ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Математика

Направление подготовки (специальность) 35.03.06 Агроинженерия

Профиль образовательной программы Технические системы в агробизнесе

Форма обучения очная

СОДЕРЖАНИЕ

3 семестр

1 семестр

2 семестр

3 семестр

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1 семестр

1. 1 Лекция № 1 (2 часа).

Тема: «Матрицы и определители»

1.1.1 Вопросы лекции:

1. Виды матриц.
2. Действия над матрицами.
3. Определители второго и третьего порядка.
4. Миноры, алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.

1.1.2 Краткое содержание вопросов:

1. Виды матриц.

Матрица $A_{m\times n}$ – прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов.

$$A_{m\times n}=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} – элементы матрицы;

i – номер строки, в которой стоит элемент, $i=1, 2, \ldots, m$;

j – номер столбца, в котором стоит элемент, $j=1, 2, \ldots, n$;

$m\times n$ – размер (размерность) матрицы.

Квадратная матрица ($A_{n\times n}$) – матрица, у которой число строк равно числу столбцов, $n-$ порядок квадратной матрицы.

Диагональные элементы – это элементы, у которых $i=j$: $a_{11}, a_{22}, a_{33}\ldots$.

Диагональная матрица – это квадратная матрица, все элементы которой, кроме диагональных, равны нулю:

$$A_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \ \ldots \ 0 \\ 0 & a_{22} \ldots 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 \ \ldots \ a_{nn} \end{pmatrix}$$

Единичная матрица (E) – диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны единицы:

$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица второго порядка;

$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица третьего порядка.

Транспонированием матрицы называется перемена местами соответствующих строк и столбцов матрицы, новая матрица обозначается A^T *или* A'. Если $A_{m\times n}=(a_{ij})$, *то* $A^T=(a_{ji})$.

2. Действия над матрицами.

1. *Умножение матрицы на число.* Чтобы умножить матрицу на число, следует каждый ее элемент умножить на это число:
$$B=\lambda\cdot A \quad\Leftrightarrow\quad b_{ij}=\lambda\cdot a_{ij},\ i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n.$$
2. *Сложение матриц одинакового размера*. При сложении матриц следует сложить их соответствующие элементы:
$$C=A+B \quad\Leftrightarrow\quad c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\ i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n.$$
3. *Вычитание матриц одинакового размера*. При вычитании из матрицы *A* матрицы *B* следует из элементов матрицы *A* вычесть соответствующие элементы матрицы *B*:
$$C=A-B \quad\Leftrightarrow\quad c_{ij}=a_{ij}-b_{ij},\ i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n.$$
4. *Произведение матриц.* Матрицы можно умножать, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. Тогда произведением матрицы $A_{m\times k}$ на матрицу $B_{k\times n}$ называется такая матрица $C_{m\times n}$, каждый элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов $i-$й строки матрицы A на соответствующие элементы $j-$го столбца матрицы B:
$$C=A\cdot B \quad\Leftrightarrow\quad c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{ik}\cdot b_{kj},\ i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n.$$

3. Определители второго и третьего порядка.

Определитель (детерминант) n - го порядка – это числовая характеристика матрицы. Для матрицы A определитель обозначается $|A|$, $\det A$, ΔA или Δ_A.

1. $|A|=|a_{11}|=a_{11}$ – определитель первого порядка;
2. $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$ – определитель второго порядка;
3. $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$ – определитель третьего порядка.

4. Миноры, алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя $n-$го порядка называется определитель $(n-1)$–го порядка, полученный из данного вычеркиванием $i-й$ строки и $j-го$ столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется число $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$.

Теорема Лапласа: Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на соответствующие алгебраические дополнения.

Свойства определителей:

1. При транспонировании матрицы значение определителя не меняется.
2. Если в определителе поменять местами какие-либо две строки (или столбца), то определитель изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.
3. При умножении столбца (или строки) определителя на некоторое число определитель умножается на это число.
4. Если определитель содержит нулевой столбец или нулевую строку, то он равен нулю.
5. Определитель не изменится, если к элементам одной из его строк (столбца) прибавить (вычесть) элементы другой строки (столбца), умноженные на какое-либо число, не равное нулю.

6. Определитель равен нулю, если он содержит одинаковые (пропорциональные) строки (столбцы).

1. 2 Лекция № 2 (2 часа).

Тема: «Системы линейных уравнений»

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Основные понятия.
2. Методы решения СЛУ.
3. Теорема Кронекера – Капелли.

1.2.2 Краткое содержание вопросов:

1. Основные понятия.

Система вида $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ называется *системой из m уравнений с n неизвестными*.

В матричной форме система имеет вид: $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \; ... \; a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \; ... \; a_{2n} \\ \dots & \dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} \; ... \; a_{mn} \end{pmatrix}$$ – основная матрица системы уравнений,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец неизвестных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – матрица-столбец свободных членов,

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$ – расширенная матрица системы уравнений.

Общим решением системы является набор из n чисел, которые при подстановке в систему превращают каждое ее уравнение в тождество.

Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется *совместной*. Если система не имеет ни одного решения, то она называется *несовместной*.

Система называется *определенной*, если она имеет только одно решение и *неопределенной*, если более одного.

2. Методы решения СЛУ.

Система из m уравнений с n неизвестными решается *методом Гаусса*:

1. «Прямой ход»: составить расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований привести ее к ступенчатому виду, то есть под главной диагональю матрицы получить нулевые элементы.
2. «Обратный ход»: по полученной матрице ступенчатого вида выписать новую систему и найти значения неизвестных, начиная с последних.

Систему *n уравнений с n неизвестными* $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$, имеющую единственное решение (т.е. $\Delta = |A| \neq 0$), кроме метода Гаусса, можно также решить:

а) *методом обратной матрицы* по формуле:

$X = A^{-1} \cdot B$, где A^{-1} - обратная матрица для матрицы A;

б) *по формулам Крамера*:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1, 2, ..., n,$$

где Δ_j - определитель, получаемый из главного определителя Δ заменой $j-$го столбца на столбец свободных членов.

3. Теорема Кронекера – Капелли.

Элементарные преобразования матриц:

1. Строки (столбцы) матрицы можно менять местами;
2. Строку (столбец) матрицы можно умножать на действительное число, отличное от нуля.
3. К элементам одной из строк (столбца) матрицы можно прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на какое-либо число.

Рангом матрицы называется наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля.

Свойства ранга матрицы:

1. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.
2. Если вычеркнуть из матрицы нулевую строку (нулевой столбец), то ранг матрицы не изменится.
3. Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях матрицы.
4. Если матрица A - квадратная матрица порядка n, то

$$r(A) = n \quad \Leftrightarrow \quad |A| \neq 0$$

С помощью элементарных преобразований матрицу можно привести к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1r} & ... & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2r} & ... & a_{2k} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & a_{rr} & ... & a_{rk} \end{pmatrix},$$

где $a_{ii} \neq 0, i = 1, ..., r; r \leq k$.

Ранг матрицы ступенчатого вида равен числу ненулевых строк r.

Теорема Кронекера – Капелли: система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы.

Следствие 1. Если ранг основной матрицы не равен рангу расширенной матрицы, то система решений не имеет.

Следствие 2. Совместная система имеет *единственное решение*, если ранг матрицы равен числу неизвестных.

Следствие 3. Совместная система имеет *бесчисленное множество решений*, если ранг матрицы меньше числа неизвестных.

1. 3 Лекция № 3 (2 часа).

Тема: «Векторы. Базис»

1.3.1 Вопросы лекции:

1. Виды векторов.
2. Линейные операции над векторами.
3. ПДСК. Базис. Координаты вектора.

1.3.2 Краткое содержание вопросов:

1. Виды векторов.

Векторная величина (вектор) – это величина, которая характеризуется численным значением и направлением. Геометрическим изображением векторных величин служат направленные отрезки, т.е. отрезки, для которых определены начало и конец. При этом длина отрезка равна численному значению векторной величины, а его направление совпадает с направлением векторной величины.

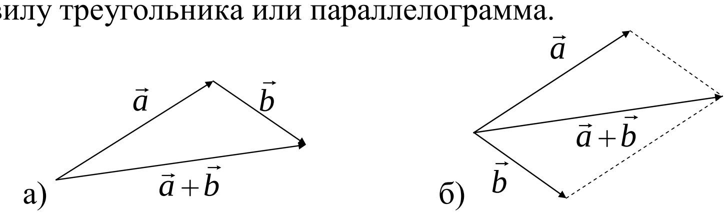
Векторы, лежащие на одной прямой или параллельных прямых, называются *коллинеарными.*

Векторы, лежащие в одной плоскости или в параллельных плоскостях, называются *компланарными.*

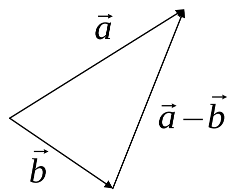
2. Линейные операции над векторами.

Действия над векторами в геометрической форме:

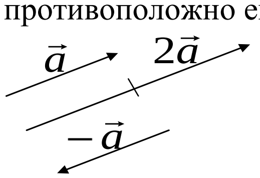
1. *Сложение векторов.* Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, определяемый по правилу треугольника или параллелограмма.



2. *Вычитание векторов.* Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$



3. *Умножение вектора на число.* Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, имеющий длину $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно ему, если $\lambda < 0$.



Действия сложения, вычитания векторов, а также умножение вектора на число называется линейными операциями.

Свойства линейных операций над векторами:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$; 2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$;

3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$; 4) $\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$;

5) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a})$; 6) $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$;

7) $\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$; 8) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

3. ПДСК. Базис. Координаты вектора.

Три взаимно перпендикулярные оси Ox, Oy и Oz в пространстве с общим началом O образуют прямоугольную декартову систему координат в пространстве. Плоскости, проходящие через пары координатных осей, называются *координатными.* Координатные плоскости делят все пространство на восемь частей, называемых октантами. Каждому октанту соответствует определенная комбинация знаков координат:

Координаты	Октанты							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	–	–	+	+	–	–	+
y	+	+	–	–	+	+	–	–
z	+	+	+	+	–	–	–	–

Ортом координатной оси называется единичный вектор, направление которого совпадает с положительным направлением оси.

Орты осей Ox, Oy и Oz обозначают соответственно $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Эти вектора образуют *ортонормированный (прямоугольный декартовый) базис*.

Произвольный вектор $\vec{a}$ может быть представлен в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ следующим равенством: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, где a_x, a_y, a_z – координаты вектора $\vec{a}$.

Координатами вектора $\vec{a}$ называются его проекции на соответствующие оси координат и обозначаются: $Пр_{ox}\vec{a} = a_x$; $Пр_{oy}\vec{a} = a_y$; $Пр_{oz}\vec{a} = a_z$

Длина (модуль) вектора находится по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}}$$

Направление вектора $\vec{a}$ определяется углами α, β и γ, образованными им с осями координат Ox, Oy, Oz. Косинусы этих углов вычисляются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \ \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Направляющие косинусы связаны соотношением:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Действия над векторами в координатной форме:

Заданы два вектора своими координатами: $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b}(b_x; b_y; b_z)$

1. *Сложение векторов.* Для того чтобы сложить два вектора нужно сложить соответствующие координаты этих векторов:

$$\vec{a} + \vec{b}(a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z).$$

2. *Вычитание векторов.* Чтобы из вектора $\vec{a}$ вычесть вектор $\vec{b}$, необходимо из координат вектора $\vec{a}$ вычесть соответствующие координаты вектора $\vec{b}$:

$$\vec{a} - \vec{b}(a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z).$$

3. *Умножение вектора на число.* Чтобы умножить вектор на число, необходимо каждую координату этого вектора умножить на данное число:

$$\lambda\vec{a}(\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)$$

Условие коллинеарности векторов $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$: координаты коллинеарных векторов пропорциональны, т.е. $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$

Если даны точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то координаты вектора $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ находятся по формулам: $a_x = x_2 - x_1$, $a_y = y_2 - y_1$, $a_z = z_2 - z_1$.

1. 4 Лекция № 4 (2 часа).

Тема: «Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов»

1.4.1 Вопросы лекции:

1. Скалярное произведение векторов, его свойства, приложения.
2. Векторное произведение векторов, его свойства, приложения.
3. Смешанное произведение векторов, его свойства, приложения.

1.4.2 Краткое содержание вопросов:

1. Скалярное произведение векторов, его свойства, приложения.

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними, т.е.:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right).$$

Для векторов $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$ и $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$ скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$ выражается формулой:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.
2) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+a\cdot\vec{c}$.
3) $(m\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(m\vec{b})=m(\vec{a}\cdot\vec{b})$, $m=const$.
4) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ - скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.
5) $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ или $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$ – условие перпендикулярности (ортогональности) ненулевых векторов.
6) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot Пр_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cdot Пр_{\vec{b}}\vec{a}$ – связь проекции вектора и скалярного произведения.

Приложения скалярного произведения:

а) Нахождение угла между векторами:

$$\cos\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

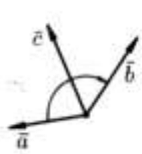
б) Работа постоянной силы при прямолинейном перемещении ее точки приложения равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения: $A=\vec{F}\cdot\vec{s}$.

в) Нахождение проекции вектора $\vec{a}$ на направление, заданное вектором $\vec{b}$, осуществляется по формуле: $Пр_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$

2. Векторное произведение векторов, его свойства, приложения.

Три некомпланарных вектора $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, взятые в указанном порядке, образуют *правую тройку*, если с конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки и *левую,* если по часовой.

правая тройка,



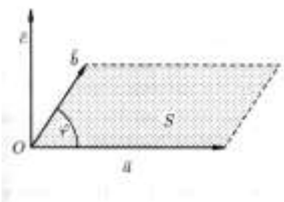
левая тройка

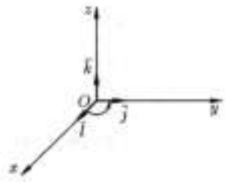
Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется новый вектор $\vec{c}$, для которого выполнены следующие условия:

1) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;

2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right)$;

3) Вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку (векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ориентированы в пространстве также как базисные вектора $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).





$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$ – формула для вычисления векторного произведения векторов $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$.

Свойства векторного произведения:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.
2) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + a \times \vec{c}$.
3) $(m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b}) = m(\vec{a} \times \vec{b})$, $m = const$.
4) $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ – условие коллинеарности ненулевых векторов.

Приложения векторного произведения:

а) Вычисление площади параллелограмма и треугольника:

$$S_{параллелограмма} = |\vec{a} \times \vec{b}|; \quad S_{треугольника} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|.$$

б) Нахождение момента силы относительно точки O:

$\vec{M} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F}$, где точка A – точка приложения силы $\vec{F}$.

3. Смешанное произведение векторов, его свойства, приложения.

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ обозначается $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Формула для вычисления смешанного произведения векторов $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ и $\vec{c}(x_3; y_3; z_3)$ имеет вид:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Свойства векторного произведения:

1) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$.

2) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

3) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}-\textit{компланарны} \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$ – условие компланарности векторов.

Приложения смешанного произведения:

а) Вычисление объема параллелепипеда или пирамиды:

$$V_{паралл-да}=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|;\quad V_{пирамиды}=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|.$$

б) Ориентация векторов в пространстве:

если $\vec{a}\vec{b}\vec{c}>0$, то вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку;

если $\vec{a}\vec{b}\vec{c}<0$, то вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют левую тройку.

1. 5 Лекция № 5 (2 часа).

Тема: «Прямая линия на плоскости»

1.5.1 Вопросы лекции:

1. Способы задания прямой.
2. Взаимное расположение двух прямых.

1.5.2 Краткое содержание вопросов:

1. Способы задания прямой.

1. $y=kx+b$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом k, $k=tg\alpha$;

2. $y-y_0=k(x-x_0)$ – уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;\,y_0)$ с угловым коэффициентом k;

3. $\dfrac{x-x_0}{\alpha}=\dfrac{y-y_0}{\beta}$ – каноническое уравнение прямой, $M_0(x_0;\,y_0)$ – начальная точка, $\vec{p}(\alpha,\beta)$ – направляющий вектор, т.е. вектор, лежащий на данной прямой или на параллельной ей прямой;

4. $\begin{cases} x=\alpha t+x_0 \\ y=\beta t+y_0 \end{cases}$ – параметрическое уравнение прямой, $M_0(x_0;\,y_0)$ – начальная точка, $\vec{p}(\alpha,\beta)$ – направляющий вектор;

5. $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$ – уравнение прямой, проходящей через две точки $A(x_1;\,y_1)$ и $B(x_2;\,y_2)$, $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ – угловой коэффициент прямой;

6. $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ – уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;\,y_0)$ с нормальным вектором $\vec{n}(A;\,B)$.

Нормальным вектором называется вектор, перпендикулярный данной прямой;

7. $Ax+By+C=0$ – общее (основное) уравнение прямой, $k=-\dfrac{A}{B}$.

2. Взаимное расположение двух прямых.

а) Условие параллельности прямых: $k_1=k_2$ или $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$.

б) Условие перпендикулярности прямых: $k_1\cdot k_2=-1$ или $A_1A_2+B_1B_2=0$.

в) Угол φ между двумя прямыми: $tg\varphi=\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right|$ или $\cos\varphi=\dfrac{\left|A_1A_2+B_1B_2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$.

Точка пересечения двух прямых находится из решения системы:

$$\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

Расстояние ρ от точки $M_0(x_0;\, y_0)$ до прямой $l: Ax + By + C = 0$ находится следующим образом: $\rho(M_0;\, l) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

1. 6 Лекция № 6 (2 часа).

Тема: «Кривые второго порядка»

1.6.1 Вопросы лекции:

1. Окружность.
2. Эллипс.
3. Гипербола.
4. Парабола.

1.6.2 Краткое содержание вопросов:

1. Окружность.

Линией (кривой) второго порядка называется множество точек плоскости, декартовы координаты x, y которых удовлетворяют уравнению

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

где A, B, C, D, E, F – постоянные действительные числа, причем A, B, C одновременно не равны нулю.

Окружность: $x^2 + y^2 = R^2$ или $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, где $(x_0; y_0)$ – координаты центра окружности, R – радиус окружности.

2. Эллипс.

Эллипс: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ или $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$;

где $(x_0; y_0)$ – координаты центра эллипса,

a – большая полуось, b – малая полуось,

$2c$ – расстояние между фокусами, причем $a^2 - c^2 = b^2$;

$\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ – эксцентриситет эллипса ($\varepsilon < 1$);

$F_1(-c;\, 0)$ и $F_2(c;\, 0)$ – фокусы эллипса.

3. Гипербола.

Гипербола: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ или $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$;

где $(x_0; y_0)$ – координаты центра гиперболы,

a – действительная полуось, b – мнимая полуось,

$2c$ – расстояние между фокусами, причем $c^2 - a^2 = b^2$;

$\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ – эксцентриситет гиперболы ($\varepsilon > 1$);

$F_1(-c;\, 0)$ и $F_2(c;\, 0)$ – фокусы гиперболы;

$y = \pm\dfrac{b}{a}x$ – уравнения асимптот гиперболы.

4. Парабола.

а) С осью симметрии Ox:

$y^2 = 2px$ – уравнение параболы; p – параметр параболы,

$F\left(\frac{p}{2};\,0\right)$ – фокус параболы; $x=-\frac{p}{2}$ – уравнение директрисы

б) С осью симметрии Oy:

$x^2=2py$ – уравнение параболы; p – параметр параболы,

$F\left(0;\,\frac{p}{2}\right)$ – фокус параболы; $y=-\frac{p}{2}$ – уравнение директрисы.

1. 7 Лекция № 7 (2 часа).

Тема: «Плоскость в пространстве»

1.7.1 Вопросы лекции:

1. Способы задания плоскости в пространстве.
2. Взаимное расположение плоскостей.

1.7.2 Краткое содержание вопросов:

1. Способы задания плоскости в пространстве.

1) $Ax+By+Cz+D=0$ – общее уравнение плоскости, $\vec{n}=\{A;B;C\}$ – нормальный вектор плоскости, т.е. вектор, перпендикулярный данной плоскости;

2) $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ – уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;\,y_0;\,z_0)$ с нормальным вектором $\vec{n}=\{A;B;C\}$;

3) $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ – уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(x_1;\,y_1;\,z_1)$, $B(x_2;\,y_2;\,z_2)$ и $C(x_3;\,y_3;\,z_3)$;

4) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ – уравнение плоскости «в отрезках», где a, b, c - отрезки, отсекаемые соответственно на осях Ox, Oy, Oz.

2. Взаимное расположение плоскостей.

1) $\cos\varphi=\cos(\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2})=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$ – угол между плоскостями;

2) $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ – условие перпендикулярности плоскостей;

3) $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$ – условие параллельности плоскостей;

4) $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$ – условие совпадения плоскостей.

Расстояние ρ от точки $M_0(x_0;\,y_0;\,z_0)$ до плоскости $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ вычисляется по формуле: $\rho(M_0;\pi)=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

1. 8 Лекция № 8 (2 часа).

Тема: «Прямая в пространстве»

1.8.1 Вопросы лекции:

1. Способы задания прямой в пространстве.
2. Взаимное расположение прямой и плоскости.
3. Понятие поверхности в пространстве.

1.8.2 Краткое содержание вопросов:

1. Способы задания прямой в пространстве.

1) $\dfrac{x-x_0}{\alpha}=\dfrac{y-y_0}{\beta}=\dfrac{z-z_0}{\gamma}$ – каноническое уравнение с $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ - начальной точкой, $\vec{p}(\alpha,\, \beta,\, \gamma)$ – направляющим вектором прямой;

2) $\begin{cases} x=\alpha t+x_0 \\ y=\beta t+y_0 \\ z=\gamma t+z_0 \end{cases}$ – параметрическое уравнение прямой;

3) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ – уравнение прямой, проходящей через две точки $A(x_1;\, y_1;\, z_1)$ и $B(x_2;\, y_2;\, z_2)$;

4) $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ – прямая как линия пересечения плоскостей, где

$\vec{p}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$ – направляющий вектор прямой.

2. Взаимное расположение прямой и плоскости.

1) $\cos\varphi=\dfrac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2}\cdot\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2}}$ – угол между прямыми;

2) $\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0$ – условие перпендикулярности прямых;

3) $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}=\dfrac{\beta_1}{\beta_2}=\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}$ – условие параллельности прямых;

4) $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}\neq 0$ – условие скрещивания прямых.

1) $\sin\varphi=\dfrac{|A\alpha+B\beta+C\gamma|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$ – угол между прямой и плоскостью;

2) $\dfrac{A}{\alpha}=\dfrac{B}{\beta}=\dfrac{C}{\gamma}$ – условие перпендикулярности прямой и плоскости;

3) $\begin{cases} A\alpha+B\beta+C\gamma=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0 \end{cases}$ – условие параллельности прямой и плоскости;

4) $\begin{cases} A\alpha+B\beta+C\gamma=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \end{cases}$ – условие принадлежности прямой плоскости.

3. Понятие поверхности в пространстве.

Канонические уравнения поверхностей

1. $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ - сфера с центром в точке $C(a;b;c)$;
2. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ – эллипсоид;
3. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ – однополостный гиперболоид;

4. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1-$ двуполостный гиперболоид;
5. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0-$ конус второго порядка;
6. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z-$ эллиптический параболоид;
7. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z-$ гиперболический параболоид;
8. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-$ эллиптический цилиндр;
9. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1-$ гиперболический цилиндр;
10. $x^2=2py-$ параболический цилиндр.

Вращением фигуры Φ вокруг данной прямой (оси вращения) называется такое движение, при котором каждая точка фигуры Φ описывает окружность с центром на оси вращения, лежащую в плоскости, перпендикулярной к оси вращения.

Поверхность, образованная вращением линии вокруг оси, называется *поверхностью вращения*.

Правило составления уравнения поверхности вращения. Чтобы получить уравнение поверхности, образованной вращением линии L, лежащей в плоскости yOz, вокруг оси Oz, нужно в уравнении этой линии $F(y;z)=0$ заменить y на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$.

Замечание. Получение уравнений поверхностей, образующихся путем вращения плоских линий, которые лежат в координатных плоскостях, вокруг других координатных осей, производится по аналогичным правилам.

1. 9 Лекция № 9 (2 часа).

Тема: «Функция»

1.9.1 Вопросы лекции:

1. Основные понятия.
2. Способы задания функции.
3. Основные свойства функции.
4. Неэлементарные функции.

1.9.2 Краткое содержание вопросов:

1. Основные понятия.

Функция – правило, по которому каждому значению переменной x соответствует *единственное* значение переменной y.

Обозначается: $y=f(x)$.

Переменная x называется *независимой переменной* или *аргументом*, а переменная y – *зависимой переменной*.

Буква f (вместо неё может быть g, h и другие буквы) означает правило, по которому, зная значение x, можно получить значение y.

2. Способы задания функции.

Способы задания функции: 1) аналитический; 2) табличный; 3) графический; 4) словесный.

Графиком функции называется множество всех точек плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям самой функции.

3. Основные свойства функции.

1) Множество значений независимой переменной x называется *областью определения функции* и обозначается $D(y), D_y, D_f$ или $D(f)$.

2) Множество значений, принимаемых зависимой переменной y, называется *областью значений функции* и обозначается $E(y), E_y, E_f$ или $E(f)$.

3) *Чётная функция* – функция $y = f(x)$, обладающая следующими свойствами:

1) её область определения симметрична относительно нуля;
2) для любого значения $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

График любой чётной функции симметричен относительно оси ординат.

Нечётная функция – функция $y = f(x)$, обладающая следующими свойствами:

1) её область определения симметрична относительно нуля;
2) для любого значения $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

График любой нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Функцию, не являющуюся ни четной, ни нечетной называют *функцией общего вида.*

4) Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на промежутке X, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции; т.е. для любых значений аргумента x_1 и x_2 из промежутка X, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на промежутке X, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции; т.е. для любых значений аргумента x_1 и x_2 из промежутка X, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

5) *Точка экстремума* – точка минимума или максимума функции.

Точка x_0 называется *точкой максимума функции* $y = f(x)$, если найдётся такая окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности выполняется $f(x_0) \geq f(x)$, т.е. $f(x_0)$ наибольшее значение функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0.

Точка x_0 называется *точкой минимума функции* $y = f(x)$, если найдётся такая окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности выполняется $f(x_0) \leq f(x)$, т.е. $f(x_0)$ наименьшее значение функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0.

6) Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$, что:

1) для любого x из области определения функции числа $(x+T)$ и $(x-T)$ также принадлежат области определения;
2) выполняется равенство: $f(x) = f(x+T) = f(x-T)$.

Наименьшее положительное число T называется основным периодом функции. Если $T-$основной период функции $y = f(x)$, то $\frac{T}{|k|}-$основной период функции $y = a \cdot f(kx+b)$.

7) *Нули функции* – значения аргумента, при которых значения функции равны нулю.

8) Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* на промежутке X, если существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| < M$, для всех $x \in X$. В противном случае, функция называется *неограниченной.*

4. Неэлементарные функции.

