**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Методические рекомендации для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Б1.Б.07 Высшая математика

Направление подготовки 35.03.01 Лесное дело

Профиль образовательной программы Лесное хозяйство

Форма обучения очная

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1.Организационно-методические данные дисциплины

№ п.п.	Наименование темы	Общий объем часов по видам самостоятельной работы (*из табл. 5.1 РПД*)				
		подготовка курсового проекта (работы)	подготовка реферата/эссе	индивидуальные домашние задания (ИДЗ)	самостоятельное изучение вопросов (СИВ)	подготовка к занятиям (ПкЗ)
1	2	3	4	5	6	7
1	Линейная алгебра				1	2
2	Линии на плоскости				0,5	2
3	Линии в пространстве				-	2
4	Функция одной переменной				1	2
5	Производная и ее приложения				0,5	4
6	ФНП				1	1
7	Неопределенный интеграл				1	1
8	Определенный интеграл				1	1
9	Дифференциальные уравнения первого порядка				2	1
10	Дифференциальные уравнения второго порядка				-	1
11	Ряды				1	1
12	Случайные события				-	2
13	Случайные величины				1	2
14	Элементы математической статистики				1	2

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ВОПРОСОВ

2.1 Решение системы линейных уравнений матричным методом

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее определитель не равен нулю, и *вырожденной*, если ее определитель равен нулю.

Матрица A^{-1} называется *обратной* к матрице A , если $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов $a_{i\,j}$ матрицы А.

Пример. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -10 \end{pmatrix}$ найти обратную ей матрицу A^{-1}.

Решение. Для матрицы второго порядка обратная матрица вычисляется по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

Находим определитель матрицы A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -10 \end{vmatrix} = -30 + 5 = -25 \neq 0 .$$

Далее находим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = 1 \cdot (-10) = -10 ; \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -1 \cdot (-1) = 1 ;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -1 \cdot 5 = -5 ; \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 1 \cdot 3 = 3 .$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \frac{1}{-25}\begin{pmatrix} -10 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ -0{,}04 & -0{,}12 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ -0{,}04 & -0{,}12 \end{pmatrix}$.

Систему *n уравнений с n неизвестными* $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$, имеющую единственное решение (т.е. $\Delta = |A| \neq 0$) можно решить методом обратной матрицы по формуле:

$X = A^{-1} \cdot B$, где A^{-1} - обратная матрица для матрицы A ;

Пример. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} x + y - 2z = -2 \\ 2x - y + 3z = 13 \\ 3x + 2y - z = 5 \end{cases}$ методом обратной матрицы.

Неизвестная матрица $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot B$, где $A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\2&-1&3\\3&2&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2\\13\\5\end{pmatrix}$.

По формуле $A^{-1}=\dfrac{1}{\Delta_A}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}$ находим обратную матрицу для матрицы A, где $\Delta_A=\begin{vmatrix}1&1&-2\\2&-1&3\\3&2&-1\end{vmatrix}=-8$.

Вычисляем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot M_{11}=\begin{vmatrix}-1&3\\2&-1\end{vmatrix}=-5$;

$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot M_{12}=\begin{vmatrix}2&3\\3&-1\end{vmatrix}=11$;

$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot M_{13}=\begin{vmatrix}2&-1\\3&2\end{vmatrix}=7$;

$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot M_{21}=\begin{vmatrix}1&-2\\2&-1\end{vmatrix}=-3$;

$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot M_{22}=\begin{vmatrix}1&-2\\3&-1\end{vmatrix}=5$;

$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot M_{23}=\begin{vmatrix}1&1\\3&2\end{vmatrix}=1$;

$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot M_{31}=\begin{vmatrix}1&-2\\-1&3\end{vmatrix}=1$;

$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot M_{32}=\begin{vmatrix}1&-2\\2&3\end{vmatrix}=-7$;

$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot M_{33}=\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix}=-3$.

Таким образом, обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1}=\frac{1}{-8}\cdot\begin{pmatrix}-5&-3&1\\11&5&-7\\7&1&-3\end{pmatrix}.$$

Следовательно, неизвестная матрица равна:

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}-5&-3&1\\11&5&-7\\7&1&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\13\\5\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}-5\cdot(-2)+(-3)\cdot 13+1\cdot 5\\11\cdot(-2)+5\cdot 13+(-7)\cdot 5\\7\cdot(-2)+1\cdot 13+(-3)\cdot 5\end{pmatrix}=-\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}-24\\8\\-16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix},\text{ т.е. }\begin{cases}x=3\\y=-1\\z=2\end{cases}.$$

Ответ: $(3;-1;2)$.

2.2 Произвольный базис

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Базисом в пространстве называются любые три некомпланарных и ненулевых вектора, взятые в определенном порядке.

Базисом на плоскости называются любые два неколлинеарных и ненулевых вектора, взятые в определенном порядке.

Векторы $\overrightarrow{a_1},...,\overrightarrow{a_n}$ называются *линейно зависимыми*, если существует линейная комбинация $\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\overrightarrow{a_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{a_n}=0$ при не равных нулю одновременно α_i, т.е. $\alpha_1^2+\alpha_2^2+...+\alpha_n^2\neq 0$.

Если же равенство $\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\overrightarrow{a_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{a_n}=0$ выполняется только при $\alpha_i=0$, то векторы называются *линейно независимыми*.

Свойства линейно зависимых векторов:

1. Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима.
2. Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов представляет собой линейную комбинацию остальных векторов.
3. Любые два коллинеарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые два линейно зависимые векторы коллинеарны.
4. Любые три компланарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые три линейно зависимые векторы компланарны.
5. Любые четыре вектора линейно зависимы.

Если $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$ – базис в пространстве и $\vec{a}=\alpha\overrightarrow{e_1}+\beta\overrightarrow{e_2}+\gamma\overrightarrow{e_3}$, то числа α,β,γ называются *координатами вектора* $\vec{a}$ в этом базисе.

Ортом координатной оси называется единичный вектор, направление которого совпадает с положительным направлением оси.

Орты осей Ox, Oy и Oz обозначают соответственно $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. Эти вектора образуют *ортонормированный (прямоугольный декартовый) базис*.

Пример. Доказать, что векторы $\vec{a}(3;-1;0)$, $\vec{b}(2;3;1)$ и $\vec{c}(-1;4;3)$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}(2;3;7)$ в этом базисе.

Решение. Базисом в пространстве называется система трех некомпланарных векторов. Три вектора $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$, $\vec{c}(x_3;y_3;z_3)$ являются некомпланарными, если определитель, составленный из координат данных векторов, отличен от нуля, т.е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}\neq 0.$$

Подставим координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в определитель:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}=22\neq 0.$$

Так как значение определителя отлично от нуля, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис, и вектор $\vec{d}$ линейно выражается через базисные векторы:

$$\vec{d}=x\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}+z\cdot\vec{c}.$$

Запишем данное равенство в координатной форме:

$$(2;\,3;\,7) = x\cdot(3;\,-1;\,0) + y\cdot(2;\,3;\,1) + z\cdot(-1;\,4;\,3)\,.$$

Сравнивая одноименные координаты:

$$\begin{cases} 2 = x\cdot 3 + y\cdot 2 + z\cdot(-1) \\ 3 = x\cdot(-1) + y\cdot 3 + z\cdot 4 \\ 7 = x\cdot 0 + y\cdot 1 + z\cdot 3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3x + 2y - z = 2 \\ -x + 3y + 4z = 3 \\ \qquad y + 3z = 7 \end{cases}.$$

Решаем полученную систему по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 27 + 0 + 1 - 0 - 12 + 6 = 22\,,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 18 + 56 - 3 + 21 - 18 - 8 = 66\,,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 27 + 0 + 7 - 0 + 6 - 84 = -44\,,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 63 + 0 - 2 - 0 + 14 - 9 = 66\,.$$

Находим:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{66}{22} = 3,\; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-44}{22} = -2\,,\; z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{66}{22} = 3\,.$$

Поэтому $\vec{d}\,(3;\,-2;\,3)$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Ответ: $(3;\,-2;\,3)$.

2.3 Каноническое уравнение параболы со смещенной вершиной.

1. Окружность.

Линией (кривой) второго порядка называется множество точек плоскости, декартовы координаты $x,\,y$ которых удовлетворяют уравнению

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0\,,$$

где A, B, C, D, E, F – постоянные действительные числа, причем A, B, C одновременно не равны нулю.

Окружность: $x^2 + y^2 = R^2$ или $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, где $(x_0;\,y_0)$ – координаты центра окружности, R – радиус окружности.

2. Эллипс.

Эллипс: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ или $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$;

где $(x_0;\,y_0)$ – координаты центра эллипса,

a – большая полуось, b – малая полуось,

$2c$ – расстояние между фокусами, причем $a^2 - c^2 = b^2$;

$\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ – эксцентриситет эллипса ($\varepsilon < 1$);

$F_1(-c;\,0)$ и $F_2(c;\,0)$ – фокусы эллипса.

3. Гипербола.

Гипербола: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ или $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$;

где $(x_0; y_0)$ – координаты центра гиперболы,

a – действительная полуось, b – мнимая полуось,

$2c$ – расстояние между фокусами, причем $c^2 - a^2 = b^2$;

$\varepsilon = \frac{c}{a}$ – эксцентриситет гиперболы ($\varepsilon > 1$);

$F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$ – фокусы гиперболы;

$y = \pm \frac{b}{a} x$ – уравнения асимптот гиперболы.

4. Парабола.

а) С осью симметрии Ox:

$y^2 = 2px$ – уравнение параболы; p – параметр параболы,

$F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ – фокус параболы; $x = -\frac{p}{2}$ – уравнение директрисы

б) С осью симметрии Oy:

$x^2 = 2py$ – уравнение параболы; p – параметр параболы,

$F\left(0; \frac{p}{2}\right)$ – фокус параболы; $y = -\frac{p}{2}$ – уравнение директрисы

2.4 Основные элементарные функции, их свойства, графики

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Функция – зависимость переменной x от переменной y, при которой каждому значению x соответствует *единственное* значение y.

Обозначается: $y = f(x)$.

Переменная x называется *независимой переменной* или *аргументом*, а переменная y – *зависимой переменной*.

Буква f (вместо неё может быть g, h и другие буквы) означает правило, по которому, зная значение x, можно получить значение y.

Графиком функции называется множество всех точек плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям самой функции.

Для того чтобы кривая на плоскости являлась графиком функции, необходимо и достаточно, чтобы каждому значению аргумента x, соответствовало лишь одно значение переменной y, т.е. любая прямая, параллельная оси ординат, пересекала кривую не более чем в одной точке.

Для того чтобы построить график функции, необходимо определить ее основные свойства.

1. Область определения функции

Множество значений независимой переменной x называется *областью определения функции* и обозначается $D(y)$, D_y, D_f или $D(f)$.

Например, $D(f) = (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$ является областью определения для функции $y = \frac{x-1}{x+3}$.

