

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ  
ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ**

**ПРОЕКТИРОВНИЕ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН**

**Направление подготовки (специальность) 35.03.06 Агроинженерия**

**Профиль образовательной программы Технические системы в агробизнесе**

**Форма обучения очная**

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>1. Конспект лекций .....</b>	<b>3</b>
<b>1.1 Лекция № 1-2 Структура механизмов. Структурный синтез рычажных механизмов.....</b>	<b>3</b>
<b>1.2 Лекция № 3 Синтез механизмов с низшими парами.....</b>	<b>6</b>
<b>1.3 Лекция № 4-5 Синтез кулачковых механизмов.....</b>	<b>12</b>
<b>1.4 Лекция № 6 Кинематический синтез шарнирно-рычажных механизмов.....</b>	<b>23</b>
<b>1.5 Лекция № 7-8 Синтез зубчатых механизмов.....</b>	<b>24</b>
<b>1.6 Лекция № 9 Синтез планетарных механизмов.....</b>	<b>37</b>
<b>2. Методические указания по выполнению лабораторных работ .....</b>	<b>39</b>
<b>2.1 Лабораторная работа № ЛР-1-2 Составление кинематических и структурных схем механизмов. Структурный синтез механизмов с использованием персональных компьютеров .....</b>	<b>39</b>
<b>2.2 Лабораторная работа № ЛР-3-4 Синтез кулачковых механизмов с использованием персональных компьютеров.....</b>	<b>47</b>
<b>2.3 Лабораторная работа № ЛР-5-6 Кинематический синтез механизмов с использованием персональных компьютеров.....</b>	<b>47</b>
<b>2.4 Лабораторная работа № ЛР-7-8 Синтез зубчатых механизмов.....</b>	<b>50</b>

# 1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

## 1. 1 Лекция №1-2 (4 часа).

Тема: «Структура механизмов. Структурный синтез рычажных механизмов»

### 1.1.1 Вопросы лекции:

1. Кинематическая цепь и ее элементы.
2. Структурная формула пространственных механизмов.
3. Структурная формула плоских механизмов.
4. Структурный синтез плоских механизмов.

### 1.1.2 Краткое содержание вопросов:

#### 1. Кинематическая цепь и ее элементы.

**Кинематической цепью** называется система звеньев, соединенных между собой кинематическими парами.

В кинематической цепи всегда два элемента – звенья и пары.

**Звеном** называется система твердых тел, жестко скрепленных между собой.

(Пример: шатун состоит из крышки, винтов, втулки и т.д.)

**Подвижное соединение** двух звеньев называется кинематической парой (кп).

(Примеры.)

Кинематическая цепь называется **замкнутой**, если каждое ее звено входит **не менее чем в две** кинематические пары.

Кинематическая цепь называется **разомкнутой**, если в ней есть звенья, входящие **только в одну** кинематическую пару.

Кинематическая цепь называется **простой**, если в ней звенья входят не более чем в две кинематические пары и называется **сложной**, если есть звенья, входящие более чем в две кинематические пары.

**Элементом кп** называется поверхность, линия или точка звена, ограничивающая относительное движение звеньев в кинематической паре. В кп два элемента, поэтому пары.

Классификация по числу условий связи

1 кл. – шар на плоскости (точечная пара). Наложено одно условие связи – центр шара находится на одном и том же расстоянии от поверхности. (Замыкание в паре может быть силовое или геометрическое, см. таблицу видов кинематических пар).

2 кл. – цилиндр на плоскости (линейная пара), 2 условия связи.

- шар - цилиндр, 2 условия связи.

3 кл. – шаровое соединение (сферическая пара), 3 условия связи.

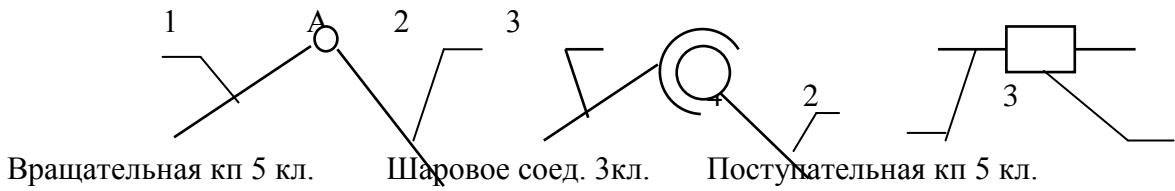
3 кл. - призма на плоскости (плоскостная пара), 3 условия связи

4 кл. – цилиндр в цилиндрическом отверстии (цилиндрическая пара), 4 условия связи

5 кл. – шарнирное соединение (вращательная кп), 5 условий связи, одна степень свободы и т. д.

#### Изображения кинематических пар

Изображения кинематических пар обусловлены ГОСТом( ГОСТ 2.770-68)..



## 2. Структурная формула пространственных механизмов.

Обозначим К – число звеньев

$P_1$  – число кинематических пар 1-го класса

$P_5$  – число кинематических пар 5-ого класса

Найдем число степеней свободы этой кинематической цепи

$$H = 6k - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - P_1$$

Обычно одно из звеньев механизма является неподвижным (рама станка, рама трактора и т.д.) и к этому звену привязывается система координат.

**Число степеней** свободы кинематической цепи относительно звена, принятого за неподвижное, называется степенью подвижности.

$$W = H - 6 = 6(k - 1) - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - P_1$$

$$W = 6n - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - P_1$$

– формула пространственных механизмов носит название формулы **Сомова-Малышева**.

*Механизмом (с точки зрения структуры) называется такая кинематическая цепь, в которой степень подвижности соответствует числу заданных законов движения.*

Звено, закон движения которого задан, называется ведущим или входным звеном. Неподвижное звено – стойка, все остальные звенья называются ведомыми. Ведомое звено, на котором крепится исполнительный орган машины (резец, электрод, шлифовальный камень и т.д.) называется выходным.

Любой механизм состоит из:

- а) ведущего звена (звеньев) – закон движения которого задан (известен);
- б) стойки (неподвижного звена);
- в) ведомых звеньев – звеньев закон движения которых, определяется законами движения ведущих звеньев.

## 3. Структурная формула плоских механизмов.

**Плоские механизмы** – механизмы, у которых оси вращательных пар параллельны, а движения всех звеньев происходят в параллельных плоскостях.

Структурная формула плоского механизма:

К – число звеньев

$P_4$  – число кп 4-ого класса

$P_5$  – число кп 5-ого класса

Число степеней свободы в плоскости  $H = 3$ , поэтому пар 3 и т.д. кл. не может быть.

$$H = 3k - 2P_5 - P_4$$

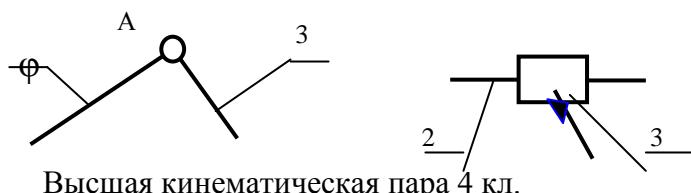
**С учетом стойки степень неподвижности**

$$W = H - 3 = 3(k - 1) - 2P_5 - P_4$$

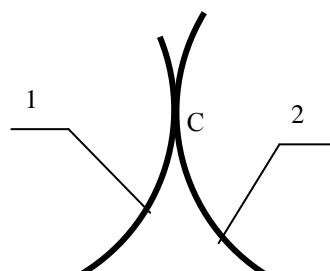
$$W = 3n - 2P_5 - P_4$$

Впервые вывел русский математик и механик П.Л.Чебышев.

Условное изображение пар в плоских механизмах.



Кинематические пары 5 класса, низшие.



Элементы профилей высших кп изображаются точно в масштабе.  
Пара 4 кл так как две степени свободы – проскальзывание и перекатывание.

#### 4. Структурный синтез плоских механизмов.

В основу структурного синтеза положен принцип В.Л.Ассура.

*Любой механизм может быть образован путём последовательного присоединения свободными элементами к группе Ассура к ведущему звену и к стойке.*

Группы Ассура – группы ведомых звеньев.

*Группой Ассура называется кинематическая цепь, имеющая нулевую степень подвижности после присоединения её к стойке и которая не может быть разделена на группы с меньшим числом звеньев.*

Таким образом, степень подвижности группы

$$W_{gp} = 3 \cdot n - 2P_5 - P_4 = 0$$

Рассмотрим механизм, в котором имеются только низшие кп

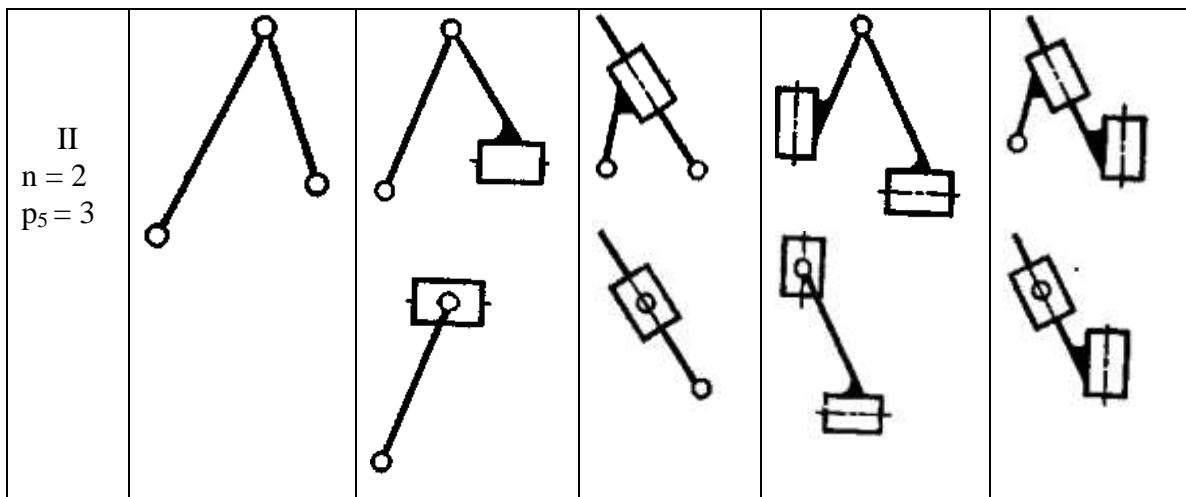
$$W_{gp} = 3 \cdot n - 2P_5 = 0$$

Так как  $n$  и  $P_5$  могут быть только целыми числами, можно определить, сколько звеньев и кп может быть в группах

$P_5$	3	6	9	...
$n$	2	4	6	...

*По первому столбцу, из 2 звеньев и 3 кп можно создать 5 двухпроводковых групп (см. табл.)*

Класс	Порядок второй				
	Вид				
	первый	Второй	третий	четвертый	пятый



Л.В.Ассур предложил классификацию групп, которая потом была усовершенствована Артоболевским И.И.. В основу этой классификации положен класс контура.

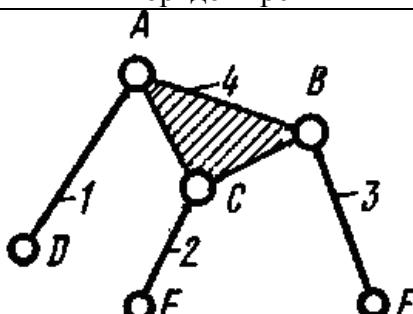
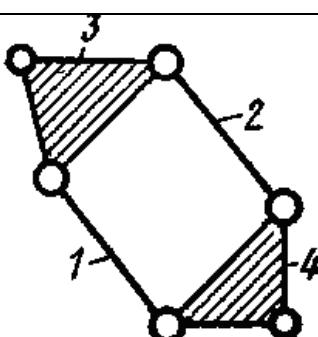
**Класс контура определяется числом кп в замкнутом контуре, образованном звеньями группы**

**Класс группы определяется по наивысшему классу контура, образованного звеньями группы.**

**Порядок группы определяется числом свободных элементов в кп группы.**

Двухпроводковые группы, в зависимости от числа вращательных и поступательных кп и их взаимного расположения в группе подразделяются по видам (см. табл.)

**Для второго столбца можно привести группы следующего вида**

Класс	Порядок третий
III $n = 4$ $p_5 = 6$	
IV $n = 4$ $p_5 = 6$	

**1. 1 Лекция №3(2 часа).**

**Тема: «Синтез механизмов с низшими парами»**

**1.1.1 Вопросы лекции:**

1. Методы оптимизации в синтезе механизмов с применением ЭВМ.
2. Синтез передаточных механизмов.
3. Синтез механизмов по положению звеньев.

### 1.1.2 Краткое содержание вопросов:

#### 1. Методы оптимизации в синтезе механизмов с применением ЭВМ.

Этапы синтеза механизмов.

Проектирование любого механизма начинается с проектирования его схемы – затем расчеты на прочность, конструктивное оформление, выбор материала и т.д., но все это уже не может существенно изменить основные свойства механизма.

**Проектирование схемы механизма по заданным его свойствам называется синтезом механизма.**

Принято различать 2 этапа проектирования:

**1). Выбор структурной схемы (структурный синтез).**

**2). Определение постоянных параметров выбранной схемы механизма по заданным его свойствам (кинематический синтез, динамический синтез).**

Для выполнения второго этапа синтеза механизма требуется установить, какие постоянные параметры определяют схему механизма. К ним относятся длины звеньев, положение точек, их траектория движения, скорость, ускорения, массы звеньев и т.д. Различают входные и выходные параметры.

**Входные параметры – устанавливаются заданием на синтез механизма.**

**Выходные параметры – определяются в процессе синтеза механизма.**

Например, при кинематическом синтезе в шарнирно-рычажном механизме (рис.1), заданное кинематическое свойство механизма состоит в том, что точка **C** на шатуне должна описывать траекторию, мало отличающуюся от заданной  $Y = Y(X)$

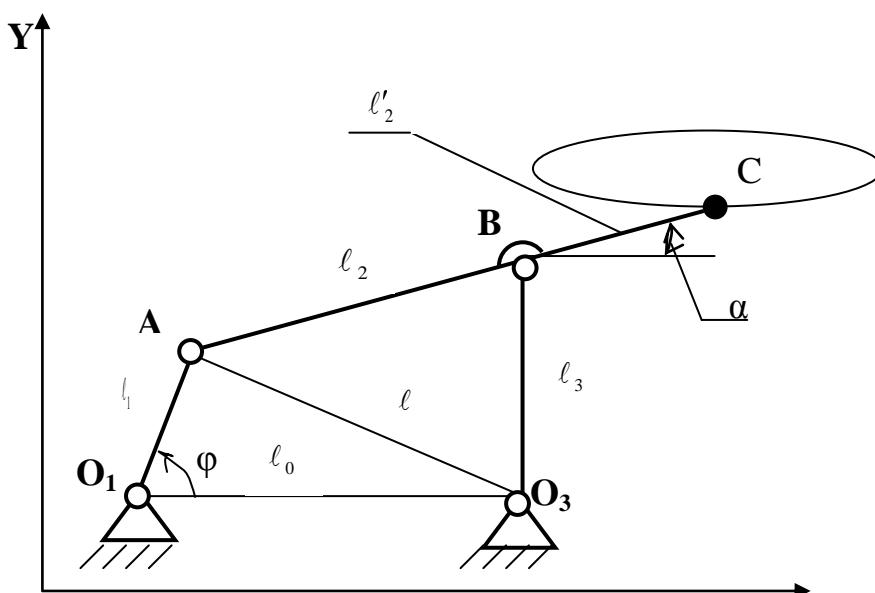


Рис.1.

Выходными параметрами здесь будут  $l_0, l_1, l_2, l_3, X_{O1}, Y_{O1}$ . Все выходные параметры должны быть независимыми. Например, координата точки  $O_3$  зависит от координаты точки  $O_1$  и  $l_0$ .

Чтобы получить заданные свойства механизма, надо удовлетворить многим, часто противоречивым условиям. Но из всех условий можно выбрать одно основное условие. В данном примере – это получение заданной траектории движения. Все остальные условия называются дополнительные (ограничение длин звеньев, минимальные габариты и т.д.).

Дополнительные условия в обоих видах синтеза (кинематическом и динамическом) могут быть как кинематическими, так и динамическими, т.е. вид синтеза определяется основным условием

*Функция, выражающая основное условие, экстремум которой, определяют выходные параметры синтеза механизма, называется целевой (Функция цели, критерий оптимизации).*

В нашем случае целевая функция может быть представлена в виде минимального отклонения шатунной кривой точки **C** от заданной кривой.

$$\Delta_{\min} = (Y_C - Y)_{\min}$$

где  $Y_C$  – ордината шатунной кривой точки **C** при некотором значении абсциссы  $X$ ;

$Y$  – ордината заданной кривой при том же значении абсциссы  $X$ .

Координаты точки **C** можно выразить в явном или в неявном виде, в виде аналитических выражений (см. кинематическое исследование аналитическим методом). В общем случае

$$Y_C = f(\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3, \varphi)$$

$$X_C = f(\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3, \varphi)$$

Минимальное значение  $\Delta$ , определяемое при различных углах поворота ведущего звена  $\varphi$ , и есть минимальное отклонение от заданной кривой. В этом примере оптимальное значение целевой функции считается ее минимальное значение.

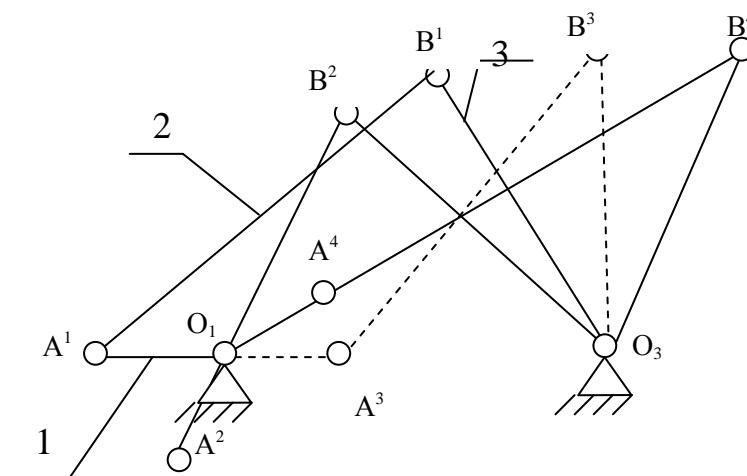
Дополнительные условия синтеза при решении задач синтеза механизмов также должны быть представлены в математической форме. Эти условия выражаются в виде неравенств, устанавливающих допустимую область существования параметров синтеза. Поэтому целевая функция вычисляется только для тех комбинаций параметров синтеза, которые удовлетворяют дополнительным условиям синтеза. Например:

**1-ое условие** - ограничения на длины звеньев.  $\ell_1 < \ell_2 < \ell_3 < \ell_0$ , а  $\ell_0/\ell_1 < m$ .

**2-ое условие** – механизм должен быть кривошипно-коромысловым, т.е. надо выполнить условие существования кривошипа  $\ell_1 + \ell_0 < \ell_2 + \ell_3$

Докажем это

Пусть  $\ell_1 < \ell_2 < \ell_3 < \ell_0$



Из условия проворачиваемости кривошипа (Рис.2.)

$$\ell_0 + \ell_1 < \ell_2 + \ell_3 \quad (1)$$

$$\ell_0 - \ell_1 < \ell_2 + \ell_3 \quad (2)$$

если  $\ell_1 < \ell_2 < \ell_3 < \ell_0$ , а

если  $\ell_2 > \ell_3 > \ell_0$  или

$\ell_3 > \ell_2 > \ell_0$ , то неравенство (1) только усиливается.

Выполнение неравенства (1) всегда обеспечивает выполнение неравенства (2).

Рис.2.

Неравенство (1) позволяет дать общую формулировку условия проворачиваемости короткого звена (Условие существования кривошипа).

