ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические рекомендации для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Б1.Б.07 Высшая математика

Направление подготовки (специальность) 35.03.01 Лесное дело

Профиль образовательной программы Лесное хозяйство

Форма обучения заочная

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1. Организационно-методические данные дисциплины

№ п.п.	Наименование темы	Общий объем часов по видам самостоятельной работы (*из табл. 5.1 РПД*)				
		подготовка курсового проекта (работы)	подготовка реферата/эссе	индивидуальные домашние задания (ИДЗ)	самостоятельное изучение вопросов (СИВ)	подготовка к занятиям (ПкЗ)
1	2	3	4	5	6	7
1	Линейная алгебра				6	2
2	Линии на плоскости				6	2
3	Линии в пространстве				6	-
4	Функция одной переменной				8	-
5	Производная и ее приложения				8	2
6	ФНП				8	-
7	Неопределенный интеграл				-	1
8	Определенный интеграл				6	1
9	Дифференциальные уравнения первого порядка				6	2
10	Дифференциальные уравнения второго порядка				-	2
11	Ряды				6	-
12	Случайные события				-	4
13	Случайные величины				20	4
14	Элементы математической статистики				25	4

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

2.1 Номера задач контрольной работы

Последние две цифры учебного шифра	Номера задач					
01 21 41 61 81	1	21	41	61	81	101	121
02 22 42 62 82	2	22	42	62	82	102	122
03 23 43 63 83	3	23	43	63	83	103	123
04 24 44 64 84	4	24	44	64	84	104	124
05 25 45 65 85	5	25	45	65	85	105	125
06 26 46 66 86	6	26	46	66	86	106	126
07 27 47 67 87	7	27	47	67	87	107	127
08 28 48 68 88	8	28	48	68	88	108	128
09 29 49 69 89	9	29	49	69	89	109	129
10 30 50 70 90	10	30	50	70	90	110	130
11 31 51 71 91	11	31	51	71	91	111	121
12 32 52 72 92	12	32	52	72	92	112	122
13 33 53 73 93	13	33	53	73	93	113	123
14 34 54 74 94	14	34	54	74	94	114	124
15 35 55 75 95	15	35	55	75	95	115	125
16 36 56 76 96	16	36	56	76	96	116	126
17 37 57 77 97	17	37	57	77	97	117	127
18 38 58 78 98	18	38	58	78	98	118	128
19 39 59 79 99	19	39	59	79	99	119	129
20 40 60 80 100	20	40	60	80	100	120	130

2.2 Условия задач контрольной работы

В задачах 1—20 даны вершины треугольника ABC. Найти: 1) длину стороны AB; 2) уравнение стороны AB; 3) уравнение высоты CD и ее длину; 4) уравнение окружности, для которой высота CD является диаметром.

1. $A(-2; 1)$, $B(10; 10)$, $C(8; -4)$.
2. $A(-4; -1)$, $B(8; 8)$, $C(6; -6)$.
3. $A(-1; 0)$, $B(11; 9)$, $C(9; -5)$.
4. $A(-3; -3)$, $B(9; 6)$, $C(7; -8)$.
5. $A(-3; 0)$, $B(9; 9)$, $C(7; -5)$.
6. $A(-5; -2)$, $B(7; 7)$, $C(5; -7)$.
7. $A(-2; -1)$, $B(10; 8)$, $C(8; -6)$.
8. $A(-5; 1)$, $B(7; 10)$, $C(5; -4)$.
9. $A(-2; -3)$, $B(10; 6)$, $C(8; -8)$.
10. $A(-6; 1)$, $B(6; 10)$, $C(4; -4)$.
11. $A(3; 0)$, $B(-9; 9)$, $C(-7; -5)$.
12. $A(0; 1)$, $B(-12; 10)$, $C(-10; -4)$.
13. $A(4; -3)$, $B(-8; 6)$, $C(-6; -8)$.
14. $A(1; 1)$, $B(-11; 10)$, $C(-9; -4)$.
15. $A(8; -2)$, $B(-4; 7)$, $C(-2; -7)$.
16. $A(6; 2)$, $B(-6; 11)$, $C(-4; -3)$.
17. $A(2; -1)$, $B(-10; 8)$, $C(-8; -6)$.
18. $A(5; 1)$, $B(-7; 10)$, $C(-5; -4)$.
19. $A(3; 3)$, $B(-9; 12)$, $C(-7; -2)$.
20. $A(1; 2)$, $B(-11; 11)$, $C(-9; -3)$.

В задачах 21—40 найти производные данных функций.

21. а) $y=5x^2-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\sin x$; б) $y=2^x\cos x$;

в) $y=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$; г) $y=\ln\sqrt{x^3+4}$.

22. а) $y=x^4+\dfrac{3}{x^3}+\arccos x$; б) $y=(x^2-1)e^x$;

в) $y=\dfrac{4^x}{x+1}$; г) $y=(e^{5x}-1)^6$.

23. а) $y=2x^3-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+e^x$; б) $y=(x^2+1)\operatorname{arctg} x$;

в) $y=\dfrac{\ln x}{x^3}$; г) $y=\sqrt{1-\sin 5x}$.

24. а) $y=4x^2+\sqrt[3]{x}-\cos x;$ б) $y=(1-x^2)\arcsin x;$

в) $y=\dfrac{e^x}{x^2-4x+3};$ г) $y=(3^{\sin x}+4)^5.$

25. а) $y=5x^4+\dfrac{4}{x^2}-\sqrt[3]{x};$ б) $y=(x^3+4)e^x;$

в) $y=\dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2};$ г) $y=\ln e^{x^3+4}.$

26. а) $y=3x^2-\arcsin x+\dfrac{1}{x^5};$ б) $y=(x^3+3x)\ln x;$

в) $y=\dfrac{\ln x}{x^2};$ г) $y=(3^x-4)^6.$

27. а) $y=5x^2-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}-e^x;$ б) $y=(x^3+3)\operatorname{arctg} x;$

в) $y=\dfrac{3^x}{x^2-1};$ г) $y=\sqrt[3]{\sin 3x-x^3}.$

28. а) $y=4x^5+\sqrt[5]{x}+2\sin x;$ б) $y=(e^x-2)(x^3-6x);$

в) $y=\dfrac{\operatorname{arcctg} x}{1+x^2};$ г) $y=3^{1-x^2}.$

29. а) $y=x^3+\dfrac{4}{x^4}-e^x;$ б) $y=(\ln x-x^2)(1-x^3);$

в) $y=\dfrac{e^x}{x^2-4x+3};$ г) $y=\sqrt[3]{1-4x^2}.$

30. а) $y=x-\dfrac{4}{x^3}+\sqrt[3]{x^2};$ б) $y=(x^3-3x)\ln x;$

в) $y=\dfrac{\operatorname{tg} x}{x-1};$ г) $y=\ln\dfrac{x^3}{x+1}.$

31. а) $y=3x^2-\dfrac{5}{x^4}+\ln x;$ б) $y=3^x\operatorname{tg} x;$

в) $y=\dfrac{x-3}{\ln x};$ г) $y=(\sin 3x-x^3)^4.$

32. а) $y=4x^5+\sqrt[4]{x^3}-\sin x;$ б) $y=(x^2+1)\operatorname{arctg} x;$

в) $y=\dfrac{\cos x}{x^2+4};$ г) $y=\ln(x^4-3x^2).$

33. а) $y=x^3+\frac{1}{x^5}+\operatorname{tg} x$; б) $y=x^2 \operatorname{arc\,tg} x$;

в) $y=\frac{\sin x}{x-\cos x}$; г) $y=(x^2-e^{2x})^5$.

34. а) $y=4x^5-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\operatorname{ctg} x$; б) $y=2^x(3x^4-x)$;

в) $y=\frac{\ln x}{x^4}$, г) $y=e^{4-\sin 2x}$.

35. а) $y=3x^4-\frac{2}{x}+\arcsin x$; б) $y=2^x \operatorname{ctg} x$;

в) $y=\frac{x}{e^x}$; г) $y=\sqrt[3]{1-\cos 5x}$.

36. а) $y=x^5+\frac{1}{\sqrt{x}}-\cos x$; б) $y=(x^3-5)e^x$;

в) $y=\frac{\operatorname{tg} x}{1-x^2}$; г) $y=\ln(\sin 5x+x^5)$.

37. а) $y=2x^3+\frac{1}{x^4}+\ln x$; б) $y=(2-x^3)\operatorname{ctg} x$;

в) $y=\frac{\cos x}{1-\sin x}$; г) $y=(\ln\cos x+2)^4$.

38. а) $y=x^4+\frac{5}{x^3}+\operatorname{ctg} x$; б) $y=2^x \sin x$;

в) $y=\frac{1-\cos x}{x^2-4x}$; г) $y=\ln^3(x^2+4)$.

39. а) $y=2-3x^2+\sqrt[4]{x}$; б) $y=(x^3+3)^{2x}$;

в) $y=\frac{\operatorname{arctg} x}{x^3+3x}$; г) $y=\ln\sin 5x$.

40. а) $y=x^3-\frac{5}{x^4}+2^x$; б) $y=(1-x^2)\ln x$;

в) $y=\frac{x^4-1}{\sin x}$; г) $y=(e^{4x}-x^4)^4$.

В задачах 41—60 исследовать данные функции методами дифференциального исчисления и построить их графики. При исследовании функции следует найти ее интервалы возрастания и убывания и точки экстремума, интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции.

41. $y=x^3-9x^2+24x-13$.
42. $y=x^3-6x^2+9x+1$.
43. $y=x^3-3x+1$.
44. $y=x^3-3x^2+6$.
45. $y=x^3+3x^2-1$.
46. $y=x^3+6x^2+9x+1$.
47. $y=x^3-12x^2+45x-48$.
48. $y=x^3-9x^2+24x-17$.
49. $y=x^3+6x^2+9x+2$.
50. $y=x^3-12x^2+45x-47$.
51. $y=-x^3+3x^2-5$.
52. $y=-x^3+9x^2-24x+18$.
53. $y=-x^3-6x^2-9x-3$.
54. $y=-x^3+3x-5$.
55. $y=-x^3+12x^2-45x+53$.
56. $y=-x^3-9x^2-24x-21$.
57. $y=-x^3+15x^2-72x+109$.
58. $y=-x^3-3x^2-2$.
59. $y=-x^3+18x^2-105x+195$.
60. $y=-x^3+9x^2-24x+14$.

В задачах 61—70 вычислить неопределенные интегралы и результаты интегрирования проверить дифференцированием.

61. а) $\int\left(2x-\frac{5}{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$;

б) $\int\frac{x^2dx}{3x^3+4}$; в) $\int x\sin 2x\,dx$.

62. а) $\int\left(4x^3+\frac{3}{x^4}-\sqrt{x}\right)dx$;

б) $\int\frac{xdx}{x^2+4}$; в) $\int\ln x\,dx$.

63. а) $\int\left(5x^4-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+e^x\right)dx$;

б) $\int\sin^2x\cos x\,dx$; в) $\int xe^xdx$.

64. а) $\int\left(x^3-\frac{5}{x^6}+\sqrt[4]{x}\right)dx;$

б) $\int\frac{dx}{\cos^2(3x-1)}$; в) $\int x\ln x\,dx.$

65. а) $\int\left(6x^5+\frac{2}{x^3}-\sqrt[3]{x}\right)dx;$

б) $\int\frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}$; в) $\int xe^{3x}dx.$

66. а) $\int\left(6x^2-\frac{5}{x}+\sqrt[4]{x^3}\right)dx;$

б) $\int xe^{x^2+3}dx$; в) $\int x\cos x\,dx.$

67. а) $\int\left(10x^4+\frac{4}{x^2}-\sqrt[3]{x^2}\right)dx;$

б) $\int \operatorname{tg} 3x\,dx$; в) $\int\ln 5x\,dx.$

68. а) $\int\left(4x-\frac{5}{x^3}+\sqrt[4]{x}\right)dx;$

б) $\int\operatorname{ctg} 2x\,dx$; в) $\int x\sin 3x\,dx.$

69. а) $\int\left(7x^6-\frac{6}{x^7}-e^x\right)dx;$

б) $\int\frac{x^2dx}{2x^3+1}$; в) $\int x\cos 4x\,dx.$

70. а) $\int\left(3x^2+\frac{6}{x^7}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx;$

б) $\int\cos^3 x\sin x\,dx$; в) $\int xe^{4x}dx.$

В задачах 71—80 вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями. Сделать чертеж.

71. $y=x^2-4x+3,\ \ y=x-1.$
72. $y=x^2+2x,\ \ y=x+2.$
73. $y=x^2+4x+3,\ y=x+3.$
74. $y=x^2-6x+10,\ \ y=x.$
75. $y=x^2-2x-1,\ \ y=x-1.$

76. $y=x^2+6x+8$, $y=x+4$.

77. $y=x^2-6x+13$, $y=x+3$.

78. $y=x^2+8x+15$, $y=x+5$.

79. $y=x^2$, $y=x+2$.

80. $y=x^2-1$, $y=x+1$.

81—85. Всхожесть семян данного сорта растений оценивается вероятностью p. Посеяно n семян. Найти:

1) вероятность того, что будет не менее k всходов;

2) наивероятнейшее число всходов среди посеянных семян.

81. $p=0{,}8$, $n=5$, $k=4$.

82. $p=0{,}7$, $n=4$, $k=3$.

83. $p=0{,}6$, $n=5$, $k=3$.

84. $p=0{,}9$, $n=5$, $k=2$.

85. $p=0{,}8$, $n=6$, $k=1$.

86—90. Вероятность вызревания кукурузного стебля с тремя початками $p=0{,}8$. Найти:

1) вероятность того, что среди n стеблей опытного участка число таких стеблей будет ровно k штук;

2) наивероятнейшее число стеблей с тремя початками на опытном участке.

