

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**Методические рекомендации для самостоятельной
работы обучающихся по дисциплине**

Б1.Б.15 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Направление подготовки: 35.03.06 Агроинженерия

Профиль образовательной программы: «Электрооборудование и электротехнологии»

Форма обучения: очная

СОДЕРЖАНИЕ

1. Организация самостоятельной работы.....	3
2. Методические рекомендации по подготовке к занятиям.....	5
2.1 Статика.....	5
2.2 Кинематика.....	4
2.3 Динамика.....	4
3. Методические рекомендации по выполнению индивидуальных домашних заданий.....	5
3.1 С-3 Определение реакций опор составной конструкции	5
3.2 С-7. Определение реакций опор твёрдого тела.....	12
3.3 К-1 Определение скоростей и ускорений точек.....	17
3.4 К-3 Кинематический анализ плоского механизма.....	20
3.5 Д-1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием постоянной силы.....	28
3.6 Д-10. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы.....	34
4. Методические рекомендации по самостоятельному изучению вопросов.....	49

1. Организация самостоятельной работы

1.1 Организационно-методические данные дисциплины

п/п	Наименование разделов, тем	всего	Количество часов по видам самостоятельной работы				
			подго- товка курсо- вой ра- боты (проек- та)	подго- товка рефера- тов	ИДЗ	СИВ	ПкЗ
1	2	3	4	5	6	7	8
1	Структура курса. Аксиомы статики. Силовые факторы.					2	2
2	Основная теорема статики. Уравнения равновесия.					1	1
3	Использование уравнений равновесия. Статическая определённость. Сочленённые конструкции.					2	2
4	Центр тяжести. Способы определения положения ЦТ.					3	4
5	Трение скольжения и качения				2	2	2
6	Кинематика. Скорости и ускорения точек при различных способах задания движения.					4	2
7	Простейшие движения твёрдого тела. Плоское движение				2	2	4
8	Составное движение точки.				2	2	2
9	Составление дифференциальных уравнений движения точки.					1	
10	Свободные, затухающие и вынужденные колебания					1	1
11	Общие свойства системы. Моменты инерции.					1	1

12	Теорема об изменении количества движения. Теорема о моменте количества движения. Принцип Даламбера. Силы инерции.					1	1
13	Принцип возможных перемещений.					2	3

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЗАНЯТИЯМ

2.1 Статика

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на следующем:

- Понятие равнодействующей системы сил.
- Понятие момента силы относительно центра и оси.
- Инвариантность главного вектора и скалярного произведения главного вектора на главный момент.
- Условия равновесия системы сил.

2.2 Кинематика

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на следующем:

- Векторный, координатный и естественный способы задания движения. Определение кинематических характеристик в каждом из способов.
- Виды движений твёрдого тела. Кинематические характеристики в каждом из движений.
- Составное движение.

2.3 Динамика

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на следующем:

- Дифференциальные уравнения движения в координатной и естественной формах.
- Применение общих теорем динамики для точки, твёрдого тела и механической системы.
- Применение принципов динамики для решения первой и второй задач динамики.

3. Методические рекомендации по выполнению индивидуальных домашних заданий

3.1 С-3 Определение реакций опор составной конструкции.

Задание С.3. Определение реакций опор составной конструкции (система двух тел)

Конструкция состоит из двух частей. Установить, при каком способе соединения частей конструкции модуль реакции, указанной в табл. 5, наименьший, и для этого варианта соединения определить реакции опор, а также соединения C .

На рис. 17—19 показан первый способ соединения — с помощью шарнира C . Второй способ соединения — с помощью скользящей заделки, схемы которой показаны в табл. 6.

Пример выполнения задания. Дано: схема конструкции (рис. 20); $P_1 = 5$ кН, $P_2 = 7$ кН; $M = 22$ кН·м; $q = 2$ кН/м; $\alpha = 60^\circ$.

Определить реакции опор, а также соединения C для того способа сочленения (шарнир или скользящая заделка), при котором модуль опоры A наименьший.

Решение. 1. *Определение реакций опоры A при шарнирном соединении в точке C .*

Таблица 5

Номер вари- анта (рис. 17-19)	P_1	P_2	$M,$	$q,$	Иссле- дуемая реакция	Номер вари- анта (рис. 17-19)	P_1	P_2	$M,$	$q,$	Иссле- дуемая реакция
	кН		кН · м	кН/м			кН		кН · м	кН/м	
1	5,0	—	24,0	0,8	X_A	16	7,0	10,0	14,0	3,8	R_B
2	6,0	10,0	22,0	1,0	R_A	17	9,0	12,0	26,0	4,0	R_A
3	7,0	9,0	20,0	1,2	R_B	18	11,0	10,0	18,0	3,5	M_B
4	8,0	—	18,0	1,4	M_A	19	13,0	9,0	30,0	3,0	M_B
5	9,0	—	16,0	1,6	R_A	20	15,0	8,0	25,0	2,5	R_B
6	10,0	8,0	25,0	1,8	M_A	21	10,0	7,0	20,0	2,0	R_A
7	11,0	7,0	20,0	2,0	R_B	22	5,0	6,0	15,0	1,5	R_A
8	12,0	6,0	15,0	2,2	M_A	23	8,0	5,0	10,0	1,4	R_A
9	13,0	—	10,0	2,4	X_A	24	11,0	4,0	5,0	1,3	M_A
10	14,0	—	12,0	2,6	R_A	25	14,0	6,0	7,0	1,2	R_B
11	15,0	5,0	14,0	2,8	R_D	26	12,0	8,0	9,0	1,1	R_B
12	12,0	4,0	16,0	3,0	R_B	27	10,0	7,0	11,0	1,0	X_A
13	9,0	6,0	18,0	3,2	R_A	28	8,0	9,0	13,0	1,2	R_A
14	6,0	—	20,0	3,4	M_A	29	6,0	10,0	15,0	1,4	M_A
15	5,0	8,0	22,0	3,6	M_B	30	10,0	12,0	17,0	1,6	M_B

Рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных ко всей конструкции (рис. 21). Составим уравнение моментов сил относительно точки B . Для упрощения вычисления момента силы \vec{P}_1 разложим ее на вертикальную и горизонтальную составляющие: $P'_1 = P_1 \cos 60^\circ = 2,5$ кН; $P''_1 = P_1 \sin 60^\circ = 4,33$ кН,

$$\sum M_{iB} = 0; P'_1 \cdot 3 + P''_1 \cdot 8 - Q \cdot 1 - Y_A \cdot 5 + X_A \cdot 1 - M + P_2 \sqrt{1,0^2 + 1,5^2} = 0, \quad (1)$$

где $Q = q \cdot 4 = 2 \cdot 4 = 8$ кН.

После подстановки данных и вычислений уравнение (1) получает вид

$$X_A - 5Y_A = -24,74 \text{ кН}. \quad (1')$$

Второе уравнение с неизвестными X_A и Y_A получим, рассмотрев систему уравновешивающихся сил, приложенных к части конструкции, расположенной левее шарнира C (рис. 22):

$$\sum M_{iC} = 0; P''_1 \cdot 6 + Q \cdot 2 + X_A \cdot 4 - Y_A \cdot 3 = 0,$$

или после вычислений

$$4X_A - 3Y_A = -41,98 \text{ кН}. \quad (2)$$

Решая систему уравнений (1') и (2), находим:

$$X_A = -7,97 \text{ кН}, \quad Y_A = 3,36 \text{ кН}.$$

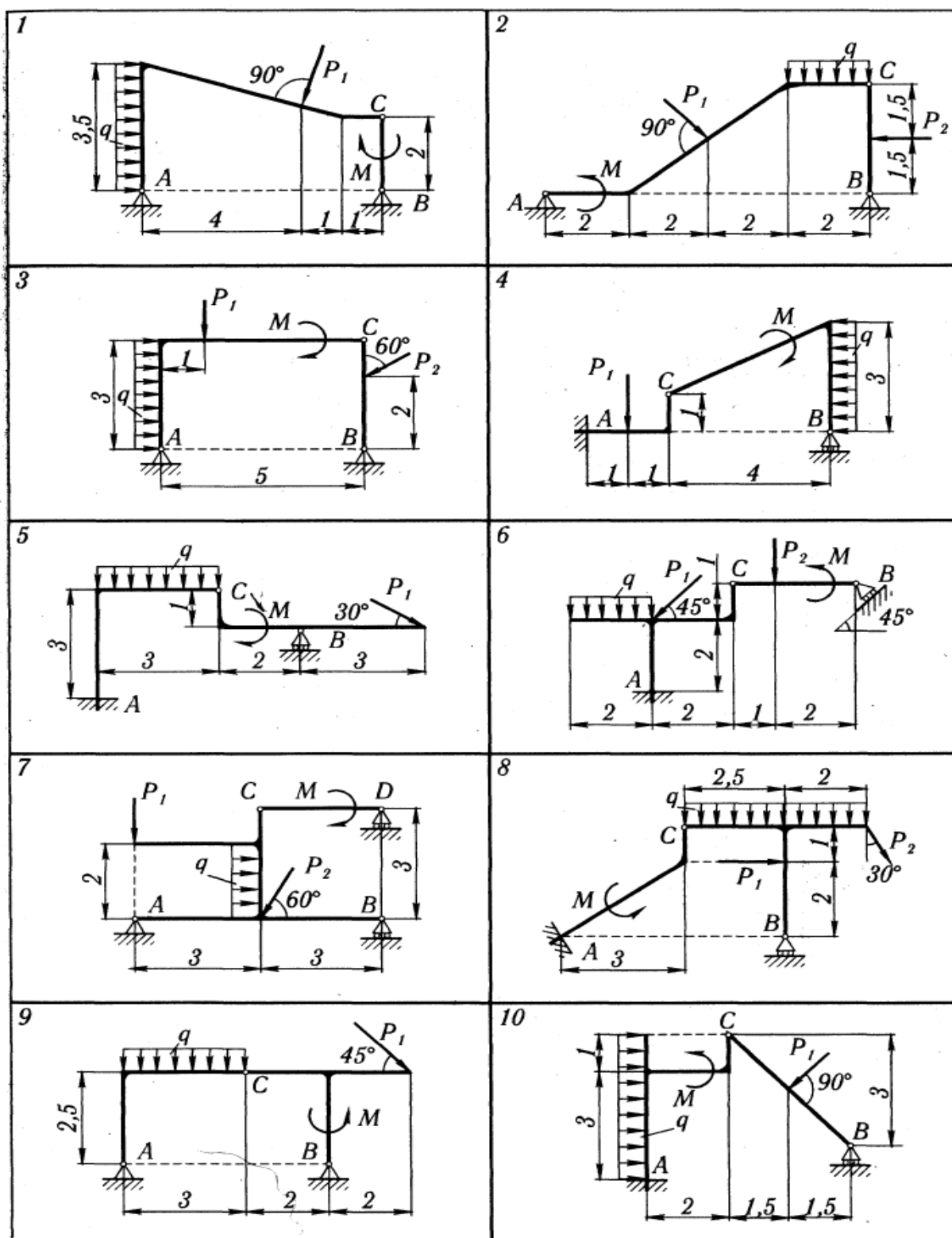


Рис. 17

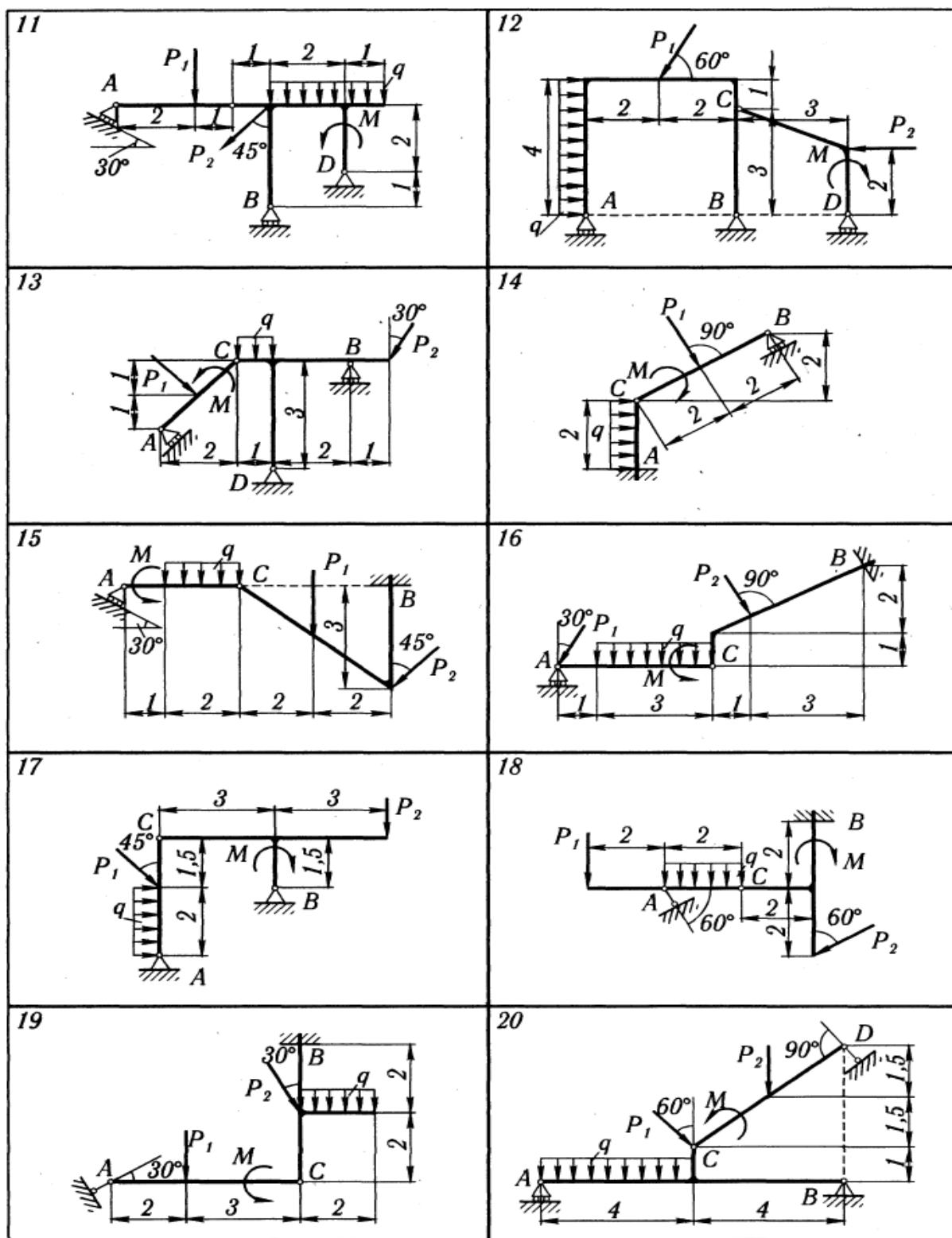


Рис. 18

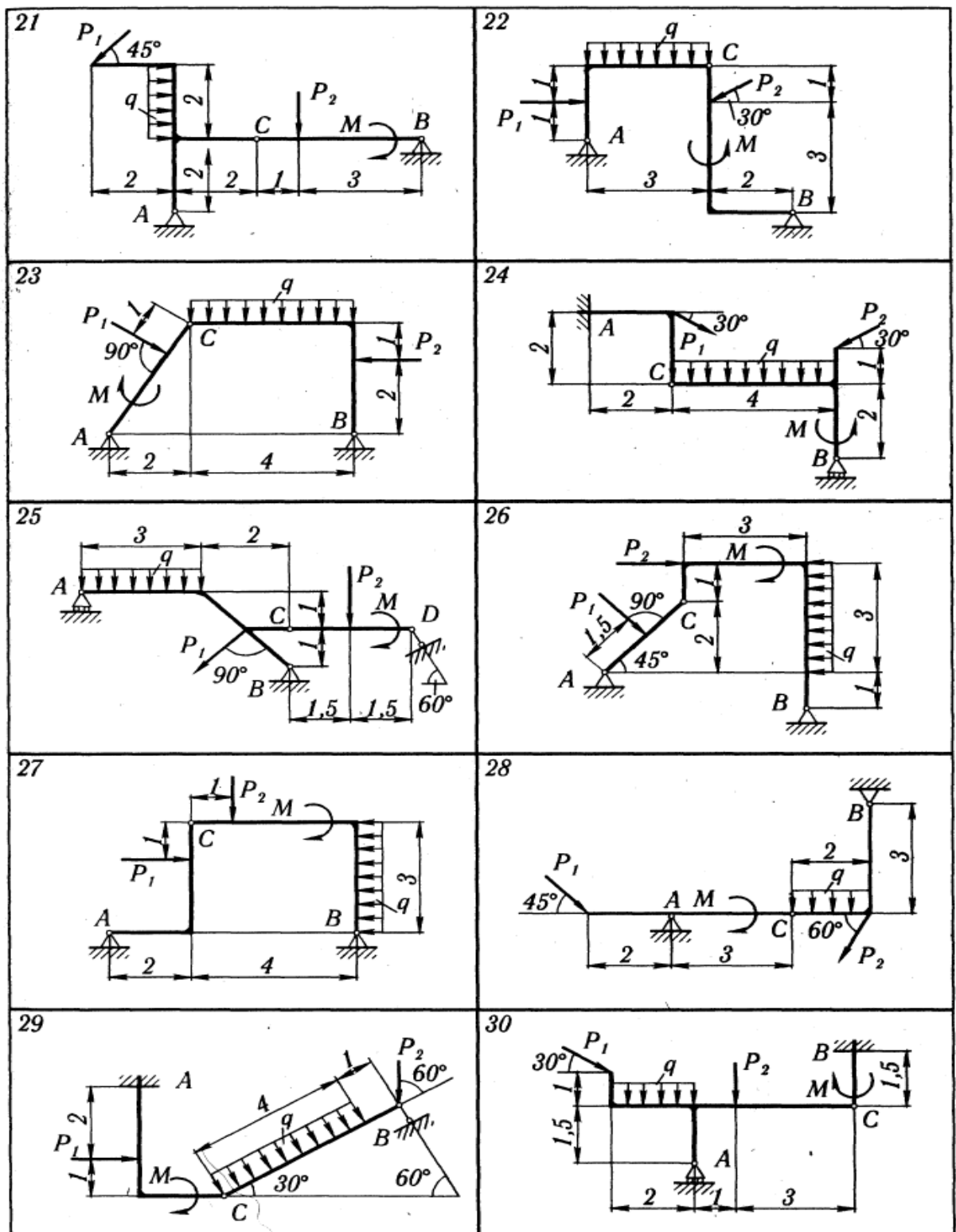


Рис. 19

Таблица 6

Номер варианта	Вид скользящей заделки	Номер варианта	Вид скользящей заделки	Номер варианта	Вид скользящей заделки
1, 2, 3		14		23	
4		15		24	
5		16		25	
6, 7, 8		17		26	
9		18		27	
10		19		28	
11		20		29	
12		21		30	
13		22			

Модуль реакции опоры A при шарнирном соединении в точке C равен

$$R'_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{7,97^2 + 3,36^2} = \sqrt{74,81} = 8,65 \text{ кН.}$$

2. Расчетная схема при соединении частей конструкции в точке C скользящей заделкой показана на рис. 23. Системы сил, показанных

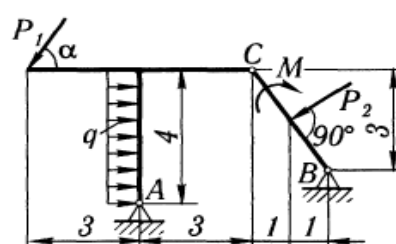


Рис. 20

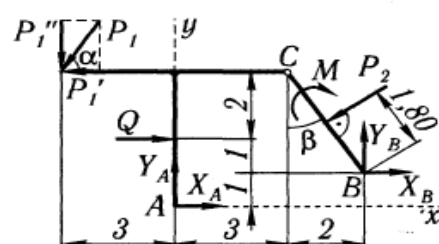


Рис. 21

на рис. 21 и 23, ничем друг от друга не отличаются. Поэтому уравнение (1') остается в силе. Для получения второго уравнения

рассмотрим систему уравнивающих сил, приложенных к части конструкции, расположенной левее скользящей заделки C (рис. 24, а).

Составим уравнение равновесия:

$$\sum X_i = 0; \quad X_A + Q - P'_1 = 0, \quad (3)$$

откуда

$$X_A = -5,50 \text{ кН},$$

и из уравнения (1') находим

$$Y_A = 3,85 \text{ кН}.$$

Следовательно, модуль реакции опоры A при скользящей заделке в C равен

$$R''_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{5,50^2 + 3,85^2} = \sqrt{45,07} = 6,71 \text{ кН}.$$

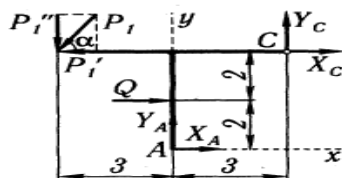


Рис. 22

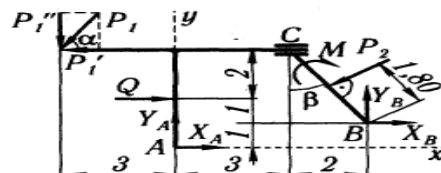


Рис. 23

Итак, при соединении в точке C скользящей заделкой модуль реакции опоры A меньше, чем при шарнирном соединении (\approx на 22%). Найдем составляющие реакции опоры B и скользящей заделки.