Основные элементарные функции, применяемые в математике:

1) степенная $y = x^{\alpha}, \alpha \in R$;
2) показательная $y = a^{x}, a \neq 1, a > 0, a = const$;
3) логарифмическая $y = \log_a x, \quad a \neq 1, a > 0, a = const$;
4) тригонометрические: $y = \sin x, y = \cos x, y = tgx, y = ctgx$;
5) обратные тригонометрические: $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = arctgx, y = arcctgx$.

К элементарным относят все функции, которые можно составить из основных элементарных функций с помощью алгебраических действий ($+, -, \cdot, \div$ с применением любых коэффициентов) и операций взятия функции от функции (сложная функция), применённых конечное число раз.

К неэлементарным функциям относят: $y = |x|$ и кусочно-аналитическую функцию, задаваемую различными аналитическими выражениями на разных областях определения.

1. 10 Лекция № 10 (2 часа).

Тема: «Предел последовательности и предел функции»

1.10.1 Вопросы лекции:

1. Понятие последовательности.
2. Предел числовой последовательности.
3. Предел функции в точке.

1.10.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие последовательности.

Числовой последовательностью называется функция натурального аргумента: $a_n = f(n)$.

Последовательность a_n называется *ограниченной*, если существует такое число $M > 0$, что для любого $n \in N$ выполняется неравенство $|a_n| < M$. В противном случае, последовательность называется *неограниченной.*

Последовательность a_n называется *возрастающей* (*убывающей*), если для любого n выполняется неравенство $a_{n+1} > a_n$ ($a_{n+1} < a_n$). Возрастающая или убывающая последовательность называется *монотонной.*

2. Предел числовой последовательности.

Число A называется *пределом числовой последовательности* a_n, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, зависящий от ε, что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ верно неравенство: $|a_n - A| < \varepsilon$.

Обозначается: $\lim a_n = A$.

Последовательность, имеющая конечный предел, называется *сходящейся*. Последовательность, не имеющая предела или имеющая бесконечный предел, называется *расходящейся*.

3. Предел функции в точке.

Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \to a$, если для любой последовательности допустимых значений аргумента x_n ($x_n \neq a$), сходящейся к a, последовательность соответствующих значений функции сходится к числу A: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Теоремы о пределах

Если пределы $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ существуют, то справедливы следующие теоремы:

1. Предел постоянной равен самой постоянной:

$$\lim_{x \to a} C = C, \; C - const.$$

2. Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) пределов этих функций:

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) \pm g(x) \right] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

3. Предел произведения двух функций равен произведению пределов этих функций:

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x).$$

4. Постоянный сомножитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x \to a} \left[C \cdot f(x) \right] = C \cdot \lim_{x \to a} f(x).$$

5. Предел отношения двух функций равен отношению пределов этих функций при условии, что предел знаменателя отличен от нуля:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}, \; \lim_{x \to a} g(x) \neq 0.$$

6. Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела:

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) \right]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x) \right]^n$$

Замечание: формулировки теорем 1 – 6 для случая, когда $x \to \infty$, аналогичны.

1. 11 Лекция № 11 (2 часа).

Тема: «Правила раскрытия неопределенностей»

1.11.1 Вопросы лекции:

1. Бесконечно малые функции, их свойства.
2. Бесконечно большие функции, их свойства.
3. Замечательные пределы.

1.11.2 Краткое содержание вопросов:

1. Бесконечно малые функции, их свойства.

Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$ ($x \to \infty$), если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ ($\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$).

Замечание: произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть функция бесконечно малая.

Сравнение порядков бесконечно малых

Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$ и $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k$, то

1) при $k = 0$ функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой более высокого порядка*, чем функция $\beta(x)$.

2) при $0 < k < \infty$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ *одного порядка малости*; в частности, при $k = 1$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными*.

3) при $k = \infty$ функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой более низкого порядка*, чем функция $\beta(x)$.

Таблица эквивалентных бесконечно малых (при $x \to 0$)

1) $\sin x \sim x$	4) $arctgx \sim x$	7) $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$
2) $tgx \sim x$	5) $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$	8) $\ln(1+x) \sim x$
3) $\arcsin x \sim x$	6) $e^x - 1 \sim x$	9) $(1+x)^k - 1 \sim k \cdot x, \; k > 0$

2. Бесконечно большие функции, их свойства.

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$ ($x \to \infty$), если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ ($\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$).

3. Замечательные пределы.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ – первый замечательный предел;

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ – второй замечательный предел;

$\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ – второй замечательный предел.

Правила раскрытия неопределенностей

$\left(\frac{0}{0}\right)$	$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$	$(\infty - \infty)$	$(0 \cdot \infty)$	(1^∞)
1. Разложение числителя и знаменателя на множители и сокращение дроби 2. Домножение числителя и знаменателя на сопряженное выражение радикалу 3. Применение таблицы эквивалентных бесконечно малых	Деление на степень с наибольшим показателем	Домножение числителя и знаменателя на сопряженное выражение	Приведение к неопределен-ности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$	Применение второго замечательно го предела и свойств степеней

1. 12 Лекция № 12 (2 часа).

Тема: «Непрерывность функции»

1.12.1 Вопросы лекции:

1. Односторонние пределы.
2. Непрерывность функции в точке.
3. Точки разрыва.
4. Асимптоты графика функции.

1.12.2 Краткое содержание вопросов:

1. Односторонние пределы.

Если $f(x) \to A_1$ при $x \to x_0$ и $x < x_0$, то число A_1 – называется *левосторонним пределом* функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$.

Если $f(x) \to A_2$ при $x \to x_0$ и $x > x_0$, то число A_2 – называется правосторонним пределом функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$.

Пределы A_1 и A_2 называются также *односторонними пределами* функции $f(x)$ в точке x_0.

2. Непрерывность функции в точке.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она имеет односторонние пределы, равные между собой и равные в свою очередь значению функции в точке x_0.

Пусть переменная величина x в некоторый начальный момент равна x_0, в другой (конечный) момент равна x_1; тогда разность $\Delta x = x_1 - x_0$ называется *приращением переменной* x.

Пусть исходное (начальное) значение функции равно $y_0 = f(x_0)$, а новое (конечное) значение функции равно $y_1 = f(x_1) = f(x_0 + \Delta x)$; тогда разность $\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется *приращением функции* $y = f(x)$ в точке x_0.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции; т.е. существует $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$.

Функция $y = f(x)$, непрерывная в каждой точке заданного интервала, называется *непрерывной на всём интервале*.

Замечание. Все элементарные функции непрерывны на своих областях определения.

3. Точки разрыва.

Точка, в которой не выполняется условие непрерывности функции, называется *точкой разрыва* этой функции.

Точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва* функции $y = f(x)$, если функция имеет конечный предел при $x \to x_0$, не равный значению функции в этой точке.

Точка x_0 называется *точкой разрыва 1-го рода* функции $y = f(x)$, если функция имеет конечные односторонние пределы, не равные между собой: существуют $\lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x) = A_1$ и $\lim\limits_{x\to x_0 + 0} f(x) = A_2$, но $A_1 \neq A_2$.

Замечание. $|A_1 - A_2|$ – называется *скачком функции* в точке x_0.

Если хотя бы один из односторонних пределов функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен бесконечности или вообще не существует, то x_0 – *точка разрыва второго рода* этой функции.

4. Асимптоты графика функции.

Асимптотой кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой.

Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если существуют два конечных предела функции $y = f(x)$: 1) $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; 2) $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - k\cdot x \right]$.

Замечание. Если $k = 0$, то $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ и прямая $y = b$ называется *горизонтальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$.

1. 13 Лекция № 13 (2 часа).

Тема: «Производная»

1.13.1 Вопросы лекции:

1. Понятие производной.
2. Геометрический и механический смыслы производной.
3. Правила и формулы дифференцирования.

1.13.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие производной.

Производной функции $y=f(x)$ *в точке* x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Операция нахождения производной функции называется *дифференцированием.*

Если функция $y=f(x)$ имеет производную в точке x, то говорят, что функция *дифференцируема* в этой точке.

Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в каждой точке некоторого интервала, то говорят, что она *дифференцируема* на этом интервале.

2. Геометрический и механический смыслы производной.

Геометрический смысл производной: производная функции, вычисленная в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции $y=f(x)$ в точке x_0, т.е.

$$f'(x_0)=k_{кас}=tg\varphi.$$

Уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$ имеет вид:

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Нормалью к кривой называется прямая, перпендикулярная касательной и проходящая через точку касания.

$$y=f(x_0)-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$ - уравнение нормали;

Механический смысл производной первого порядка: если функция $s=s(t)$ описывает закон прямолинейного движения материальной точки, то ее производная $s'(t)$ есть скорость $v(t)$ в момент времени t:

$$v(t)=s'(t)$$

Механический смысл производной второго порядка: если функция $s=s(t)$ описывает закон прямолинейного движения материальной точки, то производная второго порядка $s''(t)$ есть ускорение $a(t)$ этой точки в момент времени t:

$$a(t)=v'(t)=s''(t).$$

Физический смысл производной: если функция $y=f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то производная y' есть скорость протекания этого процесса.

3. Правила и формулы дифференцирования.

Правила дифференцирования

Пусть функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$– две дифференцируемые в некотором интервале функции.

1) $C'=0$; 2) $x'_x=1$;

3) $(u\pm v)'=u'\pm v'$; 4) $(u\cdot v)'=u'v+u\cdot v'$;

5) $(C\cdot u)'=C\cdot u'$; 6) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

7. Если функция $u=g(x)$ имеет производную $g'(x)$, а функция $y=f(u)$ имеет производную $f'(u)$, то сложная функция $y=f(g(x))$ имеет производную, которая находится по правилу: $(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$.

Формулы дифференцирования

1. $(u^n)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$, в частности $(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$;
2. $(a^u)'=a^u\cdot u'\cdot\ln a$; 3. $(e^u)'=e^u\cdot u'$;
4. $(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u\cdot\ln a}$; 5. $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$;
6. $(\sin u)'=u'\cdot\cos u$; 7. $(\cos u)'=-u'\cdot\sin u$;
8. $(tgu)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$; 9. $(ctgu)'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$;
10. $(\arcsin u)'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; 11. $(\arccos u)'=-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;
12. $(arctgu)'=\dfrac{u'}{1+u^2}$; 13. $(arcctgu)'=-\dfrac{u'}{1+u^2}$.

1. 14 Лекция № 14 (2 часа).

Тема: «Производные высших порядков. Дифференциал»

1.14.1 Вопросы лекции:

1. Производные высших порядков.
2. Понятие дифференциала.
2. Геометрический смысл дифференциала.
3. Приложение дифференциала к приближенным вычислениям.

1.14.2 Краткое содержание вопросов:

1. Производные высших порядков.

Производной второго порядка функции $y=f(x)$ называется производная от ее производной, т.е. $y''=(y')'$.

Производной третьего порядка данной функции называется производная от ее второй производной.

Производной n-го порядка или n-ой производной от функции $y=f(x)$ называется производная от ее $(n-1)$-ой производной.

Замечание. Производную n-го порядка обозначают $y^{(n)}$ или $f^{(n)}(x)$.

2. Понятие дифференциала.

Дифференциалом функции $y=f(x)$ в точке x называется главная часть ее приращения, равная произведению производной функции на приращение аргумента:

$$dy=y'\cdot\Delta x.$$

Дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной:

$$dx=\Delta x.$$

Замечание. Так как $dx=\Delta x$, то определение дифференциала функции можно переписать так:

$$dy=y'\cdot dx$$

Дифференциалом функции $y=f(x)$ в точке x называется произведение производной функции на дифференциал аргумента.

Замечание. Чтобы найти дифференциал функции нужно найти производную этой функции и умножить ее на величину dx.

3. Геометрический смысл дифференциала.

Геометрический смысл дифференциала функции: дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда аргумент получил приращение Δx.

4. Приложение дифференциала к приближенным вычислениям.

Для вычислений приближенных значений функций при малых приращениях аргумента используется формула:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x .$$

Пусть a – приближенное число, заменяющее собой точное значение A.

Абсолютной погрешностью приближенного числа a называется абсолютная величина разности между ним и соответствующим точным числом: $|a - A|$.

Относительной погрешностью приближенного числа a называется отношение абсолютной погрешности этого числа к соответствующему точному числу, выражаемое в процентах: $\varepsilon = \dfrac{|a - A|}{A} \cdot 100\%$.

1. 15 Лекция № 15 (2 часа).

Тема: «Приложения производной»

1.15.1 Вопросы лекции:

1. Правило Лопиталя.
2. Исследование на монотонность функции, точки экстремума.
3. Нахождение наименьшего и наибольшего значений функции на отрезке.

1.15.2 Краткое содержание вопросов:

1. Правило Лопиталя.

Правило Лопиталя раскрытия неопределенности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$*:*

Если:

1) функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ дифференцируемы в окрестности точки x_0,

2) функции в этой точке обращаются в нуль: $f_1(x_0) = f_2(x_0) = 0$,

3) $f_2'(x) \neq 0$ в окрестности этой точки;

4) существует предел отношения производных функций при $x \to x_0$, тогда $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$.

Правило Лопиталя раскрытия неопределенности вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$*:*

Если:

1) функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ дифференцируемы в окрестности точки x_0,

2) функции в окрестности точки x_0: $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = \infty$,

3) $f_2'(x) \neq 0$ в окрестности этой точки;

4) существует предел отношения производных функций при $x \to x_0$, тогда $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$.

Замечание. Неопределенности вида $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$, (1^{∞}) сводятся к неопределенностям вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ путем алгебраических преобразований.

2. Исследование на монотонность функции, точки экстремума.

Возрастающая и убывающая функции называются *монотонными*.

Признак монотонности функции. Функция $y=f(x)$, дифференцируемая на $(a;b)$, возрастает (убывает) на $(a;b)$ тогда и только тогда, когда $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$) для любого x из $(a;b)$.

Необходимое условие экстремума. Если функции $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум и дифференцируема в этой точке, то первая производная $f'(x_0)$ обращается в нулю или не существует.

Таким образом, экстремум может наблюдаться в точках, в которых $f'(x)=0$ или не существует; такие точки называются критическими.

Достаточное условие экстремума. Если непрерывная функция $y=f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности критической точки x_0 и при переходе через нее (слева направо) производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 – точка максимума; с минуса на плюс, то x_0 – точка минимума.

3. Нахождение наименьшего и наибольшего значений функции на отрезке.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$, на котором она непрерывна, необходимо:

1) найти критические точки, принадлежащие интервалу $(a;b)$, и вычислить значения функции в этих точках;

2) вычислить значения функции в граничных точках отрезка, т.е. $f(a)$ и $f(b)$;

3) из всех полученных значений выбрать наименьшее и наибольшее.

1. 16 Лекция № 16 (2 часа).

Тема: «Приложения производной (продолжение)»

1.16.1 Вопросы лекции:

1. Исследование на вогнутость и выпуклость функции, точки перегиба.
2. Общий план исследования функции и построения графика

1.16.2 Краткое содержание вопросов:

1. Исследование на вогнутость и выпуклость функции, точки перегиба.

Кривая $y=f(x)$ называется *выпуклой* на промежутке $(a;b)$, если при $a<x<b$ дуга кривой расположена ниже касательной, проведенной в любой точке этого промежутка.

Кривая $y=f(x)$ называется *вогнутой* на промежутке $(a;b)$, если при $a<x<b$ дуга кривой расположена выше касательной, проведенной в любой точке этого промежутка.

Точки, отделяющие выпуклую часть непрерывной кривой от вогнутой (или наоборот), называются *точками перегиба* кривой.

Необходимое условие точек перегиба: Если функции $f(x)$ имеет в точке $P(x_0;f(x_0))$ точку перегиба и дифференцируема в этой точке, то вторая производная $f''(x)$ равна нулю. Таким образом, точки перегиба могут наблюдаться в точках, в которых $f''(x)=0$ или не существует.

Достаточный признак выпуклости и вогнутости кривой: если во всех точках промежутка $(a;b)$ вторая производная $f''(x)$ положительна, то на этом промежутке график функции $y=f(x)$ является вогнутым; если во всех точках промежутка $(a;b)$

вторая производная $f''(x)$ отрицательна, то на этом промежутке график функции $y = f(x)$ является выпуклым.

Достаточный признак существования точки перегиба: если для функции $y = f(x)$ вторая производная $f''(x)$ при $x = x_0$ равна нулю или не существует и при переходе через точку x_0 меняет свой знак, то точка $P(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции.

2. Общий план исследования функции и построения графика

I. Элементарное исследование:

1) найти область определения функции;
2) исследовать функцию на четность (нечетность);
3) исследовать функцию на периодичность;
4) определить, если это не вызывает особых затруднений, точки пересечения графика с координатными осями.

II. Исследование графика функции по первой производной:

1) найти $f'(x)$;
2) используя необходимый признак существования экстремума найти точки, «подозрительные» на экстремум, т.е. точки в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует;
3) нанести критические точки на область определения и найти знак производной во всех получившихся интервалах;
4) используя признаки монотонности определить характер монотонности функции на каждом интервале;
5) используя достаточный признак существования экстремума установить наличие экстремума и их характер;
6) вычислить значение функции в точках экстремума, если они есть.

III. Исследование графика функции по второй производной:

1) найти $f''(x)$;
2) используя необходимый признак существования точек перегиба, найти точки «подозрительные» на перегиб, т.е. точки в которых $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует;
3) нанести полученные точки на область определения и найти знак второй производной в каждом из получившихся интервалов;
4) используя достаточный признак выпуклости и вогнутости кривой установить характер выпуклости (вогнутости) графика функции на каждом промежутке;
5) используя достаточный признак существования точек перегиба установить их наличие;
6) вычислить значения функции в абсциссах точек перегиба.

IV. Исследование кривой $y = f(x)$ на наличие асимптот.

V. Исследование поведения функции на границе ее области определения.

VI.Построение графика функции и определение области ее значений.

1. 17 Лекция № 17 (2 часа).

Тема: «Кривизна кривой»

1.17.1 Вопросы лекции:

1. Длина дуги кривой.
2. Угол смежности и кривизна.
3. Радиус и круг кривизны.
4. Эволюта и эвольвента.

1.17.2 Краткое содержание вопросов:

1. Длина дуги кривой.

Длиной дуги кривой называется предел, к которому стремится длина ломанной при стремлении к нулю наибольшей из длин отрезков ломанной (если этот предел существует и не зависит от выбора точек ломанной).

Дифференциал длины дуги вычисляется по формуле: $ds = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$.

2. Угол смежности и кривизна.

Углом смежности $\Delta\alpha$ *дуги кривой* M_0M называется угол поворота касательной при переходе от точки M_0 к точке M.

Кривизной K *кривой* в данной ее точке $M_0(x_0; y_0)$ называется предел отношения модуля угла смежности $\Delta\alpha$ к длине дуги кривой Δs, когда $\Delta s \to 0$:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta\alpha|}{\Delta s}.$$

Для вычисления кривизны применяются следующие формулы:

$K = \dfrac{|y''_{M_0}|}{\left(1 + (y'_{M_0})^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, если линия задана уравнением $y = f(x)$;

$K = \dfrac{|x'_t \cdot y''_t - x''_t \cdot y'_t|}{\left((x'_t)^2 + (y'_t)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, если линия задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$.

Число $R = \dfrac{1}{K}$ называется *радиусом кривизны кривой* в точке M_0.

3. Радиус и круг кривизны.

Координаты центра кривизны $C(\alpha; \beta)$ данной кривой в точке M_0 определяются по формулам:

$$\begin{cases} \alpha = x_0 - \dfrac{y'_{M_0} \cdot \left(1 + (y'_{M_0})^2\right)}{y''_{M_0}} \\ \beta = y_0 + \dfrac{1 + (y'_{M_0})^2}{y''_{M_0}} \end{cases}$$

Уравнение окружности $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ называется *кругом (окружностью) кривизны кривой линии* в данной точке M_0.

4. Эволюта и эвольвента.

Совокупность всех центров кривизны кривой линии образуют новую линию, которая называется *эволютой* по отношению к данной кривой. По отношению к эволюте исходная кривая называется *эвольвентой*.

Приведенные выше уравнения, определяющие координаты центров кривизны кривой определяют уравнение эволюты.

Свойства эволюты.

1. Нормаль к данной кривой является касательной к ее эволюте.

2: Модуль разности радиусов кривизны в любых точках кривой равен модулю длины соответствующей эволюты.

2 семестр

1. 18 Лекция № 18 (2 часа).

Тема: «Основные понятия функции двух переменных»

1.18.1 Вопросы лекции:

1. ОДЗ функции двух переменных и ее геометрическое изображение.
2. Частные приращения.

3. Частные производные первого и второго порядка. Теорема Шварца.

1.18.2 Краткое содержание вопросов:

1. ОДЗ функции двух переменных и ее геометрическое изображение.

Если каждой паре $(x;\,y)$ значений двух независимых переменных величин x и y из некоторого множества D по какому – либо правилу ставится в соответствие определенное значение величины z, то говорят, что z есть *функция двух переменных* и обозначается $z=f(x;\,y)$. Аналогично определяются функции трех, четырех и т.д. переменных.

Значение функции $z=f(x;\,y)$ в точке $M_0(x_0\,;y_0)$ называется *частным значением* функции и обозначается $f(x_0\,;y_0)$ или $f(M_0)$.

Областью определения функции $z=f(x;\,y)$ называется совокупность пар $(x;\,y)$, при которых функция существует.

Линией уровня функции двух переменных $z=f(x;\,y)$ называют линию $f(x;\,y)=C$ на плоскости xOy, в точках которой функция сохраняет постоянное значение $z=C$.

Поверхностью уровня функции трех переменных $u=f(x;\,y;\,z)$ называется множество всех точек пространства $Oxyz$, для которых данная функция имеет одно и то же значение $u=C$.

Окрестностью точки $M_0(x_0\,;y_0)$ радиуса r называется совокупность всех точек $(x;\,y)$, которые удовлетворяют условию $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r$.

Число A называется *пределом функции* $z=f(x;\,y)$ при стремлении точки $M(x;\,y)$ к точке $M_0(x_0\,;y_0)$, если для каждого числа $\varepsilon>0$ найдется такое число $r>0$, что для любой точки $M(x;y)$, для которых верно условие $MM_0<r$, также верно и условие $\left|f(x;\,y)-A\right|<\varepsilon$. Записывают: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;\,y)=A$.

Пусть точка $M_0(x_0\,;y_0)$ принадлежит области определения функции $z=f(x;\,y)$. Функция $z=f(x;\,y)$ называется *непрерывной в точке* $M_0(x_0\,;y_0)$, если имеет место равенство $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;\,y)=f(x_0\,;y_0)$, причем точка $M(x;\,y)$ стремится к точке $M_0(x_0\,;y_0)$ произвольным образом, оставаясь в области определения функции.

Из определения следует, что для непрерывности функции в точке должны быть выполнены следующие условия:

1) функция $z=f(x;\,y)$ определена в точке $M_0(x_0,y_0)$;

2) существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;\,y)$;

3) предел равен значению функции в точке $M_0(x_0,y_0)$:

$$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;\,y)=f(x_0\,;y_0).$$

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется *непрерывной в области*.

Если в некоторой точке $M_0(x_0,y_0)$ не выполняется хотя бы одно из условий 1 – 3, то эта точка называется *точкой разрыва* функции $z=f(x;\,y)$. Все точки разрыва функции $z=f(x;\,y)$ образуют линию – *линию разрыва* данной функции.

2. Частные приращения.

Пусть в некоторой области задана функция $z = f(x;y)$. Возьмем произвольную точку $M(x;y)$ и зададим приращение Δx к переменной x.

Величина $\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x;y)$ называется *частным приращением функции по переменной x.*

Для функции $z = f(x;y)$ возьмем произвольную точку $M(x;y)$ и зададим приращение Δy к переменной y.

Величина $\Delta_x z = f(x; y + \Delta y) - f(x;y)$ называется *частным приращением функции по переменной y.*

Для функции $f(x; y)$ выражение $\Delta z = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$ называется *полным приращением* функции в точке $M_0(x_0; y_0)$.

3. Частные производные первого и второго порядка. Теорема Шварца.

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x; y) - f(x;y)}{\Delta x}$ называется *частной производной* функции $z = f(x;y)$ по переменной *x*.

Обозначение: $\dfrac{\partial z}{\partial x}$; z'_x; $\dfrac{\partial f(x;y)}{\partial x}$; $f'_x(x;y)$.

$\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x; y + \Delta y) - f(x;y)}{\Delta y}$ называется *частной производной* функции $z = f(x;y)$ по переменной *y*.

Обозначение: $\dfrac{\partial z}{\partial y}$; z'_y; $\dfrac{\partial f(x;y)}{\partial y}$; $f'_y(x;y)$.

Замечание. При нахождении частной производной по одной из переменных пользуются правилами и формулами дифференцирования функции одной переменной, считая другую переменную постоянной.

Пусть $z = f(x;y)$. Частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}; \dfrac{\partial z}{\partial y}$ являются функциями от переменных x, y.

Производные этих функций будут *частными производными второго порядка:*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x,y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y).$$

Производные второго порядка можно снова дифференцировать как по x, так и по y. Получим частные производные третьего порядка

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^3}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Частные производные вида $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$; $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$; $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial y}$ и т.д. называются *смешанными производными.*

Теорема. Если функция $f(x;y)$ и ее частные производные $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ определены и непрерывны в точке $M(x; y)$ и ее окрестности, то верно соотношение: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Замечание. Аналогично определяются частные производные функции трех переменных $u = f(x;y;z)$.

1. 19 Лекция № 19 (2 часа).

Тема: «Приложения производных ФНП»

1.19.1 Вопросы лекции:

1. Полный дифференциал.
2. Производная по направлению. Градиент.
3. Касательная плоскость и нормаль.

1.19.2 Краткое содержание вопросов:

1. Полный дифференциал.

Дифференциалы аргументов x и y равны приращениям этих аргументов:

$$dx = \Delta x, \; dy = \Delta y.$$

Выражения $d_x z = f'_x(x;y)dx$ и $d_y z = f'_y(x;y)dy$ называются *частными дифференциалами* функции $z = f(x;y)$.

Полным дифференциалом функции $z = f(x;y)$ называется главная, линейная относительно Δx *и* Δy, часть приращения функции Δz в точке $(x;y)$:

$$dz = f'_x(x;y)dx + f'_y(x;y)dy.$$

Пусть функция $f(x;y)$ дифференцируема в точке $(x_0;y_0)$. Тогда справедлива приближенная формула для вычисления значения функции двух переменных:

$$f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y) \approx f(x_0;y_0) + f'_x(x_0;y_0)\cdot\Delta x + f'_y(x_0;y_0)\cdot\Delta y.$$

2. Производная по направлению. Градиент.

Рассмотрим функцию $z = f(x;y)$ в точке $M(x_0;y_0)$ и точке $M_1(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)$.

Проведем через точки M и M_1 вектор $\vec{S}$. Углы наклона этого вектора к направлению координатных осей x, y обозначим соответственно α, β. Косинусы этих углов называются *направляющими косинусами* вектора $\vec{S}$.