86. $n=400$, $k=310$.

87. $n=625$, $k=492$.

88. $n=900$, $k=711$.

89. $n=225$, $k=174$.

90. $n=100$, $k=79$.

91—95. Доля зараженности зерна в скрытой форме составляет p. Найти:

1) вероятность того, что в выборке из n зерен окажется не более k зараженных зерен;

2) наивероятнейшее число зараженных зерен в этой выборке.

91. $p=0{,}002$, $n=1000$, $k=2$.

92. $p=0{,}0004$, $n=5000$, $k=1$.

93. $p=0{,}001$, $n=1000$, $k=2$.

94. $p=0{,}004$, $n=500$, $k=3$.

95. $p=0{,}0001$, $n=30\,000$, $k=1$.

96—100. Завод сортовых семян выпускает гибридные семена кукурузы. Известно, что семена 1-го сорта составляют 90%. Найти:

1) вероятность того, что из взятых наудачу для проверки n семян число семян первого сорта будет от k_1 до k_2;

2) наивероятнейшее число семян первого сорта из взятых для проверки n семян.

96. $n=10\,000$, $k_1=8970$, $k_2=9045$.

97. $n=8100$, $k_1=7263$, $k_2=7344$.

98. $n=6400$, $k_1=5748$, $k_2=5820$.

99. $n=4900$, $k_1=4431$, $k_2=4452$.

100. $n=3600$, $k_1=3195$, $k_2=3213$.

101. Средняя глубина посева семян составляет 5 см, отдельные отклонения от этого значения случайные, распределены нормально со средним квадратическим отклонением 0,5 см. Определить: 1) долю семян, посеянных на глубину более 4,5 см; 2) вероятность того, что глубина посева случайно взятого семени отклонится от средней глубины посева не более, чем на 0,75 см.

102. Случайные значения веса зерна распределены нормально. Математическое ожидание веса зерна равно 0,18 г, среднее квадратическое отклонение равно 0,05 г. Определить: 1) долю зерен, вес которых более 0,15 г; 2) вероятность того, что вес наудачу взятого зерна отклонится от математического ожидания не более, чем на 0,1 г.

103. Средняя длина листьев садовой земляники на некотором участке составляет 7 см. Отдельные отклонения от этого значения случайны, распределены нормально со средним квадратическим отклонением 0,4 см. Наудачу взят один лист. Определить вероятность того, что его длина: 1) будет более 6,5 см; 2) отклонится от средней длины не более, чем на 0,6 см.

104. Размер плода — случайная величина, распределенная нормально. Математическое ожидание равно 5 см, среднее квадратическое отклонение равно 0,8 см. Определить: 1) процент плодов, имеющих размер более 4,5 см; 2) вероятность того, что размер наугад взятого плода отклонится от его математического ожидания не более, чем на 1 см.

105. Путем взятия проб установлено, что потери зерна при уборке составляют в среднем 30 кг на 1 га, среднее квадратическое отклонение потерь 0,1 кг. Найти вероятность того,

что потери на 1 га: 1) составят более 29,8 кг; 2) отклонятся от средней потери не более, чем на 0,2 кг.

106. Средняя глубина посева семян составляет 4 см, отдельные отклонения от этого значения случайные, распределены нормально со средним квадратическим отклонением 0,8 см. Определить: 1) долю семян, посеянных на глубину менее 3 см; 2) вероятность того, что глубина посева случайно взятого семени отклонится от средней глубины посева не более, чем на 0,6 см.

107. Случайные значения веса зерна распределены нормально. Математическое ожидание веса зерна равно 0,2 г, среднее квадратическое отклонение равно 0,05 г. Найти вероятность того, что вес наудачу взятого зерна: 1) окажется в пределах от 0,16 г до 0,22 г;

2) отклонится от математического ожидания веса не более, чем на 0,05 г.

108. Средняя длина листьев садовой земляники на некотором участке 6,5 см. Отдельные отклонения от этого значения случайны, распределены нормально со средним квадратическим отклонением 1 см. Наугад взят один лист. Найти вероятность того, что его длина:

1) будет в пределах от 5,5 см до 7 см; 2) отклонится от средней длины не более, чем на 0,5 г.

109. Масса яблока, средняя величина которой равна 160 г, является нормально распределенной случайной величиной со средним квадратическим отклонением 20 г. Найти вероятность того, что масса наугад взятого яблока: 1) будет заключена в пределах от 140 г до 190 г; 2) отклонится от среднего значения массы не более, чем на 5 г.

110. Вес вылавливаемых в пруду рыб подчиняется нормальному закону с математическим ожиданием 375 г и средним квадратическим отклонением 25 г. Найти вероятность того, что вес одной пойманной рыбы: 1) будет менее 425 г; 2) отклонится от математического ожидания не более, чем на 10 г.

111—120. Для определения средней урожайности пшеницы в каждом из десяти совхозов района была определена урожайность на 100 га в каждом из них. Для каждого совхоза найти:

1) величину, которую следует принять за среднюю урожайность на всем массиве;

2) величину, которую следует принять за среднее квадратическое отклонение урожайности на всем массиве;

3) доверительный интервал, в котором с вероятностью 0,95 заключена средняя урожайность на всем массиве.

111.

Урожайность, ц/га	10—12	12—14	14—16	16—18	18—20	20—22	22—24
Площадь, га	5	11	17	14	22	11	20

112.

Урожайность, ц/га	11—13	13—15	15—17	17—19	19—21	21—23	23—25
Площадь, га	3	3	8	15	9	22	40

113.

Урожайность, ц/га	10—12	12—14	14—16	16—18	18—20	20—22	22—24
Площадь, га	8	2	5	7	11	29	38

114.

Урожайность, ц/га	11—13	13—15	15—17	17—19	19—21	21—23	23—25
Площадь, га	10	11	13	17	5	22	22

115.

Урожайность, ц/га	10—12	12—14	14—16	16—18	18—20	20—22	22—24
Площадь, га	5	13	15	17	12	20	18

116.

Урожайность, ц/га	11—13	13—15	15—17	17—19	19—21	21—23	23—25
Площадь, га	5	9	14	15	27	20	10

117.

Урожайность, ц/га	10—12	12—14	14—16	16 18	18—20	20—22	22—24
Площадь, га	3	4	3	10	20	30	30

118.

Урожайность, ц/га	11—13	13—15	15—17	17—19	19—21	21 - 23	23—25
Площадь, га	3	4	7	10	16	22	38

119.

Урожайность, ц/га	10—12	12—14	14—16	16—18	18—20	20—22	22—24
Площадь, га	2	2	6	11	21	29	29

120.

Урожайность, ц/га	11—13	13—15	15—17	17—19	19—21	21—23	23—25
Площадь, га	6	10	8	18	28	22	8

121—122. Приводятся данные об измерении диаметра сосны в см (X) и ее высоты в м (Y). Вычислить коэффициент корреляции и найти выборочное уравнение прямой регрессии Y на X.

121.

X	20	22	25	27	28	29	30	32	42	45
Y	18	19	20	21	22	22	23	24	25	26

122.

X	18	20	21	24	26	28	29	31	33	40
Y	16	17	18	19	20	20	21	22	23	24

123—125. Приводятся данные о весе зерна в мг (X) и процентным содержанием жира в нем (Y). Вычислить коэффициент корреляции и найти выборочное уравнение прямой регрессии Y на X.

123.

X	35	40	45	48	49	47	45	40	36	35
Y	4	5	6	7	7	6	8	8	4	5

124.

X	38	41	44	45	50	51	49	40	39	33
Y	3	9	8	5	5	7	6	9	4	4

125.

X	37	39	42	44	49	48	48	39	40	34
Y	3	3	5	8	8	7	6	4	4	2

126—130. Приводятся данные о количестве внесенных удобрений в центнерах (X) и урожае сахарной свеклы с 1 га посева в тоннах (Y) в пяти хозяйствах района за 10 лет. Вычислить коэффициент корреляции и найти выборочное уравнение прямой регрессии Y на X.

126.

X	3	4	4	5	6	6	7	8	8	9
Y	18	20	22	24	29	30	33	36	38	50

X	4	4	5	6	7	8	8	9	9	10
Y	19	22	26	28	30	35	40	48	50	52

128.

X	3	3	3	4	4	5	6	7	7	8
Y	14	18	20	22	23	24	28	29	33	39

129.

X	3	4	4	5	5	6	7	8	9	9
Y	20	20	22	24	26	29	32	33	36	48

130.

X	3	4	5	5	5	6	7	8	8	9
Y	18	21	25	28	30	32	35	36	39	46

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ВОПРОСОВ

3.1 Решение систем линейных уравнений матричным методом.

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее определитель не равен нулю, и *вырожденной*, если ее определитель равен нулю.

Матрица A^{-1} называется *обратной* к матрице A , если $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы А.

Пример. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -10 \end{pmatrix}$ найти обратную ей матрицу A^{-1}.

Решение. Для матрицы второго порядка обратная матрица вычисляется по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

Находим определитель матрицы A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -10 \end{vmatrix} = -30 + 5 = -25 \neq 0.$$

Далее находим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = 1 \cdot (-10) = -10; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -1 \cdot (-1) = 1;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -1 \cdot 5 = -5; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 1 \cdot 3 = 3.$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \frac{1}{-25}\begin{pmatrix} -10 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 \\ -0,04 & -0,12 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 \\ -0,04 & -0,12 \end{pmatrix}$.

Систему *n уравнений с n неизвестными* $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$, имеющую единственное решение (т.е. $\Delta = |A| \neq 0$) можно решить методом обратной матрицы по формуле:

$X = A^{-1} \cdot B$, где A^{-1} - обратная матрица для матрицы A;

Пример. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} x + y - 2z = -2 \\ 2x - y + 3z = 13 \\ 3x + 2y - z = 5 \end{cases}$ методом обратной матрицы.

Неизвестная матрица $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$.

По формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta_A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ находим обратную матрицу для матрицы A, где $\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -8$.

Вычисляем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$;

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 11$;

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7$;

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$;

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5$;

$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$;

$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1$;

$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -7$;

$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$.

Таким образом, обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{-8} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 11 & 5 & -7 \\ 7 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, неизвестная матрица равна:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 11 & 5 & -7 \\ 7 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -5 \cdot (-2) + (-3) \cdot 13 + 1 \cdot 5 \\ 11 \cdot (-2) + 5 \cdot 13 + (-7) \cdot 5 \\ 7 \cdot (-2) + 1 \cdot 13 + (-3) \cdot 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -24 \\ 8 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } \begin{cases} x = 3 \\ y = -1. \\ z = 2 \end{cases}$$

Ответ: $(3; -1; 2)$.

3.2 Кривые второго порядка на плоскости. Каноническое уравнение параболы со смещенной вершиной. Плоскость и прямая в пространстве.

1. Окружность.

Линией (кривой) второго порядка называется множество точек плоскости, декартовы координаты x, y которых удовлетворяют уравнению

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

где A, B, C, D, E, F – постоянные действительные числа, причем A, B, C одновременно не равны нулю.

Окружность: $x^2 + y^2 = R^2$ или $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, где $(x_0; y_0)$ – координаты центра окружности, R – радиус окружности.

2. Эллипс.

Эллипс: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ или $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$;

где $(x_0; y_0)$ – координаты центра эллипса,

a – большая полуось, b – малая полуось,

$2c$ – расстояние между фокусами, причем $a^2 - c^2 = b^2$;

$\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ – эксцентриситет эллипса ($\varepsilon < 1$);

$F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$ – фокусы эллипса.

3. Гипербола.

Гипербола: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ или $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$;

где $(x_0; y_0)$ – координаты центра гиперболы,

a – действительная полуось, b – мнимая полуось,

$2c$ – расстояние между фокусами, причем $c^2 - a^2 = b^2$;

$\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ – эксцентриситет гиперболы ($\varepsilon > 1$);

$F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$ – фокусы гиперболы;

$y = \pm\dfrac{b}{a}x$ – уравнения асимптот гиперболы.

4. Парабола.

а) С осью симметрии Ox:

$y^2 = 2px$ – уравнение параболы; p – параметр параболы,

$F\left(\dfrac{p}{2}; 0\right)$ – фокус параболы; $x = -\dfrac{p}{2}$ – уравнение директрисы

б) С осью симметрии Oy:

$x^2 = 2py$ – уравнение параболы; p – параметр параболы,

$F\left(0; \dfrac{p}{2}\right)$ – фокус параболы; $y = -\dfrac{p}{2}$ – уравнение директрисы

Способы задания плоскости:

1) $Ax + By + Cz + D = 0$ – общее уравнение плоскости, $\vec{n} = (A; B; C)$ – нормальный вектор плоскости, т.е. вектор, перпендикулярный данной плоскости;

2) $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ – уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ с нормальным вектором $\vec{n}=(A;B;C)$;

3) $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ – уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $B(x_2;\, y_2;\, z_2)$ и $C(x_3;\, y_3;\, z_3)$;

4) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ – уравнение плоскости «в отрезках», где a, b, c - отрезки, отсекаемые соответственно на осях Ox, Oy, Oz.

Взаимное расположение двух плоскостей, заданных уравнениями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ в пространстве:

1) $\cos\varphi=\cos(\vec{n}_1,\widehat{\,}\vec{n}_2)=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$ – угол между плоскостями;

2) $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ – условие перпендикулярности плоскостей;

3) $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$ – условие параллельности плоскостей;

4) $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$ – условие совпадения плоскостей.

Расстояние ρ от точки $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ до плоскости $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ вычисляется по формуле:

$$\rho(M_0;\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Прямая линия в пространстве.

