ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические рекомендации для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Б1.Б.05 Математика

Направление подготовки (специальность) _35.03.06 Агроинженерия_

Профиль образовательной программы _Технические системы в агробизнесе_

Форма обучения _очная_

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1. Организационно-методические данные дисциплины

№ п. п.	Наименование темы	Общий объем часов по видам самостоятельной работы				
		подготовка курсового проекта (работы)	подготовка реферата/ эссе	Индивидуальные домашние задания (ИДЗ)	самостоятельное изучение вопросов (СИВ)	подготовка к занятиям (ПкЗ)
1	2	3	4	5	6	7
1	Линейная алгебра	-	-	-	1	4
2	Векторная алгебра	-	-	-	1	4
3	Линии на плоскости	-	-	-	2	4
4	Линии в пространстве	-	-	-	-	3
5	Функция одной переменной	-	-	-	2	8
6	Производная и ее приложения	-	-	4	2	8
7	Функции нескольких переменных	-	-	2	1	6
8	Комплексные числа	-	-	-	0	2
9	Неопределенный интеграл	-	-	-	2	4
10	Определенный и несобственный интеграл	-	-	2	1	6
11	Кратные интегралы	-	-	-	1	2
12	Дифференциальные уравнения первого порядка	-	-	-	1	3
13	Дифференциальные уравнения второго порядка	-	-	-	0	8
14	Ряды	-	-	-	4	10
15	Случайные события	-	-	-	2	6
16	Случайные величины	-	-	2	1	12
17	Элементы математической статистики	-	-	2	5	15

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ВОПРОСОВ

2.1 Решение системы линейных уравнений матричным методом

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее определитель не равен нулю, и *вырожденной*, если ее определитель равен нулю.

Матрица A^{-1} называется *обратной* к матрице A, если $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы А.

Пример. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -10 \end{pmatrix}$ найти обратную ей матрицу A^{-1}.

Решение. Для матрицы второго порядка обратная матрица вычисляется по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

Находим определитель матрицы A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -10 \end{vmatrix} = -30 + 5 = -25 \neq 0.$$

Далее находим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = 1 \cdot (-10) = -10; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -1 \cdot (-1) = 1;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -1 \cdot 5 = -5; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 1 \cdot 3 = 3.$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \frac{1}{-25}\begin{pmatrix} -10 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ -0{,}04 & -0{,}12 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ -0{,}04 & -0{,}12 \end{pmatrix}$.

Систему *n уравнений с n неизвестными* $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$, имеющую единственное решение (т.е. $\Delta = |A| \neq 0$) можно решить методом обратной матрицы по формуле:

$X = A^{-1} \cdot B$, где A^{-1} - обратная матрица для матрицы A;

Пример. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} x + y - 2z = -2 \\ 2x - y + 3z = 13 \\ 3x + 2y - z = 5 \end{cases}$ методом обратной матрицы.

Неизвестная матрица $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$.

По формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta_A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ находим обратную матрицу для матрицы A,

где $\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -8$.

Вычисляем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$;

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 11$;

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7$;

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$;

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5$;

$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$;

$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1$;

$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -7$;

$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$.

Таким образом, обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{-8} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 11 & 5 & -7 \\ 7 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, неизвестная матрица равна:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 11 & 5 & -7 \\ 7 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -5 \cdot (-2) + (-3) \cdot 13 + 1 \cdot 5 \\ 11 \cdot (-2) + 5 \cdot 13 + (-7) \cdot 5 \\ 7 \cdot (-2) + 1 \cdot 13 + (-3) \cdot 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -24 \\ 8 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } \begin{cases} x = 3 \\ y = -1. \\ z = 2 \end{cases}$$

Ответ: $(3;\,-1;\,2)$.

2.2 Произвольный базис

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Базисом в пространстве называются любые три некомпланарных и ненулевых вектора, взятые в определенном порядке.

Базисом на плоскости называются любые два неколлинеарных и ненулевых вектора, взятые в определенном порядке.

Векторы $\overrightarrow{a_1},...,\overrightarrow{a_n}$ называются *линейно зависимыми*, если существует линейная комбинация $\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\overrightarrow{a_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{a_n}=0$ при не равных нулю одновременно α_i, т.е. $\alpha_1^2+\alpha_2^2+...+\alpha_n^2\neq 0$.

Если же равенство $\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\overrightarrow{a_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{a_n}=0$ выполняется только при $\alpha_i=0$, то векторы называются *линейно независимыми*.

Свойства линейно зависимых векторов:

1. Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима.
2. Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов представляет собой линейную комбинацию остальных векторов.
3. Любые два коллинеарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые два линейно зависимые векторы коллинеарны.
4. Любые три компланарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые три линейно зависимые векторы компланарны.
5. Любые четыре вектора линейно зависимы.

Если $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$ – базис в пространстве и $\vec{a}=\alpha\overrightarrow{e_1}+\beta\overrightarrow{e_2}+\gamma\overrightarrow{e_3}$, то числа α,β,γ называются *координатами вектора* $\vec{a}$ в этом базисе.

Ортом координатной оси называется единичный вектор, направление которого совпадает с положительным направлением оси.

Орты осей Ox, Oy и Oz обозначают соответственно $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. Эти вектора образуют *ортонормированный (прямоугольный декартовый) базис*.

Пример. Доказать, что векторы $\vec{a}(3;-1;0)$, $\vec{b}(2;3;1)$ и $\vec{c}(-1;4;3)$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}(2;3;7)$ в этом базисе.

Решение. Базисом в пространстве называется система трех некомпланарных векторов. Три вектора $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$, $\vec{c}(x_3;y_3;z_3)$ являются некомпланарными, если определитель, составленный из координат данных векторов, отличен от нуля, т.е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}\neq 0.$$

Подставим координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в определитель:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}=22\neq 0.$$

Так как значение определителя отлично от нуля, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис, и вектор $\vec{d}$ линейно выражается через базисные векторы:

$$\vec{d}=x\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}+z\cdot\vec{c}.$$

Запишем данное равенство в координатной форме:

$$(2;3;7)=x\cdot(3;-1;0)+y\cdot(2;3;1)+z\cdot(-1;4;3).$$

Сравнивая одноименные координаты:

$$\begin{cases} 2=x\cdot 3+y\cdot 2+z\cdot(-1) \\ 3=x\cdot(-1)+y\cdot 3+z\cdot 4 \\ 7=x\cdot 0+y\cdot 1+z\cdot 3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3x+2y-z=2 \\ -x+3y+4z=3. \\ y+3z=7 \end{cases}$$

Решаем полученную систему по формулам Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}=27+0+1-0-12+6=22,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix}=18+56-3+21-18-8=66,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix}=27+0+7-0+6-84=-44,$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix}=63+0-2-0+14-9=66.$$

Находим:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{66}{22}=3,\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-44}{22}=-2,\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{66}{22}=3.$$

Поэтому $\vec{d}\,(3;-2;3)$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Ответ: $(3;-2;3)$.

2.3 Полярная система координат

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Полярная система координат задается точкой O (полюсом), лучом Op (полярной осью) и единичным отрезком.

Положение любой точки плоскости M определяется двумя числами (полярными координатами):

1) r (полярный радиус) – расстояние от точки до полюса;
2) φ (полярный угол) – угол, образованный отрезком OM с полярной осью.

Значения полярных координат: 1) $r\in[0;\infty)$; 2) $\varphi\in[0;2\pi)$ (или $\varphi\in(-\pi;\pi]$).

Связь между полярной и прямоугольной системами координат

$(x;y)$ – прямоугольные координаты точки M; $(r;\varphi)$ – ее полярные координаты

$$\begin{cases} x=r\cdot\cos\varphi \\ y=r\cdot\sin\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ tg\varphi=\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Определяя полярный угол φ, следует установить четверть, в которой лежит искомый угол.

Пример. Дана точка $M(-\sqrt{3};1)$. Найти ее полярные координаты.

Решение. По условию $x=-\sqrt{3}$; $y=1$. По формулам $\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ tg\varphi=\dfrac{y}{x} \end{cases}$ находим значения r и φ:

$$r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2,\ tg\varphi=\frac{1}{-\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Так как точка M лежит во второй четверти, $\varphi=\dfrac{5\pi}{6}$. Итак, полярные координаты точки M равны $\left(2;\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

Ответ: $\left(2;\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

Пример. Найти расстояние между точками $A\left(5;\dfrac{\pi}{2}\right)$ и $B\left(8;\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Решение. По формулам $\begin{cases} x=r\cdot\cos\varphi \\ y=r\cdot\sin\varphi \end{cases}$ перейдем от полярных координат к прямоугольным декартовым координатам:

Для точки A: $\begin{cases} x=5\cdot\cos\dfrac{\pi}{2}=5\cdot 0=0 \\ y=5\cdot\sin\dfrac{\pi}{2}=5\cdot 1=5 \end{cases}$, следовательно, $A(0;5)$.

Для точки B: $\begin{cases} x=8\cdot\cos\dfrac{\pi}{6}=8\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3} \\ y=8\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}=8\cdot\dfrac{1}{2}=4 \end{cases}$, следовательно, $B(4\sqrt{3};4)$.

По формуле расстояния между двумя точками на плоскости находим:

$$AB=\sqrt{(4\sqrt{3}-0)^2+(4-5)^2}=\sqrt{48+1}=7.$$

Ответ: 7.

2.4 Основные элементарные функции, их свойства, графики

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Функция – зависимость переменной x от переменной y, при которой каждому значению x соответствует *единственное* значение y.

Обозначается: $y=f(x)$.

Переменная x называется *независимой переменной* или *аргументом*, а переменная y – *зависимой переменной*.

Буква f (вместо неё может быть g, h и другие буквы) означает правило, по которому, зная значение x, можно получить значение y.

Графиком функции называется множество всех точек плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям самой функции.

Для того чтобы кривая на плоскости являлась графиком функции, необходимо и достаточно, чтобы каждому значению аргумента x, соответствовало лишь одно значение переменной y, т.е. любая прямая, параллельная оси ординат, пересекала кривую не более чем в одной точке.

Для того чтобы построить график функции, необходимо определить ее основные свойства.

1. Область определения функции

Множество значений независимой переменной x называется *областью определения функции* и обозначается $D(y), D_y, D_f$ или $D(f)$.

Например, $D(f) = -\infty;-3 \cup -3;+\infty$ является областью определения для функции $y = \dfrac{x-1}{x+3}$.

Замечание. Для нахождения области определения функции учитывают условия: 1) знаменатель должен быть отличен от нуля; 2) корень четной степени извлекается из неотрицательных чисел; в) логарифмы существуют только для положительных чисел.

2. Область значений функции

Множество значений, принимаемых зависимой переменной y, называется *областью значений функции* и обозначается $E(y), E_y, E_f$ или $E(f)$.

Например, $E(f) = -\infty;+\infty$ является областью значений для функции $y = \dfrac{x-1}{3}$.

3. Монотонность функции

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на промежутке X, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции; т.е. для любых значений аргумента x_1 и x_2 из промежутка X, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на промежутке X, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции; т.е. для любых значений аргумента x_1 и x_2 из промежутка X, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Например, $f(x) = 4 - 3x$ убывает на $(-\infty;+\infty)$, т.к. если взять $x_1 < x_2$, то по свойствам неравенств $4 - 3x_1 > 4 - 3x_2$; т.е. $f(x_1) > f(x_2)$ для всех $x \in (-\infty;+\infty)$.

Если функция только возрастает или только убывает на данном числовом промежутке, то она называется *строго монотонной* на этом промежутке.

4. Чётные и нечётные функции

Чётная функция – функция $y = f(x)$, обладающая следующими свойствами:

1) её область определения симметрична относительно нуля;
2) для любого значения x из области определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

График любой чётной функции симметричен относительно оси ординат.

Например, $y = x^2$, $y = \cos x$ – чётные функции.

Сумма, разность, произведение чётных функций также представляют собой чётные функции.

Нечётная функция – функция $y = f(x)$, обладающая следующими свойствами:

1) её область определения симметрична относительно нуля;
2) для любого значения x из области определения выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

График любой нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Например, $y = x^5$, $y = \dfrac{1}{x}$ – нечётные функции.

Замечание. Функцию, не являющуюся ни четной, ни нечетной называют *функцией общего вида.*

5. Экстремумы функции

Точка экстремума – точка минимума или максимума функции.

Точка x_0 называется *точкой максимума функции* $y = f(x)$, если найдётся такая окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности выполняется $f(x_0) \ge f(x)$, т.е. $f(x_0)$ наибольшее значение функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0.

Точка x_0 называется *точкой минимума функции* $y = f(x)$, если найдётся такая окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности выполняется $f(x_0) \le f(x)$, т.е. $f(x_0)$ наименьшее значение функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0.

6. Периодические функции

Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T \ne 0$, что:

1) для любого x из области определения функции числа $(x+T)$ и $(x-T)$ также принадлежат области определения;
2) выполняется равенство: $f(x) = f(x+T) = f(x-T)$.

Число T называется периодом функции. Всякая периодическая функция имеет бесконечно много периодов, т.к. если число T – один из периодов, то всякое число $Tm, m \in Z$ также будет периодом этой функции. Чаще всего из множества периодов функции выбирают наименьший положительный период. Иногда его называют основным периодом.

Значения периодической функции через промежуток, равный периоду, повторяются, поэтому для построения графика периодической функции достаточно построить ветвь графика на участке длиной T, а затем выполнить параллельный перенос этой ветви вдоль оси Ox на $\pm T, \pm 2T$ и т.д.

Если функция $f(x)$ – периодическая с периодом T, то периодом функции $a \cdot f(kx+b)$, где a, k, b – постоянные, $k \ne 0$ будет число $\dfrac{T}{|k|}$.

7. Нули функции

Нули функции – значения аргумента, при которых значения функции равны нулю.

Нули функции разбивают область определения функции на промежутки знакопостоянства.

При графическом задании функции нули функции являются точками пересечения графика с осью абсцисс.

К основным элементарным функциям относятся:

- степенная функция $y = x^n$, где $n \in R$;
- показательная функция $y = a^x$;
- логарифмическая функция $y = \log_a x$;
- тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$;
- обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$.

Степенная функция

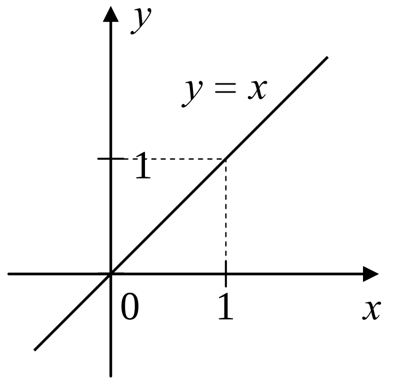
– это функция вида $y = x^n$, где n – постоянное действительное число.