Предел $\lim\limits_{\Delta S\to 0}\dfrac{\Delta z}{\Delta S}$ называется *производной функции* $z = f(x;y)$ *по направлению вектора* $\vec{S}$ в точке $M(x_0;y_0)$ и обозначается:

$$\frac{\partial z}{\partial s}(M) = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta S} = \frac{\partial z}{\partial x}(M)\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}(M)\cos\beta.$$

Аналогично определяется производная по направлению функции трех независимых переменных:

$$\frac{\partial u}{\partial s}(M) = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x}(M)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M)\cos\gamma.$$

Градиентом функции $z = f(x;y)$ в точке $M(x_0;y_0)$ называется вектор, проекции которого на координатные оси равны значениям частных производных этой функции в данной точке:

$$grad\, z(M) = \frac{\partial z}{\partial x}(M)\cdot\vec{i} + \frac{\partial z}{dy}(M)\cdot\vec{j}.$$

Замечание. Градиент указывает направление наибыстрейшего роста функции в данной точке. Производная $\dfrac{\partial z}{\partial s}(M)$ в направлении градиента имеет наибольшее значение, равное

$$|grad\, z(M)| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}(M)\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{dy}(M)\right)^2}.$$

Аналогично определяется градиент функции трех независимых переменных:

$$grad\,u\,(M)=\frac{\partial u}{\partial x}(M)\cdot\vec{i}+\frac{\partial u}{dy}(M)\cdot\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}(M)\cdot\vec{k}.$$

3. Касательная плоскость и нормаль.

Геометрическим смыслом частной производной z'_x, вычисленной в точке $M_0(x_0;y_0)$, является тангенс угла наклона касательной, проведенной в точке $N_0(x_0;y_0;z_0)$ к сечению поверхности плоскостью $y=y_0$.

Геометрическим смыслом частной производной z'_y, вычисленной в точке $M_0(x_0;y_0)$, является тангенс угла наклона касательной, проведенной в точке $N_0(x_0;y_0;z_0)$ к сечению поверхности плоскостью $x=x_0$.

Уравнение касательной плоскости к поверхности $z=f(x;y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$ имеет вид:

$$z-f(x_0;y_0)=f'_x(x_0;y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0;y_0)(y-y_0).$$

Уравнение нормали к поверхности в точке $M_0(x_0;y_0)$ имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0;y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0;y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

1. 20 Лекция № 20 (2 часа).

Тема: «Экстремум функции двух переменных»

1.20.1 Вопросы лекции:

1. Понятие экстремума.
2. Необходимое и достаточное условия экстремума.
3. Нахождение наименьшего и наибольшего значений в замкнутой области.

1.20.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие экстремума.

Пусть функция $z=f(x;y)$ определена в некоторой области D, точка $M(x_0;y_0)\in D$.

Если для функции $z=f(x;y)$ в некоторой окрестности точки $M(x_0;y_0)$ верно неравенство $f(x_0;y_0)>f(x;y)$, то точка M_0 называется *точкой максимума*.

Если для функции $z=f(x;y)$ в некоторой окрестности точки $M(x_0;y_0)$ верно неравенство $f(x_0;y_0)<f(x;y)$, то точка M_0 называется *точкой минимума*.

2. Необходимое и достаточное условия экстремума.

Теорема 1 (необходимые условия экстремума).

Если функция $f(x;y)$ в точке $(x_0;y_0)$ имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю $f'_x(x_0;y_0)=0,\quad f'_y(x_0;y_0)=0$, либо хотя бы одна из частных производных не существует.

Точка, в которой значения частных производных первого порядка равны нулю, называют *стационарной точкой.*

Точка, в которой значения частных производных первого порядка равны нулю или хотя бы одна частная производная первого порядка не существует, называют *критической точкой.*

Теорема 2 (достаточные условия экстремума).

Пусть в окрестности критической точки $(x_0\,;y_0)$ функция $f(x;\,y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно.

Обозначим $A = f''_{xx}(x_0\,;y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0\,;y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0\,;y_0)$.

Рассмотрим выражение $\Delta = AC - B^2$.

1) Если $\Delta > 0$, то в точке $(x_0\,;y_0)$ функция $f(x;\,y)$ имеет экстремум, при этом, если $A < 0$ – максимум, если $A > 0$ – минимум.

2) Если $\Delta < 0$, то в точке $(x_0\,;y_0)$ функция $f(x;\,y)$ не имеет экстремума.

3) Если $\Delta = 0$, то вывод о наличии экстремума в точке $(x_0\,;y_0)$ сделать нельзя.

3. Нахождение наименьшего и наибольшего значений в замкнутой области.

Пусть $f(x;y)$ определена и непрерывна в ограниченной и замкнутой области. Тогда она достигает наименьшего и наибольшего значений либо в точках экстремума, либо на границе области.

Условный экстремум находится, когда переменные *x* и *y*, входящие в функцию $z = f(x;y)$, не являются независимыми, т.е. существует некоторое соотношение $\varphi(x;y) = 0$, которое называется *уравнением связи***.**

Тогда из переменных *x* и *y* только одна будет независимой, т.к. другая может быть выражена через нее из уравнения связи.

Тогда $z = f(x;y(x))$ и $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}$.

В точках экстремума: $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} = 0$ и $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} = 0$.

Тогда выполняется условие: $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\dfrac{dy}{dx} = 0$.

Для выполнения этого условия во всех точках найдем неопределенный коэффициент λ так, чтобы выполнялась система трех уравнений:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$$

Полученная система уравнений является необходимыми условиями условного экстремума. Однако это условие не является достаточным. Поэтому при нахождении критических точек требуется их дополнительное исследование на экстремум.

Выражение $z = f(x;y) + \lambda\cdot\varphi(x;y)$ называется *функцией Лагранжа***.**

Использование функции Лагранжа для нахождения точек экстремума функции называется также *методом множителей Лагранжа*.

1. 21 Лекция № 21 (2 часа).

Тема: «Комплексные числа»

1.21.1 Вопросы лекции:

1. Числовые множества.
2. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.
3. Тригонометрическая форма комплексного числа. Формула Муавра.
4. Извлечение корня из комплексного числа.
5. Понятие функции комплексного аргумента.

1.21.2 Краткое содержание вопросов:

1. Числовые множества.

Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми множествами*.

Множество натуральных чисел: $N = \{1; 2; 3; 4; ...; n; ...\}$;

Множество целых чисел: $Z = \{0; \pm1; \pm2; \pm3; ...; \pm n; ...\}$;

Множество рациональных чисел: $Q = \left\{ \frac{m}{n} : m \in Z,\, n \in N \right\}$.

Всякое рациональное число выражается обыкновенной дробью.

Число, которое нельзя представить в виде обыкновенной дроби, называется *иррациональным*.

Множество действительных чисел R содержит все рациональные и иррациональные числа.

2. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Комплексным числом называется выражение вида $z = a + bi$, где $a, b \in R,\ i^2 = -1$.

$\mathrm{Re}(a+bi) = a$ – действительная часть комплексного числа;

$\mathrm{Im}(a+bi) = b$ – мнимая часть комплексного числа;

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ – модуль комплексного числа $r \geq 0$;

$\bar{z} = a - bi$ – сопряженное для $z = a + bi$.

1) $z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$;

2) $z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$;

3) $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)\cdot(a_2 + b_2 i) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_2 b_1 + a_1 b_2)i$;

4) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \dfrac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)}$.

3. Тригонометрическая форма комплексного числа. Формула Муавра.

1) $z = a + bi$ – алгебраическая форма комплексного числа.

2) $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ – тригонометрическая форма комплексного числа, где $\varphi = \arg z$ – аргумент комплексного числа ($0 \leq \varphi < 2\pi$).

3) $z = r \cdot e^{i\varphi}$ – показательная форма комплексного числа.

$\begin{cases} a = r\cdot\cos\varphi \\ b = r\cdot\sin\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ tg\varphi = \dfrac{b}{a} \end{cases}$ – связь между алгебраической и тригонометрической формами комплексного числа.

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$; $\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$; $\sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$ – формулы Эйлера.

1) $z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$;

2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$;

3) $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ – формула Муавра;

4. Извлечение корня из комплексного числа.

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k = 0; 1; ...; n-1$ – извлечение корня $n-ой$ степени из комплексного числа.

Замечание. Все значения $\sqrt[n]{z}$ на комплексной плоскости образуют правильный $n-$угольник.

5. Понятие о функции комплексного аргумента.

Если каждому комплексному числу $z \in D$ по некоторому закону поставлено в соответствие определенное комплексное число $w \in G$, то на этой области задана *однозначная функция комплексного переменного*:

$$w = f(z)$$

Множество D называется *областью определения*, множество G – *областью значений функции***.**

Комплексную функцию можно записать в виде:

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad \text{где} \quad \begin{array}{l} u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) \\ v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) \end{array}$$

u, v – действительные функции от переменных x и y.

Если каждому $z \in D$ соответствует несколько различных значений w, то функция $w = f(z)$ называется *многозначной***.**

Основные трансцендентные функции

Трансцендентными называются аналитические функции, которые не являются алгебраическими.

Если аргументом показательной или тригонометрических функций является комплексное число, то определение этих функций, вводимое в элементарной алгебре, теряет смысл.

Функции e^z, cosz, sinz связаны между собой формулой Эйлера. Эта формула может быть очень легко получена сложением соответствующих рядов.

$$e^{-iz} = \cos z + i \sin z$$

Также справедливы равенства:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}; \qquad (e^z)^m = e^{zm}; \qquad e^{z+2\pi i} = e^z;$$

$$tgz = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})};$$

$$ctgz = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}};$$

Для тригонометрических функций комплексного аргумента справедливы основные тригонометрические тождества (синус и косинус суммы, разности и т.д.), которые справедливы для функций действительного аргумента.

Гиперболическим синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом называются соответственно функции:

$$sh\,z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad ch\,z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \quad th\,z = \frac{sh\,z}{ch\,z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}; \quad cth\,z = \frac{ch\,z}{sh\,z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}};$$

Гиперболические функции могут быть выражены через тригонометрические:

$$sh\,z = -i \sin iz; \qquad ch\,z = \cos iz;$$

$$th\,z = -itg\,iz; \qquad cth\,z = ictg\,iz;$$

Гиперболические функции $sh\ z$ и $ch\ z$ имеют период $2\pi i$, а функции $th\ z$ и $cth\ z$ – период πi.

Пример. Найти sin(1+2i).

$$\sin(1+2i) = \frac{e^{i-2} - e^{2-i}}{2i} = \frac{e^{-2}e^i - e^2 e^{-i}}{2i} = \frac{e^{-2}(\cos 1 + i \sin 1) - e^2(\cos 1 - i \sin 1)}{2i} =$$

$$= \frac{\cos 1(e^{-2} - e^{2}) + i\sin 1(e^{2} + e^{-2})}{2i} = \frac{e^{2} + e^{-2}}{2}\sin 1 + i\frac{e^{2} - e^{-2}}{2}\cos 1 = ch2\sin 1 + sh2\cos 1.$$

Логарифмическая функция комплексного аргумента определяется как функция, обратная показательной.

$$e^{w} = z; \qquad w = Lnz.$$

Если $w = u + iv$, то $\left|e^{w}\right| = e^{u}$ и $Arg\, e^{w} = \arg z + 2\pi k = v$.

Тогда $e^{u} = |z|$; $\qquad u = \ln|z|$.

Итого: $w = Lnz = \ln|z| + i\arg z + 2\pi ik; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Для комплексного числа $z = a + ib \qquad \arg z = arctg\frac{b}{a}$;

Выражение $\ln z = \ln|z| + i\arg z$ называется *главным значением логарифма*.

Логарифмическая функция комплексного аргумента обладает следующими свойствами:

1) $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$; 2) $\ln\frac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2$; 3) $\ln(z)^{n} = n\ln z$; 4) $\ln\sqrt[n]{z} = \frac{1}{n}\ln z$;

Обратные тригонометрические функции комплексного переменного имеют вид:

$$Arc\cos z = -i\left[\ln\left|z \pm \sqrt{z^{2} - 1}\right| + i\arg(z \pm \sqrt{z^{2} - 1}) + 2\pi k\right] = \frac{1}{i}Ln\left(z + \sqrt{z^{2} - 1}\right)$$

$$Arc\sin z = -i\left[\ln\left|iz \pm \sqrt{1 - z^{2}}\right| + i\arg(iz \pm \sqrt{1 - z^{2}}) + 2\pi k\right] = \frac{1}{i}Ln\left(iz + \sqrt{1 - z^{2}}\right)$$

$$Arctgz = -i\left[\ln\left|\frac{1 + zi}{1 - zi}\right| + i\left(\arg\frac{1 + zi}{1 - zi} + 2\pi k\right)\right] = \frac{1}{2i}Ln\frac{i - z}{i + z}$$

$$Arshz = \ln\left|z \pm \sqrt{z^{2} + 1}\right| + i\arg(z \pm \sqrt{z^{2} + 1}) + 2\pi k = Ln\left(z \pm \sqrt{z^{2} + 1}\right)$$

$$Archz = \ln\left|z \pm \sqrt{z^{2} - 1}\right| + i\arg(z \pm \sqrt{z^{2} - 1}) + 2\pi k = Ln\left(z \pm \sqrt{z^{2} - 1}\right)$$

$$Arcthz = \frac{1}{2}Ln\frac{1 + z}{1 - z}$$

1. 22 Лекция № 22 (2 часа).

Тема: «Многочлены»

1.22.1 Вопросы лекции:

1. Понятие многочлена.
2. Основная теорема алгебры.
3. Разложение многочлена на множители.
4. Решение уравнений во множестве комплексных чисел.

1.22.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие многочлена.

Выражение вида $P_n(x) = a_n x^{n} + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ называется *многочленом*, а $n -$ *степенью многочлена*. Число называют многочленом нулевой степени.

Корнем многочлена называется такое значение x_0, при котором многочлен обращается в нуль.

2. Основная теорема алгебры.

Основная теорема алгебры: всякий многочлен n степени имеет хотя бы один корень.

Следствие: любой многочлен n степени с комплексными переменными имеет ровно n корней.

3. Разложение многочлена на множители.

Теорема: если x_0 - корень многочлена, то он делится без остатка на $(x-x_0)$.

Теорема. Любой многочлен с действительными коэффициентами разлагается на линейные и квадратные множители с действительными коэффициентами.

Рациональной дробью называется отношение двух многочленов

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_k(x)}.$$

Если $n<k$, то дробь называется правильной, если $n\geq k$, то – неправильной. Из неправильной дроби можно выделить целую часть. Часто нужно разложить знаменатель на линейные и квадратные множители. В связи с этим рассматривают четыре вида простейших рациональных дробей:

1) $\frac{A}{x-a}$; 2) $\frac{A}{(x-a)^k}$; 3) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$; 4) $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$.

Теорема. Любую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы простейших рациональных дробей.

Если $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная рациональная дробь, знаменатель P(x) которой представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей (отметим, что любой многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в таком виде: $P(x) = (x - a)^{\alpha}\ldots(x - b)^{\beta}(x^2 + px + q)^{\lambda}\ldots(x^2 + rx + s)^{\mu}$), то эта дробь может быть разложена на элементарные по следующей схеме:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\ldots+\frac{B_1}{(x-b)}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+$$

$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda}+\ldots+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s}+\frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2}+\ldots+\frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}$$

где A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i – некоторые постоянные величины.

4. Решение уравнений во множестве комплексных чисел.

Следствием из основной теоремы алгебры является утверждение о том, что любое квадратное уравнение имеет ровно два корня.

Решить во множестве комплексных чисел уравнение $x^2-8x+17=0$.

Решение. Для квадратного уравнения $x^2-8x+17=0$ дискриминант $D=(-8)^2-4\cdot 17=64-68=-4<0$, а, значит, уравнение не имеет вещественных корней, но есть комплексные корни:

$$D=-4=4\cdot(-1)=4i^2,\ \sqrt{D}=\sqrt{4i^2}=2i.$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a};$$

$$x_1=\frac{-(-8)+2i}{2\cdot 1}=\frac{8+2i}{2}=4+i;$$

$$x_2=\frac{-(-8)-2i}{2\cdot 1}=\frac{8-2i}{2}=4-i.$$

Итак, при решении квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом корнями являются два сопряженных числа $4\pm i$.

Ответ: $4\pm i$.

1. 23 Лекция № 23 (2 часа).

Тема: «Первообразная и неопределенный интеграл»

1.23.1 Вопросы лекции:

1. Первообразная функция и ее свойства.
2. Понятие неопределенного интеграла, основные свойства.
3. Таблица интегралов.

1.23.2 Краткое содержание вопросов:

1. Первообразная функция и ее свойства.

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функцией для функции $f(x)$ на промежутке $[a;b]$, если в любой точке x этого промежутка, функция $F(x)$ имеет производную $F'(x)$, равную $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$.

Две любые первообразные для одной и той же функции могут отличаться лишь на постоянную величину.

2. Понятие неопределенного интеграла, основные свойства.

Совокупность всех первообразных функций для данной функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Нахождение неопределенного интеграла по данной подынтегральной функции есть действие *интегрирования*. *Интегрирование* – действие, обратное по отношению к дифференцированию.

Свойства неопределенного интеграла:

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции: $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению: $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой же функции, сложенной с любой постоянной: $\int d\left(f(x)\right) = f(x) + C$.

4. Постоянный множитель (отличный от нуля) можно выносить за знак неопределенного интеграла: $\int A \cdot f(x)dx = A\int f(x)dx$.

5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от каждой функции в отдельности:

$$\int \left(f(x) + \varphi(x) - g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx - \int g(x)dx.$$

3. Таблица интегралов.

1) $\int du = u + C$;

2) $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$;

3) $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$;

4) $\int e^u du = e^u + C$;

5) $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$;

6) $\int \sin u du = -\cos u + C$;

7) $\int \cos u du = \sin u + C$;

8) $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$;

9) $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C$;

10) $\int tgudu = -\ln|\cos u| + C$;

11) $\int ctgudu = \ln|\sin u| + C$;   12) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$;

13) $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C$;   14) $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$.

1. 24 Лекция № 24 (2 часа).

Тема: «Методы интегрирования»

1.24.1 Вопросы лекции:

1. Непосредственное интегрирование.
2. Замена переменной.
3. Интегрирование по частям.

1.24.2 Краткое содержание вопросов:

1. Непосредственное интегрирование.

Непосредственное интегрирование – интегрирование, основанное на применении таблицы основных интегралов, основных свойств неопределенного интеграла, а также простейших тождественных преобразований подынтегральной функции.

2. Замена переменной.

Интегрирование заменой переменной (метод подстановки).

Если функция $f(x)$ интегрируема, то имеет место следующая формула:

$$\int f(x)dx = \int f\left(\varphi(u)\right)\cdot\varphi'(u)du.$$

После того, как интеграл найден с помощью подстановки $x = \varphi(u)$, следует возвратиться к первоначально заданной переменной *x*.

Замечание. Иногда вместо подстановки $x = \varphi(u)$ применяют подстановку $u = g(x)$, тогда формула замены переменной имеет следующий вид:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)dx = \begin{bmatrix} u = g(x) \\ du = g'(x)dx \end{bmatrix} = \int f(u)\cdot du.$$

3. Интегрирование по частям.

Если *u* и *v* – дифференцируемые функции от переменной *x*, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du.$$

При этом за *u* принимается функция, которая дифференцированием упрощается, а за dv – та часть подынтегрального выражения, содержащая dx, интеграл от которой известен или может быть найден.

Пример. Найти интеграл $\int x\cos xdx$.

Используя формулу $\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$, примем за $u = x$ и $dv = \cos xdx$, тогда $du = dx$, $v = \int \cos xdx = \sin x$.

Следовательно, $\int x\cos xdx = x\cdot\sin x - \int \sin xdx = x\cdot\sin x + \cos x + C$.

1. 25 Лекция № 25 (2 часа).

Тема: «Интегрирование рациональных функций»

1.25.1 Вопросы лекции:

1. Понятие рациональной функции.
2. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование.
3. Интегрирование рациональных функций.

1.25.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие рациональной функции.

Рациональной дробью называется функция, равная отношению двух многочленов: $f(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ – многочлен степени m, $Q_n(x)$ – многочлен степени n.

Если $m<n$, то рациональная дробь называется *правильной*; если $m\ge n$, то она называется *неправильной*.

Замечание. Всякую неправильную рациональную дробь можно, путем деления числителя на знаменатель, представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

Простейшие рациональные дроби (A, a, B, p, q – действительные числа):

I. $\dfrac{A}{x-a}$; II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $(k\ge 2, k\in N)$; III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $(p^2-4q<0)$;

IV. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, $(k\ge 2, k\in N, p^2-4q<0)$.

Теорема: Каждую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы простейших рациональных дробей.

2. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование.

I. $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx=A\cdot\ln|x-a|+C$;

II. $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=\frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C$;

III. $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$;

IV. $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx=\frac{A}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}$.

Если обозначить $I_k=\displaystyle\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}$, где $a^2=q-\dfrac{p^2}{4}$; $t=x+\dfrac{p}{2}$, то

$$I_k=\frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1}+\frac{t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}\right)$$

3. Интегрирование рациональных функций.

Алгоритм интегрирования рациональных дробей:

1. Если дробь неправильная, то представить ее в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.
2. Разложив знаменатель правильной рациональной дроби на множители, представить ее в виде суммы простейших рациональных дробей.
3. Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

1. 26 Лекция № 26 (2 часа).

Тема: «Интегрирование тригонометрических и иррациональных функций»

1.26.1 Вопросы лекции:

1. Универсальная тригонометрическая подстановка.
2. Частные случаи тригонометрических подстановок.
3. Интегрирование иррациональных функций.

1.26.2 Краткое содержание вопросов:

1. Универсальная тригонометрическая подстановка.

$R(\sin x;\cos x)$ – обозначение функции с переменными $\sin x$ и $\cos x$, над которыми выполняются рациональные действия (сложение, вычитание, умножение, деление).

Универсальная тригонометрическая подстановка:

$$\text{Если } t = tg\frac{x}{2}, \text{ то } \sin x = \frac{2t}{t^2+1};\ \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1};\ dx = \frac{2dt}{t^2+1}.$$

$$\int R(\sin x;\cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{t^2+1};\frac{1-t^2}{t^2+1}\right)\cdot\frac{2dt}{t^2+1}$$

2. Частные случаи тригонометрических подстановок.

1) Если $R(-\sin x;\cos x) = -R(\sin x;\cos x)$, то удобна подстановка $t = \cos x$.

2) Если $R(\sin x;-\cos x) = -R(\sin x;\cos x)$, то удобна подстановка $t = \sin x$.

3) Если $R(-\sin x;-\cos x) = R(\sin x;\cos x)$, то удобна подстановка $t = tgx$.

Использование тригонометрических преобразований

Интегралы типа $\int \sin ax\cdot\cos bx dx$, $\int \cos ax\cdot\cos bx dx$, $\int \sin ax\cdot\sin bx dx$ вычисляются с помощью формул тригонометрии:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right);$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right);$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right).$$

Интегралы от четных степеней синуса или косинуса находят, используя формулы понижения порядка:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2};\quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2};\quad \sin x\cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Интегралы от нечетных степеней синуса или косинуса находят, отделяя от нечетной степени один сомножитель и полагая *кофункцию* равной новой переменной.

3. Интегрирование иррациональных функций.

Для вычисления интеграла $\int R\left(x;\sqrt[n]{ax+b}\right)dx$ совершают подстановку $ax+b=t^n$.

Для вычисления интеграла $\int R\left(x;\sqrt[n]{ax+b};\sqrt[m]{ax+b}\right)dx$ используют подстановку $ax+b=t^p$, где $p = НОК(n;m)$.

Для вычисления интеграла $\int R\left(x;\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ совершают подстановку $x = a\cdot\sin t$.

Для вычисления интеграла $\int R\left(x;\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ выполняют подстановку $x = a\cdot tgt$.

Для вычисления интеграла $\int R\left(x;\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ совершают подстановку $x = \frac{a}{\sin t}$.

1. 27 Лекция № 27 (2 часа).

Тема: «Определенный интеграл»

1.27.1 Вопросы лекции:

1. Понятие определенного интеграла.
2. Геометрический и физический смыслы.
3. Основные свойства определенного интеграла.
4. Формула Ньютона – Лейбница.
5. Приемы интегрирования.

1.27.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие определенного интеграла.

Пусть на отрезке $[a;b]$ определена функция $f(x)$. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b$. Из каждого интервала $[x_{i-1}; x_i]$ возьмем произвольную точку c_i и составим сумму $\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Сумма вида $\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i$ называется *интегральной суммой*, а ее предел при $\max \Delta x_i \to 0$, если он существует и не зависит ни от деления отрезка на части, ни от выбора точек c_i в них, называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x_i .$$

2. Геометрический и физический смыслы.

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади соответствующей криволинейной трапеции.

Если материальная точка перемещается по прямой с переменной скоростью $v = v(t)$, то путь, пройденный ею за промежуток времени от t_1 до t_2, численно равен определенному интегралу от скорости за данный промежуток времени: $s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$.

3. Основные свойства определенного интеграла.

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$.
2. $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$.
3. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.
4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \pm \int_c^b f(x)dx$.
5. $\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$.
6. Если $f(x) \le g(x)$ на отрезке $[a;b]$ и $a < b$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.
7. Если m и M – наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ соответственно, то $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.
8. <u>Теорема о среднем.</u> Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то на этом отрезке существует точка c, такая что $\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a)$.
9. Определенный интеграл с переменным верхним пределом есть одна из первообразных подынтегральной функции: $\left(\int_a^x f(t)dt \right)'_x = f(x)$.

10. Если на отрезке $[a;b]$ ($a<b$) функция $f(x)\geq 0$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$; если $f(x)\leq 0$, то и $\int\limits_a^b f(x)dx \leq 0$.

11. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-a;a]$, то

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int\limits_0^a f(x)dx, & \text{если } f(x) - \text{четная} \\ 0, & \text{если } f(x) - \text{нечетная} \end{cases}.$$

4. Формула Ньютона – Лейбница.

Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, тогда имеет место формула Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

5. Приемы интегрирования.

Замена переменной

Пусть задан интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a,b]$. Введем новую переменную в соответствии с формулой $x=\varphi(t)$. Тогда, если: 1) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$; 2) $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha,\beta]$;
3) $f(\varphi(t))$ определена на отрезке $[\alpha,\beta]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Интегрирование по частям

Если функции $u=\varphi(x)$ и $v=\psi(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu.$$

1. 28 Лекция № 28 (2 часа).

Тема: «Геометрические приложения определенного интеграла»

1.28.1 Вопросы лекции:

1. Приближенное вычисление определенных интегралов.
2. Вычисление площадей плоских кривых.
3. Нахождение объема тела вращения.
4. Вычисление длины дуги кривой.

1.28.2 Краткое содержание вопросов:

1. Приближенное вычисление определенных интегралов.