Способы задания прямой в пространстве

1) $\dfrac{x-x_0}{\alpha}=\dfrac{y-y_0}{\beta}=\dfrac{z-z_0}{\gamma}$ – каноническое уравнение с $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ - начальной точкой, $\vec{p}(\alpha,\beta,\gamma)$ – направляющим вектором прямой;

2) $\begin{cases} x=\alpha t+x_0 \\ y=\beta t+y_0 \\ z=\gamma t+z_0 \end{cases}$ – параметрическое уравнение прямой;

3) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ – уравнение прямой, проходящей через две точки $A(x_1;\, y_1;\, z_1)$ и $B(x_2;\, y_2;\, z_2)$;

4) $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ – прямая как линия пересечения плоскостей, где

$\vec{p}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$ – направляющий вектор прямой.

Взаимное расположение двух прямых в пространстве

$$l_1: M_1(x_1;\, y_1;\, z_1),\quad \vec{p}_1(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1); \qquad l_2: M_2(x_2;\, y_2;\, z_2),\quad \vec{p}_2(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$$

1) $\cos\varphi = \dfrac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2} \cdot \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2}}$ – угол между прямыми;

2) $\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0$ – условие перпендикулярности прямых;

3) $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \dfrac{\beta_1}{\beta_2} = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}$ – условие параллельности прямых;

4) $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \neq 0$ – условие скрещивания прямых.

Взаимное расположение прямой и плоскости.

1) $\sin\varphi = \dfrac{|A\alpha + B\beta + C\gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$ – угол между прямой и плоскостью;

2) $\dfrac{A}{\alpha} = \dfrac{B}{\beta} = \dfrac{C}{\gamma}$ – условие перпендикулярности прямой и плоскости;

3) $\begin{cases} A\alpha + B\beta + C\gamma = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \end{cases}$ – условие параллельности прямой и плоскости;

4) $\begin{cases} A\alpha + B\beta + C\gamma = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$ – условие принадлежности прямой плоскости.

3.3 Основные элементарные функции, их свойства, графики

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Функция – зависимость переменной x от переменной y, при которой каждому значению x соответствует *единственное* значение y.

Обозначается: $y = f(x)$.

Переменная x называется *независимой переменной* или *аргументом*, а переменная y – *зависимой переменной*.

Буква f (вместо неё может быть g, h и другие буквы) означает правило, по которому, зная значение x, можно получить значение y.

Графиком функции называется множество всех точек плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям самой функции.

Для того чтобы кривая на плоскости являлась графиком функции, необходимо и достаточно, чтобы каждому значению аргумента x, соответствовало лишь одно значение переменной y, т.е. любая прямая, параллельная оси ординат, пересекала кривую не более чем в одной точке.

Для того чтобы построить график функции, необходимо определить ее основные свойства.

1. Область определения функции

Множество значений независимой переменной x называется *областью определения функции* и обозначается $D(y), D_y, D_f$ или $D(f)$.

Например, $D(f) = (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$ является областью определения для функции $y = \dfrac{x-1}{x+3}$.

Замечание. Для нахождения области определения функции учитывают условия: 1) знаменатель должен быть отличен от нуля; 2) корень четной степени извлекается из неотрицательных чисел; в) логарифмы существуют только для положительных чисел.

2. Область значений функции

Множество значений, принимаемых зависимой переменной y, называется *областью значений функции* и обозначается $E(y), E_y, E_f$ или $E(f)$.

Например, $E(f)=(-\infty;+\infty)$ является областью значений для функции $y=\dfrac{x-1}{3}$.

3. Монотонность функции

Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* на промежутке X, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции; т.е. для любых значений аргумента x_1 и x_2 из промежутка X, таких, что $x_1<x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$.

Функция $y=f(x)$ называется *убывающей* на промежутке X, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции; т.е. для любых значений аргумента x_1 и x_2 из промежутка X, таких, что $x_1<x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)>f(x_2)$.

Например, $f(x)=4-3x$ убывает на $(-\infty;+\infty)$, т.к. если взять $x_1<x_2$, то по свойствам неравенств $4-3x_1>4-3x_2$; т.е. $f(x_1)>f(x_2)$ для всех $x\in(-\infty;+\infty)$.

Если функция только возрастает или только убывает на данном числовом промежутке, то она называется *строго монотонной* на этом промежутке.

4. Чётные и нечётные функции

Чётная функция – функция $y=f(x)$, обладающая следующими свойствами:

1) её область определения симметрична относительно нуля;
2) для любого значения x из области определения выполняется равенство $f(-x)=f(x)$.

График любой чётной функции симметричен относительно оси ординат.

Например, $y=x^2$, $y=\cos x$ – чётные функции.

Сумма, разность, произведение чётных функций также представляют собой чётные функции.

Нечётная функция – функция $y=f(x)$, обладающая следующими свойствами:

1) её область определения симметрична относительно нуля;
2) для любого значения x из области определения выполняется равенство $f(-x)=-f(x)$.

График любой нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Например, $y=x^5$, $y=\dfrac{1}{x}$ – нечётные функции.

Замечание. Функцию, не являющуюся ни четной, ни нечетной называют *функцией общего вида.*

5. Экстремумы функции

Точка экстремума – точка минимума или максимума функции.

Точка x_0 называется *точкой максимума функции* $y=f(x)$, если найдётся такая окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности выполняется $f(x_0)\ge f(x)$, т.е. $f(x_0)$ наибольшее значение функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0.

Точка x_0 называется *точкой минимума функции* $y = f(x)$, если найдётся такая окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности выполняется $f(x_0) \le f(x)$, т.е. $f(x_0)$ наименьшее значение функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0.

6. Периодические функции

Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$, что:

1) для любого x из области определения функции числа $(x+T)$ и $(x-T)$ также принадлежат области определения;
2) выполняется равенство: $f(x) = f(x+T) = f(x-T)$.

Число T называется периодом функции. Всякая периодическая функция имеет бесконечно много периодов, т.к. если число T – один из периодов, то всякое число $Tm, m \in Z$ также будет периодом этой функции. Чаще всего из множества периодов функции выбирают наименьший положительный период. Иногда его называют основным периодом.

Значения периодической функции через промежуток, равный периоду, повторяются, поэтому для построения графика периодической функции достаточно построить ветвь графика на участке длиной T, а затем выполнить параллельный перенос этой ветви вдоль оси Ox на $\pm T, \pm 2T$ и т.д.

Если функция $f(x)$ – периодическая с периодом T, то периодом функции $a \cdot f(kx+b)$, где a, k, b – постоянные, $k \neq 0$ будет число $\dfrac{T}{|k|}$.

7. Нули функции

Нули функции – значения аргумента, при которых значения функции равны нулю.

Нули функции разбивают область определения функции на промежутки знакопостоянства.

При графическом задании функции нули функции являются точками пересечения графика с осью абсцисс.

К основным элементарным функциям относятся:

- степенная функция $y = x^n$, где $n \in R$;
- показательная функция $y = a^x$;
- логарифмическая функция $y = \log_a x$;
- тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$;
- обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$.

Степенная функция

– это функция вида $y = x^n$, где n – постоянное действительное число.

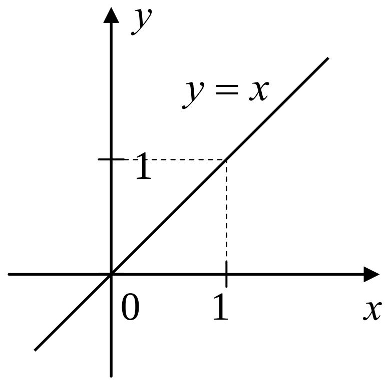
Рассмотрим частные случаи степенной функции:

а) Линейная функция $y = x$

Такая функция $(n=1)$является прямой пропорциональностью и обладает следующими свойствами:

1. Область определения – множество всех действительных чисел, т.е. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2. Область значений: $E(f) = (-\infty; +\infty)$.
3. Функция принимает нулевое значение при $x = 0$.
4. Функция возрастает на всей области определения.
5. Экстремумов нет.
6. Функция является нечётной.

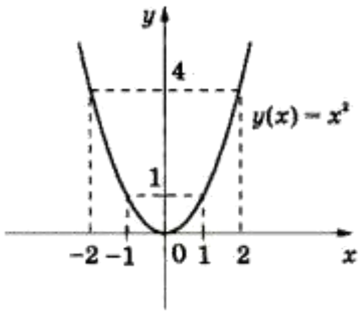
7. Графиком функции является прямая линия, проходящая через начало координат и являющаяся биссектрисой I и III координатных четвертей:



б) Квадратичная функция $y = x^2$

У данной функции $n = 2$, рассмотрим её свойства:

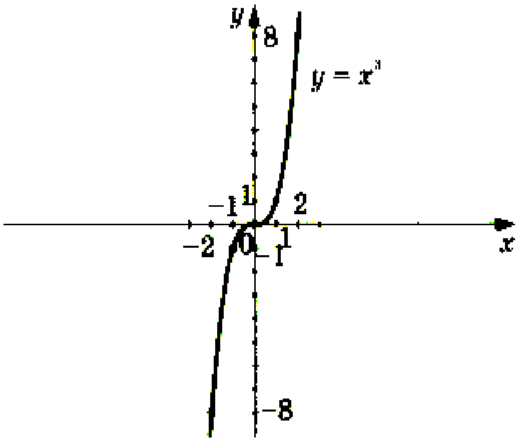
1. Область определения – множество всех действительных чисел, т.е. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2. Область значений – множество неотрицательных действительных чисел: $E(f) = [0; +\infty)$.
3. Нули функции: $y = 0$ при $x = 0$.
4. Функция возрастает от $-\infty$ до 0 при $x \in (-\infty; 0]$.
5. Функция убывает от 0 до $+\infty$ при $x \in [0; +\infty)$.
6. Функция имеет минимум при $x = 0$: $y_{\min} = 0$.
7. Функция является чётной.
8. График функции – парабола:



Замечание. Если n является чётным числом, то функция обладает теми же свойствами, что и квадратичная функция. График её напоминает параболу.

в) Кубическая функция $y = x^3$

1. Область определения функции – множество всех действительных чисел *R*: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
1. Множество значений функции: $E(f) = (-\infty; +\infty)$.
2. Функция принимает нулевое значение при $x = 0$.
3. Функция возрастает всюду на всей области определения.
4. Функция нечетная.
5. Экстремумов нет.
6. График функции – кубическая парабола:

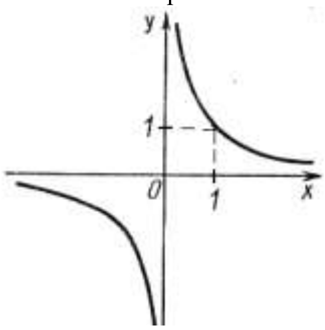


Замечание. Если n является нечётным числом, то функция обладает теми же свойствами, что и кубическая парабола.

г) Обратная пропорциональность $y = \dfrac{1}{x}$

У данной функции $n = -1$, так как $y = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$, поэтому она тоже является степенной; рассмотрим её свойства:

1. Область определения $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
2. Множество значений функции: $E(f) = (-\infty; +\infty)$.
3. Функция не имеет нулей.
4. Функция возрастает на всей области определения.
5. Функция нечетная.
6. Экстремумов нет.
7. Графиком обратной пропорциональности является кривая, состоящая из двух ветвей, симметричных относительно начала координат. Такая кривая называется гиперболой, ветви гиперболы расположены в I и III четвертях:

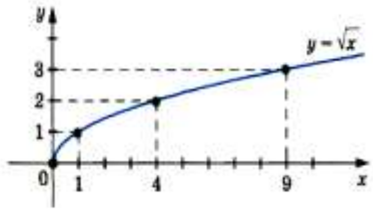


д) Функция $y = \sqrt{x}$

У данной функции $n = \dfrac{1}{2}$, так как $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, поэтому она является степенной; рассмотрим её свойства:

1. Областью определения функции служит множество неотрицательных чисел: $D(f) = [0; +\infty)$.
2. Множество значений функции – множество неотрицательных действительных чисел: $E(f) = [0; +\infty)$.
3. Функция принимает нулевое значение при *x = 0.*
4. Функция возрастает на всей области определения.
5. Функция не является ни чётной, ни нечетной.
6. Экстремумов нет.

7. График функции специального названия не имеет:

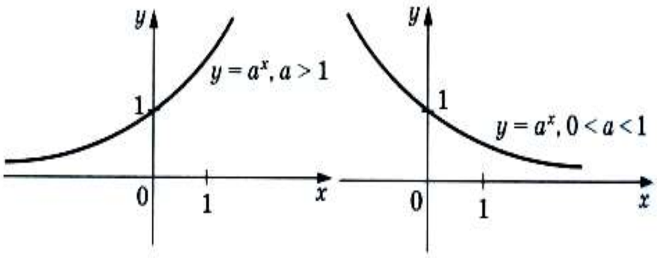


2. Показательная функция

– это функция вида $y = a^x$, где $a > 0, a \neq 1$

Рассмотрим свойства показательной функции:

1. Область определения – множество всех действительных чисел: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2. Область значений – множество положительных действительных чисел: $E(f) = (0; +\infty)$.
3. Функция не является ни чётной, ни нечетной.
4. Если $x = 0$, то $y = a^0 = 1$, следовательно, график показательной функции пересекает ось Oy в точке $(0;1)$.
5. Нулей функции нет, т.к. показательная функция принимает только положительные значения.
6. Если $a > 1$, то функция возрастает на всей числовой прямой;
7. если $0 < a < 1$, то функция убывает на всей числовой прямой.
8. Экстремумов нет.
9. График функции специального названия не имеет:

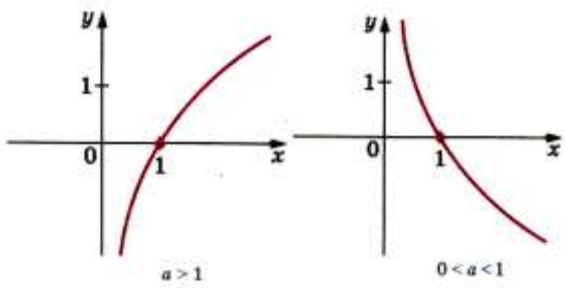


3. Логарифмическая функция

–это функция вида $y = \log_a x$, где $a > 0, a \neq 1$.