Рассмотрим частные случаи степенной функции:

а) Линейная функция $y = x$

Такая функция ($n=1$) является прямой пропорциональностью и обладает следующими свойствами:

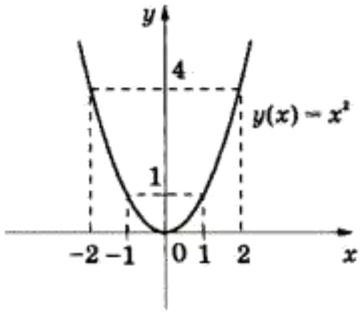
1. Область определения – множество всех действительных чисел, т.е. $D(f)=(-\infty;+\infty)$.
2. Область значений: $E(f)=(-\infty;+\infty)$.
3. Функция принимает нулевое значение при $x=0$.
4. Функция возрастает на всей области определения.
5. Экстремумов нет.
6. Функция является нечётной.
7. Графиком функции является прямая линия, проходящая через начало координат и являющаяся биссектрисой I и III координатных четвертей:



б) Квадратичная функция $y = x^2$

У данной функции $n=2$, рассмотрим её свойства:

1. Область определения – множество всех действительных чисел, т.е. $D(f)=(-\infty;+\infty)$.
2. Область значений – множество неотрицательных действительных чисел: $E(f)=[0;+\infty)$.
3. Нули функции: $y=0$ при $x=0$.
4. Функция возрастает от $-\infty$ до 0 при $x\in(-\infty;0]$.
5. Функция убывает от 0 до $+\infty$ при $x\in[0;+\infty)$.
6. Функция имеет минимум при $x=0$: $y_{\min}=0$.
7. Функция является чётной.
8. График функции – парабола:

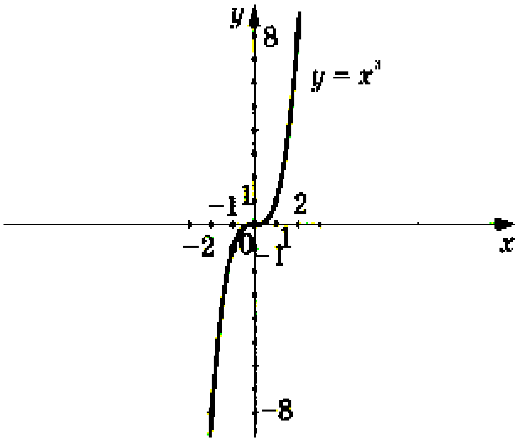


Замечание. Если n является чётным числом, то функция обладает теми же свойствами, что и квадратичная функция. График её напоминает параболу.

в) Кубическая функция $y = x^3$

1. Область определения функции – множество всех действительных чисел *R:* $D(f)=(-\infty;+\infty)$.
1. Множество значений функции: $E(f)=(-\infty;+\infty)$.

2. Функция принимает нулевое значение при $x = 0$.
3. Функция возрастает всюду на всей области определения.
4. Функция нечетная.
5. Экстремумов нет.
6. График функции – кубическая парабола:

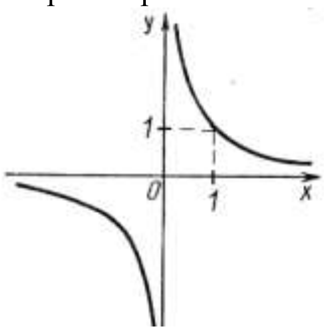


Замечание. Если n является нечётным числом, то функция обладает теми же свойствами, что и кубическая парабола.

г) Обратная пропорциональность $y = \dfrac{1}{x}$

У данной функции $n = -1$, так как $y = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$, поэтому она тоже является степенной; рассмотрим её свойства:

1. Область определения $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
2. Множество значений функции: $E(f) = (-\infty; +\infty)$.
3. Функция не имеет нулей.
4. Функция возрастает на всей области определения.
5. Функция нечетная.
6. Экстремумов нет.
7. Графиком обратной пропорциональности является кривая, состоящая из двух ветвей, симметричных относительно начала координат. Такая кривая называется гиперболой, ветви гиперболы расположены в I и III четвертях:

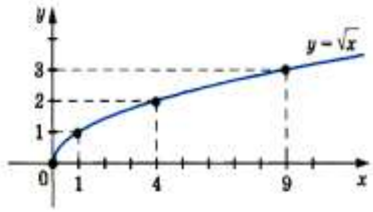


д) Функция $y = \sqrt{x}$

У данной функции $n = \dfrac{1}{2}$, так как $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, поэтому она является степенной; рассмотрим её свойства:

1. Областью определения функции служит множество неотрицательных чисел: $D(f) = [0; +\infty)$.

2. Множество значений функции – множество неотрицательных действительных чисел: $E(f)= \ 0;+\infty \ $.
3. Функция принимает нулевое значение при *x = 0.*
4. Функция возрастает на всей области определения.
5. Функция не является ни чётной, ни нечетной.
6. Экстремумов нет.
7. График функции специального названия не имеет:

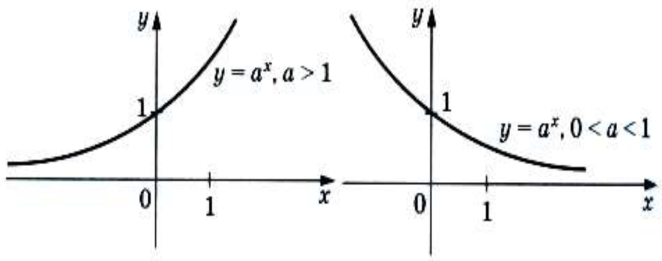


2. *Показательная функция*

– это функция вида $y=a^x$, где $a>0, a\neq 1$

Рассмотрим свойства показательной функции:

1. Область определения – множество всех действительных чисел: $D(f)=(-\infty;+\infty)$.
2. Область значений – множество положительных действительных чисел: $E(f)= \ 0;+\infty \ $.
3. Функция не является ни чётной, ни нечетной.
4. Если $x=0$, то $y=a^0=1$, следовательно, график показательной функции пересекает ось Oy в точке $(0;1)$.
5. Нулей функции нет, т.к. показательная функция принимает только положительные значения.
6. Если $a>1$, то функция возрастает на всей числовой прямой;
7. если $0<a<1$, то функция убывает на всей числовой прямой.
8. Экстремумов нет.
9. График функции специального названия не имеет:



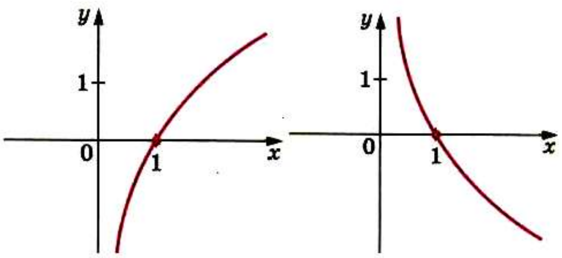
3. *Логарифмическая функция*

– это функция вида $y=\log_a x$, где $a>0, a\neq 1$.

Свойства логарифмической функции:

1. Область определения – множество положительных действительных чисел: $D(f)=(0;+\infty)$.
2. Область значений – множество всех действительных чисел: $E(f)= \ -\infty;+\infty \ $.
3. Функция не является ни чётной, ни нечетной.
4. Если $x=1$, то $y=\log_a 1=0$, следовательно, график логарифмической функции пересекает ось Ox в единственной точке $(1;0)$.

5. Если $a > 1$, то функция возрастает на интервале $0;+\infty$; если $0 < a < 1$, то функция убывает на $0;+\infty$.
6. Экстремумов нет.
7. График функции специального названия не имеет. Логарифмическая функция является обратной для показательной функции. Графики этих функций симметричны относительно прямой $y = x$:



$a > 1$ $\quad$ $0 < a < 1$

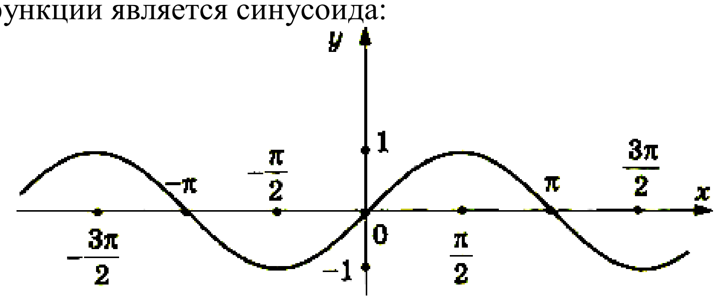
4. *Тригонометрические функции*

– это функции числового аргумента: $y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = tgx, \quad y = ctgx$.

а) Функция синуса $y = \sin x$

Свойства функции $y = \sin x$:

1. Область определения – множество всех действительных чисел: $D(f) = (-\infty;+\infty)$.
2. Область значений – отрезок $-1;1$.
3. Функция является нечетной.
4. Функция периодическая: $T = 2\pi$.
5. Нули функции: $\sin x = 0$ при $x = \pi k, k \in Z$.
6. Возрастает от -1 до 1 при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), \quad k \in Z$.
7. Убывает от 1 до -1 при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), \quad k \in Z$.
8. Функция достигает максимального значения $y_{\max} = 1$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.
9. Функция достигает минимального значения $y_{\min} = -1$ при $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.
10. Графиком функции является синусоида:

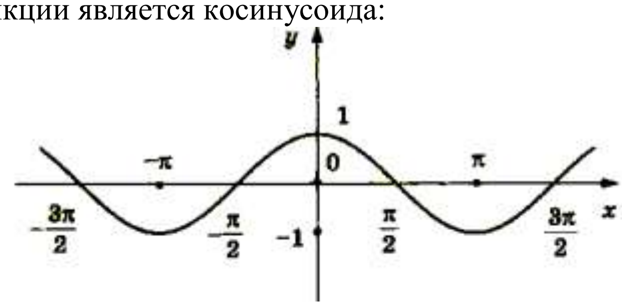


б) Функция косинуса $y = \cos x$

Свойства функции $y = \cos x$:

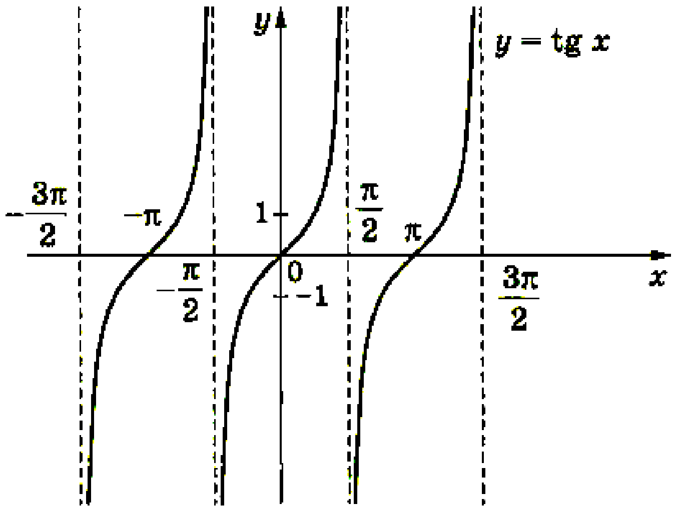
1. Область определения – множество всех действительных чисел: $D(f) = (-\infty;+\infty)$.
2. Область значений – отрезок $-1;1$.
3. Функция является четной.

4. Функция периодическая: $T = 2\pi$.
5. Нули функции: $\cos x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.
6. Возрастает от -1 до 1 при $x \in [-\pi + 2\pi k; 2\pi k]$, $k \in Z$.
7. Убывает от 1 до -1 при $x \in [2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in Z$.
8. Функция достигает максимального значения $y_{\max} = 1$ при $x = 2\pi k, k \in Z$.
9. Функция достигает минимального значения $y_{\min} = -1$ при $x = \pi + 2\pi k, k \in Z$.
10. Графиком функции является косинусоида:



в) Функция тангенса $y = tgx$

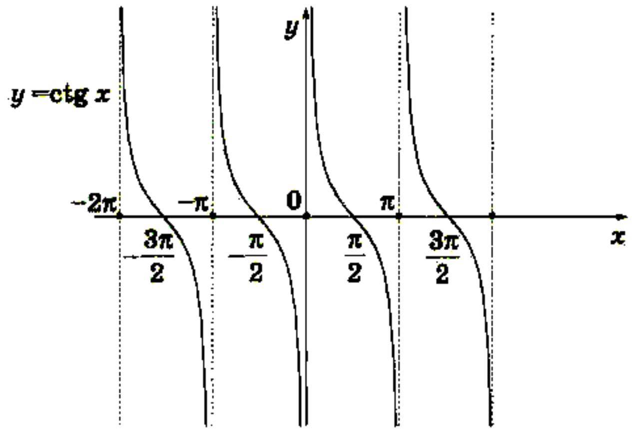
Свойства функции $y = tgx$:
1. Область определения – множество всех действительных чисел, кроме чисел вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.
2. Область значений – множество всех действительных чисел: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
3. Функция является нечетной.
4. Функция периодическая: $T = \pi$.
5. Нули функции: $tgx = 0$ при $x = \pi k, k \in Z$.
6. Возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ на промежутках $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$.
7. Экстремумов нет.
8. Графиком функции является тангенсоида:



г) Функция котангенса $y = ctgx$

Свойства функции $y = ctgx$:

1. Область определения – множество всех действительных чисел, кроме чисел вида $x = \pi k, k \in Z$.
2. Область значений – множество всех действительных чисел: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
3. Функция является нечетной.
4. Функция периодическая: $T = \pi$.
5. Нули функции: $ctgx = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.
6. Убывает от $+\infty$ до $-\infty$ на промежутках $x \in (\pi k; \pi + \pi k)$, $k \in Z$.
7. Экстремумов нет.
8. Графиком функции является котангенсоида:



5. Обратные тригонометрические функции (аркфункции)

– это функции, обратные к тригонометрическим функциям:

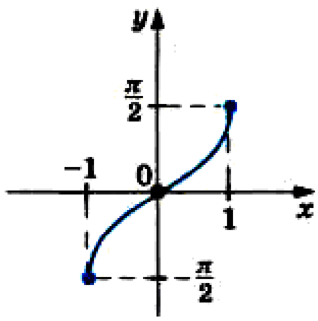
$y = \arcsin x,\ y = \arccos,\ y = arctgx,\ y = arcctgx$.

Функция g называется *обратной к функции* f, если область определения функции f является областью значений функции g, а область значений функции f является областью определения функции g.