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная функция $f(x)$. Разобьем основание этой трапеции на n равных частей. Определенный интеграл приближенно вычисляется по формулам:

1. Формула прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}\right) \text{ или } \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(y_1 + ... + y_{n-1} + y_n\right).$$

2. Формула трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + ... + y_{n-1}\right).$$

3. Формула парабол (Симпсона):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1}) + 2(y_2 + ... + y_{2n-2})\right)$$

2. Вычисление площадей плоских кривых.

Если функция $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a;b]$, то площадь фигуры, ограниченной сверху кривой $y = f(x)$, снизу – осью Ox, с боков – прямыми $x = a, x = b$, вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Если функция $f(x) \leq 0$ на отрезке $[a;b]$, то площадь фигуры, ограниченной снизу $y = f(x)$, сверху – осью Ox, с боков – прямыми $x = a, x = b$, вычисляется по формуле:

$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|.$$

Если $f_2(x) \geq f_1(x)$ на отрезке $[a;b]$, то площадь фигуры, заключенной между кривыми $y = f_2(x)$ (сверху), $y = f_1(x)$ (снизу), где a и b – абсциссы точек пересечения кривых, вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx.$$

3. Нахождение объема тела вращения.

Если функция $y = y(x)$ знакопостоянна на отрезке $[a;b]$, то объем V_x тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = y(x)$, $y = 0$, $x = a, x = b$, вычисляется по формуле:

$$V_x = \pi\int_a^b y^2(x)dx.$$

Если функция $x = x(y)$ знакопостоянна на отрезке $[c;d]$, то объем V_y тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $x = x(y)$, $x = 0$, $y = c, y = d$, вычисляется по формуле:

$$V_y = \pi\int_c^d x^2(y)dy.$$

Если кривая AB является графиком функции $y = f(x) \geq 0$ на отрезке $[a;b]$, то площадь $S_{пов.x}$ поверхности, образованной вращением кривой AB вокруг оси Ox вычисляется по формуле:

$$S_{пов.x} = 2\pi\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}dx.$$

Если кривая AB является графиком функции $x=\varphi(y)\geq 0$ на отрезке $[a;b]$, то площадь $S_{пов.y}$ поверхности, образованной вращением кривой AB вокруг оси Oy вычисляется по формуле:

$$S_{пов.y}=2\pi\int_a^b \varphi(y)\cdot\sqrt{1+(\varphi'(y))^2}dy.$$

4. Вычисление длины дуги кривой.

Для плоской кривой AB, уравнение которой $y=f(x)$, где $a\leq x\leq b$ ее длина вычисляется по формуле:

$$l=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

1. 29 Лекция № 29 (2 часа).

Тема: «Физические приложения определенного интеграла»

1.29.1 Вопросы лекции:

1. Вычисление работы переменной силы.
2. Нахождение давления.
3. Определение центра тяжести.

1.29.2 Краткое содержание вопросов:

1. Вычисление работы переменной силы.

Работа, произведенная переменной силой $F=F(x)$ при перемещении точки M вдоль оси Ox из положения $x=a$ в положение $x=b$ $(a<b)$, находится по формуле:

$$A=\int_a^b F(x)dx.$$

2. Нахождение давления.

$$P=g\gamma\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))xdx,$$

где g - ускорение свободного падения, γ - плотность жидкости, $x=a$, $x=b$, $y_1=f_1(x)$, $y_2=f_2(x)$ - линии, ограничивающие пластину.

3. Определение центра тяжести.

Координаты $(x_c;y_c)$ центра тяжести вычисляются по формулам:

$$x_c=\frac{\int_a^b xydx}{\int_a^b ydx};\quad y_c=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx}{\int_a^b ydx}.$$

1. 30 Лекция № 30 (2 часа).

Тема: «Несобственные интегралы»

1.30.1 Вопросы лекции:

1. Несобственные интегралы первого рода.
2. Несобственные интегралы второго рода.
3. Геометрический смысл несобственных интегралов, его применение.

1.30.2 Краткое содержание вопросов:

1. Несобственные интегралы первого рода.

Виды несобственных интегралов:

1) интеграл от непрерывной функции по неограниченному промежутку (несобственный интеграл I рода);

2) интеграл по конечному промежутку от функции, имеющий на нем бесконечный разрыв (несобственный интеграл II рода).

1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a; +\infty)$.

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Если предел определенного интеграла существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*; если указанный предел не существует или он бесконечен, то несобственный интеграл называется *расходящимся*.

2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $(-\infty; b]$.

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \text{ где } c - \text{произвольное число.}$$

2. Несобственные интегралы второго рода.

1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a; b)$ и имеет бесконечный разрыв при $x = b$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $(a; b]$ и имеет бесконечный разрыв при $x = a$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

3. Пусть функция $f(x)$ терпит бесконечный разрыв во внутренней точке c отрезка $[a; b]$, во всех других точках непрерывна.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

3. Геометрический смысл несобственных интегралов, его применение.

Геометрический смысл несобственного интеграла I рода: несобственный интеграл I рода от неотрицательной функции выражает площадь бесконечно длиной криволинейной трапеции.

Геометрический смысл несобственного интеграла II рода: несобственный интеграл II рода от положительной функции выражает площадь бесконечно высокой криволинейной трапеции.

1. 31 Лекция № 31 (2 часа).

Тема: «Двойной интеграл»

1.31.1 Вопросы лекции:

1. Понятие двойного интеграла. Геометрический смысл.
2. Способы вычисления двойного интеграла.

1.31.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие двойного интеграла. Геометрический смысл.

Двойным интегралом от непрерывной функции $f(x;y)$, распространенным на ограниченную область D плоскости xOy, называется предел соответствующей двумерной интегральной суммы:

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_k \to 0}} \sum_i \sum_k f(x_i;y_k)\Delta x_i \Delta y_k,$$

где сумма распространена на те значения i и k, для которых точки $(x_i;y_k)$ принадлежат области D.

Свойства двойного интеграла

1. $\iint_D c \cdot f(x;y)dxdy = c \cdot \iint_D f(x;y)dxdy$, где $c - const$.

2. $\iint_D \left(f_1(x;y) \pm f_2(x;y)\right)dxdy = \iint_D f_1(x;y)dxdy \pm \iint_D f_2(x;y)dxdy$.

3. Если область D разбить линией на две области D_1 и D_2 такие, что $D_1 \cup D_2 = D$, а пересечение областей D_1 и D_2 состоит лишь из линии, их разделяющей, то

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \iint_{D_1} f(x;y)dxdy + \iint_{D_2} f(x;y)dxdy.$$

4. Если функция $f(x;y)$ непрерывна в замкнутой области D, площадь которой S, то в этой области существует такая точка $(x_0;y_0)$, что

$$\iint_D f(x;y)dxdy = f(x_0;y_0) \cdot S.$$

Величину $f(x_0;y_0) = \frac{1}{S} \cdot \iint_D f(x;y)dxdy$ называют средним значением функции $f(x;y)$ в области D.

2. Способы вычисления двойного интеграла.

Если область D определяется неравенствами $a \le x \le b$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, причем каждая из непрерывных кривых $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ пересекается с вертикалью $x = X$ ($x_1 < X < x_2$) только в одной точке, то

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy,$$

где при вычислении $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy$ величину x полагают постоянной.

Если область D определяется неравенствами $c \le y \le d$, $x_1(y) \le x \le x_2(y)$, причем каждая из непрерывных кривых $x = x_1(y)$ и $x = x_2(y)$ пересекается с горизонталью $y = Y$ ($y_1 < Y < y_2$) только в одной точке, то

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x;y)dx,$$

где при вычислении $\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x;y)dx$ величину y полагают постоянной.

1. 32 Лекция № 32 (2 часа).

Тема: «Приложения двойного интеграла»

1.32.1 Вопросы лекции:

1. Геометрический смысл двойного интеграла
2. Физический смысл двойного интеграла

1.32.2 Краткое содержание вопросов:

1. Геометрический смысл двойного интеграла

Цилиндрическим телом называется тело, ограниченное сверху поверхностью $z = f(x;y) \geq 0$, снизу – замкнутой областью D плоскости xOy, с боков – цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси Oz, а направляющей служит граница области D.

Объем цилиндрического тела находится по формуле:

$$V = \iint\limits_D f(x;\, y)dxdy.$$

Замечание. В частном случае, когда $f(x;y)=1$, двойной интеграл равен площади области D и определяется формулой:

$$S = \iint\limits_D dxdy.$$

2. Физический смысл двойного интеграла

Если область D – плоская пластинка, лежащая в плоскости xOy, с поверхностной плотностью $\gamma(x;y)$, то массу пластинки вычисляют по формуле:

$$m = \iint\limits_D \gamma(x;y)dxdy,$$

статические моменты пластинки относительно осей Ox и Oy вычисляют по формулам:

$$S_x = \iint\limits_D y\gamma(x;y)dxdy; \quad S_y = \iint\limits_D x\gamma(x;y)dxdy,$$

координаты центра тяжести пластинки находят по формулам:

$$\bar{x} = \frac{S_y}{m}; \quad \bar{y} = \frac{S_x}{m}.$$

Замечание. В случае однородной пластинки (поверхностная плотность равна единице), занимающей область D плоскости xOy, координаты центра тяжести $\bar{x}, \bar{y}$ находят по формулам:

$$\bar{x} = \frac{1}{S}\iint\limits_D x\,dxdy,\ \bar{y} = \frac{1}{S}\iint\limits_D y\,dxdy,$$

где S – площадь области D.

1. 33 Лекция № 33 (2 часа).

Тема: «Основные понятия дифференциальных уравнений»

1.33.1 Вопросы лекции:

1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
2. Частные и общие решения.
3. ДУ первого порядка. Задача Коши.
4. ДУ с разделенными и разделяющимися переменными.

1.33.2 Краткое содержание вопросов:

1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

Решение различных геометрических, физических и инженерных задач часто приводят к уравнениям, которые связывают независимые переменные, характеризующие ту ил иную задачу, с какой – либо функцией этих переменных и производными этой функции различных порядков.

Скорость распада радия пропорциональна количеству радия в данный момент времени (период полураспада равен 1600 лет).

Скорость охлаждения воды пропорциональна разности температур воды в резервуаре и в окружающей его среде.

2. Частные и общие решения.

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную, функцию этой переменной и производные (или дифференциалы) этой функции.

Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется *порядком дифференциального уравнения.*

Общим интегралом дифференциального уравнения называется любое уравнение, не содержащее производных и дифференциалов, для которого данное дифференциальное уравнение является следствием.

Интегральной кривой называется график $y=\varphi(x)$ решения дифференциального уравнения на плоскости xOy.

3. ДУ первого порядка. Задача Коши.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется такая дифференцируемая функция $y=\varphi(x,C)$, которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

Если при каких-либо начальных условиях $x=x_0$, $y(x_0)=y_0$ существует такое значение $C=C_0$, при котором решением дифференциального уравнения является функция $y=\varphi(x,C_0)$, то функция $y=\varphi(x,C_0)$ называется *частным решением* дифференциального уравнения первого порядка.

Задачей Коши называется нахождение частного решения дифференциального уравнения вида $y=\varphi(x,C_0)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0)=y_0$.

4. ДУ с разделенными и разделяющимися переменными.

Дифференциальное уравнение $y'=f(x,y)$ называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если его можно записать в виде $y'=\alpha(x)\beta(y)$.

Такое уравнение можно представить также в виде: $X(x)dx+Y(y)dy=0$;

$$\int X(x)dx+\int Y(y)dy=C$$

После нахождения соответствующих интегралов получается общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

Если заданы начальные условия, то при их подстановке в общее решение находится постоянная величина С, а, соответственно, и частное решение.

1.34 Лекция № 34 (2 часа).

Тема: «Дифференциальные уравнения первого порядка»

1.34.1 Вопросы лекции:

1. ЛДУ первого порядка. Методы Лагранжа и Бернулли
2. Уравнения Бернулли. Метод Бернулли.

1.34.2 Краткое содержание вопросов:

1. ЛДУ первого порядка. Методы Лагранжа и Бернулли

Дифференциальное уравнение называется *линейным* относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде:

$$y'+P(x)y=Q(x),$$

при этом если правая часть *Q(x)* равна нулю, то такое уравнение называется *линейным однородным* дифференциальным уравнением, если правая часть *Q(x)* не равна нулю, то такое уравнение называется *линейным неоднородным* дифференциальным уравнением.

Суть метода Бернулли заключается в том, что искомая функция представляется в виде произведения двух функций $y=uv$.

При этом очевидно, что $y' = u \cdot \dfrac{dv}{dx} + v \cdot \dfrac{du}{dx}$ - дифференцирование по частям.

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + P(x)uv = Q(x) \quad \text{или} \quad u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) = Q(x)$$

Далее следует условие – выражение в скобках приравнивается к нулю и находится функция $u = u(x)$, затем другая функция.

2. Уравнения Бернулли. Метод Бернулли.

Уравнением Бернулли называется уравнение вида $y' + Py = Q \cdot y^n$, где P и Q – функции от x или постоянные числа, а n – постоянное число, не равное 1.

Метод решения: метод Бернулли.

Пример. Найти частное решение уравнения $y' - y \cdot tgx = -y^2 \cos x$, удовлетворяющее условию $y(0) = 0{,}5$.

Данное уравнение является уравнением Бернулли: $y' + f(x)y = y^n g(x), \quad n \neq 1, \quad n \neq 0$; $f(x)$ и $g(x)$ – известные функции. Для его решения (как и для линейного уравнения) применяем подстановку $y(x) = u(x) \cdot \upsilon(x)$, где $u(x), \upsilon(x)$ – непрерывные функции аргумента x. Найдём производную $y'(x)$, применив правило дифференцирования произведения двух функций:

$$y'(x) = u'(x) \cdot \upsilon(x) + u(x) \cdot \upsilon'(x),$$

$$y' = u'\upsilon + u\upsilon'.$$

Тогда данное уравнение примет вид:

$$u'\upsilon + u\upsilon' - u\upsilon \cdot tgx = -u^2 v^2 \cos x$$

или

$$v(u' - u \cdot tgx) + uv' = -u^2 v^2 \cos x.$$

Выберем функцию $u(x)$ так, чтобы $u' - u \cdot tgx = 0$.

При таком выборе функции $u(x)$ мы получаем два уравнения:

а) $u' - u \cdot tgx = 0$;

б) $\upsilon' = -u v^2 \cos x$.

Первое уравнение (а) является уравнением с разделяющими переменными относительно u и x.

$$\frac{du}{dx} - u \cdot tgx = 0, \quad \frac{du}{u} = tgx \cdot dx, \quad \int \frac{du}{u} = \int tgx dx, \quad \ln u = -\ln\cos x, \quad u = \frac{1}{\cos x}.$$

Здесь произвольная постоянная $C = 0$. Подставив найденное значение u в уравнение (б), получим:

$$\upsilon' = -\frac{1}{\cos x} \cdot v^2 \cdot \cos x, \quad \frac{d\upsilon}{-v^2} = dx, \quad \frac{1}{v} = x + C, \quad \upsilon = \frac{1}{x + C}.$$

Тогда:

$$y = u \cdot \upsilon = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{x + C} = \frac{1}{(x + C)\cos x}$$

или

$$y = \frac{1}{(x + C)\cos x}$$ – общее решение заданного уравнения.

Используя начальные условия, находим значение произвольной постоянной C.

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{(0 + C)\cos 0}, \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{C}, \quad C = 2.$$

Следовательно, $y=\dfrac{1}{x+2\cos x}$ – частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

1. 35 Лекция № 35 (2 часа).

Тема: «Дифференциальные уравнения первого порядка (продолжение)»

1.35.1 Вопросы лекции:

1. Однородные ДУ и приводящиеся к ним.
2. ДУ в полных дифференциалах.

1.35.2 Краткое содержание вопросов:

1. Однородные ДУ и приводящиеся к ним.

Функция $f(x;y)$ называется *однородной n – го измерения* относительно своих аргументов x и y, если для любого значения параметра t (кроме нуля) выполняется тождество: $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$.

Дифференциальное уравнение вида $y'=f(x,y)$ называется **однородным**, если его правая часть $f(x;y)$ есть однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов.

Любое уравнение вида $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ является однородным, если функции *P(x, y)* и *Q(x, y)* – однородные функции одинакового измерения.

Решение любого однородного уравнения основано на приведении этого уравнения к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой вида $t=\dfrac{y}{x}$, $y'=t'x+t$.

2. ДУ в полных дифференциалах.

Дифференциальное уравнение первого порядка вида: $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ называется *уравнением в полных дифференциалах*, если левая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u=F(x,y)$.

Интегрирование такого уравнения сводится к нахождению функции *u*, после чего решение легко находится в виде: $du=0;\quad u=C.$

Условие тотальности – это **необходимое и достаточное условие** того, что левая часть дифференциального уравнения является полным дифференциалом**:**

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Общий интеграл исходного дифференциального уравнения имеет вид:

$$\int M(x,y)dx+\int\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)dx\right]dy=C.$$

Виды дифференциальных уравнений первого порядка

Вид ДУ	Название	Способ решения
$f(y)dy=g(x)dx$	С разделенными переменными	Интегрирование обеих частей равенства
$y'=g(x)f(y)$	С разделяющимися переменными	«Разделяй и интегрируй»
$y'=f(x;y)$, $f(\lambda x;\lambda y)=f(x;y)$	Однородное	Подстановка $t=\dfrac{y}{x}$, $y'=t'x+t$
$y'+p(x)\cdot y=f(x)$	Линейное	Метод Бернулли: $y=u\cdot v$, $y'=u'\cdot v+u\cdot v'$
$y'+p(x)\cdot y=f(x)\cdot y^n$,	Уравнение	Метод Бернулли:

$n \neq 0,\ n \neq 1$	Бернулли	$y = u \cdot v,\ \ y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
$P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0,$ $P'_y(x;y) = Q'_x(x;y)$	В полных дифференциалах	$u(x;y) = \int P(x;y)dx + \varphi(y)$; $u(x;y) = \int Q(x;y)dy + h(x)$. $u(x;y) = C$ – общий интеграл

3 семестр

1. 36 Лекция № 36 (2 часа).

Тема: «ДУ высших порядков»

1.36.1 Вопросы лекции:

1. Основные понятия.
2. ДУ, допускающие понижение порядка.

1.36.2 Краткое содержание вопросов:

1. Основные понятия.

Дифференциальным уравнением порядка n называется уравнение вида:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

В некоторых случаях это уравнение можно разрешить относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}).$$

Так же как и уравнение первого порядка, уравнения высших порядков имеют бесконечное количество решений.

Решение $y = \varphi(x)$ удовлетворяет начальным условиям $x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$, если $\varphi(x_0) = y_0,\quad \varphi'(x_0) = y'_0,\quad ....\quad,\quad \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Нахождение решения уравнения $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$, называется *решением задачи Коши*.

Теорема Коши. (Теорема о необходимых и достаточных условиях существования решения задачи Коши): *Если функция (n-1) –й переменных вида* $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ *в некоторой области D (n-1)- мерного пространства непрерывна и имеет непрерывные частные производные по* $y, y', ..., y^{(n-1)}$, *то какова бы не была точка (* $x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$*) в этой области, существует единственное решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$, *определенного в некотором интервале, содержащем точку* x_0, *удовлетворяющее начальным условиям* $x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$.

Дифференциальные уравнения высших порядков, решение которых может быть найдено аналитически, можно разделить на несколько основных типов.

2. ДУ, допускающие понижение порядка.

Уравнения вида $y'' = f(x)$, $F(x; y'; y'') = 0$, $F(y; y'; y'') = 0$ называются *неполными дифференциальными уравнениями*, допускающими понижение порядка.

Понижение порядка дифференциального уравнения – основной метод решения уравнений высших порядков. Этот метод дает возможность сравнительно легко находить решение, однако, он применим далеко не ко всем уравнениям.

Вид ДУ	Особенность	Способ решения
$y'' = f(x)$	Не содержащее y и y'	Двукратное интегрирование
$F(x; y'; y'') = 0$	Не содержащее y	Подстановка $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$
$F(y; y'; y'') = 0$	Не содержащее x	Подстановка $y' = p(y)$, $y'' = p' \cdot p$

1. 37 Лекция № 37 (2 часа).

Тема: «ЛОДУ второго порядка»

1.37.1 Вопросы лекции:

1. Линейно зависимые и линейно независимые функции.
2. ФСР. Определитель Вронского.
3. Структура общего решения ЛОДУ.
4. Характеристическое уравнение.

1.37.2 Краткое содержание вопросов:

1. Линейно зависимые и линейно независимые функции.

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются *линейно независимыми* на интервале $(a;b)$, если равенство $\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)=0$, где $\alpha_1,\alpha_2 \in R$, выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha_1=\alpha_2=0$.

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются *линейно зависимыми* на интервале $(a;b)$, если хотя бы одно из чисел α_1 или α_2 отлично от нуля и выполняется равенство $\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)=0$, где $\alpha_1,\alpha_2 \in R$.

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ *линейно зависимы* на интервале $(a;b)$ тогда и только тогда, когда они пропорциональны, т.е. для всех $x\in(a;b)$ выполняется равенство $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}=\lambda$, $\lambda - const$.

2. ФСР. Определитель Вронского.

Для двух дифференцируемых функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ *определителем Вронского (вронскианом)* называется определитель вида

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Если дифференцируемые функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы на интервале $(a;b)$, то на этом интервале определитель Вронского $W(x)\equiv 0$.

Если дифференцируемые функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы на интервале $(a;b)$, то определитель Вронского на этом интервале нигде не обращается в нулю.

Линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ) второго порядка называется уравнение вида $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, где $p(x)$ и $q(x)$ – функции, зависящие от аргумента x.

Теорема. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются частными решениями уравнения $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, то решением этого уравнения является также функция $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Фундаментальной системой решений ЛОДУ второго порядка называется совокупность двух линейно независимых решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

3. Структура общего решения ЛОДУ.

Теорема (структура общего решения ЛОДУ второго порядка). Если два частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ ЛОДУ второго порядка образуют фундаментальную систему, то общим решением этого уравнения является совокупность функций $y=C_1\cdot y_1(x)+C_2\cdot y_2(x)$, где $C_1, C_2 \in R$.

Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка $y''+2y'-3y=0$. Находим общее решение однородного уравнения $y''+2y'-3y=0$. Характеристическое уравнение $k^2+2k-3=0$ имеет корни $k_1=-3$ и $k_2=1$. Следовательно, $y_0=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}$.

4. Характеристическое уравнение.

Если коэффициенты p и q постоянны, то уравнение $y'' + py' + qy = 0$ называется *линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами*.

Характеристическим уравнением ЛОДУ второго порядка $y'' + py' + qy = 0$ называется квадратное уравнение вида $k^2 + pk + q = 0$.

Вид ДУ	Название	Способ решения
$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$	ЛОДУ с постоянными коэффициентами	С помощью характеристического уравнения $k^2 + p \cdot k + q = 0$: а) $D > 0$: $k_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2} \Rightarrow y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$; б) $D = 0$: $k_1 = k_2 = \frac{-p}{2} \Rightarrow y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x}$; в) $D < 0$: $a = \frac{-p}{2}$; $b = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} \Rightarrow$ $y = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx$;

1. 38 Лекция № 38 (2 часа).

Тема: «ЛНДУ второго порядка»

1.38.1 Вопросы лекции:

1. Структура общего решения ЛНДУ.
2. ЛНДУ второго порядка с правой частью специального вида. Подбор частного решения.
3. Системы дифференциальных уравнений.

1.38.2 Краткое содержание вопросов:

1. Структура общего решения ЛНДУ.

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ) второго порядка называется уравнение вида $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$, где $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – функции, зависящие от аргумента x.

Теорема (структура общего решения ЛНДУ второго порядка). Общим решением $y_{о.н}$ ЛНДУ второго порядка $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$ является сумма общего решения $y_{о.о}$ соответствующего ЛОДУ второго порядка $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$ и его произвольного частного решения $y_{ч.н}$: $y_{о.н} = y_{о.о} + y_{ч.н}$.

2. Метод Лагранжа.

Если $y_{о.о} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ - общее решение ЛОДУ $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$, то общее решение ЛНДУ $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$ равно $y_{о.н} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$ при условии, что $C_1(x) = \int \frac{y_2 f(x)}{W(x)} dx$, $C_2(x) = -\int \frac{y_1 f(x)}{W(x)} dx$, $W(x)$ – определитель Вронского для частных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

3. ЛНДУ второго порядка с правой частью специального вида. Подбор частного решения.

Вид ДУ	Название	Способ решения
$y'' + p \cdot y' + q \cdot y =$ $= f(x)$	ЛНДУ с постоянными коэффициентами и правой частью	Вид правой части: I. $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x) \Rightarrow y_{ч.н} = x^l \cdot e^{\alpha x} \widehat{P}_n(x)$ II. $f(x) = e^{\alpha x} \cdot (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x) \Rightarrow$

	специального вида	$y_{ч.н} = x^l \cdot e^{\alpha x} \left(\widehat{P}_s(x)\cos\beta x + \widehat{Q}_s(x)\sin\beta x\right)$ l – число совпадений $\alpha + \beta i$ с корнями характеристического уравнения; $s = \max\{n; m\}$; $\widehat{P}_0(x) = A$; $\widehat{P}_1(x) = Ax + B$; $\widehat{P}_2(x) = Ax^2 + Bx + C$ – многочлены с неопределенными коэффициентами

1. 39 Лекция № 39 (2 часа).

Тема: «Знакоположительные ряды»

1.39.1 Вопросы лекции:

1. Понятие числового ряда.
2. Примеры сходящихся и расходящихся рядов.
3. Свойства рядов.
4. Признаки сходимости знакоположительных рядов.
5. Эталонные ряды.

1.39.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие числового ряда.

Числовым рядом называется бесконечное выражение вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n ,$$

где $a_1, a_2, a_3, \ldots$ – члены ряда, a_n – общий член ряда.

Частичные суммы ряда

$S_1 = a_1;\quad S_2 = a_1 + a_2;\quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3;\quad \ldots\quad S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$.

$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ – последовательность частичных сумм ряда.

Если предел последовательности частичных сумм существует и конечен, то это число S называется *суммой ряда*, а сам ряд называют *сходящимся*:

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n .$$

Если предела последовательности частичных сумм не существует или этот предел равен бесконечности, то ряд называется *расходящимся,* и он суммы не имеет.

2. Примеры сходящихся и расходящихся рядов.

Примеры сходящихся рядов: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 5^n}$; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{72}{n^2 + 6n + 8}$.

Примеры расходящихся рядов: $3 - 3 + 3 - 3 + 3 - 3 + \ldots$; $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \ldots$.

Найти сумму ряда $\frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9} + \ldots + \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} + \ldots$.

Решение. Общий член a_n можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$\frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} .$$

Тогда n – ая частичная сумма ряда $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ равна:

$$S_n = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} .$$

По определению суммы ряда получаем:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

3. Свойства рядов.

1. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}c\cdot a_n$, где $c=const$, также сходится и его сумма равна $c\cdot S$.

2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится с суммой S_1 и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ сходится с суммой S_2, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ сходится и его сумма равна $S_1\pm S_2$.