**Правило Грасгофа**

**Самое короткое звено шарнирного четырехзвенника может быть кривошипом, если сумма длин самого короткого и самого длинного звеньев меньше суммы длин остальных звеньев.**

**3-е условие** – угол давления  $\alpha$  на коромысле со стороны шатуна должен быть меньше допустимого значения  $\alpha_{\text{доп}}$

$$\alpha = \arcsin \frac{\ell_2^2 + \ell_3^2 - \ell^2}{2\ell_2\ell_3} \leq \alpha_{\text{доп}}$$

При небольшом числе параметров синтеза условие минимума целевой функции могут быть получены на основании известных условий экстремума функции нескольких переменных. При большом числе параметров эта задача аналитически не решается и тогда решение приходится искать путем перебора различных вариантов механизмов, что возможно только с использованием ЭВМ.

**Оптимизацией в синтезе механизмов называется определение выходных параметров синтеза из условия минимума целевой функции при выполнении принятых ограничений.**

Все известные методы оптимизации можно свести в три группы:

- 1) **Случайный поиск;**
- 2) **Направленный поиск;**
- 3) **Комбинированный поиск.**

Алгоритм работы (программы) при случайном поиске (метод Монте-Карло):

1. *Произвольно выбираются выходные параметры синтеза из набора случайных чисел с учетом ограничений.*
2. *По параметрам синтез определяется целевая функция и запоминается.*
3. *Выбираются другие случайные параметры с учетом ограничений, и определяется новое значение целевой функции. Если оно меньше предыдущего, то предыдущее значение выбрасывается, а новое запоминается и т.д. до тех пор пока целевая функция не престанет уменьшаться или войдет в допуск.*

Направленный поиск проводится различными методами, которые отличаются между собой способами выбора направления, по которым следует переходить от одних значений параметров к другим.

Простейший способ;

1. *Произвольно выбирается первая комбинация искомых параметров с учетом ограничений и определяется целевая функция.*
2. *Изменяется один из параметров синтеза на малую величину и определяется целевая функция, если она уменьшилась, то направление выбрано верное и идут в этом направлении до минимума целевой функции. Если значение целевой функции увеличилось, то приращение берут обратное и проверяют целевую функцию.*
3. *Последовательно изменяют другие параметры по тем же принципам.*
4. *После того, как были изменены все параметры, вновь дается приращение первому или другому параметру и все снова повторяется, пока не будет достигнут  $\min$ . При этом может изменяться и шаг приращения.*

Быстрее можно достичь  $\min$ , используя градиентные методы, если есть возможность определить частные производные.

Если есть несколько  $\min$ , то этот метод может определить не самый минимальный минимум. Например, рассмотрим  $\Delta = f(a)$  (Рис.3.)

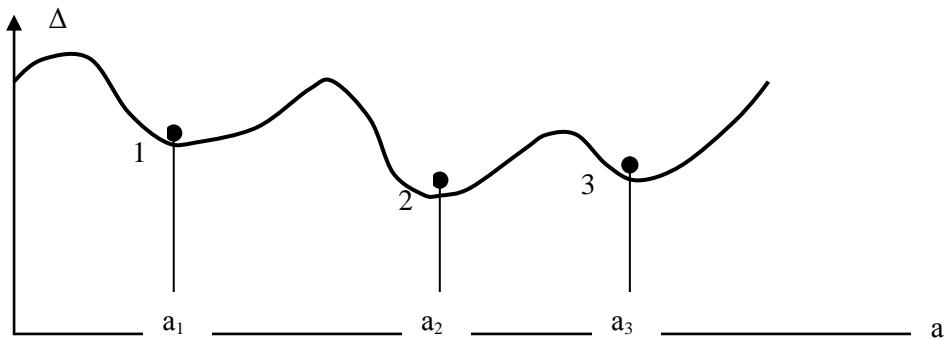


Рис.3.

**Наименьший минимум в теории оптимизации принято называть глобальным минимумом, а все остальные минимумы – локальные.**

Направленный поиск обычно приводит к отысканию локального минимума. Случайный поиск более подходит для отыскания глобального минимума, но он дает слишком большой объем вычислений и, поэтому часто применяют комбинированный метод, при котором случайным поиском просматривают значения целевой функции в отдельных частях области изменения параметров, а затем направленным поиском определяют локальные минимумы и наименьший минимумом, т.е. глобальный.

Рассмотренные методы оптимизации с применением ЭВМ могут быть использованы для любой другой задачи синтеза механизмов, в том числе и при решении отдельных частных задач синтеза.

## 2. Синтез передаточных механизмов.

**Передаточным механизмом называется механизм для воспроизведения заданной функциональной зависимости между перемещениями звеньев, образующих кинематические пары со стойкой.**

Например, для синтеза передаточного механизма шарнирного четырехзвенника можно использовать тот же метод оптимизации, рассмотренный выше.

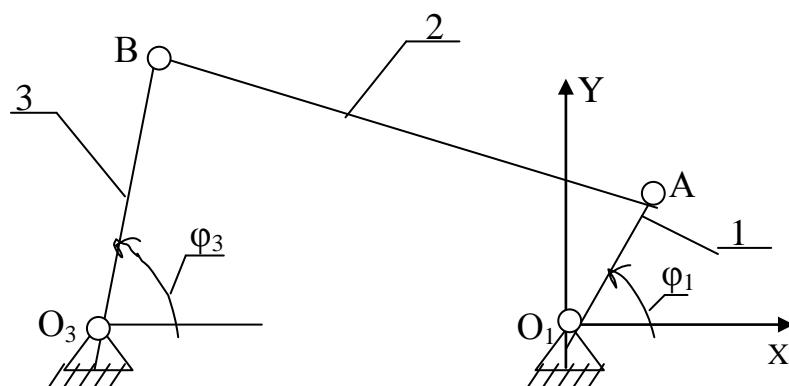


Рис.4.

Заданная функция имеет вид,  $\varphi_{3_{\text{зад}}} = f(\varphi_1)$  где  $\varphi_1$  – входная координата, а  $\varphi_3$  – выходная координата.

Тогда как механизм воспроизводит в общем случае другую функцию.

$$\varphi_3 = \arctg \frac{\sin \varphi_1}{\lambda_{01} + \cos \varphi_1} + \arccos \left( \frac{\lambda_{31}^2 - \lambda_{21}^2}{\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi'_3}} + \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi'_3} \right) \frac{1}{2\lambda_{31}}$$

то есть  $\varphi_3 = f(\lambda_{01}, \lambda_{21}, \lambda_{31}, \varphi_1)$

Относительные длины берутся потому, что при подобном изменении четырехугольника  $O_1ABO_3$ , углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_3$  не изменяются.

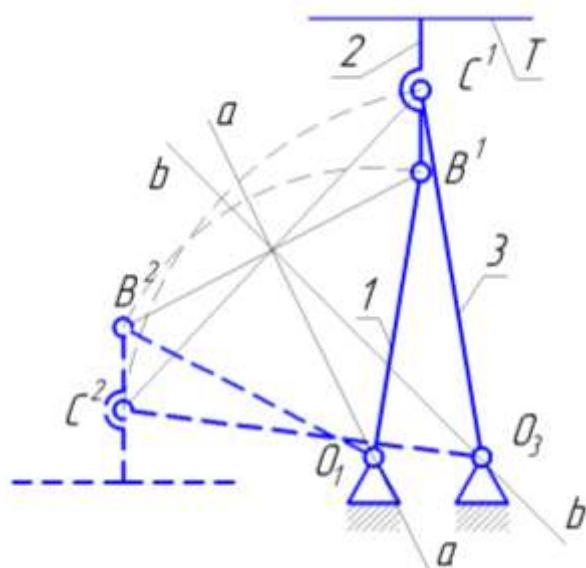
Тогда целевая функция  $\Delta_{\min} = \varphi_{3_{\text{зад}}} - \varphi_3$

Минимизируя целевую функцию любым выше приведенным методом (случайный поиск, направленный поиск, комбинированный поиск), можно найти

выходные параметры механизма  $\lambda_{01}, \lambda_{21}, \lambda_{31}$

### 3. Синтез механизмов по положению звеньев.

Задача синтеза рычажных механизмов по положению звеньев может быть решена различными методами, но очень часто она решается графическим методом. Например, требуется найти длины звеньев шарнирного четырехзвенника  $O_1, B, C, O_3$  если шатун  $BC$  связан со столом  $T$ , который должен занимать два положения повернутых на  $180^\circ$ . Точка  $O_1$  и  $O_3$  лежат на перпендикулярах  $aa$  и  $dd$ . Можно получить различные варианты механизма и выбрать наиболее приемлемые.



## 1. 1 Лекция №4-5 (4 часа).

### Тема: «Синтез кулачковых механизмов»

#### 1.1.1 Вопросы лекции:

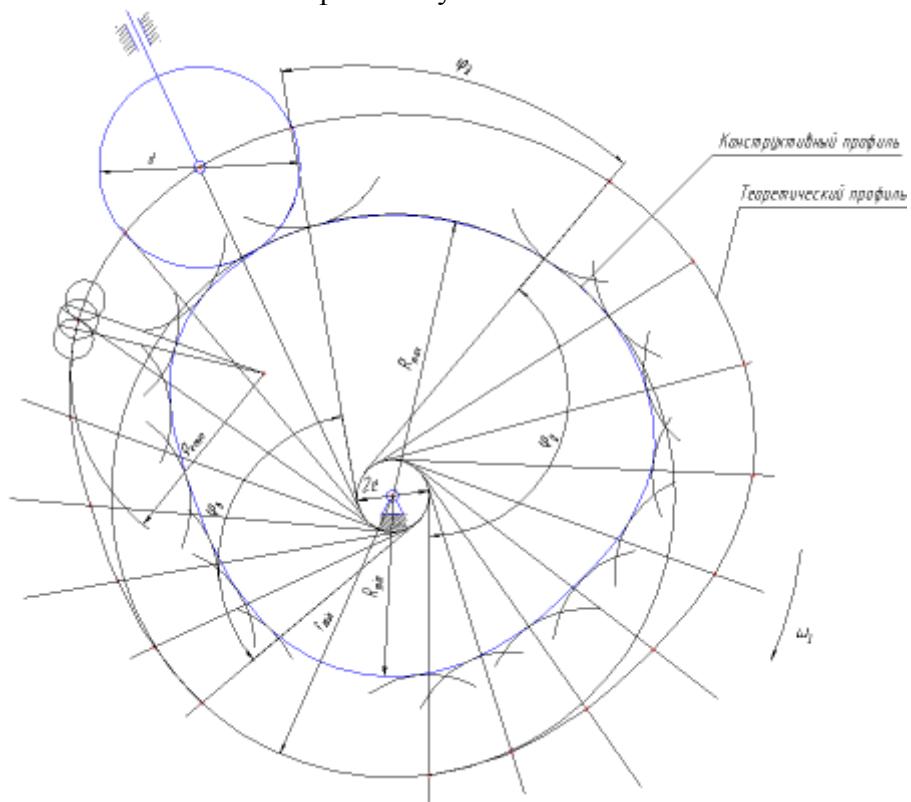
1. Профилирование поверхности кулачков
2. Выбор закона движения толкателя
3. Определение минимальных размеров кулачкового механизма

#### 1.1.2 Краткое содержание вопросов:

##### 1. Профилирование поверхности кулачков

Рассмотрим проектирование кулачкового механизма с роликовым толкателем и имеющим дезаксиал (смещение оси поступательной пары толкателя со стойкой относительно оси вращения кулачка).

Порядок профилирования кулачка следующий. Проводим окружности радиусом  $r_{min}$  и  $e$  и изображаем первое произвольное положение оси толкателя (прямая, касательная к окружности радиусом  $e$ ). Откладываем фазовые углы удаления, дальнего стояния и возвращения в направлении, противоположном вращению кулачка. Делим дуги на фазовых углах удаления и возвращения на равные части (в данном примере дуги разделены на 8 равных частей). Через полученные точки проводим лучи, касательные к окружности радиусом  $e$ , которые имитируют положение оси толкателя в обращенном движении механизма. На каждом луче, используя закон движения толкателя (он может быть задан или в виде диаграммы, или в табличной форме, или в виде аналитической функции), откладываем значения  $S-S_0$  от окружности, радиусом  $r_{min}$ . Соединив полученные точки плавной линией на фазовых углах



удаления и возвращения, мы получим теоретический (центровой) профиль кулачка (для копьевидного башмака толкателя). На фазовых углах дальнего и ближнего стояния этот

профиль будет выполнен по дуге окружностей радиусом  $r_{\max}$  (на чертеже не показан) и  $r_{\min}$ .

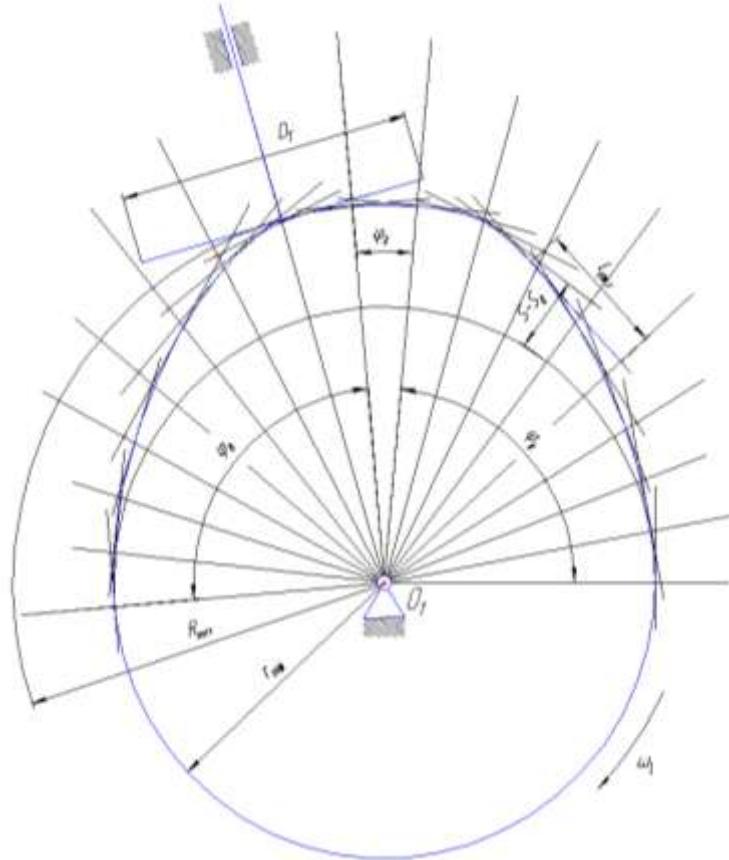
Для построения конструктивного профиля кулачка необходимо выбрать радиус ролика толкателя ( $r_0$ ). Во избежание пересечения частей профиля кулачка и из условия равной контактной прочности он должен удовлетворять следующим неравенствам [3]

$$\begin{cases} r_0 \leq (0,7 \dots 0,8) \rho_{KP_{\min}} \\ r_0 \leq 0,4 \dots 0,5 \cdot r_{\min} \end{cases}$$

Где  $\rho_{KP_{\min}}$  - минимальный радиус кривизны теоретического профиля кулачка, который определяется любым методом (на данном рисунке он определён методом окружностей) на самом искривленном участке теоретического профиля.

Проектирование кулачкового механизма, в котором башмак толкателя выполнен в виде тарелки, имеет свои особенности. Как правило, в таких кулачковых механизмах дезаксиал в плоскости кулачковой шайбы равен нулю, но он может быть в перпендикулярной плоскости, для того чтобы при работе кулачкового механизма тарелка с толкателем вращалась (уменьшается износ тарелки, увеличивается КПД механизма).

Так же, как и при профилировании кулачкового механизма с роликовым толкателем, проводим окружность радиусом  $r_{\min}$ , откладываем фазовые углы и делим дуги на фазовых углах на равные части. Изображаем положение оси толкателя в виде радиальных лучей и откладываем на них  $S$  (от центра кулачка) или  $S-S_0$  (от окружности радиусом  $r_{\min}$ ).



После нахождения соответствующих точек, проводим через них перпендикуляры относительно лучей, которые имитируют тарелку в обращенном движении. В полученной замкнутой области проводим кривую, касающуюся всех тарелок – это необходимо для передачи непрерывного движения от кулачка к башмаку толкателя по одной линии. Полученный, таким образом, профиль кулачка, является конструктивным профилем.

Радиус тарелки определяем по выражению

$$R_t = \sqrt{l_{\max}^2 + e^2} + 3...5\text{мм},$$

Где:  $l_{\max}$  – максимальное расстояние от оси толкателя до точки касания профиля кулачка тарелкой;

$e$  – дезаксиал толкателя в плоскости, перпендикулярной плоскости кулачковой шайбы.

Для того чтобы спрофилировать кулачок с любым башмаком толкателя, кроме фазовых углов, которые диктуются технологическим процессом, выполняемым кулачком, необходимо выбрать закон движения толкателя и минимальный радиус кулачка.

## 2. Выбор закона движения толкателя

Кулачковый механизм применяется там, где требуется выполнить наперед заданный закон движения толкателя. Из условий технологического процесса определяются необходимая величина хода и фазовые углы движения толкателя. Какой закон движения лучше всего взять? Рассмотрим наиболее простой закон, когда функция перемещения представляет собой прямые отрезки и проанализируем его (см. рисунок).

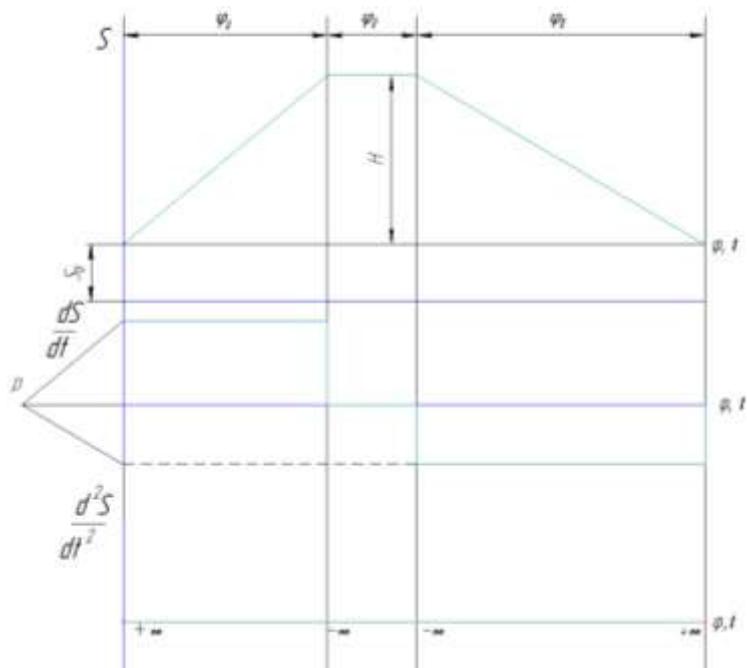
Из анализа видно, что при постоянных скоростях толкателя на фазовых углах удаления и возвращения на диаграмме ускорения в четырех точках имеются разрывы функции (ускорение равно бесконечности). Так как толкатель имеет массу, то к нему будет мгновенно прикладываться сила инерции.

*Мгновенное приложение силы называется ударом*

*При мгновенном приложении бесконечной по величине силы возникает жесткий удар, если мгновенно приложена конечная сила – мягкий.*

Неприятности выявляются при рассмотрении диаграммы ускорения, поэтому функция перемещения толкателя от углового перемещения кулачка обычно выбирается в виде диаграммы изменения второй производной перемещения по углу поворота кулачка  $\frac{d^2S}{d\varphi^2}$  или  $\frac{d^2\beta}{d\varphi^2}$  в зависимости от угла поворота кулачка  $\varphi$ .