Для левой от C части (рис. 24, а)

$$\sum Y_i = 0; \quad -P''_1 + Y_A + Y_C = 0, \quad (4)$$

откуда

$$Y_C = P''_1 - Y_A = 0,48 \text{ кН}.$$

Составляющие реакции опоры B и момент в скользящей заделке найдем из уравнений равновесия, составленных для правой от C части конструкции (рис. 24, б):

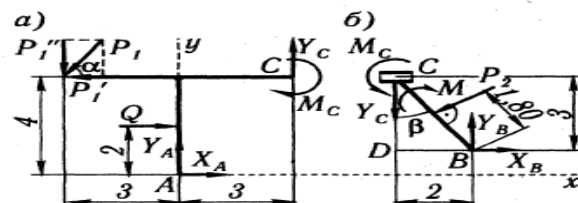


Рис. 24

$$\sum M_{iB} = 0; \quad M_C + Y_C \cdot 2 - M + P_2 \cdot 1,80 = 0, \quad (5)$$

$$\sum X_i = 0; \quad -P_2 \cos \beta + X_B = 0, \quad (6)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -Y_C + Y_B - P_2 \sin \beta = 0. \quad (7)$$

Из прямоугольного треугольника BCD

$$\sin \beta = BD/BC = 2,0/\sqrt{2^2 + 3^2} = 2,0/3,61 = 0,555;$$

$$\cos \beta = CD/BC = 3,0/3,61 = 0,832.$$

Решая уравнения (5)—(7) относительно M_C , X_B , Y_B , получим:

$$M_C = 8,44 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad X_B = 5,82 \text{ кН}; \quad Y_B = 4,37 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности определения реакций убедимся, что соблюдается не использованное ранее уравнение равновесия для сил, приложенных ко всей конструкции (см. рис. 21), например

$$\begin{aligned} \sum M_{iA} = P'_1 \cdot 4 + P''_1 \cdot 3 - Q \cdot 2 - M - P_2 \sin \beta \cdot 4 + P_2 \cos \beta \cdot 2,5 - X_B \cdot 1 + \\ + Y_B \cdot 5 = 2,5 \cdot 4 + 4,33 \cdot 3 - 8 \cdot 2 - 22 - 7 \cdot 0,555 \cdot 4 + 7 \cdot 0,832 \cdot 2,5 - \\ - 5,82 \cdot 1 + 4,37 \cdot 5 = 59,40 - 59,36 \approx 0. \end{aligned}$$

Результаты расчетов приведены в табл. 7.

Таблица 7

	Силы, кН						Момент, кН · м
	X_A	Y_A	R_A	Y_C	X_B	Y_B	M_C
Для схемы на рис. 20	-7,97	3,36	8,65	—	—	—	—
Для схемы на рис. 23	-5,50	3,85	6,71	$\pm 0,48$	5,82	4,37	$\pm 8,44$

2.2 С-7. Определение реакций опор твёрдого тела.

Задание С.7. Определение реакций опор твердого тела

Найти реакции опор конструкции. Схемы конструкций показаны на рис. 44—46. Необходимые для расчета данные приведены в табл. 14.

Таблица 14

Номер варианта (рис. 44—46)	Силы, кН			Размеры, см					Номер варианта (рис. 44—46)	Силы, кН			Размеры, см				
	<i>Q</i>	<i>T</i>	<i>G</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>R</i>	<i>r</i>		<i>Q</i>	<i>T</i>	<i>G</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>R</i>	<i>r</i>
1	2	—	20	20	30	10	15	5	16	4	—	2	50	30	—	—	—
2	4	—	2	20	10	30	10	10	17	2	—	1	15	10	20	20	5
3	20	—	18	400	400	450	—	—	18	6	—	2	60	40	60	—	—
4	3	—	2	30	20	40	15	10	19	—	8	2	20	30	40	20	15
5	5	—	3	30	40	20	20	15	20	4	—	—	60	40	20	—	—
6	1	4	2	40	30	20	20	10	21	2	—	—	40	60	30	—	—
7	—	3	1	30	10	5	18	6	22	—	—	5	20	50	30	—	—
8	4	6	3	20	40	15	20	10	23	—	—	4	40	30	50	—	—
9	5	—	3	20	15	10	30	40	24	5	—	2	—	—	—	—	—
10	1	4	2	30	40	20	20	10	25	—	—	3	50	50	60	—	—
11	—	2	1	20	30	15	15	10	26	—	—	1	20	60	40	—	—
12	4	—	1	25	20	8	15	10	27	10	—	—	50	30	50	—	—
13	10	—	5	40	30	20	25	15	28	35	—	32	400	200	200	—	—
14	—	2	1	30	90	20	30	10	29	—	4	3	15	20	15	15	10
15	3	—	2	60	20	40	20	5	30	5	—	—	40	40	10	—	—

Примечания. 1. Считать, что в вариантах 16, 18, 22—26 петли не препятствуют перемещению рамы вдоль *AB*.

2. В вариантах 20 и 21 соприкасающиеся поверхности считать абсолютно гладкими.

Пример выполнения задания. Дано: рама *ABCD* весом $G = 1$ кН, $P = 2$ кН, $\vec{P} \parallel Ay$, $AD = BC = 60$ см, $AB = CD = 100$ см, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$ (рис. 47). Найти реакции опор *A*, *B* и *C* (*A* — шаровой шарнир, *B* — петля, *C* — стержневая опора).

Решение. К раме *ABCD* приложены сила тяжести \vec{G} , сила \vec{P} , реакция \vec{S} стержня *CE* и реакции опор *A* и *B*. Реакция шарового шарнира *A* определяется тремя составляющими: \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{Z}_A , а реакция петли *B* — двумя: \vec{X}_B и \vec{Y}_B (рис. 48).

Из этих сил — шесть неизвестных. Для их определения можно составить шесть уравнений равновесия.

Уравнения моментов сил относительно координатных осей:

$$\sum M_{ix} = 0; \quad -P \cdot AD \cos 30^\circ - G \cdot AB/2 + S \cos 30^\circ AB + Z_B \cdot AB = 0, \quad (1)$$

$$\sum M_{iy} = 0; \quad G(BC/2) \sin 30^\circ - S \cdot BC \sin 60^\circ = 0, \quad (2)$$

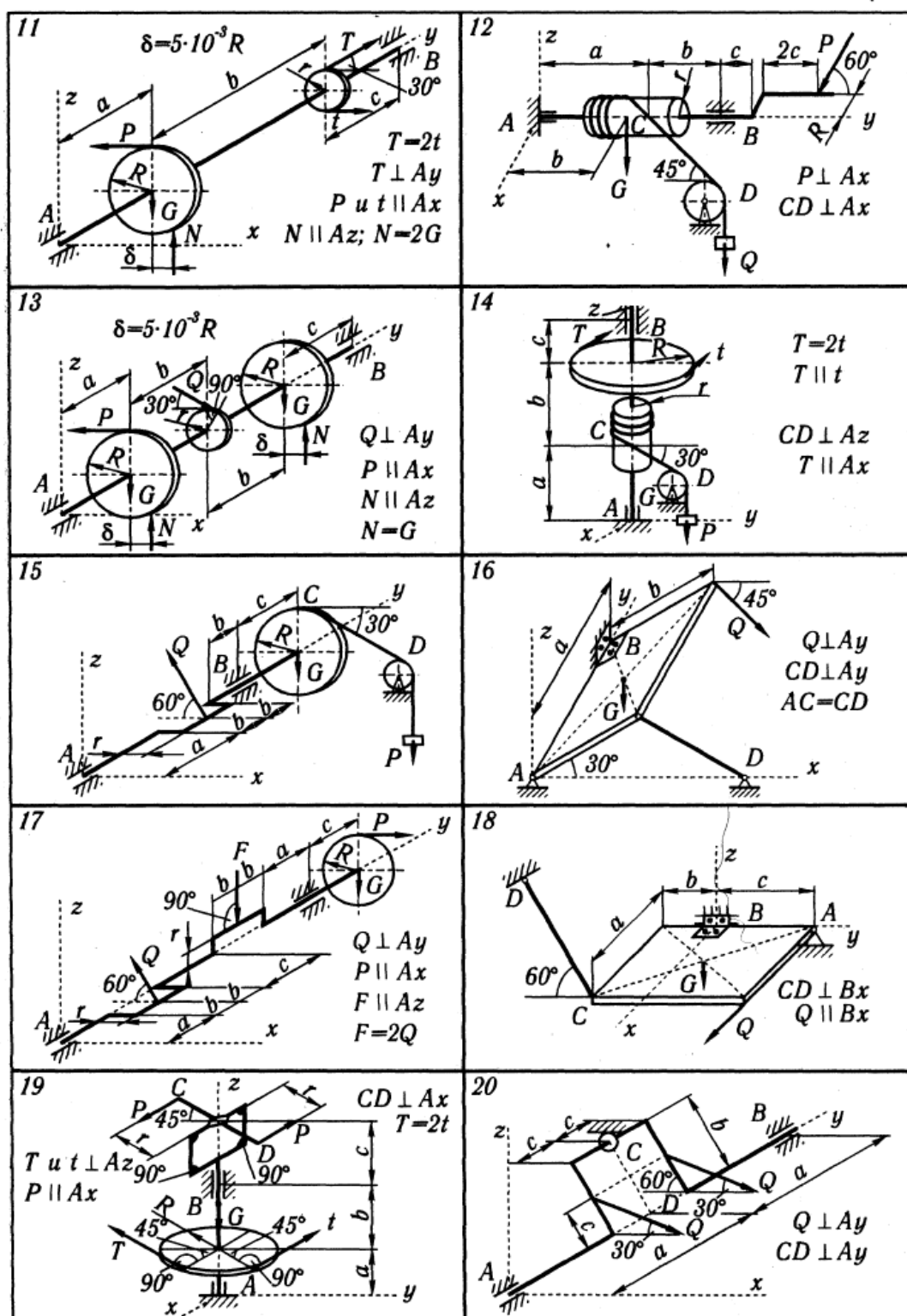


Рис. 45

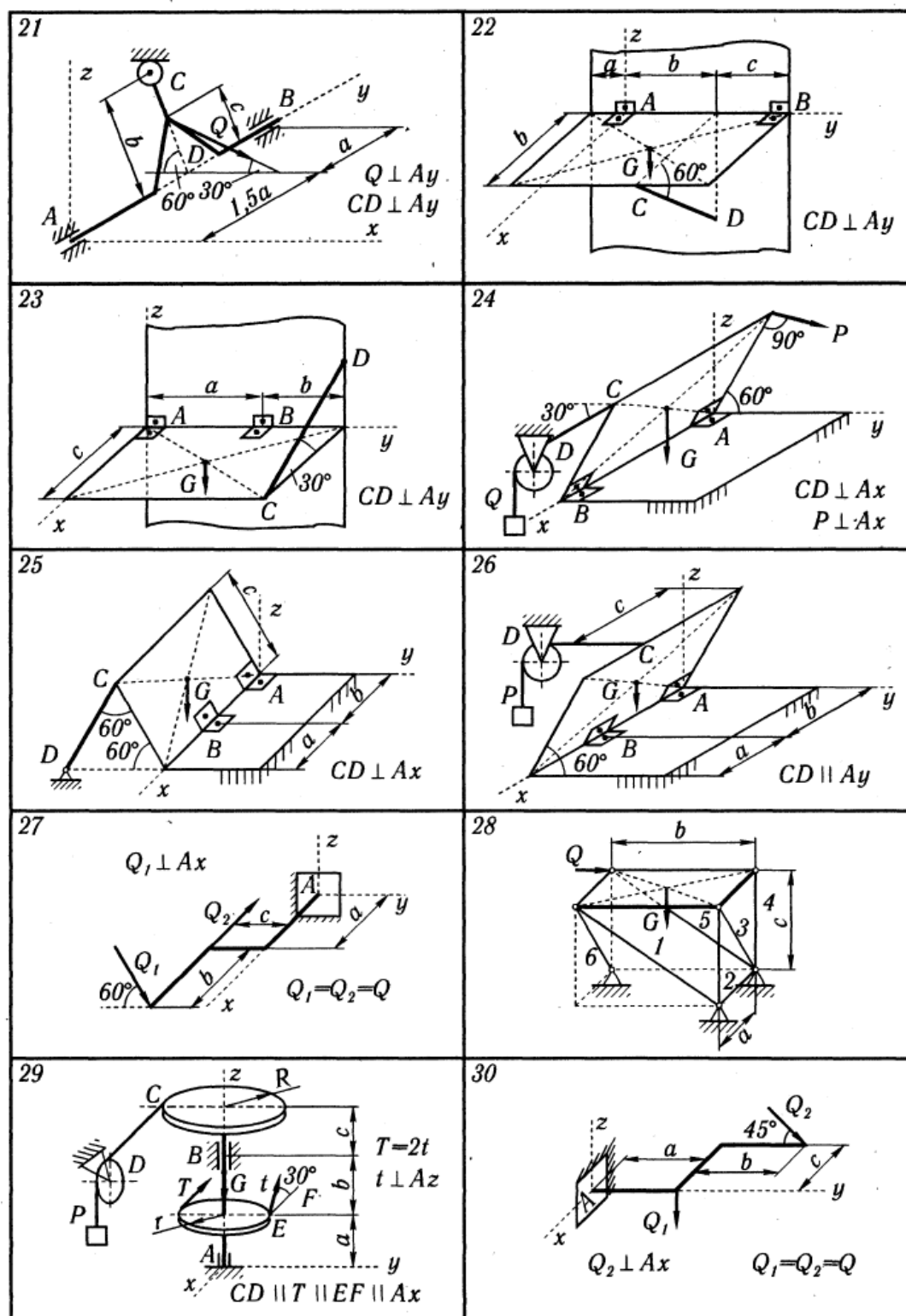


Рис. 46

$$\sum M_{iz} = 0; \quad P \cdot AD \sin 30^\circ + S \cos 60^\circ AB - X_B \cdot AB = 0. \quad (3)$$

Из уравнения (2) определяем S , затем из уравнений (1) и (3) находим Z_B и X_B . Уравнения проекций сил на оси координат:

$$\sum X_i = 0; \quad X_A + X_B - S \cos 60^\circ = 0, \quad (4)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A + P = 0, \quad (5)$$

$$\sum Z_i = 0; \quad Z_A - G + Z_B + S \cos 30^\circ = 0. \quad (6)$$

Из этих уравнений находим X_A , Y_A и Z_A .

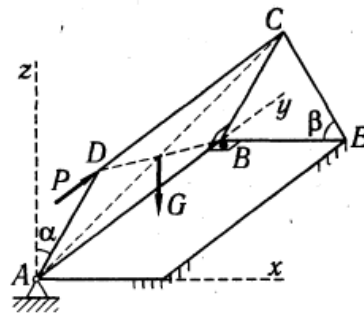


Рис. 47

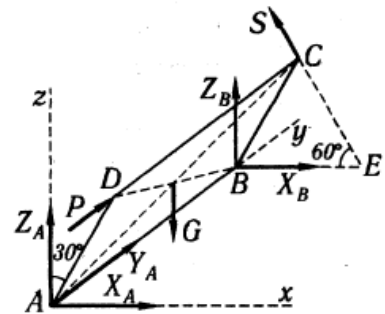


Рис. 48

Результаты вычислений приведены в табл. 15.

Таблица 15

Силы, кН					
S	X_A	Y_A	Z_A	X_B	Z_B
0,289	-0,600	-2,00	-0,54	0,744	1,29

2.3 К-1. Определение скоростей и ускорений точек.

Задание К.1. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения

По заданным уравнениям движения точки M установить вид ее траектории и для момента времени $t = t_1$ (с) найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Необходимые для решения данные приведены в табл. 20.

Таблица 20

Номер варианта	Уравнения движения		t_1 , с
	$x = x(t)$, см	$y = y(t)$, см	
1	$-2t^2 + 3$	$-5t$	1/2
2	$4 \cos^2(\pi t/3) + 2$	$4 \sin^2(\pi t/3)$	1
3	$-\cos(\pi t^2/3) + 3$	$\sin(\pi t^2/3) - 1$	1
4	$4t + 4$	$-4/(t + 1)$	2
5	$2 \sin(\pi t/3)$	$-3 \cos(\pi t/3) + 4$	1
6	$3t^2 + 2$	$-14t$	1/2
7	$3t^2 - t + 1$	$5t^2 - 5t/3 - 2$	1
8	$7 \sin(\pi t^2/6) + 3$	$2 - 7 \cos(\pi t^2/6)$	1
9	$-3/(t + 2)$	$3t + 6$	2
10	$-4 \cos(\pi t/3)$	$-2 \sin(\pi t/3) - 3$	1
11	$-4t^2 + 1$	$8 - 3t$	1/2
12	$5 \sin^2(\pi t/6)$	$-5 \cos^2(\pi t/6) - 3$	1
13	$5 \cos(\pi t^2/3)$	$-5 \sin(\pi t^2/3)$	1
14	$-2t - 2$	$-2/(t + 1)$	2
15	$4 \cos(\pi t/3)$	$-3 \sin(\pi t/3)$	1
16	$3t$	$4t^2 + 1$	1/2
17	$7 \sin^2(\pi t/6) - 5$	$-7 \cos^2(\pi t/6)$	1
18	$1 + 3 \cos(\pi t^2/3)$	$3 \sin(\pi t^2/3) + 3$	1
19	$-5t^2 - 4$	$3t$	1
20	$2 - 3t - 6t^2$	$3 - 3t/2 - 3t^2$	0
21	$6 \sin(\pi t^2/6) - 2$	$6 \cos(\pi t^2/6) + 3$	1
22	$7t^2 - 3$	$5t$	1/4
23	$3 - 3t^2 + t$	$4 - 5t^2 + 5t/3$	1

Номер варианта	Уравнения движения		t_1 , с
	$x = x(t)$, см	$y = y(t)$, см	
24	$-4 \cos(\pi t/3) - 1$	$-4 \sin(\pi t/3)$	1
25	$-6t$	$-2t^2 - 4$	1
26	$8 \cos^2(\pi t/6) + 2$	$-8 \sin^2(\pi t/6) - 7$	1
27	$-3 - 9 \sin(\pi t^2/6)$	$-9 \cos(\pi t^2/6) + 5$	1
28	$-4t^2 + 1$	$-3t$	1
29	$5t^2 + 5t/3 - 3$	$3t^2 + t + 3$	1
30	$2 \cos(\pi t^2/3) - 2$	$-2 \sin(\pi t^2/3) + 3$	1

Пример выполнения задания. Исходные данные:

$$x = 4t; \quad y = 16t^2 - 1; \quad (1)$$

$$t_1 = 0,5 \quad (x \text{ и } y — \text{ в см, } t \text{ и } t_1 — \text{ в с}).$$

Решение. Уравнения движения (1) можно рассматривать как параметрические уравнения траектории точки. Чтобы получить уравнения траектории в координатной форме, исключим время t из уравнений (1).

Получаем $y = x^2 - 1$, т. е. траекторией точки является парабола, показанная на рис. 67.

Вектор скорости точки

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}. \quad (2)$$

Вектор ускорения

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}.$$

Здесь \vec{i}, \vec{j} — орты осей x и y ; v_x, v_y, a_x, a_y — проекции скорости и ускорения точки на оси координат.

Найдем их, дифференцируя по времени уравнения движения (1):

$$\begin{aligned} v_x = \dot{x} &= 4 \text{ см/с}; & a_x = \ddot{x} &= 0; \\ v_y = \dot{y} &= 32t; & a_y = \ddot{y} &= 32 \text{ см/с}^2. \end{aligned} \quad (3)$$

По найденным проекциям определяются модуль скорости:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (4)$$

и модуль ускорения точки:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \quad (5)$$

Модуль касательного ускорения точки

$$a_\tau = |dv/dt|, \quad (6)$$

или

$$a_\tau = |\vec{v} \cdot \vec{a}/v|; \quad (6')$$

$$a_\tau = |(v_x a_x + v_y a_y)/v|; \quad (6'')$$

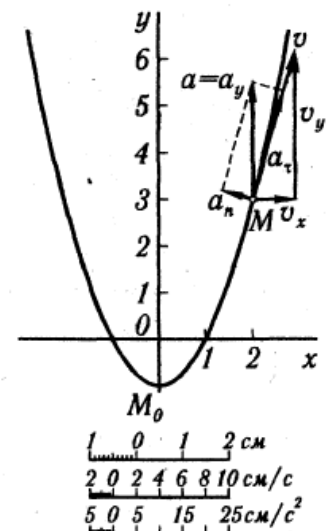


Рис. 67

dv/dt выражает проекцию ускорения точки на направление ее скорости. Знак «+» при dv/dt означает, что движение точки ускоренное, направления \vec{a}_τ и \vec{v} совпадают; знак «-», — что движение замедленное.