Свойства логарифмической функции:

1. Область определения – множество положительных действительных чисел: $D(f) = (0; +\infty)$.
2. Область значений – множество всех действительных чисел: $E(f) = (-\infty; +\infty)$.
3. Функция не является ни чётной, ни нечетной.
4. Если $x = 1$, то $y = \log_a 1 = 0$, следовательно, график логарифмической функции пересекает ось Ox в единственной точке $(1;0)$.
5. Если $a > 1$, то функция возрастает на интервале $(0; +\infty)$; если $0 < a < 1$, то функция убывает на $(0; +\infty)$.
6. Экстремумов нет.
7. График функции специального названия не имеет. Логарифмическая функция является обратной для показательной функции. Графики этих функций симметричны относительно прямой $y = x$:



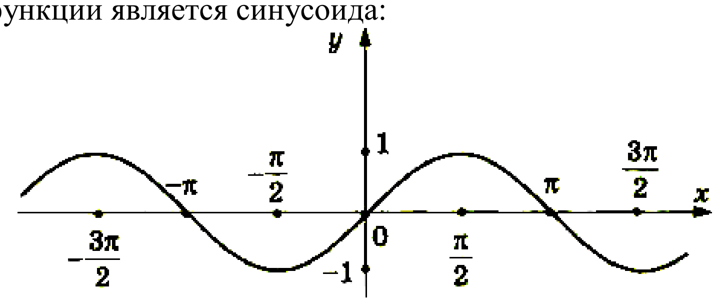
4. *Тригонометрические функции*

– это функции числового аргумента: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$.

а) Функция синуса $y = \sin x$

Свойства функции $y = \sin x$:

1. Область определения – множество всех действительных чисел: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2. Область значений – отрезок $[-1;1]$.
3. Функция является нечетной.
4. Функция периодическая: $T = 2\pi$.
5. Нули функции: $\sin x = 0$ при $x = \pi k, k \in Z$.
6. Возрастает от -1 до 1 при $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right), \quad k \in Z$.
7. Убывает от 1 до -1 при $x \in \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), \quad k \in Z$.
8. Функция достигает максимального значения $y_{\max} = 1$ при $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.
9. Функция достигает минимального значения $y_{\min} = -1$ при $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.
10. Графиком функции является синусоида:



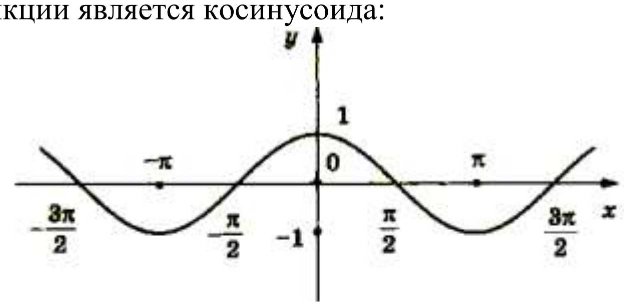
б) Функция косинуса $y = \cos x$

Свойства функции $y = \cos x$:

1. Область определения – множество всех действительных чисел: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2. Область значений – отрезок $[-1;1]$.
3. Функция является четной.
4. Функция периодическая: $T = 2\pi$.
5. Нули функции: $\cos x = 0$ при $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.
6. Возрастает от -1 до 1 при $x \in (-\pi + 2\pi k; 2\pi k), \quad k \in Z$.
7. Убывает от 1 до -1 при $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k), \quad k \in Z$.
8. Функция достигает максимального значения $y_{\max} = 1$ при $x = 2\pi k, k \in Z$.

9. Функция достигает минимального значения $y_{\min} = -1$ при $x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$.

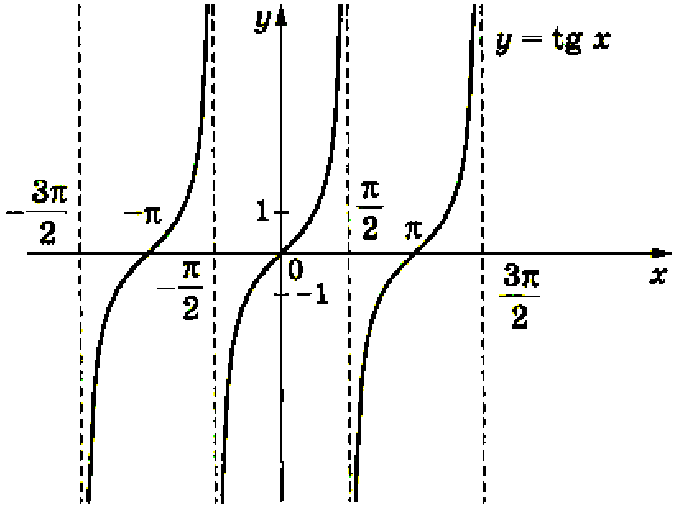
10. Графиком функции является косинусоида:



в) Функция тангенса $y = tgx$

Свойства функции $y = tgx$:

1. Область определения – множество всех действительных чисел, кроме чисел вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$.
2. Область значений – множество всех действительных чисел: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
3. Функция является нечетной.
4. Функция периодическая: $T = \pi$.
5. Нули функции: $tgx = 0$ при $x = \pi k,\ k \in Z$.
6. Возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ на промежутках $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\quad k \in Z$.
7. Экстремумов нет.
8. Графиком функции является тангенсоида:

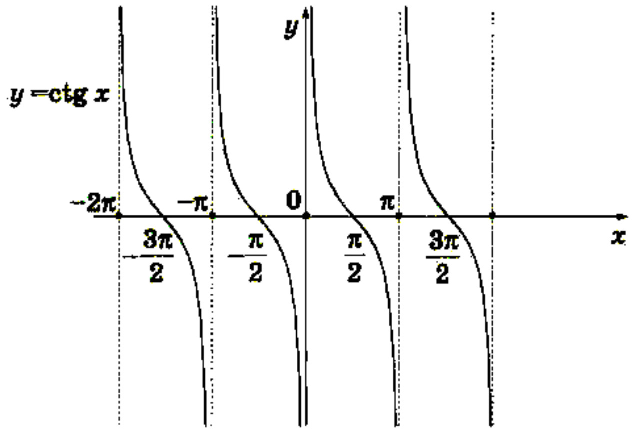


г) Функция котангенса $y = ctgx$

Свойства функции $y = ctgx$:

1. Область определения – множество всех действительных чисел, кроме чисел вида $x = \pi k,\ k \in Z$.
2. Область значений – множество всех действительных чисел: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
3. Функция является нечетной.
4. Функция периодическая: $T = \pi$.
5. Нули функции: $ctgx = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$.
6. Убывает от $+\infty$ до $-\infty$ на промежутках $x \in (\pi k; \pi + \pi k),\quad k \in Z$.

7. Экстремумов нет.
8. Графиком функции является котангенсоида:



5. Обратные тригонометрические функции (аркфункции)

– это функции, обратные к тригонометрическим функциям:

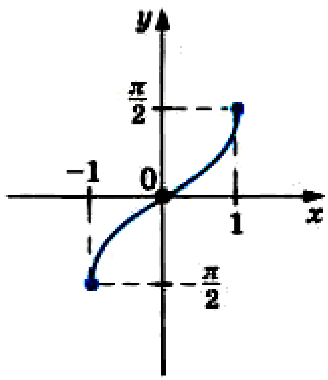
$y = \arcsin x,\ y = \arccos,\ y = arctgx,\ y = arcctgx$.

Функция g называется *обратной к функции* f, если область определения функции f является областью значений функции g, а область значений функции f является областью определения функции g.

а) Функция арксинуса $y = \arcsin x$

Свойства функции $y = \arcsin x$:

1. Область определения является отрезок $[-1;1]$.
2. Область значений – отрезок от $-\frac{\pi}{2}$ (при $x = -1$) до $\frac{\pi}{2}$ (при $x = 1$).
3. Функция является нечетной.
4. Функция не является периодической.
5. Нули функции: $\arcsin x = 0$ при $x = 0$.
6. Монотонно возрастает на всей области определения.
7. Экстремумов нет.
8. График функции специального названия не имеет:

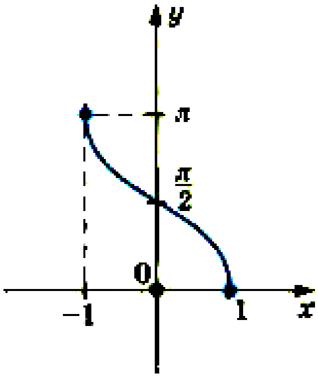


б) Функция арккосинуса $y = \arccos x$

Свойства функции $y = \arccos x$:

1. Область определения является отрезок $[-1;1]$.
2. Область значений – отрезок от 0 (при $x = 1$) до π (при $x = -1$).

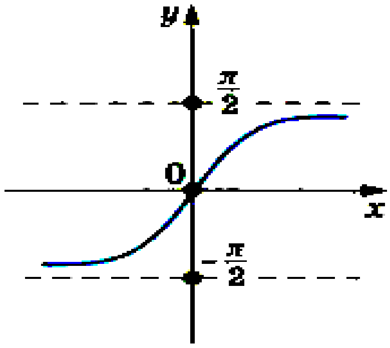
3. Функция не является ни чётной, ни нечетной.
4. Функция не является периодической.
5. Нули функции: $\arccos x = 0$ при $x = 1$.
6. Функция пересекает ось ординат в точке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
7. Монотонно убывает на всей области определения.
8. Экстремумов нет.
9. График функции специального названия не имеет:



в) Функция арктангенса $y = arctgx$

Свойства функции $y = arctgx$:

1. Область определения является - множество всех действительных чисел: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2. Область значений – промежуток $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
3. Функция является нечетной.
4. Функция не является периодической.
5. Нули функции: $arctgx = 0$ при $x = 0$.
6. Возрастает на всей области определения.
7. Экстремумов нет.
8. График функции специального названия не имеет:

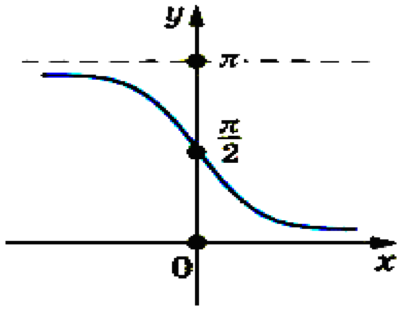


г) Функция арккотангенса $y = arcctgx$

Свойства функции $y = arcctgx$:

1. Область определения является - множество всех действительных чисел: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2. Область значений – промежуток $(0; \pi)$.
3. Функция не является ни чётной, ни нечетной.
4. Функция не является периодической.
5. Нулей функции нет.

6. График функции пересекает ось ординат в точке $y=\frac{\pi}{2}$.
7. Убывает на всей области определения.
8. Экстремумов нет.
9. График функции специального названия не имеет:

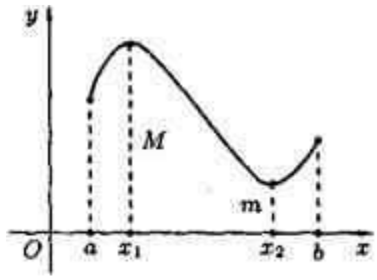


2.4Свойства функций, непрерывных на отрезке

Непрерывные на отрезке функции имеют ряд важных свойств.

Теорема 1 (Вейерштрасса). Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

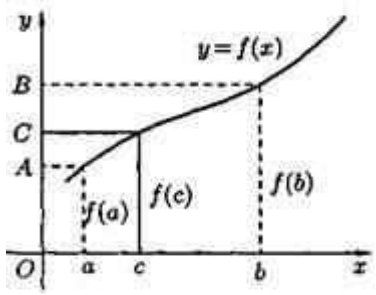
Изображенная на рисунке функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, принимает свое наибольшее значение M в точке x_1, а наименьшее m - в точке x_2. Для любого $x\in[a;b]$ имеет место неравенство $m\le f(x)\le M$.



Следствие 1. Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

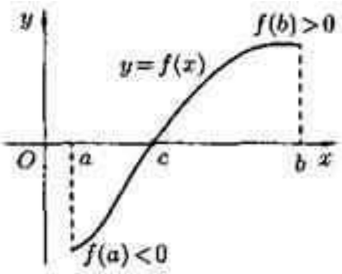
Теорема 2 (Больцано-Коши). Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на его концах неравные значения $f(a)=A$ и $f(b)=B$, то на этом отрезке она принимает и все промежуточные значения между A и B.

Геометрически теорема очевидна.

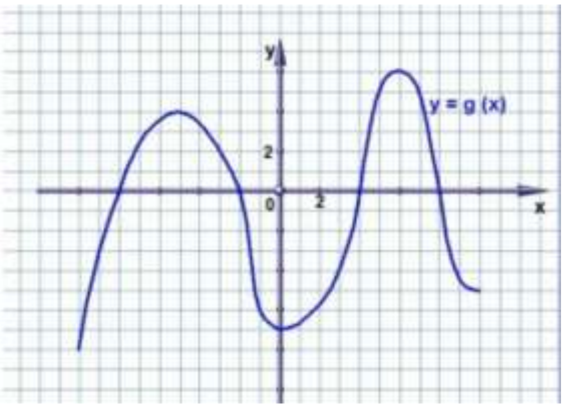


Следствие 1. Для любого числа C, заключенного между A и B, найдется точка c внутри этого отрезка такая, что $f(c)=C$. Прямая $y=C$ пересечет график функции, по крайней мере, в одной точке.