Этот параметр (аналог ускорения) пропорционален ускорению толкателя и, при постоянной угловой скорости кулачка, равен произведению квадрата угловой скорости на аналог ускорения. Отсутствие разрывов на этой диаграмме обеспечивает безударность при возникновении инерционной нагрузки передаваемой толкателью кулачку. Нарушение непрерывности приводит к возникновению ударных инерционных нагрузок.

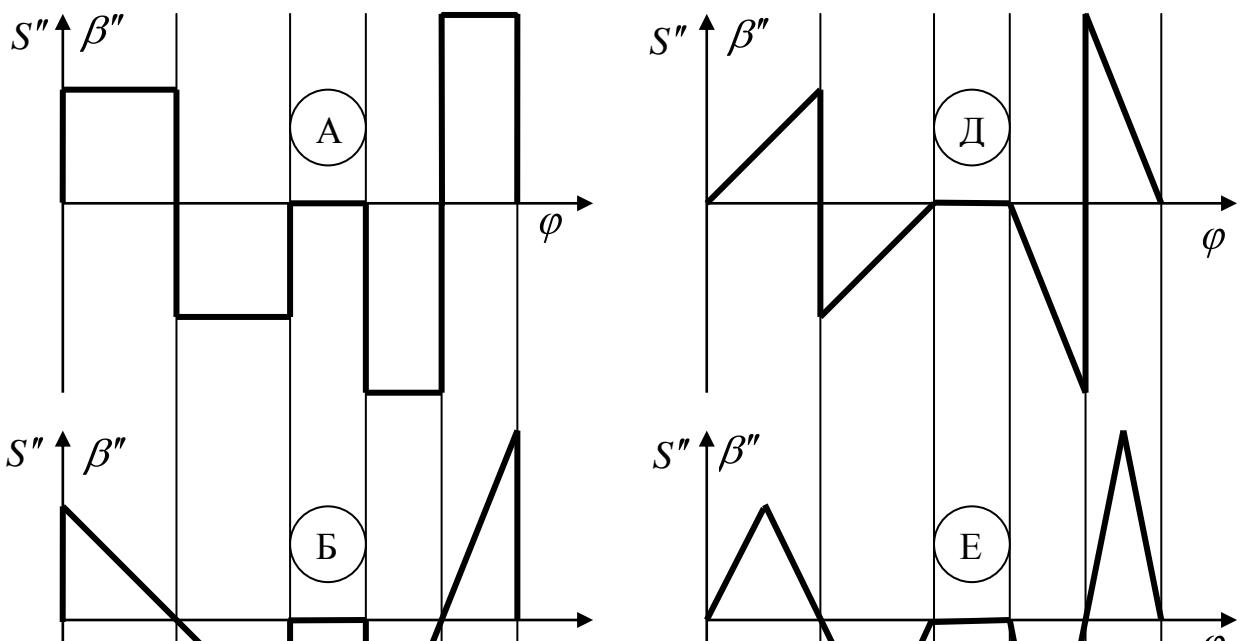


Практика проектирования кулачковых механизмов определила многообразие приемлемых типовых диаграмм изменения второй производной от перемещения толкателя по углу поворота кулачка. Типовые законы движения толкателя для краткости дальнейшего изложения обозначим большими буквами русского алфавита как это сделано на рисунке 2.1.

Все функции, показанные на диаграммах (рисунок 2.1), кусочно-непрерывные. Интегрирование каждого непрерывного куска функции и удовлетворение начальным условиям позволяют определить значения постоянных интегрирования. Тогда результаты интегрирования могут быть представлены выражениями (2.1)...(2.4)

Для толкателя с поступательным движением:

$$\left. \begin{array}{l} S - S_0 = kH \\ \frac{dS}{d\varphi} = k' \frac{H}{\varphi_y} \\ \frac{d^2S}{d\varphi^2} = k'' \frac{H}{\varphi_y^2} \end{array} \right\} \quad 0 < \varphi < \varphi_y \quad (2.1),$$



**Рисунок 1. Типовые законы движения толкателя**

$$\left. \begin{array}{l} S - S_0 = [-k \bar{H}] \\ \frac{dS}{d\varphi} = -k' \frac{H}{\varphi_B} \\ \frac{d^2S}{d\varphi^2} = -k'' \frac{H}{\varphi_{B^2}} \end{array} \right\} \quad \varphi_y + \varphi_d < \varphi < \varphi_y + \varphi_d + \varphi_B \quad (2.2),$$

Для толкателя, имеющего вращательное движение, зависимости параметров закона движения толкателя от угла поворота кулачка можно представить в виде:

$$\left. \begin{array}{l} \beta - \beta_0 = k\psi \\ \frac{d\beta}{d\varphi} = k' \frac{\psi}{\varphi_y} \\ \frac{d^2\beta}{d\varphi^2} = k'' \frac{\psi}{\varphi_{y^2}} \end{array} \right\} \quad 0 < \varphi < \varphi_y \quad (2.3),$$

$$\left. \begin{array}{l} \beta - \beta_0 = -k \bar{\psi} \\ \frac{d\beta}{d\varphi} = -k' \frac{\psi}{\varphi_B} \\ \frac{d^2\beta}{d\varphi^2} = -k'' \frac{\psi}{\varphi_{B^2}} \end{array} \right\} \quad \varphi_y + \varphi_D < \varphi < \varphi_y + \varphi_D + \varphi_B \quad (2.4),$$

Множители  $k, k', k''$  в правых частях выражений (2.1)...(2.4) являются функциями угла поворота кулачка. Для целей курсового проектирования достаточно определить значение этих функций в ограниченном количестве точек – 9 точках внутри каждого фазового угла. В таблицах 2.1...2.7 приведены значения этих функций для 9-ти равноотстоящих значений поворота кулачка на отрезках фазовых углов удаления и возвращения толкателя.

Для универсального использования функций коэффициенты  $k, k', k''$  приведены для относительных значений угла поворота кулачка к угловой протяженности каждой фазы движения толкателя, то есть в виде

$$\frac{\varphi}{\varphi_y} \text{ и } \frac{\varphi - \varphi_y - \varphi_D}{\varphi_B}$$

Значения углов в правых частях выражений (2.1)...(2.4) подставляются в радианах.

**Таблица 2.1 - Значения коэффициентов  $k, k', k''$  параметров закона движения толкателя типа А.**

$\frac{\varphi}{\varphi_y}; \frac{\varphi - \varphi_y - \varphi_D}{\varphi_B}$	$k$	$k'$	$k''$
0	0	0	4,0
1/8	0,03125	0,5	4,0
2/8	0,12500	1,0	4,0
3/8	0,28125	1,5	4,0
4/8	0,50000	2,0	$\pm 4,0$
5/8	0,71875	1,5	-4,0
6/8	0,87500	1,0	-4,0
7/8	0,96875	0,5	-4,0
1,0	1,00000	0	-4,0

**Таблица 2.2 - Значения коэффициентов  $k, k', k''$  параметров закона движения толкателя типа Б.**

$\frac{\varphi}{\varphi_y}; \frac{\varphi - \varphi_y - \varphi_D}{\varphi_B}$	$k$	$k'$	$k''$
0	0	0	6,0
1/8	0,04296875	0,65625	4,5
2/8	0,15662500	1,12500	3,0
3/8	0,31640625	1,40625	1,5
4/8	0,50000000	1,50000	0

5/8	0,68359375	1,40625	- 1,5
6/8	0,84375000	1,12500	- 3,0
7/8	0,95703125	0,65625	- 4,5
1,0	1,00000000	0	- 6,0

**Таблица 2.3 - Значения коэффициентов  $k, k', k''$  параметров закона движения толкателя типа В.**

$\frac{\varphi}{\varphi_y}; \frac{\varphi - \varphi_y - \varphi_D}{\varphi_B}$	$k$	$k'$	$k''$
0	0	0	4,9348020
1/8	0,038006025	0,6011177	4,5591627
2/8	0,146444665	1,1107206	3,4894321
3/8	0,308658300	1,4512266	1,8884669
4/8	0,500000000	1,5707963	0
5/8	0,691341700	1,4512266	- 1,8884669
6/8	0,853553400	1,1107206	- 3,4894321
7/8	0,961939800	0,6011177	- 4,5591627
1,0	1,000000000	0	- 4,9348020

**Таблица 2.4 - Значения коэффициентов  $k, k', k''$  параметров закона движения толкателя типа Г.**

$\frac{\varphi}{\varphi_y}; \frac{\varphi - \varphi_y - \varphi_D}{\varphi_B}$	$k$	$k'$	$k''$
0	0	0	0
1/8	0,01246047	0,29289330	4,4428826
2/8	0,09084506	1,00000000	6,2831825
3/8	0,26246047	1,70710675	4,4428826
4/8	0,500000000	2,00000000	0
5/8	0,73753953	1,70710675	- 4,4428826
6/8	0,90915494	1,00000000	- 6,2831825
7/8	0,98753953	0,29289330	- 4,4428826
1,0	1,00000000	0	0

**Таблица 2.5 -Значения коэффициентов  $k, k', k''$  параметров закона движения толкателя типа Д.**

$\frac{\varphi}{\varphi_y}; \frac{\varphi - \varphi_y - \varphi_D}{\varphi_B}$	$k$	$k'$	$k''$
0	0	0	0
1/8	0,0078125	0,1875	3,0
2/8	0,0625000	0,7500	6,0
3/8	0,2109375	1,6875	9,0
4/8	0,5000000	3,0000	$\pm 12,0$
5/8	0,7890625	1,6875	- 9,0
6/8	0,9375000	0,7500	- 6,0
7/8	0,9921875	0,1875	- 3,0
1,0	1,0000000	0	0

**Таблица 2.6 - Значения коэффициентов  $k, k', k''$  параметров закона движения толкателя типа Е.**

$\frac{\varphi}{\varphi_y}; \frac{\varphi - \varphi_y - \varphi_d}{\varphi_B}$	$k$	$k'$	$k''$
0	0	0	0,0
1/8	0,010416667	0,25	4,0
2/8	0,083333333	1,00	8,0
3/8	0,260416660	1,75	4,0
4/8	0,500000000	2,00	0
5/8	0,739583330	1,75	- 4,0
6/8	0,916666670	1,00	- 8,0
7/8	0,989583330	0,25	- 4,0
1,0	1,000000000	0	0,0

**Таблица 2.7 - Значения коэффициентов  $k, k', k''$  параметров закона движения толкателя типа Ж.**

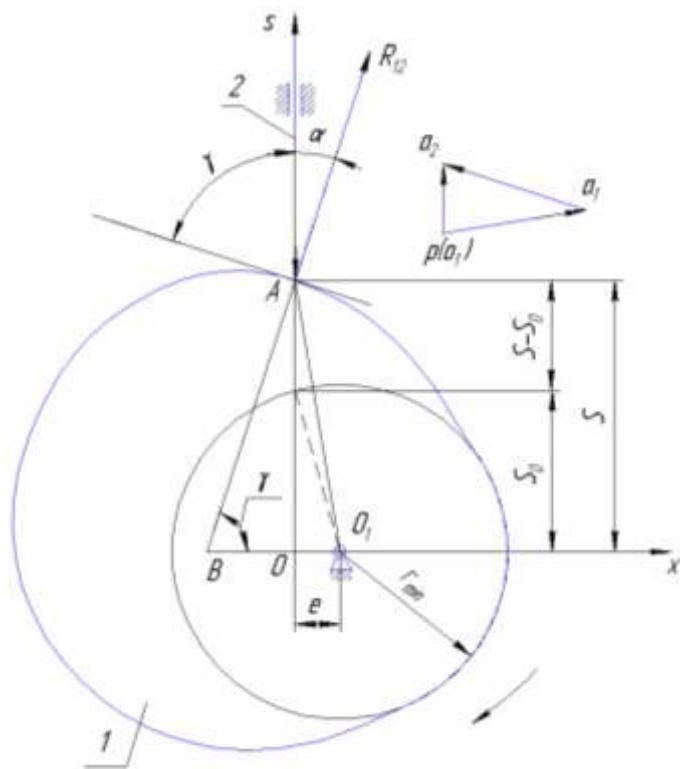
$\frac{\varphi}{\varphi_y}; \frac{\varphi - \varphi_y - \varphi_d}{\varphi_B}$	$k$	$k'$	$k''$
0	0	0	0,0
1/8	0,013888889	0,3333333	5,3333333
2/8	0,097222222	1,0000000	5,3333333
3/8	0,263888889	1,6666667	5,3333333
4/8	0,500000000	2,0000000	0,0
5/8	0,736111111	1,6666667	- 5,3333333
6/8	0,902777778	1,0000000	- 5,3333333
7/8	0,986111111	0,3333333	- 5,3333333
1,0	1,000000000	0	0,0

### 3. Определение минимальных размеров кулачкового механизма

#### 3.1. Определение минимального размера кулачка с башмаком в виде ролика

Рассмотрим динамику кулачкового механизма с копьевидным башмаком. Как перейти потом к ролику - мы уже знаем. Так как  $r_0 \leq 0,8 \rho_{k,min}$ , то копирование профиля кулачка обеспечено. Следовательно, необходимо выполнить условие не заклинивания толкателя в направляющих.

Рассмотрим дезаксиальный кулачковый механизм.



Углом передачи движения  $\gamma$  называется угол между направлениями векторов относительной и абсолютной скорости толкателя.

$\gamma$  - угол давления.

$$\gamma = 90^\circ$$

$\gamma_{\min}$  - предельно допустимый угол передачи движения не вызывающий заклинивание толкателя в направляющих.

Для работоспособности механизма необходимо выполнить условие

$$\gamma \geq \gamma_{\min}$$

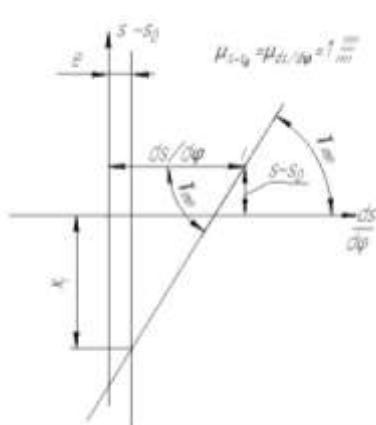
$$\operatorname{tg} \gamma \geq \operatorname{tg} \gamma_{\min} \quad (2.5)$$

Т.е. в любом положении кулачка, угол передачи движения всегда должен быть больше, в крайнем случае, равен, минимальному углу передачи движения.

Из треугольника АОВ видно

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{S_0 + S - S_0}{BO_1 - e} \quad (2.6)$$

Используя план скоростей для этого положения механизма, из подобия треугольников АО<sub>1</sub>В и ао<sub>1</sub>в находим



$$\frac{BO_1}{AO_1} = \frac{V_{A_2}}{V_{A_1}} = \frac{\omega_1 \cdot ds/d\varphi}{\omega_1 \cdot AO_1}; \quad BO_1 = ds/d\varphi$$

Тогда

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{S_0 + S - S_0}{ds/d\varphi - e} \quad (2.7)$$

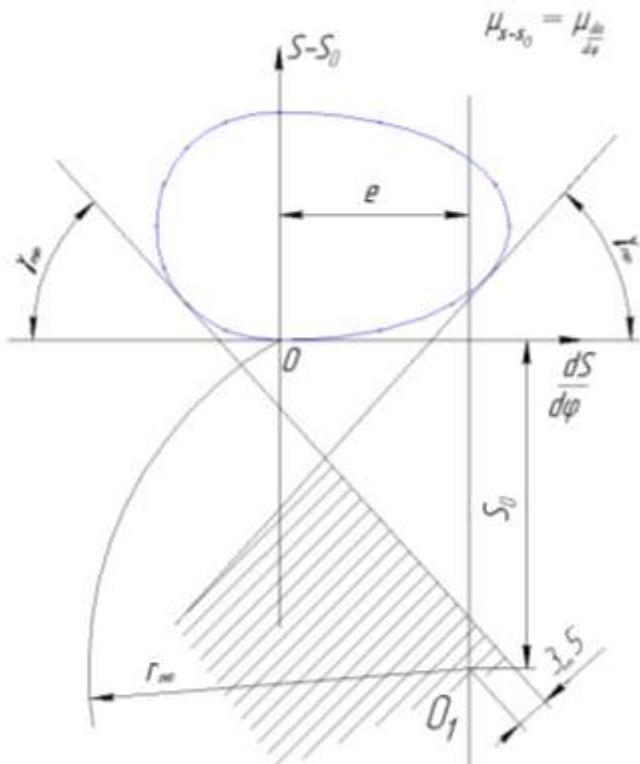
Из этого выражения видно, что дезаксиал в этом кулачковом механизме, отложенный с плюсом, увеличивает угол передачи движения на рабочем ходу кулачка. Если его отложить в минус, то на рабочем ходу кулачка уменьшится угол передачи движения, т.е.

условия работы кулачкового механизма будут хуже, кпд ниже и возможно даже заклинивание толкателя. То же самое произойдет, если кулачек вращать в обратную сторону.

Так как каждому значению  $S-S_0$  соответствует, какое то значение  $dS/d\varphi$ , то можно построить диаграмму зависимости  $S-S_0 = f(dS/d\varphi)$  (рисунок 2.2)

Через  $i^{-10}$  точку в этой системе координат проведем наклонную линию под углом  $\square_{\min}$  к оси  $dS/d\varphi$ . На линии дезаксиала эта линия отсечет отрезок  $x_i$ . Из прямоугольного треугольника найдем  $\tg \square_{\min}$ .

$$\tg \gamma = \frac{x_i + S - S_0}{ds/d\varphi - e} \quad (2.8)$$



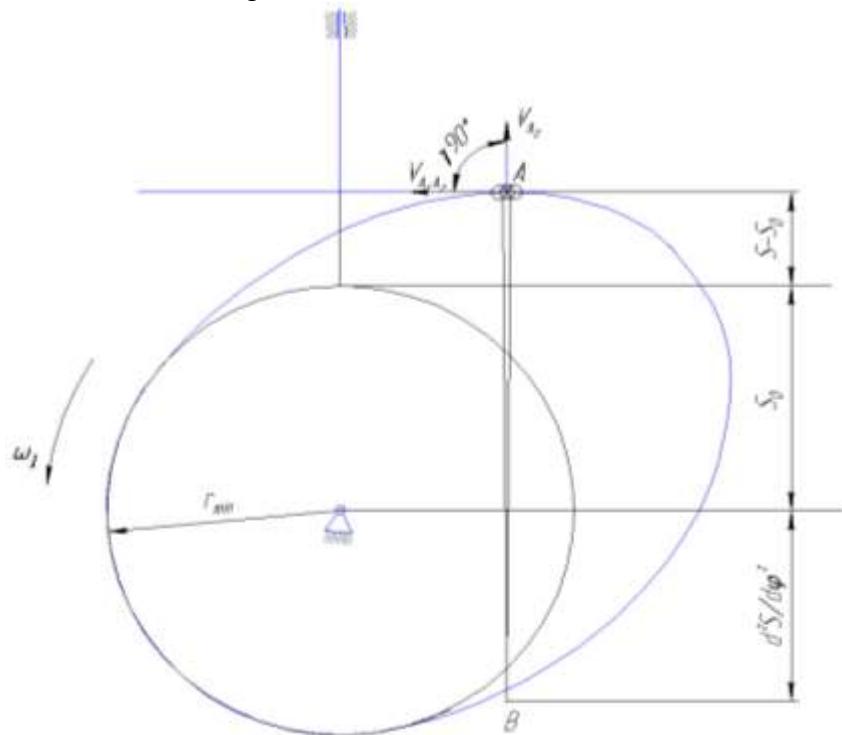
Сравнивая выражения (2.5), (2.6) и (2.8) можно сделать вывод- для не заклинивания толкателя необходимо выполнить условие, чтобы  $S_0$  было больше любого  $x_i$ . Для того, что бы найти наибольшее значение  $x_i$ , необходимо построить диаграмму  $S_0=f(dS/d\varphi)$ , и не только для угла удаления, но и для угла возвращения, так как кулачек может повернуться и в противоположную сторону (Рисунок 2.3). Затем провести касательные под углами  $\square_{\min}$  и  $180-\square_{\min}$  к оси  $dS/d\varphi$ . При этом масштабные коэффициенты по осям  $dS/d\varphi$  и  $S-S_0$  должны быть одинаковыми во избежание искажения диаграммы.

