданы начальные условия x_0 и y_0, то можно определить постоянную C.

Определение. Задачей Коши называется нахождение любого частного решения дифференциального уравнения вида $y = \varphi(x, C_0)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$.

Теорема Коши. (теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения 1- го порядка)

Если функция f(x, y) непрерывна в некоторой области D в плоскости XOY и имеет в этой области непрерывную частную производную $y' = f(x, y)$, то какова бы не была точка (x_0, y_0) в области D, существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$, определенное в некотором интервале, содержащем точку x_0, принимающее при $x = x_0$ значение $\varphi(x_0) = y_0$, т.е. существует единственное решение дифференциального уравнения.

Определение. Интегралом дифференциального уравнения называется любое уравнение, не содержащее производных, для которого данное дифференциальное уравнение является следствием.

4 Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Определение. Уравнение вида $f(x)dx + g(y)dy = 0$ называется дифференциальным уравнением с разделенными переменными.

Способ решения: интегрирование обеих частей равенства.

Пример. $(1 + x^3)dx - y^2dy = 0$

Определение. Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его можно записать в виде $y' = \alpha(x)\beta(y)$.

Такое уравнение можно представить также в виде:

$$y' - \alpha(x)\beta(y) = 0; \quad dy - \alpha(x)\beta(y)dx = 0; \quad \frac{dy}{\beta(y)} - \alpha(x)dx = 0 \text{ } при \text{ } \beta(y) \neq 0;$$

Перейдем к новым обозначениям $\alpha(x) = -X(x); \quad \frac{1}{\beta(y)} = Y(y);$

Получаем: $X(x)dx + Y(y)dy = 0;$

$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C$

После нахождения соответствующих интегралов получается общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

Если заданы начальные условия, то при их подстановке в общее решение находится постоянная величина С, а, соответственно, и частное решение.

Решить уравнение $y' = x(y^2 + 1)$.

$$\frac{dy}{dx} = x(y^2 + 1)$$

$$\frac{dy}{y^2 + 1} = xdx$$

$$\int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int xdx; \qquad arctgy = \frac{x^2}{2} + C;$$

$$y = tg\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

Допустим, заданы некоторые начальные условия x_0 и y_0. Тогда:

$$arctgy_0 = \frac{x_0^2}{2} + C_0; \quad \Rightarrow \quad C_0 = arctgy_0 - \frac{x_0^2}{2};$$

Получаем частное решение $y = tg\left(\frac{x^2}{2} + arctgy_0 - \frac{x_0^2}{2}\right)$.

5Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Определение. Дифференциальное уравнение называется **линейным** относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

При этом, если правая часть *Q(x)* равна нулю, то такое уравнение называется **линейным однородным** дифференциальным уравнением, если правая часть *Q(x)* не равна нулю, то такое уравнение называется **линейным неоднородным** дифференциальным уравнением.

P(x) и *Q(x)* – функции, непрерывные на некотором промежутке $a < x < b$.

Метод Бернулли. Суть метода заключается в том, что искомая функция представляется в виде произведения двух функций $y = uv$.

При этом очевидно, что $y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$ - дифференцирование по частям.

Подставляя в исходное уравнение, получаем: $u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + P(x)uv = Q(x)$

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) = Q(x)$$

Далее следует важное замечание – т.к. первоначальная функция была представлена нами в виде произведения, то каждый из сомножителей, входящих в это произведение, может быть произвольным, выбранным по нашему усмотрению. Например, функция $y = 2x^2$ может быть представлена как $y = 1 \cdot 2x^2; \quad y = 2 \cdot x^2;\ y = 2x \cdot x;$ и т.п.

Таким образом, можно одну из составляющих произведение функций выбрать так, что выражение $\frac{du}{dx} + P(x)u = 0$.

Таким образом, возможно получить функцию *u*, проинтегрировав, полученное соотношение как однородное дифференциальное уравнение по описанной выше схеме:

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx; \qquad \int\frac{du}{u} = -\int P(x)dx; \qquad \ln|u| = -\int P(x)dx;$$

$$\ln|C_1| + \ln|u| = -\int P(x)dx; \qquad u = Ce^{-\int P(x)dx}; \quad C = 1/C_1;$$

Для нахождения второй неизвестной функции *v* подставим поученное выражение для функции *u* в исходное уравнение $u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) = Q(x)$ с учетом того, что выражение, стоящее в скобках, равно нулю.

$$Ce^{-\int P(x)dx}\frac{dv}{dx} = Q(x); \qquad Cdv = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$$

Интегрируя, можем найти функцию *v*:

$$Cv = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1; \qquad v = \frac{1}{C}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2;$$

Т.е. была получена вторая составляющая произведения $y = uv$, которое и определяет искомую функцию.