3. Отбрасывание и дописывание конечного числа членов ряда не меняет факта сходимости, но меняет сумму сходящегося ряда.

Следствия из свойств рядов:

1. Сумма сходящегося и расходящегося рядов есть ряд расходящийся.

2. Разность или сумма двух расходящихся рядов, может быть как сходящимся, так и расходящимся рядом.

3. Произведение расходящегося ряда на действительное число, отличное от нуля, есть расходящийся ряд.

Необходимое условие сходимости ряда: если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

Достаточный признак расходимости ряда: если $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится.

4. Признаки сходимости знакоположительных рядов.

Числовой ряд, в котором все члены положительны, называется *знакоположительным*.

Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов:

1. Признак Даламбера.

Дан знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и существует $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=D$. Тогда при: а) $D>1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится; б) $D<1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится; в) при $D=1$ вопрос о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ остается открытым.

2. Радикальный признак Коши.

Дан знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и существует $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=K$. Тогда при: а) $K>1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится; б) $K<1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится; в) при $K=1$ вопрос о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ остается открытым.

3. Интегральный признак Коши.

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ таковы, что $a_n=f(n),\forall n\in N$, где $f(x)$ - непрерывная, положительная, монотонно убывающая на $[a;+\infty)$ $(a\geq 1)$ функция, то этот ряд сходится (расходится) тогда и только тогда, когда сходится (расходится) несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\cdot dx$.

5. Эталонные ряды.

1. Ряд геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty} b_1\cdot q^{n-1} = b_1 + b_1\cdot q + b_1\cdot q^2 + ...$: сходится при $|q|<1$; расходится при $|q|\ge 1$.

2. Обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$: сходится при $\alpha>1$; расходится при $\alpha\le 1$.

3. Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится (получается из обобщенного гармонического ряда при $\alpha=1$).

1. 40 Лекция № 40 (2 часа).

Тема: «Знакочередующиеся ряды»

1.40.1 Вопросы лекции:

1. Понятие знакочередующегося ряда.
2. Признак Лейбница.
3. Знакопеременные ряды. Достаточный признак сходимости.
4. Абсолютная и условная сходимость.

1.40.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие знакочередующегося ряда.

Знакочередующимся рядом называется ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$, где $a_n>0$ ($\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot a_n, \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$).

2. Признак Лейбница.

Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда: знакочередующийся ряд $a_1-a_2+a_3-a_4+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ сходится, если а) $a_n>a_{n+1}$ $(n=1, 2, ...)$; б) $\lim_{n\to\infty}a_n=0$; сумма знакочередующегося ряда не превосходит первого члена данного ряда.

3. Знакопеременные ряды. Достаточный признак сходимости.

Знакопеременным рядом называется ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, в котором присутствует бесчисленное множество положительных и бесчисленное множество отрицательных членов ряда.

Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда: если ряд, составленный из абсолютных величин знакопеременного ряда, сходится, то и сам знакопеременный ряд сходится, т.е.

если $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = |u_1|+|u_2|+...+|u_n|+...$ сходится, то и $\sum_{n=1}^{\infty}u_n = u_1+u_2+...+u_n+...$ сходится.

4. Абсолютная и условная сходимость.

Ряд с произвольными членами $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ называется *сходящимся абсолютно*, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *условно сходящимся.*

Признак Даламбера абсолютной сходимости.

Дан знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = D$. Тогда при: а) $D > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится; б) $D < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится; в) $D = 1$ вопрос остается открытым.

Радикальный признак Коши абсолютной сходимости.

Дан знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = K$. Тогда при: а) $K > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится; б) $K < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится; в) $K = 1$ вопрос о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ остается открытым.

Свойства абсолютно сходящихся рядов

1) Для абсолютной сходимости ряда $\sum u_n$ необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде разности двух сходящихся рядов с неотрицательными членами.

Следствие. Условно сходящийся ряд является разностью двух расходящихся рядов с неотрицательными стремящимися к нулю членами.

2) В сходящемся ряде любая группировка членов ряда, не изменяющая их порядка, сохраняет сходимость и величину ряда.

3) Если ряд сходится абсолютно, то ряд, полученный из него любой перестановкой членов, также абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Перестановкой членов условно сходящегося ряда можно получить условно сходящийся ряд, имеющий любую наперед заданную сумму, и даже расходящийся ряд.

1. 41 Лекция № 41 (2 часа).

Тема: «Функциональные ряды»

1.41.1 Вопросы лекции:

1. Понятие функционального ряда.
2. Равномерная сходимость.
3. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус и интервал сходимости.
4. Ряд Тейлора и Маклорена. Разложение элементарных функций в ряд.
5. Применение рядов.

1.41.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие функционального ряда.

Функциональным рядом называется ряд вида

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

где $u_n(x) -$ функции, зависящие от аргумента x.

Совокупность значений x, при каждом из которых соответствующий числовой ряд сходится, называется *областью сходимости* функционального ряда.

В области сходимости определены функции:

$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$ $-$ $n-$я частичная сумма функционального ряда;

$S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ $-$ сумма функционального ряда.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$.

2. Равномерная сходимость.

Членами ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ являются функции, заданные на одном и том же интервале $[a;b]$, $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$ – сумма функционального ряда.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется сходящимся равномерно, если $\max_{a\le x\le b} |S(x) - S_n(x)| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Для проверки равномерной сходимости применяется достаточный признак Вейерштрасса:

Если все $|f_n(x)| \le a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, $n = 1,2,3...$, $a \le x \le b$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится.

Свойства равномерно сходящихся рядов:

1) Сумма равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций также не может иметь разрывов.

2) Ряд, сходящийся равномерно, можно почленно интегрировать.

3) Ряд, сходящийся равномерно, можно почленно дифференцировать.

3. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус и интервал сходимости.

Степенным рядом называют ряд вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

или

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ (если } x_0 = 0\text{)},$$

где $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ – коэффициенты ряда.

Теорема Абеля. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при $x = x_1$ ($x_1 \ne 0$), то он сходится абсолютно при всех x, удовлетворяющих условию $|x| < |x_1|$; если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится при $x = x_2$ ($x_2 \ne 0$), то он расходится при всех x, удовлетворяющих условию $|x| > |x_2|$

Неотрицательное число R, такое, что степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ сходится в интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$ и расходится вне этого интервала, называется *радиусом сходимости* этого ряда, а интервал $(x_0 - R; x_0 + R)$ – его *интервалом сходимости*.

Для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$: если R – его радиус сходимости, то $(-R; R)$ – интервал сходимости.

Замечание. Величину R можно найти или исследованием абсолютной сходимости ряда по признаку Даламбера, или (если все $a_i \ne 0$) по формуле $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$.

Основные свойства степенных рядов:

1. Сумма степенного ряда при всех значениях x из интервала сходимости есть непрерывная функция.

2. Степенной ряд в его интервале сходимости можно почленно дифференцировать, т.е. $S'(x)=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}$.

3. Степенной ряд можно интегрировать по любому отрезку, содержащемуся в интервале сходимости, причем

$$\int\limits_0^x S(t)dt=\int\limits_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^{n+1}}{n+1},\ |x|<R.$$

4. Ряд Тейлора и Маклорена. Разложение элементарных функций в ряд.

Если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ с областью сходимости Ω, то этот ряд является ее рядом Тейлора в точке x_0:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots .$$

Частный вид ряда Тейлора при $x_0=0$ принято называть рядом Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots .$$

Разложение в степенной ряд элементарных функций

1) $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$; сходится при $x\in(-\infty;+\infty)$.

2) $a^x=1+\frac{x}{1}\ln a+\frac{x^2}{2}(\ln a)^2+\frac{x^3}{3}(\ln a)^3+\ldots$; сходится при $x\in(-\infty;+\infty)$.

3) $\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$; сходится при $x\in(-\infty;+\infty)$.

4) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$; сходится при $x\in(-\infty;+\infty)$.

5) $tgx=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+\ldots$; сходится при $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$.

6) $ctgx=\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{45}x^3+\frac{2}{945}x^5+\frac{2}{4725}x^7+\ldots\right)$; сходится при $-\pi<x<\pi$.

7) $\ln(1\pm x)=\pm x-\frac{x^2}{2}\pm\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\pm\frac{x^5}{5}-\ldots$; сходится при $-1<x<1$.

8) $arc\sin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots$; сходится при $-1\le x\le1$.

9) $arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$; сходится при $-1\le x\le1$.

10) $(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots$ - биномиальный ряд; сходится в промежутке $(-1;1)$.

Замечание. При m целом и положительном ряд конечен, в противном случае – бесконечен.

5. Применение рядов.

Пример. Вычислить $\cos100^\circ$ с точностью до $0,0001$.

Решение. Так как $\cos 100^\circ = \cos(90^\circ + 10^\circ) = -\sin 10^\circ$, а $10^\circ = \dfrac{\pi}{18}$ (радиан), то применяя $\sin x = \dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots$ и полагая $x = \dfrac{\pi}{18}$, имеем:

$$-\sin 10^\circ = -\left(\frac{\pi/18}{1!} - \frac{(\pi/18)^3}{3!} + \frac{(\pi/18)^5}{5!} - \frac{(\pi/18)^7}{7!} + \ldots\right) \approx -(0{,}17453 - 0{,}00089 + 0{,}00000) =$$

$$= -0{,}17364 \approx -0{,}1736.$$

Ответ: $-0{,}1736$.

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^1 x \sin\sqrt{x}dx$ с точностью до $0{,}001$.

Решение. Предварительно представим подынтегральную функцию в виде степенного ряда, для этого используем разложение функции $\sin x$ в степенной ряд: $\sin x = \dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots$; сходится при всех значениях x.

Заменив x в разложении функции $\sin x$, на $\sqrt{x}$, получим:

$$\sin\sqrt{x} = \sqrt{x} - \frac{(\sqrt{x})^3}{3!} + \frac{(\sqrt{x})^5}{5!} - \frac{(\sqrt{x})^7}{7!} + \ldots.$$

$$x\sin\sqrt{x} = x\sqrt{x} - \frac{x(\sqrt{x})^3}{3!} + \frac{x(\sqrt{x})^5}{5!} - \frac{x(\sqrt{x})^7}{7!} + \ldots = x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{3!} + \frac{x^{\frac{7}{2}}}{5!} - \frac{x^{\frac{9}{2}}}{7!} + \ldots.$$

$$\int_0^1 x\sin\sqrt{x}\,dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{3!} + \frac{x^{\frac{7}{2}}}{5!} - \frac{x^{\frac{9}{2}}}{7!} + \ldots \right) dx = \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7\cdot 3!} + \frac{2x^{\frac{9}{2}}}{9\cdot 5!} - \frac{2x^{\frac{11}{2}}}{11\cdot 7!} + \ldots \right]\Bigg|_0^1 \approx$$

$$\approx 0{,}4 - 0{,}0476 + 0{,}0019 - 0{,}0000 + \ldots = 0{,}3543 \approx 0{,}354.$$

Ответ: $0{,}354$.

1. 42 Лекция № 42 (2 часа).

Тема: «Основы теории вероятностей»

1.42.1 Вопросы лекции:

1. Комбинаторика.
2. Испытание и событие. Виды событий, их классификация.
3. Понятие вероятности случайного события. Свойства вероятности.
4. Решение задач на нахождение вероятности.

1.42.2 Краткое содержание вопросов:

1. Комбинаторика.

Размещениями A_n^k называются комбинации, составленные из *n* различных элементов по *k* элементов, отличающиеся одна от другой или самими элементами, или порядком их следования.

Число всевозможных размещений из *n* элементов по *k* вычисляется по формуле:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-k+1)$$

Полагают, что $A_1^0 = 1$.

Перестановками называются комбинации, состоящие из одних и тех же *n* различных элементов и отличающихся только порядком их следования.

Число всевозможных перестановок из n элементов обозначают символом P_n и вычисляют по формуле:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n = n!$$

Сочетаниями называются комбинации, составленные из n различных элементов по k элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по k принято обозначать символом C_n^k. Это число вычисляется по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Правило суммы. Если элемент a можно выбрать m способами, а элемент b – n способами, то выбор «a или b» можно сделать $m+n$ способами.

Правило произведения. Если элемент a можно выбрать m способами, и после каждого такого выбора элемент b может быть выбран n способами, то выбор «a и b» в указанном порядке можно сделать $m \cdot n$ способами.

2. Испытание и событие. Виды событий, их классификация.

Испытание – опыт, действие или набор каких-либо условий.

Событие – качественный результат испытания.

Такое событие, которое при наличии некоторого комплекса условий может произойти или не произойти, называется *случайным* событием. Событие называется *достоверным*, если оно обязательно произойдет, если только будет осуществлена определенная совокупность условий. Событие называется *невозможным*, если оно при выполнении определенного комплекса условий заведомо не произойдет.

События A, B, C, D называются *несовместными*, если наступление какого-либо из них в условиях испытания исключает всякую возможность появления другого события этой совокупности.

События A, B, C, D называются *совместными*, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает возможность появления другого события этой совокупности.

События A, B, C, D считают *единственно возможными* в данном испытании, если одно из этих событий и притом только одно, обязательно произойдет.

События A, B, C, D называются *равновозможными*, если нет основания предполагать большую возможность появления одного из них перед всеми остальными.

Два единственно возможных и несовместных события называются *противоположными*. Если одно из взаимно противоположных событий обозначено через А, то другое принято обозначать $\overline{A}$.

Если события A, B, C, D при данных условиях являются несовместными и единственно возможными, то говорят, что они образуют *полную систему (полную группу) событий.*

3. Понятие вероятности случайного события. Свойства вероятности.

Вероятностью события А называется математическая оценка возможности появления этого события в результате опыта.

Классическое определение вероятности. Вероятностью события A называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению события A, к числу n всевозможных исходов: $P(A) = \dfrac{m}{n}$.

Свойства вероятности события:

1) Вероятность достоверного события равна единице.

2) Вероятность невозможного события равна нулю.

3) Вероятность случайного события – безразмерная величина, заключенная в интервале $[0;1]$.

Относительной частотой события A называется отношение числа m^* испытаний, в которых событие A появилось, к общему числу n^* фактически произведенных испытаний: $W(A)=\dfrac{m^*}{n^*}$.

4. Решение задач на нахождение вероятности.

В партии из 20 деталей находятся 4 бракованных. Наугад выбирают 5 деталей. Найти вероятность того, что среди выбранных деталей две окажутся бракованными.

Решение. Вероятность вычислим, используя классическое определение вероятности $P(A)=\dfrac{m}{n}$. Число n всевозможных исходов равно числу сочетаний из 20 по 5, т.е.

$$n=C_{20}^5=\frac{20!}{5!(20-5)!}=\frac{20!}{5!\cdot 15!}=\frac{16\cdot17\cdot18\cdot19\cdot20}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=15504.$$

Подсчитаем число исходов m, благоприятствующих событию A. Среди 5 взятых наугад деталей должно быть 2 бракованных, остальные три – качественных. Число способов выбора двух бракованных деталей из 4 имеющихся бракованных равно числу сочетаний из 4 по 2:

$$C_4^2=\frac{4!}{2!(4-2)!}=\frac{4!}{2!\cdot 2!}=\frac{3\cdot4}{1\cdot2}=6.$$

Число способов выбора трех качественных деталей из $20-4=16$ имеющихся качественных равно числу сочетаний из 16 по 3:

$$C_{16}^3=\frac{16!}{3!(16-3)!}=\frac{16!}{3!\cdot 13!}=\frac{14\cdot15\cdot16}{1\cdot2\cdot3}=560.$$

Любая группа качественных деталей может комбинироваться с любой группой бракованных, поэтому общее число исходов m по правилу произведения равно

$$m=C_4^2\cdot C_{16}^3=6\cdot560=3360.$$

Тогда искомая вероятность события равна

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3360}{15504}\approx 0{,}217.$$

Ответ: $0{,}217$.

1. 43 Лекция № 43 (2 часа).

Тема: «Основные теоремы теории вероятностей»

1.43.1 Вопросы лекции:

1. Сумма и произведение событий.
2. Теоремы сложения и умножения.
3. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.

1.43.2 Краткое содержание вопросов:

1. Сумма и произведение событий.

Суммой двух событий A и B называют новое событие, состоящее в появлении хотя бы одного из данных событий.

Два события называются *независимыми*, если появление одного из них не влияет на вероятность появления другого события в одном и том же испытании; в противном случае события называются *зависимыми*.

Произведением двух событий A и B называют новое событие, состоящее в совместном (одновременном) появлении данных событий.

Вероятность события B, вычисленная в предположении, что другое событие A уже осуществилось, называется *условной вероятностью* и записывается $P_A(B)$

2. Теоремы сложения и умножения.

Теорема 1. Вероятность наступления хотя бы одного из двух несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Следствие 1. Сумма вероятностей событий A_1, A_2, A_3, ... A_n, образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+...+P(A_n)=1$$

Следствие 2. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Теорема 2. Вероятность совместного наступления двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$$

Теорема 3. Вероятность совместного наступления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)$$

Теорема 4. Вероятность наступления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Замечание. Данные теоремы могут быть обобщены на три и более события.

3. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.

Теорема полной вероятности. Вероятность события *A*, которое может произойти при условии осуществления одного из несовместных событий (гипотез) $B_1, B_2, B_3, ..., B_n$, образующих полную группу, определяется формулой:

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+...+P(B_n)P_{B_n}(A)$$

Формулы Байеса. Пусть в результате испытания произошло событие А, которое могло наступить только с каждым из событий B_1, B_2, B_3, ..., B_n, образующих полную группу; $P(B_1), P(B_2), ..., P(B_n)$ заранее известны. Вероятности гипотез $B_1, B_2, ..., B_n$ после наступления события *A*, т.е. $P_A(B_i)$, $i=1, 2, ..., n$, вычисляются по формуле:

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(A)}.$$

1. 44 Лекция № 44 (2 часа).

Тема: «Повторные испытания»

1.44.1 Вопросы лекции:

1. Схема Бернулли. Формула Бернулли.
2. Локальная теорема Муавра – Лапласа.
3. Формула Пуассона.
4. Интегральная теорема Лапласа.

1.44.2 Краткое содержание вопросов:

1. Схема Бернулли. Формула Бернулли.

Пусть производятся n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления некоторого события A одинакова, не зависит от номера испытания и равна p,

$q = 1 - p$ – вероятность не появления события в одном испытании. $P_n(k)$ – вероятность появления в n испытаниях события A ровно k раз вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)!} p^k q^{n-k}.$$

Теорема. Вероятность наступления события A хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний равна $P_n = 1 - q^n$.

Пусть k_0 – число появлений события A, имеющего наибольшую вероятность при n испытаниях, тогда неравенство

$$np - q \le k_0 \le np + p$$

определяет *наивероятнейшее число появлений события* при повторении испытаний.

2. Локальная теорема Муавра – Лапласа.

Если число испытаний n велико, то применение формулы Бернулли приводит к громоздким вычислениям. Использование этой формулы становится практически невозможным. В таких случаях применяют приближенную формулу, которая выражает локальную теорему Лапласа.

Если вероятность наступления события А в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна p (p отлична от нуля и единицы), а число n достаточно велико, то вероятность $P_n(m)$ того, что в этих испытаниях событие А наступит m раз (безразлично в какой последовательности) вычисляется приближенно по формуле

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \text{ где } x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}, \text{ а } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

3. Формула Пуассона.

Применение асимптотической формулы локальной теоремы Лапласа для случая, когда вероятность p близка к нулю, приводит к значительному отклонению от точного значения $P_n(m)$. При малых значениях p (и при малых значениях q) применяют асимптотическую формулу Пуассона.

Если вероятность появления события А в каждом из n независимых испытаний мала, а число испытаний n достаточно велико, то вероятность того, что событие А наступит m раз, вычисляется приближенно по формуле

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad \text{где } \lambda = np.$$

4. Интегральная теорема Лапласа.

На практике часто требуется определить вероятность того, что событие А наступит не менее m_1 раз и не более m_2 раз, то есть число m определено неравенствами $m_1 \le m \le m_2$. В таких случаях применяют интегральную теорему Лапласа.

Если вероятность наступления события А в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна p (p отлична от нуля и единицы), а число n достаточно велико, то вероятность того, что событие А в таких испытаниях наступит не менее m_1 раз и не более m_2 раз, вычисляется приближенно по формуле:

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad \beta = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Функция $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{Z^2}{2}} dz$ называется функцией Лапласа. Имеются готовые таблицы значений этой функции. Если пользоваться готовыми значениями функции Лапласа, то формулу (16) можно записать так:

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

Функция $\Phi(x)$ является нечетной, то есть $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Поэтому таблица значений этой функции дается только для положительных чисел. Функция $\Phi(x)$ является монотонно возрастающей. при неограниченном возрастании x функция $\Phi(x)$ стремиться к 0,5.

1. 45 Лекция № 45 (2 часа).

Тема: «Дискретная случайная величина»

1.45.1 Вопросы лекции:

1. Понятие случайной величины. Ее виды.
2. Закон распределения и многоугольник распределения ДСВ.
3. Числовые характеристики, их свойства.

1.45.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие случайной величины. Ее виды.

Случайной называется величина, которая в результате испытания может принять то или иное числовое значение, причем заранее неизвестно, какое именно.

Дискретной (прерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

Непрерывной случайной величиной называется такая величина, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

2. Закон распределения и многоугольник распределения ДСВ.

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между всевозможными значениями и их вероятностями (обычно записывают в виде таблицы):

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n

Свойство закона распределения ДСВ: сумма вероятностей всевозможных значений ДСВ равна единице: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

3. Числовые характеристики, их свойства.

1) Математическое ожидание***:*** $M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_i p_i + ... + x_n p_n$

2) Дисперсия: $D(X) = M(X - M(X))^2$ или $D(X) = M(X^2) - M(X)^2$

3) Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Свойства математического ожидания	Свойства дисперсии
$M(C) = C$, $C = const$ $M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$ $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$ $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$	$D(C) = 0$, $C = const$ $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$ $D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X)$ $D(X \pm C) = D(X)$

1. 46 Лекция № 46 (2 часа).

Тема: «Виды распределений ДСВ»

1.46.1 Вопросы лекции:

1. Биномиальное распределение.
2. Распределение Пуассона.

3. Геометрическое и гипергеометрическое распределение.

1.46.2 Краткое содержание вопросов:

1. Биномиальное распределение.

Закон распределения случайной величины X, которая может принимать $n+1$ значение $(0, 1, 2, ..., n)$, описываемый формулой Бернулли, называется *биномиальным.*

Числовые характеристики: $M(X) = np$, $D(X) = npq$, $\sigma(X) = \sqrt{npq}$.

2. Распределение Пуассона.

Закон распределения случайной величины X, которая может принимать целые неотрицательные значения $(0, 1, 2, ..., n)$, описываемый формулой Пуассона, называется *законом Пуассона.*

Числовые характеристики: $M(X) = np$, $D(X) = np$, $\sigma(X) = \sqrt{np}$.

3. Геометрическое и гипергеометрическое распределение.

Пусть проводятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события А равна p $(0 < q < 1)$ и, следовательно, вероятность его не появления $q = 1 - p$. Испытания заканчиваются, как только появится событие А, то есть если событие А появилось в *k*-м испытании, то в предыдущих *k*-1 испытаниях оно не появилось.

Рассмотрим ДСВ X - число испытаний, которые нужно провести до первого появления событие А. Возможными значениями X являются натуральные числа: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, ...$.

Пусть в первых *k*-1 испытаниях событие А не наступило, а в *k*-м испытании появилось. Вероятность этого «сложного события», по теореме умножения вероятностей независимых событий,

$$P(X = k) = q^{k-1} p.$$

Полагая k=1, 2, … в формуле (*) получим геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q $(0 < q < 1)$. Поэтому распределение называют *геометрическим.*

Пусть в партии из N изделий имеется M стандартных ($M < N$). Из партии случайно отбирают n изделий, причем отобранное изделие перед отбором следующего не возвращается. Обозначим через X случайную величину – число m стандартных изделий среди n отобранных. Вероятность того, что среди n отобранных окажется ровно m стандартных вычисляется по формуле: $P(X = m) = \dfrac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$.

Формула определяет распределение вероятностей, которое называют гипергеометрическим.

1. 47 Лекция № 47 (2 часа).

Тема: «Характеристики НСВ»

1.47.1 Вопросы лекции:

1. Интегральная функция распределения, ее свойства
2. Дифференциальная функция распределения НСВ, ее свойства.
3. Числовые характеристики НСВ.

1.47.2 Краткое содержание вопросов:

1. Интегральная функция распределения, ее свойства

Интегральной функцией распределения называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x, т. е.

$$F(x) = P(X < x).$$

Функция распределения существует как для непрерывных, так и для дискретных случайных величин. Она полностью характеризует случайную величину и является одной из форм закона распределения.

Для дискретной случайной величины функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$$

Знак неравенства под знаком суммы показывает, что суммирование распространяется на те возможные значения случайной величины, которые меньше аргумента x.

Функция распределения дискретной случайной величины X разрывна и возрастает скачками при переходе через каждое значение x_i.

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю.

Таким образом, не имеет смысла говорить о каком – либо конкретном значении случайной величины. Интерес представляет только вероятность попадания случайной величины в какой – либо интервал, что соответствует большинству практических задач.

Перейдем к особенностям функции распределения дискретной и непрерывной случайных величин.

Для ДСВ график $F(x)$ имеет разрывный, ступенчатый вид. График расположен в полосе, ограниченной прямыми $y = 0$, $y = 1$.

2. Дифференциальная функция распределения НСВ, ее свойства.

Дифференциальной функцией распределения (плотностью вероятностей) $f(x)$ непрерывной случайной величины называют производную от интегральной функции распределения:

$$f(x) = F'(x)$$

Плотность распределения также называют **дифференциальной функцией**. Для описания дискретной случайной величины плотность распределения неприемлема.

Смысл плотности распределения состоит в том, что она показывает как часто появляется случайная величина X в некоторой окрестности точки x при повторении опытов.

Свойства $F(x)$	Свойства $f(x)$
1. $0 \le F(x) \le 1$ 2. $F(x_2) \ge F(x_1)$, если $x_2 > x_1$ 3. $P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$ 4. $F(x) = 0$ при $x \le a$; $F(x) = 1$ при $x \ge b$ 5. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$	1. $f(x) \ge 0$ 2. $P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ 3. $\int_a^b f(x)dx = 1$, $X \in [a; b]$

3. Числовые характеристики НСВ.

1) Математическое ожидание: $M(X) = \int_a^b x\, f(x)dx$.

2) Дисперсия: $D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 f(x)dx$ или $D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - (M(X))^2$.

3) Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

1. 48 Лекция № 48 (2 часа).

Тема: «Виды распределений НСВ»

1.48.1 Вопросы лекции:

1. Равномерное распределение.
2. Показательное распределение.
3. Нормальный закон распределения, его параметры.
4. Кривая Гаусса. Ее свойства и график.

1.48.2 Краткое содержание вопросов:

1. Равномерное распределение.