а) Функция арксинуса $y = \arcsin x$

Свойства функции $y = \arcsin x$:

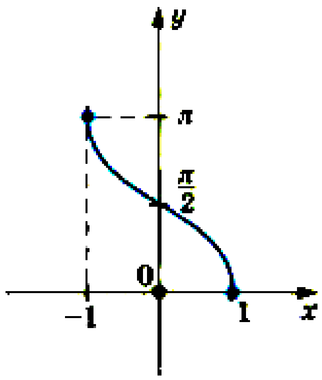
1. Область определения является отрезок $[-1;1]$.
2. Область значений – отрезок от $-\frac{\pi}{2}$ (при $x = -1$) до $\frac{\pi}{2}$ (при $x = 1$).
3. Функция является нечетной.
4. Функция не является периодической.
5. Нули функции: $\arcsin x = 0$ при $x = 0$.
6. Монотонно возрастает на всей области определения.
7. Экстремумов нет.
8. График функции специального названия не имеет:



б) Функция арккосинуса $y = \arccos x$

Свойства функции $y = \arccos x$:

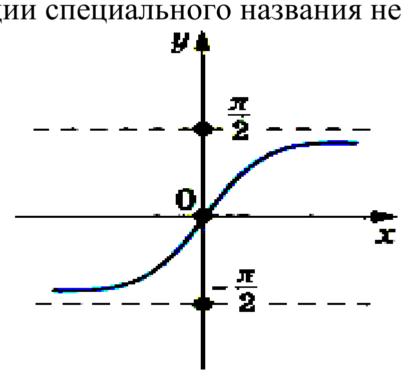
1. Область определения является отрезок $[-1;1]$.
2. Область значений – отрезок от 0 (при $x = 1$) до π (при $x = -1$).
3. Функция не является ни чётной, ни нечетной.
4. Функция не является периодической.
5. Нули функции: $\arccos x = 0$ при $x = 1$.
6. Функция пересекает ось ординат в точке $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.
7. Монотонно убывает на всей области определения.
8. Экстремумов нет.
9. График функции специального названия не имеет:



в) Функция арктангенса $y = arctgx$

Свойства функции $y = arctgx$:

1. Область определения является - множество всех действительных чисел: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2. Область значений – промежуток $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.
3. Функция является нечетной.
4. Функция не является периодической.
5. Нули функции: $arctgx = 0$ при $x = 0$.
6. Возрастает на всей области определения.
7. Экстремумов нет.
8. График функции специального названия не имеет:

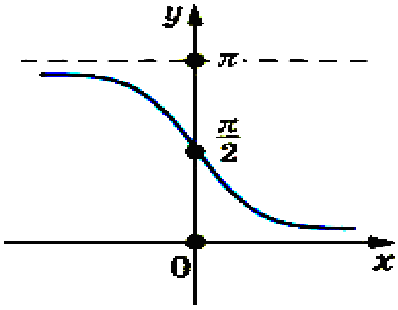


г) Функция арккотангенса $y = arcctgx$

Свойства функции $y = arcctgx$:

1. Область определения является - множество всех действительных чисел: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2. Область значений – промежуток $(0;\pi)$.
3. Функция не является ни чётной, ни нечетной.
4. Функция не является периодической.
5. Нулей функции нет.
6. График функции пересекает ось ординат в точке $y=\dfrac{\pi}{2}$.
7. Убывает на всей области определения.
8. Экстремумов нет.
9. График функции специального названия не имеет:

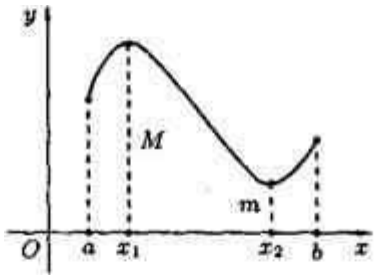


2.5 Свойства функций, непрерывных на отрезке

Непрерывные на отрезке функции имеют ряд важных свойств.

Теорема 1 (Вейерштрасса). Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

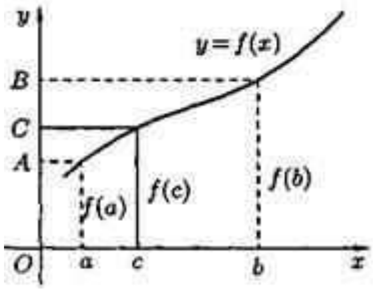
Изображенная на рисунке функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, принимает свое наибольшее значение M в точке x_1, а наименьшее m - в точке x_2. Для любого $x\in[a;b]$ имеет место неравенство $m\le f(x)\le M$.



Следствие 1. Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

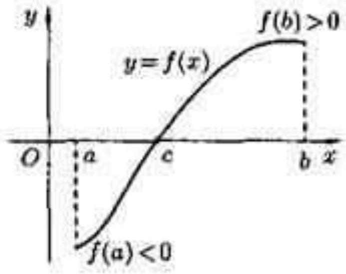
Теорема 2 (Больцано-Коши). Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на его концах неравные значения $f(a)=A$ и $f(b)=B$, то на этом отрезке она принимает и все промежуточные значения между A и B.

Геометрически теорема очевидна.

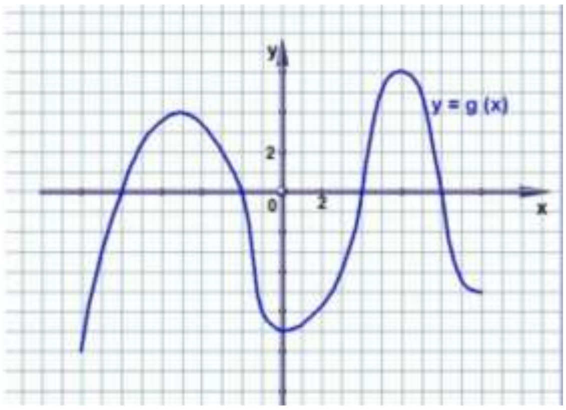


Следствие 1. Для любого числа C, заключенного между A и B, найдется точка c внутри этого отрезка такая, что $f(c)=C$. Прямая $y=C$ пересечет график функции, по крайней мере, в одной точке.

Следствие 2. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри отрезка $[a;b]$ найдется хотя бы одна точка c, в которой данная функция $f(x)$ обращается в нуль: $f(c) = 0$.



Геометрический смысл теоремы: если график непрерывной функции переходит с одной стороны оси Ox на другую, то он пересекает ось Ox. Следствие 2 лежит в основе так называемого метода интервалов - это универсальный способ решения практически любых неравенств, которые встречаются в школьном курсе алгебры. Непрерывная функция $g(x)$ может изменить знак только в той точке, в которой она равна 0. Графически это означает, что график непрерывной функции может перейти из одной полуплоскости в другую, только если пересечет ось абсцисс (мы помним, что ордината любой точки, лежащей на оси OX (оси абсцисс) равна нулю, то есть значение функции в этой точке равно 0):



Мы видим, что функция $y = g(x)$, изображенная на графике, пересекает ось Ox в точках $x = -8, x = -2, x = 4, x = 8$. Эти точки называются нулями функции. И в этих же точках функция $g(x)$ меняет знак.

2.6 Дифференцирование параметрически заданной функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \text{ где } t \text{ – параметр.}$$

Тогда производная этой функции по переменной x равна отношению производных y'_t и x'_t по параметру t:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Пример. Найти производную функции $y = f(x)$, заданной уравнениями в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}.$$

Решение. Очевидно, что

$$y'_t = b\cos t,\quad x'_t = -a\sin t.$$

Следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b\cos t}{a\sin t} = -\frac{b}{a}ctgt.$$

Из определения производной второго порядка следует, что:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

Аналогично получаем:

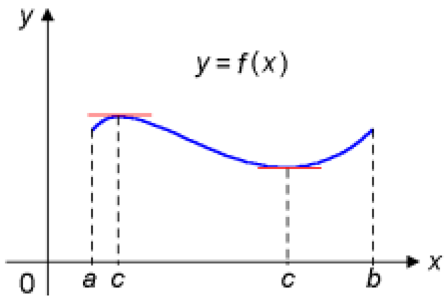
$$y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t};\quad y^{(4)}_{xxxx} = \frac{(y'''_{xxx})'_t}{x'_t},\ \ldots$$

2.7 Теоремы Коши, Ролля, Лагранжа

Теорема 1. (*Теорема Ролля*) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$; дифференцируема в интервале $(a;b)$; на концах отрезка $[a;b]$ принимает равные значения. Тогда существует точка $c \in (a;b)$ такая, что $f'(c) = 0$.

Геометрическая интерпретация теоремы Ролля

Из теоремы Ролля следует, что существует точка $c \in (a;b)$, в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна оси Ox.



Теорема 2. (*Теорема Лагранжа*) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$; дифференцируема в интервале $(a;b)$. Тогда существует точка $c \in (a;b)$ такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

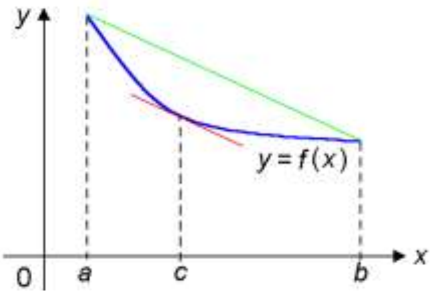
Формула (1) называется *формулой Лагранжа*, или *формулой конечных приращений*

Геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа

Представим формулу в виде

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Число $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ есть угловой коэффициент прямой, проходящей через концы графика функции $y = f(x)$- точки $(a; f(a))$ и $(b; f(b))$, а $f'(c)-$ угловой коэффициент касательной к этому графику в точке $(c; f(c))$. Из формулы следует, что существует точка $c \in (a;b)$, в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой, проходящей через концы графика (или совпадает с ней).



Теорема 3. (*Теорема Коши*) Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,\ b]$; дифференцируемы в интервале $(a,\ b)$; $x \in (a;b)$, $g'(x) \neq 0$. Тогда существует точка $c \in (a;b)$ такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Формула (3) называется *формулой Коши*.

2.8 Метод наименьших квадратов

Примером исследования функции двух переменных на экстремум является метод наименьших квадратов при построении эмпирических формул. Пусть в результате опыта зависимость между переменными x и y выражается в виде таблицы:

x_i	x_1	x_2	. . .	x_i	. . .	x_n
y_i	y_1	y_2	. . .	y_i	. . .	y_n

В случае линейной зависимости между переменными x и y указанные точки расположены в достаточной близости от некоторой прямой $y = ax + b$. При подстановке $x = x_i$ в уравнение прямой получаем $a \cdot x_i + b$, а в результате опыта получилось y_i, т.е. формула дает расхождение $y_i - (ax_i + b)$ с опытом, которое получено за счет различных ошибок.

Значения параметров a и b выбираются таким образом, чтобы сумма квадратов этих расхождений была наименьшей. В этом и состоит метод наименьших квадратов. Для определения коэффициентов a и b используется нормальная система способа наименьших квадратов:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}.$$

В случае квадратичной зависимости $y = ax^2 + bx + c$ для определения коэффициентов пользуются системой:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + c \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}.$$

Пример. Значения переменных величин x и y, полученные в результате опыта, представлены в виде таблицы:

x_i	0	1	2	4	5
y_i	0,6	1,1	1,9	2,9	3,1

Используя метод наименьших квадратов найти линейную зависимость $y = ax + b$ (найти значения параметров a и b).

Решение. В примере $n = 5$. Для удобства вычисления сумм, которые входят в нормированную систему, составляем следующую таблицу:

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	0	0,6	0	0
2	1	1,1	1,1	1
3	2	1,9	3,8	4
4	4	2,9	11,6	16
5	5	3,1	15,5	25
$\sum\limits_{i=1}^{5}$	12	9,6	32	46

Подставив найденные значения сумм в систему $\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$, получим:

$$\begin{cases} 46a + 12b = 32 \\ 12a + 5b = 9{,}6 \end{cases}.$$

Решая систему, находим значения параметров: $a \approx 0{,}52;\, b \approx 0{,}67$.

Таким образом, зависимость между переменными x и y выражается формулой $y = 0{,}52x + 0{,}67$.

Ответ: $y = 0{,}52x + 0{,}67$.

2.9 Подстановки Эйлера

Подстановки, служащие для приведения интегралов вида $\int R(x;\sqrt{ax^2 + bx + c})dx$, где $R(x;\sqrt{ax^2 + bx + c})$ - рациональная функция.

Первая эйлерова подстановка $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - x\sqrt{a}$ применима, когда $a > 0$.

Вторая эйлерова подстановка $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt - \sqrt{c}$ применима, когда $c > 0$.

Третья эйлерова подстановка $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \lambda)$, где λ — один из корней трёхчлена $ax^2 + bx + c$, применима, если корни этого трёхчлена действительны. На практике эти подстановки требуют громоздких преобразований и потому вместо них обычно пользуются теми или иными искусственными приёмами, упрощающими вычисление.

Аналогичные подстановки делаются в теории чисел при решении неопределённых уравнений 2-й степени в рациональных числах.

2.10 Признаки сравнения несобственных интегралов

Пусть функция $f(x)$ непрерывна при $a \le x < +\infty$. Тогда по определению полагают:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Если предел существует, то несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования, стоящий в левой части равенства, называется **сходящимся** и его значение определяется формулой; в противном случае равенство теряет смысл, несобственный интеграл, стоящий слева, называется **расходящимся** и ему не приписывается никакого числового значения.

Признаки сравнения

1. Если две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ для всех значений x при $a \le x < +\infty$ не принимают отрицательных значений и к тому же $f(x) \le \varphi(x)$, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$, и $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ расходится, если расходится $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

2. Если $x \to +\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\varphi(x)}{f(x)} = c$, причем $c > 0, c \ne \infty$ и $f(x) \ne 0$ для всех достаточно больших x, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

3. Если сходится $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, то сходится и $\int_a^{+\infty} k \cdot f(x)dx$, где k - величина постоянная.

Эти признаки распространяются и на интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, но относятся только к указанным выше функциям.

4. Для решения вопроса о сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ в том случае, когда функция $f(x)$ является знакопеременной $a \le x < +\infty$, можно применить такую теорему:

Если несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ от абсолютной величины функции $f(x)$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

2.11 Понятие тройного и криволинейного интегралов

Тройные интегралы

Пусть в замкнутой области V пространства $Oxyz$ задана непрерывная функция $f(x;y;z)$. Разбив область V сеткой поверхностей на n частей V_i и выбрав в каждой из них произвольную точку $M_i(x_i;y_i;z_i)$ составим интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i;y_i;z_i)\Delta V_i$.

Тройным интегралом функции $u = f(x;y;z)$ по области V называют предел интегральной суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i;y_i;z_i)\Delta V_i$ при неограниченном увеличении числа n таким образом, что каждая элементарная область V_i стягивается в точку.

Теорема (существования тройного интеграла): если функция $u = f(x;y;z)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области V, то предел интегральной суммы существует и не зависит ни от способа разбиения области V на части, ни от выбора точек $M_i(x_i;y_i;z_i)$ в них.

Свойства тройного интеграла

1. $\iiint\limits_V c \cdot f(x;y;z)dv = c \cdot \iiint\limits_V f(x;y;z)dv$, $c = const$.

2. $\iiint\limits_V \left(f_1(x;y;z) + f_2(x;y;z)\right)dv = \iiint\limits_V f_1(x;y;z)dv + \iiint\limits_V f_2(x;y;z)dv$.