Модуль нормального ускорения точки

$$a_n = v^2/\rho. \quad (7)$$

Если радиус кривизны траектории ρ в рассматриваемой точке неизвестен, то a_n можно определить по формуле

$$a_n = |\vec{v} \times \vec{a}|/v. \quad (8)$$

При движении точки в плоскости формула (8) принимает вид

$$a_n = |v_x a_y - v_y a_x|/v. \quad (8')$$

Модуль нормального ускорения можно определить и следующим образом:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}. \quad (9)$$

После того, как найдено нормальное ускорение по формулам (8) или (9), радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке определяется из выражения

$$\rho = v^2/a_n. \quad (10)$$

Результаты вычислений по формулам (3)—(6), (8) и (10) для заданного момента времени $t_1 = 0,5$ с приведены в табл. 21.

Таблица 21

Координаты, см		Скорость, см/с			Ускорение, см/с ²					Радиус кривизны, см
x	y	v_x	v_y	u	a_x	a_y	a	a_τ	a_n	ρ
2,0	3,0	4,0	16,0	16,5	0	32,0	32,0	31,0	7,8	35,0

На рис. 67 показано положение точки M в заданный момент времени. Вектор \vec{v} строим по составляющим \vec{v}_x и \vec{v}_y , причем этот вектор должен по направлению совпадать с касательной к траектории. Вектор \vec{a} строим по составляющим \vec{a}_x и \vec{a}_y и затем раскладываем на составляющие \vec{a}_τ и \vec{a}_n . Совпадение величин a_τ и a_n , найденных из чертежа, с их значениями, полученными аналитически, служит контролем правильности решения.

Дополнение к заданию К.1. Данное задание может быть использовано для определения скорости и ускорения точки при ее движении по пространственной траектории. Для этого к двум уравнениям движения (см. табл. 20) добавляется третье уравнение (табл. 22).

Общий порядок выполнения задания в этом случае такой же, как и в приведенном выше примере.

Таблица 22

Номер вари- анта	$z = z(t)$, см	Номер вари- анта	$z = z(t)$, см	Номер вари- анта	$z = z(t)$, см	Номер вари- анта	$z = z(t)$, см	Номер вари- анта	$z = z(t)$, см
1	$3t$	7	$2,5t$	13	$1,5t$	19	$6t$	25	$5t$
2	$2t$	8	$5t$	14	$2t+2$	20	$2t$	26	$6t$
3	$1,5t$	9	$4t+8$	15	$3t$	21	$4t$	27	$3,5t$
4	$4t+4$	10	t	16	$1,5t$	22	t	28	$4t$
5	t	11	$2t$	17	$5t$	23	$1,5t$	29	$5t$
6	$3t$	12	$3t$	18	$3,5t$	24	$2t$	30	$1,5t$

2.4 К-3 Кинематический анализ плоского механизма.

Задание К.3. Кинематический анализ плоского механизма

Найти для заданного положения механизма скорости и ускорения точек B и C , а также угловую скорость и угловое ускорение звена, которому эти точки принадлежат.

Схемы механизмов помещены на рис. 73—75, а необходимые для расчета данные приведены в табл. 25.

Таблица 25

Номер варианта (рис. 73—75)	Размеры, см				ω_{OA} ,	ω_I ,	ε_{OA} ,	v_A ,	a_A ,
	OA	r	AB	AC	рад/с	рад/с	рад/с ²	см/с	см/с ²
1	40	15	—	8	2	—	2	—	—
2	30	15	—	8	3	—	2	—	—
3	—	50	—	—	—	—	—	50	100
4	35	—	—	45	4	—	8	—	—
5	25	—	—	20	1	—	1	—	—
6	40	15	—	6	1	1	0	—	—
7	35	—	75	60	5	—	10	—	—
8	—	—	20	10	—	—	—	40	20
9	—	—	45	30	—	—	—	20	10
10	25	—	80	20	1	—	2	—	—
11	—	—	30	15	—	—	—	10	0
12	—	—	30	20	—	—	—	20	20
13	25	—	55	40	2	—	4	—	—
14	45	15	—	8	3	12	0	—	—
15	40	15	—	8	1	—	1	—	—
16	55	20	—	—	2	—	5	—	—
17	—	30	—	10	—	—	—	80	50
18	10	—	10	5	2	—	6	—	—
19	20	15	—	10	1	2,5	0	—	—
20	—	—	20	6	—	—	—	10	15
21	30	—	60	15	3	—	8	—	—
22	35	—	60	40	4	—	10	—	—
23	—	—	60	20	—	—	—	5	10
24	25	—	35	15	2	—	3	—	—
25	20	—	70	20	1	—	2	—	—
26	20	15	—	10	2	1,2	0	—	—
27	—	15	—	5	—	—	—	60	30
28	20	—	50	25	1	—	1	—	—
29	12	—	35	15	4	—	6	—	—
30	40	—	—	20	5	—	10	—	—

Примечание. ω_{OA} и ε_{OA} — угловая скорость и угловое ускорение кривошипа OA при заданном положении механизма; ω_I — угловая скорость колеса I (постоянная); v_A и a_A — скорость и ускорение точки A . Качение колес происходит без скольжения.

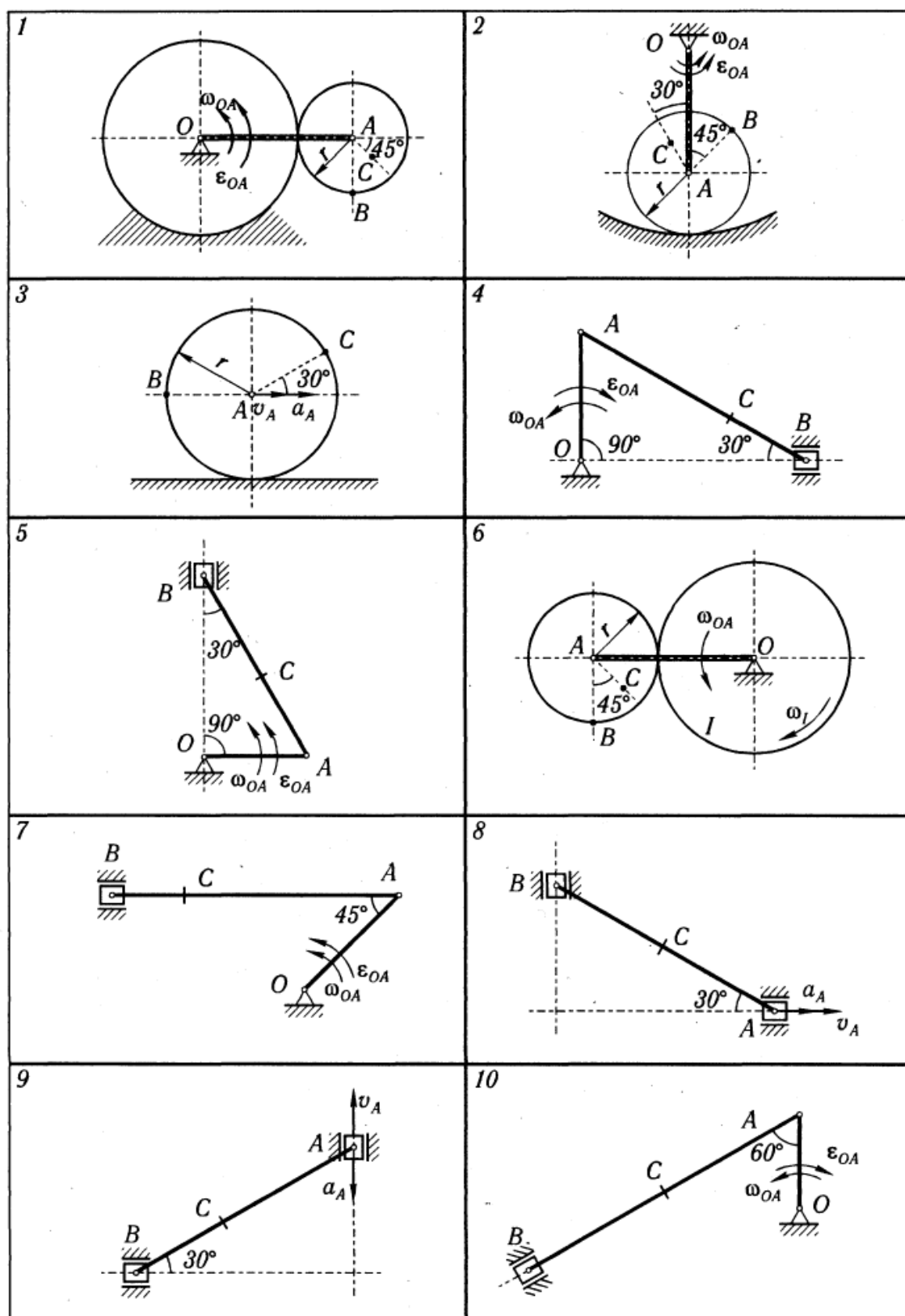


Рис. 73

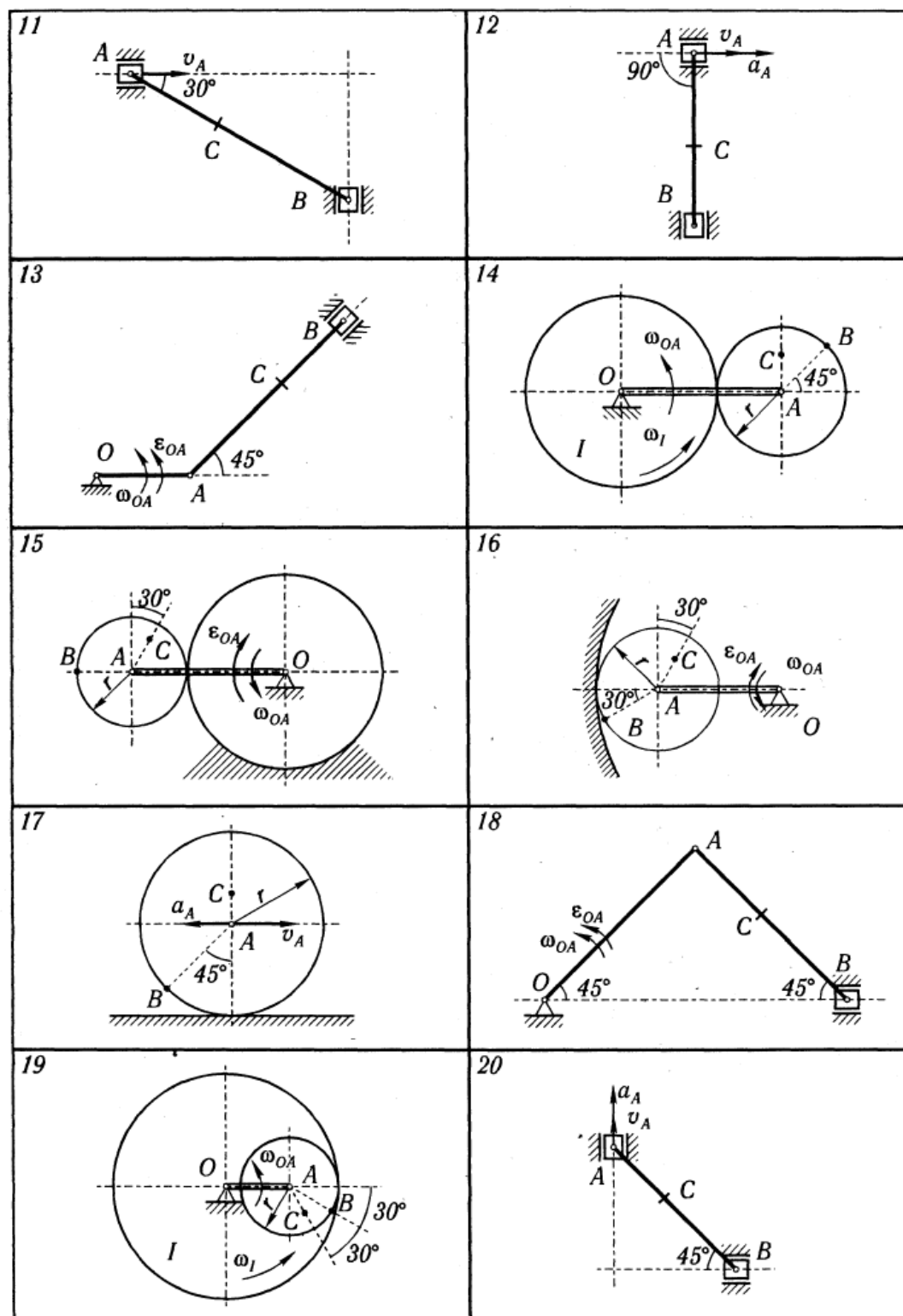


Рис. 74

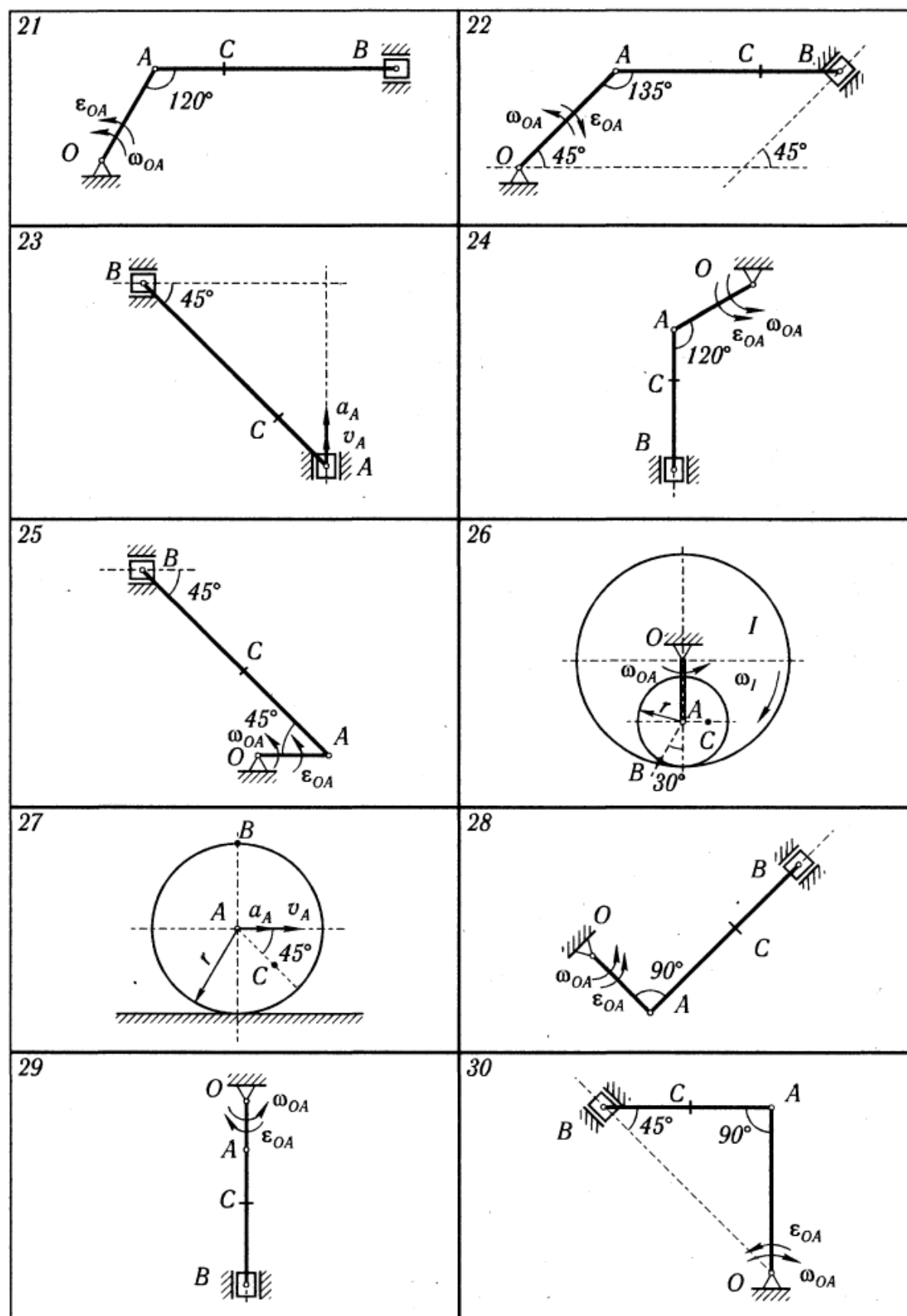


Рис. 75

Пример выполнения задания. Дано: схема механизма в заданном положении (рис. 76); исходные данные (табл. 26).

Таблица 26

Размеры, см			ω_{OA} , рад/с	ε_{OA} , рад/с ²
OA	AB	AC		
10	60	20	1,5	2

Решение. 1. *Определение скоростей точек и угловой скорости звена* (рис. 77). Вычисляем модуль скорости пальца A кривошипа OA при заданном положении механизма:

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA.$$

Скорость точки A перпендикулярна кривошипу OA . Скорость ползуна B направлена по вертикали. Мгновенный центр скоростей P_{AB} шатуна AB находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных из точек A и B к их скоростям.

Угловая скорость звена AB

$$\omega_{AB} = v_A / AP_{AB}.$$

Модули скоростей точек B и C

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BP_{AB}; \quad v_C = \omega_{AB} \cdot CP_{AB}.$$

Расстояния AP_{AB} , BP_{AB} и CP_{AB} определяются из рассмотрения треугольников ABP_{AB} и ACP_{AB} :

$$AP_{AB} = 52,0 \text{ см}; \quad BP_{AB} = 30,0 \text{ см}; \quad CP_{AB} = 36,1 \text{ см}.$$

В соответствии с этим $v_A = 15,0 \text{ см/с}$; $\omega_{AB} = 0,29 \text{ рад/с}$; $v_B = 8,7 \text{ см/с}$; $v_C = 10,5 \text{ см/с}$.

Вектор \vec{v}_C направлен перпендикулярно отрезку CP_{AB} в сторону, соответствующую направлению вращения звена AB .

Для проверки определим скорость точки B другим способом. Воспользуемся теоремой о равенстве проекции скоростей точек на ось, проведенную через эти точки.

Направим ось x вдоль шатуна AB в направлении от B к A .

Имеем $v_A \cos(\vec{v}_A, x) = v_B \cos(\vec{v}_B, x)$, или, как видно из рис. 77,

$$v_A \cos 60^\circ = v_B \cos 30^\circ.$$

Отсюда

$$v_B = 8,7 \text{ см}.$$

Полезно убедиться, что и найденная ранее скорость точки C удовлетворяет этой теореме.

2. *Определение ускорений точек и углового ускорения звена* (рис. 78). Ускорение точки A складывается из вращательного и центростремительного ускорений:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^B + \vec{a}_A^u; \quad a_A^B = \varepsilon_{OA} \cdot OA; \quad a_A^u = \omega_{OA}^2 \cdot OA.$$

Согласно теореме об ускорениях точек плоской фигуры,

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}^B + \vec{a}_{AB}^u,$$

или

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_A^u + \vec{a}_{AB}^B + \vec{a}_{AB}^u. \quad (1)$$

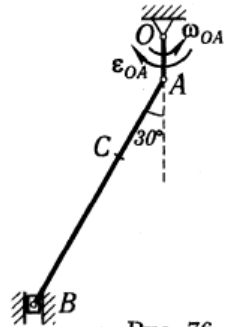


Рис. 76

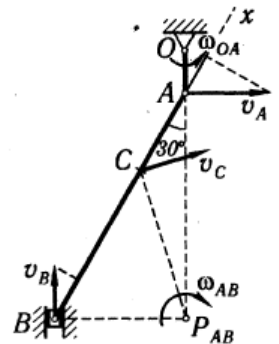


Рис. 77

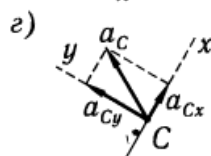
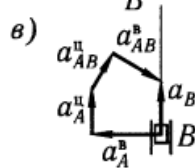
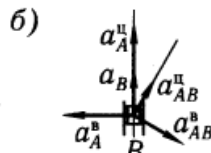
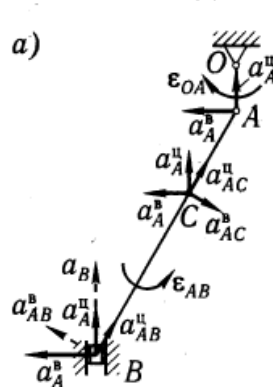
Центростремительное ускорение точки B во вращательном движении шатуна AB вокруг полюса A

$$a_{AB}^u = \omega_{AB}^2 \cdot AB.$$

По приведенным формулам вычисляем:

$$a_A^B = 20,0 \text{ см/с}^2; a_A^u = 22,5 \text{ см/с}^2; a_{AB}^u = 5,0 \text{ см/с}^2.$$

Вектор \vec{a}_A^u направлен от A к O . Вектор \vec{a}_A^B перпендикулярен вектору \vec{a}_A^u и направлен противоположно v_A (вращение кривошипа OA — замедленное).