Замечание. Для нахождения области определения функции учитывают условия: 1) знаменатель должен быть отличен от нуля; 2) корень четной степени извлекается из неотрицательных чисел; в) логарифмы существуют только для положительных чисел.

2. Область значений функции

Множество значений, принимаемых зависимой переменной y, называется *областью значений функции* и обозначается $E(y)$, E_y, E_f или $E(f)$.

Например, $E(f)=(-\infty;+\infty)$ является областью значений для функции $y=\dfrac{x-1}{3}$.

3. Монотонность функции

Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* на промежутке X, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции; т.е. для любых значений аргумента x_1 и x_2 из промежутка X, таких, что $x_1<x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$.

Функция $y=f(x)$ называется *убывающей* на промежутке X, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции; т.е. для любых значений аргумента x_1 и x_2 из промежутка X, таких, что $x_1<x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)>f(x_2)$.

Например, $f(x)=4-3x$ убывает на $(-\infty;+\infty)$, т.к. если взять $x_1<x_2$, то по свойствам неравенств $4-3x_1>4-3x_2$; т.е. $f(x_1)>f(x_2)$ для всех $x\in(-\infty;+\infty)$.

Если функция только возрастает или только убывает на данном числовом промежутке, то она называется *строго монотонной* на этом промежутке.

4. Чётные и нечётные функции

Чётная функция – функция $y=f(x)$, обладающая следующими свойствами:

1) её область определения симметрична относительно нуля;
2) для любого значения x из области определения выполняется равенство $f(-x)=f(x)$.

График любой чётной функции симметричен относительно оси ординат.

Например, $y=x^2$, $y=\cos x$ – чётные функции.

Сумма, разность, произведение чётных функций также представляют собой чётные функции.

Нечётная функция – функция $y=f(x)$, обладающая следующими свойствами:

1) её область определения симметрична относительно нуля;
2) для любого значения x из области определения выполняется равенство $f(-x)=-f(x)$.

График любой нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Например, $y=x^5$, $y=\dfrac{1}{x}$ – нечётные функции.

Замечание. Функцию, не являющуюся ни четной, ни нечетной называют *функцией общего вида.*

5. Экстремумы функции

Точка экстремума – точка минимума или максимума функции.

Точка x_0 называется *точкой максимума функции* $y=f(x)$, если найдётся такая окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности выполняется $f(x_0)\geq f(x)$, т.е. $f(x_0)$ наибольшее значение функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0.

Точка x_0 называется *точкой минимума функции* $y = f(x)$, если найдётся такая окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности выполняется $f(x_0) \le f(x)$, т.е. $f(x_0)$ наименьшее значение функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0.

6. Периодические функции

Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T \ne 0$, что:

1) для любого x из области определения функции числа $(x+T)$ и $(x-T)$ также принадлежат области определения;
2) выполняется равенство: $f(x) = f(x+T) = f(x-T)$.

Число T называется периодом функции. Всякая периодическая функция имеет бесконечно много периодов, т.к. если число T – один из периодов, то всякое число $Tm, m \in Z$ также будет периодом этой функции. Чаще всего из множества периодов функции выбирают наименьший положительный период. Иногда его называют основным периодом.

Значения периодической функции через промежуток, равный периоду, повторяются, поэтому для построения графика периодической функции достаточно построить ветвь графика на участке длиной T, а затем выполнить параллельный перенос этой ветви вдоль оси Ox на $\pm T, \pm 2T$ и т.д.

Если функция $f(x)$ – периодическая с периодом T, то периодом функции $a \cdot f(kx+b)$, где a, k, b – постоянные, $k \ne 0$ будет число $\frac{T}{|k|}$.

7. Нули функции

Нули функции – значения аргумента, при которых значения функции равны нулю.

Нули функции разбивают область определения функции на промежутки знакопостоянства.

При графическом задании функции нули функции являются точками пересечения графика с осью абсцисс.

К основным элементарным функциям относятся:

- степенная функция $y = x^n$, где $n \in R$;
- показательная функция $y = a^x$;
- логарифмическая функция $y = \log_a x$;
- тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$;
- обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$.

Степенная функция

– это функция вида $y = x^n$, где n – постоянное действительное число.

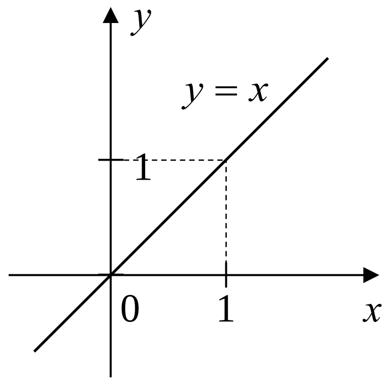
Рассмотрим частные случаи степенной функции:

а) Линейная функция $y = x$

Такая функция $(n=1)$ является прямой пропорциональностью и обладает следующими свойствами:

1. Область определения – множество всех действительных чисел, т.е. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2. Область значений: $E(f) = (-\infty; +\infty)$.
3. Функция принимает нулевое значение при $x = 0$.
4. Функция возрастает на всей области определения.
5. Экстремумов нет.
6. Функция является нечётной.

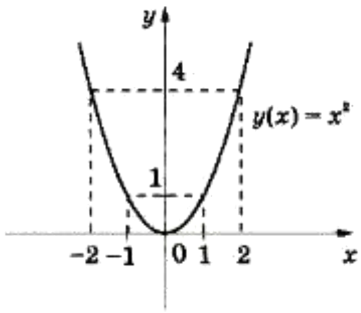
7. Графиком функции является прямая линия, проходящая через начало координат и являющаяся биссектрисой I и III координатных четвертей:



б) Квадратичная функция $y = x^2$

У данной функции $n = 2$, рассмотрим её свойства:

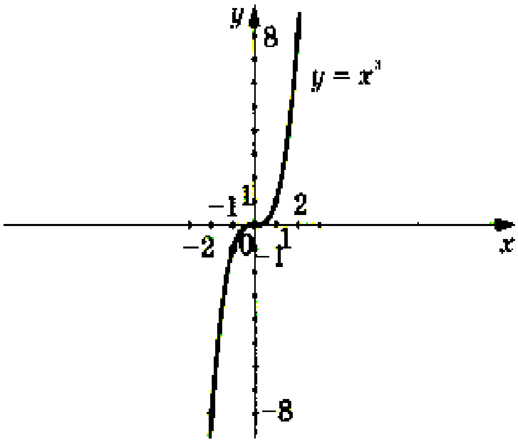
1. Область определения – множество всех действительных чисел, т.е. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2. Область значений – множество неотрицательных действительных чисел: $E(f) = [0; +\infty)$.
3. Нули функции: $y = 0$ при $x = 0$.
4. Функция возрастает от $-\infty$ до 0 при $x \in (-\infty; 0]$.
5. Функция убывает от 0 до $+\infty$ при $x \in [0; +\infty)$.
6. Функция имеет минимум при $x = 0$: $y_{\min} = 0$.
7. Функция является чётной.
8. График функции – парабола:



Замечание. Если n является чётным числом, то функция обладает теми же свойствами, что и квадратичная функция. График её напоминает параболу.

в) Кубическая функция $y = x^3$

1. Область определения функции – множество всех действительных чисел *R:* $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
1. Множество значений функции: $E(f) = (-\infty; +\infty)$.
2. Функция принимает нулевое значение при $x = 0$.
3. Функция возрастает всюду на всей области определения.
4. Функция нечетная.
5. Экстремумов нет.
6. График функции – кубическая парабола:

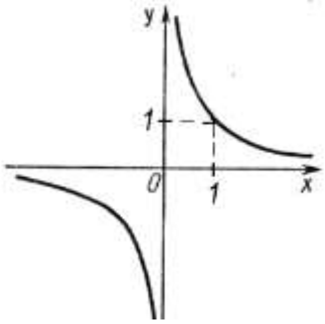


Замечание. Если n является нечётным числом, то функция обладает теми же свойствами, что и кубическая парабола.

г) Обратная пропорциональность $y = \dfrac{1}{x}$

У данной функции $n = -1$, так как $y = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$, поэтому она тоже является степенной; рассмотрим её свойства:

1. Область определения $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
2. Множество значений функции: $E(f) = (-\infty; +\infty)$.
3. Функция не имеет нулей.
4. Функция возрастает на всей области определения.
5. Функция нечетная.
6. Экстремумов нет.
7. Графиком обратной пропорциональности является кривая, состоящая из двух ветвей, симметричных относительно начала координат. Такая кривая называется гиперболой, ветви гиперболы расположены в I и III четвертях:

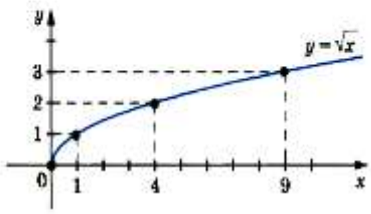


д) Функция $y = \sqrt{x}$

У данной функции $n = \dfrac{1}{2}$, так как $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, поэтому она является степенной; рассмотрим её свойства:

1. Областью определения функции служит множество неотрицательных чисел: $D(f) = [0; +\infty)$.
2. Множество значений функции – множество неотрицательных действительных чисел: $E(f) = [0; +\infty)$.
3. Функция принимает нулевое значение при *x = 0.*
4. Функция возрастает на всей области определения.
5. Функция не является ни чётной, ни нечетной.
6. Экстремумов нет.

7. График функции специального названия не имеет:

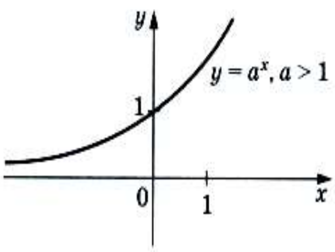


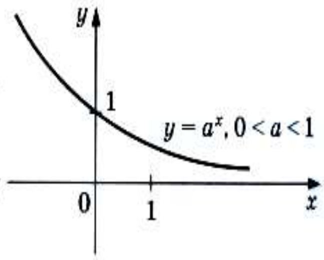
2. *Показательная функция*

– это функция вида $y = a^x$, где $a > 0, a \neq 1$

Рассмотрим свойства показательной функции:

1. Область определения – множество всех действительных чисел: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2. Область значений – множество положительных действительных чисел: $E(f) = \left(0; +\infty\right)$.
3. Функция не является ни чётной, ни нечетной.
4. Если $x = 0$, то $y = a^0 = 1$, следовательно, график показательной функции пересекает ось Oy в точке $(0;1)$.
5. Нулей функции нет, т.к. показательная функция принимает только положительные значения.
6. Если $a > 1$, то функция возрастает на всей числовой прямой;
7. если $0 < a < 1$, то функция убывает на всей числовой прямой.
8. Экстремумов нет.
9. График функции специального названия не имеет:



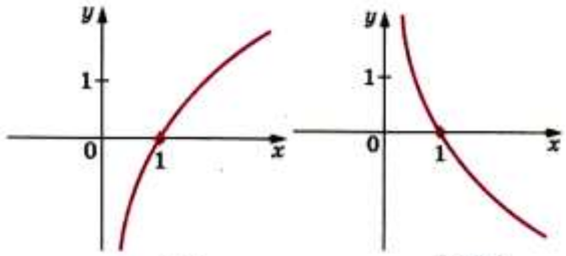


3. *Логарифмическая функция*

– это функция вида $y = \log_a x$, где $a > 0, a \neq 1$.