Следствие 2. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри отрезка $[a;b]$ найдется хотя бы одна точка c, в которой данная функция $f(x)$ обращается в нуль: $f(c)=0$.



Геометрический смысл теоремы: если график непрерывной функции переходит с одной стороны оси Ox на другую, то он пересекает ось Ox. Следствие 2 лежит в основе так называемого метода интервалов - это универсальный способ решения практически любых неравенств, которые встречаются в школьном курсе алгебры. Непрерывная функция $g(x)$ может изменить знак только в той точке, в которой она равна 0. Графически это означает, что график непрерывной функции может перейти из одной полуплоскости в другую, только если пересечет ось абсцисс (мы помним, что ордината любой точки, лежащей на оси ОХ (оси абсцисс) равна нулю, то есть значение функции в этой точке равно 0):



Мы видим, что функция $y = g(x)$, изображенная на графике, пересекает ось Ox в точках $x = -8, x = -2, x = 4, x = 8$. Эти точки называются нулями функции. И в этих же точках функция $g(x)$ меняет знак.

3.5 Дифференцирование параметрически заданной функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \text{ где } t \text{ – параметр.}$$

Тогда производная этой функции по переменной x равна отношению производных y'_t и x'_t по параметру t:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Пример. Найти производную функции $y = f(x)$, заданной уравнениями в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}.$$

Решение. Очевидно, что

$$y'_t = b\cos t, \; x'_t = -a\sin t.$$

Следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b\cos t}{a\sin t} = -\frac{b}{a} ctgt \, .$$

Из определения производной второго порядка следует, что:

$$y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} \, .$$

Аналогично получаем:

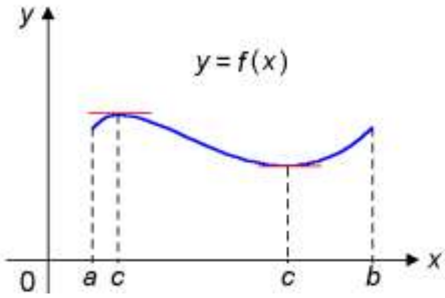
$$y'''_{xxx} = \frac{\left(y''_{xx}\right)'_t}{x'_t} \, ; \; y^{(4)}{}_{xxxx} = \frac{\left(y'''_{xxx}\right)'_t}{x'_t} \, , \, \dots$$

3.6 Теоремы Коши, Ролля, Лагранжа

Теорема 1. (*Теорема Ролля*) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$; дифференцируема в интервале $(a;b)$; на концах отрезка $[a;b]$ принимает равные значения. Тогда существует точка $c \in (a;b)$ такая, что $f'(c) = 0$.

Геометрическая интерпретация теоремы Ролля

Из теоремы Ролля следует, что существует точка $c \in (a;b)$, в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна оси Ox.



Теорема 2. (*Теорема Лагранжа*) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$; дифференцируема в интервале $(a;b)$. Тогда существует точка $c \in (a;b)$ такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

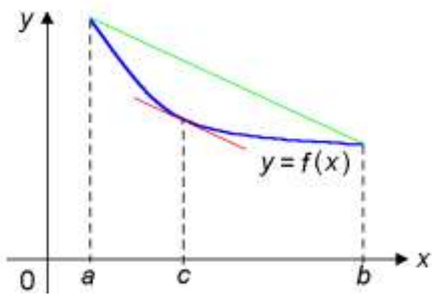
Формула (1) называется *формулой Лагранжа*, или *формулой конечных приращений*

Геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа

Представим формулу в виде

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Число $\dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$ есть угловой коэффициент прямой, проходящей через концы графика функции $y = f(x)$ - точки $(a; f(a))$ и $(b; f(b))$, а $f'(c)-$ угловой коэффициент касательной к этому графику в точке $(c; f(c))$. Из формулы следует, что существует точка $c \in (a;b)$, в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой, проходящей через концы графика (или совпадает с ней).



Теорема 3. (*Теорема Коши*) Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке [a, b]; дифференцируемы в интервале (a, b); $x \in (a;b)$, $g'(x) \neq 0$. Тогда существует точка $c \in (a;b)$ такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Формула (3) называется *формулой Коши*.

3.7 Понятие функции двух переменных. Область определения ФДП. Частные приращения. Предел и непрерывность функции двух переменных. Дифференциальное исчисление функции двух переменных.

При исследовании функции $z = f(x,y)$ на экстремум (при условии, что она дважды дифференцируема) пользуйтесь следующими правилами:

1) найдите частные производные функции $z = f(x,y)$ и решите систему уравнений

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Точки, в которых частные производные равны нулю.называются стационарными точками. Пусть одна из них $P_0(x_0, y_0)$.

2) Найдите частные производные второго порядка функции $z = f(x,y)$ и вычислите их значения в точке $P_0(x_0, y_0)$.

Положим $A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{P_0}, B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{P_0}, C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{P_0}$.

Вычислите определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Если окажется, что $\Delta > 0$, то функция $z = f(x,y)$ в точке $P_0(x_0, y_0)$ имеет максимум при $A < 0$ и минимум при $A > 0$; если же $\Delta < 0$, то в точке $P_0(x_{0,} y_0)$ экстремума нет. Наконец, если $\Delta = 0$, то вопрос об экстремуме в этой точке остается открытым и требует дополнительного исследования.

При рассмотрении функций нескольких переменных ограничимся подробным описанием функций двух переменных, т.к. все полученные результаты будут справедливы для функций произвольного числа переменных.

<u>Определение:</u> Если каждой паре независимых друг от друга чисел (x, y) из некоторого множества по какому - либо правилу ставится в соответствие одно или несколько значений переменной z, то переменная z называется **функцией двух переменных.**

$$z = f(x, y)$$

<u>Определение:</u> **Областью определения** функции z называется совокупность пар (x, y), при которых функция z существует.

<u>Определение.</u> Пусть в некоторой области задана функция z = f(x, y). Возьмем произвольную точку M(x, y) и зададим приращение Δx к переменной x. Тогда величина $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ называется **частным приращением функции по x.**

Можно записать

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}.$$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется **частной производной** функции z = f(x, y) по x.

Обозначение: $\dfrac{\partial z}{\partial x}$; z'_x; $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$; $f'_x(x,y)$.

Аналогично определяется частная производная функции по y.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

Определение. Для функции f(x, y) выражение Δz = f(x + Δx, y + Δy) – f(x, y) называется **полным приращением**.

Определение:Полным дифференциалом функции z = f(x, y) называется главная линейная относительно Δx и Δy приращения функции Δz в точке (x, y).

$$dz=f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy$$

частными производными второго порядка.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y);\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y);\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y);$$

Продолжая дифференцировать полученные равенства, получим частные производные более высоких порядков.

Определение. Частные производные вида $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y};\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x};\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x};\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial y}$ и т.д. называются **смешанными производными.**

Теорема. Если функция f(x, y) и ее частные производные $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ определены и непрерывны в точке М(x, y) и ее окрестности, то верно соотношение:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}.$$

Приближенные вычисления с помощью полного дифференциала.

$$\Delta z\approx dz=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y$$

3.8 Метод наименьших квадратов

Примером исследования функции двух переменных на экстремум является метод наименьших квадратов при построении эмпирических формул. Пусть в результате опыта зависимость между переменными *x* и *y* выражается в виде таблицы:

x_i	x_1	x_2	. . .	x_i	. . .	x_n
y_i	y_1	y_2	. . .	y_i	. . .	y_n

В случае линейной зависимости между переменными x и y указанные точки расположены в достаточной близости от некоторой прямой $y = ax + b$. При подстановке $x = x_i$ в уравнение прямой получаем $a \cdot x_i + b$, а в результате опыта получилось y_i, т.е. формула дает расхождение $y_i - (ax_i + b)$ с опытом, которое получено за счет различных ошибок.

Значения параметров a и b выбираются таким образом, чтобы сумма квадратов этих расхождений была наименьшей. В этом и состоит метод наименьших квадратов. Для определения коэффициентов a и b используется нормальная система способа наименьших квадратов:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}.$$

В случае квадратичной зависимости $y = ax^2 + bx + c$ для определения коэффициентов пользуются системой:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + c \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}.$$

Пример. Значения переменных величин x и y, полученные в результате опыта, представлены в виде таблицы:

x_i	0	1	2	4	5
y_i	0,6	1,1	1,9	2,9	3,1

Используя метод наименьших квадратов найти линейную зависимость $y = ax + b$ (найти значения параметров a и b).

Решение. В примере $n = 5$. Для удобства вычисления сумм, которые входят в нормированную систему, составляем следующую таблицу:

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	0	0,6	0	0
2	1	1,1	1,1	1
3	2	1,9	3,8	4
4	4	2,9	11,6	16
5	5	3,1	15,5	25
$\sum_{i=1}^{5}$	12	9,6	32	46

Подставив найденные значения сумм в систему $\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$, получим:

$$\begin{cases} 46a + 12b = 32 \\ 12a + 5b = 9{,}6 \end{cases}.$$

Решая систему, находим значения параметров: $a \approx 0{,}52;\ b \approx 0{,}67$.

Таким образом, зависимость между переменными x и y выражается формулой $y = 0{,}52x + 0{,}67$.

Ответ: $y = 0{,}52x + 0{,}67$.

3.9 Приближенное вычисление определенных интегралов.

Пусть требуется найти определенный интеграл от непрерывной функции f(x). Если можно найти первообразную $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ F(x) функции f(x), то интеграл вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Но отыскание первообразной функции иногда весьма сложно; кроме того, как известно, не для всякой непрерывной функции ее первообразная выражается через элементарные функции. В этих и других случаях (например, функция y = f(x) задана графически или таблично) прибегают к приближенным формулам, с помощью которых определенный интеграл находится с любой степенью точности.

Рассмотрим три наиболее употребительные формулы приближенного вычисления определенного интеграла — формулу прямоугольников, формулу трапеций, формулу парабол (Симпсона), основанные на геометрическом смысле определенного интеграла.

1. Формула прямоугольников

Пусть на отрезке [a; b], a < b, задана непрерывная функция f(x). Требуется вычислить интеграл численно равный площади $\int\limits_a^b f(x)\,dx,$ соответствующей криволинейной трапеции. Разобьем основание этой трапеции, т. е. отрезок [a; b], на n равных частей (отрезков) длины $h = \dfrac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$ (шаг разбиения) с помощью точек x_0 = a, x_1, x_2,..., x_n = b. Можно записать, что $x_i = x_0 + h \cdot i$, где i = 1,2,..., n (см. рис. 200).

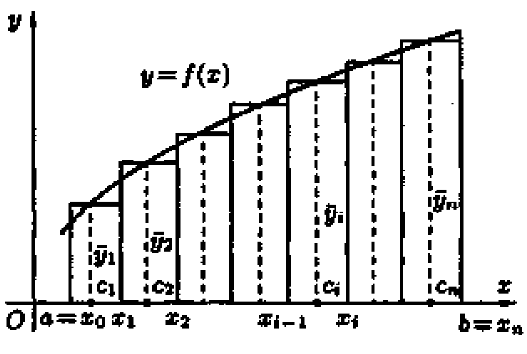


Рис. 200.

В середине $c_i = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$ каждого такого отрезка построим ординату $\hat{y}_i = f(c_i)$ графика функции y = f(x). Приняв эту ординату за высоту, построим прямоугольник с площадью h • $\hat{y}_i$.

Тогда сумма площадей всех n прямо угольников дает площадь ступенчатой фигуры, представляющую собой приближенное значение искомого определенного интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx h(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \cdots + \bar{y}_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right). \qquad (42.1)$$

Формула (42.1) называется формулой средних прямоугольников.

Абсолютная погрешность приближенного равенства (42.1) оценивается с помощью следующей формулы:

$$|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^3 \cdot M_2}{24n^2},$$

где M_2 — наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке [a; b],

$$|R_n| = \left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) \right|.$$

Отметим, что для линейной функции ($f(x)=kx+b$) формула (42.1) дает точный ответ, поскольку в этом случае $f''(x)=0$.

2. Формула трапеций

Формулу трапеций получают аналогично формуле прямоугольников: на каждом частичном отрезке криволинейная трапеция заменяется обычной.

Разобьем отрезок [a; b] на n равных частей длины $h = \frac{b-a}{n}$. Абсциссы точек деления $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, b = x_n$ (рис. 201). Пусть $y_0, y_1 \ldots, y_n$ —

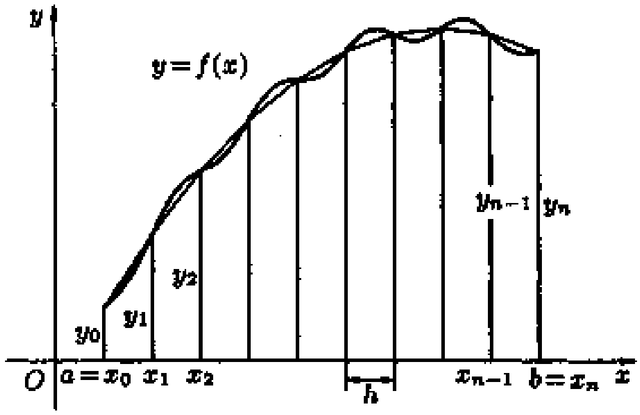


Рис. 201.