Подставляя полученные значения, получаем:

$$y = uv = Ce^{-\int P(x)dx} \cdot \frac{1}{C}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2\right)$$

Окончательно получаем формулу: $y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2\right)$, C_2-произвольный коэффициент.

Это соотношение может считаться решением неоднородного линейного дифференциального уравнения в общем виде по способу Бернулли.

Пример. Решить $xy' - 3y = x^5$.

Метод Лагранжа решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений еще называют методом **вариации произвольной постоянной**.

Вернемся к поставленной задаче: $y' + P(x)y = Q(x)$. Первый шаг данного метода состоит в отбрасывании правой части уравнения и замене ее нулем. $y' + P(x)y = 0$. Далее находится решение получившегося однородного дифференциального уравнения: $y = C_1 e^{-\int P(x)dx}$.

Для того, чтобы найти соответствующее решение неоднородного дифференциального уравнения, будем считать постоянную C_1 некоторой функцией от x.

Тогда по правилам дифференцирования произведения функций получаем:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dC_1(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx} + C_1(x)e^{-\int P(x)dx} \cdot (-P(x));$$

$$\frac{dC_1(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx} - C_1(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C_1(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \quad \frac{dC_1(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx} = Q(x);$$

Из этого уравнения определим переменную функцию $C_1(x)$:

$dC_1(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$ Интегрируя, получаем: $C_1 = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C;$

Подставляя это значение в исходное уравнение,

получаем: $y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right)$.

Таким образом, мы получили результат, полностью совпадающий с результатом расчета по методу Бернулли.

При выборе метода решения линейных дифференциальных уравнений следует руководствоваться простотой интегрирования функций, входящих в исходный интеграл.

Уравнения Бернулли. Метод Бернулли.

Определение. Уравнением Бернулли называется уравнение вида $y' + Py = Q \cdot y^n$, где P и Q – функции от x или постоянные числа, а n – постоянное число, не равное 1.

Для решения уравнения Бернулли применяют подстановку $z = \frac{1}{y^{n-1}}$, с помощью которой, уравнение Бернулли приводится к линейному.

Для этого разделим исходное уравнение на y^n. $\frac{y'}{y^n} + P\frac{1}{y^{n-1}} = Q;$

Применим подстановку, учтя, что $z' = -\frac{(n-1)y^{n-2}}{y^{2n-2}} \cdot y' = -\frac{(n-1)y'}{y^n}$.

$$-\frac{z'}{n-1} + Pz = Q \quad z' - (n-1)Pz = -(n-1)Q$$

Т.е. получилось линейное уравнение относительно функции z.

Решение этого уравнения будем искать в виде: $z = e^{-\int P dx}\left(\int Q_1 e^{\int P_1 dx} dx + C\right)$

$$Q_1 = -(n-1)Q; \qquad P_1 = -(n-1)P.$$

6ДУ второго порядка.

Понижение порядка дифференциального уравнения – основной метод решения уравнений высших порядков. Этот метод дает возможность сравнительно легко находить решение, однако, он применим далеко не ко всем уравнениям. Рассмотрим случаи, когда возможно понижение порядка.

1) Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

Если $f(x)$ – функция непрерывная на некотором промежутке $a < x < b$, то решение может быть найдено последовательным интегрированием.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2 = \int dx \int f(x)dx + C_1 x + C_2;$$

……………………………………………………………

$$y = \int dx \int dx ....\int f(x)dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + C_n;$$

2) Уравнения, не содержащие явно искомой функции и ее производных до порядка $k-1$ включительно.

Это уравнения вида: $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0.$

В уравнениях такого типа возможно понижение порядка на k единиц. Для этого производят замену переменной: $y^{(k)} = z; \quad y^{(k+1)} = z'; \quad ... \quad y^{(n)} = z^{(n-k)}.$

Тогда получаем: $F(x, z, z', ..., z^{(n-k)}) = 0.$

Теперь допустим, что полученное дифференциальное уравнение проинтегрировано и совокупность его решений выражается соотношением: $z = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k}).$

Делая обратную подстановку, имеем: $y^{(k)} = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$

Интегрируя полученное соотношение последовательно k раз, получаем окончательный ответ: $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n).$

3) Уравнения, не содержащие явно независимой переменной.