Непрерывная случайная величина имеет *равномерное* распределение на отрезке $[a,b]$, если на этом отрезке плотность распределения случайной величины постоянна, а вне его равна нулю:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при\ x<a\\ \dfrac{1}{b-a}, & при\ a\le x\le b\\ 0, & при\ x>b\end{cases}$$

$F(x)=\begin{cases}0, & при\ x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & при\ a\le x\le b\\ 1, & при\ x>b\end{cases}$ - интегральная функция равномерного распределения.

Числовые характеристики: $M(X)=\dfrac{a+b}{2}$, $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$, $\sigma(X)=\dfrac{\sqrt{3}(b-a)}{6}$.

$P(\alpha<X<\beta)=\dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$ – вероятность попадания в заданный интервал.

2. Показательное распределение.

Показательным (экспоненциальным) называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которое описывается плотностью:

$f(x)=\begin{cases}0, & при\quad x<0,\\ \lambda\cdot e^{-\lambda x}, & при\quad x\ge 0\end{cases}$, $F(x)=\begin{cases}0, & при\quad x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & при\quad x\ge 0\end{cases}$

Числовые характеристики: $M(X)=\dfrac{1}{\lambda}$, $D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$, $\sigma(X)=\dfrac{1}{\lambda}$.

$P(\alpha<X<\beta)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}$ – вероятность попадания в заданный интервал.

Функция надежности $R(t)=e^{-\lambda t}$ – вероятность безотказной работы за время t.

3. Нормальный закон распределения, его параметры.

Нормальным называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью вероятности: $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$.

Можно показать, что параметры a и σ, входящие в плотность распределения являются соответственно математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением случайной величины X.

Нормальный закон распределения также называется *законом Гаусса*.

Нормальный закон распределения занимает центральное место в теории вероятностей. Это обусловлено тем, что этот закон проявляется во всех случаях, когда случайная величина является результатом действия большого числа различных факторов. К нормальному закону приближаются все остальные законы распределения.

При $a = 0$ и $\sigma = 1$ кривая называется *нормированной*.

Вероятность попадания случайной величины, распределенной по нормальному закону, в заданный интервал находится по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ – *функция Лапласа или интеграл вероятностей.*

Значения этой функции при различных значениях x посчитаны и приводятся в специальных таблицах.

Функцию Лапласа является нечетной, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Правило трех сигм: Если случайная величина имеет нормальное распределение, то отклонение этой случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине практически не превышает утроенного среднего квадратического отклонения: $P(|X - a| < 3\sigma) = 0{,}9973$.

4. Кривая Гаусса. Ее свойства и график.

График плотности нормального распределения называется *кривой Гаусса.*

1) кривая симметрична относительно прямой $x = a$;

2) функция $f(x)$ возрастает на $(-\infty; a)$ и убывает на $(a; +\infty)$

3) функция имеет максимум в точке $\left(a, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$;

4) $y = 0$ – горизонтальная асимптота;

5) кривая выпукла при $x \in (a - \sigma, a + \sigma)$ и вогнута при $x \in (-\infty, a - \sigma)$ и $x \in (a + \sigma, +\infty)$;

6) $x = a \pm \sigma$ – точки перегиба; $f(a \pm \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$.

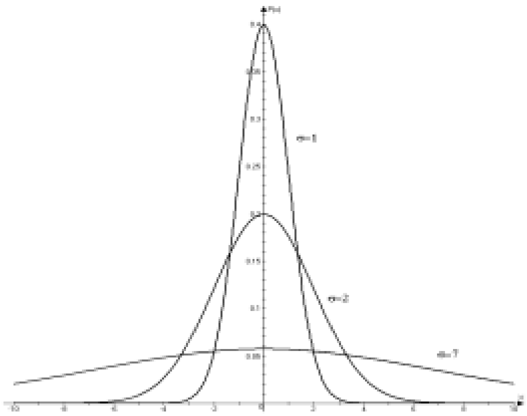


Рисунок – График функции плотности распределения

1. 49 Лекция № 49 (2 часа).

Тема: «Основные выборочные характеристики»

1.49.1 Вопросы лекции:

1. Задачи математической статистики.
2. Генеральная совокупность и выборка.
3. Выборочные характеристики.

1.49.2 Краткое содержание вопросов:

1. Задачи математической статистики.

Математическая статистика – наука, изучающая методы сбора, регистрации и обработки результатов экспериментов с целью познания закономерностей случайных массовых явлений.

Задачи математической статистики:

1) Создание методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.

2) Разработка методов анализа статистических данных в зависимости от целей исследования (оценка неизвестной функции распределения, оценка параметров распределения, вид которого известен, оценка зависимости одной случайной величины от другой).

3) Проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения или о величине параметров распределения, вид которого известен.

2. Генеральная совокупность и выборка.

Генеральная совокупность – совокупность однородных объектов для изучения некоторого количественного признака.

Выборочная совокупность (выборка) – совокупность случайно отобранных объектов из генеральной совокупности.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 – n_2 раз, …, x_k – $n_к$ раз и $\sum_{i=1}^{к} n_i = n$ – объем выборки.

Наблюдаемые значения x_i называют *вариантами*, числа наблюдений n_i – *частотами.*

Относительные частоты – отношения частот к объему выборки:

$$W_i = \frac{n_i}{n}.$$

Вариационный ряд – ряд из вариант, записанных в возрастающем порядке.

Статистическое распределение выборки – это перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот.

Виды статистических распределений выборки:

1) дискретное распределение выборки:

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_k
n_i	n_1	n_2	n_3	…	n_k

или

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_k
W_i	W_1	W_2	W_3	…	W_k

2) интервальное распределение выборки:

$(x_{i-1};x_i)$	$(x_0;x_1)$	$(x_1;x_2)$	$(x_2;x_3)$	…	$(x_{k-1};x_k)$
n_i	n_1	n_2	n_3	…	n_k

или

$(x_{i-1};x_i)$	$(x_0;x_1)$	$(x_1;x_2)$	$(x_2;x_3)$	…	$(x_{k-1};x_k)$
W_i	W_1	W_2	W_3	…	W_k

Полигон частот – ломаная, отрезки которой соединяют точки $(x_1;n_1)$, $(x_2;n_2)$, …, $(x_k;n_k)$.

Полигон относительных частот – ломаная, отрезки которой соединяют точки $(x_1;W_1)$, $(x_2;W_2)$, …, $(x_k;W_k)$.

Гистограмма частот – ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых являются частичные интервалы длиною Δx, а высотами – значения плотностей частот: $h_i = \dfrac{n_i}{h}$.

Гистограмма относительных частот – ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых являются частичные интервалы длиною h, а высотами – значения плотностей относительных частот $P_i^{'} = \dfrac{W_i}{h}$

Замечание. Площадь гистограммы частот равна объему выборки. Площадь гистограммы относительных частот равна единице.

3. Выборочные характеристики.

Размах варьирования – это разность между наибольшей и наименьшей вариантами вариационного ряда.

Мода M_0 – варианта, которая имеет наибольшую частоту.

Медиана m_e – варианта, которая делит вариационный ряд на две части, равные по числу вариант.

Если число вариант нечетное ($n = 2k+1$), то: $m_e = x_{k+1}$

Если число вариант четное ($n = 2k$), то: $m_e = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$

Выборочная средняя: $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ или $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i$.

Свойство выборочной средней: $\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x}) \cdot n_i = 0$.

Дисперсия

а) Выборочная дисперсия: $D_B = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ или $D_B = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^2 \cdot n_i$.

б) Исправленная дисперсия:

$$s^2 = \frac{n}{n-1}D_B;\ s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \text{ или } s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^2 \cdot n_i.$$

Среднее квадратическое отклонение

а) Выборочное среднее квадратическое отклонение: $\sigma = \sqrt{D_B}$.

б) Исправленное среднее квадратическое отклонение: $s = \sqrt{s^2}$.

Коэффициент вариации: $V = \dfrac{s}{\overline{x}} \cdot 100\%$.

1. 50 Лекция № 50 (2 часа).

Тема: «Точечные и интервальные оценки»

1.50.1 Вопросы лекции:

1. Точечные оценки. Несмещенные и состоятельные оценки.
2. Доверительный интервал. Надежность.
3. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения.

1.50.2 Краткое содержание вопросов:

1. Точечные оценки. Несмещенные и состоятельные оценки.

Точечной оценкой неизвестного параметра называют число (точку на числовой оси), которое приблизительно равно оцениваемому параметру и может заменить его с достаточной степенью точности в статистических расчетах.

Для того чтобы точечные статистические оценки обеспечивали «хорошие» приближения неизвестных параметров, они должны быть несмещенными, состоятельными и эффективными.

Несмещенной называют статистическую оценку, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру при любом объеме выборки.

Состоятельной называют статистическую оценку, которая при $n \to \infty$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру.

Эффективной называют такую точечную статистическую оценку, которая при фиксированном n имеет наименьшую дисперсию.

Точечные оценки математического ожидания и дисперсии:

$\bar{x}$ (выборочная средняя) – несмещенная и состоятельная оценка для неизвестного математического ожидания;

s^2 (исправленная дисперсия) – несмещенная и состоятельная оценка для неизвестной дисперсии;

s (исправленное среднее квадратическое отклонение) – несмещенная и состоятельная оценка для неизвестного среднего квадратического отклонения.

2. Доверительный интервал. Надежность.

Для построения *интервальной оценки* рассмотрим событие, заключающееся в том, что отклонение точечной оценки параметра θ^* от истинного значения этого параметра θ по абсолютной величине не превышает некоторую положительную величину Δ. Вероятность такого события $P\left(\left|\theta-\theta^*\right|<\Delta\right)=\gamma$. Заменив неравенство $\left|\theta-\theta^*\right|<\Delta$ на равносильное, получим: $P\left(\theta^*-\Delta<\theta<\theta^*+\Delta\right)=\gamma$.

Вероятность того, что *доверительный интервал* $(\theta^*-\Delta\,,\ \theta^*+\Delta)$ заключает в себе (покрывает) неизвестный параметр θ равна γ и называется *доверительной вероятностью* или *надежностью* интервальной оценки. Величину Δ называют *точностью* оценки.

3. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения.

Интервальная оценка параметра $a=\bar{x}_{\text{ген}}$ строится для двух случаев:

$$I_\gamma=\begin{cases}\left(\bar{x}-t_\gamma\cdot\dfrac{s}{\sqrt{n}};\bar{x}+t_\gamma\cdot\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right), & \text{\textit{при} } n<30\\ \left(\bar{x}-t\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}};\bar{x}+t\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right), & \text{\textit{при} } n\geq 30\end{cases},\ \text{где}$$

n – объем выборки, γ – надежность (доверительная вероятность),

$\bar{x}$ – выборочная средняя, σ – выборочное среднее квадратическое отклонение, s – исправленное среднее квадратическое отклонение,

$t_\gamma=t(n;\gamma)$ – число, определяемое по таблице приложения;

t – аргумент функции Лапласа, при котором $\Phi(t)=\dfrac{\gamma}{2}$.

1. 51 Лекция № 51 (2 часа).

Тема: «Корреляция»

1.51.1 Вопросы лекции:

1. Корреляционная зависимость.

2. Корреляционная таблица.

3. Коэффициент корреляции.

4. Линейная регрессия, ее параметры.

1.51.2 Краткое содержание вопросов:

1. Корреляционная зависимость.

Условимся обозначать через X независимую переменную. а через У – зависимую переменную.

Зависимость величины Y от X называется *функциональной,* если каждому значению величины X соответствует единственное значение величины У.

Однако гораздо чаще в окружающем нас мире имеет место не функциональная, а *стохастическая, или вероятностная, зависимость,* когда каждому фиксированному значению независимой переменной X соответствует не одно, а множество значений переменной У, причем сказать заранее, какое именно значение примет величина У, нельзя.

Корреляционной зависимостью (корреляцией) называется зависимость, при которой изменение одной величины влечет изменение <u>среднего</u> значения другой.

2. Корреляционная таблица.

Обратим внимание на то, что введённые понятия стохастической и корреляционной зависимости относились к генеральной совокупности.

Пусть имеется n наблюдений двумерной величины $(X;Y)$. Наблюдавшиеся «иксы» и «игреки» поместим в таблицу, которая называется **корреляционной таблицей**

Пример:

X \ Y	16	26	36	46	56	m_x
20	4					4
25	6	8				14
30		10	32	4		46
35			3	12	1	16
40			9	6	5	20
m_y	10	18	44	22	6	100

3. Коэффициент корреляции.

Если X и У являются независимыми случайными величинами, то $M(XY) = M(X)M(Y)$. Если же X и У зависимые, то $M(XY) \neq M(X)M(Y)$.

За меру зависимости X и У принята безразмерная величина r, определяемая соотношением $r = \dfrac{M(XY) - M(X)M(Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$ и называемая коэффициентом корреляции.

Случайные величины X и У называются некоррелированными, если $r = 0$, и коррелированными, если $r \neq 0$.

4. Линейная регрессия, ее параметры.

Корреляционная зависимость между случайными величинами X и $У$ является *линейной корреляцией*, если точки $(x_i; y_i)$ располагаются вблизи некоторой прямой, называемой прямой регрессии.

Корреляционная зависимость между случайными величинами X и У называется линейной корреляцией, если обе функции регрессии f(y) и g(x) являются линейными. В этом случае линии регрессии - прямые и называются прямыми регрессии.

Для оценки силы линейной корреляционной связи служит выборочный коэффициент корреляции:

$$r_B = \frac{\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \overline{x})^2} \cdot \sqrt{\sum (y_i - \overline{y})^2}},$$

$\bar{x}$ – выборочная средняя признака X, $\bar{y}$ – выборочная средняя признака Y.

Уравнение прямой регрессии:

$$y - \bar{y} = b_{Y/X}(x - \bar{x}),$$

$b_{Y/X}$ – выборочный коэффициент регрессии (угловой коэффициент прямой регрессии):

$$b_{Y/X} = r_B \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2},$$

σ_y, σ_x – выборочные средние квадратические отклонения признаков Y и X.

Свойства выборочного коэффициента корреляции:

1) $-1 \le r \le 1$;

2) чем больше $|r|$, тем теснее линейная корреляция между двумя признаками;

3) если $|r| = 1$, то корреляционная зависимость становится функциональной;

4) если $r = 0$, то между изучаемыми признаками нет линейной корреляции, но возможно существование какого-либо другого вида корреляционной зависимости (параболической, гиперболической и т.д.).

5) r_B и $b_{Y/X}$ имеют одинаковые знаки.

1. 52 Лекция № 52 (2 часа).

Тема: «Проверка гипотез»

1.52.1 Вопросы лекции:

1. Понятие статистической гипотезы. Нулевая и альтернативная гипотезы.
2. Статистические критерии проверки гипотез. Мощность критерия.
3. Параметрические и непараметрические критерии. Условия применимости.

1.52.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие статистической гипотезы. Нулевая и альтернативная гипотезы.

Во многих практических задачах точный закон распределения исследуемого признака *X* генеральной совокупности неизвестен. В этом случае необходимо проверить *гипотезу* о предполагаемом законе распределения.

Основная (нулевая) гипотеза – это предположение о виде неизвестного распределения или о параметрах известных распределений.

Конкурирующая (альтернативная) гипотеза – это гипотеза, являющаяся логическим отрицанием основной гипотезы.

2. Статистические критерии проверки гипотез. Мощность критерия.

Статистическим критерием (или просто критерием) называют случайную величину K, которая служит для проверки гипотезы.

Наблюдаемым (эмпирическим) значением $K_{набл}$ называют значение критерия, вычисленного по выборке.

Критической областью называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

Областью принятия гипотезы (областью допустимых значений) называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу принимают.

Критическими точками (границами) $k_{кр}$ называют точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

Для отыскания критической области задают уровень значимости α и ищут критические точки, исходя из следующих соотношений:

а) для правосторонней критической области

$$P(K > k_{кр}) = \alpha, \; k_{кр} > 0;$$

б) для левосторонней критической области

$$P(K < k_{кр}) = \alpha,\ k_{кр} < 0;$$

в) для двусторонней критической области

$$P(K > k_{кр}) = \frac{\alpha}{2} \text{ при } k_{кр} > 0,\ P(K < -k_{кр}) = \frac{\alpha}{2}.$$

Возможны случаи:

Гипотеза H_0	Принимается	Отвергается
Верна	Правильное решение	*Ошибка первого рода*
Неверна	*Ошибка второго рода*	Правильное решение

Вероятность допустить ошибку первого рода (отвергнуть нулевую гипотезу, когда она верна) называется *уровнем значимости критерия*.

Вероятность не допустить ошибку второго рода (отвергнуть нулевую гипотезу, когда она неверна) называется *мощностью критерия.*

3. Параметрические и непараметрические критерии. Условия применимости.

Параметрические критерии применяют в тех случаях, когда закон распределения нормальный; непараметрические критерии этим условием не связаны.

Критерий χ^2 Пирсона («хи-квадрат») – наиболее часто употребляемый критерий, может применяться для проверки гипотезы о любом законе распределения. Независимо от того, какое распределение имеет X, распределение случайной величины χ^2:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{(m_i^{э} - m_i^{т})^2}{m_i^{т}},$$

где $m_i^{э}$ – эмпирические частоты, $m_i^{т}$ – теоретические частоты; при $n \to \infty$ стремится к χ^2 – распределению с k степенями свободы.

Теоретические частоты определяются, исходя из предположения о законе распределения генеральной совокупности, в данном случае о нормальном законе. Так как $p_i = \dfrac{m_i}{n}$, где p_i – теоретическая вероятность, то $m_i^{т} = n \cdot p_i$.

Для дискретного ряда: $p_i = \dfrac{h}{\sigma_в} \cdot f(u_i)$, где $u_i = \dfrac{x_i - \bar{x}_в}{\sigma_в}$, $f(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}$ – дифференциальная функция нормированного нормального распределения, шаг $h = x_i - x_{i-1}$, $\bar{x}_в$ – выборочная средняя, $\sigma_в$ – выборочное среднее квадратическое отклонение.

Для интервального ряда: $p_i = P(x_{i-1} < X < x_i) = \Phi\left(\dfrac{x_i - \bar{x}_в}{\sigma_в}\right) - \Phi\left(\dfrac{x_{i-1} - \bar{x}_в}{\sigma_в}\right)$,

где $\Phi(t)$ – функция Лапласа.

Рассчитав теоретические частоты, находят $\chi^2_{набл}$. Из таблицы *критических точек* распределения χ^2 по заданному уровню значимости α (достаточно малая вероятность) и числу степеней свободы k находят $\chi^2_{крит}(\alpha, k)$ – границу правосторонней критической области. Здесь $k = s - r - 1$, где s – число различных значений x_i дискретного или число интервалов $(x_{i-1} - x_i)$ непрерывного признака X, r – число параметров предполагаемого закона распределения, для нормального распределения $r = 2$, отсюда $k = s - 3$. Затем сравнивают $\chi^2_{набл}$ и $\chi^2_{крит}(\alpha, k)$ и делают вывод.

При формулировке вывода руководствуются следующим правилом:

- если *наблюдаемое значение* критерия $\chi^2_{\text{набл}}$ попало в *область принятия гипотезы* ($\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{крит}}(\alpha, k)$), то нет оснований отвергать нулевую гипотезу, по данным наблюдения признак X имеет нормальный закон распределения, расхождение между эмпирическими и теоретическими частотами ($m_i^{\text{э}}$ и $m_i^{\text{т}}$) случайное;
- если наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{\text{набл}}$ попало в *критическую область* ($\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{крит}}(\alpha, k)$), то нулевая гипотеза отвергается, справедлива конкурирующая гипотеза, то есть признак X имеет закон распределения, отличный от нормального, расхождение между эмпирическими и теоретическими частотами ($m_i^{\text{э}}$ и $m_i^{\text{т}}$) значимо.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1 семестр

2.1 Практическое занятие № ПЗ-1 (2 часа).
Тема: «Решение систем уравнений»

2.1.1 Задание для работы:

1. Входной контроль.
2. Решение систем двух уравнений с двумя неизвестными.

2.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x-3y=-7 \\ 5x+y=8 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 8x-5y=3 \\ 7x+3y=10 \end{cases}$

2. Сколько решений имеет система линейных уравнений?

а) $\begin{cases} 2x-3y=-7 \\ 8x-12y=8 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x-3y=-7 \\ 8x-12y=-28 \end{cases}$

3. Решите системы уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x-y-z=-2 \\ 2x+y+z=8 \\ 4x-2y+3z=5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 4x-3y+2z=9 \\ 2x+5y-3z=4 \\ 5x+6y-2z=18 \end{cases}$.

2.1.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы линейной алгебры; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.2 Практическое занятие № ПЗ-2 (2 часа).
Тема «Матрицы»

2.2.1 Задание для работы:

1. Действия над матрицами.
2. Решение систем уравнений с помощью матриц.

2.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Даны две матрицы $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -6\\ 2 & 4 & 3\\ -3 & 1 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & 8 & -5\\ -3 & -1 & 0\\ 4 & 5 & -3\end{pmatrix}$.

Найти: $A+B$; $A-B$; $3A-2B$; $A\cdot B$; $B\cdot A$.

2. Решите системы уравнений с помощью матриц:

а) $\begin{cases}2x-3y+z=6\\ 3x-y+2z=7\\ x-y+z=4\end{cases}$; б) $\begin{cases}2x-y+2z=3\\ x+y+2z=-4\\ 4x+y+4z=-3\end{cases}$; в) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3-2x_4=4\\ 2x_1+3x_2-x_3+x_4=1\\ 4x_1-2x_2-6x_3=2\\ 5x_1+4x_2-5x_3+2x_4=1\end{cases}$.

2.2.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы линейной алгебры; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.3 Практическое занятие № ПЗ-3 (2 часа).
Тема «Определители»

2.3.1 Задание для работы:

1. Вычисление определителей второго и третьего порядков.
2. Определение ранга матрицы.
3. Решение систем по правилу Крамера.

2.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вычислить определитель:

а) $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}5 & -7\\ -2 & 3\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\ -\cos\alpha & \sin\alpha\end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix}4 & 3\\ 6 & -8\end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix}e^x & e^{3x}\\ e^x & 3e^{3x}\end{vmatrix}$.

2. Для определителя $\begin{vmatrix}3 & -2 & 3\\ 6 & 5 & 12\\ -1 & 0 & 2\end{vmatrix}$ найти: а) миноры M_{23}, M_{11}, M_{31}; б) алгебраические дополнения A_{12}; A_{13}; A_{32}; в) значение определителя.

3. Вычислить: а) $\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & 2 & -1\\ 3 & 5 & 2\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 5 & 6 & 4\\ 8 & 7 & 0\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}1 & 0 & 4 & 2\\ 2 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 5 & -3\\ 1 & -7 & 0 & 6\end{vmatrix}$.

4. Определить ранг матриц: а) $\begin{pmatrix}4 & -7\\ 8 & 14\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}2 & 7 & 1\\ -4 & -1 & 8\\ -2 & 6 & 9\end{pmatrix}$.

5. Решить систему уравнений: а) $\begin{cases}2x-y+2z=3\\ x+y+2z=-4\\ 4x+y+4z=-3\end{cases}$; б) $\begin{cases}2x-y+2z=3\\ x+y+2z=-4\\ 4x+y+4z=-3\end{cases}$.

2.4.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы линейной алгебры; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.4 Практическое занятие № ПЗ-4 (2 часа).
Тема «Системы линейных уравнений. Векторы»

2.4.1 Задание для работы:

1. Решение систем линейных уравнений. Применение теоремы Кронекера – Капелли.
2. Действия над векторами в геометрической форме.
3. Нахождение координат вектора.

2.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Решить: а) $\begin{cases} 5x+4y-7z=-4 \\ 3x+5y-9z=10 \\ 2x-y+2z=-12 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 5x+4y-7z=-4 \\ 3x+5y-9z=8 \\ 2x-y+2z=-12 \end{cases}$

2. Определить, при каких значениях a и b система $\begin{cases} 3x-2y+z=b \\ 5x-8y+9z=3 \\ 2x+y+az=-1 \end{cases}$: 1) имеет единственное решение; 2) не имеет решений; 3) имеет бесконечно много решений.

3. Изобразить произвольно вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Построить векторы $\vec{\kappa}=(\vec{b}+\vec{c})\cdot 5-4\vec{c}-3\vec{b}-1{,}5\vec{a}$ и $\vec{m}=(\vec{b}-3\vec{c})\cdot 2+4\vec{c}-3{,}5\vec{b}+2(\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b})$.

4. В $\Delta\, ABC$ сторона AB разделена точкой M в отношении $4:3$, считая от точки A. Найти разложение вектора $\overrightarrow{CM}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{CA}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$.

5. Даны три точки $A(2;-1), B(4;3), C(-2;1)$. Найти координаты векторов $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{BC}$, их длины, периметр треугольника ABC.

6. Расстояние от точки M, лежащей на оси Ox, до точки $K(4;9)$ равно 15. Найти координаты точки M.

2.4.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы линейной и векторной алгебры; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.5 Практическое занятие № ПЗ-5 (2 часа).

Тема «Произведения векторов»

2.5.1 Задание для работы:

1. Скалярное произведение векторов, его свойства, приложения.
2. Векторное произведение векторов, его свойства, приложения.
3. Смешанное произведение векторов, его свойства, приложения.

2.5.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если: а) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a};\vec{b}) = 30^0$; б) $\vec{a} = (7;-5;4)$, $\vec{b} = (0;2;8)$; в) $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

2. Определить углы треугольника ABC с вершинами $A(2;-1;3)$; $B(1;1;1)$; $C(0;0;5)$.

3. Даны три силы $\vec{F}_1(9;-3;4)$, $\vec{F}_2(5;6;-2)$, $\vec{F}_3(-4;-2;7)$, приложенные к точке $A(-5;4;-2)$. Вычислить работу, производимую равнодействующей этих сил, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(4;6;-5)$.

4. Даны вектора $\vec{a}(1;-1;2)$, $\vec{b}(0;1;-5)$, $\vec{c}(-8;9;0)$. Вычислить: а) векторное произведение $\vec{a}$ и $\vec{b}$; б) смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

5. Вычислить площадь и высоту AD треугольника с вершинами $A(7;3;4)$, $B(1;0;6)$, $C(4;5;-2)$.

6. Вершины пирамиды находятся в точках $A(2;3;4)$, $B(4;7;3)$, $C(1;2;2)$, $D(-2;0;-1)$. Вычислить площадь грани ABC и объем пирамиды $ABCD$.

7. Сила $\vec{F}(2;2;9)$ приложена к точке $A(4;2;-3)$. Вычислить модуль и направляющие косинусы момента силы $\vec{F}$ относительно точки $B(2;4;0)$.

2.5.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы векторной алгебры; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.6 Практическое занятие № ПЗ-6 (2 часа).

Тема «Прямая на плоскости»

2.6.1 Задание для работы:

1. Способы задания прямой.
2. Взаимное расположение двух прямых.