3. $\iiint\limits_V f(x;y;z)dv = \iiint\limits_{V_1} f(x;y;z)dv + \iiint\limits_{V_2} f(x;y;z)dv$, если $V = V_1 \cup V_2$, а пересечение состоит из границы, их разделяющей.

4. Если в области V $f(x;y;z) \geq 0$, то $\iiint\limits_V f(x;y;z)dv \geq 0$ и наоборот.

5. $\iiint\limits_V dv = V$.

6. Теорема о среднем значении: Если функция $u = f(x;y;z)$ непрерывная в замкнутой области M, то в этой области существует такая точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$, что $\iiint\limits_V f(x;y;z)dv = f(x_0;y_0;z_0) \cdot V$, где V - объем тела.

Если область V - правильная в направлении оси Oz, то вычисление тройного интеграла сводится к вычислению двойного интеграла от однократного:

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)dv = \iint\limits_D \left(\int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)ds \right)$$

Приложения тройного интеграла

а) Нахождение объема тела

$$\iiint\limits_V dv = V$$

б) Вычисление массы тела

Масса тела m при заданной объемной плотности γ вычисляется по формуле:

$$m = \iiint\limits_V \gamma(x;y;z)dxdydz$$

г) Определение статических моментов

Моменты S_{xy}, S_{xz}, S_{yz} тела относительно координатных плоскостей Oxy, Oxz, Oyz вычисляют по формулам:

$$S_{xy} = \iiint\limits_V z \cdot \gamma(x;y;z)dv; \quad S_{xz} = \iiint\limits_V y \cdot \gamma(x;y;z)dv; \quad S_{yz} = \iiint\limits_V x \cdot \gamma(x;y;z)dv.$$

г) Центр тяжести тела находят по формулам:

$$x_c = \frac{S_{yz}}{m}; \quad y_c = \frac{S_{xz}}{m}; \quad z_c = \frac{S_{xy}}{m}.$$

Криволинейные интегралы

Криволинейным интегралом первого рода называется предел интегральной суммы для функции $f(x;y)$ по кривой AB (если этот предел существует):

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\hat{x}_i;\hat{y}_i)\Delta l_i$$

Теорема (существования криволинейного интеграла): если функция непрерывна в каждой точке гладкой кривой, то криволинейный интеграл первого рода существует, и его величина не зависит ни от способа разбиения кривой на части, ни от выбора точек в них.

Замечание. Свойства криволинейного интеграла совпадают с основными свойствами двойного или тройного интеграла. Приведем отличительные свойства по длине дуги:

1. Криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления пути интегрирования:

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_{BA} f(x;y)dl.$$

2. $\int\limits_{AB} dl = l$, где $l -$длина кривой AB.

Если кривая AB задана уравнением $y=\varphi(x)$, $x\in[a;b]$, где $y=\varphi(x)$ - непрерывно дифференцируемая функция, то $\int\limits_{AB} f(x;y)dl=\int\limits_a^b f(x;\varphi(x))\cdot\sqrt{1+(y')^2}dx$.

С помощью криволинейного интеграла первого рода вычисляют:

1) длину плоской или пространственной линии;
2) площадь цилиндрической поверхности;
3) массу материальной кривой (провод, цепь, трос).
4) статические моменты, центр тяжести.
5) момент инерции относительно осей.

2.12 Задача о распаде радия

Установлено, что скорость распада радия прямо пропорциональна его количеству в каждый данный момент. Определить закон изменения массы радия в зависимости от времени, если при $t=0$ масса радия была m_0.

Скорость распада определяется следующим образом. Пусть в момент t была масса m, в момент $t+\Delta t$ - масса $m+\Delta m$. За время Δt распалась масса Δm.

Отношение $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ есть средняя скорость распада. Предел этого отношения при $\Delta t\to 0$, т.е. $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta t}=\frac{dm}{dt}$ есть скорость распада радия в момент t. По условию задачи $\frac{dm}{dt}=-km$, где $k-$ коэффициент пропорциональности ($k>0$). Мы ставим знак минус потому, что при увеличении времени масса радия убывает.

Уравнение $\frac{dm}{dt}=-km$ есть уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные: $\frac{dm}{m}=-kdt$

Решая уравнение, получим $\ln m=-kt+\ln C$, откуда $m=Ce^{-kt}$.

Так как при $t=0$ масса радия была m_0, то C должно удовлетворять соотношению $m_0=Ce^{-k\cdot 0}=C$. Подставляя это значение C, получим искомую зависимость массы радия как функцию времени:

$$m=m_0e^{-kt}$$

Коэффициент k определен из наблюдений и получено, что для радия $k=0{,}000436$ (единица измерения времени год). Таким образом, зависимость массы радия от времени выражается формулой:

$$m=m_0e^{-0{,}000436k}$$

Найдем период полураспада радия, т. е. промежуток времени, за который распадается половина первоначальной - массы радия. Подставляя в последнюю формулу вместо m значение $\frac{m_0}{2}$ получим $\frac{m_0}{2}=m_0e^{-0{,}000436k}$, откуда

$$T=\frac{\ln 2}{0{,}000436}\approx 1590 \text{ (лет)}.$$

2.13 Признаки сравнения знакоположительных рядов

Первый признак сравнения.

Даны два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с условием $0\le a_n\le b_n$. Тогда: а) из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; б) из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Второй (предельный) признак сравнения.

Даны два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Если существует конечный, отличный от нуля, предел отношения общих членов этих рядов, тогда данные ряды сходятся или расходятся одновременно.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$.

Решение. Так как $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$ при $x\to 0$ и $1-\cos\frac{\pi}{n}\sim\frac{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}{2}=\frac{\pi^2}{2n^2}$ при $n\to\infty$, то применим предельный признак сравнения, взяв в качестве сравниваемого ряда обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Вычисляем предел отношения общих членов данных рядов:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\pi/n}{1/n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2/2n^2}{1/n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2}{2}=\frac{\pi^2}{2}\ne 0,\ne\infty.$$

Исследуемый ряд сходится, поскольку сходится сравниваемый ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Ответ: ряд сходится.

2.14 Ряды Фурье

Рассмотрим некоторую функцию $y=f(x)$, которая **определена** по крайне мере на промежутке $[-\pi;\pi]$ (а, возможно, и на большем промежутке). Если данная функция интегрируема на отрезке $[-\pi;\pi]$, то её можно разложить в тригонометрический **ряд Фурье**:

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, где a_0,a_n,b_n – так называемые *коэффициенты Фурье*.

При этом число $T=2\pi$ называют **периодом разложения**, а число $l=\frac{T}{2}=\pi$ – **полупериодом разложения**.

Очевидно, что в общем случае ряд Фурье состоит из синусов и косинусов: Нулевой член ряда принято записывать в виде $\frac{a_0}{2}$.

Коэффициенты Фурье рассчитываются по следующим формулам: $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$; $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$; $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$;

Пример. Разложить функцию $f(x) = x+1$ в ряд Фурье на промежутке $-\pi;\pi$. Построить график $f(x) = x+1$, график суммы ряда $S(x)$.

Решение: первая часть задания состоит в разложении функции в ряд Фурье.

В данной задаче период разложения $T = 2\pi$, полупериод $l = \frac{T}{2} = \pi$.

Используя соответствующие формулы, найдём *коэффициенты Фурье*. Теперь нужно составить и вычислить три **определённых интеграла**. Для удобства я буду нумеровать пункты:

1) Первый интеграл самый простой, однако и он уже требует глаз да глаз:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}+\pi-\left(\frac{(-\pi)^2}{2}-\pi\right)\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}+\pi-\left(\frac{\pi^2}{2}-\pi\right)\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}+\pi-\frac{\pi^2}{2}+\pi\right) = \frac{1}{\pi}\cdot 2\pi = 2$$

2) Используем вторую формулу:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)\cos nx dx = (*)$$

Данный интеграл хорошо знаком и **берётся он по частям**

$u = x+1 \Rightarrow du = dx$

$dv = \cos nx dx \Rightarrow v = \int \cos nx dx = \frac{1}{n}\int \cos nx d(nx) = \frac{1}{n}\sin nx$

При нахождении v использован метод подведения функции под знак дифференциала**.**

Используем формулу интегрирования по частям в определённом интеграле $\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$

$$(*) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}(x+1)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\cdot\left[(\pi+1)\sin \pi n-(-\pi+1)\sin(-\pi n)\right]-\frac{1}{n}\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)\cdot\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\cdot(0-0)+\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(0+\frac{1}{n^2}(\cos \pi n-\cos(-\pi n))\right) = \frac{1}{\pi n^2}(\cos \pi n - \cos \pi n) = 0$$

3) Ищем третий коэффициент Фурье:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)\sin nx dx = (*)$$

Получен родственник предыдущего интеграла, который тоже **интегрируется по частям**:

$u = x+1 \Rightarrow du = dx$

$dv = \sin nx dx \Rightarrow v = \int \sin nx dx = \frac{1}{n}\int \sin nx d(nx) = -\frac{1}{n}\cos nx$

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Далее:

$$(*)\overset{(1)}{=}\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}(x+1)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx\right)\overset{(2)}{=}$$

$$=-\frac{1}{\pi n}\cdot\left[(\pi+1)\cos\pi n-(-\pi+1)\cos(-\pi n)\right]+\frac{1}{\pi n}\cdot\frac{1}{n}(\sin nx)\Big|_{-\pi}^{\pi}\overset{(3)}{=}$$

$$=-\frac{1}{\pi n}\cdot\left[(\pi+1)(-1)^n-(-\pi+1)(-1)^n\right]+\frac{1}{\pi n^2}\cdot(\sin\pi n-\sin(-\pi n))\overset{(4)}{=}$$

$$=-\frac{1}{\pi n}\cdot\left[\pi+1+\pi-1\right]\cdot(-1)^n+\frac{1}{\pi n^2}\cdot(0-0)\overset{(5)}{=}-\frac{1}{\pi n}\cdot 2\pi\cdot(-1)^n+0=-\frac{2\pi\cdot(-1)^n}{\pi n}=-\frac{2\cdot(-1)^n}{n}$$

Наконец-то найдены все три коэффициента Фурье: $a_0=2, a_n=0, b_n=-\frac{2}{n}(-1)^n$.

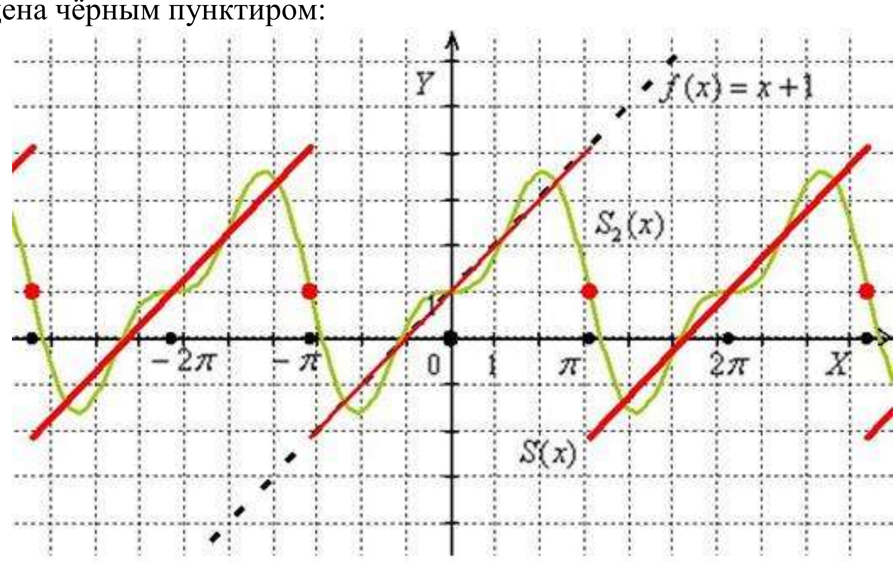
Подставим их в формулу $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ и получим:

$$f(x)=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin nx}{n}.$$

При этом не забываем разделить a_0 пополам. На последнем шаге константа («минус два»), не зависящая от «эн», вынесена за пределы суммы. Таким образом, мы получили разложение функции $f(x)=x+1$ в ряд Фурье на промежутке $(-\pi;\pi]$.

Изучим вопрос сходимости ряда Фурье. Во второй части задачи требуется изобразить график $f(x)=x+1$, график суммы ряда $S(x)$ и график $S_2(x)$.

График функции $f(x)=x+1$ представляет собой обычную **прямую на плоскости**, которая проведена чёрным пунктиром:



Разбираемся с суммой ряда $S(x)$. Как вы знаете, функциональные ряды сходятся к функциям. В нашем случае построенный ряд Фурье $1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin nx}{n}$ при любом значении «икс» сойдётся к функции $S(x)$, которая изображена красным цветом. Данная функция терпит **разрывы 1-го рода** в точках $\ldots x=-3\pi, x=-\pi, x=3\pi\ldots$, но определена и в них (красные точки на чертеже)

Таким образом: $1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin nx}{n}=S(x)$. Легко видеть, что $S(x)$ заметно отличается от исходной функции $f(x)=x+1$.

На практике обычно достаточно изобразить три периода разложения, как это сделано на чертеже. Ну и ещё «обрубки» соседних периодов – чтобы было понятно, что график продолжается.

Особый интерес представляют **точки разрыва 1-го рода**. В таких точках ряд Фурье сходится к изолированным значениям, которые расположены ровнёхонько посередине «скачка» разрыва (красные точки на чертеже). Как узнать ординату этих точек? Сначала найдём ординату «верхнего этажа»: для этого вычислим значение функции в крайней правой точке центрального периода разложения: $f(\pi)=\pi+1$. Чтобы вычислить ординату «нижнего этажа» проще всего взять крайнее левое значение этого же периода: $f(-\pi)=-\pi+1$. Ордината среднего значения – это среднее арифметическое суммы «верха и низа»: $y=\dfrac{f(\pi)+f(-\pi)}{2}=1$. Приятным является тот факт, что при построении чертежа вы сразу увидите, правильно или неправильно вычислена середина.

Построим частичную сумму ряда $S_2(x)$ и заодно повторим смысл термина «сходимость». Мотив известен ещё из урока о **сумме числового ряда**. Распишем наше богатство подробно:

$$S(x)=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin nx}{n}=1-2\cdot\left(\frac{(-1)^1\sin x}{1}+\frac{(-1)^2\sin 2x}{2}+\frac{(-1)^3\sin 3x}{3}+\frac{(-1)^4\sin 4x}{4}+\ldots\right)=$$

$$=1-2\cdot\left(-\sin x+\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 4x}{4}-\ldots\right)$$

Чтобы составить частичную сумму $S_2(x)$ необходимо записать нулевой + ещё два члена ряда. То есть, $S_2(x)=1-2\left(-\sin x+\dfrac{\sin 2x}{2}\right)=1+2\sin x-\sin 2x$.