### 3.2. Определение минимального размера кулачка с башмаком в виде тарелки

Кулачковые механизмы с тарельчатым толкателем, как правило, центральные, а дезаксиал  $e$  - это смещение толкателя в плоскости, перпендикулярной плоскости кулачковой шайбы, для вращения и равномерного износа тарелки и повышения КПД кулачкового механизма.

Так как ось толкателя перпендикулярна плоскости тарелки то  $\square = 90^0$  при любом положении кулачка, т.е. условие не заклинивания толкателя в направляющих выполняется.

При плоской тарелке копирование поверхности кулачка возможно только тогда когда он будет выпуклым. Т.е. минимальный радиус кулачка с тарельчатым толкателем определяется из условия копируемости профиля кулачка (условия выпуклости профиля). Для определения минимального размера кулачка рассмотрим положение центра кривизны профиля кулачка в точке контакта тарелки с профилем кулачка (точка В). Радиус кривизны состоит из



### Рисунок 3.

трёх отрезков -  $S_0$ ,  $S-S_0$  и расстояние от точки В до оси х. Не сложно доказать, используя план ускорений, что это расстояние численно равно аналогу ускорения толкателя  $d^2S/d\phi^2$ .

Для того чтобы профиль кулачка в точке контакта был всюду выпуклым, необходимо, чтобы центр кривизны находился ниже точки касания тарелкой профиля кулачка.

$$S_0 + S - S_0 + d^2S/d\varphi^2 > 0$$

Учитывая, что для этого кулачкового механизма  $S_0 = r_{\min}$ , можно определить минимальный радиус кулачка по выражению

$$r_{\min} > - ( S - S_0 + d^2 S / d \phi^2 )$$

Для определения минимального радиуса кулачка необходимо найти самое большое отрицательное значение скобки и прибавить к нему 7...10 мм, так как профиль кулачка не должен быть плоским. Для этого строим диаграмму  $(S-S_0 + d^2S/d\phi^2) = f(\phi, t)$  (рисунок 2.5).

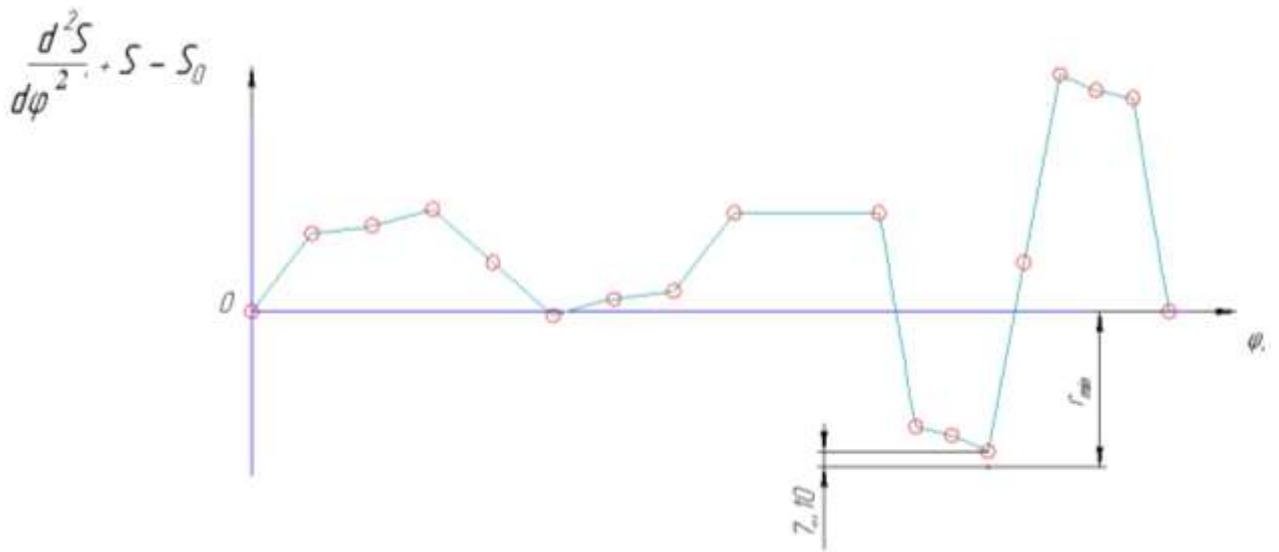


Рисунок 4. К определению минимального радиуса кулачка.

## 1. 1 Лекция №6 (2 часа).

### Тема: «Кинематический синтез шарнирно-рычажных механизмов»

#### 1.1.1 Вопросы лекции:

1. Задачи кинематического синтеза
2. Графические методы кинематического синтеза

#### 1.1.2 Краткое содержание вопросов:

##### 1. Задачи кинематического синтеза

Основным назначением механизмов является выполнение необходимых движений, которые описываются посредством его кинематических характеристик. К ним относятся траектории движения точек и звеньев механизма, координаты точек, перемещения точек и звеньев, их скорости и ускорения. К числу кинематических параметров относятся также и такие, которые не зависят от закона движения ведущего звена, а определяются только строением механизма, размерами его звеньев и, в общем случае, зависят от положения ведущего звена. Это аналоги скоростей и ускорений или передаточные функции.

Основная задача кинематического синтеза является проектирование такого механизма, выходное звено которого, движется с заданными кинематическими параметрами (скорости, ускорения я. траектории движения точек и т.д.).

##### 2. Графические методы кинематического синтеза

Модуль **APM Slider** это система, предназначенная для структурного синтеза и кинематического анализа, плоских шарнирно-рычажных механизмов первого и второго класса с одной степенью подвижности. Система разработана научно-техническим центром «Автоматизированное проектирование машин». При помощи этой системы можно провести структурный синтез (построить кинематическую модель) и кинематический

анализ шарнирно-рычажного четырехзвенника, кривошипно-ползунного и кулисного механизмов, а также других механизмов, построенных на их основе.

В основу структурного синтеза положен, хорошо известный, принцип Ассура. Построить кинематическую схему механизма, которая является его кинематической моделью, можно двумя путями. Или выбрать готовый механизм с одной группой, или взять первичный механизм первого класса и присоединять к нему группы Ассура. При этом можно корректировать длины звеньев, их положение и положения шарниров на звеньях. Размеры механизма могут быть практически неограниченными, так как имеется возможность масштабирования.

При кинематическом исследовании механизма определяются перемещения, скорости и ускорения (как линейные, так и угловые) звеньев и траектории отдельных точек механизма, а также аналоги скоростей и ускорений. При расчете параметров положения звеньев графически строятся, что позволяет наблюдать движение звеньев на мониторе.

Результаты расчетов можно вывести на печать, как в виде табличных значений, так и в виде диаграмм.

## 1. 1 Лекция №7-8 (4 часа).

### Тема: «Синтез зубчатых механизмов»

#### 1.1.1 Вопросы лекции:

1. Основная теорема зацепления
2. Эвольвента круга и ее свойства
3. Геометрические элементы зубчатых колес
4. Свойства эвольвентного зацепления
5. Обработка эвольвентных зубчатых колес
6. Качественные параметры зацепления и выбор коэффициентов смещения при исправлении колёс

#### 1.1.2 Краткое содержание вопросов:

##### 1. Основная теорема зацепления

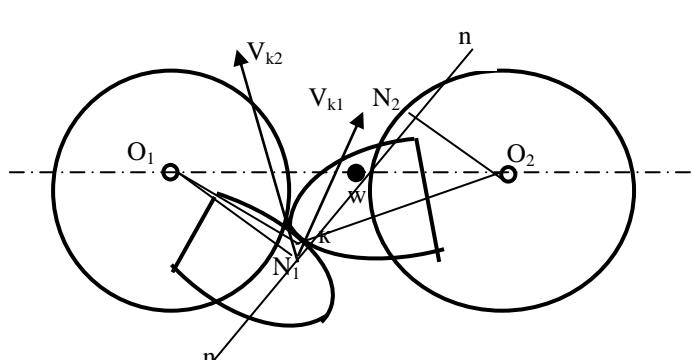
Одно из важнейших кинематических требований – постоянство передаточного отношения

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \text{const}$$

тогда при  $\omega_1 = \text{const}$   $\varepsilon_2 = 0$ , что уменьшает динамические нагрузки на зубья и подшипники, уменьшает шумность передачи.

2<sup>ое</sup> требование – постоянный контакт пары сопряженных профилей зубьев, что обеспечивает безударность и непрерывность передачи.

Рассмотрим два зуба с произвольным профилем, находящихся в зацеплении (рисунок 1.)



Рассмотрим проекции скоростей  $V_{k1}$  и  $V_{k2}$  на нормаль  $n$

$$\text{пр} V_{k1} = \text{пр} V_{k2} \quad (1)$$

иначе произойдет отрыв одного зуба от другого или один контур зуба войдет в другой.

Из теоретической механики известно, что если точки А и В принадлежат одному твердому телу (рисунок 2.), то проекции скоростей этих точек на линию их

Рисунок 1.

Рисунок 2.

$$\begin{aligned} npV_{N_1} &= V_{N_1} = \omega_1 \cdot O_1 N_1 \\ npV_{N_2} &= V_{N_2} = \omega_2 \cdot O_2 N_2 \quad (1) \\ \omega_1 \cdot O_1 N_1 &= \omega_2 \cdot O_2 N_2 \end{aligned}$$

Из подобия треугольников  $O_1 N_1 p$  и  $O_2 N_2 p$

$$\frac{O_2 N_2}{O_1 N_1} = \frac{O_2 w}{O_1 w} \text{ или } \frac{r_{W_2}}{r_{W_1}}$$

где  $r_{W_1}$ ,  $r_{W_2}$  - радиусы центроид в относительном движении двух колес.

Теорема: Нормаль в точке контакта проходит через полюс зацепления и делит межосевое расстояние обратно пропорционально угловым скоростям.

Так как мы хотим иметь передаточное отношение  $u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = const$ , то радиусы

начальных окружностей должны быть постоянны, а это значит, что нормаль в точке контакта зубьев всегда должна проходить через полюс зацепления  $w$ .

Можно брать любые профили зубьев, но они должны удовлетворять основной теореме зацепления.

ГОСТ ограничил количество кривых, по которым описываются профили зубьев. В зубчатых механизмах в качестве профиля используются циклоидальные кривые.

Л.Эйлер занимался изучением профилей зубьев с целью повышения долговечности зубчатых передач и пришел к выводу, что минимальный износ у эвольвентного профиля зуба. В настоящее время, подавляющее большинство зубчатых колес изготавливают с эвольвентным профилем зубьев. Рассмотрим свойства эвольвенты.

## 2. Эвольвента круга и ее свойства

Эвольвента круга образуется при перекатывании прямой линии по этому кругу без скольжения (рис.3.), тогда любая точка на этой прямой опишет кривую, которая называется эвольвентой круга.

*Круг, на котором строится эвольвента, называется основным*

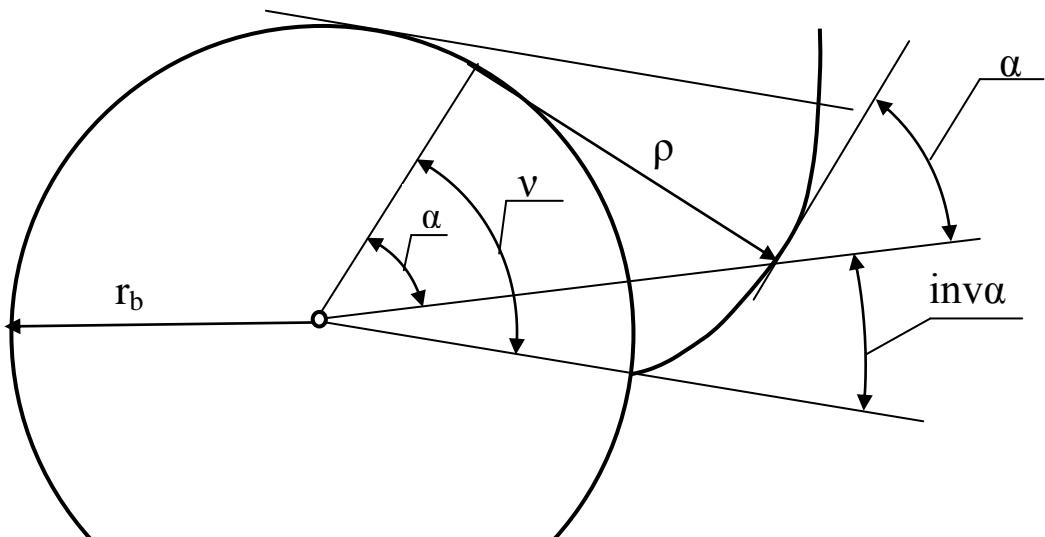


Рисунок 3.

Наиболее важные свойства эвольвенты.

-если провести нормаль в любой точке эвольвенты, то она коснется основной окружности;

-радиус кривизны равен длине дуги основной окружности

-угол  $\alpha$  – называется углом профиля эвольвенты (в частности зуба) в каждой точке.

-  $\text{inv}\alpha$  – эвольвентная функция угла  $\alpha$

$$\rho = r_b \cdot v$$

$$\rho = r_b \cdot \tan \alpha \text{ следовательно } v = \tan \alpha$$

$$\text{inv}\alpha = v - \alpha = \tan \alpha - \alpha$$

$\text{inv}\alpha$  - очень часто используется при проектировании зубчатых передач (есть специальные таблицы этой функции).

### 3. Геометрические элементы зубчатых колес

Все термины, определения и обозначения стандартизированы и даются по ГОСТ 16530-83 и ГОСТ 16531-83, а расчет геометрии (формулы, порядок расчета) по ГОСТ 16532-70.

В основу измерения многих элементов зубчатых колес принята начальная окружность в станочном зацеплении.

*Зацепление проектируемой поверхности зубьев с производящей поверхностью по аналогии с зацеплением нарезаемого колеса с производящей поверхностью режущего инструмента называют станочным зацеплением.*

Если производящее колесо (инструмент) имеет конечное число зубьев, то режущим инструментом может быть долбяк. При бесконечно большом количестве зубьев производящего колеса, оно превращается в рейку.

*Реечный контур, принятый в качестве базового для определения теоретических форм и размеров зубьев, называют исходным контуром.*

Параметры исходного контура также являются стандартными и регламентируются ГОСТом 13755-81.

Начальные окружности, которые являются центроидами в относительном движении двух колес, в станочном зацеплении называются делительными окружностями (делят зуб на головку зуба и на ножку зуба).  $d$  – обозначение диаметра делительной окружности ( $r$  – радиуса).

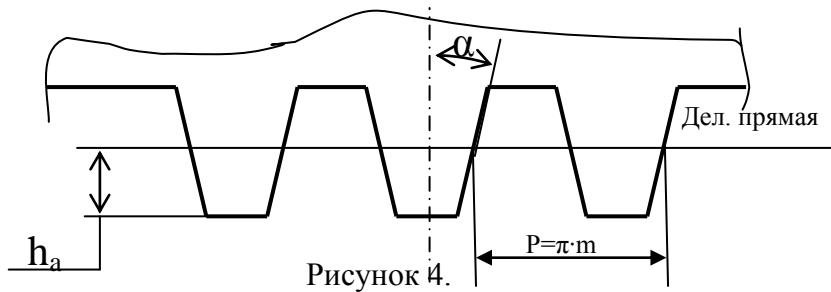
*Расстояние, измеренное по дуге делительной окружности, вмещающей одну ширину впадины и одну толщину зуба, называется шагом зацепления* (обозначается –  $p$ ).

$$\pi d = pz \quad d = (p/\pi)z$$

Если за основу взять шаг зацепления, то точно делительный диаметр посчитать нельзя. Тогда взяли  $p/\pi = m$ . Где  $m$  – назвали модулем и приняли за основу

стандартизации в метрической системе мер. Модуль по ГОСТ 9563-60 измеряется в мм. Таким образом,  $d = mz$ .

Радиальное расстояние от делительной окружности до окружности вершин зубьев называется высотой головки зуба.



В ГОСТе высота исходного контура определяется как  $h_a^* = h_a \cdot m$ , где  $h_a$  – коэффициент высоты головки зуба в соответствии с ГОСТ 13755-81 для крупномо-

дульных колес ( $m \geq 1$  мм)  $h_a^* = 1$ , для мелкомодульных колес ( $m < 1$  мм)  $h_a^* = 1$ .

Высотой ножки зуба называется радиальное расстояние от окружности впадин до делительной окружности.

$$h_f = m \cdot (h_a^* + c^*)$$

Где  $c^*$  - коэффициент радиального зазора

$c^* = 0,25$  для  $m \geq 1$  мм и  $c^* = 0,35 \dots 0,5$  для  $m < 1$  мм

Тогда диаметр вершин зубьев  $d_a$

$$d_a = d + 2h_a$$

По некоторым соображениям, о которых мы поговорим позже, заготовку или зуборезную рейку иногда отодвигают друг от друга на величину  $S = xm$ , где  $x$  – коэффициент смещения.

Тогда  $d_a = mz + 2m(h_a^* + x - \Delta y)$ , где  $\Delta y$  - коэффициент уравнительного смещения, который вводится для получения зубчатой передачи без бокового зазора и со стандартной величиной радиального зазора.

Учитывая все выше приведенное, получим

$$d_a = mz + 2m(h_a^* + x - \Delta y)$$

$$d_f = d + 2m(h_a^* + c^* - x)$$

Это все для колес с внешними зубьями. Для колес с внутренними зубьями выражения следующие

$$d_a = mz - 2m(h_a^* + x - 0,2)$$

$$d_f = d + 2m(h_a^* + c^* - x)$$

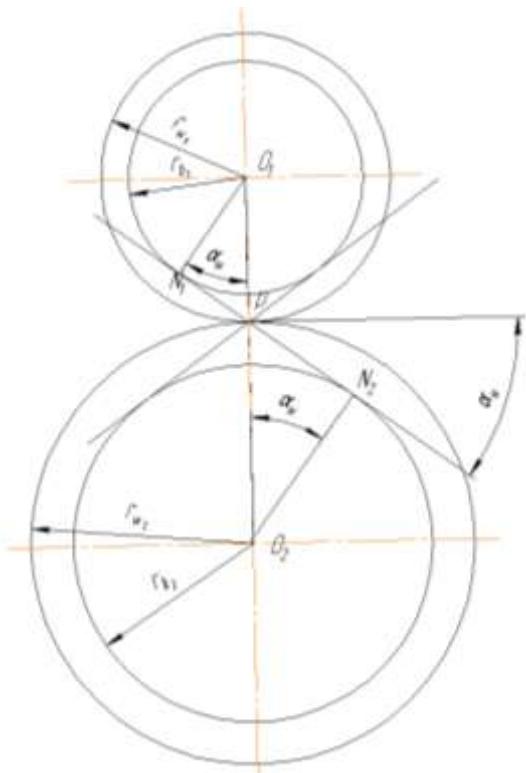
Для того чтобы получать стандартные колеса, стандартизируют параметры зуборезного инструмента (т.е. параметры исходного контура, а именно  $m, h_a^*, c^*$  и  $\alpha$ ), где  $\alpha = 20^\circ$  – угол профиля зуба исходного контура (рис.4).

#### 4. Свойства эвольвентного зацепления

1. Л.Эйлер доказал, что при эвольвентном зацеплении наименьшее скольжение в точке контакта сопряженных профилей зубьев.
2. Эвольвентное зацепление удовлетворяет основному требованию кинематики – постоянству передаточного отношения.