Вектор \vec{a}_{AB}^u направлен от B к A . Что касается ускорения \vec{a}_B точки B и вращательного ускорения \vec{a}_{AB}^B , то известны только линии действия этих векторов: \vec{a}_B — по вертикали вдоль направляющих ползуна, \vec{a}_{AB}^B — перпендикулярно AB .

Зададимся произвольно их направлениями по указанным линиям (рис. 78, а). Эти ускорения определим из уравнений проекций векторного равенства (1) на оси координат. Знак в ответе показывает, соответствует ли истинное направление вектора принятому при расчете.

Выбрав направление осей x и y , как показано на рис. 78, г, получаем:

$$a_B \cos 30^\circ = -a_A^B \cos 60^\circ + a_{AB}^u \cos 30^\circ + a_{AB}^B; \quad (2)$$

$$a_B \cos 60^\circ = a_A^B \cos 30^\circ + a_A^u \cos 60^\circ + a_{AB}^B. \quad (3)$$

Из уравнения (2) находим

$$a_B = 16,7 \text{ см/с}^2.$$

Ускорение \vec{a}_B направлено, как показано на рис. 78, а.

Из уравнения (3) получаем

$$a_{AB}^B = -20,2 \text{ см/с}^2.$$

Рис. 78

Направление \vec{a}_{AB}^B противоположно показанному на рис. 78, а.

Ускорение \vec{a}_B и все его составляющие с учетом их истинных направлений и масштаба показаны на рис. 78, б.

Угловое ускорение шатуна AB с учетом того, что здесь a_{AB}^B — алгебраическая величина, определяется по формуле

$$\epsilon_{AB} = |a_{AB}^B|/AB.$$

Вычисляя, находим

$$\epsilon_{AB} = 0,34 \text{ рад/с}^2.$$

Направление ускорения \vec{a}_{AB}^B относительно полюса A определяет направление углового ускорения ε_{AB} . Здесь под направлением углового ускорения понимается направление дуговой стрелки, которое при ускоренном вращении звена совпадает с направлением его вращения, а при замедленном — противоположно ему. В данном случае угловое ускорение противоположно направлению вращения шатуна.

Определить \vec{a}_B и \vec{a}_{AB}^B можно и графически — построением многоугольника ускорений.

Отложим из точки B согласно (1) в выбранном масштабе последовательно векторы \vec{a}_A^B , \vec{a}_A^u и \vec{a}_{AB}^u (рис. 78, в). Через конец вектора \vec{a}_{AB}^u проведем прямую, параллельную вращательному ускорению \vec{a}_{AB}^B , т. е. перпендикулярно \vec{a}_B , до пересечения ее с прямой, по которой направлено ускорение \vec{a}_B .

Последнее определяется как замыкающая сторона многоугольника ускорений.

Модули a_B и a_{AB}^B могут быть найдены измерением на чертеже.

Определяем ускорение точки C :

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A^B + \vec{a}_A^u + \vec{a}_{AC}^B + \vec{a}_{AC}^u.$$

Вращательное и центростремительное ускорения точки C во вращательном движении AB вокруг полюса A

$$a_{AC}^B = \varepsilon_{AB} \cdot AC; \quad a_{AC}^u = \omega_{AB}^2 \cdot AC,$$

или

$$a_{AC}^B = 6,8 \text{ см/с}^2; \quad a_{AC}^u = 1,7 \text{ см/с}^2.$$

Вектор \vec{a}_{AC}^B перпендикулярен вектору \vec{a}_{AC}^u и направлен соответственно угловому ускорению ε_{AB} .

Ускорение точки C находим способом проекций (рис. 78, а):

$$a_{Cx} = a_{AC}^u + a_A^u \cos 30^\circ - a_A^B \cos 60^\circ,$$

$$a_{Cy} = a_A^u \cos 60^\circ + a_A^B \cos 30^\circ - a_{AC}^B,$$

$$a_C = \sqrt{(a_{Cx})^2 + (a_{Cy})^2}.$$

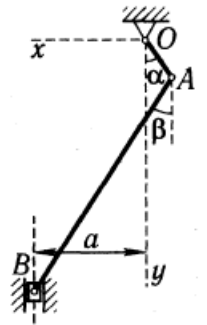


Рис. 79

В результате вычислений получаем: $a_{Cx} = 11,2 \text{ см/с}^2$; $a_{Cy} = 21,8 \text{ см/с}^2$; $a_C = 24,5 \text{ см/с}^2$ (рис. 78, з).

Приведем решение этой же задачи другим, более общим методом.

На рис. 79 показана схема механизма в некотором произвольном положении.

Проведем оси координат. Уравнениями связи для данного механизма являются условия

$$\vec{r}_B = \vec{OA} + \vec{AB} \quad (4)$$

(\vec{r}_B — радиус-вектор точки B , проведенный из центра O),

$$x_B = a = \text{const.} \quad (5)$$

Проецируя (4) на ось x , с учетом (5) имеем

$$-OA \cdot \sin \alpha + AB \cdot \sin \beta = a. \quad (6)$$

Для определения угловой скорости $\omega_{AB} = \dot{\beta}$ звена AB и углового ускорения $\varepsilon_{AB} = \ddot{\beta}$ нет необходимости выражать β из (6). Проще непосредственно дважды продифференцировать (6).

Имея в виду, что $\dot{\alpha} = \omega_{OA}$, получаем в результате первого дифференцирования

$$-OA \cdot \cos \alpha \cdot \omega_{OA} + AB \cdot \cos \beta \cdot \omega_{AB} = 0. \quad (7)$$

Отсюда

$$\omega_{AB} = \omega_{OA} \cdot OA \cos \alpha / (AB \cdot \cos \beta). \quad (8)$$

Дифференцируя (7) и учитывая, что $\dot{\omega}_{OA} = \varepsilon_{OA}$, имеем

$$OA \cdot \sin \alpha \cdot \omega_{OA}^2 - OA \cdot \cos \alpha \cdot \varepsilon_{OA} - AB \cdot \sin \beta \cdot \omega_{AB}^2 + AB \cdot \cos \beta \cdot \varepsilon_{AB} = 0;$$

$$\varepsilon_{AB} = \omega_{AB}^2 \tan \beta + OA(\varepsilon_{OA} \cos \alpha - \omega_{OA}^2 \sin \alpha) / (AB \cdot \cos \beta). \quad (9)$$

Выражения (8) и (9) позволяют вычислять ω_{AB} и ε_{AB} для любого положения механизма, в частности для заданного ($\alpha = 0^\circ$, $\beta = 30^\circ$).

Заметим, что ω_{OA} и ε_{OA} входят в эти выражения со знаком «+» или «-» в соответствии с принятым направлением отсчета угла α . В данном случае $\omega_{OA} = 1,5$ рад/с, $\varepsilon_{OA} = -2,0$ рад/с². Смысл знаков ω_{AB} и ε_{AB} определяется направлением отсчета угла β .

Модуль скорости точки B $v_B = |\dot{y}_B|$. Модуль ускорения $a_B = |\ddot{y}_B|$. Проецируя (4) на ось y , получаем

$$y_B = OA \cdot \cos \alpha + AB \cdot \cos \beta.$$

Отсюда после дифференцирования получаем

$$\dot{y}_B = -OA \cdot \sin \alpha \cdot \omega_{OA} - AB \cdot \sin \beta \cdot \omega_{AB};$$

$$\ddot{y}_B = -OA \cdot \cos \alpha \cdot \omega_{OA}^2 - OA \cdot \sin \alpha \cdot \varepsilon_{OA} - AB \cdot \cos \beta \cdot \omega_{AB}^2 - AB \cdot \sin \beta \cdot \varepsilon_{AB}.$$

Для определения скорости и ускорения точки C следует составить уравнения ее движения в координатной форме, проецируя радиус-вектор $\vec{r}_C = \vec{OA} + \vec{AC}$ на оси x и y .

2.5 Д-1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием постоянной силы.

Зада н и е Д.1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием постоянных сил

Варианты 1—5 (рис. 117, схема 1). Тело движется из точки A по участку AB (длиной l) наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, в течение τ с. Его начальная скорость v_A . Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен f .

В точке B тело покидает плоскость со скоростью v_B и попадает со скоростью v_C в точку C плоскости BD , наклоненной под углом β к горизонту, находясь в воздухе T с.

При решении задачи тело принять за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 1. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 0$; $f = 0,2$; $l = 10$ м; $\beta = 60^\circ$. Определить τ и h .

Вариант 2. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $v_A = 2$ м/с; $f = 0,2$; $h = 4$ м; $\beta = 45^\circ$. Определить l и уравнение траектории точки на участке BC .

Вариант 3. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 3,5$ м/с; $f \neq 0$; $l = 8$ м; $d = 10$ м; $\beta = 60^\circ$. Определить v_B и τ .

Вариант 4. Дано: $v_A = 0$; $\tau = 2$ с; $l = 9,8$ м; $\beta = 60^\circ$; $f = 0$. Определить α и T .

Вариант 5. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 0$; $l = 9,8$ м; $\tau = 3$ с; $\beta = 45^\circ$. Определить f и v_C .

Варианты 6—10 (рис. 117, схема 2). Лыжник подходит к точке A участка трамплина AB , наклоненного под углом α к горизонту и имеющего длину l , со скоростью v_A . Коэффициент трения скольжения лыж на участке AB равен f . Лыжник от A до B движется τ с; в точке B со скоростью v_B он покидает трамплин. Через T с лыжник приземляется со скоростью v_C в точке C горы, составляющей угол β с горизонтом.

При решении задачи принять лыжника за материальную точку и не учитывать сопротивление воздуха.

Вариант 6. Дано: $\alpha = 20^\circ$; $f = 0,1$; $\tau = 0,2$ с; $h = 40$ м; $\beta = 30^\circ$. Определить l и v_C .

Вариант 7. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $f = 0,1$; $v_A = 16$ м/с; $l = 5$ м; $\beta = 45^\circ$. Определить v_B и T .

Вариант 8. Дано: $v_A = 21$ м/с; $f = 0$; $\tau = 0,3$ с; $v_B = 20$ м/с; $\beta = 60^\circ$. Определить α и d .

Вариант 9. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $\tau = 0,3$ с; $f = 0,1$; $h = 30\sqrt{2}$ м; $\beta = 45^\circ$. Определить v_B и v_A .

Вариант 10. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $f = 0$; $v_A = 12$ м/с; $d = 50$ м; $\beta = 60^\circ$. Определить τ и уравнение траектории лыжника на участке BC .

Варианты 11—15 (рис. 117, схема 3). Имея в точке A скорость v_A , мотоцикл поднимается τ с по участку AB длиной l , составляющему с горизонтом угол α . При постоянной на всем участке AB движущей силе P мотоцикл в точке B приобретает скорость v_B и перелетает через ров шириной d , находясь в воздухе T с и приземляясь в точке C со скоростью v_C . Масса мотоцикла с мотоциклистом равна m .

При решении задачи считать мотоцикл с мотоциклистом материальной точкой и не учитывать силы сопротивления движению.

Вариант 11. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $P \neq 0$; $l = 40$ м; $v_A = 0$; $v_B = 4,5$ м/с; $d = 3$ м. Определить τ и h .

Вариант 12. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $P = 0$; $l = 40$ м; $v_B = 4,5$ м/с; $h = 1,5$ м. Определить v_A и d .

Вариант 13. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $m = 400$ кг; $v_A = 0$; $\tau = 20$ с; $d = 3$ м; $h = 1,5$ м. Определить P и l .

Вариант 14. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $m = 400$ кг; $P = 2,2$ кН; $v_A = 0$; $l = 40$ м; $d = 5$ м. Определить v_B и v_C .

Вариант 15. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 0$; $P = 2$ кН; $l = 50$ м; $h = 2$ м; $d = 4$ м. Определить T и m .

Варианты 16—20 (рис. 117, схема 4). Камень скользит в течение τ с по участку AB откоса, составляющему угол α с горизонтом и имеющему длину l . Его начальная скорость v_A . Коэффициент трения скольжения камня по откосу равен f . Имея в точке B скорость v_B , камень через T с ударяется в точке C о вертикальную защитную стену. При решении задачи принять камень за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 16. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 1$ м/с; $l = 3$ м; $f = 0,2$; $d = 2,5$ м. Определить h и T .

Вариант 17. Дано: $\alpha = 45^\circ$; $l = 6$ м; $v_B = 2v_A$; $\tau = 1$ с; $h = 6$ м. Определить d и f .

Вариант 18. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $l = 2$ м; $v_A = 0$; $f = 0,1$; $d = 3$ м. Определить h и τ .

Вариант 19. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $l = 3$ м; $v_B = 3$ м/с; $f \neq 0$; $\tau = 1,5$ с; $d = 2$ м. Определить v_A и h .

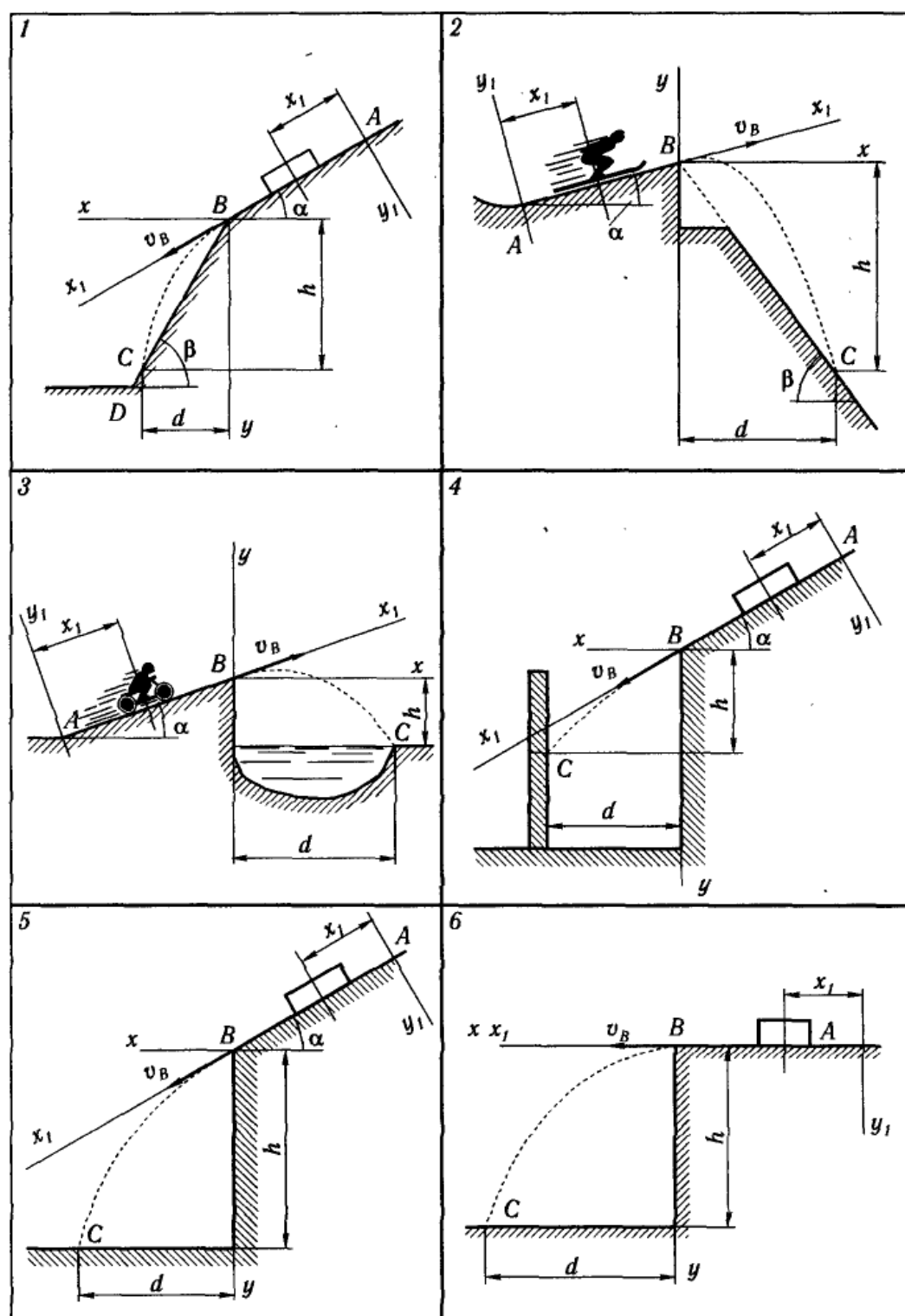


Рис.117

Вариант 20. Дано: $\alpha = 45^\circ$; $v_A = 0$; $f = 0,3$; $d = 2$ м; $h = 4$ м. Определить l и τ .

Варианты 21—25 (рис. 117, схема 5). Тело движется из точки A по участку AB (длиной l) наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Его начальная скорость v_A . Коэффициент трения скольжения равен f . Через τ с тело в точке B со скоростью v_B покидает наклонную плоскость и падает на горизонтальную плоскость в точку C со скоростью v_C ; при этом оно находится в воздухе T с.

При решении задачи принять тело за материальную точку и не учитывать сопротивление воздуха.

Вариант 21. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $f = 0,1$; $v_A = 1$ м/с; $\tau = 1,5$ с; $h = 10$ м. Определить v_B и d .

Вариант 22. Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 45^\circ$; $l = 10$ м; $\tau = 2$ с. Определить f и уравнение траектории на участке BC .

Вариант 23. Дано: $f = 0$; $v_A = 0$; $l = 9,81$ м; $\tau = 2$ с; $h = 20$ м. Определить α и T .

Вариант 24. Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 30^\circ$; $f = 0,2$; $l = 10$ м; $d = 12$ м. Определить τ и h .

Вариант 25. Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 30^\circ$; $f = 0,2$; $l = 6$ м; $h = 4,5$ м. Определить τ и v_C .

Варианты 26—30 (рис. 117, схема 6). Имея в точке A скорость v_A , тело движется по горизонтальному участку AB длиной l в течение τ с. Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен f . Со скоростью v_B тело в точке B покидает плоскость и попадает в точку C со скоростью v_C , находясь в воздухе T с. При решении задачи принять тело за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 26. Дано: $v_A = 7$ м/с; $f = 0,2$; $l = 8$ м; $h = 20$ м. Определить d и v_C .

Вариант 27. Дано: $v_A = 4$ м/с; $f = 0,1$; $\tau = 2$ с; $d = 2$ м. Определить v_B и h .

Вариант 28. Дано: $v_B = 3$ м/с; $f = 0,3$; $l = 3$ м; $h = 5$ м. Определить v_A и T .

Вариант 29. Дано: $v_A = 3$ м/с; $v_B = 1$ м/с; $l = 2,5$ м; $h = 20$ м. Определить f и d .

Вариант 30. Дано: $f = 0,25$; $l = 4$ м; $d = 3$ м; $h = 5$ м. Определить v_A и τ .

Пример выполнения задания (рис. 118). В железнодорожных скальных выемках для защиты кюветов от попадания в них с откосов каменных осыпей устраивается «полка» DC . Учитывая возможность движения камня из наивысшей точки A откоса и полагая при этом его начальную скорость $v_0 = 0$, определить наименьшую ширину полки b и скорость v_C , с которой камень падает на нее. По участку AB откоса, составляющему угол α с горизонтом и имеющему длину l , камень движется τ с.

При решении задачи считать коэффициент трения скольжения f камня на участке AB постоянным, а сопротивлением воздуха пренебречь.

Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 60^\circ$; $l = 4$ м; $\tau = 1$ с; $f \neq 0$; $h = 5$ м; $\beta = 75^\circ$.
Определить b и v_C .

Решение. Рассмотрим движение камня на участке AB . Принимая камень за материальную точку, покажем (рис. 118) действующие на него силы: вес \vec{G} , нормальную реакцию \vec{N} и силу трения скольжения \vec{F} . Составим дифференциальное уравнение движения камня на участке AB :

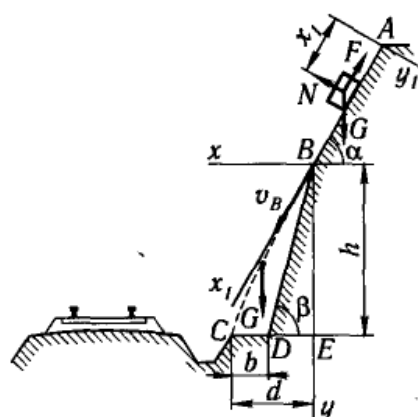


Рис. 118

$$m\ddot{x}_1 = \sum X_{i1}; \quad m\ddot{x}_1 = G \sin \alpha - F.$$

Сила трения

$$F = fN,$$

где

$$N = G \cos \alpha.$$

Таким образом,

$$m\ddot{x}_1 = G \sin \alpha - fG \cos \alpha$$

или

$$\ddot{x}_1 = g \sin \alpha - fg \cos \alpha.$$

Интегрируя дифференциальное уравнение дважды, получаем

$$\dot{x}_1 = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t + C_1;$$

$$x_1 = [g(\sin \alpha - f \cos \alpha)/2] t^2 + C_1 t + C_2.$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся начальными условиями задачи: при $t = 0$ $x_{10} = 0$ и $\dot{x}_{10} = 0^*$.

