

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ  
ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ**

**Б1.В.04 Прикладная механика**

**Направление подготовки 35.03.06. - Агроинженерия**

**Профиль образовательной программы Электрооборудование и электротехнологии**

**Форма обучения заочная**

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>1. Конспект лекций</b> .....	<b>3</b>
1.1 Лекция № 1 Введение. Основные понятия. Чистый сдвиг.....	3
1.2 Лекция № 2 Моменты инерции плоских сечений. Кручение.....	14
1.3 Лекция № 3 Прямозубые, косозубые, конические передачи.....	27
<b>2. Методические указания по выполнению лабораторных работ</b> .....	<b>38</b>
2.1 Лабораторная работа № ЛР-1 Испытание на растяжение образца из малоуглеродистой стали.....	38
2.2 Лабораторная работа № ЛР-2 Испытание различных материалов на сжатие.....	46
2.3 Лабораторная работа № ЛР-3 Определение прогибов и углов поворота в балке на двух опорах.....	54
2.4 Лабораторная работа № ЛР-4 Испытание ремённой передачи.....	57
<b>3. Методические указания по проведению практических занятий</b> .....	<b>60</b>
3.1 Практическое занятие № ПЗ-1 Полная проверка прочности балки при изгибе.....	60
3.2 Практическое занятие № ПЗ-2 Расчёт валов.....	60

# 1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

## 1. 1 Лекция № 1 (2 часа).

**Тема:** «Введение. Основные понятия. Чистый сдвиг»

### 1.1.1 Вопросы лекции:

1. Упругость и пластичность. Внешние силы и их классификация.
2. Деформация и перемещение.
3. Внутренние силы. Метод сечений. Внутренние силовые факторы.
4. Напряжение. Условие прочности и условие жесткости в общем виде.
5. Чистый сдвиг. Условия прочности при чистом сдвиге.
6. Чистый сдвиг. Вывод закона Гука при чистом сдвиге.

### 1.1.2 Краткое содержание вопросов:

1. Упругость и пластичность. Внешние силы и их классификация.

Сопротивление материалов – наука о прочности, жесткости и надежности элементов инженерных конструкций. Методами сопротивления материалов ведутся практические расчеты и определяются необходимые, как говорят, надежные размеры деталей машин, различных конструкций и сооружений.

Основные понятия сопротивления материалов опираются на законы и теоремы общей механики и в первую очередь на законы статики, без знания которых изучение данного предмета становится практически невозможным.

В отличие от теоретической механики сопротивление материалов рассматривает задачи, где наиболее существенными являются свойства деформируемых тел, а законы движения тела, как жесткого целого, не только отступают на второй план, но в ряде случаев являются попросту несущественными.

Сопротивление материалов имеет целью создать практически приемлемые простые приемы расчета типичных, наиболее часто встречающихся элементов конструкций. Необходимость довести решение каждой практической задачи до некоторого числового результата заставляет в ряде случаев прибегать к упрощающим гипотезам – предположениям, которые оправдываются в дальнейшем путем сопоставления расчетных данных с экспериментом.

Необходимо отметить, что первые заметки о прочности упоминаются в записках известного художника ЛЕОНАРДО ДЕ ВИНЧИ, а начало науки о сопротивлении материалов связывают с именем знаменитого физика, математика и астронома ГАЛИЛЕО ГАЛИЛЕЯ. В 1660 году Р.ГУК сформулировал закон, устанавливающий связь между нагрузкой и деформацией: *«Какова сила – таково и действие»*. В XVIII веке необходимо отметить работы Л.ЭЙЛЕРА по устойчивости конструкций. XIX – XX века являются временем наиболее интенсивного развития науки в связи с общим бурным ростом строительства и промышленного производства при безусловно огромном вкладе ученых-механиков России.

Итак, мы будем заниматься **твердыми деформированными телами с изучением их физических свойств.**

Введем основные понятия, принимаемые при изучении дисциплины.

Прочность – это способность конструкции выдерживать заданную нагрузку, не разрушаясь.

Жесткость – способность конструкции к деформированию в соответствие с заданным нормативным регламентом.

Деформирование – свойство конструкции изменять свои геометрические размеры и форму под действием внешних сил

Устойчивость – свойство конструкции сохранять при действии внешних сил заданную форму равновесия.

Надежность – свойство конструкции выполнять заданные функции, сохраняя свои эксплуатационные показатели в определенных нормативных пределах в течение требуемого промежутка времени.

Ресурс – допустимый срок службы изделия. Указывается в виде общего времени наработки или числа циклов нагружения конструкции.

Отказ – нарушение работоспособности конструкции.

Опираясь на вышесказанное, можно дать определение прочностной надежности.

Прочностной надежностью называется отсутствие отказов, связанных с разрушением или недопустимыми деформациями элементов конструкции.

На рис.1 приведена структура модели прочностной надежности. Она включает известные модели или ограничения, которые априорно накладываются на свойства материалов, геометрию, формы изделия, способы нагружения, а также модель разрушения. Инженерные модели сплошной среды рассматривают материал как сплошное и однородное тело, наделенное свойством однородности структуры. Модель материала наделяется свойствами упругости, пластичности и ползучести.

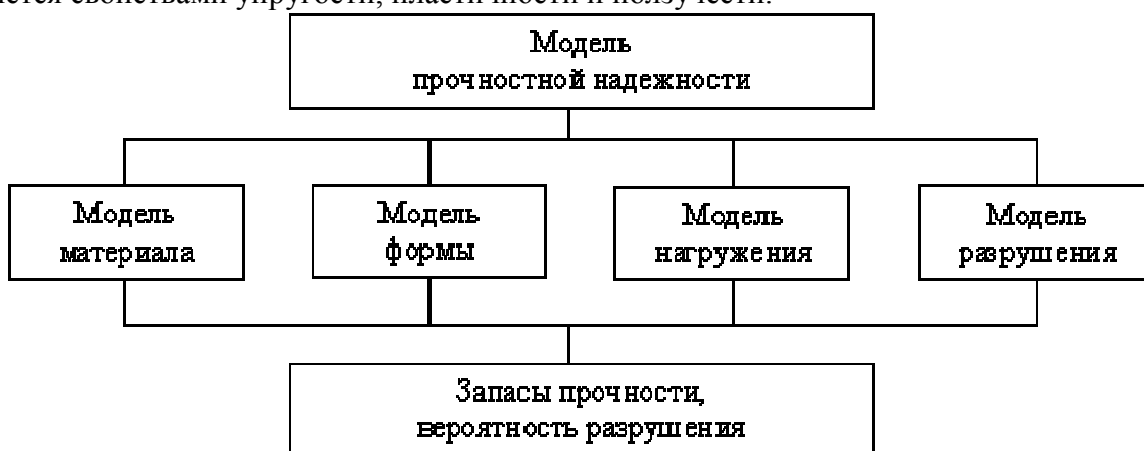


Рис.1. Структура модели прочностной надежности элементов конструкций

Упругостью называется свойство тела восстанавливать свою форму после снятия внешних нагрузок.

Пластичностью называется свойство тела сохранять после прекращения действия нагрузки, или частично полученную при нагружении, деформацию.

Ползучестью называется свойство тела увеличивать деформацию при постоянных внешних нагрузках.

Основными моделями формы в моделях прочностной надежности, как известно, являются: стержни, пластины, оболочки и пространственные тела (массивы), рис.2. Модели

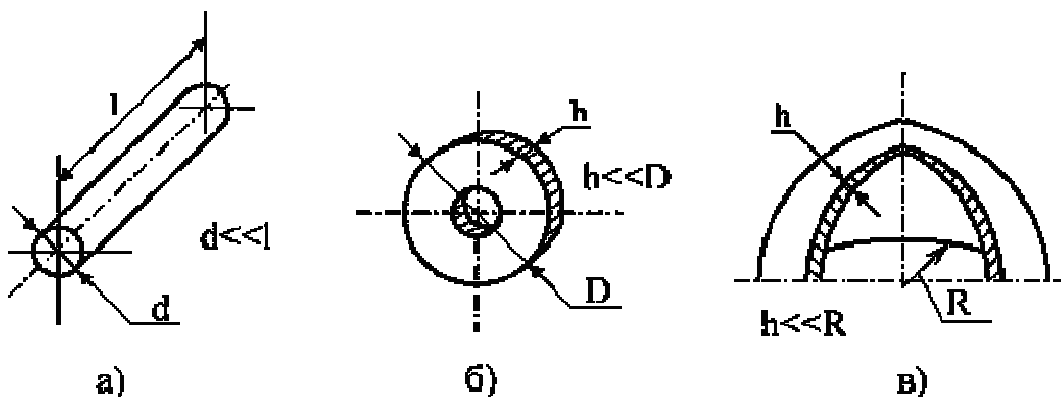


Рис. 2 Основные модели формы в моделях прочностной надежности: а) стержень, б) пластина, в) оболочка

нагрузки содержат схематизацию внешних нагрузок по величине, характеру распределения (сосредоточенная или распределенная сила или момент), а также воздействию внешних полей и сред.

Внешние силы, действующие на элемент конструкции, подразделяются на 3 группы: 1) сосредоточенные силы, 2) распределенные силы, 3) объемные или массовые силы.

Сосредоточенные силы — силы, действующие на небольших участках поверхности детали (например давление шарика шарикоподшипника на вал, давление колеса на рельсы и т.п.)

Распределенные силы приложены значительным участкам поверхности (например давление пара в паропроводе, трубопроводе, котле, давление воздуха на крыло самолета и т.д.

Объемные или массовые силы приложены каждой частице материала (например силы тяжести, силы инерции)

После обоснованного выбора моделей формы, материала, нагрузки переходят к непосредственной оценке надежности с помощью моделей разрушения. Модели разрушения представляют собой уравнения, связывающие параметры работоспособности элемента конструкции в момент разрушения с параметрами, обеспечивающими прочность. Эти уравнения (условия) называют условиями прочности. Обычно рассматриваются в зависимости от условий нагружения четыре модели разрушения:

- статического разрушения,
- длительность статического разрушения,
- малоциклового статического разрушения,
- усталостного разрушения.

При малом числе циклов ( $N < 10^2$ ) развиваются значительные пластические деформации (статическое разрушение), при большом числе циклов ( $N > 10^5$ ) пластические деформации отсутствуют (усталостное разрушение). В промежуточной области ( $10^2 < N < 10^5$ ) разрушение носит смешанный характер (малоцикловое разрушение). Если на элемент конструкции действует высокая температура (для алюминиевых сплавов выше  $200\text{ }^{\circ}\text{C}$ , для стальных и титановых сплавов выше  $400\text{ }^{\circ}\text{C}$ , для жаропрочных сплавов выше  $600\text{ }^{\circ}\text{C}$ ), но в этом случае рассматривается так называемая длительная прочность материала.

Таким образом, сопротивление материалов зависит не только от величин действующего усилия, но и от длительности самого воздействия.

Как уже отмечалось, изучение дисциплины невозможно без знания основ теоретической механики.

## 2. Деформация и перемещение.

### **Перемещения и деформации в случае простого растяжения.**

Если к стержню, закрепленному в корневом сечении (рис. 3.1), приложить на другом торце осевое усилие, то произойдет удлинение стержня — точка А перейдет в точку .

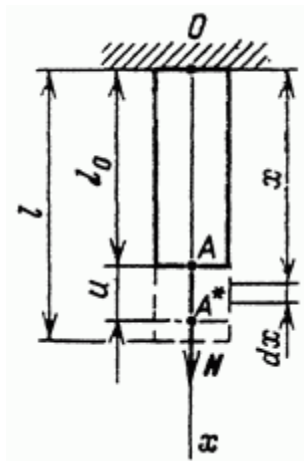


Рис. 1 Удлинение — деформация стержня при растяжении

Перемещение точки А в процессе деформации (отрезок АА\*) обозначается на рис. 1 величиной  $u$ . Чем длиннее будет стержень, тем больше перемещение его конца под действием нагрузки. Деформацию материала стержня характеризует отношение перемещения к первоначальной длине:

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{u}{l_0}.$$

Величина является безразмерной и называется линейной деформацией или, более кратко, деформацией. При сжатии стержня деформация становится отрицательной. Деформация в материале конструкции в рабочих условиях составляет сотые, редко десятые доли процента. При разрушении деформация конструкционных материалов достигает десятков процентов (обычно до 30%). Равенство (1) используют для определения малых деформаций. При больших деформациях следует рассмотреть весь процесс деформирования.

Пусть в данный момент нагружения перемещение конца стержня составляет  $u$  и происходит приращение перемещения  $du$ . Тогда приращение деформации

$$d\varepsilon = \frac{du}{l_0 + u}.$$

Деформация стержня при изменении его длины от 0 до  $u$  составит

$$\varepsilon_{\text{н}} = \int_0^u \frac{du}{l_0 + u} = \int_{l_0}^l \frac{dx}{x} = \ln \frac{l}{l_0}.$$

Величина определяемая из последнего равенства, называется истинной деформацией (или логарифмической деформацией). Разлагая в ряд выражение (2), находим

$$\varepsilon_{\text{н}} = \ln(1 + \varepsilon) = \frac{u}{l_0} - \frac{1}{2} \left( \frac{u}{l_0} \right)^2 + \dots = \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon^2 + \frac{1}{3} \varepsilon^3 - \dots$$

При малых формулы (1) и (2) совпадают, при расхождении может быть заметным, при — существенным. Причина расхождения очевидна: удлинение  $\Delta$  в равенстве (1) относится к первоначальной длине. Если относить удлинение к «средней длине», в процессе деформации полагая

$$\varepsilon_n \approx \frac{\Delta}{l_0 + \frac{1}{2} \Delta} \approx \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon^2,$$

то совпадение с истинной деформацией будет вплоть до квадратичных членов. В дальнейшем основное значение имеет случай малых деформаций, что позволяет использовать наиболее простую зависимость (1).

Погрешность равенства (1)

$$\Delta = \left| \frac{\varepsilon - \varepsilon_n}{\varepsilon} \right| < \frac{1}{2} |\varepsilon|.$$

Например, если, как обычно, деформация в рабочих условиях меньше 0,5%, то погрешность формулы (1) меньше 0,25%; такая погрешность вполне допустима в технических расчетах, так как она меньше погрешности самих измерений.

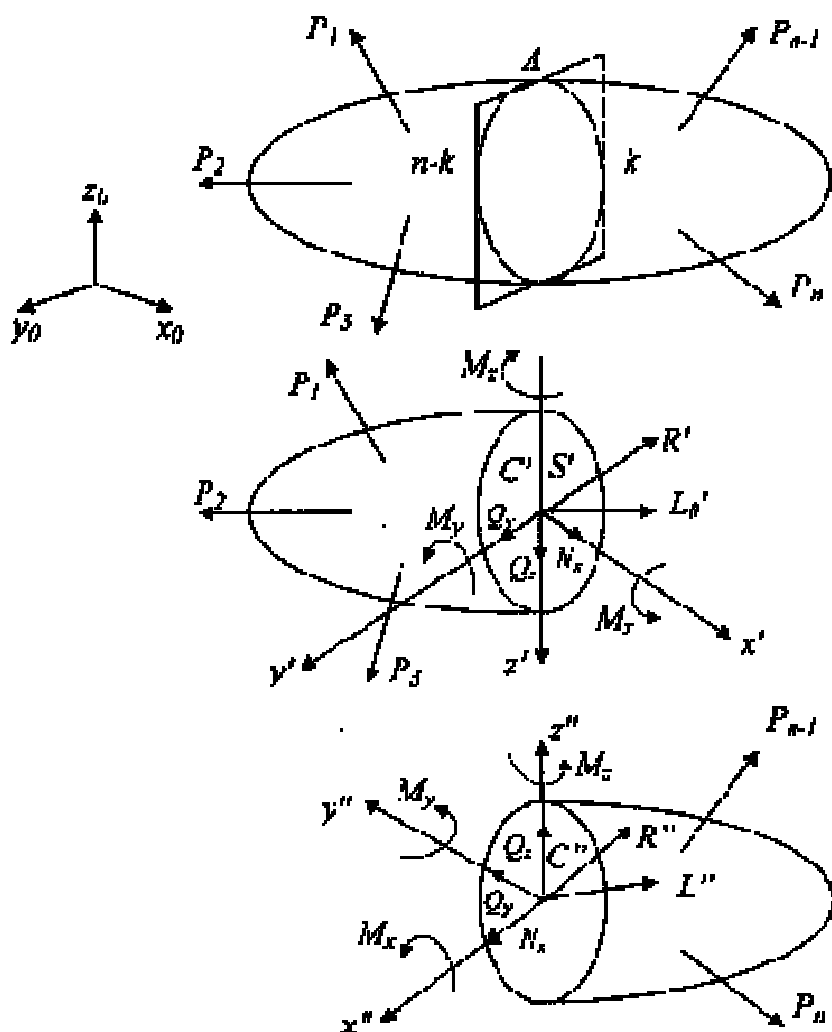
### 3. Внутренние силы. Метод сечений. Внутренние силовые факторы.

Деформации рассматриваемого тела (элементов конструкции) возникают от приложения внешней силы. При этом изменяются расстояния между частицами тела, что в свою очередь приводит к изменению сил взаимного притяжения между ними. Отсюда, как следствие, возникают внутренние усилия. При этом внутренние усилия определяются универсальным методом сечений (или метод разреза).

Известно, что различают силы внешние и силы внутренние. Внешние усилия (нагрузки) — это количественная мера взаимодействия двух различных тел. К ним относятся и реакции в связях. Внутренние усилия — это количественная мера взаимодействия двух частей одного тела, расположенных по разные стороны сечения и вызванные действием внешних усилий. Внутренние усилия возникают непосредственно в деформируемом теле.

На рис.1 приведена расчетная схема бруса с произвольной комбинацией внешней нагрузки образующую равновесную систему сил:

$$\{\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_{n-1}, \bar{P}_n\} \sim 0 \quad (1)$$



Сверху вниз: упругое тело, левая отсеченная часть, правая отсеченная часть  
Рис.1 Метод сечений.

При этом, реакции связей определяются из известных уравнений равновесия статики твердого тела:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_{ix_0} &= 0 \quad \sum_{i=1}^n M_{x_0}(P_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^n P_{iy_0} &= 0 \quad \sum_{i=1}^n M_{y_0}(P_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^n P_{iz_0} &= 0 \quad \sum_{i=1}^n M_{z_0}(P_i) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

где  $x_0, y_0, z_0$  — базовая система координат осей.

Мысленное разрезание бруса на две части произвольным сечением А (рис.1 а), приводит к условиям равновесия каждой из двух отсеченных частей (рис.1 б,в). Здесь  $\{S'\}$  и  $\{S''\}$  — внутренние усилия, возникающих соответственно в левой и правой отсеченных частях вследствие действия внешних усилий.

При составлении мысленно отсеченных частей, условие равновесия тела обеспечивается соотношением:

$$\{P_1, P_2, \dots, [S', S''], \dots, P_{n-1}, P_n\} \sim 0$$

Так как исходная система внешних сил (1) эквивалентна нулю, получаем:

$$\{S'\} = -\{S''\} \quad (3)$$

Это условие соответствует четвертой аксиоме статики о равенстве сил действия и противодействия.



Используя общую методологию теоремы Пуансо о приведении произвольной системы сил к заданному центру и выбрав за полюс приведения центр масс, сечения  $A'$ , точку  $C'$ , систему внутренних усилий для левой части  $\{S'\}$  сводим к главному вектору  $\bar{R}'$  и главному моменту  $\bar{L}'_0$  внутренних усилий. Аналогично делается для правой отсеченной части, где положение центра масс сечения  $A''$ ; определяется, соответственно, точкой  $C''$  (рис.1 б,в).

$$\{S'\} \sim \{R', L'_0\}; \{S''\} \sim \{R'', L''_0\}, \quad (4)$$

Здесь в соответствии с четвертой аксиомой статики по-прежнему имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} R' &= -R'' \\ L'_0 &= -L''_0 \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом главный вектор и главный момент системы внутренних усилий, возникающие в левой, условно отсеченной части бруса, равны по величине и противоположны по направлению главному вектору и главному моменту системы внутренних усилий, возникающих в правой условно отсеченной части.

График (эпюра) распределения численных значений главного вектора и главного момента вдоль продольной оси бруса и предопределяют, прежде всего, конкретные вопросы прочности, жесткости и надежности конструкций.

Определим механизм формирования компонент внутренних усилий, которые характеризуют простые виды сопротивлений: растяжение-сжатие, сдвиг, кручение и изгиб.

В центрах масс исследуемых сечений  $C'$  или  $C''$  зададимся соответственно левой ( $c'$ ,  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ) или правой ( $c''$ ,  $x''$ ,  $y''$ ,  $z''$ ) системами координатных осей (рис.1 б, в), которые в отличие от базовой системы координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  будем называть "следающими". Термин обусловлен их функциональным назначением. А именно: отслеживание изменения положения сечения  $A$  (рис.1 а) при условном смещении его вдоль продольной оси бруса, например при:  $0 \leq x'_1 \leq a$ ,  $a \leq x'_2 \leq b$  и т.д., где  $a$  и  $b$  — линейные размеры границ исследуемых участков бруса.

Зададимся положительными направлениями проекций главного вектора  $\bar{R}'$  или  $\bar{R}''$  и главного момента  $\bar{L}'_0$  или  $\bar{L}''_0$  на координатные оси следящей системы (рис.1 б, в):

$$\begin{aligned} \bar{R}' &\{N', Q'_y, Q'_z\} \quad \bar{L}'_0 \{M'_x, M'_y, M'_z\} \\ \bar{R}'' &\{N'', Q''_y, Q''_z\} \quad \bar{L}''_0 \{M''_x, M''_y, M''_z\} \end{aligned} \quad (6)$$

При этом положительные направления проекций главного вектора и главного момента внутренних усилий на оси следящей системы координат соответствуют правилам статики в теоретической механике: для силы — вдоль положительного направления оси, для момента — против вращения часовой стрелки при наблюдении со стороны конца оси. Они классифицируются следующим образом:

$N_x$  — нормальная сила, признак центрального растяжения или сжатия;

$M_x$  — внутренний крутящий момент, возникает при кручении;

$Q_z, Q_y$  — поперечные или перерезывающие силы — признак сдвиговых деформаций,

$M_y, M_z$  — внутренние изгибающие моменты, соответствуют изгибу.

Соединение левой и правой мысленно отсеченных частей бруса приводит к известному (3) принципу равенства по модулю и противоположной направленности всех одноименных компонент внутренних усилий, а условие равновесия бруса определяется в виде:

$$\begin{aligned} \{P_1, P_2, P_3, \dots, N', N'', Q'_y, Q''_y, Q'_z, Q''_z, M'_x, M''_x, \\ M'_y, M''_y, M'_z, M''_z, \dots, P_{n-1}, P_n\} \sim 0 \end{aligned} \quad ($$

7)

С учетом эквивалентности нулю исходной системы сил (1) имеет место:

$$\{N', N'', Q_y', Q_y'', Q_z', Q_z'', M_x', M_x'', M_y', M_y'', M_z', M_z''\} \sim 0 \quad (8)$$

Как естественное следствие из соотношений 3,4,5 полученное условие является необходимым для того, чтобы одноименные компоненты внутренних усилий попарно образовали подсистемы сил эквивалентные нулю:

$$\begin{aligned} 1. \{N', N''\} \sim 0 &> N' = -N'' \\ 2. \{Q_y', Q_y''\} \sim 0 &> Q_y' = -Q_y'' \\ 3. \{Q_z', Q_z''\} \sim 0 &> Q_z' = -Q_z'' \\ 4. \{M_x', M_x''\} \sim 0 &> M_x' = -M_x'' \\ 5. \{M_y', M_y''\} \sim 0 &> M_y' = -M_y'' \\ 6. \{M_z', M_z''\} \sim 0 &> M_z' = -M_z'' \end{aligned} \quad (9)$$

Общее число внутренних усилий (шесть) в статически определимых задачах совпадает с количеством уравнений равновесия для пространственной системы сил и связано с числом возможных взаимных перемещений одной условно отсеченной части тела по отношению к другой.