Свойства логарифмической функции:

1. Область определения – множество положительных действительных чисел: $D(f) = (0; +\infty)$.
2. Область значений – множество всех действительных чисел: $E(f) = \left(-\infty; +\infty\right)$.
3. Функция не является ни чётной, ни нечетной.
4. Если $x = 1$, то $y = \log_a 1 = 0$, следовательно, график логарифмической функции пересекает ось Ox в единственной точке $(1;0)$.
5. Если $a > 1$, то функция возрастает на интервале $\left(0; +\infty\right)$; если $0 < a < 1$, то функция убывает на $\left(0; +\infty\right)$.
6. Экстремумов нет.
7. График функции специального названия не имеет. Логарифмическая функция является обратной для показательной функции. Графики этих функций симметричны относительно прямой $y = x$:



$a > 1$ $\qquad$ $0 < a < 1$

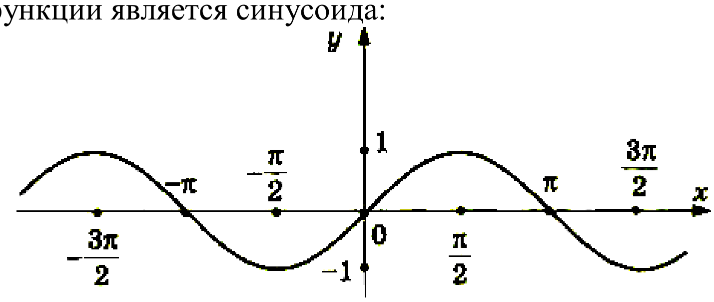
4. *Тригонометрические функции*

– это функции числового аргумента: $y = \sin x$, $\quad y = \cos x$, $\quad y = tgx$, $\quad y = ctgx$.

а) Функция синуса $y = \sin x$

Свойства функции $y = \sin x$:

1. Область определения – множество всех действительных чисел: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2. Область значений – отрезок $[-1;1]$.
3. Функция является нечетной.
4. Функция периодическая: $T = 2\pi$.
5. Нули функции: $\sin x = 0$ при $x = \pi k, k \in Z$.
6. Возрастает от -1 до 1 при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), \quad k \in Z$.
7. Убывает от 1 до -1 при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), \quad k \in Z$.
8. Функция достигает максимального значения $y_{\max} = 1$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.
9. Функция достигает минимального значения $y_{\min} = -1$ при $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.
10. Графиком функции является синусоида:

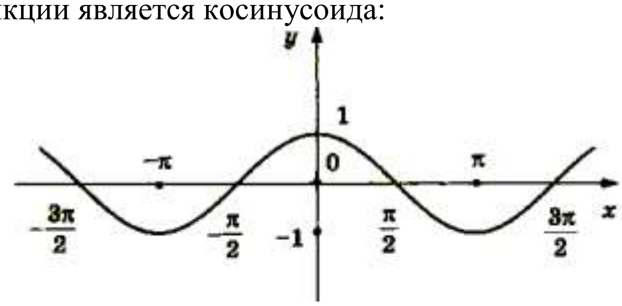


б) Функция косинуса $y = \cos x$

Свойства функции $y = \cos x$:

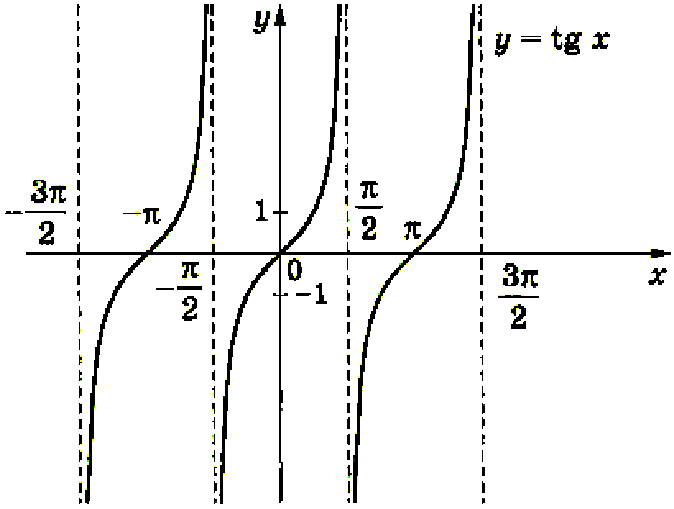
1. Область определения – множество всех действительных чисел: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2. Область значений – отрезок $[-1;1]$.
3. Функция является четной.
4. Функция периодическая: $T = 2\pi$.
5. Нули функции: $\cos x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.
6. Возрастает от -1 до 1 при $x \in (-\pi + 2\pi k; 2\pi k), \quad k \in Z$.
7. Убывает от 1 до -1 при $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k), \quad k \in Z$.
8. Функция достигает максимального значения $y_{\max} = 1$ при $x = 2\pi k, k \in Z$.

9. Функция достигает минимального значения $y_{\min} = -1$ при $x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$.
10. Графиком функции является косинусоида:



в) Функция тангенса $y = tgx$

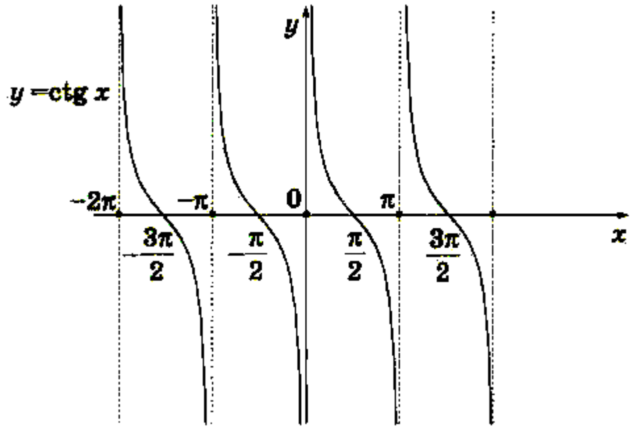
Свойства функции $y = tgx$:
1. Область определения – множество всех действительных чисел, кроме чисел вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$.
2. Область значений – множество всех действительных чисел: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
3. Функция является нечетной.
4. Функция периодическая: $T = \pi$.
5. Нули функции: $tgx = 0$ при $x = \pi k,\ k \in Z$.
6. Возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ на промежутках $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\quad k \in Z$.
7. Экстремумов нет.
8. Графиком функции является тангенсоида:



г) Функция котангенса $y = ctgx$

Свойства функции $y = ctgx$:
1. Область определения – множество всех действительных чисел, кроме чисел вида $x = \pi k,\ k \in Z$.
2. Область значений – множество всех действительных чисел: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
3. Функция является нечетной.
4. Функция периодическая: $T = \pi$.
5. Нули функции: $ctgx = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$.
6. Убывает от $+\infty$ до $-\infty$ на промежутках $x \in (\pi k; \pi + \pi k),\quad k \in Z$.

7. Экстремумов нет.
8. Графиком функции является котангенсоида:



5. Обратные тригонометрические функции (аркфункции)

– это функции, обратные к тригонометрическим функциям:

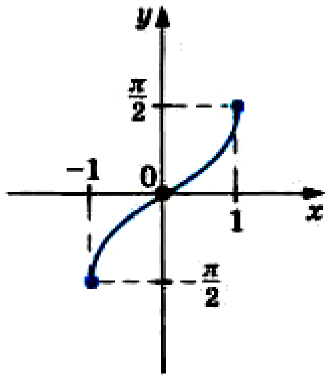
$y = \arcsin x,\ y = \arccos,\ y = arctgx,\ y = arcctgx$.

Функция g называется *обратной к функции* f , если область определения функции f является областью значений функции g , а область значений функции f является областью определения функции g .

а) Функция арксинуса $y = \arcsin x$

Свойства функции $y = \arcsin x$:

1. Область определения является отрезок $[-1;1]$.
2. Область значений – отрезок от $-\frac{\pi}{2}$ (при $x = -1$) до $\frac{\pi}{2}$ (при $x = 1$).
3. Функция является нечетной.
4. Функция не является периодической.
5. Нули функции: $\arcsin x = 0$ при $x = 0$.
6. Монотонно возрастает на всей области определения.
7. Экстремумов нет.
8. График функции специального названия не имеет:

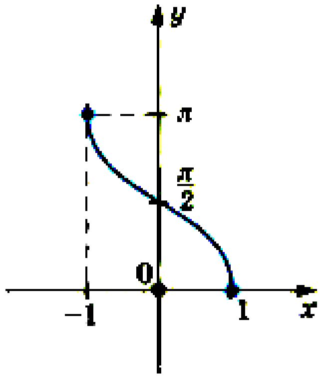


б) Функция арккосинуса $y = \arccos x$

Свойства функции $y = \arccos x$:

1. Область определения является отрезок $[-1;1]$.
2. Область значений – отрезок от 0 (при $x = 1$) до π (при $x = -1$).

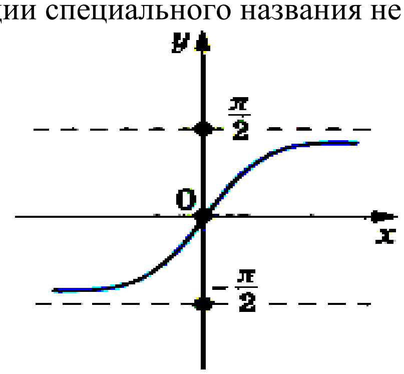
3. Функция не является ни чётной, ни нечетной.
4. Функция не является периодической.
5. Нули функции: $\arccos x = 0$ при $x = 1$.
6. Функция пересекает ось ординат в точке $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.
7. Монотонно убывает на всей области определения.
8. Экстремумов нет.
9. График функции специального названия не имеет:



в) Функция арктангенса $y = arctgx$

Свойства функции $y = arctgx$:

1. Область определения является - множество всех действительных чисел: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2. Область значений – промежуток $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.
3. Функция является нечетной.
4. Функция не является периодической.
5. Нули функции: $arctgx = 0$ при $x = 0$.
6. Возрастает на всей области определения.
7. Экстремумов нет.
8. График функции специального названия не имеет:

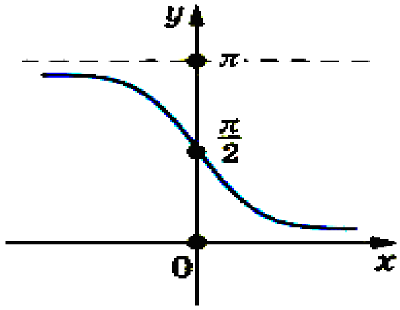


г) Функция арккотангенса $y = arcctgx$

Свойства функции $y = arcctgx$:

1. Область определения является - множество всех действительных чисел: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2. Область значений – промежуток $(0; \pi)$.
3. Функция не является ни чётной, ни нечетной.
4. Функция не является периодической.
5. Нулей функции нет.