Действительно, поскольку нормаль в точке контакта к сопряженным профилям зубьев, по свойству эвольвенты, касается обеих основных окружностей, то контакт профилей зубьев всегда происходит на этой нормали. Так как основные окружности при вращении колес не меняют свое относительное положение, то и нормаль всегда пересекает линию межосевого расстояния в одном и том же месте. Это значит, что передаточное отношение за время зацепления одной пары зубьев будет постоянным.

**Линия, на которой происходит контакт сопряженных профилей зубьев, называется линией зацепления.** Из двух ветвей линии зацепления рабочей является та, которая как бы сматывается с основной окружности колеса, связанного с источником энергии и наматывается на основную окружность колеса, связанного с потребителем энергии.



**Углом зацепления  $\alpha_w$  называется угол, составленный каждой ветвью линии зацепления с перпендикуляром к линии межосевого расстояния.** В станочном зацеплении он равен углу  $\alpha$ .

3. При передаче постоянного крутящего момента давления на зубья и опоры колес будут постоянны.

Так как давление от одной поверхности зуба к другой (без учета сил трения) передается по нормали, т.е. по линии зацепления, то плечом момента силы будут являться радиусы основных окружностей, которые постоянны.

Следовательно, при постоянных моментах на колесах и сила давления на зубья и опоры будет постоянной.

4. Незначительное изменение межосевого расстояния (погрешность изготовления, монтажа и т.д.) не изменяет передаточного отношения пары зубчатых колес.

Из рисунка 6 следует

$$u_{12} = \frac{r_{w_2}}{r_{w_1}} = \frac{r_{w_2} / \cos \alpha_w}{r_{w_1} / \cos \alpha_w} = \frac{r_{b_2}}{r_{b_1}}$$

Так как радиусы основных окружностей при изменении межосевого расстояния не меняются, то и передаточное отношения тоже не меняется.

Из этого же рисунка следует

$$r_b = r_w \cdot \cos \alpha_w$$

Для станочного зацепления

$$r_b = r \cdot \cos \alpha$$

К числу свойств эвольвентного зацепления относится и свойство беззазорного зацепления (отсутствие бокового зазора). Особенно это важно при реверсивном движении.

Из условия беззазорного зацепления и перекатывания начальных окружностей без скольжения можно записать

$$p_w = S_{w_1} + S_{w_2}$$

Где  $S_{w_1}$  и  $S_{w_2}$  - толщина зубьев по начальной окружности колес, а  $p_w$  - шаг по начальной окружности.

Если толщину зубьев и шаг выразить через число зубьев, коэффициент смещения и угол зацепления, то после преобразования можно получить [1]

$$\operatorname{inv} \alpha_w = \operatorname{inv} \alpha + \frac{2(x_1 + x_2) \cdot \operatorname{tg} \alpha}{z_1 + z_2} \quad (1)$$

Из этого условия можно найти угол зацепления, который используется при определении межосевого расстояния.

$$a_w = \frac{m(z_1 + z_2)}{2} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w} \quad (2)$$

## 5. Обработка эвольвентных зубчатых колес

Обычно используются два способа обработки и получения эвольвентных профилей. Это способ копирования и способ обкатки (огибания).

**При способе копирования боковая поверхность (режущая кромка инструмента является точной копией боковой поверхности зуба.** За один проход инструмента (модульная пальцевая фреза, модульная дисковая фреза) на заготовке нарезается одна впадина. Затем заготовка поворачивается на угловой шаг (с помощью делительной головки) и снова нарезается одна впадина и т.д. Основной недостаток этого метода – наличие нескольких комплектов инструмента для нарезания зубьев одного и того же модуля, так как с изменением числа зубьев на колесе профиль зуба меняется.

Станки и инструменты для нарезания способом копирования:

- а) Станок универсально-фрезерный, инструмент – модульная дисковая фреза.
- б) Станок консольно-фрезерный, инструмент – модульная пальцевая фреза.
- в) Станок протяжный, инструмент – протяжка.
- г) Отливка по готовой модели.

Наиболее часто используется способ обкатки, который заключается в том, что **инструмент (в виде колеса, рейки и т.д.) вводят в зацепление с еще не изготовленным колесом (заготовкой) и задают им такие относительные движения, как будто колесо изготовлено.** При этом инструмент совершает и технологические ходы. В результате такой обкатки происходит нарезание колеса.

Станки и инструменты для нарезания способом обкатки:

- а) Станок зубодолбежный, инструмент – долбяк.
- б) Станок зубострогальный, инструмент – зуборезная рейка.
- в) Станок зубофрезерный, инструмент – модульная червячная фреза.
- г) Прокатка зубчатых колес в ковочном состоянии между зубчатыми валками.

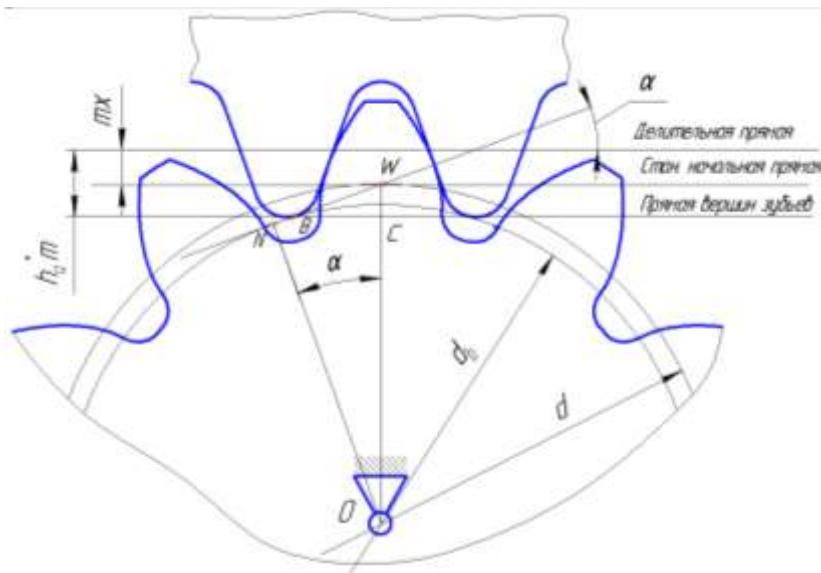
**Интерференция - наложение профиля зуба одного колеса на профиль зуба другого при проектировании зацепления.**

**Подрезание – наложение профиля зуба инструмента на профиль зуба изготавливаемого колеса при нарезании зубьев.**

**Заклинивание – наложение профилей зубьев, но не при изготовлении, а при зацеплении колес.**

Рассмотрим подробней явление подрезания. Так как параметры зуборезного инструмента стандартны, то при прочих равных условиях возможность подрезания ножки зуба определяется положением точки N, т.е. размерами колеса. Подрезание не происходит, когда точка контакта между производящей поверхностью инструмента и профилем зуба нарезаемого колеса находится правее точки N. Левее точки N эти поверхности будут не касаться друг друга, а пересекаться, что и приводит к подрезанию ножки зуба. Подрезание уменьшает эвольвентную часть профиля зуба колеса, ослабляет прочность зуба в опасном сечении и уменьшает коэффициент перекрытия.

Рассмотрим вопрос о наименьшем числе зубьев  $Z_{\min}$  на колесе, при котором явление подрезания будут отсутствовать при нарезании зубьев рейкой с учетом смещения.



По условию не подрезания, должно выполняться условие  $NW \geq BW$ . Из треугольника ONW можно выразить катет NW, используя модуль и число зубьев

$$NW = r \cdot \sin \alpha = 1/2m \cdot z \cdot \sin \alpha$$

Из треугольника BWC можно найти гипотенузу BW, используя модуль, высоту головки зуба и коэффициент смещения

Рисунок 5  
инструмента

$$BW = \frac{h_a^* \cdot m - x \cdot m}{\sin \alpha}$$

Тогда

$$1/2m \cdot z \cdot \sin \alpha \geq \frac{m(h_a^* - x)}{\sin \alpha}$$

Отсюда число зубьев, которое можно нарезать реечным инструментом без подрезания ножки зуба, с учётом смещения будет равно

$$z = \frac{2(h_a^* - x)}{\sin^2 \alpha} \quad (3)$$

Минимальное число зубьев без смещения реечного инструмента и без подрезания ножки зуба, можно нарезать

$$z_{\min} = \frac{2h_a^*}{\sin^2 \alpha} = 17,01 \quad (4)$$

Используя выражение (3) и (4), можно определить минимальный коэффициент смещения, при котором не будет подрезания ножки зуба.

$$x_{\min} \geq \frac{17 - z}{17}$$

Основные способы исправления зубчатых колес (нарезание зубьев без подрезания).  
Из выражения (4) видно, что можно уменьшить коэффициент высоты головки зуба ( $h_a^* = 0.8$ ,  $z_{\min} = 14$ ) или увеличить угол профиля исходного контура  $\alpha$  ( $\alpha = 25^0$ ,  $z_{\min} = 11$ ). В том и другом случае инструмент будет не стандартным.

Смещение зуборезного инструмента меняет не только параметры зубчатых колес, но и зацепления в целом, поэтому при исправлении смещением, рассматривается суммарный коэффициент смещения ( $x_{\Sigma}$ ).

Нормальное или нулевое зацепление, при котором  $x_{\Sigma} = 0$ , может быть в двух случаях – когда  $x_1 = x_2 = 0$ , т.е колеса не исправленные, и когда  $x_1 = -x_2$ . И в том и другом случае делительные и начальные окружности будут совпадать, т.е.  $\alpha = \alpha_w$ , а  $a = a_w$

(смотрите выражения (1) и (2)). При исправленных колесах это исправление будет называться высотным, так как изменяется высота головки и ножки зуба.

Положительное зацепление, при котором  $x_{\Sigma} > 0$ . В этом случае начальные окружности будут больше делительных и  $\alpha < \alpha_w$ , а  $a < a_w$ .

Отрицательное зацепление, при котором  $x_{\Sigma} < 0$ . В этом случае начальные окружности будут меньше делительных и  $\alpha > \alpha_w$ , а  $a > a_w$ .

В последних двух случаях такое исправление называется угловым.

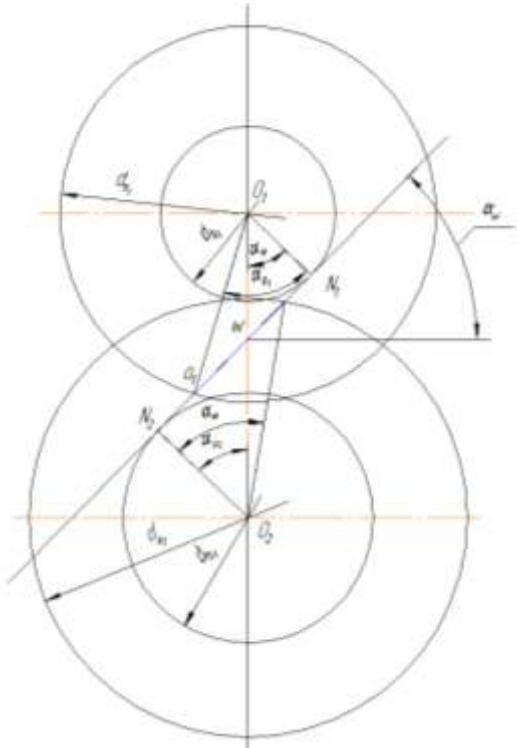
## 6. Качественные параметры зацепления и выбор коэффициентов смещения при исправлении колёс

Качественные параметры зацепления дают возможность оценить передачу в отношении плавности и бесшумности зацепления, возможного износа и прочности зубьев и сравнить ряд передач по этим показателям.

### 6.1. Коэффициент перекрытия

Коэффициент перекрытия характеризует непрерывность и плавность зацепления. Для того, чтобы передача была плавной и непрерывной, необходимо чтобы работа одной пары зубьев перекрывалась работой следующей пары зубьев.

Коэффициент перекрытия определяется



$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{\varphi_{\alpha_1}}{\tau_1} = \frac{\varphi_{\alpha_2}}{\tau_2}$$

где  $\varphi_{\alpha_1}$  и  $\varphi_{\alpha_2}$  - угол торцевого перекрытия (угол, на который поворачивается колесо от начала входа в зацепление пары зубьев до выхода из зацепления этой же пары зубьев)  
 $\tau_1$  и  $\tau_2$  - угловой шаг 1-го и 2-го колеса, соответственно.

$$\varphi_{\alpha_1} = \frac{(a_1 a_2)}{r_{b_1}}; \varphi_{\alpha_2} = \frac{(a_1 a_2)}{r_{b_2}}$$

$(a_1 a_2)$  – длина активной линии зацепления.

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{z_1}; \tau_2 = \frac{2\pi}{z_2}$$

Выразим длину активной линии зацепления через число зубьев и угол зацепления

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\varphi_{\alpha_1}}{\tau_1} \cdot \frac{r_{b_1}}{r_{a_1}} = \frac{(a_1 a_2)}{p_{b_1}} = \frac{a_1 w + w a_2}{p_{b_1}} = \frac{r_{b_1}}{p_{b_1}} \text{ или } \frac{2\pi z_1 r_{b_1}}{2\pi z_1 p_{b_1}} (\operatorname{tg} \alpha_{a_1} - \operatorname{tg} \alpha_w) + \frac{2\pi z_2 r_{b_2}}{2\pi z_2 p_{b_2}} (\operatorname{tg} \alpha_{a_2} - \operatorname{tg} \alpha_w)$$

$p_{b_1}$  во втором слагаемом заменили на  $p_{b_2}$ , так как

$$p_w = \tau_1 \cdot r_{w_1} = \tau_2 \cdot r_{w_2}$$

$$p_w = \frac{\tau_1 \cdot r_{b_1}}{\cos \alpha_w} = \frac{\tau_2 \cdot r_{b_2}}{\cos \alpha_w} \text{ или}$$

$$p_w \cdot \cos \alpha_w = p_{b_1} = p_{b_2}$$

Учитывая, что  $\tau_1 = \frac{2\pi}{z_1}$ ;  $\tau_2 = \frac{2\pi}{z_2}$ , а

$p_b = \tau \cdot r_b$  получим аналитическое выражение для коэффициента перекрытия

$$\varepsilon_\alpha = \frac{z_1}{2\pi} (\operatorname{tg} \alpha_{a_1} - \operatorname{tg} \alpha_w) + \frac{z_2}{2\pi} (\operatorname{tg} \alpha_{a_2} - \operatorname{tg} \alpha_w)$$

Как видно из этого выражения  $\varepsilon_\alpha$  не зависит от модуля, а зависит от числа зубьев и коэффициентов смещения. С увеличением суммарного положительного смещения коэффициент перекрытия уменьшается.

Из треугольника  $O_1N_1a_1$ ,  $\cos \alpha_{a_1} = \frac{r_{b_1}}{r_{a_1}}$ , тогда  $\alpha_{a_1} = \arccos \frac{r_{b_1}}{r_{a_1}}$ , а

$$\alpha_{a_2} = \arccos \frac{r_{b_2}}{r_{a_2}}$$

Рекомендуется брать для тихоходных передач  $\varepsilon_\alpha$  не менее 1,05, что обеспечивает непрерывность процесса зацепления с 5% запасом.

## 6.2. Коэффициент скольжения

Коэффициент скольжения учитывает влияние геометрических и кинематических параметров на величину проскальзывания, а, следовательно, и износа профилей зубьев в процессе зацепления.

При зацеплении двух колес профиль одного зуба перекатывается со скольжением по профилю другого зуба. Наличие скольжения при одновременном нажатии одного профиля на другой приводит к износу профилей.

Величина проскальзывания профилей характеризуется коэффициентом скольжения.

Дуги перекатываются одна по другой со скольжением за время  $\Delta t$ . Эти дуги разные по длине.

*Разность длин дуг профилей зубьев, находящихся в контакте за малый промежуток времени  $\Delta t$  составляет дугу скольжения.*

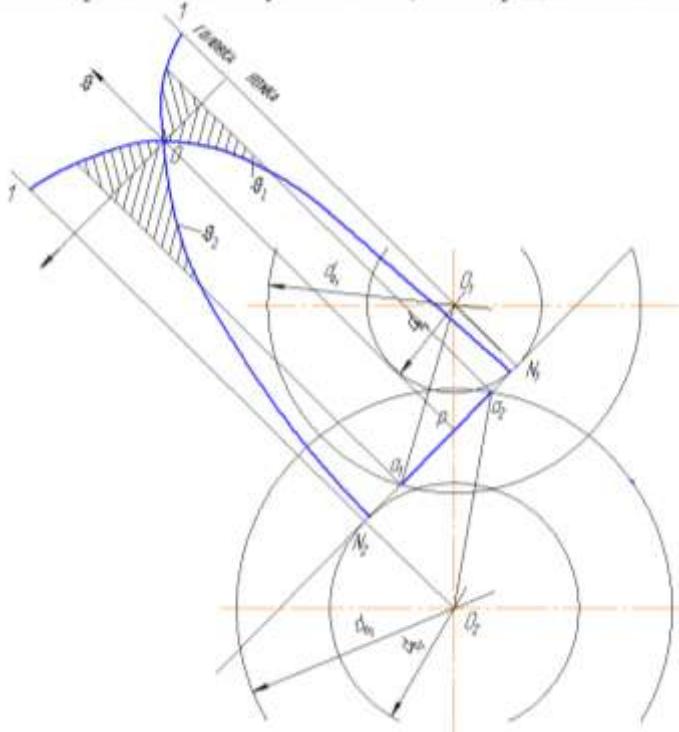


Коэффициенты скольжения для шестерни и зубчатого колеса определяются выражениями

$$\vartheta_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S_1 - \Delta S_2}{\Delta S_1} = 1 + u_{21} \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

$$\vartheta_2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S_2 - \Delta S_1}{\Delta S_2} = 1 + u_{12} \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

где  $\rho_1$  и  $\rho_2$  радиусы кривизны в точке контакта (К) профилей зубьев первого и второго колеса. С учётом того, что передаточное отношение можно



определить через радиусы начальных окружностей колёс, а радиусы кривизны профилей зубьев в точке контакта (К) равны расстоянию от этой точки до точки касания основной окружности  $N_1$  и  $N_2$  (по свойству эвольвенты), выражения для определения коэффициентов скольжения можно записать в следующем виде

$$\vartheta_1 = 1 + \frac{r_{w_1}}{r_{w_2}} \frac{KN_2}{KN_1}$$

$$\vartheta_2 = 1 + \frac{r_{w_2}}{r_{w_1}} \frac{KN_1}{KN_2}$$

Подставив в полученные выражения граничные положения точки контакта ( $N_1$ ,  $N_2$ ), можно увидеть (см. рисунок) что, коэффициент скольжения изменяется от  $+1$  у вершины зуба до  $-\infty$  у ножки зуба, проходя через  $0$  в полюсе зацепления. Но так, как точка контакта при вращении колёс перемещается на линии зацепления от точки  $a_2$ , до точки  $a_1$ , то коэффициент скольжения у ножки зуба имеет конечное значение (см. на рисунке заштрихованную зону), хотя, как правило, большее, чем при вершине зуба. В полюсе зацепления скольжение отсутствует (чистое перекатывание).