Искомые усилия определяются из соответствующих уравнений для любой из отсеченных частей в следящей системе координатных осей. Так, для любой отсеченной части соответствующие уравнения равновесия приобретают вид;

$$\begin{aligned} 1. \sum_{i=1}^k P_{ix} &= N + P_{1x} + P_{2x} + \dots + P_{kx} = 0 > N \\ 2. \sum_{i=1}^k P_{iy} &= Q_y + P_{1y} + P_{2y} + \dots + P_{ky} = 0 > Q_y \\ 3. \sum_{i=1}^k P_{iz} &= Q_z + P_{1z} + P_{2z} + \dots + P_{kz} = 0 > Q_z \\ 4. \sum_{i=1}^k M_x(P_i) &= M_x + M_x(P_1) + \dots + M_x(P_k) = 0 > M_x \\ 5. \sum_{i=1}^k M_y(P_i) &= M_y + M_y(P_1) + \dots + M_y(P_k) = 0 > M_y \\ 6. \sum_{i=1}^k M_z(P_i) &= M_z + M_z(P_1) + \dots + M_z(P_k) = 0 > M_z \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь для простоты обозначений системы координат  $c' x' y' z'$  и  $c'' x'' y'' z''$  заменены единой охуз.

Уважаемые коллеги! Таким образом, предлагаемый автором метод построения эпюр внутренних усилий, освобождающий Вас от механического запоминания "правил знаков" при построении эпюр внутренних усилий, заключается в следующем:

Определите реакции в связях по величине и направлению в базовой системе координат.

Определите количество участков бруса для использования метода сечений.

Мысленно рассеките брус в пределах исследуемого участка и изобразите на Ваше усмотрение левую или правую условно отсеченную часть.

Укажите пределы изменения положения сечения вдоль продольной оси в базовой системе координат на этом участке.

Введите в искомом сечении соответственно левую или правую следящую систему координатных осей.

Задайтесь положительными направлениями внутренних усилий в следящей системе координат.

Составьте уравнения равновесия для рассматриваемой условно отсеченной части бруса в следящей системе координат.

Определите из уравнений равновесия искомые внутренние усилия.

Вычислите искомые внутренние усилия на границах участков и при необходимости, — их экстремальные значения.

Выбрав масштаб усилий, выполните построение эпюры в соответствии с полученными их модульными значениями и знаками.

Указанная последовательность действий (кроме п.1) составляет суть метода сечений (разреза), единственного метода для определения внутренних усилий.

Эпюры внутренних усилий позволяет визуально найти положение опасного сечения, где действуют наибольшие по модулю внутренние усилия. В этом сечении при прочих равных условиях наиболее вероятно разрушение конструкции при предельных нагрузках.

#### 4. Напряжение. Условие прочности и условие жесткости в общем виде.

Осевое или центральное растяжение (сжатие) относят к простым видам сопротивления. Название этого вида деформации обусловлено тем, что линия действия сил, приложенных к стержню, совпадает с осью стержня (ось стержня проходит через центры тяжести поперечных сечений). При осевом растяжении (сжатии) в силу принятых гипотез  $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yx} = \tau_{yz} = 0$ ,  $\sigma_x \neq 0$ , поэтому напряженное состояние в элементе объема — линейное (только одно из главных напряжений отлично от нуля). Нормальное напряжение в поперечном сечении при данном виде деформации является функцией от продольного внутреннего усилия  $N$  и зависит от геометрической характеристики поперечного сечения — площади  $A$ . Определяют напряжение по формуле  $\sigma = \sigma(x) = N(x) / A$ .

При растяжении (сжатии) различают абсолютные  $\Delta l$  и относительные  $\epsilon$  деформации. Абсолютная деформация — это разница между длиной стержня до и после деформации, т.е. та величина, на которую он изменил свою длину  $\Delta l = l - l_0$ . Относительная деформация — это, как ясно из названия, отношение абсолютной деформации к первоначальной длине стержня  $\epsilon = \Delta l / l_0$ .

Для расчета на прочность пользуются условием прочности, которое при данном виде сопротивления имеет вид:

$$|\sigma|_{\max} = \left| \frac{N}{A} \right|_{\max} \leq R_{\text{пластичный материал}} \quad (R_t = R_c),$$

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq R_t; \quad \sigma_{\min} = \frac{N_{\min}}{A} \leq R_c \quad (\text{хрупкий материал } R_t \neq R_c).$$

В этих выражениях  $R$ ,  $R_t$ ,  $R_c$  — расчетные сопротивления по нормальным напряжениям для хрупкого и пластичного материала соответственно. Максимальное значение напряжения определяют с помощью эпюры напряжений, полученной через отношения  $N/A$ .

$$\Delta l \leq [\Delta l], \quad |u|_{\max} \leq [u]$$

В расчёте на жёсткость применяют условия жёсткости:

Первое условие для полного перемещения стержня, а второе — для максимального перемещения сечения. В квадратных скобках приведены допустимые значения. Для определения опасного сечения, в котором возникает  $|u|_{\max}$ , строят эпюру перемещений.

#### 5. Чистый сдвиг. Условия прочности при чистом сдвиге.

Условие прочности при сдвиге имеет вид:  $\tau_{\text{ср}} = Q / F \leq [\tau]$ .

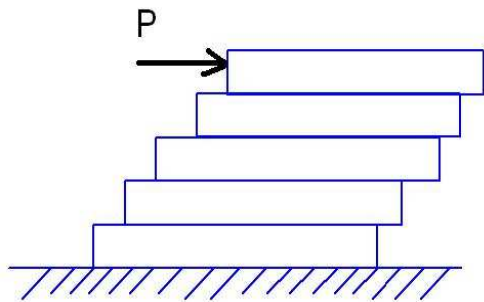
Допускаемое напряжение при сдвиге ( $[\tau]$ ) – это касательное напряжение, отвечающее безопасной работе материала при сдвиге.

Для пластичных материалов допускаемое напряжение при сдвиге должно быть меньше предела текучести ( $\tau_{\text{т}}$ ):  $[\tau] = \tau_{\text{т}} / n_{\text{т}}$

Для хрупких материалов допускаемое напряжение при сдвиге должно быть меньше предела прочности ( $\tau_{\text{р}}$ ):  $[\tau] = \tau_{\text{р}} / n_{\text{р}}$ .

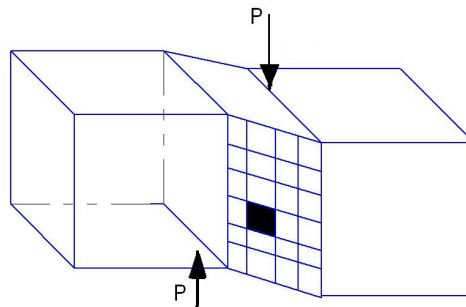
## 6. Чистый сдвиг. Вывод закона Гука при чистом сдвиге.

Кроме деформаций растяжения и сжатия материал нагруженного элемента конструкций может испытывать деформацию **сдвига**. Например, модель в виде стопки пластин.



Также сдвиг можно осуществить при действии на стержень двух равных противоположно направленных бесконечно близких поперечных сил. (резка ножницами прутков).

Срезу предшествует искажение прямого угла между двумя взаимно перпендикулярными линиями. При этом на гранях выделенного элемента возникают касательные напряжения  $\tau$ . Напряженное



состояние, при котором на гранях выделенного элемента возникают только касательные напряжения  $\tau$ , называется чистым сдвигом.

### Закон Гука при чистом сдвиге

Подобно деформациям растяжения при сдвиге соблюдается закон Гука, т.е. прямая пропорциональность между напряжениями  $\tau$  и относительными угловыми деформациями  $\gamma$ .

Эта прямая пропорциональность установлена опытным путем и равняется:

$$\tau = G\gamma$$

Эта зависимость выражает закон Гука (экспериментальный) при чистом сдвиге.

Где  $\gamma$  – относительная угловая деформация;

$G$ – модуль упругости материала при сдвиге или модуль упругости второго рода.  $G$ – физическая постоянная материала. Определяется опытным путем. Для Ст.  $3G=80\text{ ГПа}$ , что в 2,5 раза меньше чем  $E=200\text{ ГПа}$ .

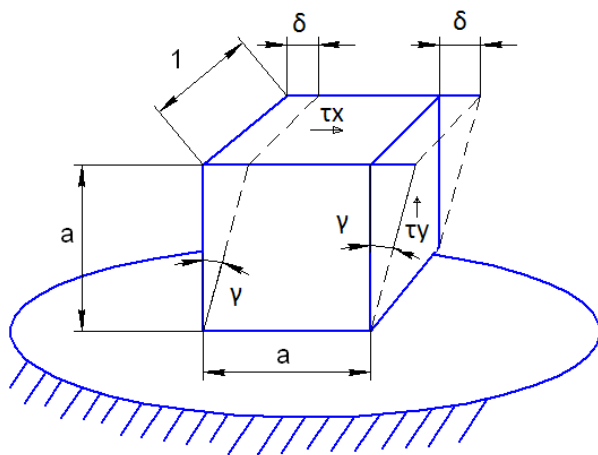
Поясним закон Гука. Возьмем элемент и закрепим его нижнюю грань. Элемент в условиях чистого сдвига. На гранях действуют касательные напряжения  $\tau_x$  и  $\tau_y$ .

$\gamma$ – угол сдвига

$\delta$  – абсолютный сдвиг

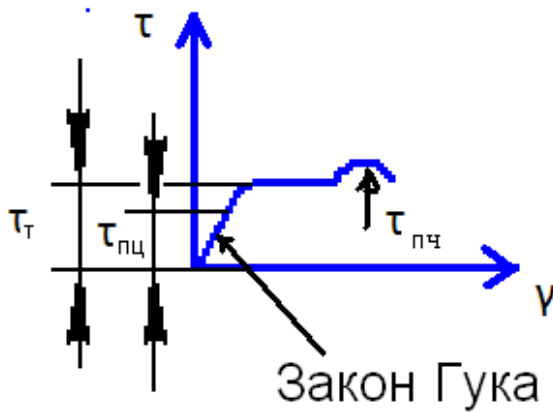
$$\delta = \gamma \times a$$

Между модулями упругости и сдвига существует взаимосвязь:



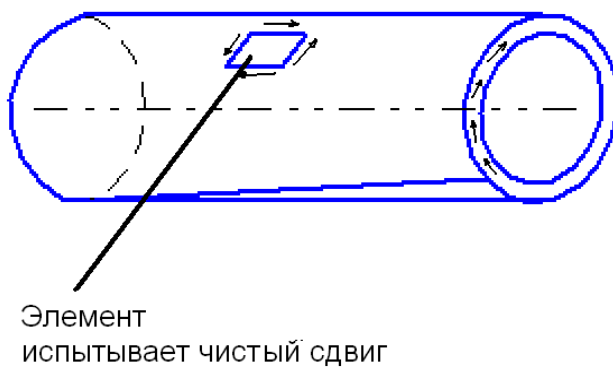
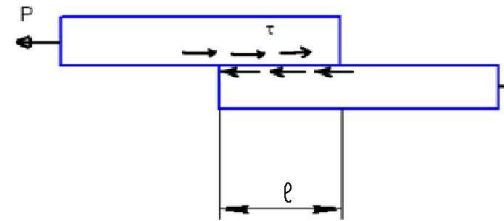
$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \approx 0,4E$$

Осуществить чистый сдвиг сложно, почти всегда сопутствует изгиб. Чистый сдвиг можно осуществить путем испытания тонкостенных трубок на кручение.

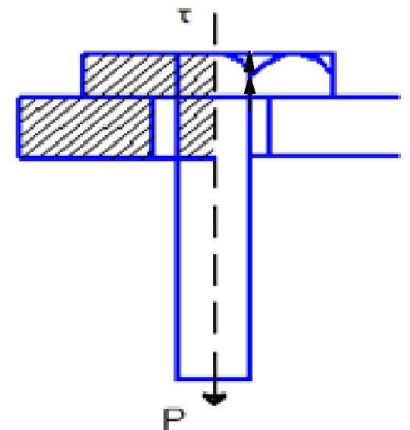


Кривая деформирования при кручении подобна кривой деформирования при растяжении

$\tau_{пц}$  – предел пропорциональности



В ряде конструкций (заклепочные и сварные соединения) нормальные напряжения в сечениях деталей малы по сравнению с касательными напряжениями. Такие детали условно рассчитывают на чистый сдвиг (срез) для предварительного определения их размеров. Например, болтовые соединения или клеевые соединения.



Условие прочностной надежности имеет вид:

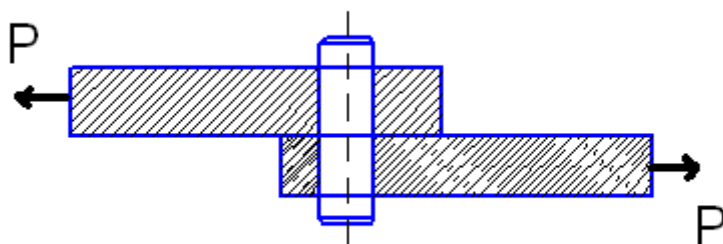
$$\tau = \frac{Q}{A} \leq [\tau_c]$$

$Q$  – перерезывающая сила в сечении,  $A$  – площадь,  $[\tau]$  – допускаемые напряжения на срез.

Можно принять  $[\tau_c] = 0,5 \div 0,6 [\sigma_B]$  – для пластичных материалов

$[\tau_c] = 0,7 \div 1 [\sigma_B]$  – для хрупких материалов. В нашем случае  $Q=P$ .

При небольшой толщине соединяемых деталей (болтами, заклепками) и значительной нагрузке между поверхностью соединительной детали и стенками отверстия возникает большое взаимное давление, называемое напряжением смятия  $\sigma_{см}$ .

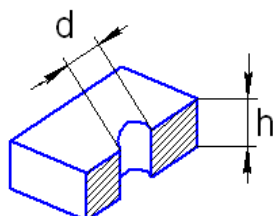


Расчеты на смятие, также как и расчеты на срез, носят условный характер. Считают, что силы давления распределены по поверхности смятия равномерно и перпендикулярно ей.

Следовательно, условие прочности на смятие имеет вид:

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{P}{iA_{\text{см}}} \leq [\sigma_{\text{см}}]$$

$\frac{P}{i}$  - нагрузка на один соединительный элемент ( $i$  – число элементов),  $A_{\text{см}}$  – площадь смятия,  $[\sigma_{\text{см}}]$  – допускаемые напряжения на смятие.



Если поверхность смятия цилиндрическая, то берется условная площадь смятия  $A_{\text{см}} = d \times h$ .

**Кручение стержней круглого поперечного сечения**

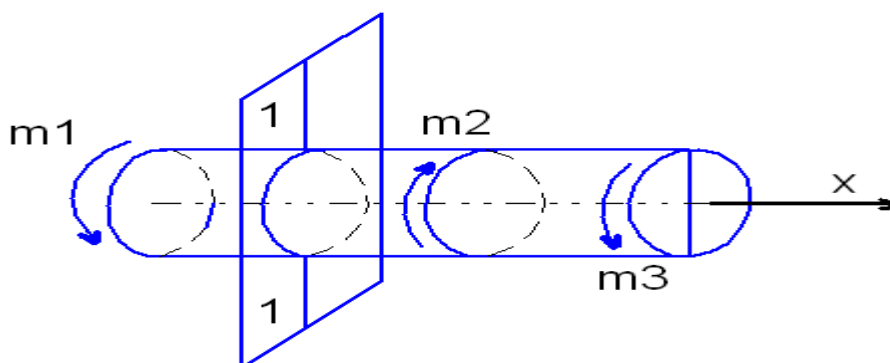
**Кручение** – это такой вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникают только крутящие моменты. Изгибающие моменты, поперечные и продольные силы равны нулю.

Кручение вызывается действием внешних скручивающих пар сил, расположенных в плоскостях перпендикулярных оси бруса.

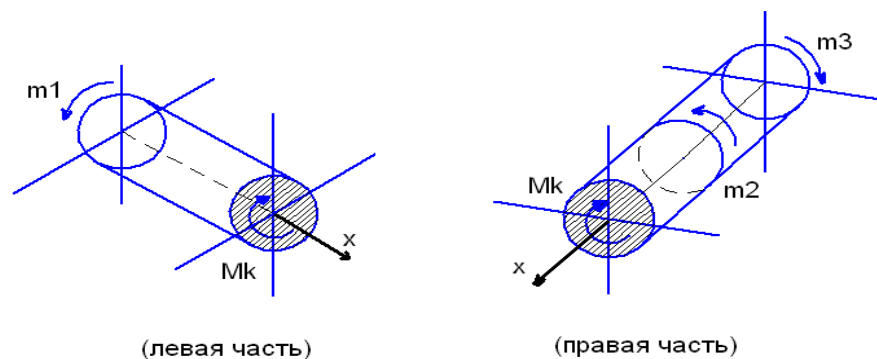
Брус, работающий на кручение, называется валом. Обычно кручение сопровождается и другим видами деформации.

### Крутящие моменты и их эпюры

Крутящие моменты в поперечных сечениях вала определяется методом сечений. Изобразим вал и определим **внутренние** (в дальнейшем не будем употреблять) крутящие моменты в сечении 1 – 1.



Мысленно рассечем вал плоскостью проходящей через сечение 1- 1



Крутящие моменты в каждом сечении должны быть уравновешены (действие равно противодействию).

Вал должен находиться в равновесии

$$\Sigma M_x = -m_1 + m_2 - m_3 = 0$$

Крутящие моменты в сечении определяются из условия равновесия одной из частей.

Левая часть

$$\Sigma M_x = -m_1 + M_k = 0 \quad M_k = m_1$$

Правая часть

$$\Sigma M_x = M_k - m_2 + m_3 = 0 \quad M_k = m_2 - m_3 = m_1$$

Крутящий момент в произвольном поперечном сечении вала численно равен алгебраической сумме моментов внешних скручивающих пар сил, расположенных по одну сторону рассматриваемого сечения.

Крутящий момент в поперечных сечениях вала считается положительным, если при взгляде на сечение со стороны внешней нормали он направлен по стрелке часов, в противном случае крутящий момент считается отрицательным (правило для строителей).

## 1. 2 Лекция № 2 (2 часа).

**Тема:** «Моменты инерции плоских сечений. Кручение»

### 1.2.1 Вопросы лекции:

1. Момент инерции простых и сложных фигур.
2. Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей.
3. Изменение моментов инерции при повороте осей.
4. Кручение. Определение напряжения.
5. Условия прочности и условия жесткости.

### 1.2.2 Краткое содержание вопросов:

1. Момент инерции простых и сложных фигур.

Вычисление моментов инерции и моментов сопротивления для простейших сечений.

$$J = \int_F z^2 dF$$

Известно, что интеграл вида  $\int_F z^2 dF$  является моментом инерции сечения относительно нейтральной оси.

Здесь  $z$  — расстояние элементарной площадки  $dF$  от нейтральной оси; суммирование охватывает всю площадь сечения. Покажем в качестве примера вычисление этого интеграла для прямоугольника (Рис.1) высотой  $h$  и шириной  $b$ . Проведем через его центр тяжести  $O$  оси симметрии  $Oz$  и  $Oy$ . Если внешние силы, действующие на балку, лежат в плоскости  $Oz$ , то нейтральной осью будет ось  $Oy$ . Найдем относительно этой оси сначала момент инерции, а потом и момент сопротивления площади прямоугольника.

Площадки  $dF$ , на которые следует разбить всю площадь сечения, выберем в виде узких прямоугольников шириной  $b$  и высотой  $dz$  (Рис.1а). Тогда:

$$dF = b dz$$

и интеграл  $J$  принимает вид:

$$J_y = \int_F b z^2 dz$$

Чтобы взять интеграл по всей площади прямоугольника, следует  $z$  менять от  $-\frac{h}{2}$  до  $+\frac{h}{2}$ . Тогда

$$J_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} b z^2 dz = b \left[ \frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}$$

Момент сопротивления относительно нейтральной оси  $Oy$  мы получим, разделив  $J_y$  на  $z_{\max} = \frac{h}{2}$ :

$$W = \frac{J_y}{z_{\max}} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}$$

Если необходимо вычислить момент инерции и момент сопротивления прямоугольника относительно оси  $Oz$ , то в полученных формулах следовало бы  $b$  и  $h$  поменять местами: и

$$J_z = \frac{hb^3}{12} \quad W_z = \frac{hb^2}{6}$$

Заметим, что сумма произведений  $z^2 dF$  не изменится, если мы сдвинем все полоски  $dF = b dz$  параллельно самим себе так, что они расположатся в пределах параллелограмма  $ABCD$ .

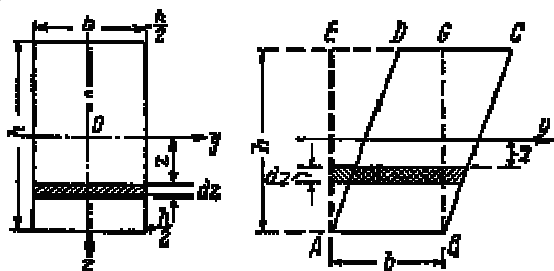


Рис.1 Расчетная модель для определения осевого момента инерции прямоугольника.

Иначе, момент инерции *параллелограмма* относительно оси  $y$  равен моменту инерции равновеликого ему прямоугольника

При вычислении момента инерции *круга* радиуса  $r$  (Рис.2) также разбиваем площадь на узкие полоски размером  $dz$  вдоль оси  $Oz$ ; ширина этих полосок  $b = b(z)$  тоже будет переменной по высоте сечения. Элементарная площадка

$$dF = b(z) dz$$

Момент инерции равен:

$$J = \int_F z^2 b(z) dz$$



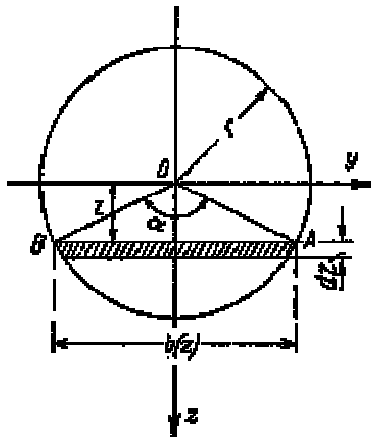


Рис.2 Расчетная модель для определения осевого момента инерции кругового сечения.

Так как верхняя и нижняя половины сечения одинаковы, то вычисление момента инерции достаточно провести для одной нижней и результат удвоить. Пределами для изменения  $z$  будут 0 и  $r$ :

$$J = 2 \int_0^r z^2 b(z) dz$$

Введем новую переменную интегрирования — угол  $\alpha$  (Рис.2); тогда

$$z = r \cos \frac{\alpha}{2}; dz = -\frac{1}{2} r \sin \frac{\alpha}{2} d\alpha$$

$$b(z) = 2r \sin \frac{\alpha}{2}$$

Пределы: при  $z = 0$   $\alpha = \pi$ ; при  $z = r$   $\alpha = 0$ , следовательно,

$$J = -2 \int_{\pi}^0 2r^4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{2} d\alpha = \frac{r^4}{2} \int_0^{\pi} \sin^2 \alpha d\alpha = \frac{\pi r^4}{4}$$

и

$$W = \frac{J}{z_{\max}} = \frac{J}{r} = \frac{\pi r^3}{4}$$

Для треугольного сечения (Рис.3) момент инерции относительно оси  $AB$  равен

$$J_{AB} = \int_z b_z dz z^2; \quad b_z = b \frac{h-z}{h} = b \left(1 - \frac{z}{h}\right),$$

$$J_{AB} = \int_0^h b z^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right) dz = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{12}$$

В последующем будет изложен метод вычисления момента инерции для сечения любой сложной формы относительно любой оси.