соответствующие им ординаты графика функции. Тогда расчетные формулы $h = \frac{b-a}{n}$, для этих значений примут вид $x_i = a+h*i$, $y_i=f(x_i)$, i= 0,1,2,..., n;

Заменим кривую $y=f(x)$ ломаной линией, звенья которой соединяют концы ординат y_i и y_{i+1} (i = 0,1,2,.. .,n). Тогда площадь криволинейной трапеции приближенно равна сумме площадей обычных трапеций с основаниями y_i, y_{i+1} и высотой $h = \frac{b-a}{n}$:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{y_0+y_1}{2} \cdot h + \frac{y_1+y_2}{2} \cdot h + \cdots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2} \cdot h$$

или

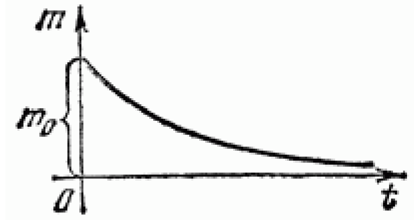
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right). \qquad (42.2)$$

Формула (42.2) называется формулой трапеций.

3.10Задача о распаде радия

Установлено, что скорость распадарадияпрямо пропорциональна его количеству в каждый данный момент. Определить закон изменения массы радия в зависимости от времени, если при $t = 0$ масса радия была m_0.

Скорость распада определяется следующим образом. Пусть в момент t была масса m, в момент $t+\Delta t$ - масса $m+\Delta m$. За время Δt распалась масса Δm.



Отношение $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ есть средняя скорость распада. Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$, т.е. $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta t}=\frac{dm}{dt}$ есть скорость распадарадияв момент t. По условию задачи $\frac{dm}{dt}=-km$, где $k-$ коэффициент пропорциональности($k>0$).Мы ставим знак минус потому, что при увеличении времени масса радия убывает.

Уравнение $\frac{dm}{dt}=-km$ естьуравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные: $\frac{dm}{m}=-kdt$

Решая уравнение, получим $\ln m=-kt+\ln C$, откуда $m=Ce^{-kt}$.

Так как при $t=0$ масса радия была m_0, то C должно удовлетворять соотношению $m_0=Ce^{-k\cdot 0}=C$. Подставляя это значение C, получим искомую зависимость массы радия как функцию времени:

$$m=m_0e^{-kt}$$

Коэффициент k определен из наблюдений и получено, что для радия $k=0{,}000436$ (единица измерения времени год). Таким образом, зависимость массы радия от времени выражается формулой:

$$m=m_0e^{-0{,}000436t}$$

Найдем период полураспада радия, т. е. промежуток времени, за который распадается половина первоначальной - массы радия. Подставляя в последнюю формулу вместо m значение $\frac{m_0}{2}$ получим $\frac{m_0}{2}=m_0e^{-0{,}000436t}$, откуда

$$T=\frac{\ln 2}{0{,}000436}\approx 1590 \text{ (лет).}$$

3.11 Знакоположительные ряды. Знакочередующиеся ряды.
<u>Эталонные ряды</u>

$a+aq+aq^2+aq^3+\ldots+aq^{n-1}+\ldots$ $|q|<1$ – бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, ряд сходится

$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots$ $0<\alpha\le 1$ – обобщенный гармонический ряд, ряд расходится.

<u>Достаточные признаки сходимости числовых рядов</u>

Положительные ряды	
Признак Даламбера	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l \quad\Rightarrow$ l<1 – сходится l>1 – расходится l=1 - ?
Радикальный признак Коши	$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=k \quad\Rightarrow$ k <1 – сходится k>1 - расходится k=1 - ?
Интегральный признак Коши	$f(x)$ на $[1:+\infty)$ - непрерыв., полож., убывает $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ - сходится $\Rightarrow$ ряд сходится - расходится $\Rightarrow$ ряд расходится.
Признак сравнения	Если второй ряд (с большими членами) сходится, то подавно сходится и первый (с меньшими членами) ряд. Если первый ряд (с меньшими членами) расходится, то подавно расходится и второй (с большими членами) ряд.
Знакочередующиеся ряды	
Признак Лейбница	$\left.\begin{array}{l}\lvert u_n \rvert \text{ - убывает}\\ \lim\limits_{n\to\infty}\lvert u_n\rvert=0\end{array}\right\}\Rightarrow$ ряд сходится

Даны два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с условием $0 \le a_n \le b_n$. Тогда: а) из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; б) из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Второй (предельный) признак сравнения.

Даны два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Если существует конечный, отличный от нуля, предел отношения общих членов этих рядов, тогда данные ряды сходятся или расходятся одновременно.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$.

Решение. Так как $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ при $x \to 0$ и $1-\cos\frac{\pi}{n} \sim \frac{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}{2} = \frac{\pi^2}{2n^2}$ при $n \to \infty$, то применим предельный признак сравнения, взяв в качестве сравниваемого ряда обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Вычисляем предел отношения общих членов данных рядов:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos \pi/n}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2/2n^2}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{2} \ne 0, \ne \infty.$$

Исследуемый ряд сходится, поскольку сходится сравниваемый ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Ответ: ряд сходится.

3.12 Степенные ряды.

Определение. Если членами ряда будут не числа, а функции от *x*, то ряд называется **функциональным**.

Определение. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **сходящимся** в точке ($x=x_0$), если в этой точке сходится последовательность его частных сумм. Предел последовательности $\{S_n(x_0)\}$ называется **суммой** ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в точке x_0.

Определение. Совокупность всех значений *x*, для которых сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **областью сходимости** ряда.

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **равномерно сходящимся** на отрезке [a,b], если равномерно сходится на этом отрезке последовательность частичных сумм этого ряда.

Для равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *необходимо и достаточно, чтобы для любого числа* $\varepsilon>0$ *существовал такой номер* $N(\varepsilon)$, *что при* $n>N$ *и любом целом* $p>0$ *неравенство*

$$\left|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots+u_{n+p}(x)\right| < \varepsilon$$

выполнялось бы для всех x на отрезке [a,b].

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится равномерно и притом абсолютно на отрезке [a,b], если модули его членов на том же отрезке не превосходят соответствующих членов сходящегося числового ряда с положительными членами :*

$$M_1 + M_2 + ... + M_n + ...$$

т.е. имеет место неравенство:

$$|u_n(x)| \le M_n .$$

<u>Свойства равномерно сходящихся рядов.</u>

1) Теорема о непрерывности суммы ряда.

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *- непрерывные на отрезке [a,b] функции и ряд сходится равномерно, то и его сумма S(x) есть непрерывная функция на отрезке [a,b].*

2) Теорема о почленном интегрировании ряда.

Равномерно сходящийся на отрезке [a,b] ряд с непрерывными членами можно почленно интегрировать на этом отрезке, т.е. ряд, составленный из интегралов от его членов по отрезку [a,b] , сходится к интегралу от суммы ряда по этому отрезку.

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} u_n(x)dx; \quad \alpha, \beta \in [a,b]$$

3) Теорема о почленном дифференцировании ряда.

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходящегося на отрезке [a,b] представляют собой непрерывные функции, имеющие непрерывные производные, и ряд, составленный из этих производных* $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ *сходится на этом отрезке равномерно, то и данный ряд сходится равномерно и его можно дифференцировать почленно.*

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{du_n(x)}{dx}$$

2 Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус и интервал сходимости степенного ряда.

<u>ОПР:</u> Ряд вида $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + ...$, где $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, x_0 \in R$ - заданные действительные числа, x-переменная, называется <u>*степенным рядом.*</u>

Обозначение $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ (4) или $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ *(5)*

<u>Теорема Абеля.</u> *Если степенной ряд* $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ *сходится при* $x = x_1$ *, то он сходится и притом абсолютно для всех* $|x| > |x_1|$.

Для исследования на сходимость степенных рядов удобно использовать признак Даламбера.

ТЕОРЕМА (<u>*Признак Даламбера для рядов с произвольными членами):*</u> Если $\exists \lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = D$, то

$$\begin{cases} \text{если } D<1 \Rightarrow \text{ряд сходится абсолютно} \\ \text{если } D>1 \Rightarrow \text{ряд расходится} \\ \text{если } D=1 \Rightarrow \text{вопрос о сходимости ряда не решен} \end{cases}$$

Найдем интервал и радиус сходимости степенного ряда, воспользовавшись признаком Даламбера

$D=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a^n(x-x_0)^n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}(x-x_0)}{a_n}\right|=\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}(x-x_0)\right|$ Пусть D<1, то степенной ряд абсолютно сходится.

$$\Rightarrow\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}(x-x_0)\right|<1 \quad \Rightarrow|x-x_0|<\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x-x_0<\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|\Rightarrow x<\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|+x_0 \\ x-x_0>-\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|\Rightarrow x>x_0-\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| \end{array}\right.$$

. Т е $x_0-\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|<x<x_0+\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

îáîçí $.\ c_1<x<c_2$

Значит, на интервале $(c_1;c_2)$ ряд абсолютно сходится.

$R=\left|\dfrac{c_1-c_2}{2}\right|$-*радиус сходимости ряда.*

Также нужно выяснить вопрос о сходимости ряда на концах интервала, т е при x= c_1 и x=c_2. Таким образом, получим *область сходимости.*

Пример: Найти область и радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n+2}\cdot x^n$

$u_n=\dfrac{3^n}{n+2}x^n;\quad a_n=\dfrac{3^n}{n+2};\quad x_0=0$

$D=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{3x(n+2)}{n+3}\right|=|3x|$

Ряд абсолютно сходится, если D<1, т е $|3x|<1$

$|x|<\dfrac{1}{3}$

$x\in(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3})$-**интервал сходимости ряда.**

R=1\3-**радиус сходимости**.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости:

1) $x=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n+2}\cdot\dfrac{1}{3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+2}$

Сравним с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ – гармонический ряд, расходится

Применим предельный признак сравнения $K=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+2}=1>0\Rightarrow$ оба ряда в плане сходимости ведут себя одинаково $\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+2}$- расходится. $\Rightarrow$ $x=-\dfrac{1}{3}$ не входит в область сходимости ряда.

2) $x=-\dfrac{1}{3}\Rightarrow\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n+2}(-\dfrac{1}{3})^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+2}$

$D=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{-n-2}{n+3}\right|=1\Rightarrow$ признак Даламбера не подходит

Рассмотрим признак Лейбница:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ |u_n|\ \text{строго убывает} \\ 2)\ \lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+2}=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \text{ряд}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}\ \text{сходится,}\quad \text{причем условно, т к.}$$

Рассмотрим ряд, составленный из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$ -расходится

$x \in [\ -\frac{1}{3};\frac{1}{3})$ - **область сходимости ряда**

3.13Ряды Фурье

Рассмотрим некоторую функцию $y = f(x)$, которая **определена** по крайне мере на промежутке $[-\pi;\pi]$ (а, возможно, и на большем промежутке). Если данная функция интегрируема на отрезке $[-\pi;\pi]$, то её можно разложить в тригонометрический **ряд Фурье**:

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, где a_0, a_n, b_n – так называемые *коэффициенты Фурье.*

При этом число $T = 2\pi$ называют **периодом разложения**, а число $l = \frac{T}{2} = \pi$ – **полупериодом разложения**.

Очевидно, что в общем случае ряд Фурье состоит из синусов и косинусов: Нулевой член ряда принято записывать в виде $\frac{a_0}{2}$.

Коэффициенты Фурье рассчитываются по следующим формулам: $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$; $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx$; $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx$;

Пример. Разложить функцию $f(x) = x + 1$ в ряд Фурье на промежутке $[-\pi;\pi]$. Построить график $f(x) = x + 1$, график суммы ряда $S(x)$.

Решение: первая часть задания состоит в разложении функции в ряд Фурье.

В данной задаче период разложения $T = 2\pi$, полупериод $l = \frac{T}{2} = \pi$.

Используя соответствующие формулы, найдём *коэффициенты Фурье.* Теперь нужно составить и вычислить три **определённых интеграла**. Для удобства я буду нумеровать пункты:

1) Первый интеграл самый простой, однако и он уже требует глаз да глаз:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} + \pi - \left(\frac{(-\pi)^2}{2} - \pi\right)\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} + \pi - \left(\frac{\pi^2}{2} - \pi\right)\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} + \pi - \frac{\pi^2}{2} + \pi\right) = \frac{1}{\pi}\cdot 2\pi = 2$$

2) Используем вторую формулу:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)\cos nxdx = (*)$$

Данный интеграл хорошо знаком и **берётся он по частям**

$u = x + 1 \Rightarrow du = dx$

$$dv = \cos nxdx \Rightarrow v = \int \cos nxdx = \frac{1}{n}\int \cos nxd(nx) = \frac{1}{n}\sin\ nx$$

При нахождении v использован метод подведения функции под знак дифференциала**.**

Используем формулу интегрирования по частям в определённом интеграле $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu.$:

$$(*) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}(x+1)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\cdot\left[(\pi+1)\sin\pi n - (-\pi+1)\sin(-\pi n)\right] - \frac{1}{n}\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)\cdot\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\cdot(0-0) + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(0 + \frac{1}{n^2}(\cos\pi n - \cos(-\pi n))\right) = \frac{1}{\pi n^2}(\cos\pi n - \cos\pi n) = 0$$

3) Ищем третий коэффициент Фурье:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(x+1)\sin nxdx = (*)$$

Получен родственник предыдущего интеграла, который тоже **интегрируется по частям**:

$u = x+1 \Rightarrow du = dx$

$dv = \sin nxdx \Rightarrow v = \int\sin nxdx = \frac{1}{n}\int\sin nxd(nx) = -\frac{1}{n}\cos nx$

$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$

Этот экземпляр чуть сложнее, закомментирую дальнейшие действия пошагово:

$$(*) \overset{(1)}{=} \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}(x+1)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx\right) \overset{(2)}{=}$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\cdot\left[(\pi+1)\cos\pi n - (-\pi+1)\cos(-\pi n)\right] + \frac{1}{\pi n}\cdot\frac{1}{n}(\sin nx)\Big|_{-\pi}^{\pi} \overset{(3)}{=}$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\cdot\left[(\pi+1)(-1)^n - (-\pi+1)(-1)^n\right] + \frac{1}{\pi n^2}\cdot(\sin\pi n - \sin(-\pi n)) \overset{(4)}{=}$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\cdot\left[\pi+1+\pi-1\right]\cdot(-1)^n + \frac{1}{\pi n^2}\cdot(0-0) \overset{(5)}{=} -\frac{1}{\pi n}\cdot 2\pi\cdot(-1)^n + 0 = -\frac{2\pi\cdot(-1)^n}{\pi n} = -\frac{2\cdot(-1)^n}{n}$$

Наконец-то найдены все три коэффициента Фурье: $a_0 = 2, a_n = 0, b_n = -\frac{2}{n}(-1)^n$.