6. График функции пересекает ось ординат в точке $y = \frac{\pi}{2}$.
7. Убывает на всей области определения.
8. Экстремумов нет.
9. График функции специального названия не имеет:

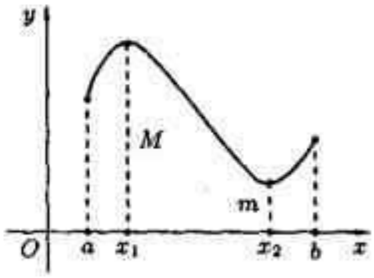


2.5 Свойства функций, непрерывных на отрезке

Непрерывные на отрезке функции имеют ряд важных свойств.

Теорема 1 (Вейерштрасса). Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

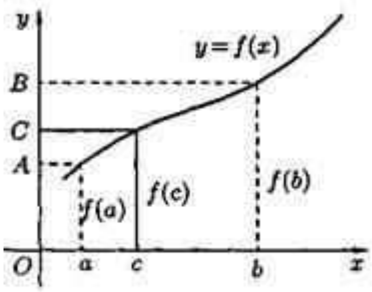
Изображенная на рисунке функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, принимает свое наибольшее значение M в точке x_1, а наименьшее m - в точке x_2. Для любого $x \in [a;b]$ имеет место неравенство $m \leq f(x) \leq M$.



Следствие 1. Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

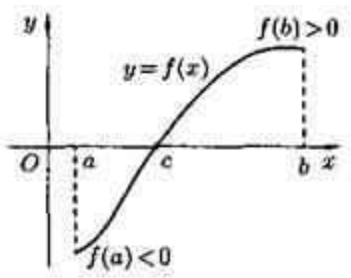
Теорема 2 (Больцано-Коши). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на его концах неравные значения $f(a) = A$ и $f(b) = B$, то на этом отрезке она принимает и все промежуточные значения между A и B.

Геометрически теорема очевидна.

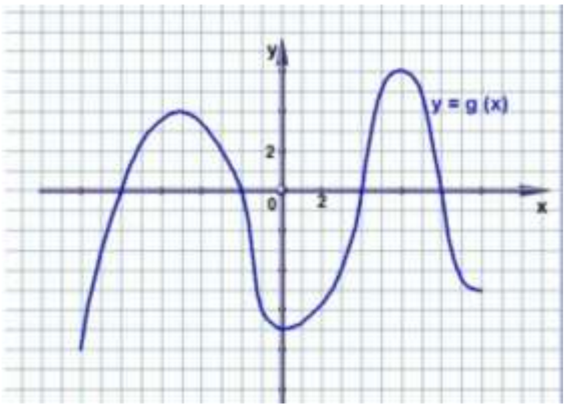


Следствие 1. Для любого числа C, заключенного между A и B, найдется точка c внутри этого отрезка такая, что $f(c) = C$. Прямая $y = C$ пересечет график функции, по крайней мере, в одной точке.

Следствие 2. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри отрезка $[a;b]$ найдется хотя бы одна точка c, в которой данная функция $f(x)$ обращается в нуль: $f(c) = 0$.



Геометрический смысл теоремы: если график непрерывной функции переходит с одной стороны оси Ox на другую, то он пересекает ось Ox. Следствие 2 лежит в основе так называемого метода интервалов - это универсальный способ решения практически любых неравенств, которые встречаются в школьном курсе алгебры. Непрерывная функция $g(x)$ может изменить знак только в той точке, в которой она равна 0. Графически это означает, что график непрерывной функции может перейти из одной полуплоскости в другую, только если пересечет ось абсцисс (мы помним, что ордината любой точки, лежащей на оси OX (оси абсцисс) равна нулю, то есть значение функции в этой точке равно 0):



Мы видим, что функция $y = g(x)$, изображенная на графике, пересекает ось Ox в точках $x = -8, x = -2, x = 4, x = 8$. Эти точки называются нулями функции. И в этих же точках функция $g(x)$ меняет знак.

2.6 Дифференцирование параметрически заданной функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \text{ где } t \text{ – параметр.}$$

Тогда производная этой функции по переменной x равна отношению производных y'_t и x'_t по параметру t:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Пример. Найти производную функции $y = f(x)$, заданной уравнениями в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}.$$

Решение. Очевидно, что

$$y'_t = b\cos t, \; x'_t = -a\sin t.$$

Следовательно,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b\cos t}{a\sin t}=-\frac{b}{a}ctgt\ .$$

Из определения производной второго порядка следует, что:

$$y''_{xx}=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}\ .$$

Аналогично получаем:

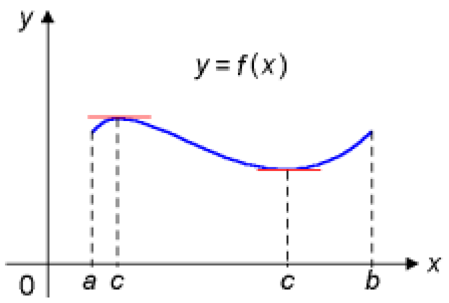
$$y'''_{xxx}=\frac{\left(y''_{xx}\right)'_t}{x'_t}\ ;\ y^{(4)}{}_{xxxx}=\frac{\left(y'''_{xxx}\right)'_t}{x'_t}\ ,\ \ldots$$

2.7 Теоремы Коши, Ролля, Лагранжа

Теорема 1. (*Теорема Ролля*) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$; дифференцируема в интервале $(a;b)$; на концах отрезка $[a;b]$ принимает равные значения. Тогда существует точка $c\in(a;b)$ такая, что $f'(c)=0$.

Геометрическая интерпретация теоремы Ролля

Из теоремы Ролля следует, что существует точка $c\in(a;b)$, в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна оси Ox.



Теорема 2. (*Теорема Лагранжа*) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$; дифференцируема в интервале $(a;b)$. Тогда существует точка $c\in(a;b)$ такая, что

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

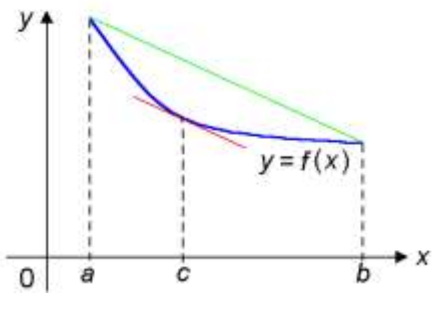
Формула (1) называется *формулой Лагранжа*, или *формулой конечных приращений*

Геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа

Представим формулу в виде

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

Число $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ есть угловой коэффициент прямой, проходящей через концы графика функции $y=f(x)$ - точки $(a;f(a))$ и $(b;f(b))$, а $f'(c)-$ угловой коэффициент касательной к этому графику в точке $(c;f(c))$. Из формулы следует, что существует точка $c\in(a;b)$, в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой, проходящей через концы графика (или совпадает с ней).



Теорема 3. (*Теорема Коши*) Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$; дифференцируемы в интервале (a, b); $x \in (a;b)$, $g'(x) \neq 0$. Тогда существует точка $c \in (a;b)$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Формула (3) называется *формулой Коши*.

2.8 Метод наименьших квадратов

Примером исследования функции двух переменных на экстремум является метод наименьших квадратов при построении эмпирических формул. Пусть в результате опыта зависимость между переменными x и y выражается в виде таблицы:

x_i	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
y_i	y_1	y_2	...	y_i	...	y_n

В случае линейной зависимости между переменными x и y указанные точки расположены в достаточной близости от некоторой прямой $y = ax + b$. При подстановке $x = x_i$ в уравнение прямой получаем $a \cdot x_i + b$, а в результате опыта получилось y_i, т.е. формула дает расхождение $y_i - (ax_i + b)$ с опытом, которое получено за счет различных ошибок.

Значения параметров a и b выбираются таким образом, чтобы сумма квадратов этих расхождений была наименьшей. В этом и состоит метод наименьших квадратов. Для определения коэффициентов a и b используется нормальная система способа наименьших квадратов:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}.$$

В случае квадратичной зависимости $y = ax^2 + bx + c$ для определения коэффициентов пользуются системой:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + c \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}.$$

Пример. Значения переменных величин x и y, полученные в результате опыта, представлены в виде таблицы:

x_i	0	1	2	4	5
y_i	0,6	1,1	1,9	2,9	3,1

Используя метод наименьших квадратов найти линейную зависимость $y = ax + b$ (найти значения параметров a и b).

Решение. В примере $n = 5$. Для удобства вычисления сумм, которые входят в нормированную систему, составляем следующую таблицу:

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	$x_i^{\ 2}$
1	0	0,6	0	0
2	1	1,1	1,1	1
3	2	1,9	3,8	4
4	4	2,9	11,6	16
5	5	3,1	15,5	25
$\sum_{i=1}^{5}$	12	9,6	32	46

Подставив найденные значения сумм в систему $\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$, получим:

$$\begin{cases} 46a + 12b = 32 \\ 12a + 5b = 9{,}6 \end{cases}.$$

Решая систему, находим значения параметров: $a \approx 0{,}52$; $b \approx 0{,}67$.

Таким образом, зависимость между переменными x и y выражается формулой $y = 0{,}52x + 0{,}67$.

Ответ: $y = 0{,}52x + 0{,}67$.

2.9 Приближенное вычисление определенных интегралов.

Пусть требуется найти определенный интеграл от непрерывной функции f(x). Если можно найти первообразную $\int_a^b f(x)\,dx$ F(x) функции f(x), то интеграл вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Но отыскание первообразной функции иногда весьма сложно; кроме того, как известно, не для всякой непрерывной функции ее первообразная выражается через элементарные функции. В этих и других случаях (например, функция y = f(x) задана графически или таблично) прибегают к приближенным формулам, с помощью которых определенный интеграл находится с любой степенью точности.

Рассмотрим три наиболее употребительные формулы приближенного вычисления определенного интеграла — формулу прямоугольников, формулу трапеций, формулу парабол (Симпсона), основанные на геометрическом смысле определенного интеграла.

1. Формула прямоугольников

Пусть на отрезке [a; b], a < b, задана непрерывная функция f(x). Требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, численно равный площади соответствующей криволинейной трапеции. Разобьем основание этой трапеции, т. е. отрезок [a; b], на n равных частей (отрезков) длины $h = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$ (шаг

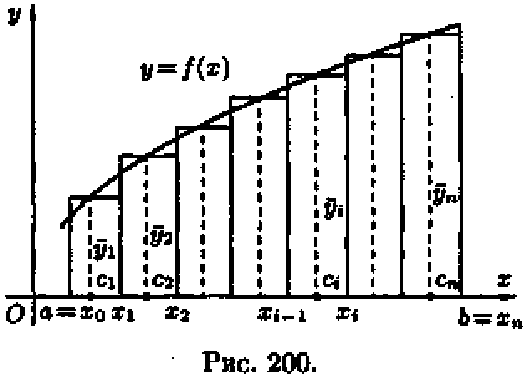


Рис. 200.