2.6.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Составить уравнение прямой, если: а) ее угловой коэффициент $\kappa = -5$ и она проходит через точку $A(7;-3)$; б) она проходит через точки $A(-3;5)$ и $B(1;7)$; в) проходит через точки $M(-1;8)$ и $N(-1;-4)$.

2. Даны вершины треугольника $A(-2;1), B(2;3), C(3;-4)$. Составить уравнения: а) стороны AC; б) медианы BM; в) наименьшей высоты.

3. Среди прямых указать параллельные и перпендикулярные: $5x-8y+7=0$, $8x+5y-5=0$, $5x+3y-8=0$, $8x-y-5=0$, $10x+6y-13=0$.

4. Даны две прямые $4x-ay=7$ и $20x-12y=15$. При каком условии они будут параллельны? При каких значениях *a* они будут пересекаться?

2.6.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы аналитической геометрии; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.7 Практическое занятие № ПЗ-7 (2 часа).

Тема «Кривые второго порядка»

2.7.1 Задание для работы:

1. Канонические уравнения кривых второго порядка.
2. Взаимное расположение прямой и кривой на плоскости.

2.7.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Составьте уравнение окружности, концы диаметра которой имеют координаты $A(-4;5)$ и $B(8;9)$.

2. Составьте уравнение прямой, проходящей через центры окружностей: $x^2+y^2-8x-4y+11=0$ и $x^2+y^2+4x+12y+4=0$.

3. Составьте уравнение эллипса, если он проходит через точки $A(4;\,0)$ и $B(2;\,3)$. Найти большую и малую полуоси, расстояние между фокусами и эксцентриситет эллипса.

4. Составьте уравнение эллипса, один из фокусов которого находится в точке $\left(\sqrt{3};\,0\right)$, а эксцентриситет равен $\frac{1}{3}$.

5. Найти координаты фокусов, расстояние между ними, длины действительной и мнимой осей, эксцентриситет гиперболы $\frac{x^2}{14}-\frac{y^2}{22}=1$.

6. Составить уравнение гиперболы, если длина действительной полуоси равна 8, и гипербола проходит через точку $\left(10;-3\right)$.

7. Даны уравнения асимптот $y=\pm 2x$ и точка $M(5;8)$, лежащая на гиперболе. Составить ее уравнение.

8. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы для параболы $y=0{,}5x^2$.

9. Составить уравнение параболы, если ее фокус находится в точке: а) $F(5;0)$; б) $F(0;-3)$.

10. Найти координаты точек пересечения кривой второго порядка и прямой: а) $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{25}=1$ и $x+3y-21=0$; б) $16x-y^2=0$ и $2x-y+2=0$. Сделать чертеж.

2.7.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы аналитической геометрии; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.8 Практическое занятие № ПЗ-8 (2 часа).

Тема «Плоскость в пространстве»

2.8.1 Задание для работы:

1. Способы задания плоскости в пространстве.
2. Взаимное расположение плоскостей.

2.8.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Для плоскости записать координаты нормального вектора, двух точек, лежащих в плоскости, направляющего вектора: а) $5x-2y+3z-10=0$; б) $2x+3y+6z-12=0$. Написать уравнение «в отрезках» данных плоскостей.

2. Установить взаимное расположение следующих пар плоскостей и определить угол между ними:

а) $x-3y+z+1=0$ и $2x+y-4z+2=0$;

б) $3x + y - z + 2 = 0$ и $6x + 2y - 2z + 3 = 0$;

в) $\sqrt{2}x - y + 6z + 5 = 0$ и $4x + \sqrt{8}y - \dfrac{\sqrt{2}}{3}z + 7 = 0$.

3. Даны точки $A_1(4; 7; 8)$, $A_2(-1; 13; 0)$, $A_3(2; 4; 9)$, $A_4(1; 8; 9)$. Составить уравнения плоскости: а) $A_1A_2A_3$; б) параллельной плоскости $A_1A_2A_3$ и проходящей через точку A_4; в) A_1A_2; г) A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$. Вычислить синус угла между прямой A_1A_4 и $A_1A_2A_3$.

2.8.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы аналитической геометрии; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.9 Практическое занятие № ПЗ-9 (2 часа).

Тема «Прямая в пространстве»

2.9.1 Задание для работы:

1. Способы задания прямой в пространстве.
2. Взаимное расположение прямой и плоскости.
3. Поверхности в пространстве.

2.9.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Для прямой записать координаты направляющего вектора, трех точек, лежащих на прямой: а) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z+2}{-3}$; б) $\begin{cases} x = 3t \\ y = 4t - 5 \\ z = -t + 3 \end{cases}$.

2. Даны четыре точки $A_1(4; 7; 8)$, $A_2(-1; 13; 0)$, $A_3(2; 4; 9)$, $A_4(1; 8; 9)$. Составить уравнения прямой: а) A_1A_2; б) A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$. Вычислить синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$.

3. Установить взаимное расположение прямой и плоскости:

а) $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t \\ z = -2 + t \end{cases}$ и $2x - y + z + 1 = 0$; б) $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+2}{1}$ и $x - 2y + 5z - 6 = 0$;

в) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ и $x - 2y + 5z - 6 = 0$.

2.9.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы аналитической геометрии; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.10 Практическое занятие № ПЗ-10 (2 часа).

Тема «Функция»

2.10.1 Задание для работы:

1. Определение свойств функции.

2. Построение графиков элементарных и неэлементарных функций.

2.10.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Найти область определения следующих функций:

а) $y=\sqrt{6-x}+\dfrac{1}{x+5}$; б) $y=\sqrt[7]{3-x^2}$; в) $y=\log_5(4-x^2)$; г) $y=\dfrac{\sqrt{9-x}}{\ln(4+x)}$.

2. Найдите $E(y)$ двумя способами: а) $y=4\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\sin(\pi+x)$; б) $y=x^2-6x+5$.

3. Исследовать функцию на четность:

а) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$; б) $f(x)=x^5\cdot\cos x$; в) $f(x)=\sqrt{6x-x^2}$; г) $f(x)=\lg\dfrac{x+2}{x-2}$.

4. Для функции $f(x)=\begin{cases}0 \quad при \quad x\le 0\\ \dfrac{x^2}{49} \quad при \quad 0<x\le 7\\ 1 \quad при \quad x>7\end{cases}$ найти $f(-2),\ f(0),\ f(5),\ f(8)$.

Построить график функции.

2.10.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы математического анализа; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.11 Практическое занятие № ПЗ-11 (2 часа).

Тема «Предел последовательности и предел функции»

2.11.1 Задание для работы:

1. Вычисление предела числовой последовательности.
2. Вычисление предела функции.

2.11.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Начиная с какого номера, значения числовой последовательности $x_n=\dfrac{5n+3}{2n}$ будут отличаться от числа 2,5 на величину, меньшую: а) $\varepsilon=0{,}2$; б) $\varepsilon=0{,}01$?

2. Определить число, к которому стремится числовая последовательность:

а) $x_n=\dfrac{3n-6}{2n}$; б) $x_n=\dfrac{1}{2n+1}$.

3. Найти предел функции: а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-5x+8}{x+x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{1-\cos x}$; в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{7}{2x-6}$.

2.11.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы математического анализа; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.12 Практическое занятие № ПЗ-12 (2 часа).

Тема «Правила раскрытия неопределенностей»

2.12.1 Задание для работы:

1. Вычисление предела функции.
2. Сравнение бесконечно малых функций.
3. Применение замечательных пределов.

2.12.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Найти: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+6x}{5x^3-12x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{7-x^2-6x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-49}{\sqrt{9+x}-4}$.

2.Вычислить: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+3x-9}{7x^2+x-11}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+3x-9}{7x^2+x^5-11}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+3x-9}{7x^2+x-11}$.

3. Найти значение: 1) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{12}{x^3-8}-\dfrac{1}{x-2}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$.

4. Найти: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 11x}{arctg 3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-1}{arctg^3 2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0} tg^2 9x\cdot ctg 5x$.

5. Вычислить: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{8x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+9x)^{-\frac{4}{x}}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+1}\right)^{x+3}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x^2+6}\right)^{x}$.

2.12.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы математического анализа; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.13 Практическое занятие № ПЗ-13 (2 часа).

Тема «Непрерывность функции»

2.13.1 Задание для работы:

1. Вычисление односторонних пределов.
2. Исследование функции на непрерывность.
3. Определение точек разрыва.

2.13.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Исследовать на непрерывность:

а) $y=\dfrac{4x^2-1}{x-3}$; б) $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}$; в) $y=\dfrac{4}{(x-3)(x+1)}$.

Исследовать на непрерывность функции и построить их графики:

а) $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & при\ x\le 1\\ x+1 & при\ x>1\end{cases}$; б) $y=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ x^2-1, & 0\le x<1,\\ -x, & x\ge 1,\end{cases}$; в) $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & при\ x\le 1\\ \dfrac{1}{x-1} & при\ x>1\end{cases}$.

2. Исследовать на непрерывность $f(x)=3^{\frac{1}{x+1}}+1$ в точках $x_1=1$ и $x_2=-1$.

3. При каком значении a $f(x)=\begin{cases}\cos x & при\ x\le 0\\ a(x-1) & при\ x>0\end{cases}$ непрерывна в точке $x_0=0$?

4. Сколько точек разрыва (и какого рода) имеет функция: а) $y=\frac{x+2}{x^2+8x+12}$; б) $y=\frac{|\sin x|}{\sin x}$? Построить график функции.

5. Исследовать функцию $f(x)=\begin{cases}1 \quad при\ x<0\\ \cos x \quad при\ \ 0\le x<\frac{\pi}{2}\\ 1-x \quad при\ x\ge\frac{\pi}{2}\end{cases}$ на непрерывность и сделать схематический чертеж.

2.13.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы математического анализа; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.14 Практическое занятие № ПЗ-14 (2 часа).

Тема «Производная»

2.14.1 Задание для работы:

1. Нахождение производной.
2. Геометрический и механический смыслы производной.

2.14.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Найти производную: а) $y=\frac{2x-7}{3}$; б) $y=x^4-\frac{1}{12x^4}+6\cdot\sqrt[5]{x^2}+\sin 4$; в) $y=\frac{5}{x^7}-\sqrt[9]{x^4}+3^x$; г) $y=(x^3+2)\cdot\sin x$; д) $y=\frac{\ln x}{x-4}$.

2. Найти производную от функции и упростить полученное выражение: а) $x\cdot\sin x+\cos x-8$; б) $x\cdot\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$; в) $x\cdot arctg\frac{x}{3}-\frac{3}{2}\ln(x^2+9)$.

3. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x)=\frac{1}{x+2}$ в точке его пересечения с осью ординат. Сделать рисунок.

4. Найти скорость и ускорение точки, движущейся прямолинейно по закону $s(t)=2\sin\frac{\pi t}{3}$ в момент времени $t=1\,c$. Найти кинетическую энергию тела $\frac{mv^2}{2}$ через 3 с после начала движения.

2.14.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы математического анализа; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.15 Практическое занятие № ПЗ-15 (2 часа).

Тема «Производные высших порядков. Дифференциал»

2.15.1 Задание для работы:

1. Производные высших порядков.
2. Вычисление дифференциала.
3. Приложение дифференциала к приближенным вычислениям.

2.15.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вычислить: а) $y^{(5)}$, если $y = e^x(x+4)$; б) $y^{(2009)}$, если $y = \cos x$.

2. Проверить, является ли решением уравнения $y'' + 2y' - 8y = 0$ функция $y = e^{2x} + 9e^{-4x}$.

3. Вычислить: а) $d(4x-6)$; б) $d\left(\dfrac{3}{1+x^2}\right)$; в) $d(\ln(x+6))$; г) $d(\cos 8x)$.

4. Внести функцию под знак дифференциала: а) xdx; б) $\cos xdx$; в) $\dfrac{dx}{x}$; г) $\dfrac{dt}{\cos^2 t}$.

5. Пользуясь приближенным равенством $f(x) \approx f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$, вычислить приближенно указанные величины:

а) $\cos 61^0$; б) $tg 44^0$; в) $e^{0,2}$; г) $\sqrt[3]{7,76}$; д) $arctg 1,05$; е) $\arcsin 0,54$.

2.15.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы математического анализа; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.16 Практическое занятие № ПЗ-16 (2 часа).

Тема «Приложения производной»

2.16.1 Задание для работы:

1. Вычисление пределов по правилу Лопиталя.
2. Исследование на монотонность функции, нахождение точек экстремума.
3. Нахождение наименьшего и наибольшего значений функции на отрезке.
4. Исследование на вогнутость и выпуклость функции, нахождение точек перегиба.
5. Построение графиков функции.

2.16.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вычислить предел функции: а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[7]{x}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-2}{\ln(x+7)}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{7+e^x}-2}{x}$.

2. Исследовать функцию $y = -x^3 + 6x^2 - 4$ и построить ее график.

3. Построить график функции: а) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$; б) $y = e^{-x^2}$.

4. На параболе найти точку, наименее удаленную от прямой $y = 2x - 4$.

5. Требуется выгородить прямоугольное пастбище площадью $1\,км^2$ и разделить его на два прямоугольных участка. Какой наименьшей длины забор при этом может получиться?

2.16.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы математического анализа; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.17 Практическое занятие № ПЗ-17 (2 часа).

Тема «Кривизна кривой»

2.17.1 Задание для работы:

1. Определение кривизны, радиуса и круга кривизны кривой.
2. Составление уравнения эволюты.

2.17.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Определить радиус кривизны и построить кривую и круг кривизны кривой в указанной точке: а) $y = e^x$, $(0;1)$; б) $y = \cos x$, $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. Найти максимальную кривизну кривой $y = e^x$.

3. Написать уравнение эволюты кривой $y = 1 - \frac{x^2}{2}$ и построить кривую и ее эволюту.

4. Определить радиус кривизны и построить кривую и круг кривизны кривой в указанной точке: а) $y = \ln x$, $(1; 0)$; б) $y = x^3$, $(-1; -1)$.

2.17.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы математического анализа; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2 семестр

2.18 Практическое занятие № ПЗ-18 (2 часа).

Тема «Функция двух переменных»

2.18.1 Задание для работы:

1. Нахождение области определения функции двух переменных.
2. Вычисление производных первого и второго порядков.

2.18.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Найти область определения функции двух переменных: а) $z = \frac{1}{3y - x}$; б) $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$; в) $z = \frac{\ln x}{25 - x^2 - y^2}$; г) $z = \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y}$; д) $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$.

2. Вычислить: а) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$; б) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}$.

3. Найти частные производные данных функций по каждой независимой переменной: а) $z = x^2 - y$; б) $z = \frac{x}{y} + 3xy^4$; в) $z = \sin(e^x - 5y^3)$.

4. Найти значения частных производных: а) $f(x; y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $(3; 4)$; б) $z = \ln\left(x + \frac{y}{2x}\right)$ в точке $(1; 2)$.

5. Вычислить частные производные второго порядка и проверить равенство $z''_{xy} = z''_{yx}$ для функций: а) $z = e^x \cdot y^4$; б) $z = arctg\,(x - 2) + \frac{y}{3} - 7x^6 y$.

2.18.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы математического анализа; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.19 Практическое занятие № ПЗ-19 (2 часа).
Тема «Приложения производных функций нескольких переменных»
2.19.1 Задание для работы:

1. Нахождение дифференциала, его приложение.
2. Производная по направлению. Градиент.
3. Касательная плоскость и нормаль.

2.19.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Найти частные дифференциалы функции: а) $z = \sin xy$; б) $z = \dfrac{x+y}{x-y}$.

2. Найти значение полного дифференциала функции $z = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$ при $x = 2$, $y = 1$, $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta y = 0{,}03$.

3. Найти производную функции $u = x^2 + 3y^2$ в точке $M(2; -1)$ в направлении вектора $\vec{s} = \vec{i} + \vec{j}$.

4. Найти $grad\, z$ в точке $M(3; 2)$, если $z = x^2 + y^2$.

5. Найти точки, в которой градиент функции $z = \ln\left(x + \dfrac{1}{y}\right)$ равен $\vec{i} - \dfrac{16}{9}\vec{j}$.

6. Для поверхности $z = 2x^2 - 4y^2$ составить уравнения касательной плоскости и нормали в точке $(2; 1; 4)$.

2.19.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы математического анализа; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.20 Практическое занятие № ПЗ-20 (2 часа).
Тема «Экстремум функции двух переменных»
2.20.1 Задание для работы:

1. Исследование функции двух переменных на экстремум.
2. Метод наименьших квадратов

2.20.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Исследовать на экстремум функции:

а) $z = -4 + 6x - x^2 - xy - y^2$;

б) $z = x^2 - xy + y^2 + 8x - 4y + 15$;

в) $z = 2x^2 - 14xy + y^2 + 2x - 9y + 1$.

2. Значения переменных величин x и y, полученные в результате опыта, представлены в виде таблицы:

x	2	4	6	8	10
y	5,5	8,5	13,6	17,3	20,1

Предполагая, что переменные x и y связаны линейной зависимостью $y = ax + b$, найти способом наименьших квадратов параметры a и b.

2.20.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы математического анализа; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.21 Практическое занятие № ПЗ-21 (2 часа).
Тема «Комплексные числа»
2.21.1 Задание для работы:

1. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.
2. Тригонометрическая форма комплексного числа. Формула Муавра.
3. Извлечение корня из комплексного числа.

2.21.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Даны комплексные числа $z_1 = 3 + 5i,\quad z_2 = -4 - 3i,\quad z_3 = 7 - i$. Вычислить:

а) $z_1 + z_2 \cdot z_3$; б) $(z_2 - z_1) \cdot 2z_3$; в) $\dfrac{z_2 + z_3}{z_1}$; г) $\dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_3}$.

2. Следующие комплексные числа изобразить векторами, определить их модули и аргументы и записать в тригонометрической форме:

а) $z_1 = 3,\quad z_2 = -4,\quad z_3 = 2i,\quad z_4 = -6i$;

б) $z_1 = 7 - 7i,\quad z_2 = 1 + \sqrt{3}i,\quad z_3 = -3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\,i,\quad z_4 = -\sqrt{3} + i$.

3. Вычислить: а) $(-1+i)^7$; б) $(-\sqrt{3}+i)^5$; в) $\sqrt[6]{-64}$; г) $\sqrt[3]{1+i}$.

2.20.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы теории функций комплексной переменной; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.22 Практическое занятие № ПЗ-22 (2 часа).
Тема «Многочлены»
2.22.1 Задание для работы:

1. Разложение многочлена на множители.
2. Решение уравнений во множестве комплексных чисел.

2.22.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Решить уравнения во множестве комплексных чисел:

а) $x^2 + 16 = 0$; б) $x^2 - 2x + 4 = 0$;

в) $x^2 + 4x + 13 = 0$; г) $3x^2 - 2x + 17 = 0$;

д) $x^3 - 125 = 0$; е) $x^3 + 216 = 0$.

2. Записать приведенное квадратное уравнение, корнями которого являются комплексно-сопряженные числа:

а) $\pm 7i$; б) $5 \pm 2i$; в) $-1 \pm \sqrt{5}\,i$; г) $-9 \pm 4\sqrt{2}\,i$.

2.22.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы теории функций комплексной переменной; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.23 Практическое занятие № ПЗ-23 (2 часа).
Первообразная и неопределенный интеграл
2.23.1 Задание для работы:

1. Нахождение первообразной функции.
2. Вычисление неопределенного интеграла по таблице.
3. Геометрический смысл неопределенного интеграла.

2.23.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Дано уравнение скорости движения тела $v(t) = 2t + 5$. Найти уравнение пути, если за первые $3\,c$ движения тело прошло $32\,м$.

2. Найти интегралы: а) $\int\left(x^4 + \frac{4}{x^3} - 5\sqrt[3]{x^2}\right)dx$; б) $\int 4^x\left(3 + \frac{4^{-x}}{\sqrt[7]{x}}\right)dx$; в) $\int(7\cos x - 10^x)dx$; г) $\int\left[\frac{2}{9+x^2} - \frac{1}{\sqrt{25-x^2}} + \frac{3}{x}\right]dx$; д) $\int\frac{dx}{\cos 2x - \cos^2 x}$; е) $\int\frac{dx}{9x^2+1}$; ж) $\int\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$; з) $\int\frac{dv}{\sqrt{v^2-17}}$.

3. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $(-2; 8)$, если угловой коэффициент касательной в любой точке касания x равен $2x - 4$.

2.23.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы математического анализа; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.24 Практическое занятие № ПЗ-24 (2 часа).
Тема «Методы интегрирования»
2.24.1 Задание для работы:

1. Непосредственное интегрирование.
2. Замена переменной.
3. Интегрирование по частям.

2.24.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вычислить интеграл: а) $\int(5x-1)^7 dx$; б) $\int e^{-5x}dx$; в) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^6+1}}$.

2. Преобразовать и вычислить: а) $\int\frac{3tg^2x+4}{\sin^2 x}dx$; б) $\int\frac{2^x+5^x}{10^x}dx$.

3. Вычислить: а) $\int arccrgxdx$; б) $\int(6x+1)\cdot\sin\frac{x}{3}dx$; в) $\int e^x\sin 2xdx$.

4. Вычислить: а) $\int e^{2x}\cos xdx$; б) $\int e^{\sqrt{x}}dx$; в) $\int\frac{xdx}{\cos^2 x}$; г) $\int\frac{\ln x}{\sqrt[5]{x}}dx$.

2.24.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы математического анализа; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.25 Практическое занятие № ПЗ-25 (2 часа).
Тема «Интегрирование рациональных функций»
2.25.1 Задание для работы:

1. Интегрирование простейших рациональных дробей.
3. Интегрирование рациональных функций.

2.25.2 Краткое описание проводимого занятия:

Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{4dx}{x+7}$; б) $\int \frac{dx}{x-11}$; в) $\int \frac{12dx}{4x+9}$.

а) $\int \frac{8dx}{x^3}$; б) $\int \frac{8dx}{(x+9)^3}$; в) $\int \frac{5dx}{x^2-4x+4}$.

а) $\int \frac{(4x+5)dx}{x^2-8x+17}$; б) $\int \frac{(2-x)dx}{x^2+4x+20}$; в) $\int \frac{7dx}{x^2-2x+5}$.

а) $\int \frac{(4x+41)dx}{x^2+3x-4}$; б) $\int \frac{(6x+23)dx}{x^2+6x+9}$; в) $\int \frac{(x^3-57x+157)dx}{x^2-9x+20}$.

2.25.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы математического анализа; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.26 Практическое занятие № ПЗ-26 (2 часа).
Тема «Интегрирование тригонометрических и иррациональных функций»
2.26.1 Задание для работы:

1. Универсальная тригонометрическая подстановка.
2. Частные случаи тригонометрических подстановок.
3. Интегрирование иррациональных функций.

2.26.2 Краткое описание проводимого занятия:

Интегрировать тригонометрические функции

1. Вычислить: $\int \frac{dx}{3\sin x - \cos x}$; $\int \frac{tgx dx}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}$; $\int \sqrt[7]{\sin^4 x} \cdot \cos^3 x dx$;

2. Найти: $\int \cos 7x \cdot \cos 5x dx$; $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$; $\int tg^3 x dx$.

Интегрировать иррациональные функции

3. Найти: $\int \frac{(2x-7)dx}{\sqrt{x^2-x+5}}$; $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{15-2x-x^2}}$

4. Вычислить: $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x-8}}$; $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+6}}$; $\int \frac{\sqrt{x+3}\,dx}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[6]{x+3}}$

2.26.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы математического анализа; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.27 Практическое занятие № ПЗ-27 (2 часа).
Тема «Определенный интеграл»
2.27.1 Задание для работы:

1. Вычисление по формуле Ньютона – Лейбница.
2. Свойства определенного интеграла.
3. Замена переменной в определенном интеграле.
4. Интегрирование по частям в определенном интеграле.

2.27.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вычислить: а) $\int_2^3 3x^2 dx$; б) $\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$; в) $\int_1^4 (x^2+3)dx$.

2. Найти: а) $\int_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$; б) $\int_0^{T/2} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}-\varphi_0\right)dt$; в) $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$

3. Найти: а) $\int_0^1 \frac{3x^2dx}{x^3+1}$; б) $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; в) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$.

4. Вычислить определенный интеграл: а) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\cos 3x dx$; б) $\int_0^{0,25} arctg 4x dx$.

2.27.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы математического анализа; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.28 Практическое занятие № ПЗ-28 (2 часа).
Тема «Геометрические приложения определенного интеграла»
2.28.1 Задание для работы:

1. Приближенное вычисление определенных интегралов.
2. Вычисление площадей плоских кривых.
3. Нахождение объема тела вращения.
4. Вычисление длины дуги кривой.

2.28.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями:
а) $y=e^x$, $y=0$, $x=-2$, $x=1$; б) $y=x^2-4$, $y=0$, $x=-3$;
в) $y=-x^2+4x+6$, $y=6-x$; г) $y=\ln x$, $y=\ln^2 x$.

2. Найти длину дуги кривой $y=1+\ln\sin x$, $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

3. Вычислить длину дуги кривой $y^2=(x+1)^3$, отсеченной прямой $x=4$.

4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $xy=4$, $x=1$, $x=4$, $y=0$.

5. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

6. Найти площадь поверхности конуса, образуемого вращением вокруг оси Ox отрезка прямой $y=2x$ от $x=0$ до $x=2$.

2.28.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы математического анализа; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.29 Практическое занятие № ПЗ-29 (2 часа).

Тема «Физические приложения определенного интеграла»

2.29.1 Задание для работы:

1. Вычисление работы переменной силы.
2. Нахождение давления.
3. Вычисление пути при неравномерном движении.

2.29.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Сжатие пружины пропорционально приложенной силе. Вычислить работу силы при сжатии пружины на 7 см, если для сжатия ее на 1 см. нужно приложить силу 4 Н.Определить работу, которую необходимо затратить на выкачивание воды из резервуара, представляющего собой лежащий на боку круговой цилиндр длиной l и радиусом основания R, через находящееся вверху отверстие. Удельный вес воды $\gamma=9{,}81kH/м^3$. Вычислить работу в случае, когда $l=5м$, $R=1м$.

2. Размеры пирамиды Хеопса приблизительно таковы: высота 140 м, ребро основания (квадрата) 200 м. Плотность камня, из которого она сделана приблизительно равна $2{,}5\cdot10^3 кг/м^3$. Вычислить работу, затраченную при ее постройке на преодоление силы тяжести.

3. Пластинка в форме треугольника погружена вертикально в воду так, что ее основание лежит на поверхности воды. Основание пластинки a, высота h. Подсчитать силу давления воды на каждую из сторон пластинки.

4. Найти путь, пройденный телом за промежуток времени от $t_1=2$ до $t_2=6$, если скорость движения $v(t)=3t^2+5$.

5. Найти путь, пройденный телом при свободном падении за пятую секунду от начала падения, если $\upsilon(t)=gt$.

6. Скорость тела задается формулой $v=\sqrt{1+t}$ (м/с). Найти путь, пройденный телом за первые $10\,с$ после начала движения.

2.29.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы математического анализа; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.30 Практическое занятие № ПЗ-30 (2 часа).