На чертеже график функции $S_2(x)=1+2\sin x-\sin 2x$ изображен зелёным цветом, и, как видите, он достаточно плотно «обвивает» полную сумму $S(x)$. Если рассмотреть частичную сумму из пяти членов ряда $S_5(x)$, то график этой функции будет ещё точнее приближать красные линии, если сто членов $S_{100}(x)$ – то «зелёный змий» фактически полностью сольётся с красными отрезками и т.д. Таким образом, ряд Фурье сходится к своей сумме $S(x)$.

Интересно отметить, что любая частичная сумма $S_n(x)$ – это **непрерывная функция**, однако полная сумма ряда $S(x)$ всё же разрывна.

Ответ: $f(x)\sim 1-2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sin nx}{n}$.

Во многих задачах функция терпит **разрыв 1-го рода** прямо на периоде разложения:

Разложение функции в ряд* Фурье *на произвольном периоде

Если $f(x)$ - периодическая функция с периодом $2l$, определенная на $[-l;l]$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\frac{m\pi x}{l}+b_m\sin\frac{m\pi x}{l}\right)$$ - ряд Фурье;

где $a_0=\dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)dx$; $a_m=\dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\cos\dfrac{m\pi x}{l}dx$; $b_m=\dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\sin\dfrac{m\pi x}{l}dx$;

Если $l=\pi$, то получаются формулы промежутка $[-\pi,\pi]$, с которых мы начинали.

Алгоритм и принципы решения задачи полностью сохраняются, но возрастает техническая сложность вычислений:

Разложение в ряд Фурье чётных и нечётных функций

С чётными и нечётными функция процесс решения задачи заметно упрощается.

1) $f(x)$ - четная периодическая функция с периодом $2l$, определенная на $[-l;l]$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\frac{m\pi x}{l}\right) \text{ - ряд Фурье,}$$

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,\ a_m=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}dx;$$

2) $f(x)$ - нечетная периодическая функция с периодом $2l$, определенная на $[-l;l]$:

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(b_m\sin\frac{m\pi x}{l}\right) \text{ - ряд Фурье, } b_m=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx.$$

В ряде случаев симметричное продолжение функции надо записать аналитически.

2.15 Геометрические вероятности

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Пусть на плоскости имеется некоторая область G и в ней содержится другая область g. Обозначим меру (длину, площадь и т.д.) области через mes. На практике в качестве такой геометрической меры чаще всего выступает длина или площадь, реже – объём.

Геометрическое определение вероятности. Вероятность попадания точки в область g области G пропорциональна мере (mes) этой части и не зависит от ее расположения и формы: $P(A)=\dfrac{mes\,g}{mes\,G}$.

Рассмотрим событие: A – брошенная на отрезок $[0;1]$ точка, попала в промежуток $[0{,}4;\,0{,}7]$. Очевидно, что общее число исходов выражается длиной большего отрезка: $L=1-0=1\,(ед)$, а благоприятствующие событию A исходы – длиной вложенного отрезка: $l=0{,}7-0{,}4=0{,}3\,(ед)$ По геометрическому определению вероятности:

$$P(A)=\frac{mes\,g}{mes\,G}=\frac{l}{L}=\frac{0{,}3}{1}=0{,}3.$$

Задача. Две грузовые машины могут подойти на погрузку в промежуток времени от 19.00 до 20.30. Погрузка первой машины длится 10 минут, второй – 15 минут. Какова вероятность того, что одной машине придется ждать окончания погрузки другой?

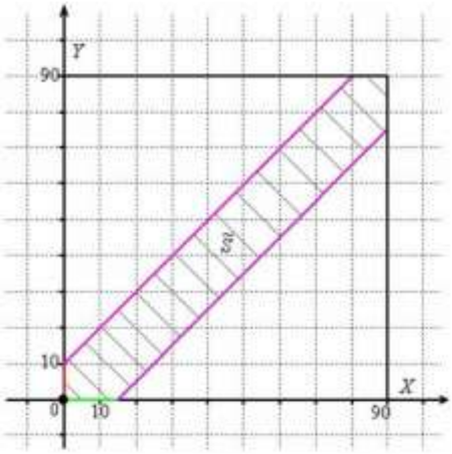
Решение: Во-первых, автомобили могут подойти на погрузку в любом порядке, а во-вторых – в любые моменты времени в течение полутора часов. сначала выясняем длительность временного промежутка, на котором может состояться встреча. В данном случае, как уже отмечено выше, это полтора часа или 90 минут. При этом здесь не имеют особого значения фактические временные рамки – погрузка автомобилей, может состояться, например, утром с 8.30 до 10.00, и решение будет точно таким же.

Вычисления допустимо проводить как в долях часа, так и в минутах. В большинстве случаев удобнее работать с минутами – меньше путаницы.

На первом шаге изобразим прямоугольную систему координат, где в подходящем масштабе построим квадрат размером 90 на 90 единиц; при этом одна из вершин квадрата совпадает с началом координат, а его смежные стороны лежат на координатных осях.

Общему множеству исходов будет соответствовать площадь данного квадрата: $S=90^2=8100$.

Далее по оси Ox от начала координат откладываем время погрузки одного автомобиля (зелёная линия), а по оси Oy – время погрузки другого автомобиля (красная линия):



Теперь из правого конца зелёного отрезка и из верхнего конца красного отрезка под углом 45 градусов проводим две линии внутри квадрата (малиновые отрезки).

Множеству благоприятствующих исходов (когда автомобили «пересекутся» во времени) соответствует площадь $\tilde{S}$ заштрихованной фигуры. Находим площади двух прямоугольных треугольников с помощью формулы $S=\frac{1}{2}ab$, где a,b – длины катетов. Обратите внимание, что в общем случае эти треугольники **не равны**. У нас: верхний треугольник имеет катеты длиной по 80 единиц, нижний треугольник – по 75 единиц. Таким образом, суммарная площадь треугольников составляет:

$$S'=\frac{1}{2}\cdot 80\cdot 80+\frac{1}{2}\cdot 75\cdot 75=3200+2812{,}5=6012{,}5$$

Из площади квадрата вычитаем площади треугольников, получая тем самым благоприятствующую площадь:

$$\tilde{S}=S-S'=8100-6012{,}5=2087{,}5$$

По геометрическому определению:

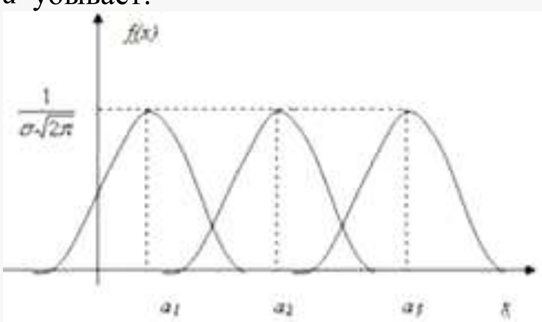
$P(A)=\frac{\tilde{S}}{S}=\frac{2087{,}5}{8100}\approx 0{,}26$ – вероятность того, что одной машине придется ждать окончания погрузки другой.

Ответ: 0,26

2.16 Влияние параметров нормальной кривой на ее вид

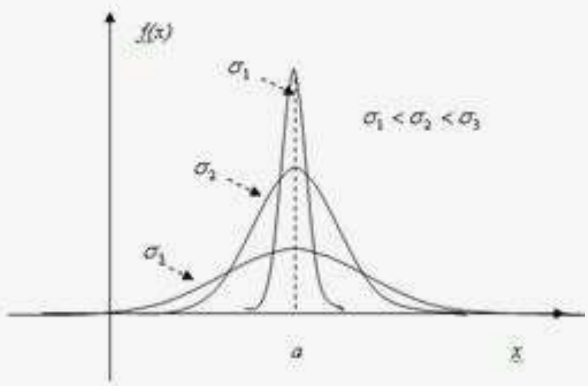
При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Изменение величины параметра a (математического ожидания) не изменяет формы нормальной кривой, а приводит лишь к ее сдвигу вдоль оси Ox: вправо, если a возрастает, и влево, если a убывает:



Максимум функции плотности вероятностей нормального распределения равен $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

Отсюда следует, что с возрастанием σ. Максимальная ордината нормальной кривой убывает, а сама кривая становится более пологой, то есть сжимается к оси *Ох*; при убывании σ нормальная кривая становится более “островершинной” и растягивается в положительном направлении оси *Оу*:



Замечание: При любых значениях параметров a и σ площадь, ограниченная нормальной кривой и осью *Ох*, остается равной единице.

2.17 Способы отбора статистического материала, его группировки

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Для того чтобы выборочная совокупность отражала характеристики генеральной, необходимо обеспечить репрезентативность (представительность) выборки, то есть рассчитать необходимый объем выборки и определить метод и способы отбора. Но как бы тщательно не была организована выборка, как правило, выборочные характеристики в какой-то степени будут отклоняться от характеристик генеральной совокупности, т.е. обычно имеют место ошибки репрезентативности.

Ошибками репрезентативности называют расхождения (разность) между средними, а также относительными показателями выборочной и генеральной совокупностей при условии отсутствия ошибок регистрации. И основная задача выборочного метода сводится к минимизации ошибки репрезентативности.

Как уже отмечалось, сущность выборочного метода заключается в том, что характеристики выборочной совокупности распространяются на всю генеральную совокупность и для формирования выборочной совокупности главными условиями являются:

- равновозможность каждой единицы генеральной совокупности попасть в выборку;

- достаточная численность выборки.

Для обеспечения равной возможности единиц генеральной совокупности попасть в выборку статистика применяет следующие методы и способы.

Методы:

- *повторный* - это такой метод отбора, при котором однажды отобранная единица возвращается обратно в генеральную совокупность и снова участвует в выборке. При повторном отборе сохраняется постоянная вероятность попасть в выборку для всех единиц;

- *бесповторный* - это такой метод отбора, при котором отобранная однажды единица в совокупность не возвращается, и вероятность каждой новой единицы попасть в выборку увеличивается.

Существуют различные способы формирования выборочной совокупности:

1. *Случайный отбор*. При этом способе каждая единица из генеральной совокупности отбирается в состав выборочной случайно (жеребьевка, использование таблиц случайных чисел).

2. *Механический отбор* - исходит из учета некоторых особенностей расположения объектов в генеральной совокупности, их упорядоченности (по списку, номеру, алфавиту). Механическая выборка осуществляется путем отбора отдельных объектов генеральной совокупности через определенный интервал (каждый 10 или 20). Если расположение объектов в генеральной совокупности носит случайный характер, то механическая выборка по содержанию аналогична случайному отбору. При механическом отборе, как правило, применяется только бесповторная выборка.

3. *Типический отбор*. При типическом отборе вся генеральная совокупность на основе предварительного анализа изучаемой совокупности разбивается на группы по какому-либо существенному признаку, и непосредственный отбор единиц производится в пределах отдельных типических групп. При этом способе отбора генеральная совокупность расчленяется на однородные в некотором отношении группы, которые имеют свои характеристики, и вопрос сводится к определению объема выборок из каждой группы. Может быть равномерная выборка - при этом способе из каждой типической группы отбирается одинаковое число единиц ($n_1 = n_2 = m_n$). Такой подход оправдан лишь при равенстве численностей исходных типических групп. В противном случае выборки могут оказаться не репрезентативными.

При проведении типологической выборки непосредственный отбор из каждой группы, как правило, проводится методом случайного отбора.

4. *Серийный отбор*. В некоторых случаях характер размещения объектов в генеральной совокупности может быть таким, что они расположены сериями (ящики, мешки, классы). В таких случаях формирование выборочной совокупности путем отбора отдельных единиц нецелесообразно. Проще организовать отбор сериями и провести сплошное обследование по способу механической или случайной выборки.

5. *Многофазная выборка*. Она характеризуется тем, что на всех ступенях выборки сохраняется одна и та же единица отбора, но проводится несколько фаз (стадий) выборочных обследований, которые различаются между собой широтой программы обследования. Важной особенностью является возможность использовать данные первой фазы наблюдения для дополнительной характеристики и уточнения результатов, полученных на 2, 3 и далее фазах.

На практике чаще всего приходится сочетать различные виды и способы статистического наблюдения.

Необходимым условием научной организации выборочного наблюдения является требование достаточного объема выборки. Логический смысл этого требования вполне очевиден. Чем больше единиц будет взято для обследования, тем достовернее они смогут отобразить генеральную совокупность. Объем выборки (n) при достаточно большой численности генеральной совокупности (больше 1000 элементов) рассчитывается по формуле: $n = t^2$ p (100% - p), где: t^2 - критерий достоверности, зависящий от надежности оценок (при надежности, равной 95%, критерий равен ~ 2); p - показатель распространенности явления в %; - требуемая точность оценок в %.

2.18 Доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения нормального распределения

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Для построения *интервальной оценки* рассмотрим событие, заключающееся в том, что отклонение точечной оценки параметра θ^* от истинного значения этого параметра θ по абсолютной величине не превышает некоторую положительную величину Δ.

Вероятность такого события $P(|\theta-\theta^*|<\Delta)=\gamma$. Заменив неравенство $|\theta-\theta^*|<\Delta$ на равносильное, получим: $P(\theta^*-\Delta<\theta<\theta^*+\Delta)=\gamma$.

Вероятность того, что *доверительный интервал* $(\theta^*-\Delta\,,\ \theta^*+\Delta)$ заключает в себе (покрывает) неизвестный параметр θ равна γ и называется *доверительной вероятностью* или *надежностью* интервальной оценки. Величину Δ называют *точностью* оценки.

Доверительный интервал: $I_\gamma=\begin{cases}(s\cdot(1-q);\ s\cdot(1+q)), & при\, q<1\\ (0;\ s\cdot(1+q)), & при\, q>1\end{cases}$, где

s – исправленное среднее квадратическое отклонение,

$q=q(n;\gamma)$ – число, определяемое по таблице приложений,

n – объем выборки, γ – надежность (доверительная вероятность).

Таблица значений функции $q_\gamma=q\,(\gamma,n)$

	γ					γ		
n	0,95	0,99	0,999		n	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64		20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88		25	0,33	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98		30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42		35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06		40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80		45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60		50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45		60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33		70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23		80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15		90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07		100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01		150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96		200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92		250	0,089	0,120	0,162

2.19 Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Пусть из генеральной совокупности, распределенной нормально, извлечена выборка объема n и по ней найден выборочный коэффициент корреляции $r_B\neq 0$. Необходимо проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции. Если нулевая гипотеза принимается, то это означает, что рассматриваемые признаки не коррелированные; в противном случае – коррелированные.

Замечание. Для того чтобы при уровне значимости α проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции, надо вычислить наблюдаемое значение критерия

$$T_{набл}=\frac{r_B\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_B^2}}$$

и по таблице критических точек распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k=n-2$ найти критическую точку $T_{кр}(\alpha;k)$ двусторонней критической области. Если $|T_{набл}|<T_{кр}$ – нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу; если $|T_{набл}|>T_{кр}$ – нулевую гипотезу отвергают.