Это уравнения вида $F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0.$

Порядок таких уравнений может быть понижен на единицу с помощью замены переменных $y' = p.$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p;$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dy''}{dy}p = \frac{d\left(\frac{dp}{dy}p\right)}{dy}p = \frac{d^2p}{dy^2}p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p; \text{ и т.д.}$$

Подставляя эти значения в исходное дифференциальное уравнение, получаем:

$$F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}, ..., \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0$$

Если это уравнение проинтегрировать, и $\Phi(y, p, C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0$ - совокупность его решений, то для решения данного дифференциального уравнения остается решить уравнение первого порядка:

$$\Phi(y, y', C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0.$$

Примеры: а) $y''' = \cos 2x - 7$; б) $x^3 y'' + x^2 y' = 1$; в) $2yy'' = (y')^2$.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

2.1 Практическое занятие № ПЗ-1 (2 часа).
Тема: «Решение систем уравнений»
2.1.1 Задание для работы:

1. Решение систем двух уравнений с двумя переменными.
2. Системы уравнений, имеющие одно, ни одного и бесчисленное множество решений.

2.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

Примерный вариант входного контроля

1. Вычислить: $2\frac{3}{4} : \left(1\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{6}\right) \cdot 1\frac{17}{19}$.

2. Найти a, если $\frac{a}{600} = \frac{1,25 + \frac{1}{4}}{0,4 \cdot 4,5}$

Решение систем уравнений

1. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x - 3y = -7 \\ 5x + y = 8 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 8x - 5y = 3 \\ 7x + 3y = 10 \end{cases}$

2. Сколько решений имеет система линейных уравнений?

а) $\begin{cases} 2x - 3y = -7 \\ 8x - 12y = 8 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x - 3y = -7 \\ 8x - 12y = -28 \end{cases}$

3. Решите системы уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x - y - z = -2 \\ 2x + y + z = 8 \\ 4x - 2y + 3z = 5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9 \\ 2x + 5y - 3z = 4 \\ 5x + 6y - 2z = 18 \end{cases}$.

2.1.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы линейной алгебры; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.2 Практическое занятие № ПЗ-2 (2 часа).

Тема «Прямая линия на плоскости»

2.2.1 Задание для работы:

1. Способы задания прямой.
2. Взаимное расположение двух прямых.
3. Составление уравнения линий в треугольнике.

2.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Составить уравнение прямой, если: а) ее угловой коэффициент $\kappa = -5$ и она проходит через точку $A(7;-3)$; б) она проходит через точки $A(-3;5)$ и $B(1;7)$; в) проходит через точки $M(-1;8)$ и $N(-1;-4)$.

2. Даны вершины треугольника $A(-2;1), B(2;3), C(3;-4)$. Составить уравнения: а) стороны AC; б) медианы BM; в) наименьшей высоты.

3. Среди прямых указать параллельные и перпендикулярные: $5x-8y+7=0$, $8x+5y-5=0$, $5x+3y-8=0$, $8x-y-5=0$, $10x+6y-13=0$.

4. Даны две прямые $4x-ay=7$ и $20x-12y=15$. При каком условии они будут параллельны? При каких значениях a они будут пересекаться?

2.2.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы аналитической геометрии; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.3Практическое занятие № ПЗ-3 (2 часа).

Тема «Основы теории вероятностей»

2.3.1 Задание для работы:

1. Комбинаторика.
2. Решение задач на нахождение вероятности.
3. Теоремы сложения и умножения.

2.3.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вычислить: а) $C_{11}^{2} \cdot C_{12}^{11}$; б) $C_{16}^{3} - P_6 + A_7^3$.

2. В ящике 20 исправных предохранителей и 5 с дефектом. Необходимо заменить 3 предохранителя. Найти вероятность того, что: а) только 2 предохранителя исправны; б) меньше, чем 2 предохранителя исправны; в) хотя бы 1 предохранитель исправен.

3. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 64 кубика одинакового размера. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик имеет: а) одну окрашенную грань; б) три окрашенных грани.

4. Среди 10 микрокалькуляторов лишь 4 новых, остальные – бывшие в употреблении. Наугад взято три микрокалькулятора. Какова вероятность того, что все они окажутся новыми?

5. Игральная кость налита свинцом, в результате чего вероятность выпадения каждого числа очков пропорциональна этому числу. Найдите указанные вероятности.

5. Два стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Вероятность поражения мишени каждым из стрелков равна 0,9. Найти вероятность того, что: 1) оба стрелка поразят мишень; 2) хотя бы один стрелок поразит мишень; 3) ни один стрелок не поразит мишень.