Составим уравнения, полученные при интегрировании, для $t = 0$:

$$\dot{x}_{10} = C_1; \quad x_{10} = C_2.$$

Найдем постоянные:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0.$$

Тогда

$$\dot{x}_1 = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t;$$

$$x_1 = [g(\sin \alpha - f \cos \alpha)/2] t^2.$$

Для момента τ , когда камень покидает участок,

$$\dot{x}_1 = v_B; \quad x_1 = l,$$

т. е.

$$v_B = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)\tau;$$

$$l = [g(\sin \alpha - f \cos \alpha)/2] \tau^2,$$

* Постоянные интегрирования C_1 — C_6 во всех 30 вариантах задания можно найти, вводя начальные условия на первом и втором участках движения точки. Тем не менее в ряде вариантов более естественно воспользоваться граничными условиями, когда значения координат и скоростей заданы не для одного, а для разных моментов времени.

откуда

$$v_B = 2l/\tau,$$

т. е.

$$v_B = 2 \cdot 4/1 = 8 \text{ м/с.}$$

Рассмотрим движение камня от точки B до точки C .

Показав силу тяжести \vec{G} , действующую на камень, составим дифференциальные уравнения его движения:

$$m\ddot{x} = 0; \quad m\ddot{y} = G.$$

Начальные условия задачи: при $t = 0$

$$\begin{aligned} x_0 &= 0; & y_0 &= 0; \\ \dot{x}_0 &= v_B \cos \alpha; & \dot{y}_0 &= v_B \sin \alpha. \end{aligned}$$

Интегрируем дифференциальные уравнения дважды;

$$\begin{aligned} \dot{x} &= C_3; & \dot{y} &= gt + C_4; \\ x &= C_3t + C_5; & y &= gt^2/2 + C_4t + C_6. \end{aligned}$$

Напишем полученные уравнения для $t = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= C_3; & \dot{y}_0 &= C_4; \\ x_0 &= C_5; & y_0 &= C_6. \end{aligned}$$

Отсюда найдем, что

$$\begin{aligned} C_3 &= v_B \cos \alpha; & C_4 &= v_B \sin \alpha; \\ C_5 &= 0; & C_6 &= 0. \end{aligned}$$

Получим следующие уравнения проекций скорости камня:

$$\dot{x} = v_B \cos \alpha, \quad \dot{y} = gt + v_B \sin \alpha$$

и уравнения его движения:

$$x = v_B \cos \alpha \cdot t, \quad y = gt^2/2 + v_B \sin \alpha \cdot t.$$

Уравнение траектории камня найдем, исключив параметр t уравнений движения. Определив t из первого уравнения и подставив его значение во второе, получаем уравнение параболы:

$$y = gx^2/(2v_B^2 \cos^2 \alpha) + x \operatorname{tg} \alpha.$$

В момент падения $y = h$, $x = d$.

Определяя d из уравнения траектории, найдем

$$d_1 = 2,11 \text{ м}, \quad d_2 = -7,75 \text{ м.}$$

Так как траекторией движения камня является ветвь параболы положительными абсциссами ее точек, то $d = 2,11 \text{ м}$.

Минимальная ширина полки

$$b = d - ED = d - h/\operatorname{tg} 75^\circ, \quad \text{или } b = 0,77 \text{ м.}$$

Используя уравнение движения камня $x = v_B \cos \alpha \cdot t$, найдем v в момент времени T движения камня от точки B до точки C :

$$T = 0,53 \text{ с.}$$

Скорость камня при падении найдем через проекции скорости на оси координат

$$\dot{x} = v_B \cos \alpha, \quad \dot{y} = gt + v_B \sin \alpha$$

по формуле

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Для момента падения $t = T = 0,53 \text{ с}$

$$v_C = \sqrt{(v_B \cos \alpha)^2 + (gT + v_B \sin \alpha)^2},$$

или

$$v_C = 12,8 \text{ м/с.}$$

2.6 Д-10. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы

**Зада н и е Д.10. Применение теоремы об изменении
кинетической энергии
к изучению движения механической системы**

Механическая система под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя; начальное положение системы показано на рис. 152—154. Учитывая трение скольжения тела 1 (варианты 1—3, 5, 6, 8—12, 17—23, 28—30) и сопротивление качению тела 3, катящегося без скольжения (варианты 2, 4, 6—9, 11, 13—15, 20, 21, 24, 27, 29), пренебрегая другими силами сопротивления и массами

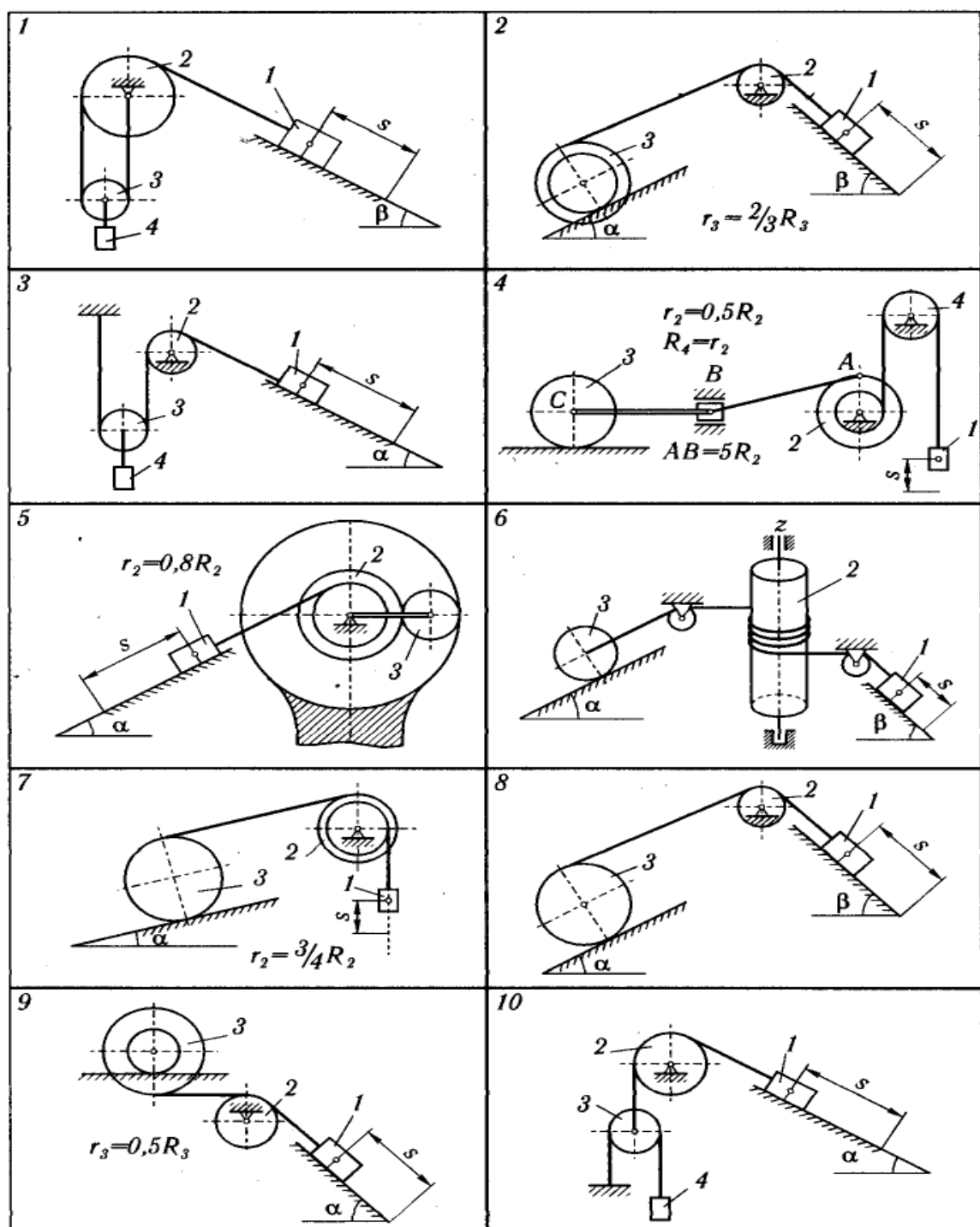


Рис. 152

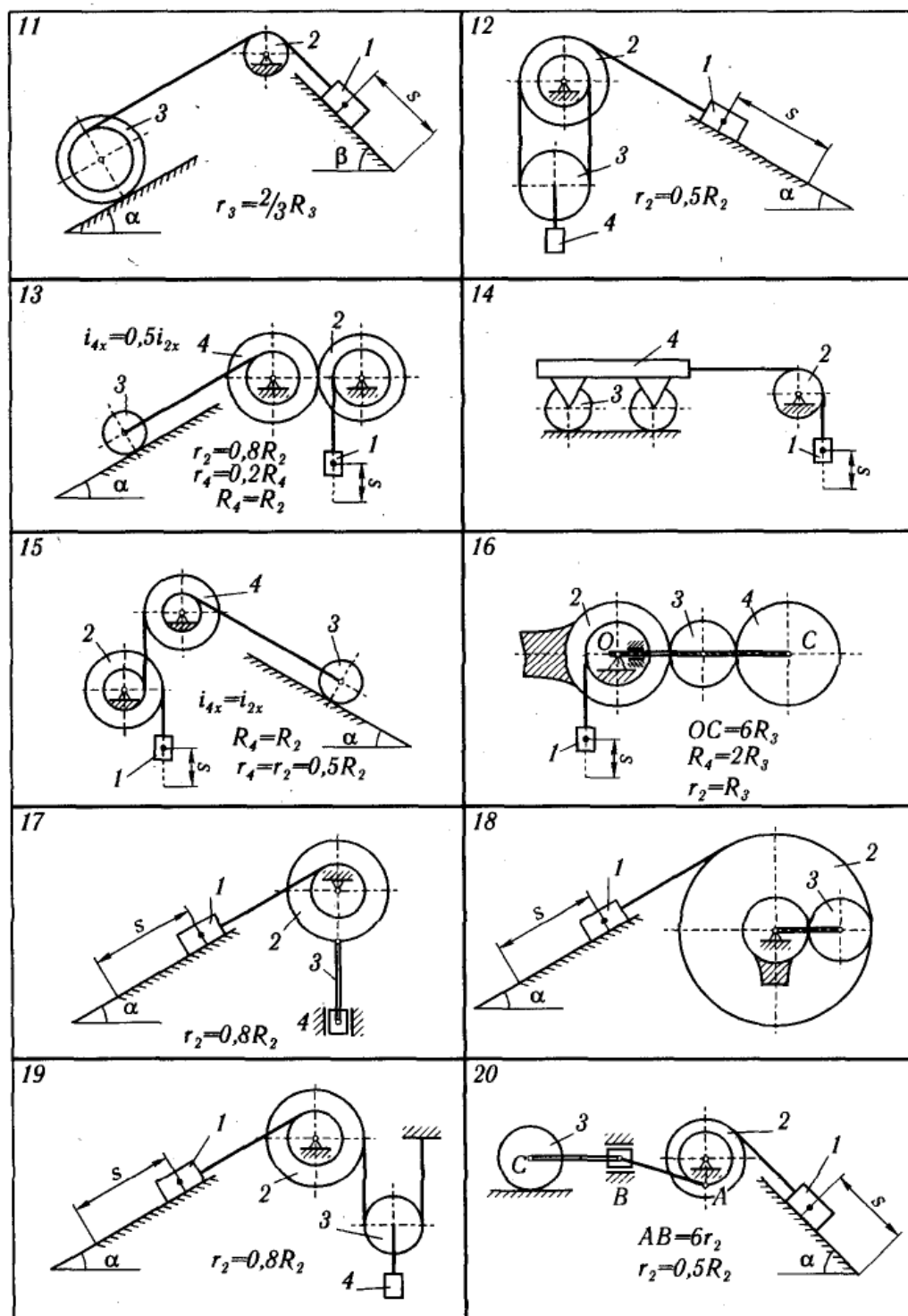


Рис. 153

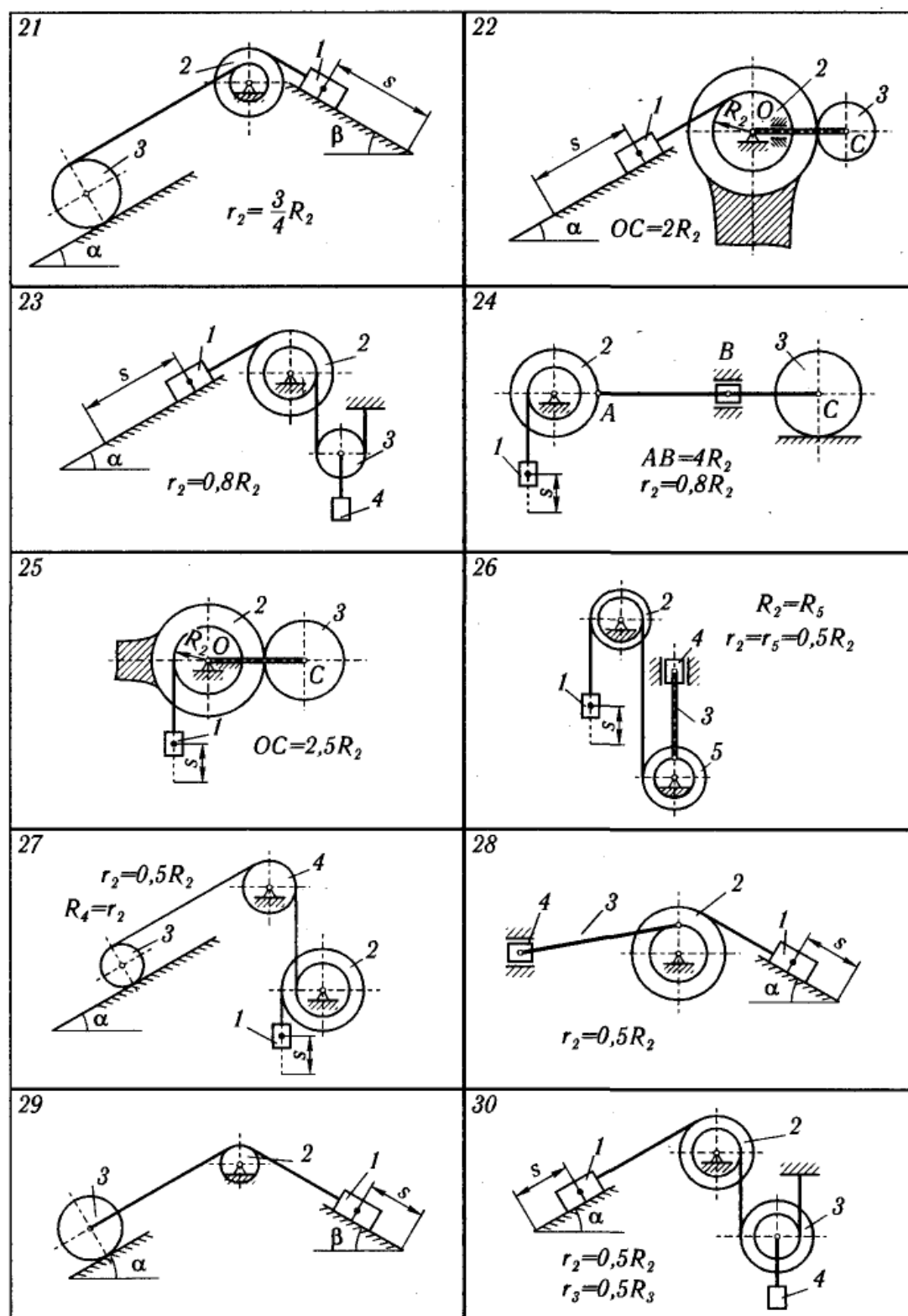


Рис. 154

нитей, предполагаемых нерастяжимыми, определить скорость тела 1 в тот момент, когда пройденный им путь станет равным s .

В задании приняты следующие обозначения: m_1, m_2, m_3, m_4 — массы тел 1, 2, 3, 4; R_2, r_2, R_3, r_3 — радиусы больших и малых окружностей; $i_{2x}, i_{3\xi}$ — радиусы инерции тел 2 и 3 относительно горизонтальных осей, проходящих через их центры тяжести; α, β — углы наклона плоскостей к горизонту; t — коэффициент трения скольжения; δ — коэффициент трения качения.

Необходимые для решения данные приведены в табл. 47. Блоки в катки, для которых радиусы инерции в таблице не указаны, считать сплошными однородными цилиндрами.

Наклонные участки нитей параллельны соответствующим наклонным плоскостям.

Пример выполнения задания. Дано: m_1 — масса груза 1, $m_2 = 2m_1$, $m_3 = m_1$, $m_4 = 0,5m_1$, $m_5 = 20m_1$, $R_2 = R_3 = 12$ см, $r_2 = 0,5R_2$, $r_3 = 0,75R_3$, $R_5 = 20$ см, $AB = l = 4R_3$, $i_{2\xi} = 8$ см,

$i_{3x} = 10$ см, $\alpha = 30^\circ$, $f = 0,1$, $\delta = 0,2$ см, $s = 0,06\pi$ м. Сопротивление качению тела 2 не учитывать. Шатун 4 считать тонким однородным стержнем; каток 5 — однородный сплошной цилиндр. Массами звена BC_5 и ползуна B пренебречь. На рис. 155, а показана механическая система в начальном положении.

Найти v_1 — скорость груза 1 в конечном положении.

Решение. Применим теорему об изменении кинетической энергии системы:

$$T - T_0 = \sum A_i^E + \sum A_i^J, \quad (1)$$

где T_0 и T — кинетическая энергия системы в начальном и конечном положениях; $\sum A_i^E$ — сумма работ внешних сил, приложенных к системе, на перемещении системы из начального положения в конечное; $\sum A_i^J$ — сумма работ внутренних сил системы на том же перемещении.

Для рассматриваемых систем, состоящих из абсолютно твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями и стержнями,

$$\sum A_i^J = 0.$$

Так как в начальном положении система находится в покое, то $T_0 = 0$.

Следовательно, уравнение (1) принимает вид

$$T = \sum A_i^E. \quad (2)$$

Для определения кинетической энергии T и суммы работ внешних сил надо изобразить систему в конечном положении (рис. 155, б, в).

Напишем кинематические соотношения между скоростями и перемещениями точек системы, т. е. уравнения связей, при этом скорости и перемещения выразим соответственно через скорости и перемещения груза 1.