На практике из симметричных сечений встречаются чаще всего: для дерева — прямоугольник и круг, для металлов — двутавровое и тавровое сечения. Для прокатных профилей можно пользоваться таблицами ОСТ (сортамент), в которых помещены размеры и

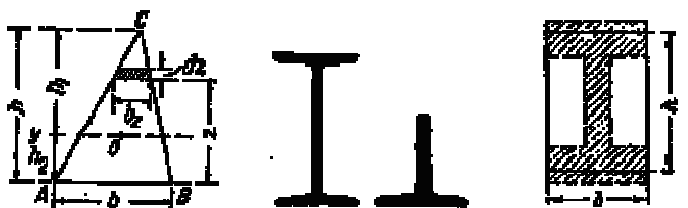


Рис.3 Расчетная модель для определения осевого момента инерции сечения треугольного профиля

величины  $J$  и  $W$  для профилей, выпускаемых заводами.

В балках из металла обычно применяются сложные поперечные сечения, потому что в них материал может быть использован экономичнее, чем в таких сечениях, как прямоугольник и круг.

Так, известно, что валы делают полыми, чтобы удалить ту часть материала, которая слабо работает. Известно также, что при изгибе балок материал около нейтральной оси принимает на себя малые нормальные напряжения и также не может быть использован полностью. Поэтому целесообразнее переделать прямоугольное сечение так, чтобы удалить материал у нейтральной оси и часть его сэкономить, а часть перенести в верхнюю и нижнюю зоны балки, где он будет работать более интенсивно. Так получается из прямоугольного сечения профиль *двутавра*, обладающего той же прочностью и меньшим весом. Применение двутавра целесообразно при материалах, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию (большинство металлов).

Сечения в виде *тавра*, применяются или в случаях, вызываемых специальными конструктивными обстоятельствами, или для таких материалов, как чугун, бетон, у которых сопротивления растяжению и сжатию резко разнятся между собой; последнее обстоятельство требует, чтобы напряжения в крайних волокнах были различными.

Как видно из изложенного, при решении вопроса о наиболее экономичном проектировании сечения следует стремиться к тому, чтобы при одной и той же площади  $F$  получить наибольший момент сопротивления и момент инерции. Это ведет к размещению большей части материала подальше от нейтральной оси.

Однако для некоторых сечений можно увеличить момент сопротивления не добавлением, а, наоборот, путем срезки некоторой части сечения, наиболее удаленной от нейтральной оси.

Так, например, для круглого сечения срезка заштрихованных сегментов (Рис.4) несколько увеличивает момент сопротивления, так как при этом мы уменьшаем момент инерции сечения в меньшей степени, чем расстояние до крайнего волокна  $z_{\max}$ .

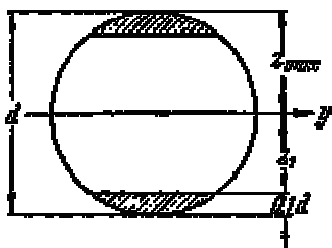


Рис.4 Срезка сегментов для увеличения осевого момента сопротивления.

Общий способ вычисления моментов инерции сложных сечений.

При проверке прочности частей конструкций нам приходится встречаться с сечениями довольно сложной формы, для которых нельзя вычислить момент инерции таким простым путем, каким мы пользовались для прямоугольника и круга.

Таким сечением может быть, например, тавр (Рис.5 а) кольцевое сечение трубы, работающей на изгиб (авиационные конструкции) (Рис.5, б), кольцевое сечение шейки вала или еще более сложные сечения. Все эти сечения можно разбить на простейшие, как-то: прямоугольники, треугольники, круги и т.д. Можно показать, что момент инерции такой сложной фигуры является суммой моментов инерции частей, на которые мы ее разбиваем.

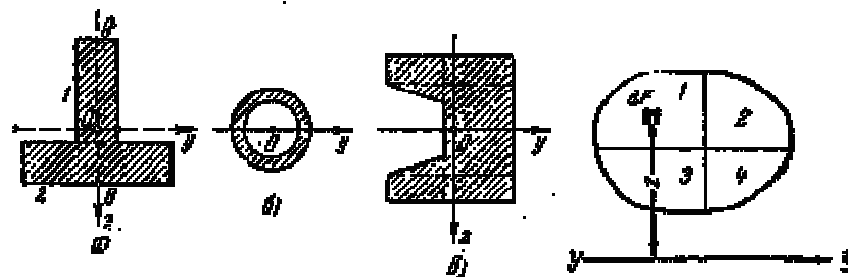


Рис.5 Сечения типа тавр — а) и кольцо б)

Известно, что момент инерции любой фигуры относительно оси  $y—y$  равен:

$$J_y = \int_F z^2 dF$$

где  $z$ —расстояние элементарных площадок  $dF$  до оси  $y—y$ .

Разобьем взятую площадь на четыре части:  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  и  $F_4$ . Теперь при вычислении момента инерции можно сгруппировать слагаемые в подинтегральной функции так, чтобы отдельно произвести суммирование для каждой из выделенных четырех площадей, а затем эти суммы сложить. Величина интеграла от этого не изменится.

Наш интеграл разобьется на четыре интеграла, каждый из которых будет охватывать одну из площадей  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  и  $F_4$ :

$$J_y = \int_F z^2 dF = \int_{F_1} z^2 dF + \int_{F_2} z^2 dF + \int_{F_3} z^2 dF + \int_{F_4} z^2 dF$$

Каждый из этих интегралов представляет собой момент инерции соответствующей части площади относительно оси  $y—y$ ; поэтому

$$J_y = J_y^I + J_y^{II} + J_y^{III} + J_y^{IV}$$

где  $J_y^I$ — момент инерции относительно оси  $y—y$  площади  $F_1$ ,  $J_y^{II}$ — то же для площади  $F_2$  и т. д.

Полученный результат можно формулировать так: момент инерции сложной фигуры равен сумме моментов инерции составных ее частей. Таким образом, нам необходимо уметь вычислять момент инерции любой фигуры относительно любой оси, лежащей в ее плоскости.

## 2. Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей.

Задачу — получить наиболее простые формулы для вычисления момента инерции любой фигуры относительно любой оси — будем решать в несколько приемов. Если взять серию осей, параллельных друг другу, то оказывается, что можно легко вычислить моменты инерции фигуры относительно любой из этих осей, зная ее момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести фигуры параллельно выбранным осям.

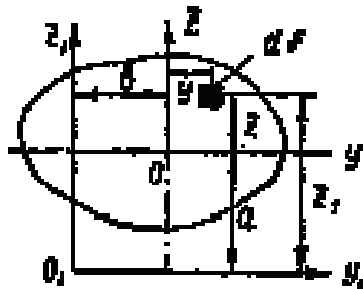


Рис. 1 Расчетная модель определения моментов инерции для параллельных осей.

Оси, проходящие через центр тяжести, мы будем называть *центральными осями*. Возьмем (Рис.1) произвольную фигуру. Проведем центральную ось  $Oy$ , момент инерции относительно этой оси назовем  $J_y$ . Проведем в плоскости фигуры ось  $y_1$  параллельно оси  $y$  на расстоянии  $a$  от нее. Найдем зависимость между  $J_y$  и  $J'_{y_1}$  — моментом инерции относительно оси  $y_1$ . Для этого напишем выражения для  $J_y$  и  $J'_{y_1}$ . Разобьем площадь фигуры на площадки  $dF$ ; расстояния каждой такой площадки до осей  $y$  и  $y_1$  назовем  $z$  и  $z_1$ . Тогда

$$J_y = \int_F z^2 dF \quad \text{и} \quad J'_{y_1} = \int_F z_1^2 dF$$

Из рис.1 имеем:

$$z_1 = z + a$$

Первый из этих трех интегралов — момент инерции относительно центральной оси  $Oy$ . Второй — статический момент относительно той же оси; он равен нулю, так как ось  $y$  проходит через центр тяжести фигуры. Наконец, третий интеграл равен площади фигуры  $F$ . Таким образом,

$$J'_{y_1} = J_y + a^2 F \quad (1)$$

т. е. момент инерции относительно любой оси равен моменту инерции относительно центральной оси, проведенной параллельно  $y$  данной, плюс произведение площади фигуры на квадрат расстояния между осями.

Значит, наша задача теперь свелась к вычислению только центральных моментов инерции; если мы их будем знать, то сможем вычислить момент инерции относительно любой другой оси. Из формулы (1) следует, что *центральный* момент инерции является *наименьшим* среди моментов инерции относительно параллельных осей и для него мы получаем:

$$J_y = J'_{y_1} - a^2 F$$

Найдем также центробежный момент инерции  $J'_{yz}$  относительно осей  $y_1 z_1$ ,

$$J'_{yz} = \int_F yz dF$$

параллельных центральному, если известен (Рис.1). Так как по определению

$$J'_{yz} = \int_F y_1 z_1 dF$$

где:  $y_1 = y + b$ ,  $z_1 = z + a$ , то отсюда следует

$$J'_{yz} = \int_F (y + b)(z + a) dF = \int_F yz dF + ab \int_F dF + a \int_F y dF + b \int_F z dF$$

Так как два последних интеграла представляют собой статические моменты площади относительно центральных осей  $Oy$  и  $Oz$  то они обращаются в нуль и, следовательно:

$$J'_{yz} = J_{yz} + ab \cdot F \quad (2)$$

Центробежный момент инерции относительно системы взаимно перпендикулярных осей, параллельных центральному, равен центробежному моменту инерции относительно этих центральных осей плюс произведение из площади фигуры, на координаты ее центра тяжести относительно новых осей.

Зависимость между моментами инерции при повороте осей.

Центральных осей можно провести сколько угодно. Является вопрос, нельзя ли выразить момент инерции относительно любой центральной оси в зависимости от момента инерции относительно одной или двух *определенных* осей. Для этого посмотрим,

как будут меняться моменты инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей при повороте их на угол  $\alpha$ .

Возьмем какую-либо фигуру и проведем через ее центр тяжести  $O$  две взаимно перпендикулярные оси  $Oy$  и  $Oz$  (Рис.2).

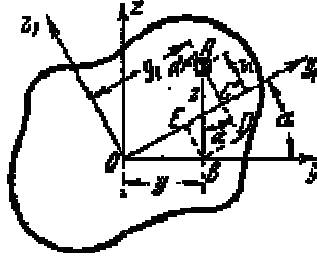


Рис.2 Расчетная модель для определения моментов инерции для повернутых осей.

Пусть нам известны осевые моменты инерции относительно этих осей  $J_y, J_z$ , а также центробежный момент инерции  $J_{yz}$ . Начертим вторую систему координатных осей  $y_1$  и  $z_1$  наклоненных к первым под углом  $\alpha$ ; положительное направление этого угла будем считать при повороте осей вокруг точки  $O$  против часовой стрелки. Начало координат  $O$  сохраняем. Выразим моменты относительно второй системы координатных осей  $J'_{y_1}$  и  $J'_{z_1}$ , через известные моменты инерции  $J_y$  и  $J_z$ .

Напишем выражения для моментов инерции относительно этих осей:

$$\left. \begin{aligned} J_y &= \int_F z^2 dF; J_z = \int_F y^2 dF \\ J'_{y_1} &= \int_F z_1^2 dF; J'_{z_1} = \int_F y_1^2 dF \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Из чертежа видно, что координаты площадки  $dF$  в системе повернутых осей  $y_1, z_1$  будут:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= OE + EC = OE + BD = y \cos \alpha + z \sin \alpha \\ z_1 &= AD - DC = AD - BE = z \cos \alpha - y \sin \alpha \end{aligned} \right\}$$

Подставляя эти значения  $y_1$  и  $z_1$  в формулы (14.9), получим:

$$J'_{y_1} = \int_F (z \cos \alpha - y \sin \alpha)^2 dF = \int_F (z^2 \cos^2 \alpha + y^2 \sin^2 \alpha - 2yz \sin \alpha \cos \alpha) dF,$$

или

$$J'_{y_1} = \cos^2 \alpha \int_F z^2 dF + \sin^2 \alpha \int_F y^2 dF - \sin 2\alpha \int_F yz dF \quad (4)$$

Аналогично:

$$J'_{z_1} = \int_F (y \cos \alpha + z \sin \alpha)^2 dF$$

или

$$J'_{z_1} = \sin^2 \alpha \int_F z^2 dF + \cos^2 \alpha \int_F y^2 dF + \sin 2\alpha \int_F yz dF \quad (5)$$

Первые два интеграла выражений (4) и (5) представляют собой осевые моменты инерции  $J_y$  и  $J_z$ , а последний — центробежный момент инерции площади относительно этих осей  $J_{yz}$ . Тогда:

$$\left. \begin{aligned} J'_{y_1} &= J_y \cos^2 \alpha + J_z \sin^2 \alpha - J_{yz} \sin 2\alpha \\ J'_{z_1} &= J_y \sin^2 \alpha + J_z \cos^2 \alpha + J_{yz} \sin 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Для решения задач могут понадобиться формулы перехода от одних осей к другим для центробежного момента инерции. При повороте осей (Рис.2) имеем:

$$J'_{yz} = \int_F y_1 z_1 dF$$

где  $y_1$  и  $z_1$  вычисляются по формулам (14.10); тогда

$$J'_{yz} = \int_F (z \sin \alpha + y \cos \alpha)(z \cos \alpha - y \sin \alpha) dF = \\ \sin \alpha \cos \alpha \int_F z^2 dF - \sin \alpha \cos \alpha \int_F y^2 dF + \cos^2 \alpha \int_F yz dF - \sin^2 \alpha \int_F yz dF$$

После преобразований получим:

$$J'_{yz} = \frac{1}{2} (J_y - J_z) \sin 2\alpha + J_{yz} \cos 2\alpha \quad (7)$$

Таким образом, для того чтобы вычислить момент инерции относительно любой центральной оси  $y_1$ , надо знать моменты инерции  $J_y$  и  $J_z$  относительно системы каких-нибудь двух взаимно перпендикулярных центральных осей  $Oy$  и  $Oz$ , центробежный момент инерции  $J_{yz}$  относительно тех же осей и угол наклона оси  $y_1$  к оси  $y$ .

Для вычисления же величин  $J_y > J_z$ ,  $J_{yz}$  приходится так выбирать оси  $y$  и  $z$  и разбивать площадь фигуры на такие составные части, чтобы иметь возможность произвести это вычисление, пользуясь только формулами перехода от центральных осей каждой из составных частей к осям, им параллельным. Как это сделать на практике, будет показано ниже на примере. Заметим, что при этом вычислении сложные фигуры надо разбивать на такие элементарные части, для которых по возможности известны величины центральных моментов инерции относительно системы взаимно перпендикулярных осей.

Заметим, что ход вывода и полученные результаты не изменились бы, если бы начало координат было взято не в центре тяжести сечения, а в любой другой точке  $O$ . Таким образом, формулы (6) и (7) являются формулами перехода от одной системы взаимно-перпендикулярных осей к другой, повернутой на некоторый угол  $\alpha$ , независимо от того, центральные это оси или нет.

Из формул (6) можно получить еще одну зависимость между моментами инерции при повороте осей. Сложив выражения для  $J'_y$  и  $J'_z$  получим

$$J'_y + J'_z = J_y (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + J_z (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = J_y + J_z$$

т. е. сумма моментов инерции относительно любых взаимно перпендикулярных осей  $y$  и  $z$  не меняется при их повороте. Подставляя последнее выражение вместо  $J_y$  и  $J_z$  их значения, получим:

$$J_y + J_z = \int_F z^2 dF + \int_F y^2 dF = \int_F (z^2 + y^2) dF = \int_F p^2 dF = J_p$$

где  $p = \sqrt{y^2 + z^2}$  — расстояние площадок  $dF$  от точки  $O$ . Величина  $J_p = \int_F p^2 dF$  является, как уже известно, полярным моментом инерции сечения относительно точки  $O$ .

Таким образом, полярный момент инерции сечения относительно какой-либо точки равен сумме осевых моментов инерции относительно взаимно перпендикулярных осей, проходящих через эту точку. Поэтому эта сумма и остается постоянной при повороте осей. Этой зависимостью (14.16) можно пользоваться для упрощения вычисления моментов инерции. Так, для круга:

$$J_p = \frac{\pi R^4}{2}$$

Так как по симметрии для круга  $J_z = J_y$  то

$$J_x = J_y = \frac{J_z}{2} = \frac{\pi r^4}{4}$$

что было получено выше путем интегрирования.

Точно также для тонкостенного кольцевого сечения можно получить:

$$J_y = \frac{J_z}{2} \approx \pi r_0^3 t$$

### 3. Изменение моментов инерции при повороте осей.

Пусть нам известны собственные моменты инерции  $I_x$ ,  $I_y$  и  $I_{xy}$  относительно двух взаимно перпендикулярных осей  $x$  и  $y$ , проходящих через центр тяжести  $S$  поперечного сечения стержня. Проведем через точку  $S$  другие оси  $x'$  и  $y'$ , повернутые относительно осей  $x$  и  $y$  на угол  $\alpha$  (рис. 4.3, б). Будем считать этот угол положительным **при повороте осей координат** против хода часовой стрелки.

**Моменты инерции поперечного сечения при повороте осей координат** определяются по формулам:

$$I_{x'} = (I_x + I_y)/2 + (I_x - I_y)\cos 2\alpha/2 - I_{xy} \sin 2\alpha,$$

$$I_{y'} = (I_x + I_y)/2 - (I_x - I_y)\cos 2\alpha/2 + I_{xy} \sin 2\alpha$$

$$I_{x'y'} = (I_x - I_y)\sin 2\alpha/2 + I_{xy} \cos 2\alpha$$

Из формул моментов инерции при повороте осей координат видно, что сумма собственных осевых моментов инерции не изменяется при повороте координатных осей:  $I_x + I_y = I_{x'} + I_{y'} = \text{const}$

Две взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр тяжести фигуры, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются главными центральными осями инерции. Тогда из третьей формулы моментов инерции при повороте осей координат легко можно определить направление этих осей:

$$\tan 2\alpha_0 = -2I_{xy}/(I_x - I_y)$$

Из полученного выражения найдем два значения угла  $\alpha_0$ , которые отличаются друг от друга на угол  $90^\circ$ , которые определяют положение двух главных центральных осей.

### 4. Кручение. Определение напряжения.

Крутящие моменты, о которых шла речь выше, представляют лишь равнодействующие внутренние усилия. Фактически в поперечном сечении скручиваемого стержня действуют непрерывно распределенные внутренние касательные напряжения, к определению которых теперь и перейдем.

Ознакомимся прежде всего с результатами опытов. Если на поверхность стержня круглого сечения нанести прямоугольную сетку, то после деформации окажется (рис. 2.6):

1) прямоугольная сетка превратится в сетку, состоящую из параллелограммов, что свидетельствует о наличии касательных напряжений в поперечных сечениях бруса, а по закону парности касательных напряжений - и в продольных его сечениях;

2) расстояния между окружностями, например между I и II, не изменятся. Не изменится длина стержня и его диаметр. Естественнo допустить, что каждое поперечное сечение поворачивается в своей плоскости на некоторый угол, как жесткое целое (гипотеза плоских и жестких сечений). На основании этой гипотезы можно считать, что радиусы всех поперечных сечений будут поворачиваться (на равные углы), оставаясь прямолинейными.

На основании этого можно принять, что при кручении в поперечных сечениях стержня действуют только касательные напряжения, т.е. напряженное состояние в точках скручиваемого стержня представляет собой чистый сдвиг.

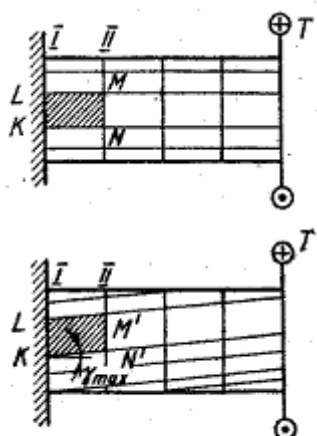


Рис. 2.6

Формулы, полученные на основе этого допущения, подтверждаются опытами. Точка D переместится по дуге DD', точка C - по меньшей дуге CC' (рис. 2.7).

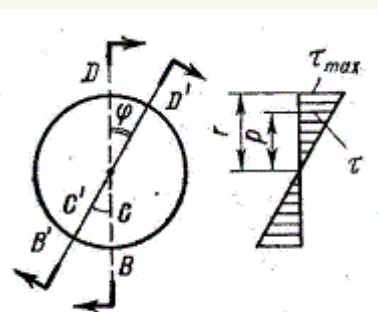


Рис. 2.7

Для установления закона распределения касательных напряжений по поперечному сечению скручиваемого стержня рассмотрим более детально деформации стержня (рис. 2.6 и 2.8). На рис. 2.8 в более крупном масштабе изображена часть стержня между сечениями I и II и показана одна сторона KN элемента KLMN (рис. 2.6).

Угол сдвига для элемента KLMN, лежащего на поверхности стержня, равен отношению отрезка NN' к длине элемента dz (см. рис. 2.8)

$$\gamma_{\max} = r d\varphi / dz. \quad (2.1)$$

Выделяя мысленно из рассматриваемой части бруса цилиндр произвольного радиуса  $\rho$  и повторяя те же рассуждения, получим угол сдвига для элемента, отстоящего на расстоянии  $\rho$  от оси стержня

$$\gamma = \rho d\varphi / dz. \quad (2.2)$$

на основании закона Гука при сдвиге имеем

$$\tau = G\gamma = G\rho \frac{d\varphi}{dz}. \quad (2.3)$$

Как видим, при кручении деформации сдвига и касательные напряжения прямо пропорциональны расстоянию от центра тяжести сечения.

Эпюра касательных напряжений по поперечному сечению стержня представлена на рис. 2.7 справа.

В центре тяжести круглого сечения касательные напряжения равны нулю. Наибольшие касательные напряжения будут в точках сечения, расположенных у



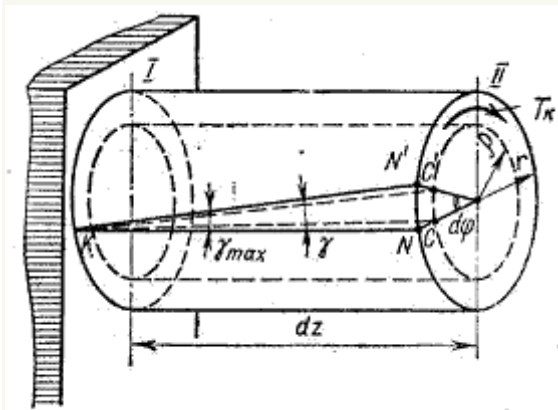


Рис. 2.8

Зная закон распределения касательных напряжений, легко определить их величину из условия, что крутящий момент в сечении представляет собой равнодействующий момент касательных напряжений в сечении:

$$T_K = \int_A \tau \rho dA, \quad (2.4)$$

где  $\tau \rho dA$  - элементарный крутящий момент внутренних сил, действующий по площадке  $dA$ .

Подставив в (2.4) значение напряжений из формулы (2.3) получим

$$T_K = G \frac{d\varphi}{dz} \int_A \rho^2 dA. \quad (2.5)$$

Имея

ввиду,

что

$$\int_A \rho^2 dA = I_p, \quad (2.6)$$

где  $I_p$  - полярный момент инерции сечения, получим

$$d\varphi/dz = T_K / (G I_p). \quad (2.7)$$

Подставляя

значение  $d\varphi/dz$  в

формулу

(2.3),

имеем

$$\tau = T_K \rho / I_p. \quad (2.8)$$

В частном случае, когда на стержень действует один внешний скручивающий момент  $T$  (рис. 2.9), из условия равновесия отсеченной части стержня получим  $T_K = T$ .

Таким образом, окончательная формула для определения касательных напряжений при кручении имеет вид

$$\tau = T_K \rho / I_p. \quad (2.9)$$

Как видно из этой формулы, в точках, одинаково удаленных от центра сечения, напряжения  $\tau$  одинаковы.

Наибольшие напряжения в точках у контура сечения равны

$$\tau_{max} = T_K r / I_p = T_K / W_p, \quad (2.10)$$

где

$$W_p = I_p / r. \quad (2.11)$$

Геометрическая характеристика  $W_p$  называется полярным моментом сопротивления или моментом сопротивления при кручении.