разбиения) с помощью точек $x_0 = a$, x_1, x_2,..., $x_n = b$. Можно записать, что $x_i = x_0 + h \cdot i$, где i = 1,2,..., n (см. рис. 200).

В середине $c_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ каждого такого отрезка построим ординату $\hat{y}_i = f(c_i)$ графика функции $y = f(x)$. Приняв эту ординату за высоту, построим прямоугольник с площадью $h \cdot \hat{y}_i$.

Тогда сумма площадей всех n прямо угольников дает площадь ступенчатой фигуры, представляющую собой приближенное значение искомого определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \cdots + \bar{y}_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right). \qquad (42.1)$$

Формула (42.1) называется формулой средних прямоугольников.

Абсолютная погрешность приближенного равенства (42.1) оценивается с помощью следующей формулы:

$$|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^3 \cdot M_2}{24n^2},$$

где M_2 — наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке [a; b],

$$|R_n| = \left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \right|.$$

Отметим, что для линейной функции ($f(x)=kx+b$) формула (42.1) дает точный ответ, поскольку в этом случае $f''(x)=0$.

2. Формула трапеций

Формулу трапеций получают аналогично формуле прямоугольников: на каждом частичном отрезке криволинейная трапеция заменяется обычной.

Разобьем отрезок [a; b] на n равных частей длины $h = \frac{b-a}{n}$. Абсциссы точек деления $a = x_0$, x_1, x_2,..., $b = x_n$ (рис. 201). Пусть y_0, y_1..., y_n —

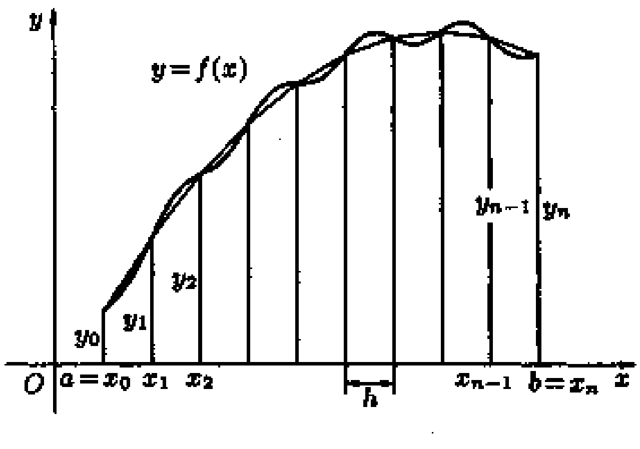


Рис. 201.

соответствующие им ординаты графика функции. Тогда расчетные формулы $h = \frac{b-a}{n}$, для этих значений примут вид $x_i = a + h*i$, $y_i = f(x_i)$, i= 0,1,2,..., n;

Заменим кривую $y=f(x)$ ломаной линией, звенья которой соединяют концы ординат y_i и y_{i+1} (i = 0,1,2,.. .,n). Тогда площадь криволинейной трапеции приближенно равна сумме площадей обычных трапеций с основаниями y_i, y_{i+1} и высотой $h = \frac{b-a}{n}$:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{y_0+y_1}{2}\cdot h + \frac{y_1+y_2}{2}\cdot h + \dots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\cdot h$$

или

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}\right). \qquad (42.2)$$

Формула (42.2) называется формулой трапеций.

2.10 Комплексные числа. Функция комплексного переменного Ее производные.

Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Def: *Комплексным числом* называется выражение вида $z = a + ib$, где a, b - действительные числа, i - мнимая единица, $i^2 = -1$. (В электродинамике мнимую единицу принято обозначать через *j*, кроме того, следует отметить, что в электротехнике векторная комплексная величина обозначается точкой над величиной, а скалярная - подчеркиванием снизу*)*

a - называется действительной частью числа z, b - называется мнимой частью числа z. Их обозначают $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$.

Выражение $z = a + ib$ называют *алгебраической формой записи комплексного числа.*

Если $a = 0$, то число ib называется чисто мнимым, если $b = 0$, то получается действительное число $a + i0 = a$

Def: Комплексные числа $z = a + ib, \quad \bar{z} = a - ib$, которые отличаются только знаком мнимой части, называются *сопряженными.*

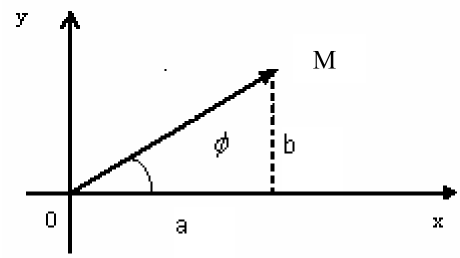
Замечания: 1) Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1, \quad z_2 = a_2 + ib_2$ считаются равными, если равны их действительные и мнимые части соответственно.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$

2) Комплексное число равно нулю тогда и только тогда, когда действительная и мнимая части равны нулю

$$z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

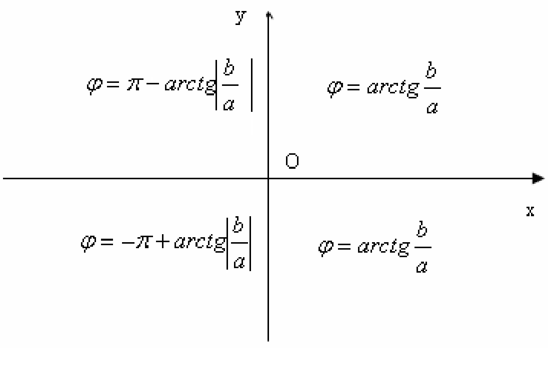
Всякое комплексное число $z = a + ib$ можно изобразить на плоскости Oxy в виде точки $M(a,b)$. Обратно, каждой точке плоскости $M(a,b)$ соответствует комплексное число $z = a + ib$. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется комплексной плоскостью. Точкам плоскости, лежащим на оси абсцисс соответствуют действительные числа. Точки, лежащие на оси ординат, изображают чисто мнимые числа. Поэтому, ось Ox называют действительной осью, а ось Oy - мнимой осью.



В алгебраической форме $z_1 = a_1 + ib_1, \quad z_2 = a_2 + ib_2$

Def: Суммой двух комплексных чисел называется комплексное число, определяемое равенством $z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$, т.е. сложение комплексных чисел происходит по правилу сложения радиус-векторов этих чисел.
Пример: $(2 - i) + (-1 + 3i) = 1 + 2i$
При вычитании комплексных чисел их радиус-векторы вычитаются.
Т.о. $z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$
Def: Произведением комплексных чисел называется такое комплексное число, которое получается, если перемножить числа как многочлены, учитывая, что $i^2 = -1$.
$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ib_1a_2 + ia_1b_2 + i^2b_1b_2$, проведя преобразования, получим $z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(b_1a_2 + a_1b_2)$.
Замечание: Произведение сопряженных комплексных чисел равно квадрату модуля каждого из них $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$
Def: Частным от деления z_1 на z_2 называется комплексное число z, удовлетворяющее условию. $z_2 \cdot z = z_1$ Т.е $a_1 + ib_1 = (a_2 + ib_2)(x + iy) = (a_2x - b_2y) + i(a_2y + b_2x)$. Чтобы найти x и y необходимо решить систему уравнений $\begin{cases} a_2x - b_2y = a_1 \\ b_2a_2x + a_2y = b_1 \end{cases}$, решив эту систему, получим $x = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \quad y = \dfrac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$. Окончательно получаем $z = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\dfrac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$. Практически деление комплексных чисел выполняется следующим образом: чтобы разделить $z_1 = a_1 + ib_1$ на $z_2 = a_2 + ib_2$, умножим делимое и делитель на число сопряженное делителю, т. е. на число $a_2 - ib_2$.
Тригонометрическая форма комплексного числа. Формула Муавра.
С каждой точкой z связан радиус-вектор этой точки $\overrightarrow{OM}$. Длина радиус - вектора r называется модулем комплексного числа $r = |z|$. Угол, образованный радиус-вектором точки z с осью Ox, называется аргументом $\varphi = Argz$ этой точки. Наименьшее по модулю значение аргумента называется его главным значением и обозначается через $\arg z$:
$-\pi < \arg z \le \pi$.

Для модуля и аргумента комплексного числа справедливы следующие соотношения
$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \arg z$,
$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi, \quad tg\varphi = \dfrac{b}{a}$. $r, \quad \varphi$ - полярные координаты точки z. Для того чтобы найти аргумент комплексного числа, необходимо определить в какой из координатных четвертей оно располагается, и воспользоваться следующими соотношениями



Подставив полученные нами соотношения в выражение для комплексного числа, получим $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
Выражение $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется *тригонометрической формой записи комплексного числа.*

Если $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k \end{cases} \quad k \in N.$$

Для сопряженных комплексных чисел справедливы следующие соотношения $\bar{z} = a - ib = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$, То есть $\arg\bar{z} = -\arg z$

Если комплексному числу $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, модуль которого равен 1, поставить в соответствие показательное выражение $e^{i\varphi}$, то получим соотношение $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, которое называется *формулой Эйлера.*

Любое комплексное число z можно записать в виде $z = re^{i\varphi}$. Эта форма записи комплексного числа называется *показательной формой*.

Итак, существуют три формы записи комплексного числа:

$z = a + ib$ **– алгебраическая форма;**

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ **– тригонометрическая форма;**

$z = re^{i\varphi}$ **– показательная форма.**

В тригонометрической и показательной форме.

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_1e^{i\varphi_1}$, $\quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_2e^{i\varphi_2}$

При умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

Применив формулу Эйлера, получим правило нахождения произведения комплексных чисел в показательной форме $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

Для нахождения частного двух комплексных чисел в тригонометрической и показательной форме применяют следующие формулы

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Возведение в степень представляет собой произведение n одинаковых сомножителей. В силу правила умножения комплексных чисел получим

$z^n = r^n(\cos n\varphi - i\sin n\varphi)$ - формула Муавра. $z^n = r^n e^{in\varphi}$

Формулу Муавра удобно применять для вывода формул кратных углов

Извлечение корня из комплексного числа.

Корень из комплексного числа. Пусть $\sqrt[n]{z} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$, где $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда $z = \rho^n(\cos n\psi - i\sin n\psi)$.

Отсюда, $r = \rho^n, \quad n\psi = \varphi + 2\pi k \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$, т. е.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$ где $k = 0,1,2,3,\ldots n-1$

Из этой формулы следует, что корень n-степени из любого отличного от нуля комплексного числа имеет точно n значений. Геометрически они изображаются точками, равноотстоящими друг от друга на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$.

Понятие о функции комплексного аргумента.