Таблица 47

Номер варианта	m_1	m_2	m_3	m_4	кг				см		см		i_{2x}	i_{3x}	α	β	f	δ , см	s , м	Примечание	
					R_2	R_3			i_{2x}	i_{3x}	град										
1	m	$4m$	$1/5m$	$4/3m$	-	-	-	-	-	-	60	0,10	-	2	Массами звеньев АВ, ВС и пол- зуна В пренебречь						
2	m	$1/2m$	$1/3m$	-	-	30	-	20	30	45	0,22	0,20	2								
3	m	m	$1/10m$	m	-	-	-	-	45	-	0,10	-	2								
4	m	$2m$	$40m$	m	20	40	18	-	-	-	-	0,30	0,1π								
5	m	$2m$	m	-	20	15	18	-	60	-	0,12	-	0,28π	Массой водила пренебречь							
6	m	$3m$	m	-	-	28	-	-	30	45	0,10	0,28	1,5								
7	m	$2m$	$2m$	-	16	25	14	-	30	-	-	0,20	2								
8	m	$1/2m$	$1/3m$	-	-	30	-	-	30	45	0,15	0,20	1,75								
9	m	$2m$	$9m$	-	-	30	-	20	30	-	0,12	0,25	1,5	Массы каждого из четырех колес одинаковы							
10	m	$1/4m$	$1/4m$	$1/5m$	-	-	-	-	60	-	0,10	-	8								
11	m	$1/2m$	$1/4m$	-	-	30	-	25	30	45	0,17	0,20	2,5								
12	m	$1/2m$	$1/5m$	m	30	-	20	-	30	-	0,20	-	2,5								
13	m	$2m$	$5m$	$2m$	30	20	26	-	30	-	-	-	2	Массой водила пренебречь							
14	m	$1/2m$	$5m$	$4m$	-	25	-	-	-	-	-	0,24	2								
15	m	$1/2m$	$4m$	$1/2m$	20	15	18	-	60	-	-	0,25	1,5								
16	m	$1/10m$	$1/20m$	$1/10m$	10	12	-	-	-	-	-	-	0,05π								
17	m	$1/4m$	$1/5m$	$1/10m$	20	-	15	-	60	-	0,10	-	0,16π	Шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень							

Продолжение табл. 47

Номер варианта (рис. 152-154)	кг				см				град		f	δ , см	s , м	Примечание
	m_1	m_2	m_3	m_4	R_2	R_3	i_{2x}	i_{3x}	α	β				
18	m	$3m$	m	-	35	15	32	-	60	-	0,15	-	0,2 π	Массой водила пренебречь
19	m	$1/3m$	$1/10m$	m	24	-	20	-	60	-	0,15	-	1,5	Массами звеньев АВ, ВС и ползуна В пренебречь
20	m	$2m$	$20m$	-	20	15	16	-	30	-	0,10	0,20	0,2 π	Массой водила пренебречь
21	m	m	$2m$	-	20	20	16	-	30	45	0,20	0,32	1,2	Массой водила пренебречь
22	m	$1/2m$	$1/4m$	-	20	10	-	-	60	-	0,17	-	0,1 π	Массой водила пренебречь
23	m	m	$1/10m$	$4/5m$	20	-	18	-	30	-	0,10	-	1	Массами звеньев АВ, ВС и ползуна В пренебречь
24	m	$3m$	$20m$	-	20	30	18	-	-	-	-	0,60	0,08 π	Массой водила пренебречь
25	m	$1/3m$	$1/4m$	-	16	20	-	-	-	-	-	-	0,04 π	Массы и моменты инерции блоков 2 и 5 одинаковы
26	m	$1/2m$	m	$1/3m$	30	-	20	-	-	-	-	-	0,6 π	Шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень
27	m	m	$6m$	$1/2m$	20	20	16	-	30	-	-	0,20	2	Шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень
28	m	$2m$	$3m$	-	20	-	14	-	60	-	0,10	-	0,1 π	Шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень
29	m	$1/4m$	$1/8m$	-	-	35	-	-	15	30	0,20	0,20	2,4	Шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень
30	m	$1/2m$	$3/10m$	$3/2m$	26	20	20	18	30	-	0,12	-	2	Шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень

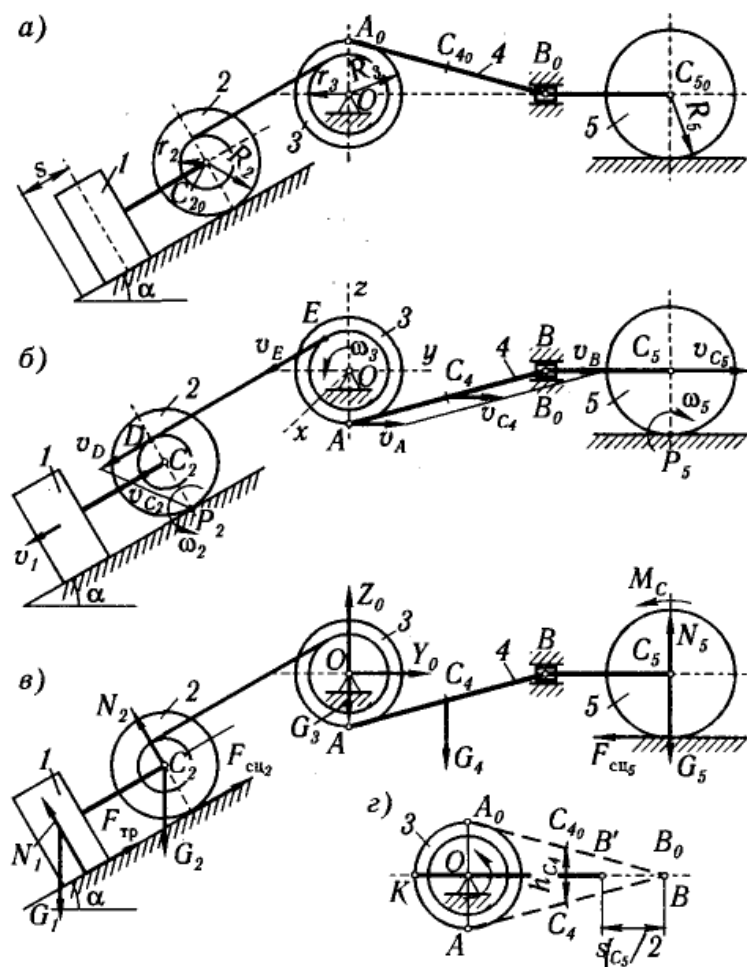


Рис. 155

Скорость центра масс C катка 2 равна скорости груза 1:

$$v_{C2} = v_1. \quad (3)$$

Угловая скорость катка 2, мгновенный центр скоростей которого находится в точке P_2 ,

$$\omega_2 = v_{C2} / (C_2 P_2).$$

Учитывая (3), получим

$$\omega_2 = v_1 / R_2. \quad (4)$$

Скорость точки D катка 2

$$v_D = \omega_2 \cdot DP_2,$$

т. е.

$$v_D = \frac{v_1}{R_2} (R_2 + r_2).$$

Скорость точки E блока 3 равна скорости точки D катка 2:

$$v_E = v_D. \quad (5)$$

Но

$$v_E = \omega_3 r_3.$$

Следовательно,
по (5),

$$\omega_3 r_3 = \frac{v_1}{R_2} (R_2 + r_2).$$

Так как

$$R_2 = 2r_2,$$

то

$$\omega_3 r_3 = 3/2 v_1,$$

откуда

$$\omega_3 = \frac{3}{2} \frac{v_1}{r_3}. \quad (6)$$

Заменяя в формуле (6)

$$\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dt}, \quad v_1 = \frac{ds}{dt},$$

получим

$$\frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{3}{2r_3} \frac{ds}{dt},$$

или

$$d\varphi_3 = \frac{3}{2r_3} ds.$$

После интегрирования (при нулевых начальных условиях)

$$\varphi_3 = \frac{3}{2} \frac{s}{r_3}. \quad (7)$$

Когда груз 1 пройдет путь $s = 0,06\pi$ м, блок 3 повернется на угол φ_3 :

$$\varphi_3 = \frac{3}{2} \frac{s}{r_3} = \frac{3}{2} \frac{0,06\pi}{0,09} = \pi.$$

При этом повороте блока 3 на 180° его точка A_0 перейдет в конечное положение A и шатун 4 из начального положения A_0B_0 перейдет в конечное положение AB .

Каток 5 переместится влево при повороте блока 3 на угол $\pi/2$ и вправо при повороте блока еще на $\pi/2$; значит, конечное положение катка 5 совпадает с его начальным положением.

Таким образом, конечное положение всей системы вполне определено (рис. 155, б).

Вычислим кинетическую энергию системы в конечном положении как сумму кинетических энергий тел 1, 2, 3, 4, 5:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5. \quad (8)$$

Кинетическая энергия груза 1, движущегося поступательно,

$$T_1 = m_1 v_1^2 / 2. \quad (9)$$

Кинетическая энергия катка 2, совершающего плоское движение,

$$T_2 = \frac{m_2 v_{C2}^2}{2} + \frac{J_{2\xi} \omega_2^2}{2}, \quad (10)$$

где $J_{2\xi}$ — момент инерции катка 2 относительно его продольной центральной оси $C_{2\xi}$:

$$J_{2\xi} = m_2 i_{2\xi}^2. \quad (11)$$

Подставляя (3), (4), (11) в формулу (10), получаем

$$T_2 = \frac{m_2 v_1^2}{2} + \frac{m_2 i_{2\xi}^2}{2R_2^2} v_1^2 = \frac{1}{2} m_2 \left(1 + \frac{i_{2\xi}^2}{R_2^2} \right) v_1^2. \quad (12)$$

Кинетическая энергия тела 3, вращающегося вокруг оси Ox ,

$$T_3 = \frac{1}{2} J_{3x} \omega_3^2, \quad (13)$$

где J_{3x} — момент инерции блока 3 относительно оси Ox :

$$J_{3x} = m_3 i_{3x}^2. \quad (14)$$

Подставляя (6), (14) в формулу (13), получаем

$$T_3 = \frac{m_3 i_{3x}^2}{2} \left(\frac{3}{2} \frac{v_1}{r_3} \right)^2 = \frac{9}{8} m_3 \frac{i_{3x}^2}{r_3^2} v_1^2. \quad (15)$$

Кинетическая энергия шатуна 4, совершающего плоское движение,

$$T_4 = \frac{m_4 v_{C4}^2}{2} + \frac{J_{4\xi} \omega_4^2}{2},$$

где v_{C4} — скорость центра масс C_4 шатуна 4; ω_4 — угловая скорость шатуна 4; $J_{4\xi}$ — момент инерции шатуна относительно центральной оси $C_{4\xi}$.

Для определения v_{C4} и ω_4 найдем положение мгновенного центра скоростей шатуна 4. Так как скорости точек A и B в этот момент параллельны, то мгновенный центр скоростей шатуна 4 находится в бесконечности; следовательно, угловая скорость шатуна в данный момент $\omega_4 = 0$, а скорости всех его точек параллельны и равны между собой. Таким образом, кинетическая энергия шатуна 4

$$T_4 = m_4 v_{C4}^2 / 2, \quad (16)$$

где

$$v_{C4} = v_A. \quad (17)$$

Вращательная скорость точки A тела 3

$$v_A = \omega_3 R_3, \quad (18)$$

или с учетом (14)

$$v_A = 3/2 R_3 v_1 / r_3.$$

Поскольку $r_3 = 3/4 R_3$, получим

$$v_A = 2v_1.$$

По (17)

$$v_{C4} = v_A, \quad v_{C4} = 2v_1. \quad (19)$$

После подстановки (19) в (16) выражение кинетической энергии шатуна 4 принимает вид

$$T_4 = 1/2 m_4 (2v_1)^2 = 2m_4 v_1^2. \quad (20)$$

Кинетическая энергия катка 5, совершающего плоское движение,

$$T_5 = m_5 v_{C5}^2 / 2 + J_{5\xi} \omega_5^2 / 2,$$

где v_{C5} — скорость центра масс C_5 катка 5; $J_{5\xi}$ — момент инерции катка 5 (однородного сплошного цилиндра) относительно его центральной продольной оси $C_5\xi$, $J_{5\xi} = m_5 R_5^2 / 2$; ω_5 — угловая скорость катка 5.

Так как каток катится без скольжения, то мгновенный центр скоростей находится в точке P_5 . Поэтому

$$\omega_5 = v_{C5} / R_5.$$

Следовательно,

$$T_5 = \frac{m_5 v_{C5}^2}{2} + \frac{m_5 R_5^2 v_{C5}^2}{2 \cdot 2 R_5^2} = \frac{3}{4} m_5 v_{C5}^2.$$

Так как звено BC_5 совершает поступательное движение, то $v_{C5} = v_B$, но $v_B = v_{C4} = 2v_1$. Значит, $v_{C5} = 2v_1$.

Поэтому выражение кинетической энергии катка 5 принимает вид

$$T_5 = 3/4 m_5 (2v_1)^2 = 3m_5 v_1^2. \quad (21)$$

Кинетическая энергия всей механической системы определяется по формуле (8) с учетом (9), (12), (15), (20), (21):

$$T = m_2 v_1^2 / 2 + m_2 (1 + i_{2\xi}^2 / R_2^2) v_1^2 / 2 + 9/8 m_3 v_1^2 i_{3x}^2 / r_3^2 + 2m_4 v_1^2 + 3m_5 v_1^2.$$

Подставляя сюда заданные значения масс, получаем

$$T = m_1 v_1^2 [1 + 2(1 + i_{2\xi}^2 / R_2^2) + 9/4 i_{3x}^2 / r_3^2 + 2 + 120] / 2,$$

или

$$T = 129 m_1 v_1^2 / 2. \quad (22)$$

Найдем сумму работ всех внешних сил, приложенных к системе, на заданном ее перемещении. Покажем внешние силы, приложенные к системе (рис. 155, в).

Работа силы тяжести \vec{G}_1

$$A_{G_1} = G_1 h_1 = m_1 g s \sin \alpha. \quad (23)$$

Работа силы трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$

$$A_{F_{\text{тр}}} = -F_{\text{тр}}s.$$

Так как

$$F_{\text{тр}} = fN_1 = fG_1 \cos \alpha,$$

то

$$A_{F_{\text{тр}}} = -f m_1 g s \cos \alpha. \quad (24)$$

Работа силы тяжести \vec{G}_2

$$A_{G_2} = G_2 h_{C_2} = m_2 g s \sin \alpha. \quad (25)$$

Работа сил сцепления $\vec{F}_{\text{сц}2}$, $\vec{F}_{\text{сц}5}$ катков 2 и 5 равна нулю, так как эти силы приложены в мгновенных центрах скоростей этих катков.

Работа силы тяжести \vec{G}_4

$$A_{G_4} = G_4 h_{C_4},$$

где h_{C_4} — вертикальное перемещение центра тяжести C_4 шатуна 4 из начального положения в его конечное положение (рис. 155, з):

$$h_{C_4} = R_3,$$

$$A_{G_4} = m_4 g R_3. \quad (26)$$

Работа пары сил сопротивления качению катка 5

$$A_{M_C} = -M_C \varphi_5, \quad (27)$$

где $M_C = \delta N_5 = \delta G_5$ — момент пары сил сопротивления качению катка 5; φ_5 — угол поворота катка 5.

Так как каток 5 катится без скольжения, то угол его поворота

$$\varphi_5 = s_{C_5}/R_5, \quad (28)$$

где s_{C_5} — перемещение центра тяжести C_5 катка 5.

В данном примере работу пары сил сопротивления качению вычислим как сумму работ этой пары при качении катка 5 влево при повороте тела 3 на угол $\pi/2$ и качении вправо, когда тело 3 повернется еще на угол $\pi/2$.

Перемещение центра тяжести C_5 катка 5 равно перемещению ползуна B влево и вправо:

$$s_{C_5} = 2(B_0 B'). \quad (29)$$

Определим перемещение $B_0 B'$ при повороте тела 3 на угол $\pi/2$. За начало отсчета координаты точки B выберем неподвижную точку K плоскости (рис. 155, з). При этом повороте тела 3 шатун из положения $A_0 B_0$ перейдет в положение $K B'$. Тогда

$$B_0 B' = K B_0 - K B',$$

где

$$KB_0 = KO + OB_0 = R_3 + \sqrt{(A_0B_0)^2 - (A_0O)^2} = R_3 + \sqrt{l^2 - R_3^2},$$

$$KB' = l = 4R_3.$$

Следовательно,

$$B_0B' = R_3 + \sqrt{l^2 - R_3^2} - l = R_3 + \sqrt{(4R_3)^2 - R_3^2} - 4R_3 = 0,88R_3. \quad (30)$$

Подставляя (30) в (29), а затем в (28), находим полный угол поворота катка 5:

$$\varphi_5 = 1,76R_3/R_5. \quad (31)$$

Работа пары сил сопротивления качению по (27)

$$A_{Mc} = -\delta m_5 g \cdot 1,76R_3/R_5. \quad (32)$$

Сумма работ внешних сил определится сложением работ, вычисляемых по формулам (23)—(26) и (32):

$$\sum A_i^E = m_1 g s \sin \alpha - f m_1 g s \cos \alpha + m_2 g s \sin \alpha + m_4 g R_3 - \delta m_5 g \cdot 1,76R_3/R_5.$$

Подставляя заданные значения масс, получаем

$$\sum A_i^E = m_1 g s \left(\sin \alpha - f \cos \alpha + 2 \sin \alpha + \frac{R_3}{2s} - \frac{\delta \cdot 20 \cdot 1,76R_3}{R_5 s} \right),$$

или

$$\sum A_i^E = 1,51m_1 g s. \quad (33)$$

Согласно теореме (2), приравняем значения T и $\sum A_i^E$, определяемые по формулам (22) и (33):

$$129 \cdot m_1 v_1^2 / 2 = 1,51m_1 g s,$$

откуда

$$v_1 = 0,21 \text{ м/с}.$$

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ВОПРОСОВ

1. Понятие силы, момента силы относительно точки и оси, пары сил

1) Моментом силы называется векторное произведение радиус вектора на силы, где радиус вектор кратчайшее расстояние от оси вращения до точки приложения силы

2) Моментом силы называется векторное произведение плеча силы на значение силы, перпендикулярное оси вращения, где Р-плечо силы - это кратчайшее расстояние от оси вращения до прямой, вдоль которой действует сила

3) Моментом силы называется векторное произведение, где радиус вектор кратчайшее расстояние от оси вращения до точки приложения силы, а Ft проекция F_{\perp} на направление, перпендикулярное радиус-вектору

Если тело имеет неподвижную ось, т. е. закрепленную в неподвижных подшипниках, то при любой системе действующих сил тело может вращаться лишь около этой оси. Но не всякая сила может вызвать вращение. Например, сила, параллельная оси (F_y) не вызовет вращения; она лишь стремится сдвинуть тело вдоль оси и в конечном счете уравнивается реакцией подшипников. Но вот сила, находящаяся в плоскости, перпендикулярной к оси, может при некоторых условиях вызвать вращение.

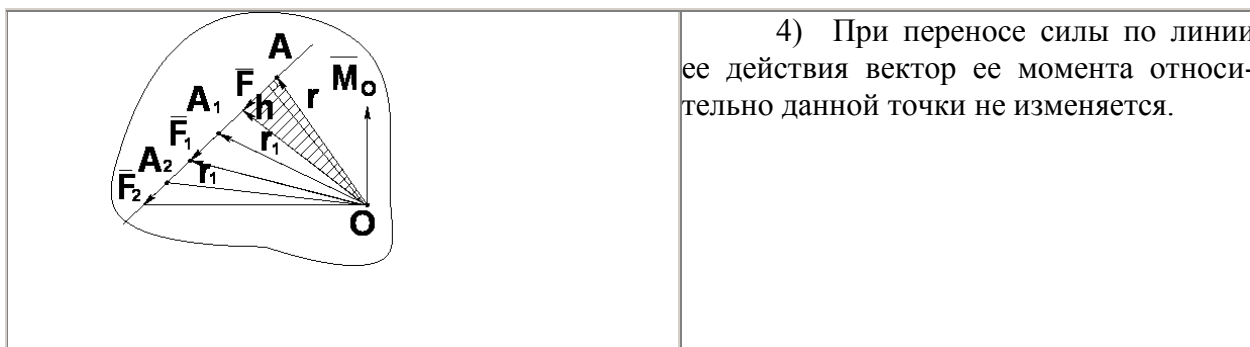
Две антипараллельные силы одинаковой величины, приложенные к разным точкам, но направленные не по одной прямой, называют парой сил. Пара не имеет равнодействующей и представляет собой самостоятельный динамический элемент.

Момент силы относительно центра

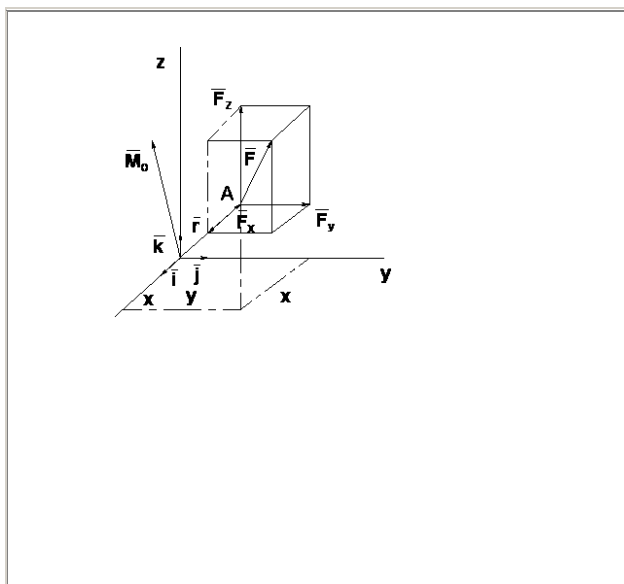
Моментом силы F относительно некоторого неподвижного центра O называется вектор, расположенный перпендикулярно к плоскости, проходящей через вектор силы и центр O , направленный в ту сторону, чтобы смотря с его конца можно было видеть поворот силы F относительно центра O против часовой стрелки.

Свойства момента силы относительно центра:

	<p>1) Модуль момента силы относительно центра может быть выражен удвоенной площадью треугольника OAB</p> $M_O = 2S_{\triangle OAB} \quad (1.1)$ <p>2) Момент силы относительно центра равен нулю в том случае, если линия действия силы проходит через эту точку, то есть $h = 0$.</p>
	<p>3) Если из точки O в точку приложения силы A провести радиус вектор, то вектор момента силы можно выразить векторным произведением</p> $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} \quad (1.2)$



4) При переносе силы по линии ее действия вектор ее момента относительно данной точки не изменяется.