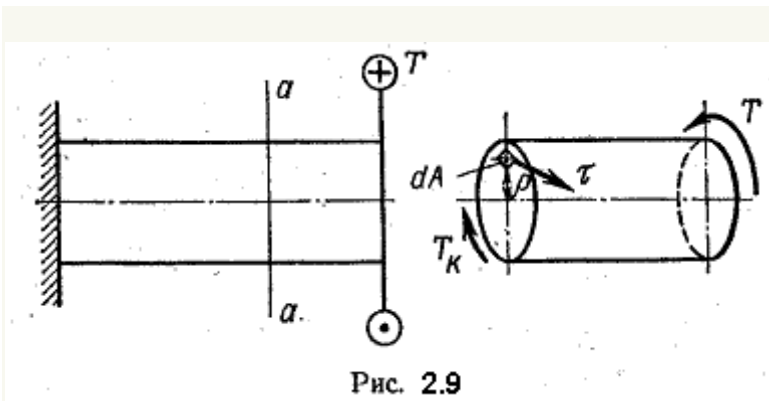


Рис. 2.9

Для круглого сплошного сечения

$$W_p = \frac{I_p}{r} = \frac{\pi d^4}{32d/2} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3. \quad (2.12)$$

Для кольцевого сечения

$$W_p = \frac{2I_p}{D} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{16D} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - c^4) \approx 0,2D^3 (1 - c^4), \quad (2.13)$$

где  $c = d/D$ .

##### 5. Условия прочности и условия жесткости.

Условие статической прочности вала при кручении имеет вид

$$\tau_{\max} = T_K / W_p \leq [\tau]. \quad (2.14)$$

Здесь  $[\tau]$  - допускаемое касательное напряжение.

При действии статической нагрузки принимают (без учета концентрации напряжений и других факторов, снижающих прочность)

$$[\tau] = (0,5 - 0,6) [\sigma_p].$$

Кроме проверки прочности, по этой формуле можно также подбирать диаметр вала или определять допускаемый крутящий момент при известных остальных величинах.

Имея в виду, что для круглого сплошного сечения  $W_p \approx 0,2 d^3$ , получаем

$$d = \sqrt[3]{T_K / (0,2 [\tau])} = 1,72 \sqrt[3]{T_K / [\tau]}. \quad (2.15)$$

По этой формуле определяют диаметр вала из условия прочности.

Допускаемый из условия прочности крутящий момент определяют по формуле

$$[T_K] = W_p [\tau]. \quad (2.16)$$

Касательные напряжения действуют не только в поперечных сечениях стержня, но и (как это следует из закона парности касательных напряжений) в продольных сечениях (рис. 2.10).

В наклонных же сечениях стержня действуют и нормальные и касательные напряжения. Они могут быть вычислены.

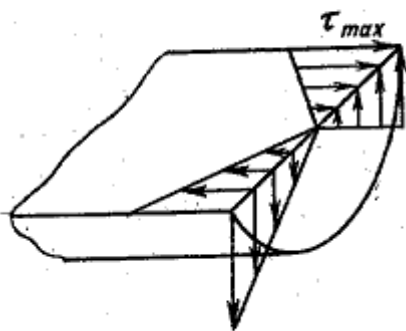


Рис. 2.10

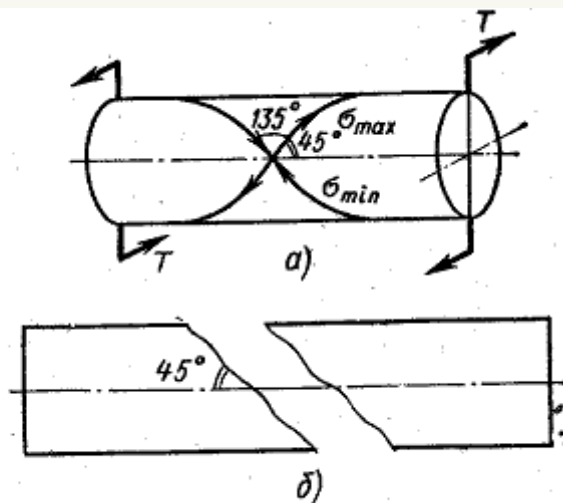


Рис. 2.11

Опыты показывают, что хрупкие материалы, например чугун, при кручении разрушаются по плоскости (говоря точнее, по винтовой поверхности), наклоненной к оси вала под углом 45 градусов (рис. 2.11, б), т.е. по тем плоскостям, где действуют наибольшие растягивающие напряжения.

Следовательно, при кручении во всех точках стержня, кроме точек его оси (в которых вообще не возникает напряжений), имеет место двухосное напряженное состояние - чистый сдвиг. При кручении материал у поверхности стержня напряжен сильнее, чем материал, расположенный, ближе к оси стержня. Таким образом, напряженное состояние является неоднородным. Если же скручивать тонкостенную трубу, то можно считать, что практически во всех точках ее стенки возникают одинаковые напряжения, т.е. в этом случае напряженное состояние будет однородным. Опыты с кручением таких труб используют обычно для изучения чистого сдвига и, в частности, для установления предела текучести при сдвиге  $\tau_f$ .

### 1.3 Лекция № 3 (2 часа).

**Тема:** «Прямозубые, косозубые, конические передачи»

#### 1.3.1 Вопросы лекции:

1. Классификация механических передач.
2. Геометрия и кинематика эвольвентных зубчатых передач.
3. Конструкции зубчатых колёс.
4. Расчёт прямозубых цилиндрических передач на прочность.
5. Общие сведения о конических передачах.
6. Геометрические расчёты конических передач.
7. Понятие об эквивалентном колесе.
8. Расчёт конических передач на прочность.

#### 1.3.2 Краткое содержание вопросов:

1. Классификация механических передач.

Не существует абсолютной, полной и завершённой классификации всех существующих деталей машин, т.к. конструкции их многообразны и, к тому же, постоянно разрабатываются новые.

Для ориентирования в бесконечном многообразии детали машин классифицируют на **типовые** группы по характеру их использования [1,10,11].

- ➔ ПЕРЕДАЧИ передают движение от источника к потребителю.
- ➔ ВАЛЫ и ОСИ несут на себе вращающиеся детали передач.
- ➔ ОПОРЫ служат для установки валов и осей.

- ➔ МУФТЫ соединяют между собой валы и передают вращающий момент.
- ➔ СОЕДИНИТЕЛЬНЫЕ ДЕТАЛИ (СОЕДИНЕНИЯ) соединяют детали между собой.
- ➔ УПРУГИЕ ЭЛЕМЕНТЫ смягчают вибрацию и удары, накапливают энергию, обеспечивают постоянное сжатие деталей.
- ➔ КОРПУСНЫЕ ДЕТАЛИ организуют внутри себя пространство для размещения всех остальных деталей, обеспечивают их защиту.

Рамки учебного курса не позволяют изучить все разновидности деталей машин и все нюансы проектирования. Однако знание, по крайней мере, типовых деталей и общих принципов конструирования машин даёт инженеру надёжный фундамент и мощный инструмент для выполнения проектных работ практически любой сложности.

В следующих главах мы рассмотрим приёмы расчёта и проектирования типовых деталей машин.

## ПЕРЕДАЧИ

Современные машины приводятся в движение главным образом топливными и электрическими двигателями. В силу специфики законов термогазодинамики и электромагнетизма, эти двигатели более быстроходны, чем было бы удобно для человека, к тому же их скорость сложно и плохо регулируется. Возникает необходимость согласования режимов работы двигателя и исполнительного органа [6,10], с которым, собственно, и имеет дело оператор. Для этого созданы передачи.

Механическими передачами или просто передачами называются механизмы, которые преобразуют параметры движения от двигателя к исполнительным органам машины [1,10].

Механическая энергия передаётся, как правило, с преобразованием скоростей и вращающих моментов, а иногда с преобразованием вида и закона движения.

Передачи по принципу работы разделяются на:

- ➔ Передачи **зацеплением**:
  - ➔ с непосредственным контактом (зубчатые и червячные);
  - ➔ с гибкой связью (цепные, зубчато-ременные).
- ➔ Передачи **трением (сцеплением)** трущихся поверхностей):
  - ➔ с непосредственным контактом поверхностей (фрикционные);
  - ➔ с гибкой связью (ременные).

## ПЕРЕДАЧИ ЗАЦЕПЛЕНИЕМ

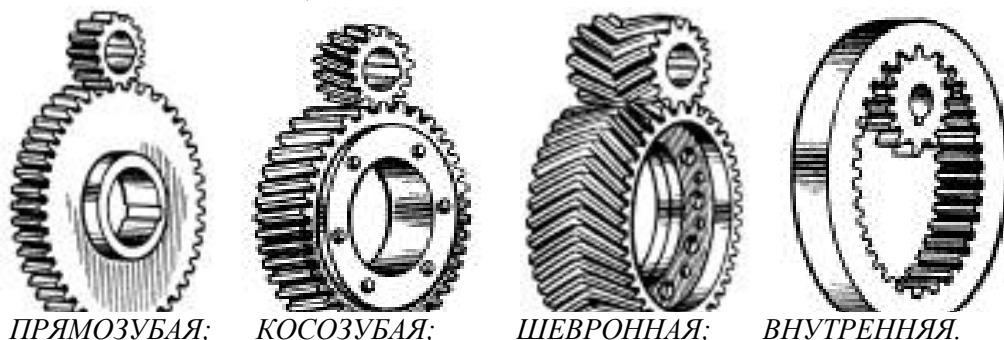
Передают движение с помощью последовательно зацепляющихся зубьев [1].

### ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ

Передают вращающий момент между параллельными валами.

Прямозубые колёса (около 70%) применяют при невысоких и средних скоростях, когда динамические нагрузки от неточности изготовления невелики, в планетарных, открытых передачах, а также при необходимости осевого перемещения колёс.

## ОСНОВНЫЕ ВИДЫ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ



ПРЯМОЗУБАЯ;

КОСОЗУБАЯ;

ШЕВРОННАЯ;

ВНУТРЕННЯЯ.

Косозубые колёса (более 30%) имеют большую плавность хода и применяются для ответственных механизмов при средних и высоких скоростях.

Шевронные колёса имеют достоинства косозубых колёс плюс уравновешенные осевые силы и используются в высоконагруженных передачах.

Колёса внутреннего зацепления вращаются в одинаковых направлениях и применяются обычно в планетарных передачах.

Выбор параметров цилиндрических зубчатых передач обусловлен конструктивными и технологическими условиями.

Передаточное отношение  $U$  определяется соотношением угловых скоростей ( $\omega$ ) или частот вращения ( $n$ ) ведомого и ведущего колёс  $U = \omega_1 / \omega_2 = n_1 / n_2$ .

Здесь и далее индексы 1 и 2 расставлены в порядке передачи механической энергии 1- ведущее (шестерня), 2- ведомое (колесо). Учитывая, что в зацепление входят колёса с одинаковым модулем (ГОСТ 9563-60), можно задавшись числом зубьев шестерни  $Z_1$  найти число зубьев колеса

$$Z_2 = U * Z_1.$$

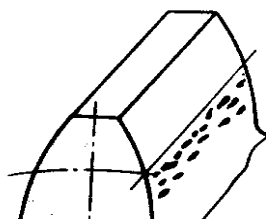
Передаточное число  $U$  ограничено габаритами зубчатой передачи.

Его рекомендуется принимать в диапазоне от 2 до 6. Нормальный ряд значений  $U$  стандартизирован в ГОСТ 2185-66.

Ширина колеса задаётся обычно коэффициентом ширины  $\Psi_a = b / A_w$ , где  $b$  – ширина венца;  $A_w$  – межосевое расстояние (ГОСТ 2185-66).

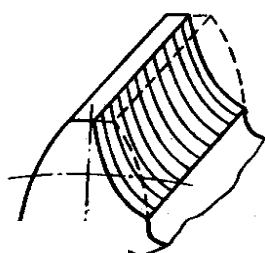
### Критерии расчёта эвольвентных зубьев

Поскольку колёса в зацеплении взаимодействуют своими зубьями, то весьма часто в эксплуатации наблюдаются различные повреждения их рабочих поверхностей.



**Усталостное выкрашивание** является наиболее серьёзным и распространённым дефектом поверхности зубьев даже для закрытых хорошо смазываемых и защищённых от загрязнения передач.

На рабочих поверхностях появляются небольшие углубления, которые затем превращаются в раковины. Выкрашивание носит усталостный характер и вызвано контактными напряжениями, которые изменяются по отнулевому пульсирующему циклу.

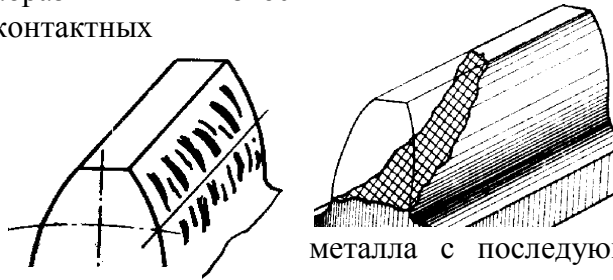


Выкрашивание приводит к повышению контактного давления и нарушению работы передачи. В открытых передачах поверхностные слои истираются раньше, чем в них появляются усталостные трещины, поэтому выкрашивание появляется весьма редко.

Для предупреждения выкрашивания необходимо повышать твёрдость материала термообработкой либо повышать степень точности передачи, а также правильно назначать размеры

из расчёта на усталость по контактным напряжениям.

**Абразивный износ** является основной причиной выхода из строя передач при плохой смазке. Это, в первую очередь, открытые передачи, а также закрытые, но находящиеся в засорённой среде: в горных, дорожных, строительных, транспортных машинах. У изношенных передач повышаются зазоры в зацеплении и, как следствие, усиливаются шум, вибрация, динамические перегрузки; искажается форма зуба; уменьшаются размеры поперечного сечения, а значит и прочность зуба. Основные меры предупреждения износа – повышение твёрдости поверхности зубьев, защита от загрязнения, применение специальных масел. В расчёте на контактную выносливость абразивный износ учитывается занижением допускаемых контактных напряжений.

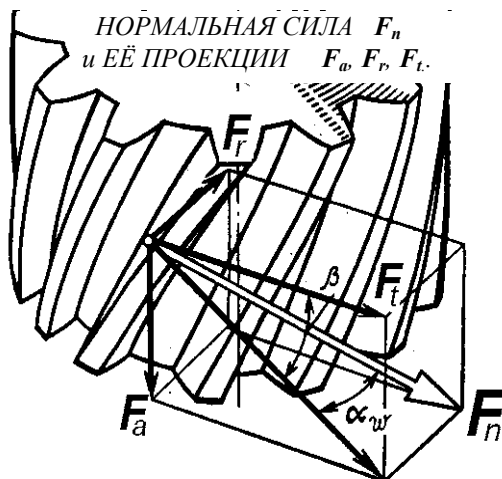


**Заедание** происходит в высоконагруженных и высокоскоростных передачах. В месте контакта зубьев возникает повышенная температура, приводящая к молекулярному сцеплению металла с последующим отрывом. Вырванные частицы затем царапают трущиеся поверхности.

Обычно заедания происходят вследствие выдавливания масляной плёнки между зубьев при совместном действии высоких давлений и скоростей.

Меры предупреждения здесь те же, что и при абразивном износе. Рекомендуются также фланкирование зубьев, правильный выбор сорта масла и его охлаждение.

Другой, реже встречающийся, но не менее опасный вид поломок – **излом зуба**. Такая поломка связана с напряжениями изгиба, также имеющими отнулевой пульсирующий характер. Излом зуба может привести к весьма тяжким последствиям вплоть до разрушения валов и подшипников, а иногда и всего механизма. Для предупреждения излома проводится расчёт зуба по напряжениям изгиба. Такой расчёт для закрытых передач выполняется в качестве проверочного после расчёта на контактные напряжения. Для открытых передач, где высока вероятность случайных перегрузок, этот расчёт выполняется как проектировочный.



Усталостное выкрашивание, абразивный износ и заедание обусловлены **поверхностной прочностью**, а излом – **объёмной прочностью** зубьев.

Поскольку поверхностные повреждения – главный вид поломок для закрытых передач, то расчёт на контактную выносливость выполняют в качестве проектировочного; расчёт на изгиб – в качестве проверочного. Для открытых передач всё наоборот, т.к. режим работы временный или даже разовый, а перегрузки значительные.

Для выполнения расчётов на поверхностную и объёмную прочность рассмотрим силы в зубчатом зацеплении.

### Силы в зубчатом зацеплении

Фактически, движение передаётся зубчатым зацеплением посредством силы нормального давления в точке контакта зубьев  $F_n$ , которая определяется, как интеграл от контактных напряжений  $\sigma_k$  по всей площади  $S$  контакта зубьев  $F_n = \int_S (\sigma_k) dS$ .

Однако этот интеграл вычислить практически невозможно, т.к. неизвестен точный вид функции  $\sigma_k$ .

Используют другой приём: ещё неизвестную силу нормального давления  $F_n$  сначала раскладывают на три ортогональных проекции:

→ осевую силу  $F_a$ , направленную параллельно оси колеса;  
 → радиальную силу  $F_r$ , направленную по радиусу к центру колеса;  
 → окружную силу  $F_t$ , направленную касательно к делительной окружности.

Легче всего вычислить силу  $F_t$ , зная передаваемый вращающий момент  $M_{вп}$  и делительный диаметр  $d_w$

$$F_t = 2M_{вп} / d_w$$

Радиальная сила вычисляется, зная угол зацепления  $\alpha_w$

$$F_r = F_t \operatorname{tg} \alpha_w$$

Осевая сила вычисляется через окружную силу и угол наклона зубьев  $\beta$

$$F_a = F_t \operatorname{tg} \beta$$

Наконец, если необходимо, зная все проекции, можно вычислить и модуль нормальной силы

$$F_n = (F_a^2 + F_r^2 + F_t^2)^{1/2} = F_t / (\cos \alpha_w \cos \beta).$$

Нормальная сила распределена по длине контактной линии, поэтому, зная длину  $l_\Sigma$  контактной линии, можно вычислить удельную погонную нормальную нагрузку  $q_n = F_n / l_\Sigma \approx F_t / (b \varepsilon_\alpha k_\varepsilon \cos \alpha_w \cos \beta)$ ,

где  $\varepsilon_\alpha$  - коэффициент перекрытия,  $k_\varepsilon$  - отношение минимальной длины контактной линии к средней.

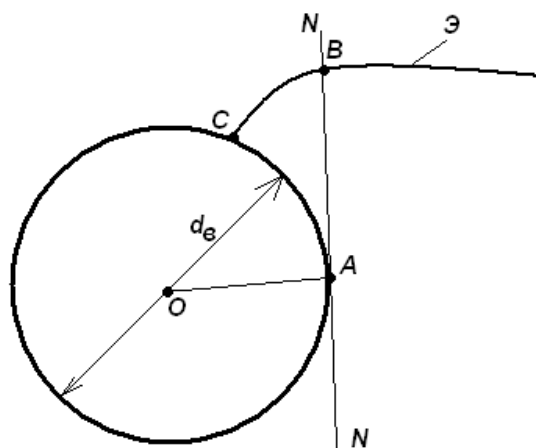
Для двух цилиндрических колёс в зацеплении одноимённые силы равны, но противоположны. Окружная сила для шестерни противоположна направлению вращения, окружная сила для колеса направлена в сторону вращения.

## 2. Геометрия и кинематика эвольвентных зубчатых передач.

При работе зубчатой передачи зубья шестерни входят во впадины зубьев колеса и дают боковой (рабочей) поверхностью на них. Линии контакта при вращении колёс перемещаются от вершины к ножке зуба, при этом передаточное число должно оставаться постоянным в любой точке касания. Из множества профилей, удовлетворяющих этому требованию, наиболее распространены эвольвентные, которые просты и удобны в изготовлении. Профили зуба эвольвентного зацепления образуются двумя симметричными эвольвентами.

*Эвольвентой называется кривая, которую описывает какая-либо точка, лежащая на прямой линии, перекатываемой по окружности без скольжения.*

Перекатываемая прямая называется производящей прямой, а окружность, по которой перекатывается производящая прямая, - основной окружностью. Точка пересечения производящей прямой  $NN$  и линии центров называется полюсом зацепления. При  $u = \text{const}$  полюс неподвижен.



$d_б$  – диаметр основной окружности;  $NN$  – производящая прямая.

Единственный параметр эвольвенты, определяющий ее форму, – диаметр основной окружности  $d_б$ . С ростом  $d_б$  эвольвента становится более пологой и при  $d_б \rightarrow \infty$  обращается в прямую линию. Поэтому профиль зуба рейки прямолинейный.

Профиль зуба по эвольвенте расположен вне основной окружности. Радиус кривизны эвольвенты в любой ее точке равен длине дуги  $CA=AB$ , центр кривизны эвольвенты всегда лежит на основной окружности (в точке  $A$ ).

Образующая прямая  $NN$  нормальна к эвольвенте в любой точке (любая нормаль к эвольвенте является касательной к основной окружности).

#### Геометрические параметры эвольвентного зацепления

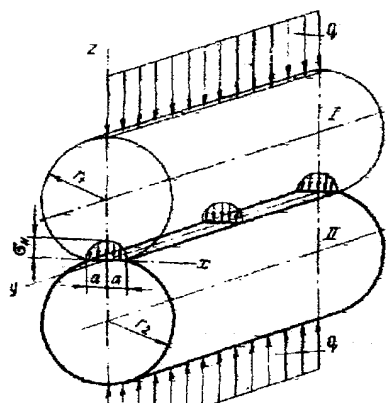
Геометрические термины, определения и обозначения зубчатых цилиндрических передач установлены по ГОСТ 16531-70.

### Критерии расчёта эвольвентных зубьев

Поскольку колёса в зацеплении взаимодействуют своими зубьями, то весьма часто в эксплуатации наблюдаются различные повреждения их рабочих поверхностей.

#### 3. Конструкции зубчатых колёс.

##### СЖАТИЕ ЦИЛИНДРОВ



4. Расчёт прямозубых цилиндрических передач на прочность.

#### Расчёт зубьев на контактную выносливость

Аналитическими методами теории прочности можно получить точное решение для вычисления напряжений в контакте двух эвольвентных профилей. Однако это слишком усложнит задачу, поэтому на малой площадке контакта геометрия эвольвентных профилей корректно подменяется

контактом двух цилиндров. Для этого случая используют формулу Герца-Беляева:

$$\sigma_{\kappa} = \sqrt{\frac{E_{np} q_n}{2\pi(1-\nu^2)\rho_{np}}} \leq [\sigma]_H^E.$$

Здесь  $E_{np}$  – приведённый модуль упругости материалов шестерни и колеса

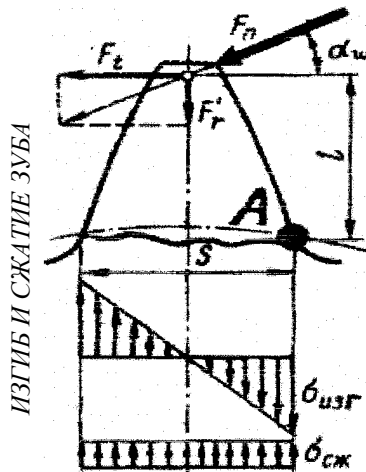
$$E_{np} = 2 E_1 E_2 / (E_1 + E_2),$$

$\rho_{np}$  – приведённый радиус кривизны зубьев



$$1/\rho_{np} = 1/\rho_1 \pm 1/\rho_2, \quad \rho_{1,2} = 0,5d_{w1,2} \sin \alpha_w,$$

$\nu$  - коэффициент Пуассона,  $q_n$  - удельная погонная нормальная нагрузка,  $[\sigma]_H^E$  - допускаемые контактные напряжения с учётом фактических условий работы.



Расчёт зубьев на контактную выносливость для закрытых передач (длительно работают на постоянных режимах без перегрузок) выполняют как проектировочный. В расчёте задаются передаточным отношением, которое зависит от делительных диаметров и определяют межосевое расстояние  $A_w$  (или модуль  $m$ ), а через него и все геометрические параметры зубьев. Для открытых передач контактные дефекты не характерны и этот расчёт выполняют, как проверочный, вычисляя контактные напряжения и сравнивая их с допускаемыми.