Если каждому комплексному числу $z \in D$ по некоторому закону поставлено в соответствие определенное комплексное число $w \in G$, то на этой области задана *однозначная функция комплексного переменного*:

w = f(z)

Множество D называется *областью определения*, множество G – *областью значений функции***.**

Комплексную функцию можно записать в виде:

$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

$u(x, y) = \text{Re } f(z)$

$v(x, y) = \text{Im } f(z)$

u, v – действительные функции от переменных x и y.

Если каждому $z \in D$ соответствует несколько различных значений w, то функция $w = f(z)$ называется *многозначной***.**

Основные трансцендентные функции

Трансцендентными называются аналитические функции, которые не являются алгебраическими.

Если аргументом показательной или тригонометрических функций является комплексное число, то определение этих функций, вводимое в элементарной алгебре, теряет смысл.

Функции e^z, cosz, sinz связаны между собой формулой Эйлера. Эта формула может быть очень легко получена сложением соответствующих рядов.

$e^{-iz} = \cos z + i \sin z$

Также справедливы равенства:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}; \qquad \left(e^z\right)^m = e^{zm}; \qquad e^{z+2\pi i} = e^z;$$

$$tgz = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})};$$

$$ctgz = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}};$$

Для тригонометрических функций комплексного аргумента справедливы основные тригонометрические тождества (синус и косинус суммы, разности и т.д.), которые справедливы для функций действительного аргумента.

Определение. Гиперболическим синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом называются соответственно функции:

$$sh\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad ch\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \quad th\, z = \frac{sh\, z}{ch\, z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}; \quad cth\, z = \frac{ch\, z}{sh\, z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}};$$

Гиперболические функции могут быть выражены через тригонометрические:

$$sh\, z = -i \sin iz; \qquad ch\, z = \cos iz;$$

$$th\, z = -itg\, iz; \qquad cth\, z = ictg\, iz;$$

Гиперболические функции $sh\, z$ и $ch\, z$ имеют период $2\pi i$, а функции $th\, z$ и $cth\, z$ – период πi.

Пример. Найти sin(1+2i).

$$\sin(1+2i) = \frac{e^{i-2} - e^{2-i}}{2i} = \frac{e^{-2}e^i - e^2 e^{-i}}{2i} = \frac{e^{-2}(\cos 1 + i \sin 1) - e^2(\cos 1 - i \sin 1)}{2i} =$$

$$= \frac{\cos 1(e^{-2} - e^2) + i \sin 1(e^2 + e^{-2})}{2i} = \frac{e^2 + e^{-2}}{2}\sin 1 + i\frac{e^2 - e^{-2}}{2}\cos 1 = ch2\sin 1 + sh2\cos 1.$$

Логарифмическая функция комплексного аргумента определяется как функция, обратная показательной.

$e^{w} = z; \qquad w = Lnz.$

Если $w = u + iv$, то $\left|e^{w}\right| = e^{u}$ и $Arg\, e^{w} = \arg z + 2\pi k = v$.

Тогда $e^{u} = |z|; \qquad u = \ln|z|$.

Итого: $w = Lnz = \ln|z| + i\arg z + 2\pi i k; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Для комплексного числа $z = a + ib$ $\quad \arg z = arctg\,\dfrac{b}{a};$

Выражение $\ln z = \ln|z| + i\arg z$ называется *главным значением логарифма*.

Логарифмическая функция комплексного аргумента обладает следующими свойствами:

1) $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$; 2) $\ln\dfrac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2$; 3) $\ln(z)^n = n\ln z$; 4) $\ln\sqrt[n]{z} = \dfrac{1}{n}\ln z$;

Обратные тригонометрические функции комплексного переменного имеют вид:

$$Arc\cos z = -i\left[\ln\left|z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right| + i\left[\arg(z \pm \sqrt{z^2 - 1}) + 2\pi k\right]\right] = \frac{1}{i}Ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

$$Arc\sin z = -i\left[\ln\left|iz \pm \sqrt{1 - z^2}\right| + i\left[\arg(iz \pm \sqrt{1 - z^2}) + 2\pi k\right]\right] = \frac{1}{i}Ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$$

$$Arctgz = -i\left[\ln\left|\frac{1 + zi}{1 - zi}\right| + i\left(\arg\frac{1 + zi}{1 - zi} + 2\pi k\right)\right] = \frac{1}{2i}Ln\frac{i - z}{i + z}$$

$$Arshz = \ln\left|z \pm \sqrt{z^2 + 1}\right| + i\left[\arg(z \pm \sqrt{z^2 + 1}) + 2\pi k\right] = Ln\left(z \pm \sqrt{z^2 + 1}\right)$$

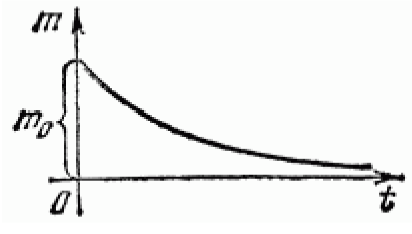
$$Archz = \ln\left|z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right| + i\left[\arg(z \pm \sqrt{z^2 - 1}) + 2\pi k\right] = Ln\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

$$Arcthz = \frac{1}{2}Ln\frac{1 + z}{1 - z}$$

2.11 Задача о распаде радия

Установлено, что скорость распада радия прямо пропорциональна его количеству в каждый данный момент. Определить закон изменения массы радия в зависимости от времени, если при $t = 0$ масса радия была m_0.

Скорость распада определяется следующим образом. Пусть в момент t была масса m, в момент $t + \Delta t$ - масса $m + \Delta m$. За время Δt распалась масса Δm.



Отношение $\dfrac{\Delta m}{\Delta t}$ есть средняя скорость распада. Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$, т.е. $\lim\limits_{\Delta t \to 0}\dfrac{\Delta m}{\Delta t} = \dfrac{dm}{dt}$ есть скорость распада радия в момент t. По условию задачи

$\dfrac{dm}{dt} = -km$, где $k-$ коэффициент пропорциональности ($k > 0$). Мы ставим знак минус потому, что при увеличении времени масса радия убывает.

Уравнение $\dfrac{dm}{dt} = -km$ есть уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные: $\dfrac{dm}{m} = -kdt$

Решая уравнение, получим $\ln m = -kt + \ln C$, откуда $m = Ce^{-kt}$.

Так как при $t = 0$ масса радия была m_0, то C должно удовлетворять соотношению $m_0 = Ce^{-k\cdot 0} = C$. Подставляя это значение C, получим искомую зависимость массы радия как функцию времени:

$$m = m_0 e^{-kt}$$

Коэффициент k определен из наблюдений и получено, что для радия $k = 0{,}000436$ (единица измерения времени год). Таким образом, зависимость массы радия от времени выражается формулой:

$$m = m_0 e^{-0{,}000436\,k}$$

Найдем период полураспада радия, т. е. промежуток времени, за который распадается половина первоначальной - массы радия. Подставляя в последнюю формулу вместо m значение $\dfrac{m_0}{2}$ получим $\dfrac{m_0}{2} = m_0 e^{-0{,}000436\,k}$, откуда

$$T = \frac{\ln 2}{0{,}000436} \approx 1590 \quad \text{(лет)}.$$

2.12 Признаки сравнения знакоположительных рядов

Первый признак сравнения.

Даны два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с условием $0 \le a_n \le b_n$. Тогда: а) из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; б) из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Второй (предельный) признак сравнения.

Даны два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Если существует конечный, отличный от нуля, предел отношения общих членов этих рядов, тогда данные ряды сходятся или расходятся одновременно.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \cos\dfrac{\pi}{n}\right)$.

Решение. Так как $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ при $x \to 0$ и $1 - \cos\dfrac{\pi}{n} \sim \dfrac{\left(\dfrac{\pi}{n}\right)^2}{2} = \dfrac{\pi^2}{2n^2}$ при $n \to \infty$, то применим предельный признак сравнения, взяв в качестве сравниваемого ряда обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

Вычисляем предел отношения общих членов данных рядов:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\pi/n}{1/n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2/2n^2}{1/n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2}{2}=\frac{\pi^2}{2}\neq 0,\neq\infty.$$

Исследуемый ряд сходится, поскольку сходится сравниваемый ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Ответ: ряд сходится.

2.13 Ряды Фурье

Рассмотрим некоторую функцию $y=f(x)$, которая **определена** по крайне мере на промежутке $[-\pi;\pi]$ (а, возможно, и на большем промежутке). Если данная функция интегрируема на отрезке $[-\pi;\pi]$, то её можно разложить в тригонометрический **ряд Фурье**:

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, где a_0,a_n,b_n – так называемые *коэффициенты Фурье*.

При этом число $T=2\pi$ называют **периодом разложения**, а число $l=\frac{T}{2}=\pi$ – **полупериодом разложения**.

Очевидно, что в общем случае ряд Фурье состоит из синусов и косинусов: Нулевой член ряда принято записывать в виде $\frac{a_0}{2}$.

Коэффициенты Фурье рассчитываются по следующим формулам: $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$; $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$; $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$;

Пример. Разложить функцию $f(x)=x+1$ в ряд Фурье на промежутке $[-\pi;\pi]$. Построить график $f(x)=x+1$, график суммы ряда $S(x)$.

Решение: первая часть задания состоит в разложении функции в ряд Фурье.

В данной задаче период разложения $T=2\pi$, полупериод $l=\frac{T}{2}=\pi$.

Используя соответствующие формулы, найдём *коэффициенты Фурье*. Теперь нужно составить и вычислить три **определённых интеграла**. Для удобства я буду нумеровать пункты:

1) Первый интеграл самый простой, однако и он уже требует глаз да глаз:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}+\pi-\left(\frac{(-\pi)^2}{2}-\pi\right)\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}+\pi-\left(\frac{\pi^2}{2}-\pi\right)\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}+\pi-\frac{\pi^2}{2}+\pi\right)=\frac{1}{\pi}\cdot 2\pi=2$$

2) Используем вторую формулу:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)\cos nxdx=(*)$$

Данный интеграл хорошо знаком и **берётся он по частям**

$u=x+1\Rightarrow du=dx$

$dv=\cos nxdx\Rightarrow v=\int\cos nxdx=\frac{1}{n}\int\cos nxd(nx)=\frac{1}{n}\sin nx$

При нахождении v использован метод подведения функции под знак дифференциала.