5) Если через центр O провести оси координат $Oxyz$ то выражение (4.2) позволяет вычислить момент M_O аналитически относительно координатных осей.

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= yZ - zY \\ M_y &= zX - xZ \\ M_z &= xY - yX \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Если к твердому телу приложено несколько сил, лежащих в одной плоскости, можно вычислить алгебраическую сумму моментов этих сил относительно любой точки этой плоскости

$$M_{I0} = F_1 h_1; \quad M_{20} = F_2 h_2 \dots \quad M_{50} = F_5 h_5$$

Момент M_O , равный алгебраической сумме моментов данной системы относительно какой-либо точки в той же плоскости, называют главным моментом системы сил относительно этой точки.

Момент силы относительно оси

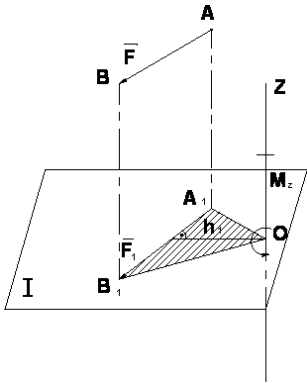
Чтобы определить момент силы относительно оси необходимо:

- 1) провести плоскость, перпендикулярную к оси Z ;
- 2) определить точку O пересечения оси с плоскостью;
- 3) спроецировать ортогонально силу F на эту плоскость;
- 4) найти момент проекции силы F относительно точки O пересечения оси с плоскостью.

Правило знаков:

$$M_z = \pm F_1 h_1$$

Момент силы относительно оси считается положительным, если, смотря навстречу оси Z , можно видеть проекцию \vec{F}_1 , стремящейся вращать плоскость I вокруг оси Z в сторону, противоположную вращению часовой стрелки.

	<p>Свойства момента силы относительно оси</p> <p>1) Момент силы относительно оси изображается отрезком, отложенным по оси Z от точки O в положительном направлении, если $M_z > 0$ и в отрицательном направлении, если $M_z < 0$.</p> <p>2) Значение момента силы относительно оси может быть выражено удвоенной площадью ΔOA_1B_1</p> $M_z = \pm F_1 h_1 \quad (1.5)$ <p>3) Момент силы относительно оси равен нулю в двух случаях:</p> <ul style="list-style-type: none"> • если $F_1 = 0$, то есть линия действия силы параллельна оси; • если $h_1 = 0$, то есть линия действия силы пересекает ось.
---	--

Пара сил. Векторный и алгебраический момент пары сил

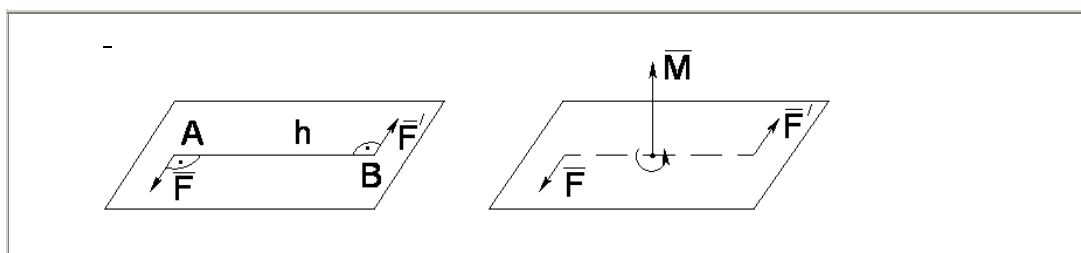
Система двух равных по модулю, параллельных и противоположно направленных сил \vec{F} и \vec{F}' , называется **парой сил**.

Плоскость, в которой находятся линии действия сил \vec{F} и \vec{F}' , называется **плоскостью действия пары сил**.

Кратчайшее расстояние h между линиями действия сил, составляющих пару, называется **плечом пары сил**.

Момент пары сил определяется произведением модуля одной из сил пары на плечо.

$$M = F \cdot h, \quad (\text{Н} \cdot \text{м}) \quad (1.6)$$



Правило знаков

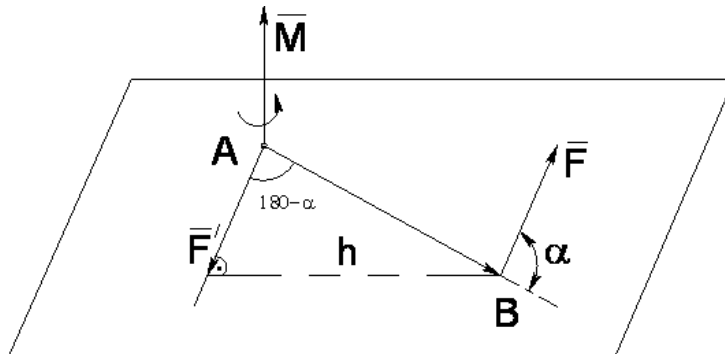
Вектор момента M пары \vec{F} и \vec{F}' направляют перпендикулярно к плоскости действия пары сил в такую сторону, что бы смотря навстречу этому вектору, видеть пару сил стремящейся вращать плоскость ее действия в сторону, обратную вращению часовой стрелки.

4. Свойства пар сил на плоскости

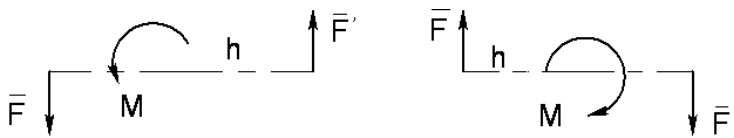
Свойство 1. Вектор-момент M пары (\vec{F}, \vec{F}') по модулю и направлению равен векторному произведению радиуса вектора AB на ту из сил этой пары, к началу которой направлен радиус-вектор AB , то есть

$$\vec{M} = \vec{AB} \times \vec{F} \quad (1.7)$$

$$(\vec{AB} \times \vec{F}) = AB \cdot F \sin \alpha = F \cdot h = |\vec{M}|$$



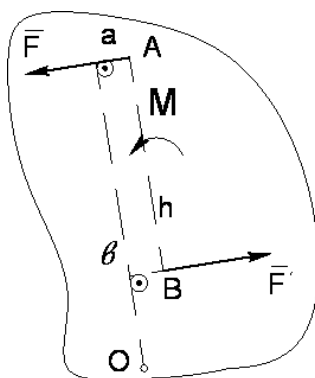
Если пары сил лежат в одной плоскости



$$M = \pm F \cdot h.$$

Свойство 2. Главный момент сил, составляющих пару относительно произвольной точки на плоскости действия пары, не зависит от положения этой точки и равняется моменту этой пары сил.

$$M_o = M_o(\vec{F}) + M_o(\vec{F}') = F \cdot Oa - F \cdot Ob = F(Oa - Ob) = F \cdot h$$



2. Равновесие системы произвольных сил

Из основных аксиом статики следуют элементарные операции над силами:

- 1) силу можно переносить вдоль линии действия;
- 2) силы, линии действия которых пересекаются, можно складывать по правилу параллелограмма (по правилу сложения векторов);

3) к системе сил, действующих на твёрдое тело, можно всегда добавить две силы, равные по величине, лежащие на одной прямой и направленные в противоположные стороны.

Элементарные операции не изменяют механического состояния системы.

Назовём две системы сил *эквивалентными*, если одна из другой может быть получена с помощью элементарных операций (как в теории скользящих векторов).

Система двух параллельных сил, равных по величине и направленных в противоположные стороны, называется *парой сил* (рис.12).

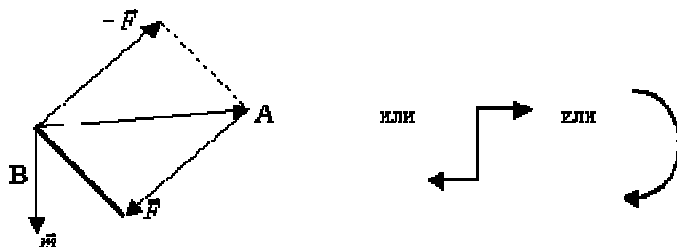


Рис.12.

Момент пары сил \vec{m} - вектор, по величине равный площади параллелограмма, построенного на векторах пары, и направленный ортогонально к плоскости пары в ту сторону, откуда вращение, сообщаемое векторами пары, видно происходящим против хода часовой стрелки.

$$\vec{m} = \overrightarrow{BA} \times \vec{F}, \text{ то есть момент силы } \vec{F} \text{ относительно точки В.}$$

Пара сил полностью характеризуется своим моментом.

Пару сил можно переносить элементарными операциями в любую плоскость, параллельную плоскости пары; изменять величины сил пары обратно пропорционально плечам пары.

Пары сил можно складывать, при этом моменты пар сил складываются по правилу сложения (свободных) векторов.

Приведение системы сил, действующих на твёрдое тело, к произвольной точке (центру приведения) - означает замену действующей системы более простой: системой трёх сил, одна из которых проходит через наперёд заданную точку, а две другие представляют пару.

Доказывается с помощью элементарных операций (рис.13).

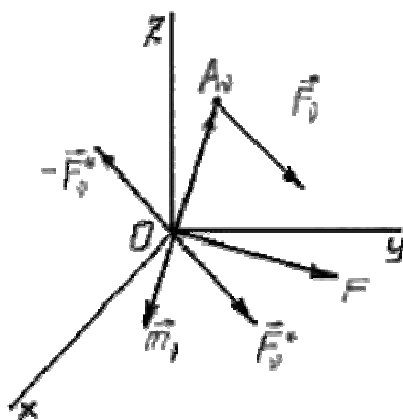


Рис.13.

$$\left. \begin{array}{l} A_v(x_v, y_v, z_v) \\ F_v^0(X_v, Y_v, Z_v) \\ F_v^0, -F_v^0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Система сходящихся сил } \vec{F}_v^0 \text{ и система пар сил } \vec{m}_v.$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n - \text{резльтирующая сила } \vec{F}.$$

$$\vec{m}_0 = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \dots + \vec{m}_n - \text{резльтирующая пара } \vec{m}_0. \text{ Что и требовалось показать.}$$

Две системы сил будут эквивалентны тогда и только тогда, когда обе системы приводятся к одной результирующей силе и одной результирующей паре, то есть при выполнении условий:

$$\begin{array}{l} \vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_k \quad \vec{F} = \vec{F}, \\ \vec{F}_1', \vec{F}_2', \dots, \vec{F}_r, \vec{m}_0 = \vec{m}_0' \end{array}$$

Общий случай равновесия системы сил, действующих на твёрдое тело

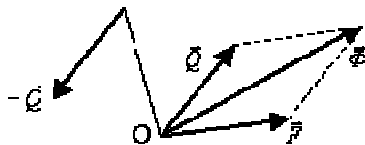


Рис.14.

Приведём систему сил к (рис.14):

\vec{F} - результирующая сила через начало координат;

$\{\vec{Q}, -\vec{Q}\}$ - результирующая пара, причём, \vec{Q} через точку O.

$$\vec{\Phi} = \vec{F} \mid \vec{Q}$$

То есть привели к $\vec{\Phi}$ и \vec{Q} - две силы, одна из которых ($\vec{\Phi}$) проходит через заданную точку O.

Равновесие, если $\vec{\Phi}$ и $-\vec{Q}$ на одной прямой, равны, направлены противоположно (аксиома 2).

Тогда $-\vec{Q}$ проходит через точку O, то есть $\vec{m}_0 = 0$.

Далее: $\vec{F} = 0$, так как остаётся только эта сила.

Итак, общие условия равновесия твёрдого тела:

$$\vec{F} = 0, \quad \vec{m} = 0.$$

Эти условия справедливы для произвольной точки пространства.

3. Методы преобразования систем сил

Особенности метода преобразования систем сил как способа раскрытия статической неопределимости стержневых и рамных систем. Некорректные преобразования за-

данной системы в основные могут быть по причине кинематической изменяемости. Примером служит расчет рамы, суммарной эпюры изгибающих моментов.

4. Условия и уравнения равновесия твердых тел под действием различных систем сил.

РАВНОВЕСИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Для равновесия плоской системы сил, приложенных к твердому телу и не пересекающихся в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор R этих сил и их главный момент относительно произвольной точки O , лежащей в плоскости действия этих сил, были равны нулю, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \sum \bar{F}_i &= 0, \\ \sum m_O(\bar{F}_i) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

В координатной форме эти условия выражаются следующими тремя уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0, \\ \sum F_{iy} &= 0, \\ \sum m_O(\bar{F}_i) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Условия равновесия плоской системы сил, расположенных как угодно на плоскости, можно выразить еще в двух других видах.

- Алгебраическая сумма моментов сил относительно трех произвольных точек A , B , C , не лежащих на одной прямой, равна нулю, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \sum m_A(\bar{F}_i) &= 0, \\ \sum m_B(\bar{F}_i) &= 0, \\ \sum m_C(\bar{F}_i) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

- Алгебраическая сумма моментов всех сил относительно двух произвольных точек A и B равна нулю и сумма проекций этих сил на какую-либо ось, не перпендикулярную к прямой, соединяющей точки A и B , равна нулю, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \sum m_A(\bar{F}_i) &= 0, \\ \sum m_B(\bar{F}_i) &= 0, \\ \sum F_{ix} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

В частном случае, если все силы плоской системы параллельны, то условия равновесия (20) таких сил выражаются не тремя, а двумя уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0, \\ \sum m_O(\bar{F}_i) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

причем ось \square параллельна данным силам.

Условия равновесия плоской системы параллельных сил можно выразить и в другой форме:

$$\left. \begin{aligned} \sum m_A(\bar{F}_i) &= 0, \\ \sum m_B(\bar{F}_i) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

причем прямая AB не параллельна данным силам.

Задачи на равновесие плоской системы сил можно разбить на два основных типа, а именно:

- 1) задачи на равновесие плоской системы параллельных сил;
- 2) задачи на равновесие плоской системы сил, расположенных как угодно.

Задачи второго типа можно еще классифицировать по характеру связей, наложенных на рассматриваемое тело, подразделяя их на следующие две группы:

- а) задачи, в которых линии действия реакций всех связей известны;
- б) задачи, в которых линия действия реакции одной из связей неизвестна.

Общие указания, сделанные в § 6. гл. I, о направлении реакций связей и решении задач на равновесие несвободного твердого тела, остаются такими же и при решении задач этого параграфа.

Чтобы задача была статически определима, число неизвестных реакций должно быть не больше трех, так как при равновесии твердого тела под действием плоской системы сил в общем случае можно составить три уравнения равновесия.

При составлении уравнений равновесия за центр моментов следует выбирать такую точку, через которую проходят линии действия двух неизвестных сил, тогда в уравнение моментов относительно этой точки войдет только одна неизвестная сила и ее легко будет определить из этого уравнения.

Если данное тело находится в равновесии под действием плоской системы параллельных сил, то число неизвестных реакций не должно быть больше двух, так как в этом случае мы имеем только два уравнения равновесия.

5. Центр тяжести твердого тела и его координаты

На каждую частицу тела, находящегося вблизи поверхности Земли, действует направленная вертикально вниз сила, которая называется *силой тяжести*. Силы тяжести каждой частицы тела, строго говоря, направлены по радиусам к центру Земли и не являются параллельными. Но для тел, размеры которых малы по сравнению с размерами Земли, непараллельность настолько незначительна, что в расчетах с большой точностью силы тяжести их частиц можно считать параллельными, сохраняющими свои значения, точки приложения и параллельность при любых поворотах тела. Поэтому, обозначив силу тяже-

сти частицы через P_k , можно, согласно формулам $\bar{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^N P_k \bar{r}_k}{\sum_{k=1}^N P_k}$ и

$$x_C = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k x_k; \quad y_C = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k y_k; \quad z_C = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k z_k$$

, найти точку С, которая неизменно связана с телом и называется центром системы параллельных сил тяжести. Таким образом, центром тяжести твердого тела называется центр системы параллельных сил тяжести частиц данного тела. Точка С — это геометрическая точка, она может и не принадлежать телу, но она всегда с ним связана, например центр тяжести баскетбольного мяча, кольца и др. Выразим силу тяжести (вес) частицы тела через ее объем V . Тогда величина

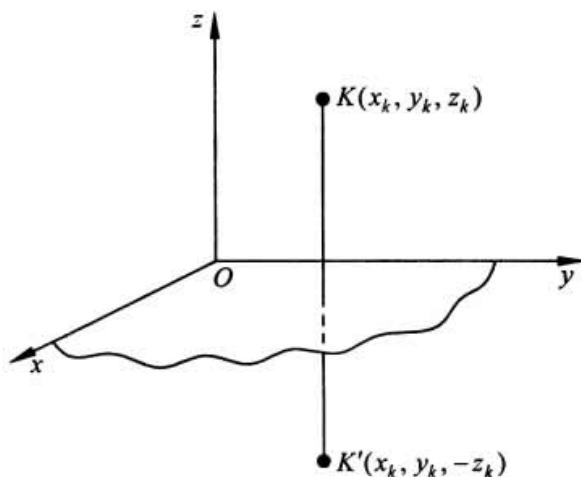
$\gamma = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta V} = \frac{dP}{dV}$ называется *удельным весом*, а величина $\rho = \gamma/g$ — *плотностью* тела в данной точке. ("гамма"-Н/м³) ("ро"-Н*с²/м⁴)

Методы нахождения центра тяжести.

1) Метод симметрии.

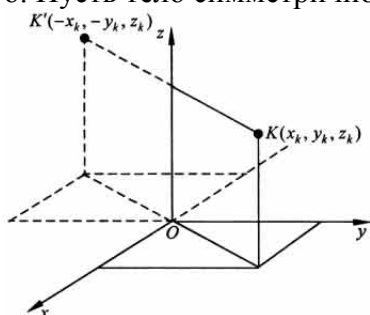
Покажем, что если однородное тело имеет плоскость, ось или центр материальной симметрии, то его центр тяжести находится соответственно в плоскости, на оси или в центре симметрии.

а. Пусть тело симметрично относительно плоскости Оху



Тогда вследствие симметрии каждому элементу К тела объемом $\Delta V_k(x_k, y_k, z_k)$ будет соответствовать элемент К' того же объема с координатами $(x_k, y_k, -z_k)$. Поэтому статический момент объема $\sum_{k=1}^N z_k \Delta V_k = 0$ и координата $z_{C'} = \sum_{k=1}^N z_k \Delta V_k / V = 0$. Следовательно, центр тяжести тела будет лежать в плоскости симметрии Оху.

б. Пусть тело симметрично относительно оси Oz.



Тогда всякому элементу К тела объемом ΔV_k с координатами (x_k, y_k, z_k) будет соответствовать такой же по объему элемент К', расположенный симметрично относительно оси Oz и имеющий координаты $(-x_k, -y_k, z_k)$. Поэтому статические моменты

$\sum_{k=1}^N x_k \Delta V_k = 0$, $\sum_{k=1}^N y_k \Delta V_k = 0$, $\sum_{k=1}^N z_k \Delta V_k \neq 0$ и, следовательно, координаты $x_{C'} = \frac{\sum_{k=1}^N x_k \Delta V_k}{V} = 0$, $y_{C'} = \frac{\sum_{k=1}^N y_k \Delta V_k}{V} = 0$, $z_{C'} = \frac{\sum_{k=1}^N z_k \Delta V_k}{V} \neq 0$. Таким образом, центр тяжести будет находится на оси симметрии.

в. Пусть тело имеет центр симметрии, который примем за начало координат. Тогда всякой частице тела объемом ΔV_k , определяемой радиус-вектором \vec{r}_k , будет соответствовать частица такого же объема с радиус-вектором $(-\vec{r}_k)$, симметричная ей относительно центра О. Поэтому $\vec{r}_O = \sum_{k=1}^N \vec{r}_k \Delta V_k = 0$. Следовательно, центр тяжести будет находиться в центре симметрии. Например, центры тяжести однородных куба, сферы, кольца, прямоугольной

или круглой пластины лежат в геометрическом центре этих тел.

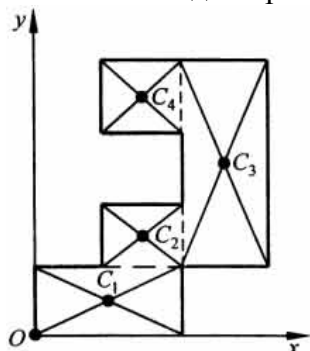
2) Метод разбиения.

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^N P_k \bar{r}_k}{\sum_{k=1}^N P_k} \text{ и}$$

Этот метод основан на применении формул

$$x_{C'} = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k x_k; \quad y_{C'} = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k y_k; \quad z_{C'} = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k z_k$$

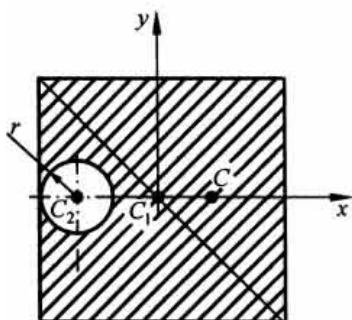
. Его используют, когда тело можно разбить на ряд частей, центры тяжести которых известны из условий симметрии. Метод разбиения можно наглядно проиллюстрировать с помощью рисунка.