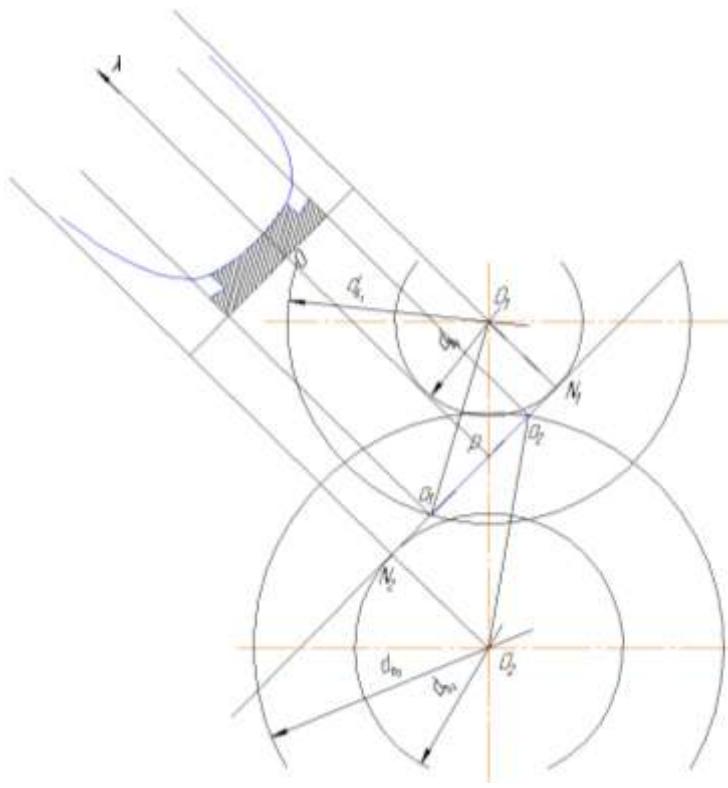
С учетом того, что зуб колеса участвует в зацеплении меньшее число раз, чем зуб шестерни, целесообразно сопоставлять величины  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  через  $u_{12}$ . Это имеет особое значение при больших передаточных отношениях.

### 6.3. Коэффициент удельного давления

Этот коэффициент учитывает геометрию профилей зубьев на величину контактных напряжений, которые могут достигать значительной величины и приводить к выкрашиванию материала на рабочей поверхности зубьев.

Контактные напряжения определяются по формуле Герца

$$\sigma = 0,418 \sqrt{\frac{F}{b \cdot \cos \alpha} \cdot E \frac{1}{\rho}}$$



где  $F$ - окружная сила взаимодействия зубьев;  $b$ - ширина зубчатых колёс;  $E$  – приведенный модуль упругости материалов колёс ( $E = 2E_1E_2/(E_1+E_2)$ );  $\rho$  – приведённый радиус кривизны эвольвентных профилей зубьев в точке контакта ( $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} \pm \frac{1}{\rho_2}$  где  $+$  - для внешнего зацепления, а  $-$  - для внешнего зацепления).

Для текущего момента, исходя из свойств эвольвенты, для внешнего зацепления можно записать

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \cdot \rho_2} = \frac{N_1 N_2}{N_1 K \cdot N_2 K}$$

Коэффициентом удельного давления  $\lambda$  называется отношение

$$\lambda = \frac{m}{\rho} = \frac{m \cdot N_1 N_2}{N_1 K \cdot N_2 K}$$

Коэффициент  $\lambda$  не зависит от модуля, так как  $\rho$  пропорционален модулю, зависит от положения точки контакта на линии зацепления и минимален в начале и в конце зацепления за счёт перекрытия в зацеплении.

#### 6.4. Выбор коэффициентов смещения для передач с внешними зубьями. Блокирующие контуры

При назначении коэффициентов смещения  $x_1$  и  $x_2$  для любой передачи должны быть выполнены следующие условия:

- 1) Отсутствие подрезания ножки зуба;
- 2) Отсутствие заострения вершины зуба;
- 3) Непрерывность зацепления ( $\varepsilon_a > 1$ ).

Для передачи с числом зубьев у колёс  $z_1$  и  $z_2$  можно построить в координатах  $x_1$  и  $x_2$  область допустимых значений коэффициентов смещения, удовлетворяющим этим условиям.

**Блокирующим контуром называется совокупность линий в системе координат  $x_1$  и  $x_2$ , ограничивающих зону допустимых значений коэффициентов смещения для передачи с числом зубьев  $z_1$  и  $z_2$ .**

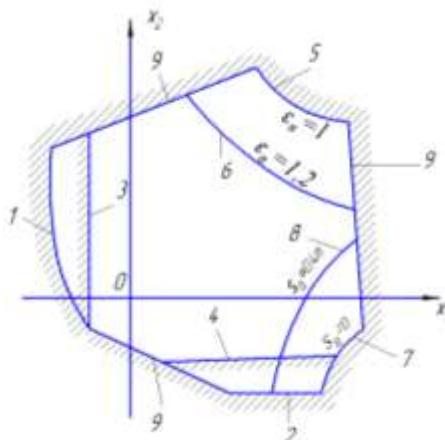
Для каждой зубчатой передачи можно построить свой блокирующий контур. На рисунке 4 представлен один из возможных блокирующих контуров.

Используя блокирующий контур, можно спроектировать зацепление с требуемыми параметрами. Например, для шестерни взять положительный коэффициент смещения, а, для не изменения межосевого расстояния, у зубчатого колеса взять такой же, но отрицательный ( $x_{\Sigma} = 0$ ).

Блокирующие контуры для разных пар зубчатых колёс приведены в приложении к стандарту на зубчатые передачи (ГОСТ 16530-83, 16531-83 и 16530-70). Здесь же приведены рекомендации по выбору коэффициентов смещения, формулы и порядок

расчёта эвольвентной зубчатой передачи внешнего зацепления. Альбом блокирующих контуров можно найти и в справочном руководстве [6].

В данном блокирующем контуре линии означают следующее:



- 1, 2 – подрезание ножки зуба будет, но при этом коэффициент перекрытия будет больше единицы;
- 3, 4 – гарантируют без подрезания;
- 5, 6 – изолинии постоянного коэффициента перекрытия, за 5-ой линией, вне контура,  $\varepsilon_a < 1$ . Таких изолиний может быть несколько;
- 7, 8 – изолинии равной толщины зуба по окружности вершин;
- 9 – за этими линиями, внутри контура не будет интерференции зубьев.

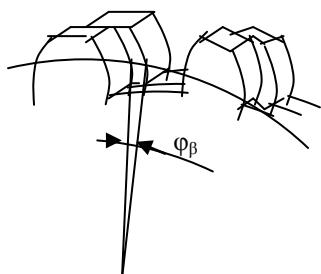
## 6.5. Эвольвентное косозубое зацепление

В цилиндрических прямозубых колесах касание двух профилей происходит по прямой линии. Если при изготовлении колес были допущены какие-либо погрешности, то контакт может быть не по всей длине зуба, а коэффициент перекрытия может изменяться до величин меньше единицы. Это приводит к ухудшению условий работы зубчатой передачи, к увеличению шума. Для улучшения работы необходимо увеличить коэффициент перекрытия.

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\varphi_\alpha}{\tau}$$

Первый путь – увеличить число зубьев – не желателен, так как ведет к увеличению габаритов передачи.

Второй путь – сделать ступенчатые колеса



$$\varepsilon_\gamma = \frac{\varphi_\alpha}{\tau} + \frac{\varphi_\beta}{\tau_2} = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta \quad (1)$$

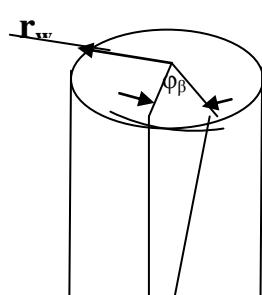
Ступенчатые колеса трудно изготовить!

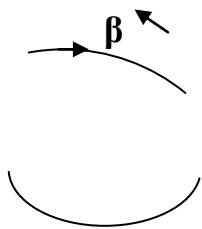
Третий путь – если колесо сделать резиновым, то его можно скрутить и его зубья изогнутся.

$\varphi_\beta$  – угол скручивания (один торец будет опережать другой на  $\varphi_\beta$ .)

$\beta$  – угол наклона зубьев на поверхности начального цилиндра.

$b_w$  – ширина зубчатого колеса по начальному цилинду.

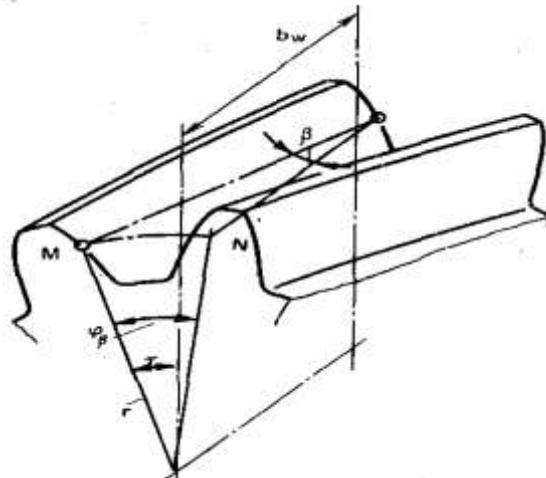




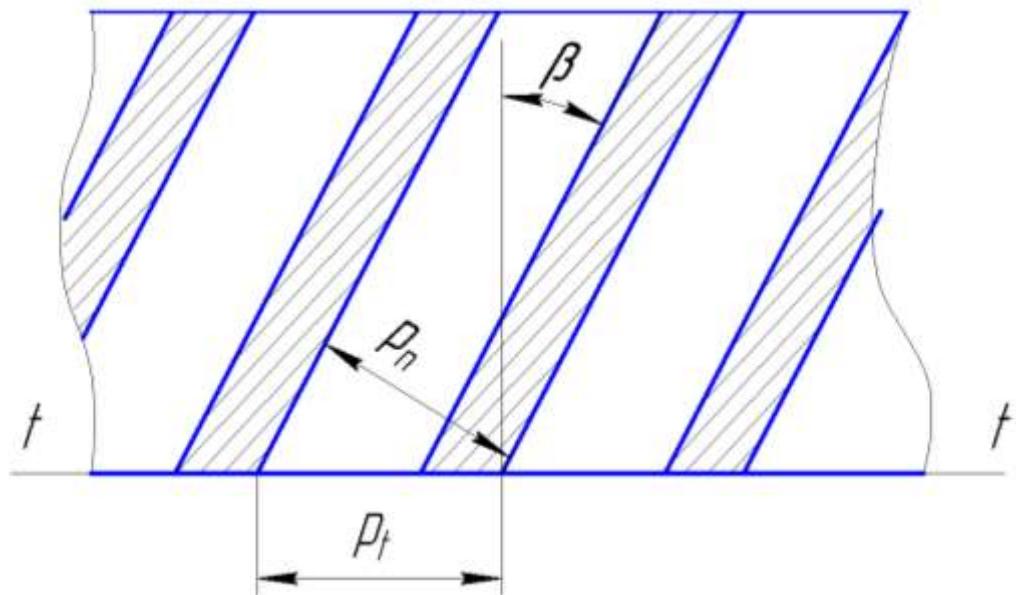
$\phi_\beta \cdot r_w$  – длина дуги на начальной окружности  
 $\phi_\beta \cdot r_w = b_w \cdot \operatorname{tg} \beta$ , отсюда  $\phi_\beta = b_w \cdot \operatorname{tg} \beta / r_w$

$$\varepsilon_\beta = \frac{\phi_\beta}{\tau} = \frac{b_w \cdot \operatorname{tg} \beta}{r_w \cdot \tau} = \frac{b_w}{p_t} \cdot \operatorname{tg} \beta \quad (2)$$

где  $p_t$  – торцевой шаг по начальной окружности.



Развернём поверхность по начальной окружности. На ней будут видны следы зубьев (пересечение зубьев с начальным цилиндрическим дромом).



$p_n = \pi \cdot m$  – так как косозубые колёса изготавливаются стандартным инструментом, только поворачивают плоскость заготовки на угол  $\beta$ .

Используя выражение (2) и рисунок можно получить выражение для дополнительного коэффициента перекрытия косозубого зацепления  $\varepsilon_\beta$ .

$$p_t = \frac{p_n}{\cos \beta} = \frac{\pi \cdot m}{\cos \beta}$$

$$\varepsilon_\beta = \frac{b_w}{p_t} \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{\psi \cdot m \cdot \cos \beta}{\pi \cdot m} \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{\psi}{\pi} \cdot \sin \beta$$

## *Преимущества косозубых колёс*

- 1. Увеличивается плавность зацепления*
- 2. Увеличивается прочность зубьев*

## *Недостатки*

- 1. Уменьшается КПД передачи*
- 2. Требуется принимать меры для компенсации осевой нагрузки (радиально-упорные подшипника, шевронные колёса).*

### **1. 1 Лекция №9 (2 часа).**

**Тема: «Синтез планетарных механизмов»**

#### **1.1.1 Вопросы лекции:**

1. Основное условие синтеза планетарного механизма
2. Дополнительные условия синтеза
3. Порядок проектирования планетарного механизма

#### **1.1.2 Краткое содержание вопросов:**

##### **1. Основное условие синтеза планетарного механизма**

Основным условием синтеза планетарного редуктора является заданное передаточное отношение (кинематический синтез), которое зависит от числа зубьев колес, поэтому важно грамотно подобрать числа зубьев при заданном передаточном отношении. При этом сама конструкция передачи может накладывать на числа зубьев колес определенные ограничения, которые должны учитываться при конструировании.

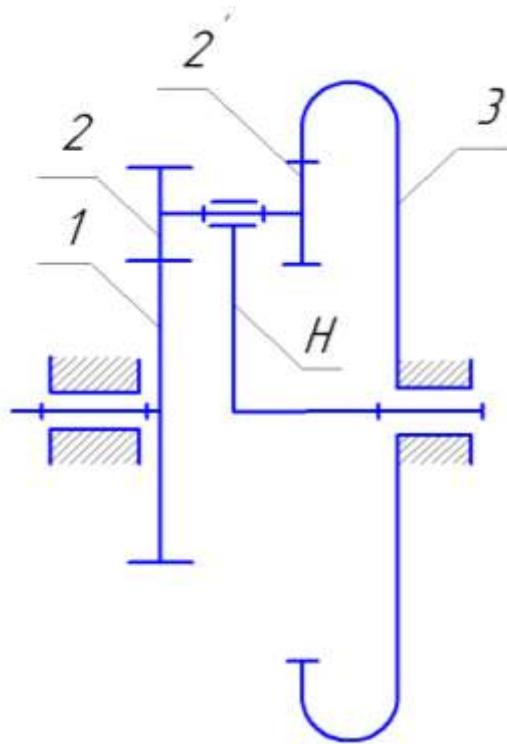
##### **2. Дополнительные условия синтеза**

1) Условие соосности. Ось вращения водила должна совпадать с осью вращения центральных колес. Например, для схемы редуктора (см. рисунок), при одинаковым модуле колес, это условие имеет вид

$$Z_1 + Z_2 = Z_3 - Z_2,$$

2) Условие соседства. Это условие учитывает возможность свободного размещения сателлитов без соприкосновения между собой.

3) Условие сборки с симметрией зон зацепления. Выполнение этого условия предполагает, что все запланированные сателлиты без натягов могут быть размещены в механизме с симметричным расположением зон зацепления.



4) Условие отсутствия подрезания зубьев и заклинивания передачи.

Рекомендуется принимать:

для колес с внешним зацеплением

$$Z_{\min} \geq 17$$

для колес с внутренним зацеплением

$$Z'_{\min} \geq 20 \text{ -- с внешними зубьями}$$

$$Z''_{\min} \geq 17 \text{ -- с внутренними зубьями}$$

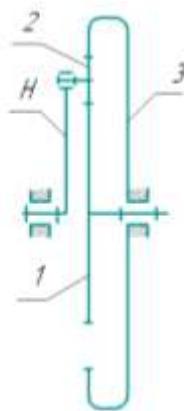
Исходные уравнения, учитывающие перечисленные условия, составляют для каждой конкретной схемы механизма. Решение может быть проведено несколькими методами, в том числе подбором.

### 3. Порядок проектирования планетарного механизма

Порядок проектирования рассмотрим на примере однорядного планетарно редуктора (редуктор Джемса).

Формула Виллиса для рассматриваемого механизма (см. рисунок) имеет вид

$$u_{13}^H = \frac{\omega_1^H}{\omega_3^H} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{0 - \omega_H} = -1 + u_{1H} = -\frac{z_3}{z_1}$$



Редуктор Джемса

Условия соосности

$$r_3 = r_1 + 2r_2 \text{ или } z_3 = z_1 + 2z_2$$

Условие соседства

$$\sin \frac{180^\circ}{k} > \frac{z_2 + 2}{z_1 + z_2}$$

где  $k$  – число сателлитов.

Условие сборки

$$\frac{z_1 + z_3}{k} = N$$

Здесь  $N$  должно быть целом числом.

## 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

### 2.1 Лабораторная работа №1-2 (4 часа).

**Тема: «Составление кинематических и структурных схем механизмов. Структурный синтез механизмов с использованием персональных компьютеров»**

**2.1.1 Цель работы:** научить студентов строить структурные и кинематические схемы механизмов по реальным механизмам или их моделям. Проводить структурный синтез механизмов, используя компьютерные технологии

#### 2.1.2 Задачи работы:

1. Построить структурные и кинематические схемы механизмов по реальным механизмам или их моделям

#### 2.1.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. APM WinMachine

2. Персональный компьютер

## 2.1.4 Описание (ход) работы:

### 1. Кинематическая схема механизма

Для кинематического и динамического исследования механизмов пользуются кинематической схемой механизма, под которой понимают такое изображение всего механизма в целом и отдельных его частей, которое отчетливо показывает, из каких звеньев и кинематических пар состоит механизм. Правильно составленная кинематическая схема должна удовлетворять следующим условиям:

1. На кинематической схеме должно быть указано все, что необходимо знать для кинематического исследования механизма. Все лишнее, не имеющее отношения к геометрии движения механизма, на кинематической схеме не показывается.

2. Кинематическая схема должна быть построена в определенном масштабе с точным соблюдением относительного расположения звеньев и пар; с указанием величины масштаба, размеров звеньев и расстояния между неподвижными точками и линиями

**Для целей лабораторной работы достаточно изобразить структурную схему механизма, которая вычерчивается без масштаба, но с соблюдением пропорций длин звеньев.**

### 2. Условные изображения кинематических пар и звеньев

При составлении кинематических схем пользуются условными изображениями кинематических пар и звеньев.

Условные изображения звеньев должны быть, во-первых, наиболее простыми как по виду, так и по начертанию, во-вторых, они должны обладать достаточной наглядностью.

Изображения кинематических пар должны по возможности давать представление о характере относительного движения звеньев, составляющих кинематическую пару.

При изображении звеньев надо от конструктивной формы звена отвлекаться и изображать звено прямой линией, соединяющей центры кинематических пар, которыми данное звено присоединяется к соседним звеньям. Если в звено входит три кинематических пары (вращательные), то оно изображается треугольником, стороны которого прямые, соединяющие центры шарниров. Если в звено входит К вращательных пар, то оно изображается К –угольником, который заштриховывается целиком. Все описанные случаи показаны на рис. 1 (а, б, в).

Условные обозначения звеньев и кинематических пар можно найти в любом учебнике по ТММ.

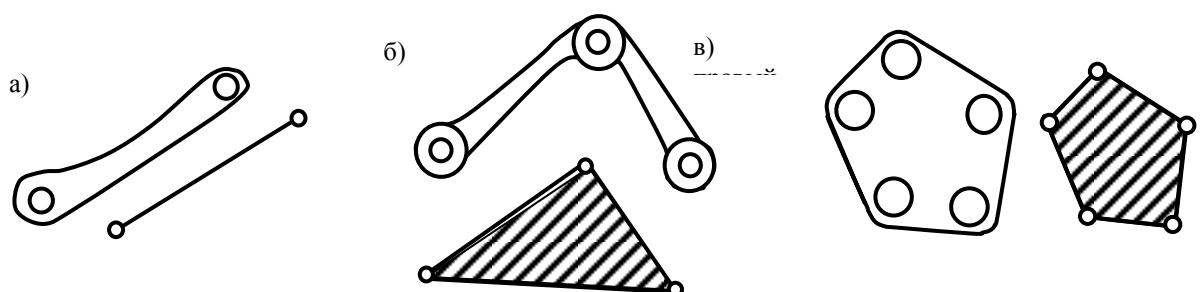


Рисунок 1.1.