5. Студент выучил 16 из 20 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает ответ: а) на два вопроса; б) только на один вопрос из двух, содержащихся в его экзаменационном билете.

2.3.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы теории вероятностей; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.4 Практическое занятие № ПЗ-4 (2 часа).
Тема «Случайные величины. Числовые характеристики ДСВ и НСВ»
2.4.1 Задание для работы:

1. Дискретная случайная величина.
2. Закон распределения.
3. Числовые характеристики ДСВ.
4. Функция распределения вероятностей.
5. Плотность распределения вероятностей НСВ.
6. Числовые характеристики НСВ.

2.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Задан закон распределения случайной величины Х.

X	2	3	6	7	8	10
p	0,1	0,2		0,2	0,15	0,1

Найти: 1) математическое ожидание М (*X*); 2) дисперсию D (*X*); 3) среднее квадратическое отклонение σ (*X*); 4) построить многоугольник распределения.

2. Известно, что $M(X)=5, M(Y)=8, D(X)=2, D(Y)=6$. Найти: а) $M(X-3)$; б) $M(9X-4Y)$; в) $M(3Y-2X+5)$; г) $D(Y+4)$; д) $D(X-7)$; е) $D(-2X)$; ж) $D(3X-2Y)$; з) $D(3X+4Y-5)$.

3. Даны законы распределения случайных величин Х и У:

X	1	2		*У*	0,5	1
p	0,2	0,8		*p*	0,3	0,7

Найти $M(X+У)$, $M(X \cdot У)$.

4. ДСВ Х принимает только два возможных значения x_1 и x_2 $(x_2 > x_1)$. Известно, что $P(X = x_1) = 0,6$. Найти закон распределения ДСВ *X*, если $M(X)=1,4,\ D(X)=0,24$.

5. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=2x$ в интервале $(0; 1)$, вне этого интервала $f(x)=0$. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

6. Непрерывная случайная величина задана плотностью вероятностей

$$f(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x \le 1 \\ a\,x, & при \quad 1 < x < 3 \\ 0, & при \quad x \ge 3 \end{cases}$$

Найти: 1) параметр a; 2) $D(X)$; 3) $P(2 < X < 2,5)$.

7. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & при \quad x\le 0\\ 3x^2+2x, & при \quad 0<x<\dfrac{1}{3}\\ 1, & при \quad x\ge \dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Найти плотность вероятностей, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

2.22.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы теории вероятностей; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.5 Практическое занятие № ПЗ-5(2 часа).
Тема «Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения»

2.5.1 Задание для работы:

1. Статистическое распределение выборки.
2. Полигон и гистограмма.
3. Нахождение точечных оценок совокупности. Оценка генеральной средней по выборочной средней.
4. Определение доверительного интервала для оценки математического ожидания нормального распределения.

2.5.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Даны измерения 100 обработанных деталей. В таблице указаны значения отклонений от заданного размера и соответствующие им частоты.

$(x_{i-1}; x_i]$	$(-2;-1{,}5]$	$(-1{,}5;-1]$	$(-1;-0{,}5]$	$(-0{,}5;0]$	$(0;0{,}5]$	$(0{,}5;1]$	$(1;1{,}5]$	$(1{,}5;2]$
n_i	2	4	9	18	23	20	15	9

Считая, что признак X – отклонение от проектного размера – подчиняется нормальному закону распределения, 1) построить гистограмму относительных частот; 2) записать дискретное распределение признака X; 3) найти основные выборочные характеристики, взяв в качестве вариант середины интервалов

2. Найти несмещенные оценки для неизвестных математического ожидания и дисперсии случайной величины X, заданной статистическим распределением выборки:

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

3. По выборке объема $n=16$ из генеральной совокупности определены выборочная средняя $\bar{x}=41{,}7$ и исправленное среднее квадратическое отклонение $s=4$. Найти 95-процентный доверительный интервал для генеральной средней и генерального среднего квадратического отклонения.

4. Проведено 25 равноточных измерений некоторой физической величины и найдено среднее арифметическое результатов измерений $\bar{x}=42{,}5$. Все измерения

проведены одним и тем же прибором с известным средним квадратическим отклонением ошибок измерений $\sigma = 2{,}1$. Найти с надежностью $\gamma = 0{,}9$ доверительный интервал для оценки истинного значения измеряемой физической величины.

2.5.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы математической статистики; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.