Используем формулу интегрирования по частям в определённом интеграле $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$:

$$(*) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}(x+1)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\cdot\left[(\pi+1)\sin \pi n - (-\pi+1)\sin(-\pi n)\right] - \frac{1}{n}\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)\cdot \cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\cdot(0-0) + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(0 + \frac{1}{n^2}(\cos \pi n - \cos(-\pi n))\right) = \frac{1}{\pi n^2}(\cos \pi n - \cos \pi n) = 0$$

3) Ищем третий коэффициент Фурье:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)\sin nxdx = (*)$$

Получен родственник предыдущего интеграла, который тоже **интегрируется по частям**:

$$u = x+1 \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \sin nxdx \Rightarrow v = \int \sin nxdx = \frac{1}{n}\int \sin nxd(nx) = -\frac{1}{n}\cos nx$$

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Этот экземпляр чуть сложнее, закомментирую дальнейшие действия пошагово:

$$(*) \overset{(1)}{=} \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}(x+1)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx\right) \overset{(2)}{=}$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\cdot\left[(\pi+1)\cos \pi n - (-\pi+1)\cos(-\pi n)\right] + \frac{1}{\pi n}\cdot\frac{1}{n}(\sin nx)\Big|_{-\pi}^{\pi} \overset{(3)}{=}$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\cdot\left[(\pi+1)(-1)^n - (-\pi+1)(-1)^n\right] + \frac{1}{\pi n^2}\cdot(\sin \pi n - \sin(-\pi n)) \overset{(4)}{=}$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\cdot\left[\pi+1+\pi-1\right]\cdot(-1)^n + \frac{1}{\pi n^2}\cdot(0-0) \overset{(5)}{=} -\frac{1}{\pi n}\cdot 2\pi\cdot(-1)^n + 0 = -\frac{2\pi\cdot(-1)^n}{\pi n} = -\frac{2\cdot(-1)^n}{n}$$

Наконец-то найдены все три коэффициента Фурье: $a_0 = 2, a_n = 0, b_n = -\frac{2}{n}(-1)^n$.

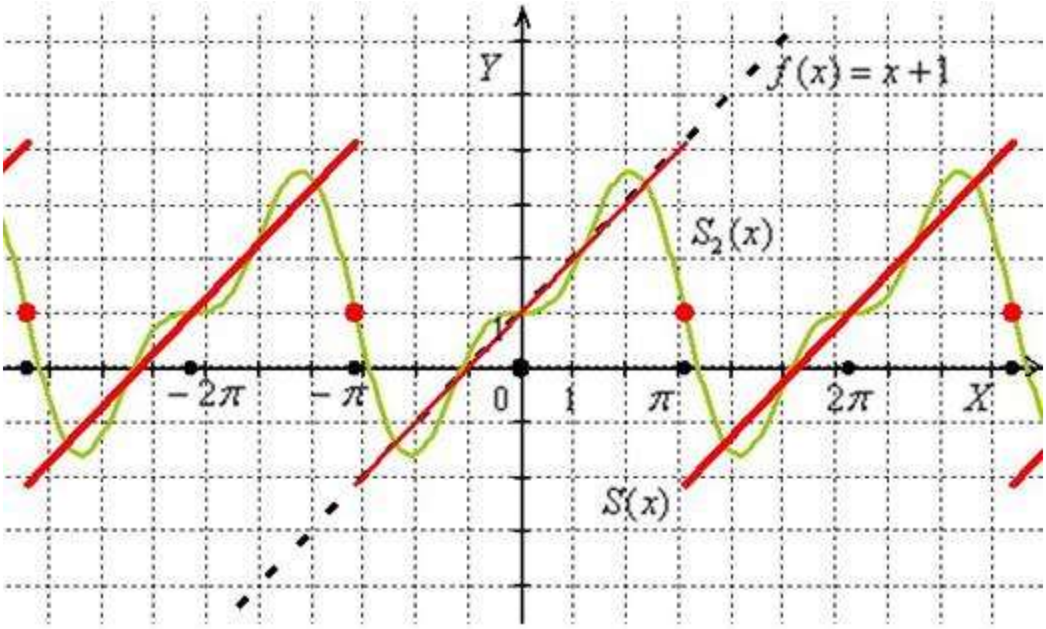
Подставим их в формулу $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$ и получим:

$$f(x) = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin nx}{n}.$$

При этом не забываем разделить a_0 пополам. На последнем шаге константа («минус два»), не зависящая от «эн», вынесена за пределы суммы. Таким образом, мы получили разложение функции $f(x) = x+1$ в ряд Фурье на промежутке $[-\pi;\pi]$.

Изучим вопрос сходимости ряда Фурье. Во второй части задачи требуется изобразить график $f(x) = x+1$, график суммы ряда $S(x)$ и график частичной суммы $S_2(x)$.

График функции $f(x) = x+1$ представляет собой обычную **прямую на плоскости**, которая проведена чёрным пунктиром:



Разбираемся с суммой ряда $S(x)$. Как вы знаете, функциональные ряды сходятся к функциям. В нашем случае построенный ряд Фурье $1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin nx}{n}$ при любом значении «икс» сойдётся к функции $S(x)$, которая изображена красным цветом. Данная функция терпит **разрывы 1-го рода** в точках $...x=-3\pi, x=-\pi, x=3\pi...$, но определена и в них (красные точки на чертеже)

Таким образом: $1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin nx}{n}=S(x)$. Легко видеть, что $S(x)$ заметно отличается от исходной функции $f(x)=x+1$.

На практике обычно достаточно изобразить три периода разложения, как это сделано на чертеже. Ну и ещё «обрубки» соседних периодов – чтобы было понятно, что график продолжается.

Особый интерес представляют **точки разрыва 1-го рода**. В таких точках ряд Фурье сходится к изолированным значениям, которые расположены ровнёхонько посередине «скачка» разрыва (красные точки на чертеже). Как узнать ординату этих точек? Сначала найдём ординату «верхнего этажа»: для этого вычислим значение функции в крайней правой точке центрального периода разложения: $f(\pi)=\pi+1$. Чтобы вычислить ординату «нижнего этажа» проще всего взять крайнее левое значение этого же периода: $f(-\pi)=-\pi+1$. Ордината среднего значения – это среднее арифметическое суммы «верха и низа»: $y=\frac{f(\pi)+f(-\pi)}{2}=1$. Приятным является тот факт, что при построении чертежа вы сразу увидите, правильно или неправильно вычислена середина.

Построим частичную сумму ряда $S_2(x)$ и заодно повторим смысл термина «сходимость». Мотив известен ещё из урока о **сумме числового ряда**. Распишем наше богатство подробно:

$$S(x)=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin nx}{n}=1-2\cdot\left(\frac{(-1)^1\sin x}{1}+\frac{(-1)^2\sin 2x}{2}+\frac{(-1)^3\sin 3x}{3}+\frac{(-1)^4\sin 4x}{4}+...\right)=$$

$$=1-2\cdot\left(-\sin x+\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 4x}{4}-...\right)$$

Чтобы составить частичную сумму $S_2(x)$ необходимо записать нулевой + ещё два члена ряда. То есть, $S_2(x) = 1 - 2\left(-\sin x + \dfrac{\sin 2x}{2}\right) = 1 + 2\sin x - \sin 2x$.

На чертеже график функции $S_2(x) = 1 + 2\sin x - \sin 2x$ изображен зелёным цветом, и, как видите, он достаточно плотно «обвивает» полную сумму $S(x)$. Если рассмотреть частичную сумму из пяти членов ряда $S_5(x)$, то график этой функции будет ещё точнее приближать красные линии, если сто членов $S_{100}(x)$ – то «зелёный змий» фактически полностью сольётся с красными отрезками и т.д. Таким образом, ряд Фурье сходится к своей сумме $S(x)$.

Интересно отметить, что любая частичная сумма $S_n(x)$ – это **непрерывная функция**, однако полная сумма ряда $S(x)$ всё же разрывна.

Ответ: $f(x) \sim 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \sin nx}{n}$.

Во многих задачах функция терпит **разрыв 1-го рода** прямо на периоде разложения:

Разложение функции в ряд Фурье на произвольном периоде

Если $f(x)$ - периодическая функция с периодом $2l$, определенная на $[-l; l]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos\frac{m\pi x}{l} + b_m \sin\frac{m\pi x}{l}\right) \text{ - ряд Фурье;}$$

$$\text{где } a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx;\ a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}dx;\ b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx;$$

Если $l = \pi$, то получаются формулы промежутка $[-\pi, \pi]$, с которых мы начинали.

Алгоритм и принципы решения задачи полностью сохраняются, но возрастает техническая сложность вычислений:

Разложение в ряд Фурье чётных и нечётных функций

С чётными и нечётными функция процесс решения задачи заметно упрощается.

1) $f(x)$ - <u>четная</u> периодическая функция с периодом $2l$, определенная на $[-l; l]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos\frac{m\pi x}{l}\right) \text{ - ряд Фурье,}$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,\ a_m = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}dx;$$

2) $f(x)$ - <u>нечетная</u> периодическая функция с периодом $2l$, определенная на $[-l; l]$:

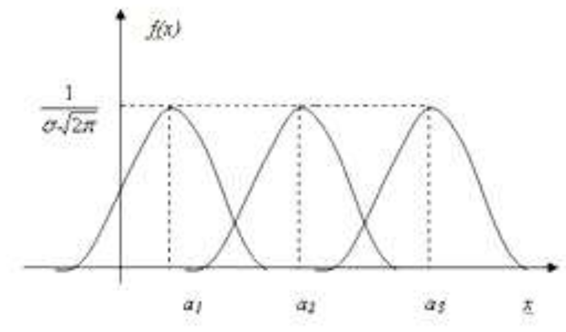
$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(b_m \sin\frac{m\pi x}{l}\right) \text{ - ряд Фурье, } b_m = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx.$$

В ряде случаев симметричное продолжение функции надо записать аналитически.

2.14Влияние параметров нормальной кривой на ее вид

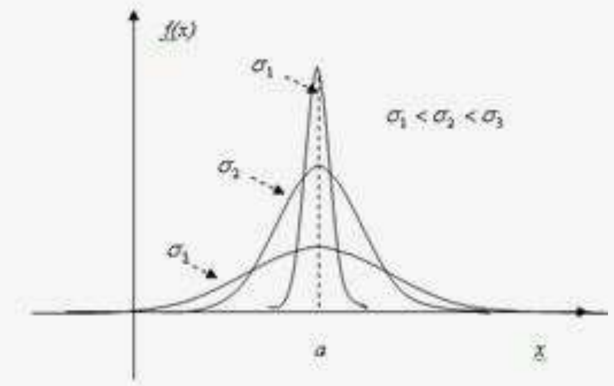
При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Изменение величины параметра a (математического ожидания) не изменяет формы нормальной кривой, а приводит лишь к ее сдвигу вдоль оси *Ох*: вправо, если a возрастает, и влево, если a убывает:



Максимум функции плотности вероятностей нормального распределения равен $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

Отсюда следует, что с возрастанием σ. Максимальная ордината нормальной кривой убывает, а сама кривая становится более пологой, то есть сжимается к оси *Ox*; при убывании σ нормальная кривая становится более “островершинной” и растягивается в положительном направлении оси *Oy*:



Замечание: При любых значениях параметров a и σ площадь, ограниченная нормальной кривой и осью *Ox*, остается равной единице.

2.15 Способы отбора статистического материала, его группировки

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Для того чтобы выборочная совокупность отражала характеристики генеральной, необходимо обеспечить репрезентативность (представительность) выборки, то есть рассчитать необходимый объем выборки и определить метод и способы отбора. Но как бы тщательно не была организована выборка, как правило, выборочные характеристики в какой-то степени будут отклоняться от характеристик генеральной совокупности, т.е. обычно имеют место ошибки репрезентативности.