### 3. Методика составления кинематических схем

Составление кинематической схемы связано с изучением структуры механизма. Незнание структуры механизма может привести к ошибкам при составлении его кинематической схемы.

Порядок составления кинематической схемы:

1. Имея перед собой машину или ее модель, необходимо, прежде всего, разобраться в характере относительного движения отдельных звеньев, для чего надо медленно поворачивать ведущее звено модели и наблюдать за движением ее отдельных звеньев.

2. Наблюдая за относительным движением звеньев, легко установить, какими кинематическими парами они соединены. При этом надо быть очень внимательным, чтобы не допустить ошибки: относительные перемещения двух звеньев могут остаться незамеченными и кинематическую пару можно принять за жесткое соединение.

3. Разобравшись в относительном движении звеньев, надо составить структурную схему механизма на листке бумаги, от руки, и произвести подсчет звеньев и кинематических пар.

При этом, чтобы не сбиться в подсчете, рекомендуется пронумеровать звенья цифрами, кинематические пары – прописными латинскими буквами.

Выписываем:

$n$  – число подвижных звеньев;  
 $p_5$  – число кинематических пар пятого класса;  
 $p_4$  – число кинематических пар четвертого класса.

После этого подсчитываем степень подвижности механизма по формуле П.Л. Чебышева.

$$W = 3n - 2p_5 - p_4$$

Пассивные звенья и пары, а также звенья с лишней степенью свободы, надо в самом начале изучения структуры механизма выделить и в уравнении для подсчета степени подвижности не включать.

4. Дальнейшая работа по составлению кинематической схемы производится в следующем порядке:

- а) определяются размеры звеньев механизма и расстояние между неподвижными точками и линиями;
- б) строится на отдельном листе бумаги в масштабе кинематическая схема механизма. При построении кинематической схемы необходимо придерживаться следующего порядка:
  - а) выбрать масштаб построения, как указано выше;
  - б) наметить на листе бумаги все неподвижные точки и линии;
  - в) построить ведущее звено в определенном положении и от него делать дальнейшее построение. Для обозначения звеньев и кинематических пар применять установленные условные обозначения.
  - г) когда все построения будут сделаны, надо схему обвести четкими линиями, размеры между неподвижными точками, линиями проставить прямо на чертеже, пронумеровать звенья и обозначить пары. Если в состав механизма входят высшие пары, то надо дополнительно построить схему заменяющего механизма (структурную схему механизма).

Замена высшей кинематической пары производится в следующем порядке:

- а) в точке контакта элементов высшей кинематической пары проводится касательная, а затем нормаль;

- б) методом хорд или окружностей определяются положения центров кривизны профилей звеньев на нормали;
- в) в центрах кривизны образуются вращательные кинематические пары, вращательная пара, расположенная в бесконечности заменяется поступательной с осью на прямолинейной части профиля звена;
- г) образованные кинематические пары соединяются между собой фиктивным (условным) звеном;
- д) оставшиеся элементы соединяются каждый с тем звеном, в центре кривизны профиля которого образована кинематическая пара.

Полученные, в результате замены, фиктивные звенья проводят пунктиром на кинематической схеме механизма, а затем заменяющий механизм изображается отдельно. В образце журнала лабораторных работ, в приложении, приведена кинематическая схема механизма привода клапанов двигателя внутреннего сгорания, на которой произведена замена высших пар (показано пунктиром). Ниже, в этом же приложении схема заменяющего механизма изображе

#### **4. Структурный синтез механизмов с использованием APM Slider пакета программ APM WinMachine**

Модуль **APM Slider** это система, предназначенная для структурного синтеза и кинематического синтеза и анализа, плоских шарнирно-рычажных механизмов первого и второго класса с одной степенью подвижности. Система разработана научно-техническим центром «Автоматизированное проектирование машин». При помощи этой системы можно провести структурный синтез (построить кинематическую модель) и кинематический анализ шарнирно-рычажного четырехзвенника, кривошипно-ползунного и кулисного механизмов, а также других механизмов, построенных на их основе.

В основу структурного синтеза положен, хорошо известный, принцип Ассура.

Построить кинематическую схему механизма, которая является его кинематической моделью, можно двумя путями. Или выбрать готовый механизм с одной группой, или взять первичный механизм первого класса и присоединять к нему группы Ассура. При этом можно корректировать длины звеньев, их положение и положения шарниров на звеньях. Размеры механизма могут быть практически неограниченными, так как имеется возможность масштабирования.

При кинематическом исследовании механизма определяются перемещения, скорости и ускорения (как линейные, так и угловые) звеньев и траектории отдельных точек механизма, а также аналоги скоростей и ускорений. При расчете параметров положения звеньев графически строятся, что позволяет наблюдать движение звеньев на мониторе.

Результаты расчетов можно вывести на печать, как в виде табличных значений, так и в виде диаграмм.

Приставка Win означает, что программы работают в среде Microsoft Windows и поэтому, как и все Windows программы, модуль **APM Slider**, предоставляет пользователю удобный и интуитивно понятный интерфейс.

##### **4.1. Порядок выполнения работы**

Работу начинать с клавиш **Пуск | Программы | APM WinMachine | APM Slider**. После запуска программы на монитор будет выведена рабочая область (рис.1), основное меню с панелью инструментов (рис.2) и строка состояния (рис.3).

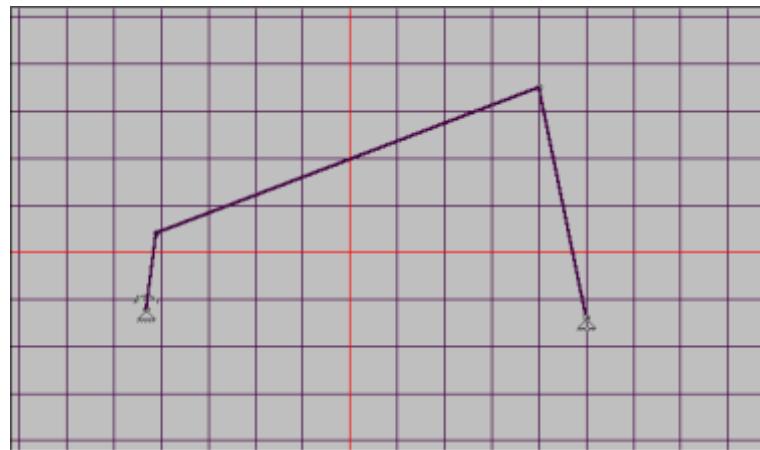


Рис.1. Рабочая область.

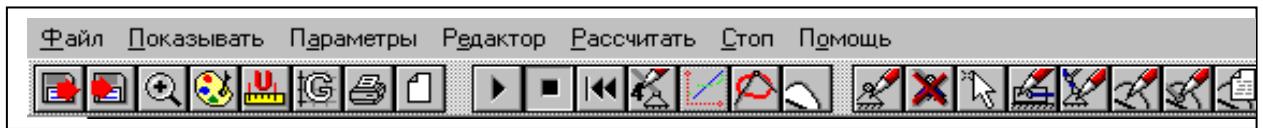


Рис.2. Основное меню и панель инструментов.

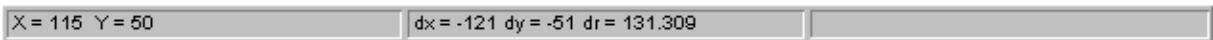


Рис.3. Стока состояния

Собрать кинематическую схему механизма можно, используя команду меню **Механизм** или кнопки инструментальной панели. Кнопки инструментальной панели инициируют команды, показанные на рис.4 (показаны минимально необходимые кнопки). Для выполнения команды с помощью инструментального меню необходимо щелкнуть левой кнопкой мыши на нужной кнопке. Сборка механизма начинается с команды **Вставить Шарнир**, для этого нужно щелкнуть по соответствующей кнопке (Рис.4), после чего подвести указатель мыши в то место рабочей области где будет

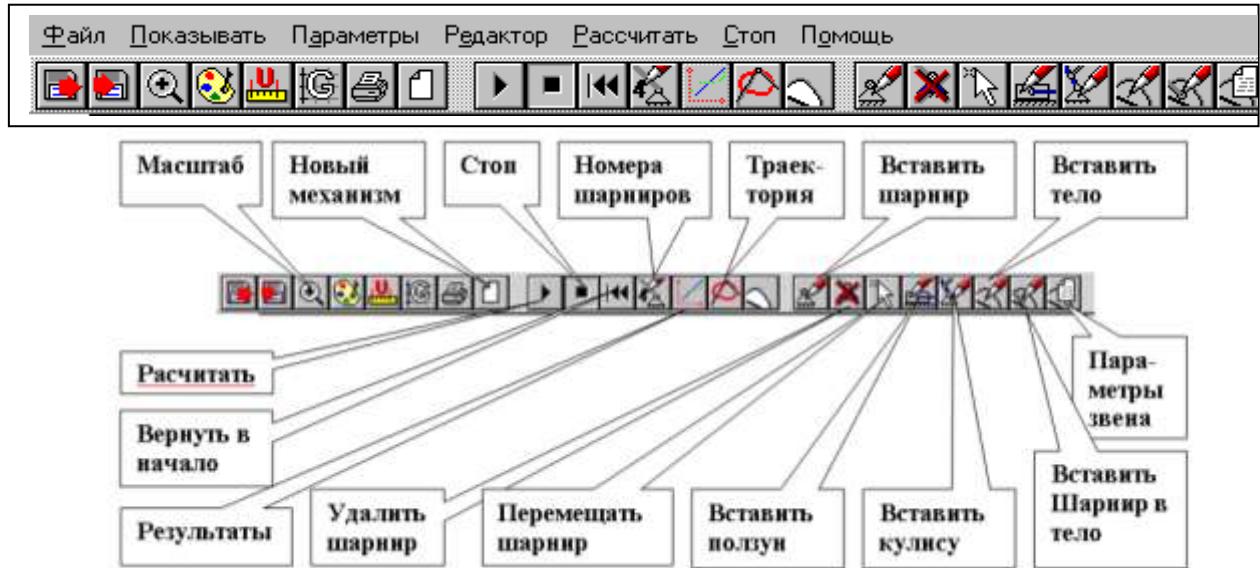


Рис.4. Панель инструментов и команды соответствующих кнопок.

установлена опора ведущего звена (координаты указателя мыши в рабочей области можно наблюдать в строке состояния в левой её части. Эти координаты

соответствуют числам на горизонтальных и вертикальных размерных линейках (Рис.5)) и щелкнуть по левой кнопке мыши. Появиться окно Параметры ведущего звена, в котором нужно задать число расчетных положений (задать 100 положений), начальный угол ведущего звена и нажать кнопку Выбрать схему. Появиться окно Выбрать механизм (Рис.6) в котором нужно найти механизм с первой присоединенной группой (по вашему заданию) и указателем мыши щелчком активировать его. Заполнить в этом окне таблицу с исходными данными, обратив внимание на единицы измерения, щелкнуть по клавише ОК.



Рис.5. Горизонтальная размерная линейка

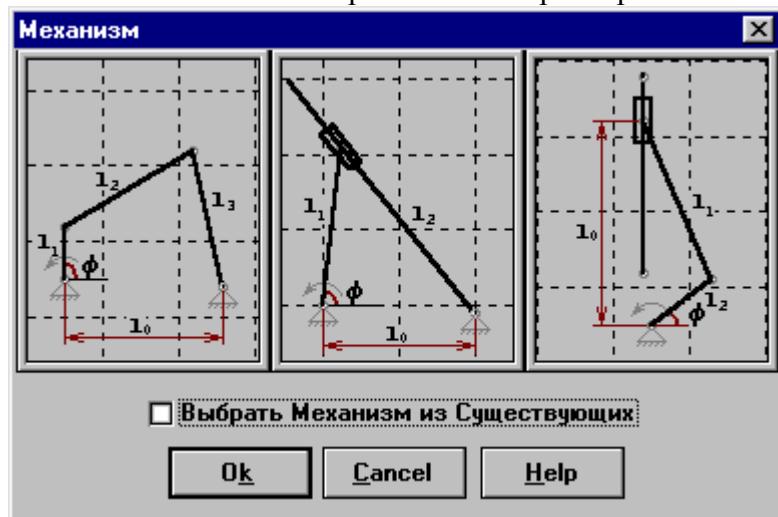


Рис.6. Окно Выбрать механизм.

Механизм будет изображен в рабочей области в натуральном масштабе и поэтому может не уместиться в рабочей области. С помощью кнопки Масштаб (рис.4) и появившегося диалогового окна Масштаб (Рис.7), подобрать нужный масштаб. Масштаб может быть подобран заранее.

Для присоединения группы второго вида необходимо нажать кнопку Вставить ползун и подведя указатель мыши к шарниру на ведущем звене, нажав левую клавишу и не отпуская её, вести появившейся ползун на его место. Направляющую ползуна можно отредактировать перемещением шарнира на её конце, используя кнопку Перемещение шарнира (Рис.4).

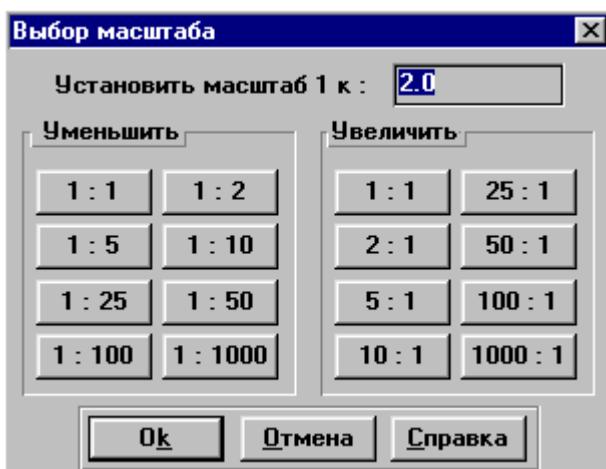


Рис.7. Диалоговое окно Выбор масштаба.

Если на ведущем звене нет того шарнира, к которому присоединяется группа (ведущим для второй группы может быть любое звено существующего механизма), его можно поставить в любом месте на любом звене, используя кнопку **Вставить шарнир в тело**. Существующие звенья можно нарастить, сделать треугольником, используя кнопку **Вставить тело**, для этого нужно подвести указатель мыши к тому звену, которое вы хотите изменить, нажать левую кнопку мыши и не отпуская её перемещать до получения необходимых размеров звена. Привязка указателя мыши к звену видна по изменению толщины звена, однако она может быть затруднена при масштабе уменьшения.

Любой шарнир в механизме можно перемещать, используя кнопку **Перемещать шарнир**, при этом шарнир будет всегда связан с тем звеном, на котором он находился, даже если визуально он не будет находиться на этом звене. При перемещениях шарниров (при редактировании), соединяющих звенья, длины звеньев будут меняться, поэтому в программе предусмотрена возможность редактирования их длин. При нажатии кнопки **Параметры звена** у указателя мыши появляется знак вопроса. Подведя указатель мыши к нужному звену (трудности привязки остаются те же) и, нажав левую клавишу, вызываем диалоговое окно редактирования параметров звена (рис.8), где

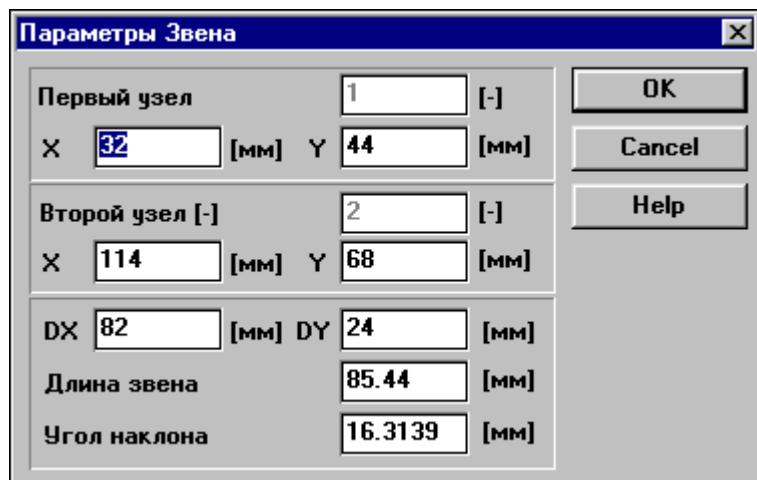


Рис.8. Окно редактирования параметров звена.

**можно не только точно установить длину звена, но и установить угол наклона и ряд других показателей.** Внимание, если в появившемся окне нет никаких цифровых данных, то следует нажать кнопку **ОТМЕНА** (Cancel), в противном случае программа выполнит не допустимую операцию и компьютер «повиснет».

Для присоединения группы третьего вида поступают аналогичным образом, но при этом используя кнопку **Вставить кулису** (Рис.4).

При присоединении к существующему механизму группы первого вида необходимо воспользоваться командой **Вставить шарнир**. Подведя указатель мыши к нужному шарниру, нажать левую кнопку и не отпуская её, рисовать звено до следующего шарнира, затем снова щелкнуть левой кнопкой и дорисовать второе звено группы. При этом в ненужном месте может оказаться стойка, которая при первом расчете исчезнет.

После того, как кинематическая схема механизма будет собрана, можно выполнить расчеты, для чего нужно нажать кнопку **Рассчитать** в главном меню или на панели инструментов (Рис.2, Рис.4). При выполнении расчета в каждом положении механизм будет перерисовываться в рабочей области. Для завершения расчета необходимо нажать кнопку **Стоп** (Рис.2, Рис.4). Для возвращения механизмов в исходное состояние необходимо нажать кнопку **Вернуть в начало** (Рис.4).

Для того, что бы результаты расчетов были доступны, необходимо, что бы в строке состояния в правом части было написано «**Рассчитано: 100%**».

Команда **Результаты** (Рис.2, Рис.4) необходима для просмотра результатов. По этой команде появляется окно параметров результатов (рис9). В этом окне необходимо указать следующие параметры: Начальная угловая скорость ведущего звена, номера шарниров для вывода графиков. Номера шарниров можно увидеть на механизме, если нажать кнопку **Номера шарниров** (Рис.4). Далее следует указать какие параметры необходимо показывать: скорости, ускорения, траектории, перемещения или аналогичные угловые параметры. Нужно указывать, относительно каких узлов вычисляются значения. Причем для каждого узла должен быть указан шарнир, относительно которого он перемещается. Например, для набора узлов 1,2,4,5,8 в блоке **Относительно** можно указать 2,1,3,4,1, тогда угловые перемещения узла 1 будут считаться относительно шарнира 2, шарнира 8 - относительно первого и т.д. Далее необходимо указать, что будет откладываться по оси *x*: время или угловое перемещение первого звена.

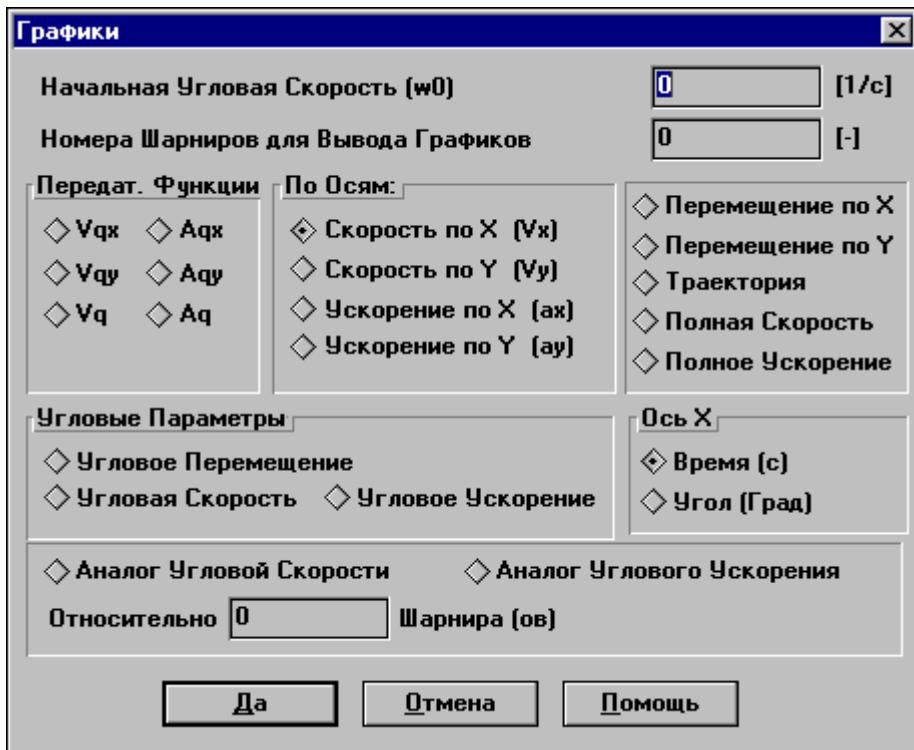


Рис. 9. Окно **Результаты**.