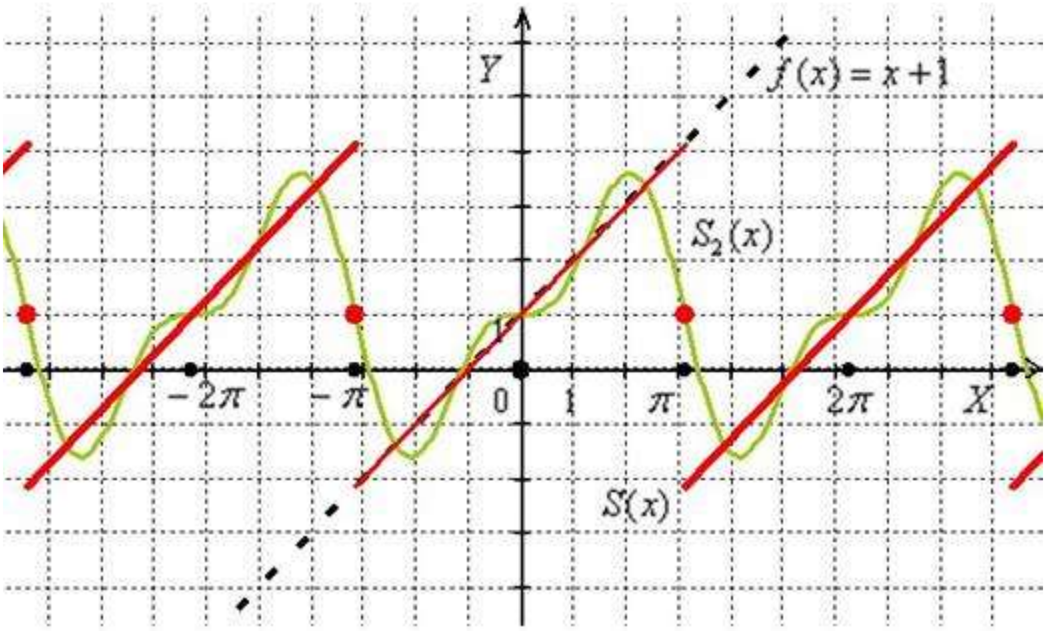
Подставим их в формулу $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right)$ и получим:

$$f(x) = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin nx}{n}.$$

При этом не забываем разделить a_0 пополам. На последнем шаге константа («минус два»), не зависящая от «эн», вынесена за пределы суммы.Таким образом, мы получили разложение функции $f(x) = x+1$ в ряд Фурье на промежутке $[-\pi;\pi]$.

Изучим вопрос сходимости ряда Фурье. Во второй части задачи требуется изобразить график $f(x) = x+1$, график суммы ряда $S(x)$ и график частичной суммы $S_2(x)$.

График функции $f(x) = x+1$ представляет собой обычную **прямую на плоскости**, которая проведена чёрным пунктиром:



Разбираемся с суммой ряда $S(x)$. Как вы знаете, функциональные ряды сходятся к функциям. В нашем случае построенный ряд Фурье $1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin nx}{n}$ при любом значении «икс» сойдётся к функции $S(x)$, которая изображена красным цветом. Данная функция терпит **разрывы 1-го рода** в точках $...x=-3\pi, x=-\pi, x=3\pi...$, но определена и в них (красные точки на чертеже)

Таким образом: $1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin nx}{n}=S(x)$. Легко видеть, что $S(x)$ заметно отличается от исходной функции $f(x)=x+1$.

На практике обычно достаточно изобразить три периода разложения, как это сделано на чертеже. Ну и ещё «обрубки» соседних периодов – чтобы было понятно, что график продолжается.

Особый интерес представляют **точки разрыва 1-го рода**. В таких точках ряд Фурье сходится к изолированным значениям, которые расположены ровнёхонько посередине «скачка» разрыва (красные точки на чертеже). Как узнать ординату этих точек? Сначала найдём ординату «верхнего этажа»: для этого вычислим значение функции в крайней правой точке центрального периода разложения: $f(\pi)=\pi+1$. Чтобы вычислить ординату «нижнего этажа» проще всего взять крайнее левое значение этого же периода: $f(-\pi)=-\pi+1$. Ордината среднего значения – это среднее арифметическое суммы «верха и низа»: $y=\frac{f(\pi)+f(-\pi)}{2}=1$. Приятным является тот факт, что при построении чертежа вы сразу увидите, правильно или неправильно вычислена середина.

Построим частичную сумму ряда $S_2(x)$ и заодно повторим смысл термина «сходимость». Мотив известен ещё из урока о **сумме числового ряда**. Распишем наше богатство подробно:

$$S(x)=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin nx}{n}=1-2\cdot\left(\frac{(-1)^1\sin x}{1}+\frac{(-1)^2\sin 2x}{2}+\frac{(-1)^3\sin 3x}{3}+\frac{(-1)^4\sin 4x}{4}+\ldots\right)=$$

$$=1-2\cdot\left(-\sin x+\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 4x}{4}-\ldots\right)$$

Чтобы составить частичную сумму $S_2(x)$ необходимо записать нулевой + ещё два члена ряда. То есть, $S_2(x) = 1 - 2\left(-\sin x + \dfrac{\sin 2x}{2}\right) = 1 + 2\sin x - \sin 2x$.

На чертеже график функции $S_2(x) = 1 + 2\sin x - \sin 2x$ изображен зелёным цветом, и, как видите, он достаточно плотно «обвивает» полную сумму $S(x)$. Если рассмотреть частичную сумму из пяти членов ряда $S_5(x)$, то график этой функции будет ещё точнее приближать красные линии, если сто членов $S_{100}(x)$ – то «зелёный змий» фактически полностью сольётся с красными отрезками и т.д. Таким образом, ряд Фурье сходится к своей сумме $S(x)$.

Интересно отметить, что любая частичная сумма $S_n(x)$ – это **непрерывная функция**, однако полная сумма ряда $S(x)$ всё же разрывна.

Ответ: $f(x) \sim 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \sin nx}{n}$.

Во многих задачах функция терпит **разрыв 1-го рода** прямо на периоде разложения:

Разложение функции в ряд Фурье на произвольном периоде

Если $f(x)$ - периодическая функция с периодом $2l$, определенная на $[-l; l]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos\frac{m\pi x}{l} + b_m \sin\frac{m\pi x}{l}\right) \text{ - ряд Фурье;}$$

$$\text{где } a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx;\ a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}dx;\ b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx;$$

Если $l = \pi$, то получаются формулы промежутка $[-\pi, \pi]$, с которых мы начинали.

Алгоритм и принципы решения задачи полностью сохраняются, но возрастает техническая сложность вычислений:

Разложение в ряд Фурье чётных и нечётных функций

С чётными и нечётными функция процесс решения задачи заметно упрощается.

1) $f(x)$ - <u>четная</u> периодическая функция с периодом $2l$, определенная на $[-l; l]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos\frac{m\pi x}{l}\right) \text{ - ряд Фурье,}$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx,\ a_m = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}dx;$$

2) $f(x)$ - <u>нечетная</u> периодическая функция с периодом $2l$, определенная на $[-l; l]$:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(b_m \sin\frac{m\pi x}{l}\right) \text{ - ряд Фурье,} b_m = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx.$$

В ряде случаев симметричное продолжение функции надо записать аналитически.

3.14 Повторные испытания. Простейший (пуассоновский) поток событий. Другие виды потоков. Нормальный закон распределения. Влияние параметров нормального распределения на форму нормальной кривой.

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Простейший (пуассоновский) поток событий. Другие виды потоков.
Влияние параметров нормального распределения на форму нормальной кривой.
Виды и способы отбора статистического материала, влияние на репрезентативность выборки

Одним из центральных вопросов организации СМО является выяснение закономерностей, которым подчиняются моменты поступления в систему требований на обслуживание. Рассмотрим наиболее употребляемые математические модели входных потоков.
Определение: Поток требований называют однородным, если он удовлетворяет условиям:

1. все заявки потока с точки зрения обслуживания являются равноправными;

вместо требований (событий) потока, которые по своей природе могут быть различными, рассматриваются толь ко моменты их поступления.
Определение: Регулярным называются поток, если события в потоке следуют один за другим через строгие интервалы времени.
Функция f(x) плотности распределения вероятности случайной величины T – интервала времени между событиями имеет при этом вид:

$$f(x) = \delta(x - M_T)$$

,где δ- дельта функция, $M_т$- математическое ожидание, причем $M_т$=T, дисперсия $D_т$=0 и интенсивность наступления событий в поток τ =1/$M_т$=1/T.
Определение: Поток называют **случайным**, если его события происходят в случайные моменты времени.
Случайный поток может быть описан как случайный вектор, который, как известно, может быть задан однозначно законом распределения двумя способами:

a. Заданием закона распределения моментов появления событий

$F(t_1, t_2, .. t_n \quad) = P(\tau_1 < t_1, \tau_2 < t_2, ..., \tau_n < t_n)$.*Здесь* $\tau_1, \tau_2, .. \tau_n$ –
случайные моменты времени появления событий в потоке, t1, t2, tn- их назначение, P – вероятность;

b. Заданием многомерного закона распределения системы случайных величин T_1 , T_2 ,… Tn , являющихся длинами интервалов между последовательными событиями :

$$F(z_1, z_2, .. z_n \quad) = P(\tau_1 < z_1, \tau_2 < z_2, ..., \tau_n < z_n).$$

Где, zi- значения Ti(i=1,n), В этом случае моменты наступления событий могут быть вычислены следующим образом
$t_1=t_0+z1$
$t_2=t_1+z2$
………,
где, t_0 - момент начала потока.

Простейший пуассоновский поток.

Для решения большого числа прикладных задач бывает достаточным применить математические модели однородных потоков, удовлетворяющих требованиям стационарности, без последействия и ординарности.
Определение: Поток называется стационарным, если вероятность появления n событий на интервале времени (t,t+T) зависит от его расположения на временной оси t.
Определение: Поток событий называется ординарным, если вероятность появления двух или более событий в течении элементарного интервала времени D t есть величина бесконечно малая по сравнению с вероятностью появления одного события на этом интервале, т.е. $\lim_{\Delta t \to 0} P(n, \Delta t) = 0$ при n=2,3,…
Определение: Поток событий называется **потоком без последствия**, если для любых непересекающихся интервалов времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий попадающих на другой.
Определение: Если поток удовлетворяет требованиям стационарности, ординарности и без последствия он называется **простейшим, пуассоновским потоком.**

Доказано, что для простейшего потока число n событий попадающих на любой интервал z распределено по закону Пуассона:

$$P(n,z)=\frac{(\lambda z)^n\exp(-\lambda z)}{n!},n=0,1,2,\ldots$$

Вероятность того, что на интервале времени z не появится ни одного события равна:

$$P(0,z)=e^{-\lambda z}$$

$$P(T<z)=1-e^{-\lambda z}$$

тогда вероятность противоположного события:

где по определению P(T<z)=F(z) это функция распределения вероятности T. Отсюда получим, что случайная величина T распределена по показательному закону:

$$f(z)=\frac{dF}{dz}=\lambda e^{-\lambda z}$$

параметр λ называют плотностью потока. Причем,

$$M[T]=\frac{1}{\lambda},\quad D[T]=\frac{1}{\lambda^2}$$

Впервые описание модели простейшего потока появились в работах выдающихся физиков начала века – А. Эйнштейна и Ю.Смолуховского, посвященных броуновскому движению.

Свойства простейшего пуассоновского потока.

Известны два свойства простейшего потока, которые могут быть использованы при решении практических задач.

2.3.1. Введем величину a= λ x. В соответствии со свойствами Пуассоновского распределения при $a\to\infty$ оно стремится к нормальному. Поэтому для больших a для вычисления P{X(a)меньше, либо равно n}, где X(a) – случайная величина распределенная по Пуассону с матожиданием a можно воспользоваться следующим приближенным равенством:

$$P\{X(a)\le n\}\approx 1\div\sqrt{2\pi a}\int_{-\infty}^{n+1/2}\exp\{-{(t-a)^2}/{2a}\}dt,\quad(\ \ .4)$$

$$=\Phi\left(\frac{n-a+\frac{1}{2}}{\sqrt{a}}\right),\quad где\quad \Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x\exp(-\frac{t^2}{2}dt).$$

2.3.2. Еще одно свойство простейшего потока связано со следующей теоремой:

Теорема: При показательном распределении интервала времени между требованиями T, независимо от того, сколько он длился, оставшаяся его часть имеет тот же закон распределения.