Пример. Для двух признаков Х и У были получены данные, записанные в таблице. Найти выборочный коэффициент корреляции и при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу H_0 о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции.

Решение. В случае малых выборок расчет коэффициента корреляции можно проводить по формуле

$$r_B = \frac{\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \overline{x})^2} \cdot \sqrt{\sum (y_i - \overline{y})^2}}.$$

Промежуточные вычисления удобно располагать в виде таблицы:

№ набл.	x_i	y_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$y_i - \overline{y}$	$(y_i - \overline{y})^2$	$(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$
1	21	5,8	– 7	49	0,9	0,81	– 6,3
2	23	5,6	– 5	25	0,7	0,49	– 3,5
3	25	5,1	– 3	9	0,2	0,04	– 0,6
4	27	5,0	– 1	1	0,1	0,01	– 0,1
5	29	4,9	1	1	0	0	0
6	31	4,6	3	9	– 0,3	0,09	– 0,9
7	33	4,3	5	25	– 0,6	0,36	– 3
8	35	3,9	7	49	– 1	1	– 7
$\sum$	224	39,2	0	168	0	2,8	– 21,4

Вычисляем средние:

$$\overline{x} = \frac{224}{4} = 28; \quad \overline{y} = \frac{39{,}2}{8} = 4{,}9.$$

Теперь заполняем последние пять столбцов таблицы. Суммируя элементы в соответствующих столбцах, находим:

$$\sum (x_i - \overline{x})^2 = 168; \ \sum (y_i - \overline{y})^2 = 2{,}8; \ \sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = -21{,}4.$$

Подставляя вычисленные значения в выражение для коэффициента корреляции, получаем:

$$r_B = \frac{-21{,}4}{\sqrt{168} \cdot \sqrt{2{,}8}} = -0{,}99.$$

По формуле $T_{набл} = \dfrac{r_B \sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - r_B^2}}$ находим наблюдаемое значение критерия:

$$T_{набл} = \frac{-0{,}99\sqrt{8-2}}{\sqrt{1 - (-0{,}99)^2}} \approx -17{,}2.$$

По таблице критических точек распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $k = 8 - 2 = 6$ находим критическую точку $T_{кр}(\alpha; k)$ двусторонней критической области:

$$T_{кр}(0{,}05; 6) = 2{,}45.$$

Так как $|T_{набл}| = |-17{,}2| = 17{,}2 > T_{кр} = 2{,}45$, то нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции отвергаем, т.е. можно утверждать, что между признаками X и Y существует линейная корреляционная зависимость.

Ответ: $r_B = -0{,}99$; нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции отвергаем.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЗАНЯТИЯМ

3.1 Практические занятия по теме «Линейная алгебра»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Виды матриц.
2. Действия над матрицами.
3. Определители второго и третьего порядка.
4. Миноры, алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.
5. Нахождение обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений.
6. Ранг матрицы.
7. Системы линейных уравнений.
8. Методы решения СЛУ.
9. Теорема Кронекера – Капелли.

3.2 Практические занятия по теме «Векторная алгебра»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Виды векторов.
2. Линейные операции над векторами.
3. ПДСК. Базис. Координаты вектора.
4. Скалярное произведение векторов, его свойства, приложения.
5. Векторное произведение векторов, его свойства, приложения.
6. Смешанное произведение векторов, его свойства, приложения.

3.3 Практические занятия по теме «Линии на плоскости»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Способы задания прямой линии на плоскости.
2. Взаимное расположение двух прямых.
3. Окружность.
4. Эллипс.
5. Гипербола.
6. Парабола.

3.4 Практические занятия по теме «Линии в пространстве»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Плоскость в пространстве. Способы задания плоскости в пространстве.
2. Взаимное расположение плоскостей.
3. Прямая в пространстве. Способы задания прямой в пространстве.
4. Взаимное расположение прямой и плоскости.
5. Понятие поверхности в пространстве.

3.5 Практические занятия по теме «Функция одной переменной»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Основные понятия.
2. Способы задания функции.
3. Основные свойства функции.
4. Элементарные и неэлементарные функции.

5. Понятие последовательности.
6. Предел числовой последовательности.
7. Предел функции в точке.
8. Правила раскрытия неопределенностей.
9. Бесконечно малые функции, их свойства.
10. Бесконечно большие функции, их свойства.
11. Замечательные пределы.
12. Односторонние пределы.
13. Непрерывность функции в точке.
14. Точки разрыва.
15. Асимптоты графика функции.

3.6 Практические занятия по теме «Производная и ее приложения»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Понятие производной.
2. Геометрический и механический смыслы производной.
3. Правила и формулы дифференцирования.
4. Производные высших порядков.
5. Понятие дифференциала. Геометрический смысл дифференциала.
6. Правило Лопиталя.
7. Исследование на монотонность функции, точки экстремума.
8. Нахождение наименьшего и наибольшего значений функции на отрезке.
9. Исследование на вогнутость и выпуклость функции, точки перегиба.
10. Общий план исследования функции и построения графика
11. Длина дуги кривой.
12. Угол смежности и кривизна.
13. Радиус и круг кривизны.
14. Эволюта и эвольвента.

3.7 Практические занятия по теме «Функции нескольких переменных»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. ОДЗ функции двух переменных и ее геометрическое изображение.
2. Частные приращения.
3. Частные производные первого и второго порядка. Теорема Шварца.
4. Полный дифференциал.
5. Производная по направлению. Градиент.
6. Касательная плоскость и нормаль.
7. Понятие экстремума функции двух переменных.
8. Необходимое и достаточное условия экстремума.
9. Метод наименьших квадратов.

3.8 Практические занятия по теме «Комплексные числа»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Формы записи комплексных чисел.
2. Действия над комплексными числами.
3. Понятие функции комплексного аргумента.
4. Понятие многочлена. Основная теорема алгебры.
5. Решение уравнений во множестве комплексных чисел.

3.9 Практические занятия по теме «Неопределенный интеграл»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Первообразная функция и ее свойства.
2. Понятие неопределенного интеграла, основные свойства.
3. Таблица интегралов.
4. Методы интегрирования: непосредственное интегрирование, замена переменной, интегрирование по частям.
5. Интегрирование простейших рациональных дробей.
6. Интегрирование рациональных функций.
7. Интегрирование тригонометрических и иррациональных функций.

3.10 Практические занятия по теме «Определенный и несобственный интеграл»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Понятие определенного интеграла.
2. Геометрический и физический смыслы.
3. Основные свойства определенного интеграла.
4. Формула Ньютона – Лейбница.
5. Приемы интегрирования.
6. Приближенное вычисление определенных интегралов.
7. Вычисление площадей плоских кривых.
8. Нахождение объема тела вращения.
9. Вычисление длины дуги кривой.
10. Вычисление работы переменной силы.
11. Нахождение давления.
12. Вычисление пути при неравномерном движении.
13. Несобственные интегралы первого рода.
14. Несобственные интегралы второго рода.
15. Геометрический смысл несобственных интегралов, его применение.

3.11 Практические занятия по теме «Кратные интегралы»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Способы вычисления двойного интеграла.
2. Вычисление площади плоской кривой.
3. Нахождение объема пространственного тела.
4. Нахождение координат центра тяжести однородной пластины.
5. Вычисление тройного интеграла.
6. Вычисление криволинейного интеграла.
7. Нахождение интеграла по поверхности.

3.12 Практические занятия по теме «Дифференциальные уравнения первого порядка»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Частные и общие решения.
2. ДУ первого порядка. Задача Коши.
3. ДУ с разделенными и разделяющимися переменными.

4. ЛДУ первого порядка. Методы Лагранжа и Бернулли.
5. Уравнения Бернулли. Метод Бернулли.
6. Однородные ДУ и приводящиеся к ним.
7. ДУ в полных дифференциалах.

3.13 Практические занятия по теме «Дифференциальные уравнения второго порядка»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.
2. Линейно зависимые и линейно независимые функции.
3. ФСР. Определитель Вронского.
4. Структура общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.
5. Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.
6. Метод Лагранжа решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.
7. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка второго порядка с правой частью специального вида.

3.14 Практические занятия по теме «Ряды»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Понятие числового ряда.
2. Примеры сходящихся и расходящихся рядов.
3. Свойства рядов.
4. Признаки сходимости знакоположительных рядов.
5. Эталонные ряды.
6. Понятие знакочередующегося ряда.
7. Признак Лейбница.
8. Знакопеременные ряды. Достаточный признак сходимости.
9. Абсолютная и условная сходимость.
10. Понятие функционального ряда.
11. Равномерная сходимость.
12. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус и интервал сходимости.
13. Ряд Тейлора и Маклорена.
14. Применение рядов.

3.15 Практические занятия по теме «Случайные события»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Комбинаторика.
2. Испытание и событие. Виды событий, их классификация.
3. Понятие вероятности случайного события. Свойства вероятности.
4. Сумма и произведение событий.
5. Теоремы сложения и умножения.
6. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.
7. Схема Бернулли. Формула Бернулли.
8. Локальная теорема Муавра – Лапласа.

9. Формула Пуассона.
10. Интегральная теорема Лапласа.

3.16 Практические занятия по теме «Случайные величины»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Понятие случайной величины. Ее виды.
2. Закон распределения и многоугольник распределения дискретной случайной величины.
3. Числовые характеристики, их свойства.
4. Виды распределений дискретной случайной величины: биномиальное распределение, распределение Пуассона, геометрическое и гипергеометрическое распределения.
5. Интегральная функция распределения, ее свойства
6. Дифференциальная функция распределения непрерывной случайной величины, ее свойства.
7. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.
8. Виды распределений непрерывной случайной величины: равномерное распределение, показательное распределение, нормальный закон распределения, его параметры.
9. Кривая Гаусса. Ее свойства и график.

3.17 Практические занятия по теме «Элементы математической статистики»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Задачи математической статистики.
2. Генеральная совокупность и выборка.
3. Выборочные характеристики.
4. Точечные оценки. Несмещенные и состоятельные оценки.
5. Доверительный интервал. Надежность.
6. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения.
7. Доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения нормального распределения.
8. Корреляционная зависимость.
9. Корреляционная таблица.
10. Коэффициент корреляции.
11. Линейная регрессия, ее параметры.
12. Понятие статистической гипотезы. Нулевая и альтернативная гипотезы.
13. Статистические критерии проверки гипотез. Мощность критерия.
14. Параметрические и непараметрические критерии.

Методические рекомендации по выполнению индивидуальных домашних заданий

РГР-1 «Производная и ее приложения»

1. Найти производные следующих функций.

а) $y = x^3 - \dfrac{1}{x^4} + 6\sqrt[3]{x^2}$.

Решение.

Перепишем данную функцию, введя дробные и отрицательные показатели: $y = x^3 - x^{-4} + 6x^{\frac{2}{3}}$.

Применяя правило дифференцирования алгебраической суммы и формулу дифференцирования степенной функции и, учитывая, что $x'_x = 1$, имеем:

$$y' = 3x^2 - (-4)x^{-5} + 6 \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = 3x^2 + \frac{4}{x^5} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}}.$$

б) $y = \sqrt[4]{1 + 9x - x^2}$.

Решение.

Данная функция является сложной; она может быть представлена так: $y = \sqrt[4]{u} = u^{\frac{1}{4}}$, где $u = 1 + 9x - x^2$. Применим формулу дифференцирования сложной степенной функции $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$:

$$y' = \frac{1}{4} u^{\frac{1}{4}-1} \cdot u' = \frac{1}{4} (1 + 9x - x^2)^{-\frac{3}{4}} \cdot (1 + 9x - x^2)' = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{(1 + 9x - x^2)^3}} \cdot (9 - 2x),$$

$$\Rightarrow y' = \frac{9 - 2x}{4 \cdot \sqrt[4]{(1 + 9x - x^2)^3}}$$

в) $y = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x+5}$.

Решение.

Применяя формулу дифференцирования сложной логарифмической функции $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$, где $u = \frac{x+1}{x+5}$, а затем правило дифференцирования частного двух функций $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, получим:

$$y' = \left(\frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x+5}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \left(\ln \frac{x+1}{x+5}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{x+1}{x+5}} \cdot \left(\frac{x+1}{x+5}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{x+5}{x+1} \cdot \frac{(x+1)'(x+5) - (x+1)(x+5)'}{(x+5)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1 \cdot (x+5) - (x+1) \cdot 1}{x+5} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \frac{x+5-x-1}{x+5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \frac{4}{x+5} = \frac{2}{(x+1)(x+5)},$$

$$y' = \frac{2}{(x+1)(x+5)}.$$

2. Исследовать функцию $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ методами дифференциального исчисления и построить ее график.

Решение.

Исследование функции проведем по следующей схеме:

а) Найдем область определения функции.

б) Исследуем функцию на непрерывность.

в) Найдем асимптоты кривой.

г) Исследуем на четность или нечетность.

д) Найдем интервалы возрастания и убывания функции и точки экстремума.

е) Найдем интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба.

Реализуем указанную схему:

а) Областью определения данной функции являются все действительные числа: $D(y) = R$.

б) Данная функция является элементарной, поэтому она непрерывна на своей области определения, т.е. на множестве действительных чисел.

в) Так как область определения функции – все действительные числа, то у графика нет вертикальных асимптот.

Для определения уравнения наклонной асимптоты $y = kx + b$ воспользуемся формулами:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x};\ b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right).$$

В данном случае:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{(x^2+1)\cdot x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2+1} - 0\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{\infty^2+1} = 0.$$

Итак, уравнением асимптоты является $y = 0\cdot x + 0 = 0$. Следовательно, наклонная асимптота вырождается в горизонтальную.

г) Область определения симметрична относительно нуля, поэтому для установления четности или нечетности в функцию вместо аргумента $x \in D(y)$ подставим $(-x) \in D(y)$:

$$y(-x) = \frac{1}{(-x)^2+1} = \frac{1}{x^2+1} = y(x).$$

Так как $y(-x) = y(x)$, то данная функция является четной.

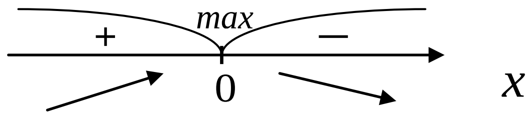
д) Для исследования функции на возрастание и убывания и экстремум найдем ее первую производную:

$$y' = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = \frac{1'\cdot(x^2+1) - 1\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}.$$

Приравняем производную первого порядка к нулю и найдем критические точки первого рода:

$$y' = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \quad\Rightarrow\quad -2x = 0 \quad\Rightarrow\quad x = 0.$$

Тем самым имеем одну критическую точку, которая разбивает числовую ось на два интервала: $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$.