### Расчёт зубьев на изгиб

Зуб представляют как консольную балку переменного сечения, нагруженную окружной и радиальной силами (изгибом от осевой силы пренебрегают). При этом окружная сила стремится изогнуть зуб, вызывая максимальные напряжения изгиба в опасном корневом сечении, а радиальная сила сжимает зуб, немного облегчая его напряжённое состояние.

$$\sigma_A = \sigma_{изг} A - \sigma_{сжатия} A.$$

Напряжения сжатия вычитаются из напряжений изгиба. Учитывая, что напряжения изгиба в консольной балке равны частному от деления изгибающего момента  $M_{изг}$  на момент сопротивления корневого сечения  $W$ , а напряжения сжатия это сила  $F_r$ , делённая на площадь корневого сечения зуба, получаем:

$$\sigma_A = \frac{M_{изг}}{W} - \frac{F_r}{bS} = \frac{F_t}{b} \left( \frac{6l}{S^2} - \frac{tg \alpha_w}{S} \right) \frac{m}{m} = \frac{F_t}{bm} Y_H$$

Здесь  $b$  – ширина зуба,  $m$  – модуль зацепления,  $Y_H$  – коэффициент прочности зуба.

Иногда используют понятие коэффициента формы зуба  $Y_{FN} = 1 / Y_H$ .

Таким образом, получаем в окончательном виде условие прочности зуба на изгиб:  $\sigma_A = q_n Y_H / m \leq [\sigma]_{FE}$ . Полученное уравнение решают, задавшись свойствами выбранного материала.

Допускаемые напряжения на изгиб (индекс F) и контактные (индекс H) зависят от свойств материала, направления приложенной нагрузки и числа циклов наработки передачи  $[\sigma]_{FE} = [\sigma]_F K_F K_{FC} / S_F$ ;  $[\sigma]_{HE} = [\sigma]_H K_H / S_H$ .

Здесь  $[\sigma]_F$  и  $[\sigma]_H$  – соответственно пределы изгибной и контактной выносливости;  $S_F$  и  $S_H$  – коэффициенты безопасности, зависящие от термообработки материалов;  $K_{FC}$  учитывает влияние двухстороннего приложения нагрузки для реверсивных передач;  $K_F$  и  $K_H$  – коэффициенты долговечности, зависящие от соотношения фактического и базового числа циклов наработки. Фактическое число циклов наработки находится произведением частоты вращения колеса и срока его службы в минутах. Базовые числа циклов напряжений зависят от материала и термообработки зубьев.

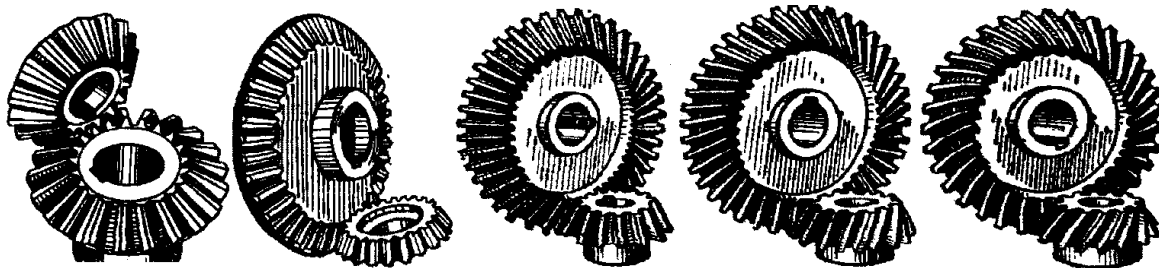
Расчёт зубьев на изгиб для открытых передач (работают на неравномерных режимах с перегрузками) выполняют, как проектировочный. В расчёте задаются прочностными характеристиками материала и определяют модуль  $m$ , а через него и все геометрические параметры зубьев. Для закрытых передач излом зуба не характерен и этот расчёт выполняют, как проверочный, сравнивая изгибные напряжения с допускаемыми.

5. Общие сведения о конических передачах.

Передают вращающий момент между валами с пересекающимися осями (чаще всего под углом  $90^\circ$ ). Их зубья бывают прямыми, косыми, круговыми и обычно имеют эвольвентный профиль.

И хотя, конические колёса сложнее цилиндрических как по своей геометрии, так и в изготовлении, принципы силового взаимодействия, условия работы, а следовательно, и

#### КОНИЧЕСКИЕ ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ



методика расчёта аналогичны цилиндрическим.



Здесь мы рассмотрим только отличительные особенности расчёта конических колёс.

Сначала конструктор выбирает внешний окружной модуль  $m_{te}$ , из которого рассчитывается вся геометрия зацепления, в частности, нормальный модуль в середине зуба  $m_{nm} = m_{te} (1 - 0,5 b/R_e)$ ,

где  $R_e$  – внешнее конусное расстояние.

Силы в конической передаче действуют аналогично цилиндрической, однако следует помнить, что из-за перпендикулярности осей радиальная сила на шестерне аналогична осевой силе для колеса и наоборот, а окружная сила при переходе от шестерни к колесу только меняет знак

$$\overline{F}_{r1} = -\overline{F}_{a2}; \quad \overline{F}_{r2} = \overline{F}_{a1}; \quad \overline{F}_{t1} = -\overline{F}_{t2}.$$

Прочностные расчёты конических колёс проводят аналогично цилиндрическим, по той же методике. Из условия контактной выносливости определяют внешний делительный диаметр  $d_{we}$ , из условия прочности на изгиб находят нормальный модуль в середине зуба  $m_{nm}$ . При этом в расчёт принимаются воображаемые эквивалентные колёса с числами зубьев  $Z_{\gamma 1,2} = Z_{1,2} / \cos \delta_{1,2}$  и диаметры  $d_{\gamma 1,2} = m_{te} Z_{1,2} / \cos \delta_{1,2}$ . Здесь  $Z_1, Z_2$ , - фактические числа зубьев конических колёс. При этом числа  $Z_{\gamma 1,2}$  могут быть дробными.

В эквивалентных цилиндрических колёсах диаметр начальной окружности и модуль соответствуют среднему сечению конического зуба, вместо межосевого расстояния берётся среднее конусное расстояние, а профили эквивалентных зубьев получают развёрткой дополнительного конуса на плоскость.

#### 6. Геометрические расчёты конических передач.

Внешний окружной модуль  $m_e = d_{e2}/Z_2$ .

Угол делительного конуса колеса  $\delta_2 = \arctg u$ .

Угол делительного конуса шестерни  $\delta_1 = 90^\circ - \delta_2$ .

Внешний делительный диаметр шестерни  $d_{e1} = m_{e1} \times Z_1$ .

Внешнее конусное расстояние  $R_e = 0,5 d_{e2} / \sin \delta_2$ .

Ширина зубчатого венца  $b = \Psi_{eRe} \times R_e$ .

Среднее конусное расстояние  $R = R_e - 0,5 b$ .

Средний окружной модуль  $m = m_e R / R_e$ .

Средний делительный диаметр шестерни  $d_1 = m \times Z_1$ .

Средний делительный диаметр колеса  $d_2 = m \times Z_2$ .

Внешняя высота зуба  $h_e = 2,2 \times m_e$ .

Внешняя высота головки зуба  $h_{ae} = m_e$ .

Внешняя высота ножки зуба  $h_{fe} = 1,2 \times m_e$ .

Угол ножки зуба  $\theta_f = \arctg (h_{fe} / R_e)$ .

Угол головки зуба  $\theta_d = \theta_f$ .

Внешний диаметр вершин зубьев шестерни  $d_{ae1} = d_{e1} + 2h_{ae} \times \cos \delta_1$ .

Внешний диаметр вершин зубьев колеса  $d_{ae2} = d_{e2} + 2h_{ae} \times \cos \delta_2$ .

## 7. Понятие об эквивалентном колесе.

В прямозубой передаче профиль зубьев конического колеса на среднем дополнительном конусе близок к профилю зубьев цилиндрического колеса с делительным диаметром  $d_v$  и числом зубьев  $Z_v$ .

Делительный диаметр:  $d_v = m_n Z_v$

Между делительными диаметрами существует связь:  $d_v = d_m / \cos \delta = m_n Z / \cos \delta$

Из равенства  $m_n Z_v = m_n Z / \cos \delta$  следует зависимость для определения эквивалентного числа зубьев:  $Z_v = Z / \cos \delta$

т.е. фактическое коническое прямозубое колесо с числом зубьев  $Z$  можно в прочностных расчетах заменить на цилиндрическое с числом зубьев  $Z_v$ .

Для передачи с круговым зубом профили зубьев конического колеса в нормальном сечении близки профилям зубьев эквивалентного цилиндрического прямозубого колеса. Эквивалентное число зубьев  $Z_{vn}$  получают двойным приведением: конического колеса к цилиндрическому и кругового зуба к прямому зубу:  $Z_{vn} = Z / (\cos \delta \cos^3 \beta_n)$

## 8. Расчёт конических передач на прочность.

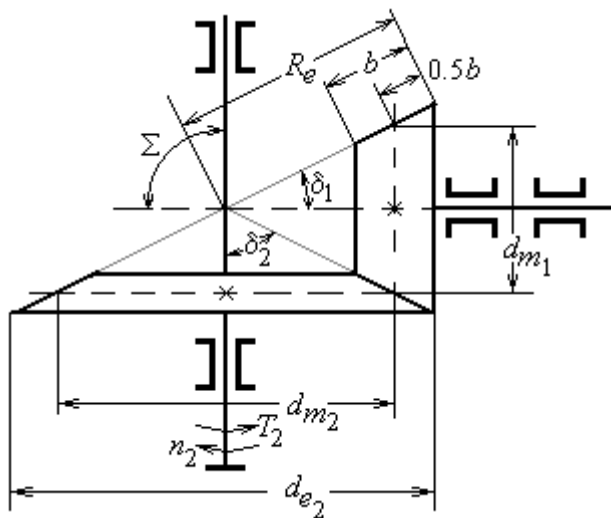


Рис. 2

Наибольшее применение в редукторостроении получили прямозубые конические колёса, у которых оси валов пересекаются под углом  $\Sigma = 90^\circ$  (рис. 2).

Проектный расчёт. Основной габаритный размер передачи - делительный диаметр колеса по внешнему торцу - рассчитывают по формуле [1]:

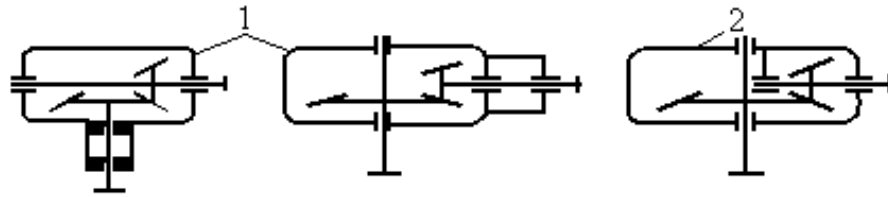
$$d_{e2} \geq 1,7 \cdot \sqrt[3]{\frac{E_{пр} \cdot T_2 \cdot K_{H\beta} \cdot u_p}{0,85 \cdot [\sigma_H]^2 \cdot (1 - K_{be}) \cdot K_{be}}}$$

где  $E_{пр}$  - приведённый модуль упругости, для стальных колёс  $E_{пр} = E_{стали} = 2,1 \cdot 10^5$  МПа;

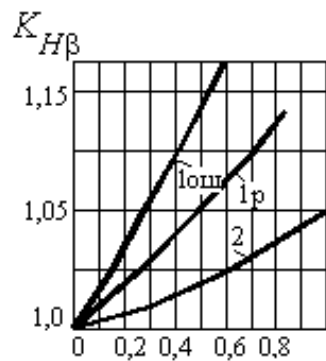
$T_2$  - вращающий момент на валу колеса, Н·мм (см.п.2.3);

$K_{H\beta}$  - коэффициент неравномерности распределения нагрузки по длине зуба, определяют по графикам на рис. 2.5.

Здесь  $K_{be}$  - коэффициент ширины зубчатого венца относительно внешнего конусного расстояния,  $K_{be} = b_w / R_e$ . Рекомендуют принять  $K_{be} \leq 0,3$ . Меньшие значения назначают для неприрабатываемых зубчатых колёс, когда  $H1$  и  $H2 > 350$  HB или

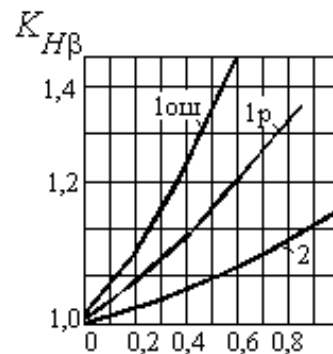


а



$K_{be} u (2 - K_{be})$

б



$K_{be} u (2 - K_{be})$

в

$V > 15$  м/с .

Рис. 3

Наиболее распространено в редукторостроении значение  $K_{be} = 0,285$ , тогда предыдущее выражение для определения делительного диаметра по внешнему торцу колеса принимает вид

$$d_{e2} \geq 2,9 \cdot \sqrt[3]{\frac{E_p \cdot T_2 \cdot K_{H\beta} \cdot u_p}{0,85 \cdot [\sigma_H]^2}}$$

где  $u_p$  – расчетное передаточное число конической передачи.

Геометрический расчёт. Определяют диаметр шестерни по внешнему торцу

$$d_{l1p} = \frac{d_{l2p}}{u_p}$$

Число зубьев шестерни  $Z'_1$  назначают по рекомендациям, представленным на рис.

3.

По значению  $Z'_1$  определяют число зубьев шестерни:

$$z_1 = 1,6 Z'_1 \text{ при } H1 \text{ и } H2 \leq 350 \text{ HB ,}$$

$$z_1 = 1,3 Z'_1 \text{ при } H1 \geq 45 \text{ HRC и } H2 \leq 350 \text{ HB ,}$$

$$z_1 = Z'_1 \text{ при } H1 \text{ и } H2 \geq 45 \text{ HRC .}$$

Вычисленное значение  $z_1$  округляют до целого числа.

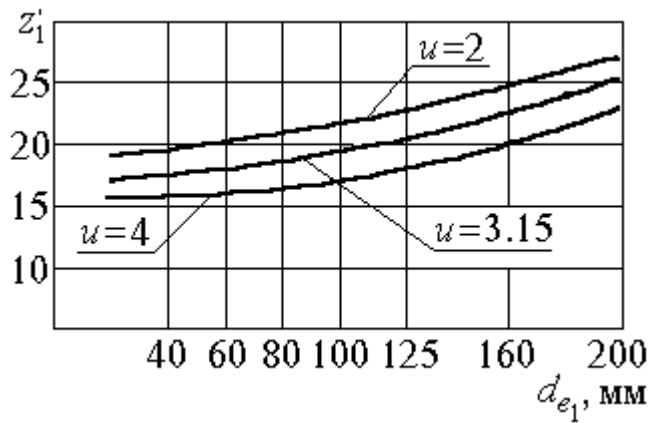


Рис.2.6

Определяют число зубьев колеса  $z_2 = u \cdot z_1$ .

Вычисленное значение  $z_2$  округляют до целого числа. После этого необходимо уточнить:

- передаточное число передачи  $u_\phi = z_2 / z_1$ ,
- угол делительного конуса колеса  $\delta_{2\phi} = \arctg u_\phi$ ,
- угол делительного конуса шестерни  $\delta_{1\phi} = 90 - \delta_{2\phi}$ ,
- внешний окружной модуль  $m_e = d_{e2} / z_2$ .

Рекомендуется округлить  $m_e$  до стандартного значения  $m_{e\phi}$  по ряду модулей: 1,5; 2; 2,5; 3; 4; 5; 6; 8; 10. После этого уточняют величины диаметров  $d_{e1\phi} = m_{e\phi} \cdot z_1$  и  $d_{e2\phi} = m_{e\phi} \cdot z_2$ .

Рассчитывают величину внешнего конусного расстояния передачи (рис.2.4)

$$R_e = \frac{d_{e2\phi}}{2 \cdot \sin \delta_{2\phi}}$$

Рабочая ширина зубчатого венца колеса  $b_w = K_{be} \cdot R_e$ .

Полученное значение  $b_w$  округляют до ближайшего из ряда нормальных линейных размеров (табл. 2.5).

Определяют расчётный модуль зацепления в среднем сечении зуба  $m_m = m_{e\phi} (1 - 0,5 b_w / R_e)$ .

При этом найденное значение  $m_m$  не округляют!

Рассчитывают внешнюю высоту головки зуба  $h_{ae} = m_{e\phi}$ .

Внешнюю высоту ножки зуба определяют как  $h_{fe} = 1,2 m_{e\phi}$ .

Внешний диаметр вершин зубьев колёс рассчитывают по формуле

$$d_{ae1,2} = d_{e1,2} + 2 \cdot h_{ae} \cdot \cos \delta_{1,2}$$

Угол ножки зуба рассчитывают по формуле  $\theta_f = \arctg(h_{fe} / R_e)$ .

Проверочный расчёт. При расчёте на выносливость зубьев колёс по контактным напряжениям проверяют выполнение условия

$$\sigma_H = 1,18 \sqrt{\frac{E_{\text{пр}} \cdot T_1 \cdot K_H}{0,85 \cdot d_{m1}^2 \cdot b_w \cdot \sin 2\alpha_w} \cdot \frac{\sqrt{u_\phi^2 + 1}}{u_\phi}} \leq [\sigma_H]$$

где  $E_{\text{пр}}$  - приведённый модуль упругости, для стальных колёс  $E_{\text{пр}} = E_{\text{стали}} = 2,1 \cdot 10^5$  МПа ;

$$T_1 = \frac{T_2}{u_\phi \cdot \eta_{\text{пер}}};$$

$T_1$  - вращающий момент на шестерне, Н·мм,

здесь  $\eta_{\text{пер}}$  - КПД передачи.

$K_H$  - коэффициент расчётной нагрузки,  $K_H = K_{H\beta} \cdot K_{HV}$ ; коэффициент концентрации нагрузки  $K_{H\beta}$  найден ранее по графикам рис.2.5.

$K_{HV}$  - коэффициент динамической нагрузки, находят по табл. 2.7 с понижением на одну степень точности против фактической, назначенной по окружной скорости

$$V = \frac{\pi d_{m1} n_1}{60000} \text{ в соответствии с рекомендациями (табл.2.6);}$$

$d_{m1}$  - делительный диаметр шестерни в среднем сечении зуба,

$$d_{m1} = m_m \cdot z_1;$$

$\alpha_w$  - угол зацепления,  $\alpha_w = 20^\circ$ .

Далее проверяют зубья колёс на выносливость по напряжениям изгиба по формулам [1]:

$$\sigma_{F1} = \frac{F_t \cdot K_F \cdot Y_{F1}}{0,85 \cdot b_w \cdot m_m} \leq [\sigma_F]_1 \quad \text{и} \quad \sigma_{F2} = \sigma_{F1} Y_{F2} / Y_{F1} \leq [\sigma_F]_2,$$

где  $F_t$  - окружное усилие в зацеплении, Н,  $F_t = 2T_1 / d_{m1}$ ;

$K_F$  - коэффициент расчётной нагрузки,  $K_F = K_{F\beta} \cdot K_{FV}$ . Здесь  $K_{F\beta} = 1 + 1,5 \cdot (K_{H\beta} - 1)$ , а  $K_{FV}$  определяют по табл. 2.7 с понижением точности на одну степень против фактической.

$Y_{F1,2}$  - коэффициент формы зуба соответственно шестерни и колеса, находят по табл. 2.9 в зависимости от эквивалентного числа зубьев колёс

$$z_{V1,2} = z_{1,2} / \cos \delta_{\phi 1,2}.$$

## 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

### 2.1 Лабораторная работа №1 (2 часа).

**Тема:** «Испытание на растяжение образца из малоуглеродистой стали»

#### 2.1.1 Цель работы:

1. Изучение поведения образца из малоуглеродистой стали в процессе растяжения до разрыва.
2. Получение диаграммы растяжения и определение основных механических характеристик материала.

#### 2.1.2 Задачи работы:

1. Изучить принцип работы лабораторной установки УМ-5.
2. Выполнить испытание образца на растяжение.
3. Выполнить расчёт.

#### 2.1.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Машина для испытания УМ-5.
2. Линейка.
3. Планиметр.
4. Образец из малоуглеродистой стали.

#### 2.1.4 Описание (ход) работы:

Для получения диаграммы растяжения стального образца и определения механических характеристик стали проводят испытание образца на разрыв. Испытания выполняют в соответствии с ГОСТ 1497-73 «Металлы. Методы испытания на растяжение», в котором приведены термины, обозначения и определения, формы и размеры образцов, оборудование для испытаний, методика проведения испытаний и подсчета результатов.

Для испытания на растяжение применяют цилиндрические образцы диаметром 3 мм и более и плоские толщиной 0,5 мм и более.

На рис.1 дан эскиз круглого образца. Рабочей длиной  $l$  называют часть образца с постоянной площадью поперечного сечения между его головками или участками захвата. Начальной расчетной длиной образца  $l_0$  называют участок рабочей длины образца, на котором определяют удлинение. Начальная площадь поперечного сечения рабочей части образца до разрыва обозначается  $A_0$ .

Для испытаний применяют длинные образцы с начальной расчетной длиной  $l_0 = 11,3 \cdot \sqrt{A_0}$  и короткие - с начальной расчетной длиной  $l_0 = 5,65 \cdot \sqrt{A_0}$ .

При испытании цилиндрических образцов в качестве основных применяют образцы с начальным диаметром рабочей части  $d_0 = 10 \text{ мм}$  в этом случае для длинных образцов  $l_0 = 100 \text{ мм}$ . На поверхности образца перед испытанием наносят при помощи керн по границам начальной расчетной длины образца  $l_0$  риски.

Испытание проводят на разрывной машине с записывающим приспособлением, автоматически вычерчивающим диаграмму растяжения образца, т. е. график, связывающий нагрузку и абсолютное удлинение образца в процессе его растяжения до момента разрыва. В нашей лаборатории для этого используется универсальная испытательная машина типа УМ-5 (описание машины дано ниже).

На рис.2 представлена диаграмма растяжения образца из малоуглеродистой стали. В первоначальный момент испытания диаграмма от точки  $O$  до точки  $A$  представляет собой наклонную прямую линию, т.е. удлинение образца прямо пропорционально действующей нагрузке, следовательно в этих пределах справедлив закон Гука. От точки  $A$ , которой соответствует нагрузка  $P_{\text{пл}}$ , диаграмма приобретает криволинейный характер-

деформация растет быстрее, чем нагрузка, и нарушается прямая пропорциональность между

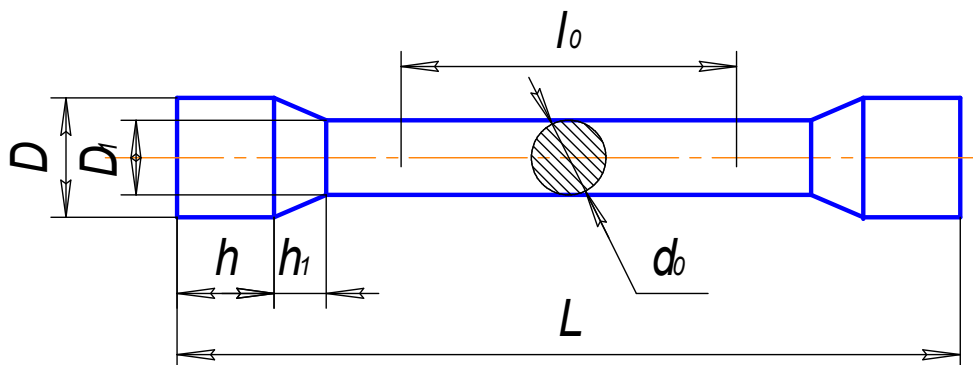


Рис. 1. Схема образца для испытания на растяжение.