Доказательство: пусть T распределено по показательному закону: $F(x)=1-e^{-\lambda x}$

Предположим, что промежуток a уже длился некоторое время a<T. Найдем условный закон распределения оставшейся части промежутка T_1=T-a

$F_a(x)=P(T-a<x½\ T>x)$

По теореме умножения вероятностей:

P((T>a)(T-a<z))=P(T>z) P(T-a<z|T>a)=P(T>a) $F_a(z)$.

Отсюда,

$$F_a=\frac{R((T>a)\wedge(T-a<z))}{P(T>a)},\quad но\quad события\quad (T>a)\wedge(T-a<z)$$

равносильно событию a<T<z+a, для которого P(a<T<z+a)=F(z+a)-F(a); с другой стороны

P(T>a)=1-F(a), таким образом

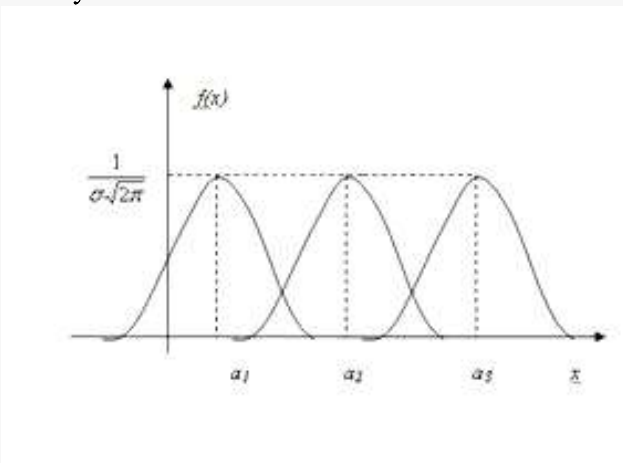
$F_a(x)=(F(z+a)-F(a))/(1-F(a))$

Отсюда, учитывая (3):

$$F_a(z)=\frac{(e^{-\lambda z}-e^{-\lambda(z-a)})}{e^{-\lambda a}}=1-e^{-\lambda z}=F(z).,\quad ч.т.д.$$

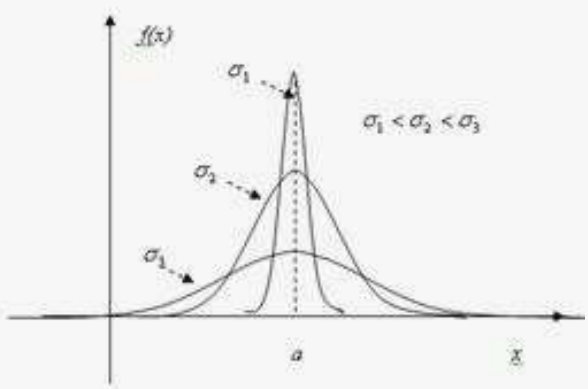
Этим свойством обладает только один вид потоков – простейшие пуассоновские.

Изменение величины параметра a (математического ожидания) не изменяет формы нормальной кривой, а приводит лишь к ее сдвигу вдоль оси *Ox*: вправо, если a возрастает, и влево, если a убывает:



Максимум функции плотности вероятностей нормального распределения равен $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

Отсюда следует, что с возрастанием σ. Максимальная ордината нормальной кривой убывает, а сама кривая становится более пологой, то есть сжимается к оси *Ox*; при убывании σ нормальная кривая становится более “островершинной” и растягивается в положительном направлении оси *Oy*:



Замечание: При любых значениях параметров a и σ площадь, ограниченная нормальной кривой и осью*Ox*, остается равной единице.

3.15 Виды и способы отбора статистического материала, влияние на репрезентативность выборки.

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Для того чтобы выборочная совокупность отражала характеристики генеральной, необходимо обеспечить репрезентативность (представительность) выборки, то есть рассчитать необходимый объем выборки и определить метод и способы отбора. Но как бы тщательно не была организована выборка, как правило, выборочные характеристики в какой-то степени будут отклоняться от характеристик генеральной совокупности, т.е. обычно имеют место ошибки репрезентативности.

Ошибками репрезентативности называют расхождения (разность) между средними, а также относительными показателями выборочной и генеральной совокупностей при условии отсутствия ошибок регистрации. И основная задача выборочного метода сводится к минимизации ошибки репрезентативности.

Как уже отмечалось, сущность выборочного метода заключается в том, что характеристики выборочной совокупности распространяются на всю генеральную совокупность и для формирования выборочной совокупности главными условиями являются:

- равновозможность каждой единицы генеральной совокупности попасть в выборку;
- достаточная численность выборки.

Для обеспечения равной возможности единиц генеральной совокупности попасть в выборку статистика применяет следующие методы и способы.

Методы:

- *повторный* - это такой метод отбора, при котором однажды отобранная единица возвращается обратно в генеральную совокупность и снова участвует в выборке. При повторном отборе сохраняется постоянная вероятность попасть в выборку для всех единиц;
- *бесповторный* - это такой метод отбора, при котором отобранная однажды единица в совокупность не возвращается, и вероятность каждой новой единицы попасть в выборку увеличивается.

Существуют различные способы формирования выборочной совокупности:

1. *Случайный отбор*. При этом способе каждая единица из генеральной совокупности отбирается в состав выборочной случайно (жеребьевка, использование таблиц случайных чисел).

2. *Механический отбор* - исходит из учета некоторых особенностей расположения объектов в генеральной совокупности, их упорядоченности (по списку, номеру, алфавиту). Механическая выборка осуществляется путем отбора отдельных объектов генеральной совокупности через определенный интервал (каждый 10 или 20). Если расположение объектов в генеральной совокупности носит случайный характер, то механическая выборка по содержанию аналогична случайному отбору. При механическом отборе, как правило, применяется только бесповторная выборка.

3. *Типический отбор*. При типическом отборе вся генеральная совокупность на основе предварительного анализа изучаемой совокупности разбивается на группы по какому-либо существенному признаку, и непосредственный отбор единиц производится в пределах отдельных типических групп. При этом способе отбора генеральная совокупность расчленяется на однородные в некотором отношении группы, которые имеют свои характеристики, и вопрос сводится к определению объема выборок из каждой группы. Может быть равномерная выборка - при этом способе из каждой типической группы отбирается одинаковое число единиц ($n_1 = n_2 = m_n$). Такой подход оправдан лишь при равенстве численностей исходных типических групп. В противном случае выборки могут оказаться не репрезентативными.

При проведении типологической выборки непосредственный отбор из каждой группы, как правило, проводится методом случайного отбора.

4. *Серийный отбор*. В некоторых случаях характер размещения объектов в генеральной совокупности может быть таким, что они расположены сериями (ящики,

мешки, классы). В таких случаях формирование выборочной совокупности путем отбора отдельных единиц нецелесообразно. Проще организовать отбор сериями и провести сплошное обследование по способу механической или случайной выборки.

5. *Многофазная выборка*. Она характеризуется тем, что на всех ступенях выборки сохраняется одна и та же единица отбора, но проводится несколько фаз (стадий) выборочных обследований, которые различаются между собой широтой программы обследования. Важной особенностью является возможность использовать данные первой фазы наблюдения для дополнительной характеристики и уточнения результатов, полученных на 2, 3 и далее фазах.

На практике чаще всего приходится сочетать различные виды и способы статистического наблюдения.

Необходимым условием научной организации выборочного наблюдения является требование достаточного объема выборки. Логический смысл этого требования вполне очевиден. Чем больше единиц будет взято для обследования, тем достовернее они смогут отобразить генеральную совокупность. Объем выборки (n) при достаточно большой численности генеральной совокупности (больше 1000 элементов) рассчитывается по формуле: $n = t^2$ p (100% - p), где: t^2 - критерий достоверности, зависящий от надежности оценок (при надежности, равной 95%, критерий равен ~ 2); p - показатель распространенности явления в %; - требуемая точность оценок в %.

3.16 Статистическая проверка статистических гипотез.Вычисление коэффициента корреляции.Определение параметров линейной регрессии.

Соотношение *x* и *y* линейное, если прямая линия, проведенная через центральную часть скопления точек, дает наиболее подходящую аппроксимацию наблюдаемого соотношения.

Можно измерить, как близко находятся наблюдения к прямой линии, которая лучше всего описывает их линейное соотношение путем вычисления коэффициента корреляции Пирсона, обычно называемого просто коэффициентом корреляции.

Его истинная величина в популяции (генеральный коэффициент корреляции) (греческая буква «ро») оценивается в выборке как *r (выборочный коэффициент корреляции)*, которую обычно получают в результатах компьютерного расчета.

Пусть $(x_1. y_1), (x_2, y_2),\dots,(x_n, y_n)$ - выборка из *n* наблюдений пары переменных *(X, Y)*.

Выборочный коэффициент корреляции *r* определяется как

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x-\bar{x})^2(y-\bar{y})^2}},$$

где $\bar{x}$, $\bar{y}$ - выборочные средние, определяющиеся следующим образом:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Свойства коэффициента корреляции *r*

- *r* изменяется в интервале от —1 до +1.
- Знак *r* означает, увеличивается ли одна переменная по мере того, как увеличивается другая (положительный *r*), или уменьшается ли одна переменная по мере того, как увеличивается другая (отрицательный *r*).
- Величина *r* величина указывает, как близко расположены точки к прямой линии. В частности, если r = +1 или r= —1, то имеется абсолютная (функциональная) корреляция по всем точкам, лежащим на линии (практически это маловероятно); если $r \cong 0$, то линейной корреляции нет (хотя может быть нелинейное

соотношение). Чем ближе r к крайним точкам (±1), тем больше степень линейной связи.

- Коэффициент корреляции r безразмерен, т. е. не имеет единиц измерения.
- Величина r обоснованна только в диапазоне значений x и y в выборке. Нельзя заключить, что он будет иметь ту же величину при рассмотрении значений x или y, которые значительно больше, чем их значения в выборке.
- x и y могут взаимозаменяться, не влияя на величину r ($r_{xy} = r_{yx}$).
- Корреляция между x и y не обязательно означает соотношение причины и следствия.
- r^2 представляет собой долю вариабельности y, которая обусловлена линейным соотношением с x.

Когда не следует рассчитывать r

Расчет r может ввести в заблуждение, если:

- соотношение между двумя переменными нелинейное, например квадратичное;
- данные включают более одного наблюдения по каждому случаю;
- есть аномальные значения (выбросы);
- данные содержат ярко выраженные подгруппы наблюдений.

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЗАНЯТИЯМ

4.1 Практические занятия по теме «Линейная алгебра»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Составление уравнений линий в треугольнике.
2. Условие параллельности и перпендикулярности прямых.
3. Канонические уравнения кривых второго порядка. Составление уравнений кривых.
4. Взаимное расположение прямой и кривой на плоскости.
5. Условия для четырех вариантов взаимного расположения двух плоскостей.
6. Частные случаи расположения прямой в пространстве.
7. Условия для четырех вариантов взаимного расположения прямой и плоскости.
8. Канонические уравнения поверхностей в пространстве. Поверхности вращения. Конические поверхности.

4.2 Практические занятия по теме «Аналитическая геометрия»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Определение свойств функции.
2. Построение графиков элементарных и неэлементарных функций.
3. Способы задания числовой последовательности.
4. Два определения предела числовой последовательности: по Коши и по Гейне.
5. Нахождение предела числовой последовательности по определению и с помощью преобразований.
6. Понятие неопределенности. Ее виды. Правила раскрытия.
7. Применение замечательных пределов при раскрытии неопределенностей.
8. Нахождение правосторонних и левосторонних пределов.
9. Два определения непрерывности функции в точке.
10. Определение вида точек разрыва.
11. Связь точек разрыва с асимптотами.

4.3 Практические занятия по теме «Теория вероятностей»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Нахождение общего члена ряда.

2. Исследование на сходимость знакоположительных рядов. Условия применимости достаточных признаков сходимости.

3. Использование эталонных рядов при исследовании ряда на сходимость.

4. Нахождение суммы сходящегося ряда.

5. Примеры разложений элементарных функций в степенной ряд.

6. Применение рядов при решении дифференциальных уравнений, при вычислении приближенного значения функции и определенного интеграла.

7. Комбинаторика.

8. Испытание и событие. Виды событий, их классификация.

9. Понятие вероятности случайного события. Свойства вероятности.

10. Сумма и произведение событий.

11. Теоремы сложения и умножения.

12. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.

13. Схема Бернулли. Формула Бернулли.

14. Локальная теорема Муавра – Лапласа.

15. Формула Пуассона.

16. Интегральная теорема Лапласа.

17. Понятие случайной величины. Ее виды.

18. Закон распределения и многоугольник распределения дискретной случайной величины.

19. Числовые характеристики, их свойства.

20. Виды распределений дискретной случайной величины: биномиальное распределение, распределение Пуассона, геометрическое и гипергеометрическое распределения.

21. Интегральная функция распределения, ее свойства

22. Дифференциальная функция распределения непрерывной случайной величины, ее свойства.

23. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.

24. Виды распределений непрерывной случайной величины: равномерное распределение, показательное распределение, нормальный закон распределения, его параметры.

25. Кривая Гаусса. Ее свойства и график.

4.4 Практические занятия по теме «Математическая статистика»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Виды статистического распределения выборки.

2. Основное свойство выборочной средней.

3. Построение полигона и гистограммы.

4. Характеристики точечных оценок.

5. Задание надежности при решении практических задач.

6. Построение доверительных интервалов.

7. Виды зависимостей между признаками.

8. Составление корреляционной таблицы.

9. Нахождение параметров прямой регрессии методом наименьших квадратов.

10. Ошибки первого и второго рода.

11. Условия применимости параметрических и непараметрических критериев.