Определяем знаки производной первого порядка в каждом интервале:

$$y'(-1) = \frac{-2\cdot(-1)}{\left((-1)^2+1\right)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} > 0;$$

$$y'(1) = \frac{-2\cdot 1}{\left(1^2+1\right)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} < 0.$$

Производная y' в первом интервале положительна, а во втором – отрицательна. Следовательно, в первом интервале функция возрастает, а во втором – убывает. При переходе через точку $x=0$ производная меняет свой знак с плюса на минус. Следовательно, в этой точке функция имеет максимум. Найдем значения функции в точке максимума:

$$y(0) = \frac{1}{0^2+1} = 1.$$

Значит, $A(0;1)$ – точка максимума.

е) Для определения точек перегиба графика функции и интервалов выпуклости и вогнутости найдем производную второго порядка:

$$y'' = \left(\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}\right)' = \frac{(-2x)'\cdot\left(x^2+1\right)^2 - (-2x)\cdot\left(\left(x^2+1\right)^2\right)'}{\left(\left(x^2+1\right)^2\right)^2} =$$

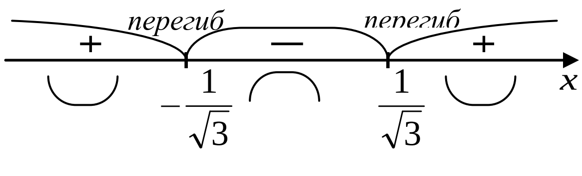
$$= \frac{-2\cdot\left(x^2+1\right)^2 + 2x\cdot 2\cdot\left(x^2+1\right)\cdot\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^4} = \frac{-2\left(x^2+1\right)^2 + 8x^2\cdot\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^4} =$$

$$= \frac{\left(x^2+1\right)\cdot\left(-2\left(x^2+1\right)+8x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^4} = \frac{6x^2-2}{\left(x^2+1\right)^3}.$$

Приравняем вторую производную к нулю и находим критические точки второго рода:

$$y''=0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x^2-2=0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Найденные две критические точки второго рода разбивают всю числовую ось на три интервала: $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$.



Определяем знаки производной второго порядка в каждом интервале:

$$y''(-1) = \frac{6\cdot(-1)^2-2}{\left((-1)^2+1\right)^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} > 0;$$

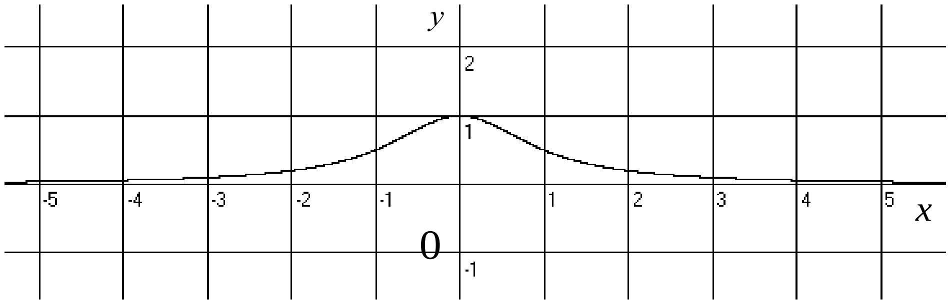
$$y''(0) = \frac{6\cdot 0^2-2}{\left(0^2+1\right)^3} = \frac{-2}{1} = -2 < 0;$$

$$y''(1)=\frac{6\cdot 1^2-2}{(1^2+1)^3}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}>0\,.$$

В первом и третьем интервалах производная второго порядка положительна, а во втором – отрицательна. Следовательно, в первом и третьем интервале график функции является вогнутым, а во втором – выпуклым. Так как при переходе через критические точки второго рода $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ вторая производная меняет свой знак, то у графика функции две точки перегиба. Вычислим ординаты этих точек.

$$y\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}=\frac{1}{\frac{1}{3}+1}=\frac{3}{4},\quad y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}=\frac{1}{\frac{1}{3}+1}=\frac{3}{4}.$$

Итак, $B\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{3}{4}\right)$ и $C\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{3}{4}\right)$ – точки перегиба графика функции.



РГР-2 «Частные производные и их приложения функции двух переменных»

Задание. Для функции $z=\frac{6}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$. Требуется: 1) найти область определения функции; 2) вычислить частные производные второго порядка, проверив равенство $z''_{xy}=z''_{yx}$; 3) найти производную функции в точке $M_0(1;\sqrt{2})$ в направлении вектора $\vec{s}=4\vec{i}-2\vec{j}$; 4) вычислить модуль градиента функции в точке $M_0(1;\sqrt{2})$.

Решение. 1) Функция двух переменных существует при тех значениях переменных x и y, при которых $4-x^2-y^2>0$. Найдем границу области определения функции: $4-x^2-y^2=0$, т.е. $x^2+y^2=4$. Таким образом, границей является окружность с центром в начале координат и радиусом, равным двум. Данная окружность разделила всю плоскость xOy на две части: внутреннюю часть и внешнюю. Неравенству $4-x^2-y^2>0$ удовлетворяют координаты любой точки плоскости, находящиеся внутри окружности. Следовательно, она и является областью определения данной функции. Изобразим ее на рисунке:

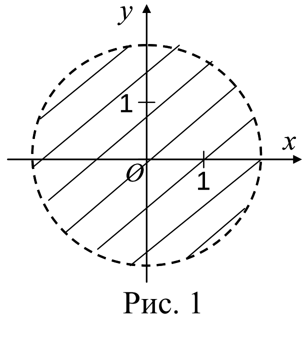


Рис. 1

2) Найдем частные производные первого порядка z'_x и z'_y. При нахождении частной производной по переменной x, второй аргумент y считается постоянным. Таким образом:

$$z'_x = \left(\frac{6}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)'_x = \left(6\cdot(4-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\right)'_x = 6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(4-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}-1}\cdot(4-x^2-y^2)'_x =$$

$$= (-3)(4-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2x) = 6x\cdot(4-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{6x}{\sqrt{(4-x^2-y^2)^3}}.$$

Аналогично, при нахождении частной производной по переменной y, второй аргумент x считается постоянным:

$$z'_y = \left(\frac{6}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)'_y = \left(6\cdot(4-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\right)'_y = 6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(4-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}-1}\cdot(4-x^2-y^2)'_y =$$

$$= (-3)(4-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2y) = 6y\cdot(4-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{6y}{\sqrt{(4-x^2-y^2)^3}}.$$

Находим частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = \left(6x\cdot(4-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}\right)'_x = (6x)'_x\cdot(4-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}} + 6x\cdot\left((4-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}\right)'_x =$$

$$= 6\cdot(4-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}} + 6x\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(4-x^2-y^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot(4-x^2-y^2)'_x =$$

$$= 6\cdot(4-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}} + 6x\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(4-x^2-y^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot(-2x) =$$

$$= \frac{6}{\sqrt{(4-x^2-y^2)^3}} + \frac{18x^2}{\sqrt{(4-x^2-y^2)^5}} = \frac{6\cdot(4-x^2-y^2)+18x^2}{\sqrt{(4-x^2-y^2)^5}} = \frac{24+12x^2-6y^2}{\sqrt{(4-x^2-y^2)^5}}.$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = \left(6y\cdot(4-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}\right)'_y = (6y)'_y\cdot(4-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}} + 6y\cdot\left((4-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}\right)'_y =$$

$$= 6\cdot(4-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}} + 6y\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(4-x^2-y^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot(4-x^2-y^2)'_y =$$

$$= 6\cdot(4-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}} + 6y\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(4-x^2-y^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot(-2y) =$$

$$= \frac{6}{\sqrt{(4-x^2-y^2)^3}} + \frac{18y^2}{\sqrt{(4-x^2-y^2)^5}} = \frac{6\cdot(4-x^2-y^2)+18y^2}{\sqrt{(4-x^2-y^2)^5}} = \frac{24+12y^2-6x^2}{\sqrt{(4-x^2-y^2)^5}}.$$

Вычислим смешанные производные второго порядка:

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = \left(6x\cdot(4-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}\right)'_y = 6x\cdot\left((4-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}\right)'_y =$$

$$= 6x\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(4-x^2-y^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot(4-x^2-y^2)'_y = 6x\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(4-x^2-y^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot(-2y) =$$

$$= -\frac{18xy}{\sqrt{(4-x^2-y^2)^5}}.$$

$$z''_{yx}=\left(z'_y\right)'_x=\left(6y\cdot\left(4-x^2-y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right)'_x=6y\cdot\left(\left(4-x^2-y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right)'_x=$$

$$=6y\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(4-x^2-y^2\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot\left(4-x^2-y^2\right)'_x=6y\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(4-x^2-y^2\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot(-2x)=$$

$$=-\frac{18xy}{\sqrt{\left(4-x^2-y^2\right)^5}}.$$

Итак, смешанные частные производные равны между собой.

3) Вначале вычислим направляющие косинусы вектора $\vec{s}=4\vec{i}-2\vec{j}$ по формулам:

$$\cos\alpha=\frac{s_x}{|\vec{s}|},\ \cos\beta=\frac{s_y}{|\vec{s}|},\ \text{где } |\vec{s}|=\sqrt{s_x^{\ 2}+s_y^{\ 2}}.$$

Получаем:

$$|\vec{s}|=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5},$$

$$\cos\alpha=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5},\ \cos\beta=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Далее находим значения частных производных первого порядка данной функции в точке $M_0\left(1;\sqrt{2}\right)$. Так как $z'_x=\dfrac{6x}{\sqrt{\left(4-x^2-y^2\right)^3}}$ и $z'_y=\dfrac{6y}{\sqrt{\left(4-x^2-y^2\right)^3}}$, то

$$z'_x\left(1;\sqrt{2}\right)=\frac{6\cdot 1}{\sqrt{\left(4-1^2-\sqrt{2}^2\right)^3}}=\frac{6}{1}=6;$$

$$z'_y\left(1;\sqrt{2}\right)=\frac{6\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{\left(4-1^2-\sqrt{2}^2\right)^3}}=\frac{6\sqrt{2}}{1}=6\sqrt{2}.$$

Производная функции $z=f(x;y)$ в точке $M_0\left(x_0;y_0\right)$ в направлении вектора $\vec{s}$ находится по формуле:

$$\frac{\partial z}{\partial s}\left(M_0\right)=z'_x\left(M_0\right)\cdot\cos\alpha+z'_y\left(M_0\right)\cdot\cos\beta.$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}\left(1;\sqrt{2}\right)=6\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}+6\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{12\sqrt{5}+6\sqrt{10}}{5}\approx 9{,}2.$$

4) Градиент функции $z=f(x;y)$ в точке $M_0\left(x_0;y_0\right)$ можно найти по формуле:

$$\overrightarrow{grad\,z}\left(M_0\right)=z'_x\left(M_0\right)\cdot\vec{i}+z'_y\left(M_0\right)\cdot\vec{j}.$$

$$\overrightarrow{grad\,z}\left(1;\sqrt{2}\right)=6\cdot\vec{i}+6\sqrt{2}\cdot\vec{j}.$$

Тогда:

$$\left|\overrightarrow{grad\,z}\right|\left(1;\sqrt{2}\right)=\sqrt{6^2+\left(6\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{108}\approx 10{,}4.$$

Ответ: 1) $D(z)$: $4-x^2-y^2>0$; 2) $z''_{xx}=\dfrac{24+12x^2-6y^2}{\sqrt{\left(4-x^2-y^2\right)^5}}$, $z''_{yy}=\dfrac{24+12y^2-6x^2}{\sqrt{\left(4-x^2-y^2\right)^5}}$; $z''_{xy}=z''_{yx}=-\dfrac{18xy}{\sqrt{\left(4-x^2-y^2\right)^5}}$; 3) $\dfrac{\partial z}{\partial s}\left(1;\sqrt{2}\right)\approx 9{,}2$; 4) $\left|\overrightarrow{grad\,z}\right|\left(1;\sqrt{2}\right)\approx 10{,}4$.

РГР- 3 «Определенный интеграл и его приложения»

Задание 1. Вычислить определенный интеграл.

$$\text{а) } \int_0^5 \frac{3dx}{\sqrt[4]{3x+1}}\text{; б) } \int_{-1}^{0} (x+1)\cdot e^{-2x}dx.$$

Решение.

а) Сделаем замену переменной. Пусть $\sqrt[4]{3x+1} = z$, тогда $3x+1 = z^4$ и $3dx = 4z^3dz$.
Определим пределы интегрирования для новой переменной z.
При $x = 0$ переменная $z_H = 1$ (нижний предел).
При $x = 5$ переменная $z_B = 2$ (верхний предел).
Следовательно,

$$\int_0^5 \frac{3dx}{\sqrt[4]{3x+1}} = \int_1^2 \frac{4z^3dz}{z} = \int_1^2 4z^2dz = 4\frac{z^3}{3}\Bigg|_1^2 = 4\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}.$$

б) $\int_0^1 x\cdot e^x dx$.

Решение. Применим формулу $\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$ для определенного интеграла. Положим $u = x$ и $dv = e^x dx$, тогда $du = dx$, $v = \int e^x dx = e^x$.

Получим:

$$\int_0^1 x\cdot e^x dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - \left(e^1 - e^0\right) = 1.$$

Задание 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 2x - \frac{x^2}{2} + 6$ и прямой $y = x + 2$

Решение. Площадь фигуры, ограниченная сверху непрерывной кривой $y = f(x)$, снизу – непрерывной кривой $y = \varphi(x)$, слева – прямой $x = a$ и справа прямой $x = b$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b \left[f(x) - \varphi(x)\right]dx$$

Для построения прямой достаточно двух найденных точек, но для параболы этих данных недостаточно. Поэтому найдем дополнительные точки:

а) вершина параболы $y = ax^2 + bx + c$ расположена в точке с координатами $\left(-\frac{b}{2a}; y\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$; в данной задаче парабола $y = -\frac{x^2}{2} + 2x + 6$ $\left(a = -\frac{1}{2},\ b = 2\right)$ имеет вершину в точке $\left(2; y\left(2\right)\right)$, т.е. $\left(2;8\right)$.

б) Так как $a = -\frac{1}{2} < 0$, следовательно, ветви параболы направлены вниз, и она пересекает ось абсцисс. Найдём точки пересечения с осью Ox:

$$y = 0, \quad \Rightarrow \quad -\frac{x^2}{2} + 2x + 6 = 0, \quad D = 2^2 - 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 6 = 16,$$

$$x_1 = \frac{-2+4}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{-1} = -2, \quad x_2 = \frac{-2-4}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-6}{-1} = 6.$$

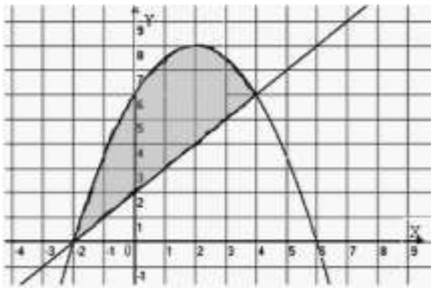


Рис. 1.