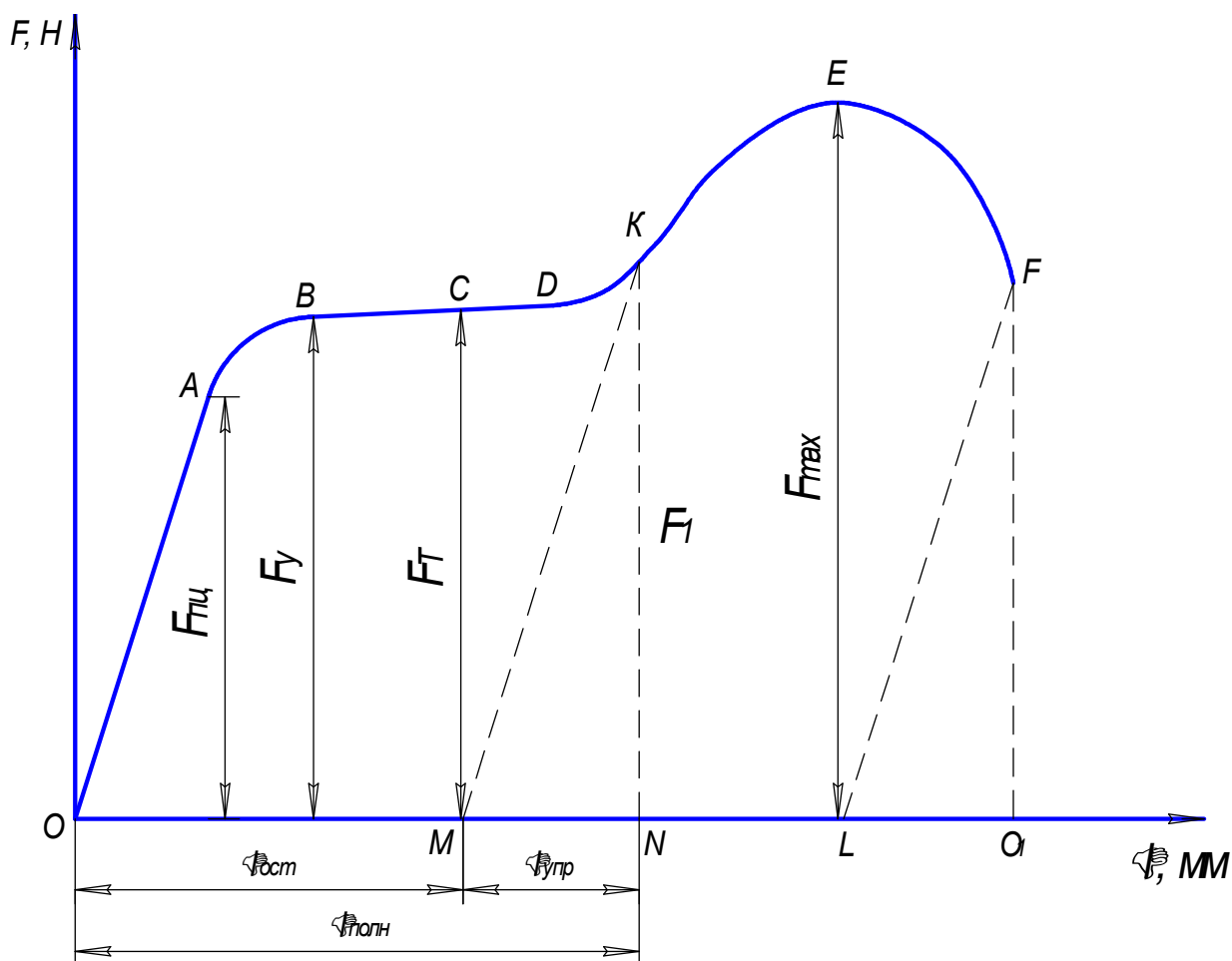


Рис.2. Диаграмма растяжения образца из малоуглеродистой стали.

удлинением и нагрузкой. В точке В, когда нагрузка достигает значения  $F_y$ , кроме упругих начинают образовываться и пластические деформации. В точке С процесс становится особенно интенсивным, удлинение растет без заметного увеличения нагрузки, материал «течет», а на диаграмме при этом прочерчивается почти горизонтальная линия - площадка текучести  $CD$ . Нагрузка, соответствующая этой площадке, обозначается  $F_T$ . В точке  $D$  наступает упрочнение, т.е. материал снова начинает сопротивляться деформации и для ее роста необходимо постоянно увеличивать действующую нагрузку. Точка  $E$  соответствует наибольшей нагрузке  $F_{\max}$ , предшествующей разрушению образца.



При достижении этой нагрузки местное сужение поперечного сечения, так называемая шейка, уже сформировывается настолько отчетливо, что дальнейшее удлинение образца происходит главным образом за счет деформации в этой локальной области. Вследствие уменьшения площади сечения в деформирующейся части для дальнейшего удлинения образца нужна все меньшая сила (участок  $EF$ ) и при нагрузке  $F_K$ , соответствующей точке  $F$ , происходит разрыв образца.

Рассмотрим одно важное свойство диаграммы растяжения образца, которое называют законом разгрузки и повторного нагружения. Если при некоторой нагрузке  $F_1$  (точка  $K$ ), превышающей нагрузку  $F_T$ , соответствующую площадке текучести, прекратить нагружение и начать постепенно разгружать образец, то зависимость между деформацией и нагрузкой изобразится прямой  $KM$ , параллельной прямой  $OA$ . Это указывает на то, что при разгрузке сохраняется прямая пропорциональность между абсолютным удлинением и нагрузкой, т.е. справедлив закон Гука. После снятия нагрузки (точка  $M$ ) в образце сохраняется остаточное удлинение  $OM$ . Следовательно, полное удлинение  $\Delta l_1$  при нагрузке  $F_1$  (отрезок  $ON$ ) состоит из остаточного удлинения  $\Delta l_{ост}$  (отрезок  $OM$ ) и упругого удлинения  $\Delta l_{упр}$  (отрезок  $MN$ ), исчезающего при разгрузке. Если после разгрузки образец снова загружать, то в начальной стадии деформирования материал вновь будет следовать закону Гука, причем модуль упругости сохранит свое значение, а диаграмма растяжения образца изобразится прямой  $MK$ . При этом нагрузка, до которой сохраняется прямая пропорциональность между растягивающей силой и абсолютным удлинением, за счет предварительного нагружения образца за нагрузку  $F_T$  увеличилась от значения  $F_{пц}$  до значения  $F_1$ , т.е. до величины, достигнутой при первоначальном нагружении. Если повторное нагружение продолжать за нагрузку  $F_1$ , то образец вновь будет пластически деформироваться, причем закон нарастания деформации будет точно таким, как будто процесс первоначального нагружения не прерывался, и диаграмма повторного нагружения образца до разрыва изобразится линией  $MKEF$ . Следует отметить, что указанный выше закон разгрузки и повторной нагрузки отражает реальный процесс приближенно.

После разрыва образца измеряют конечную расчетную длину образца  $l_k$  и минимальный диаметр образца в самом узком месте шейки  $d_k$ .

По данным замеров и с помощью диаграммы растяжения образца определяют основные механические характеристики материала.

Характеристики прочности. К характеристикам прочности материала относят предел пропорциональности  $\sigma_{пц}$ , предел упругости  $\sigma_y$ , предел текучести  $\sigma_T$ , временное сопротивление разрыву (предел прочности)  $\sigma_B$ , истинное сопротивление разрыву (истинное сопротивление в момент разрыва)  $S_k$ .

Пределом пропорциональности называют то наибольшее напряжение, до которого сохраняется прямая пропорциональность между растягивающей нагрузкой и абсолютным удлинением. Его определяют по формуле:

$$\sigma_{пц} = \frac{F_{пц}}{A_0} \quad 1.1.$$

где  $F_{пц}$  - нагрузка, соответствующая точке  $A$  диаграммы;  $H$ ;

$A_0$  - начальная площадь поперечного сечения рабочей части образца,  $\text{мм}^2$ .

Практически в соответствии с ГОСТ 1497-73 за предел пропорциональности  $\sigma_{пц}$  принимают напряжение, при котором отступление от линейной зависимости между нагрузкой и абсолютным удлинением достигает такой величины, что тангенс угла

наклона, образованного касательной к диаграмме растяжения образца  $F_{\Delta}l$  в точке  $A$  с осью нагрузок, увеличивается на 50% своего значения на линейном упругом участке (т.е. участке  $OA$ ).

Пределом упругости называется напряжение, при котором появляются первые пластические деформации, т.е. до которого образец получает только упругие деформации. Это напряжение соответствует точке  $B$  диаграммы и определяется по формуле:

$$\sigma_y = \frac{F_y}{A_0}, \quad 1.2.$$

где  $F_y$  - нагрузка, соответствующая точке  $B$  диаграммы, Н.

Практически по ГОСТ 1497-73 пределом упругости  $\sigma_{0,05}$  называют напряжение, при котором остаточное удлинение достигает 0,05% длины участка образца, на котором измеряется удлинение.

Пределом текучести называют напряжение, при котором образец деформируется без заметного увеличения растягивающей нагрузки (т.е. почти постоянной нагрузке). Предел текучести соответствует точке  $C$  диаграммы и его определяют по формуле:

$$\sigma_T = \frac{F_T}{A_0}, \quad 1.3.$$

где  $F_T$  - нагрузка, соответствующая точке  $C$  диаграммы, Н.

Однако явно выраженная площадка текучести наблюдается лишь на диаграмме растяжения образца из малоуглеродистой стали. При ее отсутствии определяют условный предел текучести  $\sigma_{0,2}$  - напряжение, при котором остаточное удлинение достигает 0,2% длины участка образца, удлинение которого принимают в расчет при определении указанной характеристики.

Временным сопротивлением (пределом прочности) называют напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке  $F_{\max}$ , предшествующей разрушению образца. Это напряжение имеет важное значение для характеристики материала. Оно соответствует точке  $E$  диаграммы и определяется по формуле:

$$\sigma_B = \frac{F_{\max}}{A_0}, \quad 1.4.$$

где  $F_{\max}$  - нагрузка, соответствующая точке  $E$  диаграммы, Н.

Следует отметить, что предел текучести  $\sigma_T$  и временное сопротивление разрыву  $\sigma_B$  являются условными напряжениями, так как действительная площадь поперечного образца  $F_t$  после достижения нагрузкой значения  $F_y$  начинает существенно изменяться. Однако в формулах 1.3 и 1.4 использована начальная площадь поперечного сечения рабочей части образца до разрыва  $A_0$ .

При необходимости можно определить и истинное напряжение.

Истинным напряжением называют отношение растягивающей нагрузки в данный момент времени к площади поперечного сечения рабочей части образца в тот же момент времени:

$$S = \frac{F_t}{A_t}, \quad 1.5.$$

где  $S$  - истинное напряжение, МПа;

$F_t$  - нагрузка на образец в данный момент времени, Н;

$A_t$  - площадь поперечного сечения рабочей части образца в тот же момент времени,  $мм^2$ .

Истинное напряжение, несмотря на уменьшение нагрузки, после точки  $E$  диаграммы растяжения, возрастает до самого момента разрыва. Истинное сопротивление разрыву  $S_K$  определяют по формуле:

$$S_K = \frac{F_k}{A_k}, \quad 1.6.$$

где  $F_K$  - нагрузка в момент разрыва, Н;

$A_K$  - площадь сечения шейки в момент разрыва,  $мм^2$ .

Величины  $\sigma_{пц}$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_t$ ,  $\sigma_{max}$ ,  $S_K$  являются важнейшими характеристиками прочности материала. Чем выше их значения, тем прочнее материал.

Характеристики пластичности. Характеристиками пластичности материала являются относительное остаточное удлинение после разрыва  $\sigma$  и относительное остаточное сужение поперечного сечения образца  $\varphi$ .

Относительным остаточным удлинением после разрыва называют отношение абсолютного удлинения образца к начальной расчетной длине (в процентах), т.е.

$$\delta = \frac{\Delta l}{l_0} \cdot 100\%, \quad 1.7.$$

где  $\Delta l$  - абсолютное удлинение образца после разрыва, равное

$$\Delta l = l_k - l_0$$

$l_k$  - длина расчетной длины образца после разрыва, мм.

Относительным остаточным сужением поперечного сечения образца после разрыва называют отношение

$$\psi = \frac{\Delta A}{A_0} \cdot 100\%, \quad 1.8.$$

где  $\Delta A$  - абсолютное сужение площади поперечного сечения после разрыва, равное  $\Delta A = A_0 - A_k$ .

$A_k$  - площадь поперечного сечения рабочей части образца в месте разрыва,  $мм^2$ .

Чем больше значения  $\delta$  и  $\psi$ , тем пластичнее материал. Он легче поддается ковке, штамповке и прокату.

Характеристики вязкости материала. Вязкость (энергоемкость) материала характеризуется удельной работой, затраченной на разрушение образца в необратимой форме (т.е. затраченной на пластическое деформирование образца до разрушения). Под удельной понимается работа, приходящаяся на единицу начального объема расчетной части образца,

$$a_B = \frac{A_B}{V_0} = \frac{A_B}{A_0 \cdot l_0}, \quad 1.9.$$

где  $a_B$  - удельная работа, затраченная на разрушение образца,  $Дж/мм^3$

$A_B$  - полная работа, затраченная на разрушение образца, Дж;

$V_0$  - начальный объем расчетной части образца,  $мм^3$

Полная работа  $A_B$  графически изображается площадью диаграммы OABCDTFL и с учетом масштабов сил и удлинений равна

$$A_B = \omega \cdot m \cdot n, \quad 1.10.$$

где  $\omega$  - площадь диаграммы,  $мм^2$ ;

$m$  - масштаб по оси нагрузок, Н/мм;

$n$  - масштаб по оси удлинений, мм/мм.

Приближенно эту работу можно определить из выражения:

$$A_{\Delta} = \Delta l_{\text{полн}}^{\text{разр}} \cdot F_{\text{max}} \cdot \eta, \quad 1.11$$

где  $\Delta l_{\text{полн}}^{\text{разр}} \cdot F_{\text{max}}$  - площадь прямоугольника с основанием  $\Delta l_{\text{полн}}^{\text{разр}} = 00_1$  и высотой  $F_{\text{max}}$ ;

$\Delta l_{\text{полн}}^{\text{разр}}$  - абсолютное полное удлинение после разрыва, мм;

$\eta$  - коэффициент заполнения диаграммы, равный для сталей 0,8...0,9.

Чем больше вязкость (чем больше удельная работа, затраченная на разрушение образца), тем лучше материал сопротивляется ударной нагрузке.

Экспериментальная установка. Испытание образцов из малоуглеродистой стали на растяжение будем проводить на универсальной испытательной машине с механическим приводом типа УМ-5.

Машина УМ-5 (рис.3) предназначена для статических испытаний на растяжение, сжатие и изгиб усилием до 50 кН. Она снабжена универсальными захватами 1 и 3. При испытании на растяжение испытуемый образец 2 закрепляют в этих захватах, при испытании на сжатие в них устанавливают опорные плиты, причем нижняя опора самоустанавливающаяся (благодаря чему обеспечивается строгое осевое приложение сжимающей силы), при испытании на изгиб на нижний захват устанавливают стол с двумя передвижными опорами, а в верхнем захвате закрепляют ножевую опору.

Станина машины служит базой, на которой монтируют ее основные узлы: нагружающее устройство, силоизмерительный механизм, измеритель деформаций и самопишущий диаграммный аппарат.

Нагружающее устройство. Для нагружения образца включают электродвигатель 4, который через коробку скоростей 5 и червяк 6 вращает гайку 6 грузового винта 7. Винт 7 при этом не может вращаться вокруг своей оси, так как этому препятствует самотормозящая червячная пара 23. Связанная с червячной передачей 20, червячная шестерня которой жестко закреплена на грузовом винте 7. Поэтому при вращении гайки 6 грузовой винт перемещается вниз (при испытании на растяжение) или вверх (при испытании на сжатие и изгиб), нагружая через нижний захват образец.

Изменение направления хода винта производится переключением электродвигателя. Коробка скоростей, состоящая из набора цилиндрических шестерен с червячной парой и двух подвижных блоков шестерен, позволяет осуществлять четыре скорости деформации образца (перемещение нижнего захвата: 4, 10, 20 и 60 мм/мин). Рукоятки  $A_1$  и  $B_1$  служат для установки блоков шестерен на различные скорости деформирования. Во избежание проворачивания грузового винта самотормозящая червячная пара 23 должна находиться во включенном состоянии. Для этого стержень 21 с установленной на нем скользящей шпонкой должен быть переведен в крайнее правое положение.

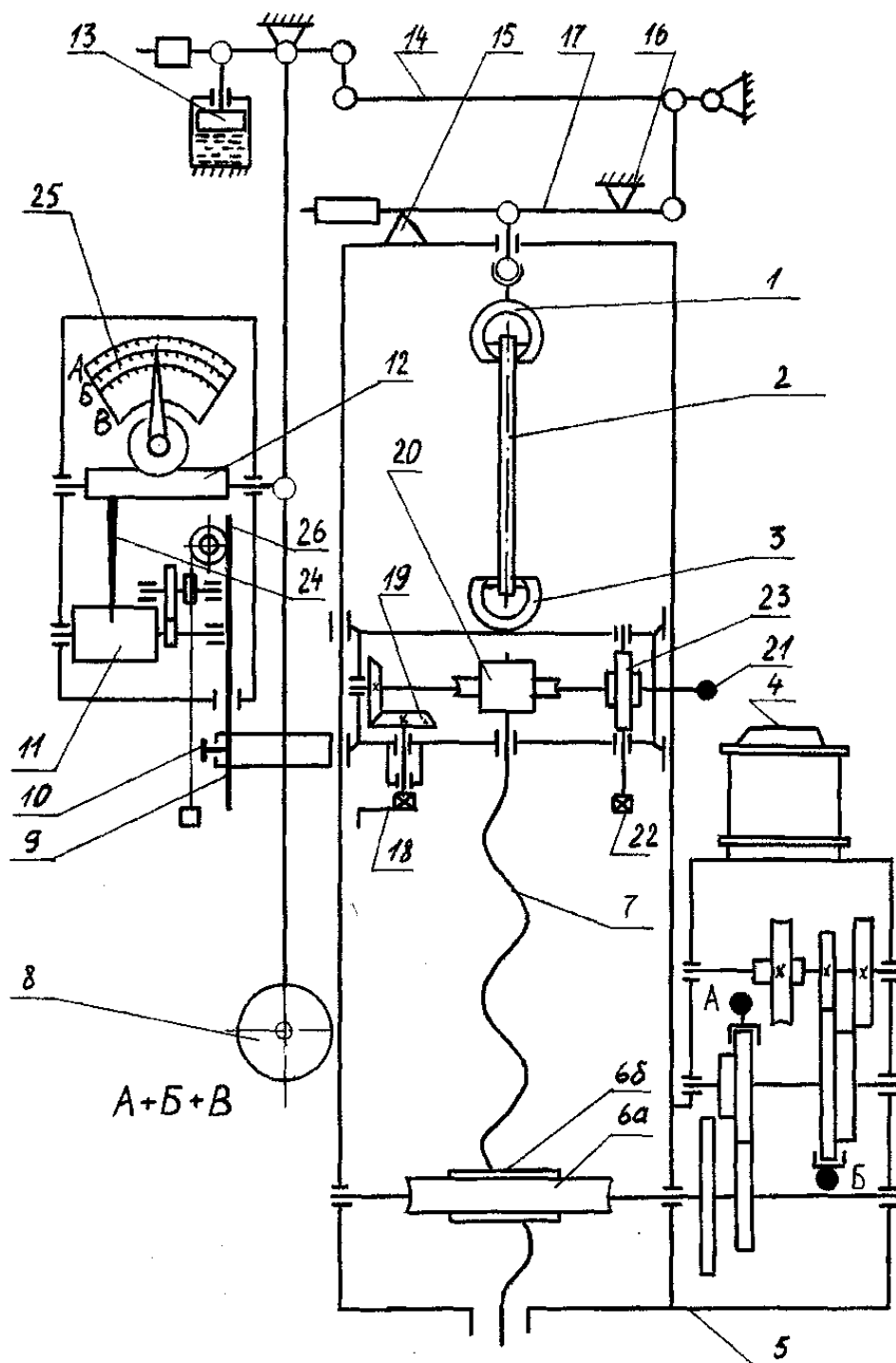


Рис.3. Кинематическая схема машины УМ-5

Скорость деформирования менее 4 мм/мин, а также небольшое увеличение нагрузки осуществляется вручную рукояткой 18, надетой на хвостовик 22 червячного валика самотормозящей червячной пары 23. Находящейся во включенном положении. Электродвигатель при этом не включают. Для быстрых перемещений нижнего захвата, что необходимо при установке образца в захваты, служит коническая пара 19.

После отключения самотормозящей червячной передачи 23 путем перемещения стержня 21 в крайнее левое положение, вращение от рукоятки 18 через коническую пару и червяную передачу 20 передается на грузовой винт. Последний вращается относительно неподвижной гайки 6, вворачивается или выворачивается из нее. Перемещая нижний захват вверх или вниз.

Силоизмерительный механизм. Для измерения действующей на образец нагрузки служит маятниковый силоизмеритель. Сжимающая или растягивающая нагрузка,

действующая на образец через верхний захват 1 и рычажную систему 17 и 14, передается на ось маятника 8. Момент, вызванный нагрузкой, отклоняет маятник влево. Отклонение маятника, пропорциональное величине нагрузки, сообщает зубчатой рейке 12 перемещение влево, рейка приводит во вращение шестерню, насаженную на ось рабочей стрелки круговой шкалы нагрузок 25. Наибольшая нагрузка на образец, соответствующая крайнему положению маятника, зависит от массы съемных грузов, установленных на нижнем конце маятника. Отсчет величины нагрузки ведут по шкале, соответствующей грузу на маятнике. При грузе А - шкала А (предельная нагрузка 1000 кг или 9,81 кН, цена деления шкалы 2 кг или 19,62 кН; при грузе А+Б - шкала В (предельная нагрузка 2000 кг или 19,62 кН, цена деления 4 кг или 39,24 Н); при грузе А+Б+В - шкала В (предельная нагрузка 5000 кг или 49,05 кН, цена деления шкалы 10 кг или 98,1 Н).

Погрешность измерения на любой из трех шкал не должна - превосходить  $\pm 1\%$ .

Рычаг 17 рычажной системы имеет две опоры: нижнюю 15 и верхнюю 16. Нижняя опора служит точкой опоры рычага при испытаниях на растяжение, верхняя - при испытаниях на сжатие. При любых испытаниях правый конец рычага 17 перемещается вниз, следовательно, маятник отклоняется всегда в одну сторону. Расстояние опор 15 и 16 от точки сочленения рычага 17 с верхним захватом обеспечивают при растяжении и сжатии одинаковое передаточное число, что позволяет использовать одни и те же шкалы для измерения нагрузки.

Для смягчения (торможения) обратного хода маятника после разрушения образца служит масляный амортизатор 13. Круговая шкала нагрузок 25 кроме рабочей имеет еще контрольную стрелку. При нарастании нагрузки рабочая стрелка забирает с собой контрольную, которая после убывания нагрузки или разрушения образца остается на месте. Указывая достигнутую при испытании максимальную нагрузку. Рабочая же стрелка, кинематически связанная с маятником, возвращается в исходное положение.

Диаграммный аппарат и измеритель деформаций. Для визуального отсчета абсолютных деформаций служит измеритель деформаций, кинематически связанный с диаграммным аппаратом. Рейка 9, жестко закрепленная винтом 10 на карете нижнего захвата 4, перемещается вместе с ней. Верхний конец рейки вращает зубчатый ролик, на оси которого жестко закреплен лимб 26 с указателем в виде риски и круговая шкала деформаций, имеющая 1000 делений и позволяющая вести отсчет деформаций с точностью до 0,5 мм. Она охватывает лимб и для установки на нуль поворачивается в корпусе.

Машина снабжена диаграммным аппаратом, записывающим результаты испытаний, образца в виде диаграммы, вычерченной в координатах «нагрузка - изменение длины образца». При отклонении маятника, перо, закрепленное на кронштейне 24, который жестко связан с зубчатой рейкой 12, вычерчивает на миллиметровой бумаге барабана 11 линию, ординаты которой пропорциональны нагрузке.