Ошибками репрезентативности называют расхождения (разность) между средними, а также относительными показателями выборочной и генеральной совокупностей при условии отсутствия ошибок регистрации. И основная задача выборочного метода сводится к минимизации ошибки репрезентативности.

Как уже отмечалось, сущность выборочного метода заключается в том, что характеристики выборочной совокупности распространяются на всю генеральную совокупность и для формирования выборочной совокупности главными условиями являются:

- равновозможность каждой единицы генеральной совокупности попасть в выборку;

- достаточная численность выборки.

Для обеспечения равной возможности единиц генеральной совокупности попасть в выборку статистика применяет следующие методы и способы.

Методы:

- *повторный* - это такой метод отбора, при котором однажды отобранная единица возвращается обратно в генеральную совокупность и снова участвует в выборке. При повторном отборе сохраняется постоянная вероятность попасть в выборку для всех единиц;

- *бесповторный* - это такой метод отбора, при котором отобранная однажды единица в совокупность не возвращается, и вероятность каждой новой единицы попасть в выборку увеличивается.

Существуют различные способы формирования выборочной совокупности:

1. *Случайный отбор*. При этом способе каждая единица из генеральной совокупности отбирается в состав выборочной случайно (жеребьевка, использование таблиц случайных чисел).

2. *Механический отбор* - исходит из учета некоторых особенностей расположения объектов в генеральной совокупности, их упорядоченности (по списку, номеру, алфавиту). Механическая выборка осуществляется путем отбора отдельных объектов генеральной совокупности через определенный интервал (каждый 10 или 20). Если расположение объектов в генеральной совокупности носит случайный характер, то механическая выборка по содержанию аналогична случайному отбору. При механическом отборе, как правило, применяется только бесповторная выборка.

3. *Типический отбор*. При типическом отборе вся генеральная совокупность на основе предварительного анализа изучаемой совокупности разбивается на группы по какому-либо существенному признаку, и непосредственный отбор единиц производится в пределах отдельных типических групп. При этом способе отбора генеральная совокупность расчленяется на однородные в некотором отношении группы, которые имеют свои характеристики, и вопрос сводится к определению объема выборок из каждой группы. Может быть равномерная выборка - при этом способе из каждой типической группы отбирается одинаковое число единиц ($n_1 = n_2 = m_n$). Такой подход оправдан лишь при равенстве численностей исходных типических групп. В противном случае выборки могут оказаться не репрезентативными.

При проведении типологической выборки непосредственный отбор из каждой группы, как правило, проводится методом случайного отбора.

4. *Серийный отбор*. В некоторых случаях характер размещения объектов в генеральной совокупности может быть таким, что они расположены сериями (ящики, мешки, классы). В таких случаях формирование выборочной совокупности путем отбора отдельных единиц нецелесообразно. Проще организовать отбор сериями и провести сплошное обследование по способу механической или случайной выборки.

5. *Многофазная выборка*. Она характеризуется тем, что на всех ступенях выборки сохраняется одна и та же единица отбора, но проводится несколько фаз (стадий) выборочных обследований, которые различаются между собой широтой программы обследования. Важной особенностью является возможность использовать данные первой фазы наблюдения для дополнительной характеристики и уточнения результатов, полученных на 2, 3 и далее фазах.

На практике чаще всего приходится сочетать различные виды и способы статистического наблюдения.

Необходимым условием научной организации выборочного наблюдения является требование достаточного объема выборки. Логический смысл этого требования вполне очевиден. Чем больше единиц будет взято для обследования, тем достовернее они смогут отобразить генеральную совокупность. Объем выборки (n) при достаточно большой численности генеральной совокупности (больше 1000 элементов) рассчитывается по формуле: $n = t^2 p (100\% - p)$, где: t^2 - критерий достоверности, зависящий от надежности оценок (при надежности, равной 95%, критерий равен ~ 2); p - показатель распространенности явления в %; - требуемая точность оценок в %.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЗАНЯТИЯМ

3.1 Практические занятия по теме «Линейная алгебра»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Составление уравнений линий в треугольнике.
2. Условие параллельности и перпендикулярности прямых.
3. Канонические уравнения кривых второго порядка. Составление уравнений кривых.
4. Взаимное расположение прямой и кривой на плоскости.
5. Условия для четырех вариантов взаимного расположения двух плоскостей.
6. Частные случаи расположения прямой в пространстве.
7. Условия для четырех вариантов взаимного расположения прямой и плоскости.
8. Канонические уравнения поверхностей в пространстве. Поверхности вращения. Конические поверхности.

3.2 Практические занятия по теме «Аналитическая геометрия»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Определение свойств функции.
2. Построение графиков элементарных и неэлементарных функций.
3. Способы задания числовой последовательности.
4. Два определения предела числовой последовательности: по Коши и по Гейне.
5. Нахождение предела числовой последовательности по определению и с помощью преобразований.
6. Понятие неопределенности. Ее виды. Правила раскрытия.
7. Применение замечательных пределов при раскрытии неопределенностей.
8. Нахождение правосторонних и левосторонних пределов.
9. Два определения непрерывности функции в точке.
10. Определение вида точек разрыва.
11. Связь точек разрыва с асимптотами.

3.3 Практические занятия по теме «Математический анализ»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Нахождение производной по определению и формулам.
2. Геометрический и механический смыслы производной.
3. Производные высших порядков.
4. Вычисление дифференциала.
5. Приложение дифференциала к приближенным вычислениям.
6. Условия применимости правила Лопиталя.
7. Необходимое и достаточное условия монотонности функции.
8. Решение практических задач на экстремум.
9. Необходимое и достаточное условия вогнутости и выпуклости функции

3.4 Практические занятия по теме «Дифференциальное исчисление»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Определение кривизны, радиуса и круга кривизны кривой.
2. Составление уравнения эволюты.
3. ОДЗ функции двух переменных и ее геометрическое изображение.
4. Частные приращения.
5. Частные производные первого и второго порядка. Теорема Шварца.
6. Полный дифференциал.
7. Производная по направлению. Градиент.
8. Касательная плоскость и нормаль.
9. Понятие экстремума функции двух переменных.
10. Необходимое и достаточное условия экстремума.
11. Нахождение наименьшего и наибольшего значений в замкнутой области.

3.5 Практические занятия по теме «Интегральное исчисление»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Нахождение области определения функции двух переменных.
2. Правила и формулы дифференцирования.
3. Физические примеры градиента.
4. Исследование функции двух переменных на экстремум.
5. Нахождение наименьшего и наибольшего значений в замкнутой области.
6. Метод наименьших квадратов.
7. Нахождение первообразной функции.
8. Вычисление неопределенного интеграла по таблице.
9. Геометрический смысл неопределенного интеграла.
10. Понятие рациональной дроби. Способы представления в виде суммы простейших рациональных дробей.
11. Универсальная тригонометрическая подстановка.
12. Частные случаи тригонометрических подстановок.
13. Связь неопределенного интеграла с определенным интегралом.
14. Свойства определенного интеграла.
15. Замена переменной в определенном интеграле.
16. Интегрирование по частям в определенном интеграле.
17. Приближенное вычисление определенного интеграла основывается на его геометрическом смысле.
18. Использование определенного интеграла при решении геометрических и физических задач.
19. Сходящиеся и расходящиеся несобственные интегралы.
20. Нахождение области определения подынтегральной функции, определение точек разрыва второго рода.
21. Условия применимости формулы Ньютона – Лейбница для вычисления несобственных интегралов.
22. Замена переменных в кратных интегралах.
23. Применение кратных интегралов при решении геометрических и физических задач.
24. Геометрические и физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
25. Виды дифференциальных уравнений и способы их решения.
26. Критерий зависимости и независимости функций с помощью определителя Вронского.

27. Различные случаи решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка. Использование комплексных чисел при записи решений уравнения.

28. Подбор частного решения для линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с правой частью специального вида.

3.6 Практические занятия по теме «Дифференциальные уравнения»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Геометрические и физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
2. Виды дифференциальных уравнений и способы их решения.
3. Критерий зависимости и независимости функций с помощью определителя Вронского.
4. Различные случаи решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка. Использование комплексных чисел при записи решений уравнения.
5. Подбор частного решения для линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с правой частью специального вида.
6. Формулы приведения в тригонометрии.
7. Тригонометрическая форма комплексного числа. Формула Муавра.
8. Извлечение корня из комплексного числа и его геометрическая интерпретация.
9. Решение квадратных уравнений во множестве комплексных чисел.
10. Нахождение общего члена ряда.
11. Исследование на сходимость знакоположительных рядов. Условия применимости достаточных признаков сходимости.
12. Использование эталонных рядов при исследовании ряда на сходимость.
13. Нахождение суммы сходящегося ряда.
14. Примеры разложений элементарных функций в степенной ряд.
15. Применение рядов при решении дифференциальных уравнений, при вычислении приближенного значения функции и определенного интеграла.

3.7 Практические занятия по теме «Теория вероятностей»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Нахождение общего члена ряда.
2. Исследование на сходимость знакоположительных рядов. Условия применимости достаточных признаков сходимости.
3. Использование эталонных рядов при исследовании ряда на сходимость.
4. Нахождение суммы сходящегося ряда.
5. Примеры разложений элементарных функций в степенной ряд.
6. Применение рядов при решении дифференциальных уравнений, при вычислении приближенного значения функции и определенного интеграла.
7. Комбинаторика.
8. Испытание и событие. Виды событий, их классификация.
9. Понятие вероятности случайного события. Свойства вероятности.
10. Сумма и произведение событий.
11. Теоремы сложения и умножения.
12. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.
13. Схема Бернулли. Формула Бернулли.
14. Локальная теорема Муавра – Лапласа.
15. Формула Пуассона.
16. Интегральная теорема Лапласа.

17. Понятие случайной величины. Ее виды.

18. Закон распределения и многоугольник распределения дискретной случайной величины.

19. Числовые характеристики, их свойства.

20. Виды распределений дискретной случайной величины: биномиальное распределение, распределение Пуассона, геометрическое и гипергеометрическое распределения.

21. Интегральная функция распределения, ее свойства

22. Дифференциальная функция распределения непрерывной случайной величины, ее свойства.

23. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.

24. Виды распределений непрерывной случайной величины: равномерное распределение, показательное распределение, нормальный закон распределения, его параметры.

25. Кривая Гаусса. Ее свойства и график.

3.8 Практические занятия по теме «Математическая статистика»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Виды статистического распределения выборки.
2. Основное свойство выборочной средней.
3. Построение полигона и гистограммы.
4. Характеристики точечных оценок.
5. Задание надежности при решении практических задач.
6. Построение доверительных интервалов.
7. Виды зависимостей между признаками.
8. Составление корреляционной таблицы.
9. Нахождение параметров прямой регрессии методом наименьших квадратов.
10. Ошибки первого и второго рода.
11. Условия применимости параметрических и непараметрических критериев.