В тех случаях, когда заданные кривые образуют замкнутую область, и прямые $x=a$ и $x=b$ не заданы, то числа a и b совпадают с абсциссами точек пересечения кривых. Находим точки пересечения заданных линий. Для этого решаем совместно систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 2x - \dfrac{x^2}{2} + 6 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

$$x + 2 = 2x - \frac{x^2}{2} + 6$$

$$2x + 4 = 4x - x^2 + 12$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

откуда $x_1 = -2$ и $x_2 = 4$; следовательно, $a = -2$ и $b = 4$.

Применяя формулу, имеем:

$$S = \int_{-2}^{4} (2x - \frac{x^2}{2} + 6 - x - 2)dx = \int_{-2}^{4} (x - \frac{x^2}{2} + 4)dx = (\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 4x)\Big|_{-2}^{4} =$$

$$= 8 - \frac{64}{6} + 16 - 2 - \frac{8}{6} + 8 = 30 - 12 = 18.$$

Следовательно, искомая площадь S = 18 кв. ед.

Задание 3. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной параболой $y = \dfrac{x^2}{3} + 1$, прямыми $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

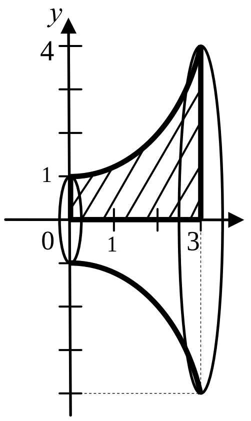
Решение.

а) Объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox, криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$, вычисляется по формуле:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Подставляя в формулу $a = 0, b = 3$ и $y = \dfrac{x^2}{3} + 1$ (рис. 10), получим:

$$V_x = \pi \int_0^3 \left(\frac{x^2}{3} + 1 \right)^2 dx = \pi \int_0^3 \left(\frac{x^4}{9} + \frac{2x^2}{3} + 1 \right) dx = \pi \left(\frac{x^5}{45} + \frac{2x^3}{9} + x \right)\Bigg|_0^3 = \pi \left(\frac{27}{5} + 6 + 3 \right) = 14{,}4\pi .$$



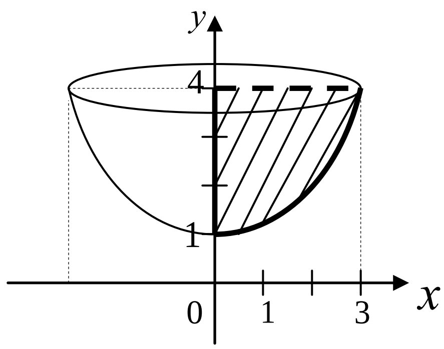


Рис. 1 Рис. 2

б) Объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy, криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x = g(y)$, осью Oy и прямыми $y = a$ и $y = b$, вычисляется по формуле:

$$V_y = \pi \int_a^b x^2 dy .$$

Из уравнения параболы $y = \dfrac{x^2}{3} + 1$ выразим x^2:

$$\frac{x^2}{3} = y - 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 3y - 3 .$$

По рисунку 11, определяем: $a = 1, b = 4$.

Тогда:

$$V_y = \pi \int_1^4 (3y - 3) dy = \pi \left(\frac{3y^2}{2} - 3y \right) \Bigg|_1^4 = \pi \cdot \left(\frac{3 \cdot 4^2}{2} - 3 \cdot 4 \right) - \pi \cdot \left(\frac{3 \cdot 1^2}{2} - 3 \cdot 1 \right) = 13{,}5\pi .$$

Ответ: а) $V_x = 14{,}4\pi$ куб. ед.; б) $V_y = 13{,}5\pi$ куб. ед.

РГР-4 «Непрерывная случайная величина»

Задание 1. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0 \quad при \quad x \le 1 \\ \dfrac{1}{8}x^2 - \dfrac{1}{8} \quad при \quad 1 < x \le 3 \\ 1 \quad при \quad x > 3 \end{cases}$. Найти: а) плотность распределения вероятностей $f(x)$; б) математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ случайной величины; в) вероятность того, что случайная величина примет значение на отрезке $\left[2; 2\dfrac{1}{2}\right]$.

Решение.

а) По виду $F(x)$ можно заключить, что заданная ею непрерывная случайная величина X принадлежит отрезку $[1; 3]$.

$$f(x)=F'(x)\ \Rightarrow\ \ f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 1\\ \dfrac{1}{4}x & при \quad 1<x\le 3\\ 0 & при \quad x>3\end{cases}.$$

б) Математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение найдем по формулам:

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx,\quad D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-(M(X))^2,\ \sigma(X)=\sqrt{D(X)}\ .$$

Получаем

$$M(X)=\int_1^3 x\cdot\frac{1}{4}xdx=\frac{1}{4}\int_1^3 x^2dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^3=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right)=\frac{13}{6}=2\frac{1}{6},$$

$$D(X)=\int_1^3 x^2\cdot\frac{1}{4}xdx-\left(\frac{13}{6}\right)^2=\frac{1}{4}\int_1^3 x^3dx-\frac{169}{36}=\frac{1}{16}x^4\Bigg|_1^3-\frac{169}{36}=\left(\frac{81}{16}-\frac{1}{16}\right)-\frac{169}{36}=5-\frac{169}{36}=\frac{11}{36},$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{11}{36}}\approx 0{,}55.$$

в) Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал (a,b) находим по формуле $P(a\le X\le b)=F(b)-F(a)$. Так как $a=2$, $b=2\frac{1}{2}$ и $F(x)=\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{8}$, то:

$$P\left(2\le X\le 2\frac{1}{2}\right)=F\left(2\frac{1}{2}\right)-F(2)=\left(\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{1}{8}\cdot 2^2-\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{8}\cdot\frac{25}{4}-\frac{1}{8}\cdot 4=\frac{25-16}{32}=\frac{9}{32}.$$

Ответ: а) $f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 1\\ \dfrac{1}{4}x & при \quad 1<x\le 3\\ 0 & при \quad x>3\end{cases}$; б) $M(X)=2\frac{1}{6}$, $D(X)=\frac{11}{36}$, $\sigma(X)\approx 0{,}55$; в) $P\left(2\le X\le 2\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{32}$.

Задание 2. Считается, что отклонение длины изготавливаемых деталей от стандарта является случайной величиной X, распределенной по нормальному закону. Стандартная длина (математическое ожидание) $a=40$ см, среднее квадратическое отклонение $\sigma=0{,}4$ см. Найти: а) вероятность того, что длина изготавливаемых деталей примет значение, принадлежащее интервалу $(39{,}7;\,40{,}2)$; б) вероятность того, что отклонение длины от стандартной составит по абсолютной величине не более $0{,}6$ см; в) интервал, в который попадут значения длины изготавливаемых деталей с вероятностью $0{,}9973$.

Решение.

а) По условию задачи имеем: X – длина детали, $a=40$, $\sigma=0{,}4$, $\alpha=39{,}7$, $\beta=40{,}2$. Подставив эти данные, в формулу вероятности попадания нормально распределенной случайной величины X в интервал (α,β) $P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$, получим:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{40{,}2-40}{0{,}4}\right) - \Phi\left(\frac{39{,}7-40}{0{,}4}\right) = \Phi(0{,}5) - \Phi(-0{,}75) =$$
$$= 0{,}1915 + 0{,}2734 = 0{,}4649.$$

Значения функции Лапласа находим в приложении 2.

б) X – длина детали. По условию задачи эта величина должна быть в интервале от $(a-\delta)$ до $(a+\delta)$, где $a = 40$ и $\delta = 0{,}6$.

Подставим имеющиеся данные в формулу $P(|X-a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$, получим:

$$P(|X-40| < 0{,}6) = 2\Phi\left(\frac{0{,}6}{0{,}4}\right) = 2\Phi(1{,}5) = 2 \cdot 0{,}4332 = 0{,}8664.$$

Следовательно, вероятность того, что изготавливаемые детали по длине будут в пределах от $39{,}4$ до $40{,}6$ см, составляет $0{,}8664$.

в) По условию задачи имеем: $a = 40$; $\sigma = 0{,}4$; $P(|X-40| \le \delta) = 0{,}9973$.

Применяя формулу $P(|X-a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$, получаем равенство:

$$2\Phi\left(\frac{\delta}{0{,}4}\right) = 0{,}9973 \text{ или } \Phi\left(\frac{\delta}{0{,}4}\right) = 0{,}49865.$$

По таблице приложения 2 находим, что такое значение функция Лапласа имеет при $x = 3$. Следовательно, $\frac{\delta}{0{,}4} = 3$, откуда $\delta = 1{,}2$.

Таким образом, можно гарантировать, что длина детали будет изменяться в пределах от $38{,}8$ до $41{,}2$ см.

Ответ: а) $0{,}4649$; б) $P(|X-40| < 0{,}6) = 0{,}8664$; в) $X \in (38{,}8;\ 41{,}2)$.

РГР-5 «Первичная обработка статистических данных»

Задание. Даны измерения 100 обработанных деталей. В таблице указаны значения отклонений от заданного размера и соответствующие им частоты.

$(x_{i-1};\ x_i)$	$(-2;-1{,}5)$	$(-1{,}5;-1)$	$(-1;-0{,}5)$	$(-0{,}5;\ 0)$	$(0;\ 0{,}5)$	$(0{,}5;\ 1)$	$(1;\ 1{,}5)$	$(1{,}5;\ 2)$
n_i	2	4	10	18	23	21	13	9

Считая, что признак X – отклонение от проектного размера – подчиняется нормальному закону распределения, 1) построить гистограмму относительных частот; 2) записать дискретное распределение признака X; 3) найти выборочную среднюю и исправленное среднее квадратическое отклонение; 4) указать доверительный интервал, покрывающий с надежностью $0{,}95$ неизвестное математическое ожидание a признака X; 5) указать доверительный интервал, покрывающий с надежностью $0{,}95$ неизвестное среднее квадратическое отклонение σ признака X.

Решение. 1) Для каждого интервала вычислим относительную частоту $W_i = \frac{n_i}{n}$ и плотность относительной частоты $\frac{W_i}{h}$, где $n = 100$ – объем выборки, $h = 0{,}5$ – длина любого частичного интервала. Результаты заносим в таблицу:

$(x_{i-1}; x_i)$	$(-2;-1,5)$	$(-1,5;-1)$	$(-1;-0,5)$	$(-0,5; 0)$	$(0; 0,5)$	$(0,5; 1)$	$(1; 1,5)$	$(1,5; 2)$
n_i	2	4	10	18	23	21	13	9
W_i	0,02	0,04	0,1	0,18	0,23	0,21	0,13	0,9
$\frac{W_i}{h}$	0,04	0,08	0,2	0,36	0,46	0,42	0,26	0,18

Далее строим гистограмму относительных частот – ступенчатую фигуры, состоящую из прямоугольников, основания которых частичные интервалы, а высоты – соответствующие значения плотности относительных частот.

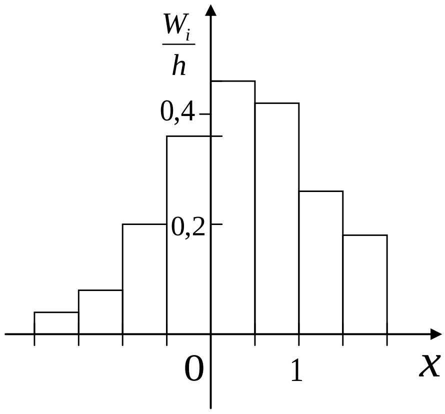


Рис. 1

2) Запишем дискретное распределение признака X, приняв в качестве его вариант середины соответствующих интервалов:

x_i	–1,75	–1,25	– 0,75	– 0,25	0,25	0,75	1,25	1,75
n_i	2	4	10	18	23	21	13	9

3) Выборочную среднюю находим по формуле:

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i .$$

Получаем:

$$\bar{x}_B = \frac{1}{100} \cdot (-1,75 \cdot 2 - 1,25 \cdot 4 - 0,75 \cdot 10 - 0,25 \cdot 18 + 0,25 \cdot 23 + 0,75 \cdot 21 + 1,25 \cdot 13 + 1,75 \cdot 9) = 0,33.$$

Вычисляем исправленную дисперсию по формуле:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x_B})^2 \cdot n_i .$$

$$s^2 = \frac{1}{99} ((-2,08)^2 \cdot 2 + (-1,58)^2 \cdot 4 + (-1,08)^2 \cdot 10 + (-0,58)^2 \cdot 18 + (-0,08)^2 \cdot 23 + 0,42^2 \cdot 21) +$$

$$+ \frac{1}{99} (0,92^2 \cdot 13 + 1,42^2 \cdot 9) = \frac{69,36}{99} \approx 0,7 .$$

Находим исправленное среднее квадратическое отклонение:

$$s = \sqrt{s^2} \approx 0,84 .$$

4) Доверительный интервал, покрывающий с надежностью 0,95 неизвестное математическое ожидание a признака X, в случае большой выборки можно определить из двойного неравенства:

$$\bar{x}_B - t\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + t\cdot\frac{s}{\sqrt{n}},$$

где t – аргумент функции Лапласа, для которого $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$,

γ – надежность ($\gamma = 0{,}95$).

Так как $\Phi(t) = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$, то по таблице приложения 2 находим $t = 1{,}96$.

Доверительный интервал, покрывающий с надежностью 0,95 неизвестное математическое ожидание a, таков:

$$0{,}33 - 1{,}96\cdot\frac{0{,}84}{\sqrt{100}} < a < 0{,}33 + 1{,}96\cdot\frac{0{,}84}{\sqrt{100}},$$

$$0{,}17 < a < 0{,}49, \text{ или } (0{,}17;\ 0{,}49).$$

5) Доверительный интервал, покрывающий с надежностью 0,95 неизвестное среднее квадратическое отклонение σ признака X, находится из двойного неравенства:

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q),$$

где γ – надежность (доверительная вероятность),

$q_\gamma = q(n;\gamma)$ – число, определяемое по таблице 3.

В нашем случае:

$$q_\gamma = q(100;\ 0{,}95) = 0{,}143.$$

Тогда:

$$0{,}84\cdot(1-0{,}143) < \sigma < 0{,}84\cdot(1+0{,}143),$$

$$0{,}72 < \sigma < 0{,}96.$$

Итак, доверительный интервал для оценки неизвестного среднего квадратического отклонения имеет вид $(0{,}72;\ 0{,}96)$.

Ответ: 3) $\bar{x}_B = 0{,}33$, $s = 0{,}84$; 4) $(0{,}17;\ 0{,}49)$; 5) $(0{,}72;\ 0{,}96)$.