Зубчатый ролик лимба 26 с помощью гибкой нити, перекинутой через блок барабана и натянутой подвешенным на конце грузиком, вращает диаграммный барабан. Вследствие этого перо вычерчивает в направлении, перпендикулярном оси барабана линию, абсциссы которой пропорциональны деформации образца. Таким образом, на миллиметровой бумаге вычерчивается кривая в прямоугольных координатах: «нагрузка (ордината) - абсолютная деформация образца (абсцисса)».

Масштаб записи деформаций на диаграмме равен 10:1.

Масштаб записи нагрузок зависит от диапазона их измерения и равен:

при грузе А	1 мм - 5 кг (49 Н)
при грузе А+Б	1 мм - 10 кг (98 Н)
при грузе А+Б+В	1 мм - 25 кг (245 Н).

Порядок выполнения работы.

При помощи штангенциркуля замерить начальный диаметр рабочей части образца  $d_0$  и нанести на нем при помощи керны начальную расчетную длину образца

$l_0$ .

Установить образец в захваты, закрепить на барабане диаграммного аппарата миллиметровую бумагу. Повернуть круговую шкалу деформации до совмещения нуля с риской на лимбе, затянуть винт 10 и включить привод машины.

Разорвать образец.

Соединить вместе обе части образца и с помощью штангенциркуля измерить конечную расчетную длину образца  $l_k$  (расстояние между лунками от керна) и минимальный диаметр после разрыва  $d_k$ , по шкале силоизмерительного устройства определить  $F_{\max}$ , а по лимбу - абсолютное полное удлинение после разрыва  $\Delta l_{\text{полн}}$ .

Обработать диаграмму растяжения стального образца:

- а) нанести оси нагрузки  $F$  и абсолютного удлинения  $\Delta l$ ;
- б) измерить ординаты точек  $C$  и  $F$ , дающие в масштабе значение нагрузки, соответствующее площадке текучести и моменту разрыва;
- в) определить с помощью планиметра площадь диаграммы (площадь фигуры OABCDEFLO).

Результаты замеров и все вычисления занести в журнал лабораторных работ.

## **2.2 Лабораторная работа №2 (2 часа).**

**Тема:** «Испытание различных материалов на сжатие»

**2.2.1 Цель работы:** Сравнительное изучение свойств пластичных хрупких, однородных и неоднородных материалов и определение их механических характеристик при статическом сжатии.

### **2.2.2 Задачи работы:**

1. Изучить принцип работы лабораторной установки ГМС-50.
2. Выполнить испытание различных материалов на сжатие.
3. Выполнить расчёты.

### **2.2.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:**

1. Машина для испытания ГМС-50.
2. Линейки.
3. Образцы: сталь, бронза, древесина.

### **2.2.4 Описание (ход) работы:**

Пластические материалы (сталь, алюминий, медь и др.) одинаково хорошо работают на растяжение и сжатие, поэтому испытания на сжатие является дополнением к испытанию этих материалов на растяжение.

Хрупкие материалы (чугун, бетон, цемент, камень и т.д.) на растяжение работают много хуже, чем на сжатие, поэтому они применяются только в сжатых элементах конструкций (колонны, дамбы, фундаменты и пр.), и основным видом испытания хрупких материалов является испытание на сжатие.

Особым своеобразием отличается сопротивление сжатию древесины как материала анизотропного и обладающего волокнистой структурой.

Для испытания пластичных и хрупких металлов изготавливают круглые цилиндрические образцы, высота которых превышает диаметр в 1,5...2,0 раза. Деревянные образцы изготавливают в виде кубиков.

О поведении материала при сжатии можно судить по диаграмме, которая представляет собой график, по оси ординат которого откладывают сжимающую нагрузку, а по оси абсцисс - удлинение образца.

Испытание на сжатие бронзового образца. Диаграмма сжатия образца из бронзы первоначально идет почти по прямой линии, слегка наклонной к оси нагрузок (рис.1). Достигнув предела пропорциональности (точка А), диаграмма продолжается по кривой. При этом образец, укорачиваясь, принимает бочкообразную форму, что свидетельствует о

наличии небольших пластических деформаций. Переход диаграммы из прямолинейной части в криволинейную для хрупких материалов происходит более плавно, чем для пластических (на диаграмме сжатия чугунного образца его очень трудно заметить).

В момент, когда нагрузка достигает наибольшего значения, соответствующего пределу прочности при сжатии (точка В), образец разрушается при сравнительно малых деформациях путем раздробления с появлением трещин, наклоненных к линии действия осевой нагрузки примерно под углом 45°. Это вызвано тем, что при осевом сжатии по площадкам, наклоненным под углом 45° к направлению осевой силы, возникают наибольшие касательные напряжения, равные половине наибольших нормальных, возникающих в поперечном сечении образца. Именно под действием максимальных напряжений происходит разрушение образца. Это подтверждает структура поверхности разрушения. Она волокнистая, что возможно только при разрушении путем сдвига (при разрушении путем отрыва, т.е. под действием нормальных напряжений, структура излома зернистая).

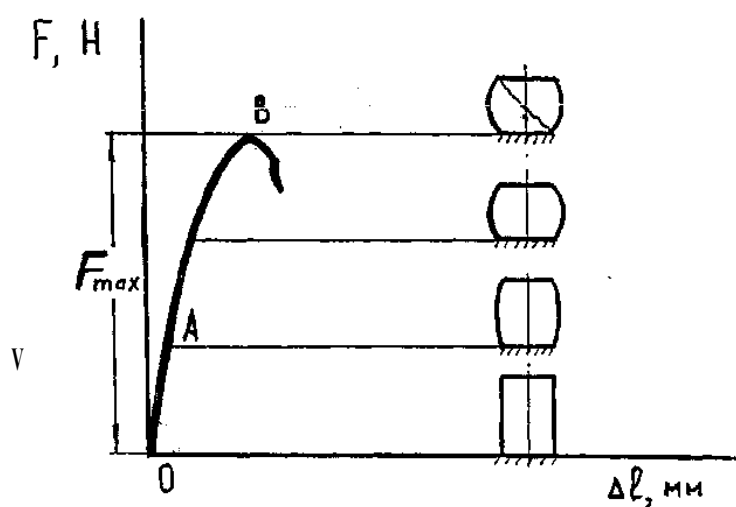


Рис. 1. Диаграмма сжатия бронзового образца

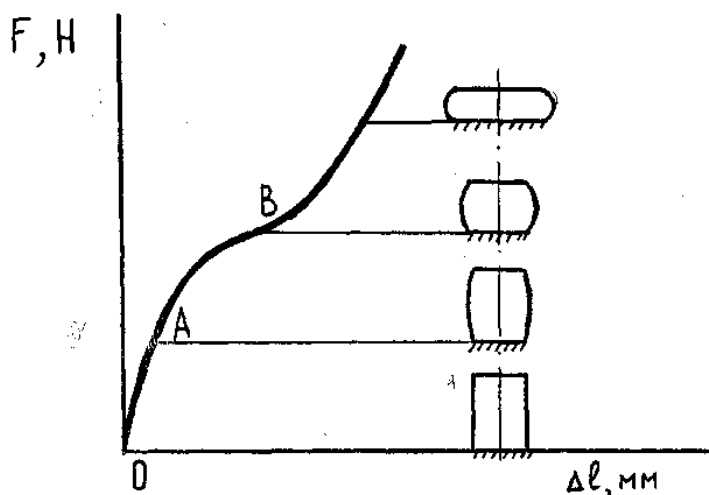


Рис. 2. Диаграмма сжатия стального образца

4

После разрушения образца нагрузка резко падает. Предел прочности при сжатии определяют по формуле:

$$\sigma_B = \frac{F_{\max}}{A_0} \quad (1.1)$$

где  $F_{\max}$  - нагрузка, при которой происходит разрушение образца, Н;



$A_0$  - первоначальная площадь поперечного сечения образца,  $\text{мм}^2$ .

Испытание на сжатие стального образца. Диаграмма сжатия стального образца (рис.2) вначале идет по прямой ОА, выражающей прямолинейную зависимость между силой и деформацией. Точка А соответствует пределу пропорциональности, который определяют по формуле:

$$\sigma_{\text{пц}} = \frac{F_{\text{пц}}}{A_0} \quad (1.2)$$

где  $F_{\text{пц}}$  - нагрузка, соответствующая пределу пропорциональности (нагрузка в точке А), Н;

$A_0$  - первоначальная площадь поперечного сечения образца,  $\text{мм}^2$ .

За точкой А на диаграмме наблюдается участок с более быстрым ростом деформаций, однако площадка текучести выражена менее ровно чем при растяжении или ее не бывает вовсе.

При наличии площадки текучести предел текучести определяется по формуле:

$$\sigma_{\text{т}} = \frac{F_{\text{т}}}{A_0}, \quad (1.3)$$

где  $F_{\text{т}}$  - нагрузка, соответствующая пределу текучести (нагрузка в точке В), Н.

Далее диаграмма меняет характер кривизны и круто поднимается вверх. Объясняется это тем, что при переходе за предел текучести с быстрым ростом пластических деформаций происходит увеличение размеров площади поперечного сечения и образец способен выдерживать все большую нагрузку. Образец принимает бочкообразную форму и, постепенно сплющиваясь, превращается в диск, но не обнаруживает признаков разрушения. Лишь при недостаточной пластичности материала на боковой поверхности образца появляются мелкие трещины. Однако это не приводит к разрушению.

Начальный участок диаграммы сжатия ОАВ, включающий площадку текучести, практически совпадает с аналогичным участком диаграммы растяжения. Поэтому, модуль продольной упругости  $E$ , предел пропорциональности  $\sigma_{\text{пц}}$  упругости  $\sigma_y$  и текучести  $\sigma_{\text{т}}$  у малоуглеродистой стали при сжатии и растяжении можно считать одинаковыми.

В связи с тем, что при сжатии образец деформируется без разрушения, определить предел прочности малоуглеродистой стали при сжатии не представляется возможным.

Сжатие древесины вдоль волокон. Вторая часть работы содержит испытание образцов из древесины на сжатие. Древесина является анизотропным материалом, т.е. ее механические свойства в разных направлениях различны. Поэтому испытание на сжатие древесины проводят вдоль и поперек волокон.

При сжатии образца из древесины вдоль волокон получают диаграмму в виде почти прямолинейного участка, образующего большой угол с осью абсцисс (рис.3).

Это свидетельствует о значительном сопротивлении древесины сжимающим нагрузкам, действующим вдоль волокон. Остаточные деформации при этом малы.

После достижения предела прочности происходит разрушение образца. Обычно он разрушается с образованием поперечных наклонных складок, образующихся в результате смещения одной части образца относительно другой, и обмятием торцов. Часто вместе с этим наблюдается образование продольных трещин. После разрушения образца нагрузка падает.

Предел прочности древесины при сжатии вдоль волокон определяется по формуле:

$$\sigma_B = \frac{F_{\max}}{A_0}, \quad (1.4)$$

где  $F_{\max}$  - нагрузка, при которой происходит разрушение образца,  $H$ ;

$A_0$  - первоначальная площадь поперечного сечения образца, мм.

При сжатии древесины поперек волокон после достижения предела пропорциональности (точка А) образец начинает быстро деформироваться почти при постоянной нагрузке (линия диаграммы идет почти параллельно оси абсцисс). Однако при отсутствии пороков в древесине (сучки, косослой и т.д.) разрушение кубика не происходит, он лишь спрессовывается (рис. 4).

Значительный рост деформаций без увеличения нагрузки позволяет считать, что несущая способность образца исчерпана. Поэтому при сжатии древесины поперек волокон условно считают, что разрушающая нагрузка - это та, при которой образец сжимается на одну треть своей высоты.

В этом случае определяют условный предел прочности:

$$\sigma_B^{\text{усл}} = \frac{F_{\max}^{\text{усл}}}{A_0}, \quad (1.5)$$

где  $F_{\max}^{\text{усл}}$  - нагрузка, при которой образец сжимается на одну треть своей высоты,  $H$ .

Многочисленные экспериментальные исследования показали, что предел прочности при сжатии древесины вдоль волокон примерно в 5... 10 раз выше условного предела прочности при сжатии поперек волокон.

Экспериментальная установка. Для испытания образцов из различных материалов на сжатие можно применять универсальную испытательную машину ГМС-50, которая является контрольно-измерительным прибором и предназначена для статических испытаний главным образом на растяжение, сжатие и изгиб. Машина может работать при кратковременных нагрузках от 0 до 50 т и при длительных нагрузках от 0 до 25 т.

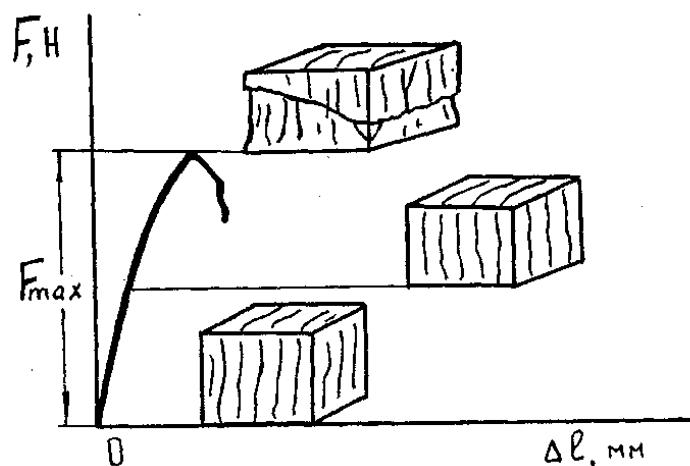


Рис. 3. Диаграмма сжатия деревянного образца вдоль волокон

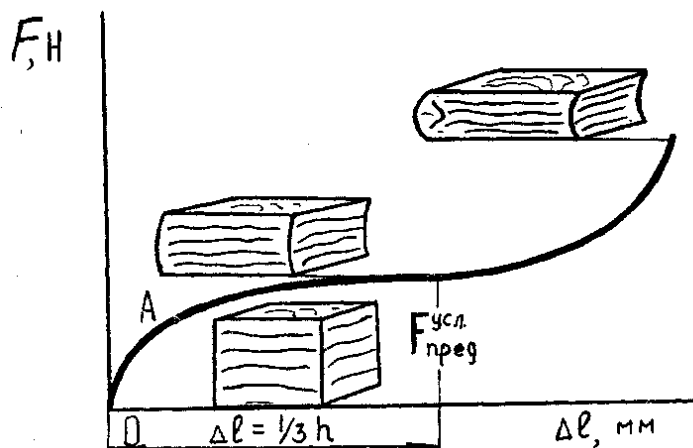


Рис. 4. Диаграмма сжатия деревянного образца поперек волокон

Установка ГМС-50 состоит из двух агрегатов:

1. Узла собственно машины - рабочей части.
2. Узла пульта управления, включающего силоизмеритель, насосную установку, создающую рабочее усилие, и систему управления.

Собственно машина является двухколонной вертикальной машиной с гидравлическим и механическим приводами перемещения подвижной траверсы и с механическим приводом нижнего захвата.

Кинематически собственно машина представляет собой две сопряженные рамы (рис. 5), из которых одна подвижная, а другая неподвижная.

Неподвижная рама составлена из основания 1 и траверсы 2, соединенных колоннами 3.

В траверсу установлена гидравлическая пара, представляющая собой рабочий цилиндр и поршень 5. На подушку 6 поршня через шарик 7 и конус 8 опирается подвижная рама.

Подвижная рама составлена из подвижной траверсы 9 и моторной траверсы 10, связанных двумя ходовыми винтами 11.

Рабочий ход подвижной траверсы осуществляется гидравлическим приводом. Механические приводы подвижной траверсы и нижнего захвата служат только для их перемещения при настройке машины на испытание.

Механический привод движения вверх - подвижной траверсы состоит из электродвигателя 12, клиноременной передачи 13 и червячной передачи 14. Червячные колеса закреплены на верхних концах ходовых винтов 11, которые нижней своей частью сопрягаются с гайками 15, закрепленными неподвижно в подвижной траверсе 9. При вращении вала электродвигателя совершается перемещение подвижной траверсы вверх-вниз.

Механизм привода нижнего захвата состоит из электродвигателя 16, червячной передачи 17 и винта 18, на котором установлен захват 19. Подвижная траверса в нижней своей части снабжена универсальной захватывающей головкой 20. Верхняя часть траверсы служит столом, на котором устанавливают приспособления для испытания образцов на сжатие и изгиб.

О величине подъема подвижных частей, а следовательно и о величине деформации образцов при испытании на изгиб, растяжение и сжатие можно судить по неподвижной линейке 21 и указательной шайбе, закрепленной на нижнем конце левого ходового винта.

В сторону пульта управления от рабочего цилиндра выведены концы трех труб гидравлики:

Труба 22 - сливная, соединенная с бачком насосной установки.

Труба 23 - соединяет рабочий цилиндр с цилиндром маятникового силоизмерителя.

Труба 24 - соединяет рабочий цилиндр с насосом, находящимся в пульте управления.

В пульте управления (рис. 6) размещены централизованное управление, силовозбудительное устройство (насосная установка) и силоизмерительное устройство (динамометр).

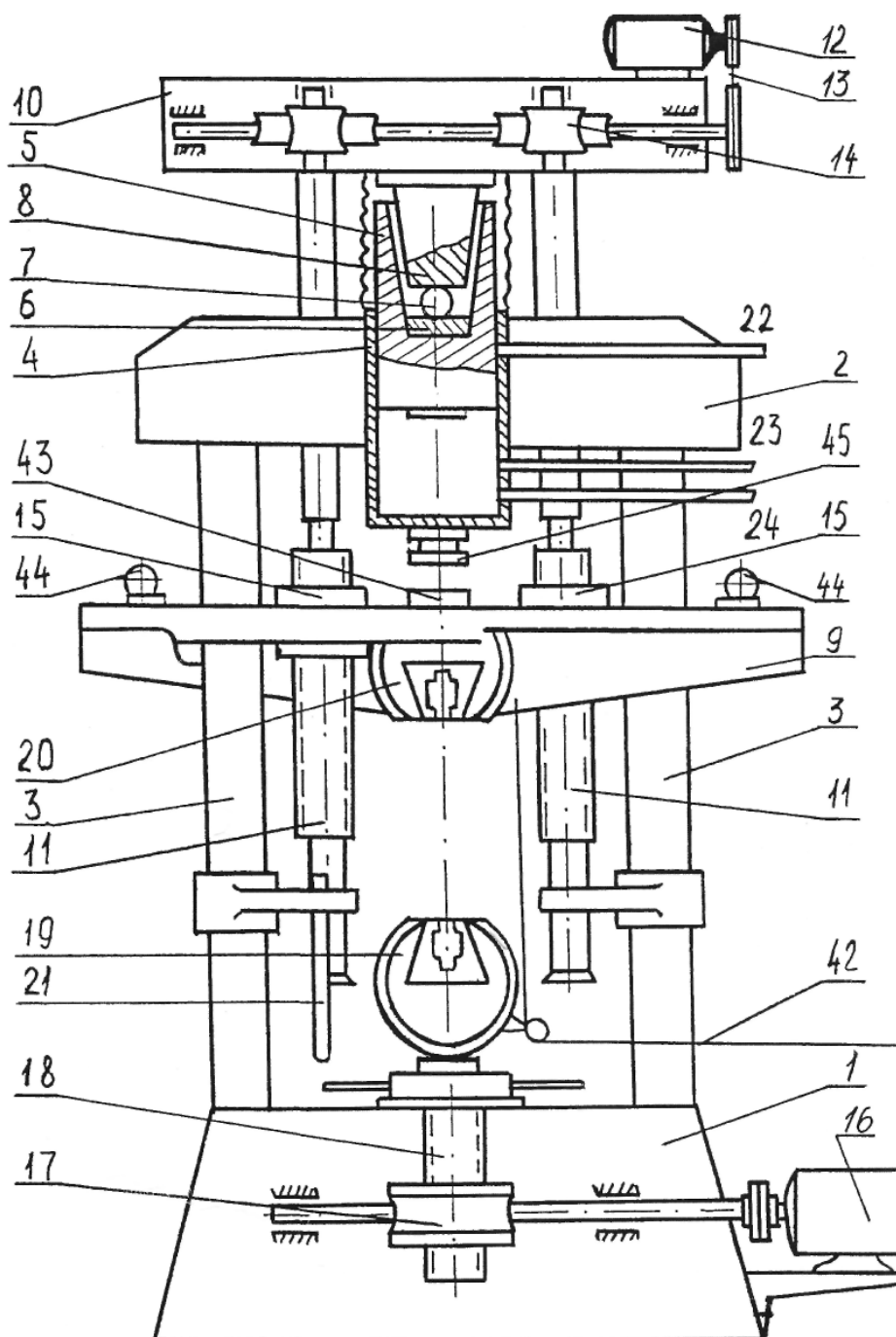


Рис. 5. Универсальная гидравлическая машина ГМС-50 (собственно машина)

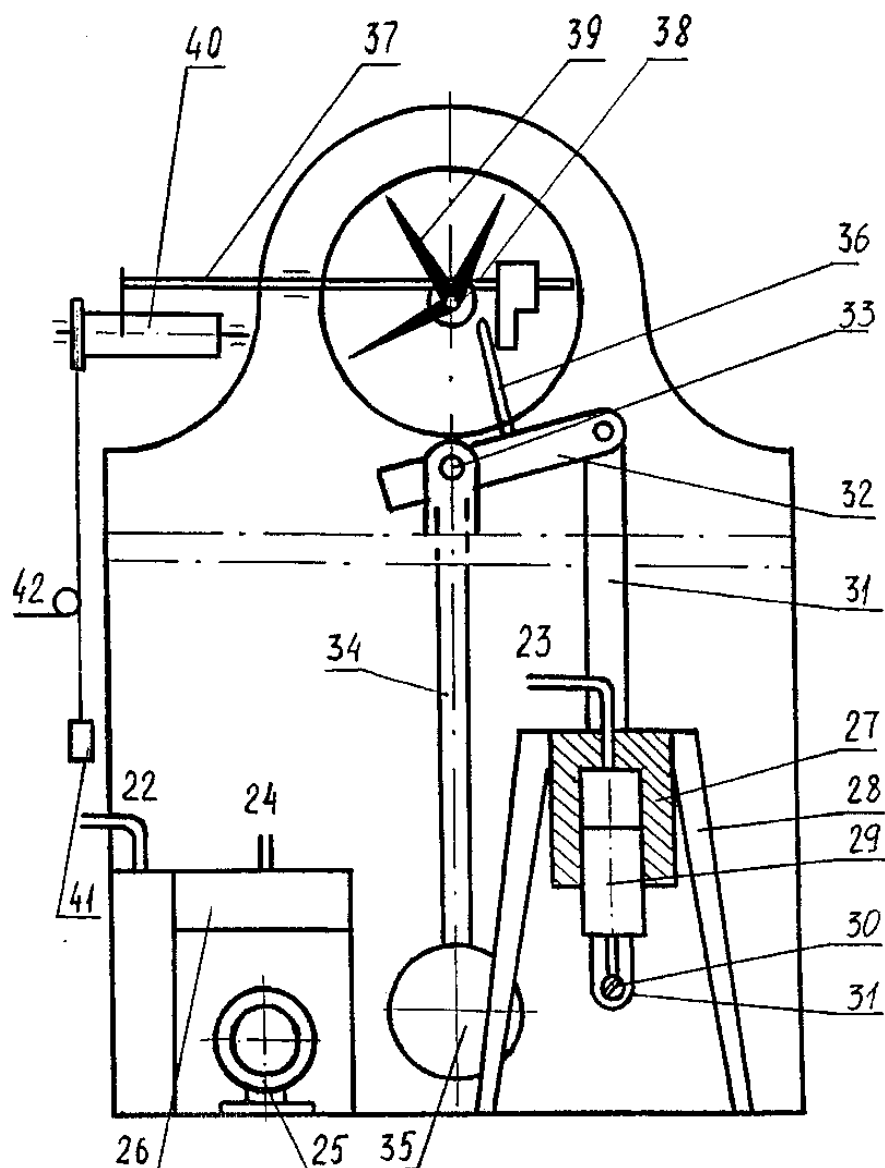


Рис. 6. Пульт управления универсальной гидравлической машины ГМС-50.