После того, как все параметры заданы, можно нажать **Ok**, после чего программа перейдет в режим просмотра результатов. Результаты выводятся в виде графиков (которые можно вывести на печать), но можно и просмотреть в табличном виде. Знаки всех кинематических параметров, как линейных, так и угловых относятся к системе координат, изображенной на кнопке **Результаты**, поэтому механизм нужно изображать так, чтобы движение выходного звена совпадало с одной из осей (*x* или *y*). Например, *V*-образный компрессор необходимо повернуть на  $45^0$  в любую сторону, тогда направления движений ползунов будут совпадать с осями системы координат.

Кроме, вышеприведенных результатов, также можно посмотреть траектории движения всех узлов, для этого нужно нажать кнопку **Траектория**.

#### Отчет о работе должен содержать:

1. Схему механизма с системой координат, в которой считались кинематические параметры и траектория движения отдельных точек

(указанных центров масс, точек, лежащих на выходном звене механизма);

2. Диаграммы кинематических параметров выходных звеньев, которые можно начертить от руки или распечатать на принтере.

### **2.1 Лабораторная работа №3-4 (4 часа).**

**Тема: «Синтез кулачковых механизмов с использованием персональных компьютеров»**

**2.1.1 Цель работы:** Получить навыки проектирования механизмов с использованием компьютерных технологий

#### **2.1.2 Задачи работы:**

1. Спроектировать кулачковых механизм, используя модуль APM Сам системы APM Win Machine. Исходные данные для проектирования взять из своего задания на курсовой проект

#### **2.1.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:**

1. APM WinMachine
2. Персональный компьютер

#### **2.1.4 Описание (ход) работы:**

1. Ознакомится с руководством пользователя «Система расчета кулачковых механизмов»
2. Выбрать тип кулачкового механизма
3. Ввести геометрические исходные данные
4. Ввести исходные физические данные
5. Задать закон движения кулачка
6. Выполнить расчет
7. Просмотреть результаты расчета

### **2.1 Лабораторная работа №5-6 (4 часа).**

**Тема: «Кинематический синтез механизмов с использованием персональных компьютеров»**

**2.1.1 Цель работы:** спроектировать кривошипно-коромысловый механизм, в котором в крайних положениях коромысло наклонено к горизонтальной линии соответственно под углами  $\alpha_1, \alpha_2$ . Коэффициент возрастания скорости обратного хода коромысла  $-\sigma$ . Длина коромысла  $-l_{BC}$ ,

#### **2.1.2 Задачи работы:**

1. Научиться проектировать кривошипно-коромысловый механизм

### 2.1.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. APM WinMachine
2. Персональный компьютер

### 2.1.4 Описание (ход) работы:

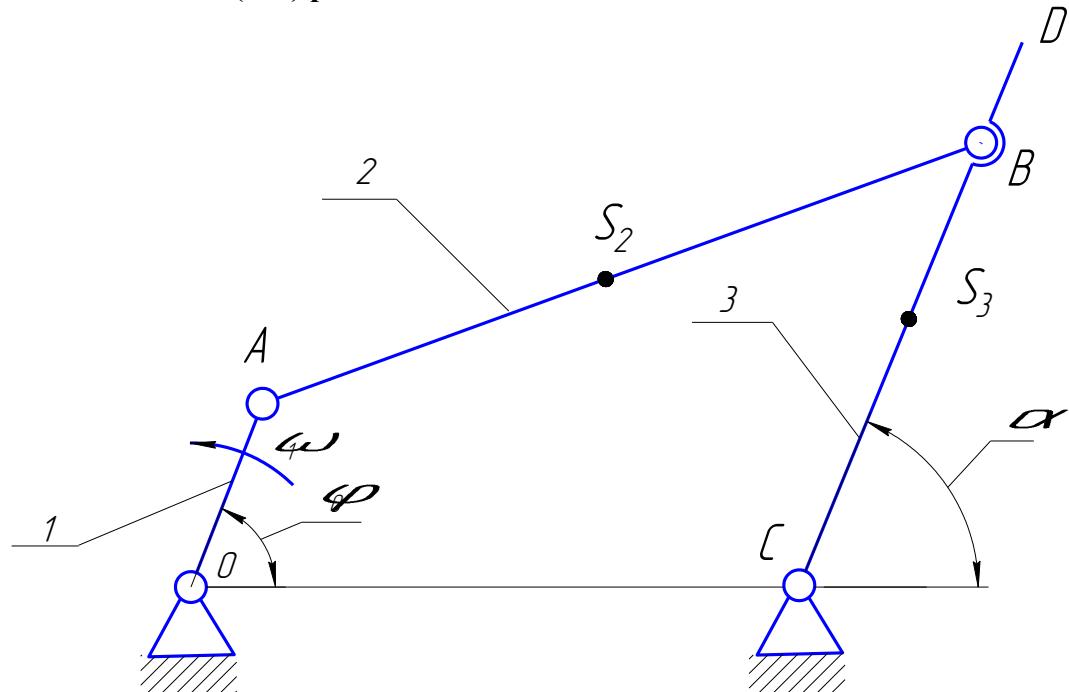


Рис. 2 Схема кривошипно-коромыслового механизма

### Порядок выполнения работы

- 1) По заданному коэффициенту возрастания скорости обратного хода коромысла определяем угол между крайними положениями коромысла –  $\theta$

$$\theta = 180 \cdot \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1}$$

Определяем масштаб построения, приняв чертежный размер BC = ... мм

$$\mu_l = l_{BC} / BC$$

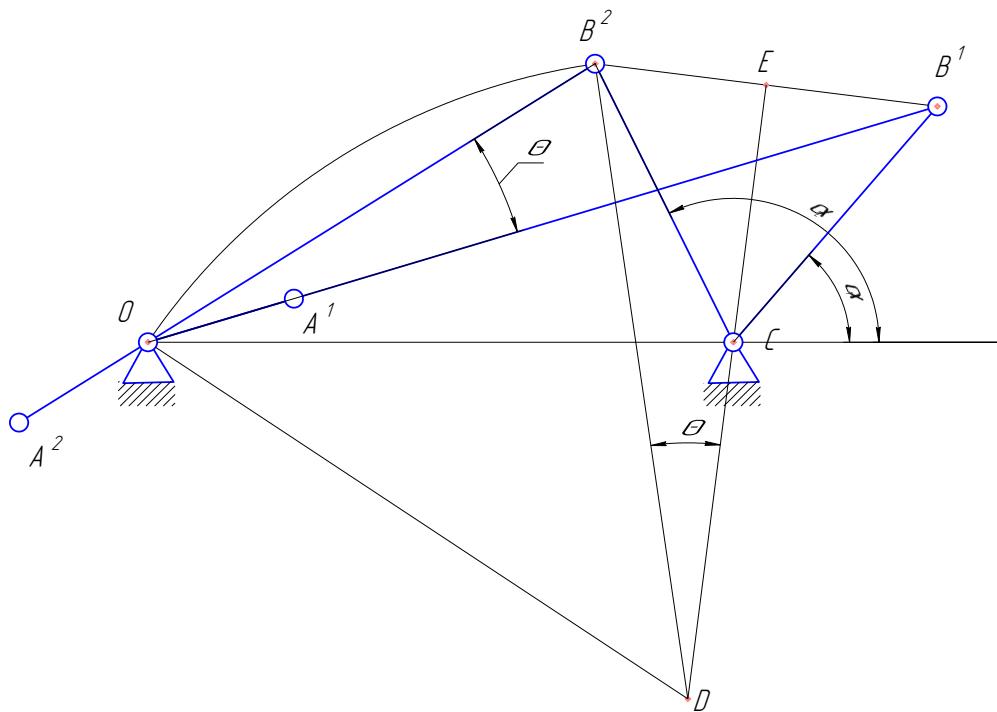


Рисунок 1. Определение длин звеньев

2) Строим два предельных положения коромысла СВ , откладывая  $BC = l_{BC} / \mu_l$

на лучах, проведенных под углами  $\alpha_1, \alpha_2$ .

Отрезок  $B_1B_2$  делим пополам и из т. Е проводим перпендикуляр к нему СЕ.

Из т.  $B_2$  проводим линию под углом  $\theta$  к СЕ до пересечения с его продолжением в т. L. Из т. L, как из центра проводим дугу радиусом  $LB_2$  до пересечения в т. О с горизонталью, проведенной через т. С . Т. О принимаем центр вращения кривошипа. Соединив т. О с т.  $B_1$  и  $B_2$ , измеряем длину отрезков  $OB_1$  и  $OB_2$

3) Определяем длины звеньев на чертеже

Длина шатуна

$$AB = \frac{OB_1 + OB_2}{2}$$

Длина кривошипа

$$OA = \frac{OB_1 - OB_2}{2}$$

Действительные размеры

$$l_{AB} = AB \mu_l$$

$$l_{OA} = OA \mu_l$$

**Отчет о работе должен содержать:**

1. Схему механизма, построенную в прикладной программе «КОМПАС -2D);
2. Исходные и полученные параметры механизма (углы  $\alpha_1, \alpha_2$  . Коэффициент возрастания скорости обратного хода коромысла – $\sigma$ , длина коромысла, шатуна и расстояние между опорами.

## **2.1 Лабораторная работа №7-8 (4 часа).**

**Тема: «Синтез зубчатых механизмов»**

**2.1.1 Цель работы:** получить представление о методах изготовления зубчатых колес и определить основные параметры зубчатого зацепления

### **2.1.2 Задачи работы:**

1. При помощи прибора для построения зубьев методом обкатки инструментальной рейкой требуется построить профили зубьев двух колес, а затем начертить зацепление этих колес с указанием основных геометрических размеров. Исходными данными для профилирования зубьев колес являются данные курсового проекта (работы) по зубчатому зацеплению. При этом принять наклон линии зуба  $\beta=0$ , а нормальный исходный контур по ГОСТ 13755-81 имеет следующие параметры: угол профиля  $\alpha = 20$ , коэффициент высоты головки  $ha^*=1$ , коэффициент радиального зазора  $c^*=0,25$ .

### **2.1.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:**

1. APM WinMachine
2. Персональный компьютер

### **2.1.4 Описание (ход) работы:**

#### **1. Порядок выполнения работы**

Каждый прибор предназначен для построения модели зубчатого колеса с определенным модулем  $m$  и делительным диаметром  $d$ . Значение модуля и делительного диаметра указано на модели зуборезной рейки каждого прибора. На диске из оргстекла, являющегося деталью подвижного патрона этого прибора, указан диаметр бумажного диска, который является моделью заготовки зубчатого колеса.

Модели заготовок имеются в лаборатории ТММ для всех приборов. Выбрав по модулю и делительному диаметру колеса необходимый прибор и нужную модель заготовки колеса, закрепляют ее в патроне прибора. Используя, две миллиметровые шкалы на станине прибора смещают зуборезную рейку на величину сдвига исходного контура  $x_m$  (при положительном смещении - от центра заготовки, при отрицательном смещении - к центру).

Для получения профилей зубьев на заготовке зуборезная рейка прибора отводится в крайнее правое положение, для чего, предварительно, поворачивают флагок возле клавиши до вертикального положения. **Не прилагать больших усилий для перемещения рейки!** В случае заклинивания рейки, сообщить об этом преподавателю. После перемещения рейки в крайнее правое положение флагок поворачивают в исходное состояние. Многократным нажатием клавиши прибора зуборезная рейка перемещается в крайнее левое положение, при этом в каждом ее положении, зубья рейки обводятся карандашом. Огибающая всех положений модели зуборезной рейки на модели заготовки является профилями трех зубьев и четырех впадин колеса. Контрольная проверка - окружность впадин (расчетная) должна совпадать с профилями впадин.

#### **2. Построение эвольвентного зацепления пары зубчатых колёс**

Построение зацепления пары зубчатых колес производится на листе формата А2 в натуральном масштабе. Линия межосевого расстояния колес проводится вертикально по

середине листа. На этой линии откладываются центры колес  $O_1$  и  $O_2$ . Из каждого центра колеса на листе и **одновременно** на модели колеса проводятся все окружности, диаметры которых были вычислены ранее.

Контрольная проверка – начальные окружности колес должны касаться в точке, лежащей на линии межосевого расстояния колес, в полюсе зацепления  $w$ .

Через полюс зацепления  $w$  проводятся две прямые – две ветви линии зацепления под углом зацепления  $\alpha_w$  к перпендикуляру, проведенному к линии межосевого расстояния. Для точного определения  $\alpha_w$  (если не использовать графический редактор «Компас») на упомянутом перпендикуляре из полюса  $w$  в любую сторону откладывается отрезок  $(wA)$ . В точке  $A$  восстанавливается перпендикуляр и в обе стороны откладывается отрезок  $(AB) = (wA) \cdot \operatorname{tg} \alpha_w$ , длина которого вычисляется на микрокалькуляторе. Соединяя точки  $B$  с полюсом зацепления, получим отрезки, совпадающие с обеими ветвями линии зацепления.

Контрольная проверка – обе ветви линии зацепления должны касаться обеих основных окружностей.

Установив по центру соответствующего колеса модель каждого зубчатого колеса на чертеже, предварительно вырезав профили зубьев ножницами, обвести каждый зуб и впадину. Положение одного колеса произвольное. Положение другого колеса должно обеспечивать точечный контакт профилей зубьев.

Центрковка модели каждого колеса с чертежом должна производиться до совпадения всех окружностей на чертеже и на модели колеса.

Контрольная проверка – все точки контакта профилей зубьев должны находиться на линии зацепления. Боковой зазор должен отсутствовать, а радиальный зазор равен 0,25м.

На чертеже необходимо выделить рабочие поверхности профилей зубьев эквидистантной к профилю зуба линией, для чего повернуть модель колеса вокруг центра и провести дуги на расстоянии 1-2 мм от профиля зуба. Нижняя граница рабочей поверхности профиля зуба  $p$  определяется дугой окружности, проведенной из центра колеса через точку пересечения линии зацепления с окружностью вершин зубьев сопряженного колеса.

На чертеже в верхнем углу привести таблицу параметров зацепления по ГОСТ 2.403-75 (рисунок 3).

На чертеже проставить все вычисленные размеры.



Зубчатое колесо		1	2
Модуль, мм	$m$		
Число зубьев	$z$		
Коэффиц. смещения	$\epsilon_\alpha$		
Исходный контур	ГОСТ 13755 - 81		
Коэффиц. перекрытия			
	10	35	35
	145		

Рисунок 3. Справочная таблица зубчатого зацепления

Профили зубьев колес и рабочую часть линии зацепления обвести сплошными основными линиями. Окружности, диаметры которых были вычислены, и линии зацепления (кроме рабочей части) провести сплошными тонкими линиями (рисунок 3.2.).

### 3. Определение коэффициента перекрытия в зацеплении изготовленных колёс

Коэффициент перекрытия определяется по формуле

$$\epsilon_\alpha = \frac{\varphi_{\alpha_1}}{\tau_1} = \frac{\varphi_{\alpha_2}}{\tau_2}$$

где:  $\tau$  - угловой шаг колеса в радианах  $\tau_1 = \frac{2\pi}{z_1}$ ,  $\tau_2 = \frac{2\pi}{z_2}$

$\varphi_\alpha$  - угол торцевого перекрытия зубчатого колеса

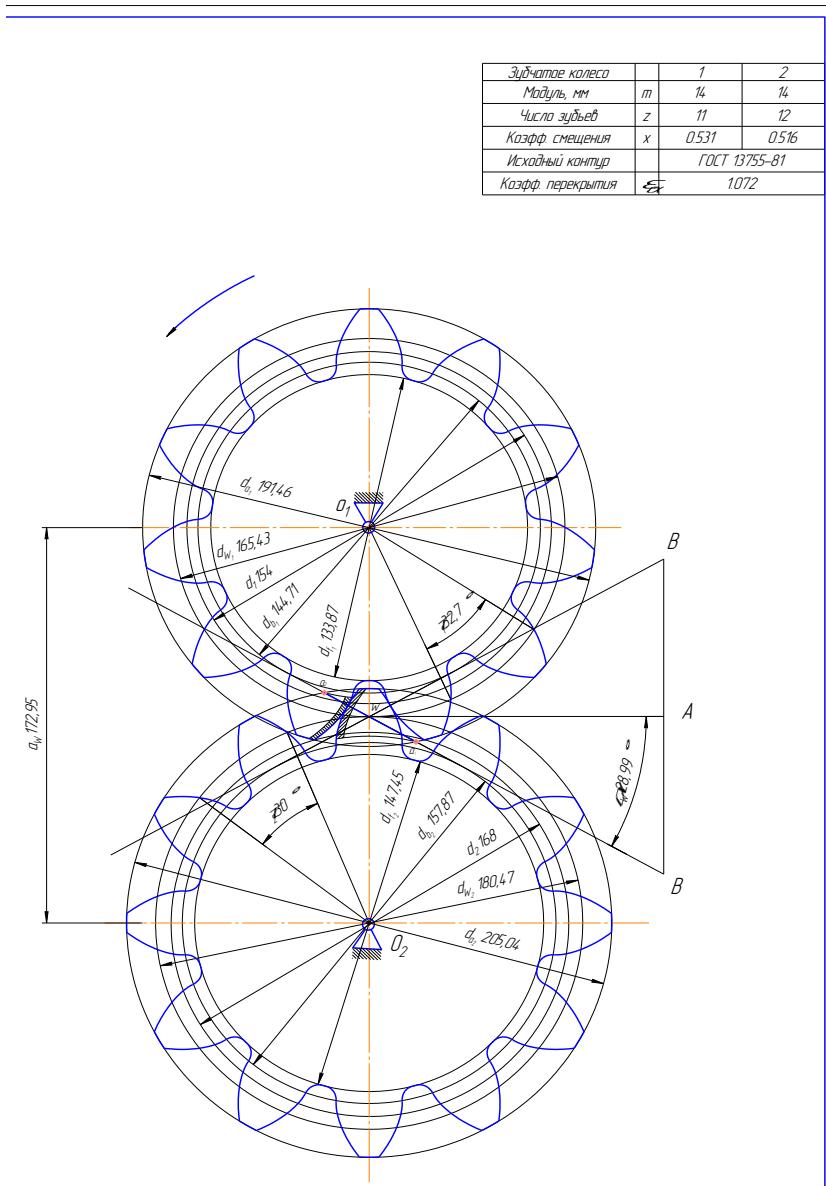


Рисунок 2. Зацепление эвольвентных зубчатых колёс

$$\varphi_{\alpha_1} = \frac{(a_1 a_2)}{r_{b_1}}, \quad \varphi_{\alpha_2} = \frac{(a_1 a_2)}{r_{b_2}}$$

( $a_1 a_2$ ) - длина активной части линии зацепления (измеряется линейкой на чертеже)

$r_b$  - радиус основной окружности