Тема «Несобственные интегралы»

2.30.1 Задание для работы:

1. Несобственные интегралы первого рода.
2. Несобственные интегралы второго рода.

3. Геометрический смысл несобственных интегралов, его применение.

2.30.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вычислить несобственные интегралы и дать геометрическую интерпретацию:

$$\text{а) } \int_{1}^{+\infty} 4^x\,dx; \qquad \text{б) } \int_{-\infty}^{1} 4^x\,dx; \qquad \text{в) } \int_{1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^x dx; \qquad \text{г) } \int_{-\infty}^{1} \left(\frac{1}{4}\right)^x dx.$$

2. Исследовать на сходимость интегралы:

$$\text{а) } \int_{1}^{3} \frac{1}{x-3}\,dx; \text{ б) } \int_{1}^{4} \frac{1}{(x-2)^2}\,dx; \text{ в) } \int_{5}^{6} \frac{1}{\sqrt{x-5}}\,dx.$$

3. Вычислить несобственные интегралы или доказать расходимость:

$$\text{а) } \int_{0}^{\infty} \frac{xdx}{x^4+1}; \text{ б) } \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}; \text{ в) } \int_{1}^{1,5} \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$$

4. Вычислить площадь фигуры, заключенной между линией $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ и ее асимптотой.

5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью получающейся при вращении линии $y = x^2 e^{-x^2}$ вокруг своей асимптоты.

6. Фигура, ограниченная линией $y = e^{-x^2}$ и ее асимптотой, вращается вокруг оси ординат. Вычислить объем тела, которое при этом получается.

2.30.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы математического анализа; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.31 Практическое занятие № ПЗ-31 (2 часа).

Тема «Двойной интеграл»

2.31.1 Задание для работы:

1. Способы вычисления двойного интеграла.
2. Вычисление площади плоской кривой.
3. Нахождение объема пространственного тела.
4. Нахождение координат центра тяжести однородной пластины.

2.31.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вычислить $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$, если область D ограничена прямыми $y = x$, $y = 2x$, $x = 2$, $x = 3$.

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле:

$$\text{а) } \int_{1}^{e} dy \int_{0}^{\ln y} f(x;y)\,dx; \text{ б) } \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x^2} f(x;y)\,dy + \int_{1}^{3} dx \int_{0}^{(3-x)/2} f(x;y)\,dy.$$

3. Найти двойным интегрированием площадь области, ограниченной параболами $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ и прямой $x = 4$.

4. Найти среднее значение функции $z = 2x + y$ в треугольнике, ограниченном осями координат и прямой $y + x = 3$.

5. Найти объем тела, ограниченного с боков круговым цилиндром $x^2 + y^2 = 8$, снизу плоскостью $z = 0$, сверху плоскостью $x + y + z = 4$, расположенного в первом октанте.

6. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ и прямой $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$.

2.31.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы математического анализа; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.32 Практическое занятие № ПЗ-32 (2 часа).
Тема «Кратные интегралы»
2.32.1 Задание для работы:

1. Вычисление тройного интеграла.
2. Приложения тройного интеграла.
3. Вычисление криволинейного интеграла.

2.32.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вычислить тройные интегралы:

а) $\int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 dz$; б) $\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3 y^3 z dz$.

2. Вычислить $\iiint_\Omega xydxdydz,$ $\Omega -$ область, ограниченная гиперболическим параболоидом $z = xy$ и плоскостями $x + y = 1$ и $z = 0$ ($z \geq 0$).

3. Вычислить тройным интегрированием объем тела, ограниченного цилиндрами $z = 4 - y^2$, $z = y^2 + 2$ и плоскостями $x = -1$, $x = 2$.

4. Вычислить криволинейные интегралы:

а) $\int_L \frac{ds}{x - y}$, где $L -$ отрезок прямой $y = \frac{1}{2}x - 2$, заключенный между точками $A(0;-2)$, $B(4;0)$.

б) $\int_L xyds$, где $L -$ контур прямоугольника с вершинами $A(0;0)$, $B(4;0)$, $C(4;2)$, $D(0;2)$.

2.32.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы математического анализа; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.33 Практическое занятие № ПЗ-33 (2 часа).
Тема «Основные понятия дифференциальных уравнений»
2.33.1 Задание для работы:

1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
2. Частные и общие решения.

3. ДУ первого порядка. Задача Коши.

4. ДУ с разделенными и разделяющимися переменными.

2.33.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Скорость распада радия пропорциональна количеству радия в данный момент времени. Вычислить, через сколько лет от 100 г радия останется 65 г, если период полураспада равен 1600 лет.

2. Найти общий интеграл ДУ: а) $\sqrt{y}dy = x^3 dx$; б) $y^3 dy = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. Найти частное решение ДУ $x^2 dy + (y-1)dx = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $x_0 = 1,\ y_0 = 2$.

4. Известно, что функция $y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = \dfrac{3}{2+x} \cdot y$ и $y(-3) = 5$. Найти $y(1)$.

5. Вода в открытом резервуаре сначала имела температуру $70^0 C$, через 10 минут температура воды стала $65^0 C$, температура окружающей резервуар среды $15^0 C$. Определить температуру воды в резервуаре через 30 минут от начального момента. (Скорость охлаждения воды пропорциональна разности температур воды в резервуаре и в окружающей его среде).

2.33.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы теории дифференциальных уравнений; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.34 Практическое занятие № ПЗ-34 (2 часа).

Тема «Дифференциальные уравнения первого порядка»

2.34.1 Задание для работы:

1. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Методы Лагранжа и Бернулли

2. Уравнения Бернулли. Метод Бернулли.

3. Однородные дифференциальные уравнения и приводящиеся к ним.

4. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах.

2.34.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $(1-x)(y'+y) = e^{-x}$; б) $y' - 4xy = x$.

2. Найти частное решение: $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$, $y_0 = 5, x_0 = -2$

3. Решить: а) $xy' + y = 2x^2y^2$, б) $y' + yctgx = y^2 \sin x \cos x$.

4. Решить задачу Коши:

а) $xy' - 2y = x^2\sqrt{y}$, $y(1) = 1$; б) $y' - \dfrac{3y}{x} = y^2$, $y_0 = -4, x_0 = 1$.

5. Решить дифференциальные уравнения первого порядка

а) $xy' = y + \sqrt{x^2+y^2}$; б) $y' = \dfrac{x^2+y^2}{2x^2}$; в) $\left(1 - \dfrac{y}{x^2}\right)dx + \left(y^2 + \dfrac{1}{x}\right)dy = 0$.

6. Решить: а) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$; б) $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$; в) $y' = \dfrac{y-3x^2}{4y-x}$.

7. Найти частное решение ДУ $e^{-y}dx + (y - xe^{-y})dy = 0$, удовлетворяющее условию $y(-3) = 0$.

8. Решить задачу Коши: $x + ye^{x} + (y + e^{x})y' = 0$, $y(0) = 4$.

2.34.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы теории дифференциальных уравнений; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

3 семестр

2.35 Практическое занятие № ПЗ-35 (2 часа).
Тема «Дифференциальные уравнения высших порядков»
2.35.1 Задание для работы:

1. Повторение ДУ первого порядка
2. Решение ДУ, допускающие понижение порядка.

2.35.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $y^5dy = 6^x dx$; б) $x^2y' - 2xy = 1$; в) $2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\cdot\dfrac{y}{x} + 4$; г) $y' = \dfrac{10 - 2xy}{2y + x^2}$.

2. Опытным путем установлено, что при брожении кормов скорость изменения массы (прироста) действующего фермента пропорциональна его наличному количеству. За 4 часа после начала брожения масса фермента уменьшилась с 12 г до 9 г. Найти массу фермента после 10 часов брожения.

3. Решить: а) $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, при $x = \dfrac{\pi}{4}$ $y = \dfrac{\ln 2}{2}$, $y' = 1$; б) $y'' + \dfrac{2x}{1+x^2}y' = \dfrac{x^3}{1+x^2}$

в) $y\cdot y'' + (y')^2 = 0$; г) $y'' = y'\cdot e^{y}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

2.35.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы теории дифференциальных уравнений; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.36 Практическое занятие № ПЗ-36 (2 часа).
Тема «Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка»
2.36.1 Задание для работы:

1. Линейно зависимые и линейно независимые функции.
2. ФСР. Определитель Вронского.
3. Решение ЛОДУ второго порядка. Различные случаи.

2.36.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Проверить, что функции $y = x^3$ и $y = x^4$ линейно независимые. Убедиться, что они образуют ФСР и составить его уравнение.

2. Функции $y = x^3$ и $y = x^2$ удовлетворяют некоторому дифференциальному уравнению второго порядка. Найти частное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = 1,\ y'(1) = 0$.

3. Решить ДУ:

1. $y'' + y' - 2y = 0$. 2. $y'' - 2y' + y = 0$

3. $y'' + 2y' - 5y = 0$. 4. $y'' + 5y' = 0$

5. $y'' - 2y' = 0$. 6. $y'' - 3y' + 2y = 0$

7. $y'' - 2y' = 0$. 8. $y'' + 3y' + 2y = 0$.

9. $y'' - 4y = 0$ 10. $y'' - y' - 2y = 0$

2.36.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы теории дифференциальных уравнений; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.37 Практическое занятие № ПЗ-37 (2 часа).

Тема «Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка»

2.37.1 Задание для работы:

1. Решение ЛНДУ по методу Лагранжа.

2. Подбор частного решения ЛНДУ второго порядка с правой частью специального вида.

2.37.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Решить ДУ второго порядка:

а) $y'' + 3y' - 4y = x^2 + 1$; б) $y'' + 8y' - 9y = \sin x$; в) $y'' - 5y' - 6y = 4xe^{-x}$;

г) $y'' - 2y' + y = e^{2x}$; д) $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}(\sin x + \cos x)$.

2. Решить ДУ: а) $y'' + 3y' - 4y = x^2 + 1$; б) $y'' - 5y' - 6y = 4xe^{-x}$

3. Записать структуру частного решения ЛНДУ по виду функции $f(x)$: $y'' + 4y = f(x)$; а) $f(x) = 4x^3 + 1$; б) $f(x) = 10e^{-x}\cos 2x$; в) $f(x) = x \cdot \sin x$.

2.37.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы теории дифференциальных уравнений; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.38 Практическое занятие № ПЗ-38 (2 часа).

Тема «Знакоположительные ряды»

2.38.1 Задание для работы:

1. Нахождение общего члена ряда.

2. Исследование на сходимость знакоположительных рядов.

2.38.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Найти формулу для общего члена ряда:

а) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \ldots$; б) $1 + \frac{4}{2} + \frac{9}{6} + \frac{16}{24} + \frac{25}{120} + \ldots$; в) $\frac{2}{3} + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{11}\right)^3 + \left(\frac{5}{15}\right)^4 + \ldots$

2. Найти частичную сумму первых четырех членов ряда и сумму ряда:

а) $1+8+27+\ldots$; б) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots$; в) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

3. Проверить, выполняется ли необходимое условие сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5n+3}$; в) $0{,}6+0{,}51+0{,}501+\ldots+0{,}5+0{,}1^n+\ldots$.

4. Исследовать на сходимость ряд:

а) $\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\ldots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n}$; г) $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\left(\frac{4}{9}\right)^4+\ldots$

2.38.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы теории дифференциальных уравнений; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.39 Практическое занятие № ПЗ-39 (2 часа).

Тема «Знакочередующиеся ряды»

2.39.1 Задание для работы:

1. Признак Лейбница.
2. Достаточный признак сходимости знакопеременных рядов.
3. Исследование рядов на абсолютную и условную сходимость.

2.39.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. По признаку Лейбница исследовать сходимость ряда $\frac{1}{1^2+1}-\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^2+1}-\frac{4}{4^2+1}+\ldots$

2. Исследовать сходимость ряда $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}+\ldots$

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n^2$; б) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\ldots$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$

4. Исследовать сходимость знакопеременных рядов и установить характер сходимости (абсолютная, условная): а) $\frac{1}{2}-\frac{4}{5}+\frac{7}{8}-\frac{10}{11}+\ldots$; б) $\frac{1}{10}+\frac{7}{10^2}-\frac{13}{10^3}+\frac{19}{10^4}+\frac{25}{10^5}-\frac{31}{10^6}+\ldots$;

в) $-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots$

5. Определить сумму ряда $3-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\ldots$ с точностью $0{,}01$ двумя способами.

2.39.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы теории дифференциальных уравнений; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.40 Практическое занятие № ПЗ-40 (2 часа).

Тема «Степенные ряды»

2.40.1 Задание для работы:

1. Теорема Абеля. Радиус и интервал сходимости.
2. Ряд Тейлора и Маклорена. Разложение элементарных функций в ряд.
3. Применение рядов.

2.40.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Написать первые три члена ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{3^n \sqrt{n+1}}$, найти интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на концах интервала.

2. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость ряда на концах интервала. Найти сумму ряда при $x=-1$.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{5^n \sqrt[3]{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{8^n \sqrt{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n n^2}$.

3. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)$:

а) $f(x)=\ln\left(1+\frac{x}{4}\right)$; б) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^3}}$; в) $f(x)=\sqrt{x}\cos 2x$

4. Вычислить определенный интеграл с точностью до $0{,}001$ путем предварительного разложения подынтегральной функции в степенной ряд и почленного интегрирования этого ряда.

1. $\int_0^{0,5} \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx$. 2. $\int_0^{0,5} e^{-4x^2} dx$. 3. $\int_0^{0,2} \frac{e^{-x}-1}{x} dx$. 4. $\int_0^{1} \cos\sqrt{x}\, dx$.

5. Записать в виде степенного ряда частное решение уравнения $y''-xy'+y-1=0$ при $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

2.40.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы теории дифференциальных уравнений; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.41 Практическое занятие № ПЗ-41 (2 часа).
Тема «Основы теории вероятностей»
2.41.1 Задание для работы:

1. Комбинаторика.
2. Виды событий.
3. Решение задач на нахождение вероятности.

2.41.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вычислить: а) $C_{11}^{2} \cdot C_{12}^{11}$; б) $C_{16}^{3} - P_6 + A_7^{3}$.

2. В ящике 20 исправных предохранителей и 5 с дефектом. Необходимо заменить 3 предохранителя. Найти вероятность того, что: а) только 2 предохранителя исправны; б) меньше, чем 2 предохранителя исправны; в) хотя бы 1 предохранитель исправен.

3. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 64 кубика одинакового размера. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик имеет: а) одну окрашенную грань; б) три окрашенных грани.

4. Среди 10 микрокалькуляторов лишь 4 новых, остальные – бывшие в употреблении. Наугад взято три микрокалькулятора. Какова вероятность того, что все они окажутся новыми?

2.41.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы теории вероятностей; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.42 Практическое занятие № ПЗ-42 (2 часа).
Тема «Основные теоремы теории вероятностей»
2.42.1 Задание для работы:
1. Сумма и произведение событий.
2. Теоремы сложения и умножения.
3. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.
2.42.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Игральная кость налита свинцом, в результате чего вероятность выпадения каждого числа очков пропорциональна этому числу. Найдите указанные вероятности.
2. Два стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Вероятность поражения мишени каждым из стрелков равна 0,9. Найти вероятность того, что: 1) оба стрелка поразят мишень; 2) хотя бы один стрелок поразит мишень; 3) ни один стрелок не поразит мишень.
3. Студент выучил 16 из 20 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает ответ: а) на два вопроса; б) только на один вопрос из двух, содержащихся в его экзаменационном билете.
4. Магазин получил две, равные по количеству, партии телевизоров одной и той же марки. Известно, что в среднем 14% телевизоров в первой партии и 8% во второй имеют скрытый брак. Найти вероятность того, что купленный в магазине телевизор без брака.
5. Изделие проверяется на стандартность одним из трех товароведов. Вероятность того, что изделие попадет к первому товароведу, равна 0,25, ко второму – 0,26 и к третьему – 0,49. Вероятность того, что изделие будет признано стандартным первым товароведом, равна 0,95, вторым – 0,98, третьим – 0,97. найти вероятность того, что изделие проверено вторым товароведом.

2.42.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы теории вероятностей; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.43 Практическое занятие № ПЗ-43 (2 часа).
Тема «Повторные испытания»
2.43.1 Задание для работы:
1. Схема Бернулли. Формула Бернулли.
2. Локальная теорема Муавра – Лапласа.
3. Формула Пуассона.
4. Интегральная теорема Лапласа.
2.43.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вероятность прорастания семян данного сорта растений равна $0{,}75$. Посеяно 10 семян. Найти наиболее вероятное число всходов.
2. По статистическим данным в некотором районе в течение летнего сезона вероятность выпадения дождя равна $0{,}2$. Найти наиболее вероятное число не дождливых дней, если длительность летнего сезона считать равной 90 дням.
3. Вероятность того, что зерно заражено вредителями, равна $0{,}002$. Найти вероятность того, что из 2000 зерен окажется не более двух зараженных зерен.
4. Вероятность выживания бактерий после радиоактивного облучения равна 0,003. Найти вероятность того, что после облучения из 300 бактерий останется не менее трех.
5. Посредническая фирма заключает договоры с автосалонами на доставку автомобилей. Известно, что от каждого салона заявка на очередной месяц может поступить на фирму с

вероятностью 0,4. Определить минимальное количество автосалонов, с которыми фирма должна заключить договоры, чтобы с вероятностью не менее 0,9 от них поступала хотя бы одна заявка на доставку автомобилей на очередной месяц. При найденном значении определить наиболее вероятное число заявок на доставку на очередной месяц и вероятность поступления такого количества заявок.

2.43.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы теории вероятностей; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.44 Практическое занятие № ПЗ-44 (2 часа).
Тема «Дискретная случайная величина»
2.44.1 Задание для работы:

1. Составление закона распределения, построение многоугольника распределения ДСВ.
2. Нахождение числовых характеристик.

2.44.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Задан закон распределения случайной величины X.

X	2	3	6	7	8	10
p	0,1	0,2		0,2	0,15	0,1

Найти: 1) математическое ожидание M (X); 2) дисперсию D (X); 3) среднее квадратическое отклонение σ (X); 4) построить многоугольник распределения.

2. Известно, что $M(X)=5, M(Y)=8, D(X)=2, D(Y)=6$. Найти: а) $M(X-3)$; б) $M(9X-4Y)$; в) $M(3Y-2X+5)$; г) $D(Y+4)$; д) $D(X-7)$; е) $D(-2X)$; ж) $D(3X-2Y)$; з) $D(3X+4Y-5)$.

3. Даны законы распределения случайных величин X и У:

X	1	2
p	0,2	0,8

$У$	0,5	1
p	0,3	0,7

Найти $M(X+У)$, $M(X\cdot У)$.

4. ДСВ X принимает только два возможных значения x_1 и x_2 $(x_2 > x_1)$. Известно, что $P(X=x_1)=0{,}6$. Найти закон распределения ДСВ X, если $M(X)=1{,}4,\ D(X)=0{,}24$.

2.44.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы теории вероятностей; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.45 Практическое занятие № ПЗ-45 (2 часа).
Тема «Виды распределений дискретных случайных величин»
2.45.1 Задание для работы:

1. Биномиальное распределение.
2. Распределение Пуассона.
3. Геометрическое и гипергеометрическое распределение.

2.45.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. В энергосистеме имеется группа из четырех однотипных агрегатов, находящихся в независимых и одинаковых условиях. Вероятность исправного состояния каждого

агрегата в течение времени T одинакова и равна $0{,}6$. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа агрегатов, находящихся в исправном состоянии в течение времени T. Найти числовые характеристики этой случайной величины.

2. Студент – второкурсник решил помочь библиотеке университета. Ему поручили заполнить 500 книжных формуляров. Вероятность ошибки при заполнении формуляра равна 0,002. Составить закон распределения случайной величины – число формуляров, заполненных студентом верно.

3. В партии 20 изделий, среди них имеются 5 бракованных. Для проверки выбирают случайно 3 изделия. Составить закон распределения числа бракованных изделий в выборке. Найти математическое ожидание и дисперсию.

4. Производятся многократные испытания некоторого элемента на надежность до тех пор, пока элемент не откажет. Найти математическое ожидание и дисперсию ДСВ – числа опытов, которые надо произвести. Вероятность отказа элемента в каждом опыте равна 0,1.

2.45.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы теории вероятностей; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.46 Практическое занятие № ПЗ-46 (2 часа).

Тема «Характеристики непрерывных случайных величин»

2.46.1 Задание для работы:

1. Интегральная функция распределения, ее свойства
2. Дифференциальная функция распределения НСВ, ее свойства.
3. Числовые характеристики НСВ.

2.46.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=2x$ в интервале $(0;1)$, вне этого интервала $f(x)=0$. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

2. Непрерывная случайная величина задана плотностью вероятностей

$$f(x)=\begin{cases}0, & при \quad x\le 1\\ a\,x, & при \quad 1<x<3\\ 0, & при \quad x\ge 3\end{cases}$$

Найти: 1) параметр a; 2) $D(X)$; 3) $P(2<X<2{,}5)$.

3. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & при \quad x\le 0\\ 3x^2+2x, & при \quad 0<x<\dfrac{1}{3}\\ 1, & при \quad x\ge\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Найти плотность вероятностей, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

2.46.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы теории вероятностей; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.47 Практическое занятие № ПЗ-47 (2 часа).
Тема «Виды распределений непрерывных случайных величин»
2.47.1 Задание для работы:
1. Равномерное распределение.
2. Показательное распределение.
3. Нормальный закон распределения, его параметры.
4. Кривая Гаусса. Ее свойства и график.

2.47.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, распределенной равномерно в интервале $(2;8)$.

2. Эколог изучает процесс рассеивания семян определенного растения. Допустим, что семена рассеиваются в среднем на расстояние в 1 м от материнского растения и что распределение вероятностей для этого расстояния экспоненциальное. Какая доля семян рассеивается более чем на 2 м от растения?

3. Нормально распределенная случайная величина задана плотностью вероятностей $f(x) = C \cdot e^{-\frac{(x-13)^2}{32}}$. Найти: 1) значение коэффициента *C*; 2) произведение $M(X) \cdot D(X)$; 3) промежутки вогнутости функции $f(x)$; 4) ось симметрии нормальной кривой; 5) значение функции $f(x)$ в точках перегиба; 6) вероятность попадания в интервал $(10; 14)$.

4. Для некоторого вида млекопитающих масса взрослой особи является нормально распределенной случайной величиной со средним 100 кг и стандартным отклонением 8 кг. Чему равны вероятности того, что животное имеет массу: а) меньше 90 кг; б) от 95 до 110 кг?

5. Случайная величина X – масса одного зерна – распределена нормально с $a = 0{,}18$г и $\sigma = 0{,}05$г. Хорошие всходы дают зерна, масса которых больше 0,15 г. Найдите: а) процент семян, которые дадут хорошие всходы; б) величину, которую с вероятностью 0,95 не превысит масса отобранного зерна.

2.47.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы теории вероятностей; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.48 Практическое занятие № ПЗ-48 (2 часа).
Тема «Основные выборочные характеристики»
2.48.1 Задание для работы:
1. Нахождение выборочных характеристик.

2.48.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Даны измерения 100 обработанных деталей. В таблице указаны значения отклонений от заданного размера и соответствующие им частоты.

$[x_{i-1}; x_i)$	$[-2;-1{,}5)$	$[-1{,}5;-1)$	$[-1;-0{,}5)$	$[-0{,}5; 0)$	$[0; 0{,}5)$	$[0{,}5; 1)$	$[1; 1{,}5)$	$[1{,}5; 2)$
n_i	2	4	9	18	23	20	15	9

Считая, что признак X – отклонение от проектного размера – подчиняется нормальному закону распределения, 1) построить гистограмму относительных частот; 2) записать дискретное распределение признака X; 3) найти основные выборочные характеристики, взяв в качестве вариант середины интервалов

2.48.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы математической статистики; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.49 Практическое занятие № ПЗ-49 (2 часа).

Тема «Точечные и интервальные оценки»

2.49.1 Задание для работы:

1. Нахождение точечных оценок.

2. Определение доверительного интервала для оценки математического ожидания нормального распределения.

2.49.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Найти несмещенные оценки для неизвестных математического ожидания и дисперсии случайной величины X , заданной статистическим распределением выборки:

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

2. По выборке объема $n=16$ из генеральной совокупности определены выборочная средняя $\bar{x}=41{,}7$ и исправленное среднее квадратическое отклонение $s=4$. Найти 95-процентный доверительный интервал для генеральной средней и генерального среднего квадратического отклонения.

3. Проведено 25 равноточных измерений некоторой физической величины и найдено среднее арифметическое результатов измерений $\bar{x}=42{,}5$. Все измерения проведены одним и тем же прибором с известным средним квадратическим отклонением ошибок измерений $\sigma=2{,}1$. Найти с надежностью $\gamma=0{,}9$ доверительный интервал для оценки истинного значения измеряемой физической величины.

2.49.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и методы математической статистики; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.50 Практическое занятие № ПЗ-50 (2 часа).

Тема «Корреляция»

2.50.1 Задание для работы:

1. Составление корреляционной таблицы.

3. Вычисление коэффициента корреляции.

4. Определение параметров линейной регрессии.

2.50.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Получены данные между длиной колоса (X) и числом зерен (Y) в нем:

X	7	8	11	12	9	7	9	10	7	8	10	13	13	14	12	7	9	8	9	10
Y	15	20	28	28	23	17	23	25	16	21	23	28	31	32	30	16	25	20	23	25

По данным составить корреляционную таблицу; построить эмпирическую линию регрессии и записать уравнение теоретической линии регрессии.

2. Методом наименьших квадратов найти уравнение прямой регрессии Y на X по данным, приведенным в корреляционной таблице:

$X \backslash Y$	16	26	36	46	56	n_x
20	4					4

25	6	8				14
30		10	32	4		46
35			3	12	1	16
40			9	6	5	20
n_y	10	18	44	22	6	100

3. Были произведены измерения общей длины ствола в см (X) и длины его части без ветвей (Y) десяти молодых сосен. Результаты этого измерения представлены в таблице. Вычислить выборочный коэффициент корреляции и найти уравнение прямой регрессии Y на X .

x_i	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115
y_i	14	18	19	20	23	23	24	26	29	34

2.50.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и статистические методы обработки экспериментальных данных; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2.51 Практическое занятие № ПЗ-51 (2 часа).

Тема «Проверка гипотез»

2.51.1 Задание для работы:

1. Определение нулевой и альтернативной гипотез.
2. Применение статистических критериев проверки гипотез.

2.51.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с заданным эмпирическим распределением.

интервалы	3 – 5	5 – 7	7 – 9	9 – 11	11 – 13	13 –15	15 – 17	17 –19	19 – 21
частоты	5	8	10	18	20	16	11	7	5

2. Дано статистическое распределение

варианты	0	1	2	3	4	5	6	7
частоты	7	21	26	21	13	7	3	2

Оценить степень согласованности статистического распределения с распределением Пуассона.

2.51.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия и статистические методы обработки экспериментальных данных; научится использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; овладеет навыками построения математических моделей типовых профессиональных задач.