Насосная установка собрана отдельным узлом и установлена в корпусе пульта управления. Она включает электродвигатель 25 и насос 26, с помощью которого масло нагнетается в рабочий цилиндр 4.

Маятниковый силоизмеритель состоит из силоизмерительного цилиндра в сборе, тяг и штанги с грузами.

Силовизмерительный цилиндр 27 установлен на кронштейне 28. К нему через трубку 23 подводится масло от рабочего цилиндра. Плунжер 29 силовизмерителя опирается на поперечину 30 тяг 31, которые верхними концами шарнирно соединены с рычагом 32. Рычаг 32 посажен на вал 33 штанги 34 маятникового силоизмерителя.

Под действием давления масла плунжер 29 опускается и посредством тяг 31 и рычага 32 поворачивается вал силоизмерителя в пределах 45° от вертикали. Опускание плунжера продолжается до тех пор, пока отклоняемая штанга с грузом 35 не уравнивает силы давления масла на плунжер.

На верхней плоскости рычага 32 установлен толкатель 36 рейки 37. При повороте рычага толкатель перемещает рейку вправо. Она соединена с шестерней 38, на оси которой закреплены стрелки.

Таким образом, перемещение рейки вызывает поворот рабочей стрелки 39 шкалы силоизмерителя.

Для автоматической записи зависимости деформации образца от нагрузки установка снабжена диаграммным аппаратом. Он представляет собой барабан 40 с намотанной бумажной лентой для записи, приводимый во вращение от перемещения траверсы 9. Над барабаном прямолинейно движется конец рейки с карандашом. На внешнем торце барабана сделаны проточки, через которые перекинута нитка 42. Одним концом она закреплена на подвижной траверсе 9 и перекинута через ролик нижнего захвата 19, а на другом ее конце подвешен грузик 41.

При испытании образец под действием нагрузки деформируется. Величина деформации равна перемещению подвижной траверсы. За счет ее движения нитка с грузом перематывается по проточке и приводит во вращение барабан. Одновременно с этим по бумаге слева на право перемещается карандаш, закрепленный на рейке. Он вычерчивает диаграмму «нагрузка - деформация».

Для испытания на растяжение образец устанавливают между нижним захватом 19 и захватывающей головкой 20.

При испытании на сжатие образец помещают на нижнюю подушку 43 (рис. 5), которая установлена в центральной точке сверху подвижной траверсы.

При испытании на изгиб образец устанавливают на двух опорах 44, которые перемещаются по проточкам, выполненным на верхней плоскости подвижной траверсы.

В двух последних случаях к нижнему торцу рабочего цилиндра крепят либо самоустанавливающуюся опору 45, либо нажимной ролик (на рисунке не показан).

*Испытательная машина ГМС-50 снабжена комплектом приспособлений, в которые входят:*

1. Захватывающее приспособление для разрыва круглых образцов с головками (диаметр образца до 20 мм).
2. Захватывающее приспособление для разрыва стержней без головок диаметром до 38 мм.
3. Захватывающее приспособление для разрыва плоских образцов толщиной до 22 мм и шириной до 80 мм.
4. Приспособление для испытания на сжатие образцов любой формы, концы которых вписываются в окружность диаметром 100 мм.
5. Приспособление для испытания на изгиб образцов любой формы с шириной опорных мест не более длины роликов (162 мм).

### ***Порядок выполнения работы.***

#### *1. Стальной и бронзовый образцы:*

- а) измерить диаметры образцов;
- б) настроить диаграммный аппарат на работу;
- в) установить образцы на нижнюю подушку 43 и нагружать бронзовый образец до разрушения, а стальной до принятия им бочкообразной формы.

#### *2. Деревянные образцы.*

- а) измерить размеры основания образца при сжатии вдоль волокон и размеры основания и высоту образца при сжатии поперек волокон;
- б) установить поочередно образцы на нижнюю подушку 43 и нагружать образец вдоль волокон до разрушения (на это укажет снижение нагрузки по шкале силоизмерителя), а поперек до тех пор, пока он получит деформацию, равную 1/3 своей высоты.

Результаты замеров и результаты опытов записать в журнал наблюдений.

### 2.3 Лабораторная работа №3 (2 часа).

**Тема:** «Определение прогибов и углов поворота в балке на двух опорах»

**2.3.1 Цель работы:** Экспериментальная проверка величины прогибов и углов поворота в балке на двух опорах, определенных теоретическим подсчетом.

#### 2.3.2 Задачи работы:

1. Изучить принцип экспериментального определения прогибов в балке.
2. Выполнить эксперимент.
3. Выполнить расчёты.

#### 2.3.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Набор грузов.
2. Индикатор часового типа.

#### 2.3.4 Описание (ход) работы:

Величина прогиба и угол поворота сечения при изгибе балок определяется в результате интегрирования дифференциального уравнения упругой линии балки

$$E \cdot I \cdot V'' = M(u)$$

Так как величина изгибающего момента является линейной функцией нагрузки, а интегрирование ведется по абсциссе центра тяжести, сечения зависят от нагрузки, а, следовательно, и от величины изгибающего момента.

Другими словами, если мы определим величину прогибов (углов поворота сечения) для различных нагрузок, а следовательно и для различных изгибающих моментов, и по найденным величинам построим график изменения прогиба (угла поворота) в зависимости от величины нагрузки, то получим прямую линию (рис.1).

Теоретический подсчет величины прогибов и углов поворота сечений производится на основании методов решения приведенного дифференциального уравнения.

Для нашего случая нагружения балки (сосредоточенная сила по середине пролета) угол поворота торцевого сечения на левой (неподвижной) опоре и прогиб по середине пролета определяется по следующим формулам:

$$Q = -\frac{\Delta F_{cp} \cdot \ell^2}{16 \cdot E \cdot I_x} \dots \text{рад.}$$
$$V = -\frac{\Delta F_{cp} \cdot \ell^3}{48 \cdot E \cdot I_x}; \dots \text{мм.}$$

Знаки минус в формулах указывают, что поворот сечения происходит по часовой стрелке, а прогиб – вниз (сечение смещается вниз). Экспериментально величины прогибов и углов поворота торцевого сечения определяется при помощи индикаторов часового типа с ценой деления 0,01 мм.

Прогиб в середине пролета определяется непосредственным отсчетом по индикатору, а для замера угла поворота к опорному сечению балки жестко закреплен рычаг – удлинитель, в который упирается ножка индикатора. При повороте опорного сечения вместе с ним поворачивается и рычаг – удлинитель, перемещение нижнего конца которого фиксируется индикатором (рис.2).

Таким образом, угол поворота опорного сечения определяется по следующей формуле:

$$\text{tg } \theta \approx \theta = \frac{n \cdot m}{L}; \dots \text{рад.}$$

(так как тангенс малых углов примерно равен самому углу).

Здесь  $n$  – число делений индикатора,

$m$  – цена деления индикатора,

$L = 150$  мм – расчетная длина рычага – удлинителя, измеренная от продольной оси балки до оси индикатора.

### УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТЫ.

Определение величины прогибов и углов поворота опорного сечения производить в следующей последовательности:

1. Согласно указанной преподавателем схеме нагружения подготовить установку для выполнения опыта.
2. Произвести измерения поперечного сечения балки.
3. Установить стрелки индикаторов на нуль. Для правильного получения отсчетов по индикаторам необходимо установить их так, чтобы ножка каждого индикатора была немного приподнята, а маленькая стрелка указывала целую цифру (напр. 2 или 3).
4. Записать показания индикаторов при отсутствии нагрузки в графу таблицы (см. форму отсчета).
5. Нагрузить балку первоначальной нагрузкой массой 2 кг. Необходимо учесть, что масса гиревого подвеса равна 0,5 кг.
6. Записать абсолютные показания индикаторов в соответствующую графу таблицы.
7. Добавить груз массой 2 кг (всего 4 кг) и записать показания индикаторов.
8. Затем добавить еще груз массой 2 кг (всего 6 кг) и произвести последний отсчет показаний индикаторов.
9. По окончании опыта балку разгрузить и сравнить показания индикаторов с первоначальными (при отсутствии нагрузки). Показания индикаторов должны совпадать.
10. Подсчитать среднее арифметическое приращение прогиба, соответствующего приращению нагрузки  $20 \text{ нН}$  (2 кг).
11. Подсчитать среднее арифметическое приращение показаний индикатора, измеряющего угол поворота сечения, и по вышеприведенной формуле определить опытный угол поворота опорного сечения для приращения нагрузки  $\Delta F = 20 \text{ нН}$ .
12. Определить теоретические значения величин прогибов и углов поворота опорного сечения при нагрузке  $\Delta F = 20 \text{ нН}$ .
13. Сравнить теоретические и опытные величины прогибов и углов поворота.

### ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ.

Работа оформляется в лабораторной тетради по прилагаемой ниже форме отчета. Все вычисления, чертежи, и схемы должны быть выполнены тщательно и аккуратно.





Рис.1

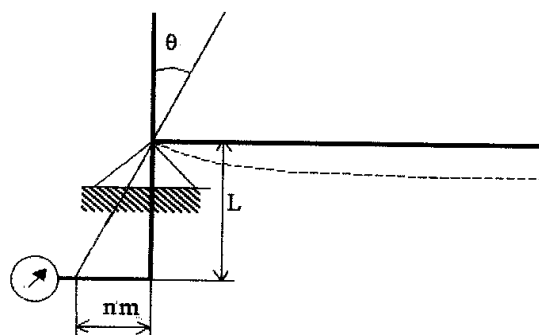


Рис.2

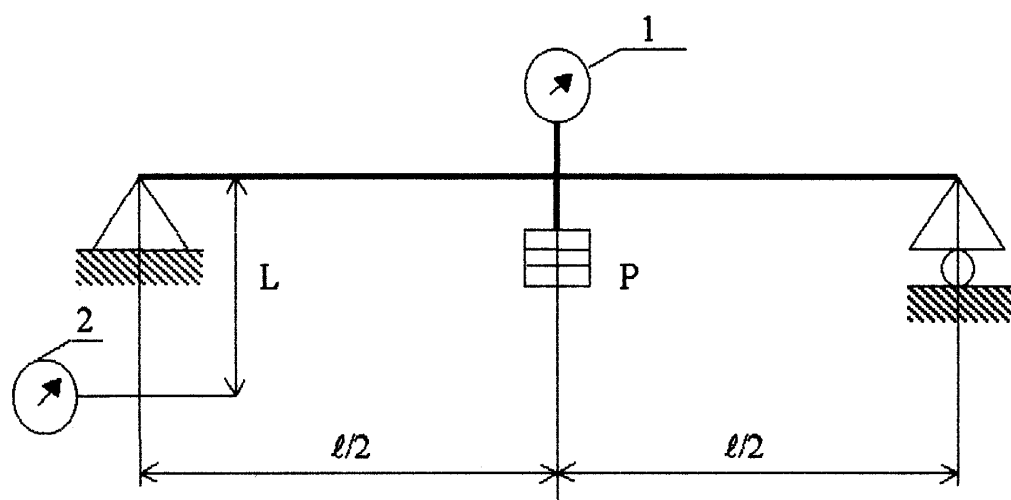


Схема нагружения балки и расположения измерительных приборов

## 2.4 Лабораторная работа №4 (2 часа).

Тема: «Испытание ремённой передачи»

**2.4.1 Цель работы:** Определение КПД и коэффициента тяги клиноременной передачи.

### 2.4.2 Задачи работы:

1. Снять показания с индикаторов часового типа.

2. Выполнить расчёты.

### 2.4.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Груз 80 Н.

### 2.4.4 Описание (ход) работы:

#### I. Домашнее задание.

Ответить на вопросы:

1. Причина упругого скольжения приводного ремня на шкивах.  
2. Формула для определения коэффициента скольжения ремня, её вывод.  
3. Формула для определения коэффициента полезного действия ременной передачи, её анализ.

4. Что называется коэффициентом тяги ременной передачи и что он характеризует?

5. Как определить передаваемое ремнём полезное усилие?

6. Как определить полезное напряжение в ремне?

7. Как определить натяжение ведущей и ведомой ветвей ремня?

8. Конструкция и особенности тормозного устройства.

9. Способ замера моментов на ведущем и ведомом валах.

10. Устройство для определения частоты вращения ведущего и ведомого шкивов.

11. Способ создания начального натяжения ремня.

#### II. Расчётные зависимости.

а) Тяговый орган ременной передачи отличается упругой податливостью.

Напряжения ремня при работе в ведущей и ведомой ветвях неодинаковые, вследствие этого появляются скольжения ремня на шкивах. На ведущий шкив ремень набегают со скоростью  $v_1$  и сходит со скоростью  $v_2$ , а скорость на ободе шкива постоянна  $v$ , поэтому в тех местах, где скорости соприкасающихся поверхностей ремня и шкива неодинаковы, скольжение неизбежно. Коэффициент скольжения ремня определяется по формуле:

$$\xi = \left( 1 - \frac{D_2 \cdot n_2}{D_1 \cdot n_1} \right) \cdot 100, \% \quad (1)$$

где:  $D_1$  и  $D_2$  - диаметры ведущего и ведомого шкивов,

$n_1$  и  $n_2$  - частота вращения ведущего и ведомого шкивов.

б) Потери в ременной передаче складываются из потерь связанных с упругостью ремня и обусловленных скольжением на шкивах, а также трением в опорах шкивов.

Коэффициент полезного действия ременной передачи есть отношение полезно затраченной мощности ко всей подводимой мощности:

$$\eta = \frac{T_2 \cdot \omega_2}{T_1 \cdot \omega_1} \quad (2)$$

где:  $T_1$  и  $T_2$  - крутящие моменты на ведущем и ведомом валах,

$\omega_1$  и  $\omega_2$  - угловая скорость вращения ведущего и ведомого валов.

Так как  $\omega_1 = \frac{\pi \cdot n_1}{30}$ ;  $\omega_2 = \frac{\pi \cdot n_2}{30}$ , то формула (2) примет вид:

$$\eta = \frac{T_2 \cdot n_2}{T_1 \cdot n_1} \cdot 100\%, \quad (3)$$

в) Коэффициент тяги есть отношение передаваемого ремнём, окружного усилия  $F_t$  к сумме натяжений его ветвей:

$$\varphi = \frac{F_t}{2 \cdot F_0} = \frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2} = \frac{T_1}{D_1 \cdot F_0}, \quad (4)$$

где:  $F_0$  – начальное натяжение одинаковое в обеих ветвях;

$F_1$  – натяжение в ведущей ветви;

$F_2$  – натяжение в ведомой ветви;

$T_1$  – момент крутящий на ведущем шкиве, Н мм;

$D_1$  – диаметр ведущего шкива, мм.

### III. Машины и оборудование.

Установка для определения кривых скольжения и КПД плоско клиноременных передач типа ДМ-35У представляет собой ременную передачу с плоским и клиновым ремнем 6 (рис.1.). Её ведущий шкив закреплён на валу балансирного электродвигателя АО2-22-6 (мощностью 1,1кВт,  $n=930$  об/мин), корпус которого может поворачиваться в подшипниках, установленных на качающейся раме.

Ведомый шкив 12 закреплён на валу тормоза, колодки которого связаны с втулкой, которая может поворачиваться в подшипниках, сидящих на ведомом валу. Это создает возможность поворота втулки вместе с колодками тормоза нагружения.

Диаметры ведущего и ведомого шкивов приняты одинаковыми.

Замеряют моменты на ведущем и ведомом валах с помощью плоских консольных пружин. Эти пружины протарированы вместе с индикаторами 29 и 13 (часового типа с ценой деления 0,01 мм).

Для предотвращения колебаний стрелок индикаторов около положения равновесия, предусмотрены жидкостные успокоители.

Замер чисел оборотов ведущего и ведомого валов осуществляется с помощью импульсных датчиков (коллекторного типа с токосъемным полукольцом) и передачей импульсов на импульсные счетчики 8 и 9 (марки «Вис» 62), отсчитывающие количество импульсов.

Начальное натяжение ветвей ремня определяется грузами 1.

Включение и выключение электродвигателей осуществляется с помощью пакетного выключателя. На установке имеется щеточный переключатель на три положения, с помощью которого импульсный датчик можно подключить либо к импульсным счетчикам, либо к клеммам или отключить то и другое.

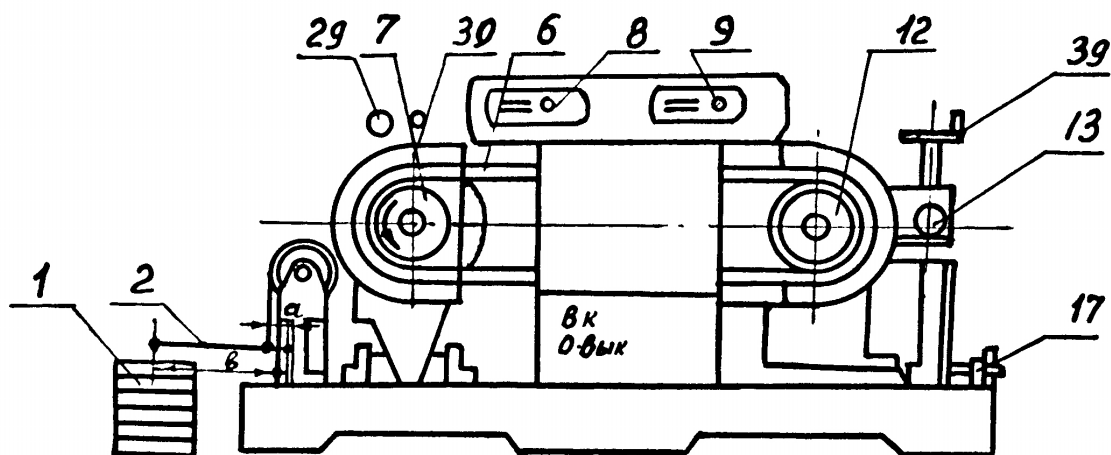
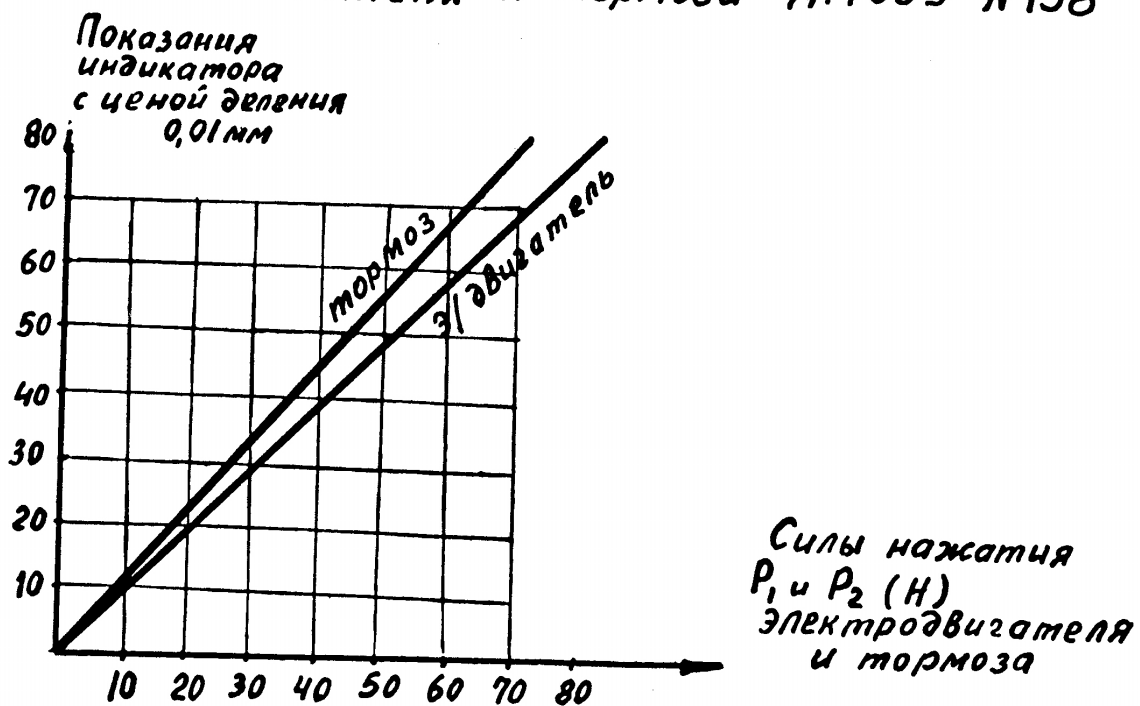


Рис. 1 Установка типа ДМ35У

Тарировочный график пружин электро-  
двигателя и тормоза ДМ35У №158



IV. Рабочее задание.

1. Подсчитывают необходимое первоначальное натяжение ремней передачи.

2. К рычагу машины подвешивают груз, передающий на рычаг силу, получаемую из соотношения:

$$Q \cdot b = 2F_0 \cdot a; \quad \frac{b}{a} = 5. \quad F_0 = 200 \text{ Н.}$$

3. Включают электродвигатель (в присутствии преподавателя). Производят ступенчатое нагружение передачи с помощью рукоятки тормоза нагружения (при ступени). На каждой ступени нагружения производят следующие замеры:

а) измеряют частоту вращения ведущего  $n_1$  и ведомого  $n_2$  валов. Для этого, с помощью щеточного переключателя одновременно включают оба импульсных счётчика.

б) фиксируют показания индикатора двигателя и индикатора тормоза. По тарировочным графикам (см. приложение) определяют соответственно усилия нажатия  $P_1$  и  $P_2$  призм на тарировочные пружины.

4. Подсчитывают крутящие моменты на ведущем валу:  $T_1 = P_1 \cdot \ell_1$  и ведомом валу:  $T_2 = P_2 \cdot \ell_2$ ,

где:  $\ell_1$  – расстояние от оси электродвигателя до оси призмы

$\ell_1 = 80$  мм.

$\ell_2$  – расстояние от оси шкива тормоза до оси призмы

$\ell_2 = 66$  мм.

5. Для каждой ступени нагружения определяют коэффициент скольжения ремня по формуле (1), при условии, что:  $D_2 = D_1 = 125$  мм.

6. Для каждой ступени нагружения определяют коэффициент полезного действия по формуле (3) и коэффициент тяги по формуле (4).

7. Результаты измерений и подсчёты заносят в таблицу и строят кривые скольжения, КПД в зависимости от коэффициента тяги.

#### V. Контрольное задание.

1. Ответить на вопросы домашнего задания.
2. Пояснить порядок выполнения работы, применяемые расчёты.
3. Сопоставить полученные графики коэффициента тяги и КПД с теоретическими и проанализировать расхождения.
4. Указать на графиках оптимальную зону эксплуатации ременной передачи.

### **3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ**

#### **3.1 Практическое занятие №1 (2 часа).**

**Тема:** «Полная проверка прочности балки при изгибе»

##### **3.1.1 Задание для работы:**

1. Выполнить полную проверку прочности балки при изгибе.

##### **3.1.2 Краткое описание проводимого занятия:**

На основании исходных данных в виде балки произвести проверку балки по нормальным и касательным напряжениям.

##### **3.1.3 Результаты и выводы:**

1. Студент освоил формулу для расчёта на прочность балки при изгибе.
2. Выяснили как выполняется расчёт касательных напряжений по формуле Журавского.
3. В результате сравнили полученные результаты напряжений по третьей теории прочности по нормальным напряжениям с допускаемыми значениями.

#### **3.2 Практическое занятие №2 (2 часа).**

**Тема:** «Расчёт валов»

##### **3.2.1 Задание для работы:**

1. Выполнить основной расчёт вала.

##### **3.2.2 Краткое описание проводимого занятия:**

1. По методике построения эпюр внутренних силовых факторов необходимо выполнить расчёт вала.

##### **3.2.3 Результаты и выводы:**

1. Построили эпюры изгибающих моментов для вала нагруженного силой и моментом.
2. Определили эквивалентное значение изгибающего момента.
3. Рассчитали диаметр вала.