Расположив тело в системе координат, разделив его мысленно на отдельные части, веса которых P_1, P_2, P_3, P_4 , а центры тяжести известны, вычислим вес тела и, согласно

$$x_{C'} = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k x_k; \quad y_{C'} = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k y_k; \quad z_{C'} = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k z_k$$

формулам, координаты центра тяжести C всего тела. Если тело имеет вырез, причем известны центр тяжести тела без выреза и центр тяжести вырезанного тела, то для определения координат центра тяжести используют метод отрицательных масс (частный случай метода разбиения).



На рисунке изображена квадратная пластина, сторона которой a . В пластине выполнено круглое отверстие с радиусом $r=0,2a$ и координатами центра $x_2=-0,3a$; $y_2=0$. Координаты центра тяжести C , пластины без отверстия $x_1=0$, $y_1=0$. Рассмотрим два тела: пластину без отверстия и диск, соответствующий вырезанному отверстию. При использо-

$$x_{C'} = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k x_k; \quad y_{C'} = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k y_k; \quad z_{C'} = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k z_k$$

вании формул вес диска будем считать от-

$$P = p(a^2 - \pi r^2);$$

$$x_{C'} = \frac{1}{P} (P_1 x_1 - P_2 x_2) = \frac{P}{P} [a^2 \cdot 0 - \pi r^2 (-0,3a)] = \frac{0,3\pi a r^2}{a^2 - \pi r^2};$$

рицательным. Тогда
цы площади пластины.

$$y_{C'} = 0,$$

, где p — вес едини-

6.Трение

Силой трения называют силу, которая возникает при движении одного тела по поверхности другого. Она всегда направлена противоположно направлению движения. Сила трения прямо пропорциональна силе нормального давления на трущиеся поверхности и зависит от свойств этих поверхностей. Законы трения связаны с электромагнитным взаимодействием, которое существует между телами.

Различают трение внешнее и внутреннее.

Внешнее трение возникает при относительном перемещении двух соприкасающихся твердых тел (трение скольжения или трение покоя).

Внутреннее трение наблюдается при относительном перемещении частей одного и того же сплошного тела (например, жидкость или газ).

Различают сухое и жидкое (или вязкое) трение.

Сухое трение возникает между поверхностями твердых тел в отсутствие смазки.

Жидким (вязким) называется трение между твердым телом и жидкой или газообразной средой или ее слоями.

Сухое трение, в свою очередь, подразделяется на трение скольжения и трение качения.

Рассмотрим законы сухого трения (рис. 4.5).

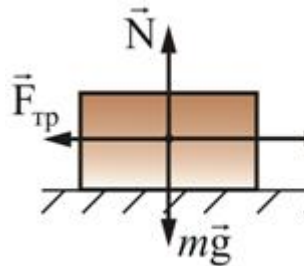


Рис. 4.5

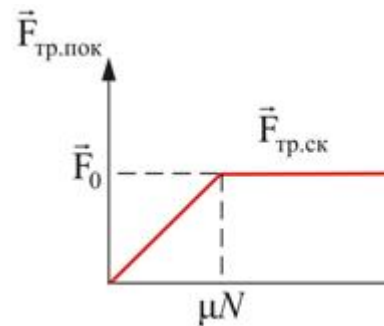


Рис. 4.6

Подеиствуем на тело, лежащее на неподвижной плоскости, внешней силой $\vec{F}_{\text{вн}}$, постепенно увеличивая ее модуль. Вначале брусок будет оставаться неподвижным, значит, внешняя сила $\vec{F}_{\text{вн}}$ уравнивается некоторой силой $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленной по касательной к трущейся поверхности, противоположной силе $\vec{F}_{\text{вн}}$. В этом случае $\vec{F}_{\text{тр}}$ и есть сила трения покоя.

Установлено, что максимальная сила трения покоя не зависит от площади соприкосновения тел и приблизительно пропорциональна модулю силы нормального давления N :

$$F_{\text{тр.пок}} = \mu_0 N,$$

μ_0 – коэффициент трения покоя, зависящий от природы и состояния трущихся поверхностей.

Когда модуль внешней силы, а следовательно, и модуль силы трения покоя превысит значение F_0 , тело начнет скользить по опоре – трение покоя $F_{\text{тр.пок}}$ сменится трением скольжения $F_{\text{ск}}$ (рис. 4.6):

$$F_{\text{тр}} = \mu N, \tag{4.4.1}$$

где μ – коэффициент трения скольжения.

Трение качения возникает между шарообразным телом и поверхностью, по которой оно катится. Сила трения качения подчиняется тем же законам, что и сила трения скольжения, но коэффициент трения μ ; здесь значительно меньше.

Подробнее рассмотрим силу трения скольжения на наклонной плоскости (рис. 4.7).

На тело, находящееся на наклонной плоскости с сухим трением, действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, нормальная сила реакции опоры \vec{N} и сила сухого трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Сила \vec{F} есть равнодействующая сил $m\vec{g}$ и \vec{N} ; она направлена вниз, вдоль наклонной плоскости. Из рис. 4.7 видно, что

$$F = mg \sin \alpha, \quad N = mg \cos \alpha.$$

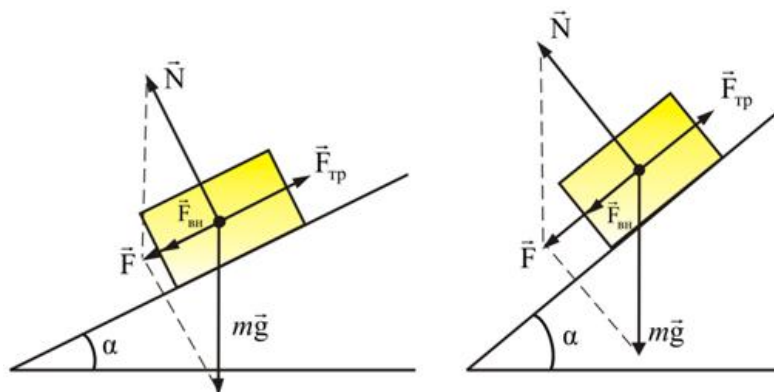


Рис. 4.7

Если $F < (F_{\text{тр}})_{\text{max}} = \mu N$ – тело остается неподвижным на наклонной плоскости. Максимальный угол наклона α определяется из условия $(F_{\text{тр}})_{\text{max}} = F$ или $\mu mg \cos \alpha = mg \sin \alpha$, следовательно, $\tan \alpha_{\text{max}} = \mu$, где μ – коэффициент сухого трения.

$$\begin{aligned} F_{\text{тр}} &= \mu N = mg \cos \alpha, \\ F &= mg \sin \alpha. \end{aligned}$$

При $\alpha > \alpha_{\text{max}}$ тело будет скатываться с ускорением

$$a = g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha),$$

$$F_{\text{ск}} = ma = F - F_{\text{тр}}.$$

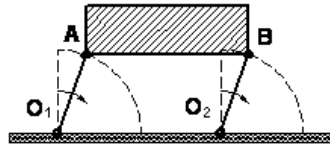
Если дополнительная сила $F_{\text{вн}}$, направленная вдоль наклонной плоскости, приложена к телу, то критический угол α_{max} и ускорение тела будут зависеть от величины и направления этой внешней силы.

7. Предмет кинематики. Способы задания движения точки. Скорость и ускорение точки. Вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Поступательное движение твердого тела.

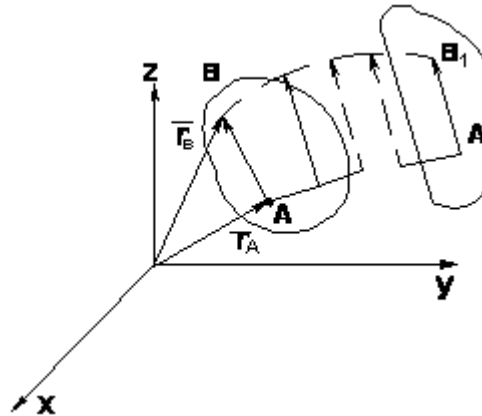
1. Поступательное движение твердого тела

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая проведенная в этом теле, перемещается, оставаясь параллельной самой себе.

Поступательное движение не значит прямолинейное:



ТЕОРЕМА: при поступательном движении все точки тела описывают одинаковые (при наложении совпадающие) траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.



$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB} \quad (3.1)$$

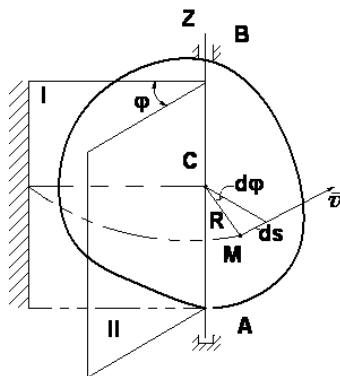
$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d(\overline{AB})}{dt}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B \quad (3.2)$$

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{d\vec{v}_B}{dt} \Rightarrow \vec{a}_A = \vec{a}_B$$

2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

Вращательным называется такое движение твердого тела, при котором во все время движения какие-либо две точки тела остаются неподвижными (проходящая через эти неподвижные точки прямая называется *осью вращения*), а все остальные точки описывают траектории, представляющие собой окружности, плоскости которых перпендикулярны к оси вращения, а центры лежат на этой оси.



$$\varphi = f(t) \quad (3.3)$$

$$\omega_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{или} \quad \omega = \dot{\varphi}$$

(3.4)

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad \text{или}$$

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \quad (3.5)$$

Примеры:

Равномерное вращение

$(\omega = const)$

$$d\varphi = \omega dt$$

$$\varphi = \omega t$$

$$\omega = \varphi/t$$

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \approx 0,1 n$$

Равнопеременное вращение

$(\varepsilon = const)$

$$d\omega = \varepsilon dt$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$$

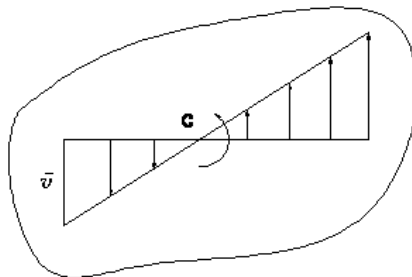
$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon t$$

$$\Rightarrow d\varphi = \omega_0 dt + \varepsilon t dt$$

$$\varphi = \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}$$

3. Скорости и ускорения точек вращающегося твердого тела

Вращательная скорость точки



$$v = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt}$$

$$v = R \omega \quad (3.6)$$

Модуль вращательной скорости точки твердого тела равен произведению расстояния от точки до оси вращения на угловую скорость тела

Ускорение точки

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad (\rho = R)$$

$$a_\tau = R \frac{d\omega}{dt}, \quad a_n = \frac{R^2 \omega^2}{R}$$

или $a_\tau = R\varepsilon = a_\varepsilon$ (3.7) – вращательное ускорение

$$a_n = R\omega^2 = a_\omega$$
 (3.8) – центростремительное ускорение

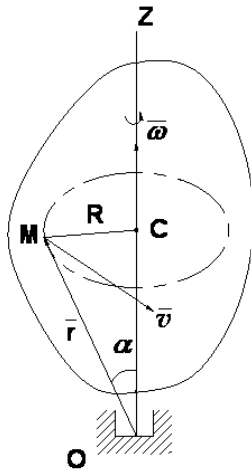
$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{R^2 \varepsilon^2 + R^2 \omega^4}$$
 (3.9) – полное ускорение

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|a_\tau|}{a_n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$$
 (3.10)

4. Векторные выражения вращательной скорости, вращательного и центростремительного ускорений.

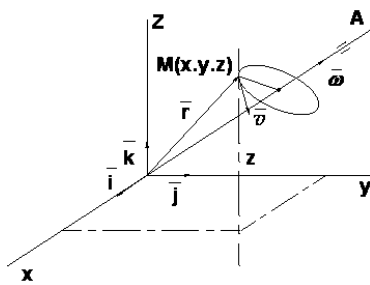
Формулы Эйлера.



$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (3.11)$$

$$\left. \begin{aligned} v &= R \cdot \omega = \omega r \cdot \sin \alpha \\ |\bar{\omega} \times \bar{r}| &= \omega \cdot r \cdot \sin \alpha \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \\ &= \bar{i}(\omega_y z - \omega_z y) + \bar{j}(\omega_z x - \omega_x z) + \\ &+ \bar{k}(\omega_x y - \omega_y x) \end{aligned}$$



$$\left. \begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

- формулы Эйлера

Векторные выражения вращательного и центростремительного ускорения точки

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt}$$

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\epsilon}, \quad \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$$

$$\bar{a} = \bar{\epsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v}$$

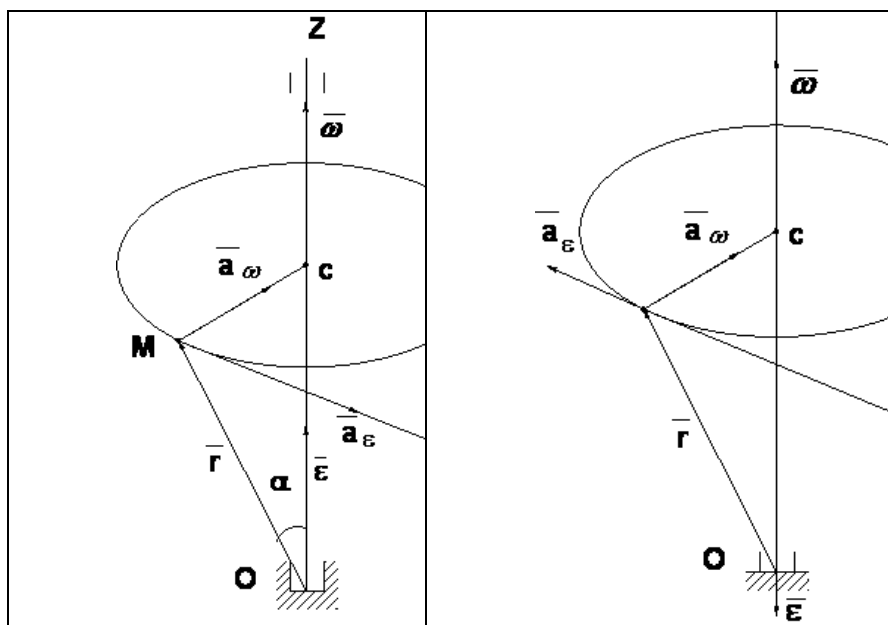
$$\bar{a} = \bar{\epsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) \quad \text{- полное ускорение точки}$$

$$|\bar{\epsilon} \times \bar{r}| = \epsilon \cdot r \cdot \sin \alpha \Rightarrow |\bar{a}_\epsilon| = |\bar{\epsilon} \times \bar{r}| \quad \text{- вращательное ускорение точки}$$

$$a_\omega = \omega^2 R = \omega \cdot v$$

$$\bar{\omega} \times \bar{v} = \omega \cdot v \cdot \sin(\bar{\omega}, \bar{v}) = \omega \cdot v$$

- центростремительное ускорение точки



8. Плоское движение твердого тела и движение плоской фигуры в ее плоскости. Абсолютное и относительное движение точки. Сложное движение твердого тела.

Основной задачей кинематики сложного движения твердого тела является установление соотношений между характеристиками абсолютного и относительного движений. Сложное движение твердого тела может состоять из поступательных движений, вращательных движений, или может быть получено в результате сложения поступательного и вращательного движений. В некоторых задачах кинематики заданное сложное движение твердого тела раскладывают на составляющие движения (анализ); в других — требуется определить сложное движение твердого тела как результат сложения более простых движений (синтез). Как при анализе, так и при синтезе движений речь идет о разложении и сложении движений, рассматриваемых в данный момент (мгновенных движений). Сложение поступательных движений твердого тела.

Теорема. В результате сложения мгновенных поступательных движений твердого тела получается результирующее мгновенно поступательное движение.

Доказательство. Пусть твердое тело одновременно участвует в двух мгновенных поступательных движениях, из которых одно является относительным со скоростью v_1 а второе — переносным со скоростью v_2 . По теореме о параллелограмме скоростей имеем для любой точки твердого тела $v_a = v_r + v_e = v_1 + v_2$,

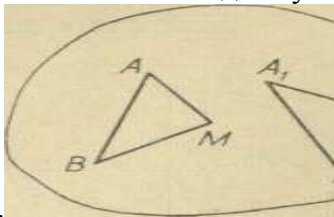
а так как и относительное, и переносное движения твердого тела являются мгновенно поступательными, то относительные, переносные и, следовательно, согласно формуле (II.98), абсолютные скорости всех точек тела соответственно между собой равны в каждый момент времени, т.е. абсолютное движение тела также является мгновенно поступательным. Теорема доказана.

Очевидно, что данная теорема применима к сложному движению твердого тела, состоя-

щему из трех и более мгновенно поступательных движений; тогда в общем случае $\bullet = \sum_{i=1}^n \bullet_i$. Заметим, что мгновенно поступательное движение твердого тела отличается от поступательного тем, что во втором случае в каждый момент времени равны между собой скорости и ускорения всех точек тела, между тем, как в первом случае в данный момент времени равны между собой только скорости всех точек тела.

ПЛОСКО-ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

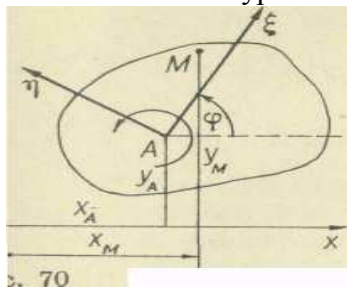
Плоско-параллельным (или плоским) движением твердого тела называется такое движение, при котором все точки тела движутся в плоскостях, параллельных некоторой



неподвижной плоскости.

Из определения плоско-параллельного движения следует, что движения точек тела, расположенных на перпендикуляре к неподвижной плоскости, одинаковы. Поэтому, вместо движения всего тела в пространстве, можно рассмотреть движение плоской фигуры S , являющейся проекцией тела на неподвижную плоскость. Нетрудно показать, что, зная движение некоторого отрезка плоской фигуры S , можно определить движение всей фигуры. Пусть отрезок AB плоской фигуры занимает положение, указанное на рис. 68. Положение произвольной точки M плоской фигуры определим, соединив эту точку с точками A и B отрезка. Если отрезок AB изменит свое положение и перейдет в новое положение A_1B_1 , то для определения нового положения этой точки достаточно построить треугольник $A_1B_1M_1$, равный треугольнику ABM . Так как стороны треугольников, как расстояния между двумя точками абсолютно твердого тела, остаются неизменными, то $A_1B_1 = AB$; $AM = A_1M_1$; $BM = B_1M_1$. Таким образом, кинематика плоско-параллельного движения тела сводится к кинематике движения отрезка прямой на плоскости.

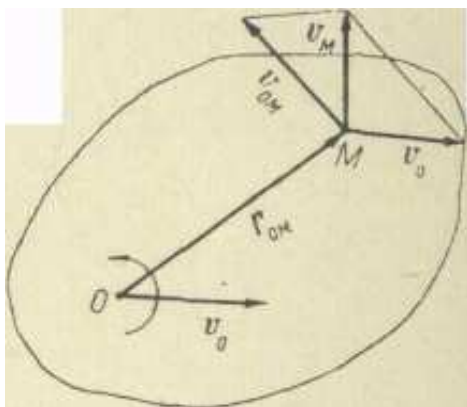
Кинематические уравнения плоско-параллельного движения



Допустим, что плоская фигура движется в неподвижной плоскости Oxy . Выбрав, например, точку A плоской фигуры за полюс, неизменно свяжем с этой фигурой подвижную систему координат $A\xi\eta$ с началом в полюсе A (рис. 70). Для определения положения подвижной системы координат $A\xi\eta$ относительно неподвижной нужно знать координаты точки A (т. е. x_A и y_A), а также угол поворота φ вокруг полюса (т. е. угол, образованный осью $A\xi\eta$ с осью Ox). Следовательно, кинематические уравнения плоско-параллельного движения твердого тела имеют вид $x_A = x_A(t)$, $y_A = y_A(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, где $x_A(t)$, $y_A(t)$, $\varphi(t)$ — конечные, однозначные, непрерывные и дифференцируемые функции времени. Пользуясь формулами преобразования координат, можно получить уравнения движения любой точки M плоской фигуры $x = x_A + \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi$, $y = y_A + \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi$ — Скорости точек тела

Теорема. При плоско-параллельном движении твердого тела скорость любой его точки равна векторной сумме скорости полюса и скорости во вращательном движении вокруг полюса.

Доказательство. Пусть полюс O движется со скоростью v_0 , а плоская фигура вращается вокруг полюса с угловой скоростью ω (рис. 71). Требуется определить скорость произвольной точки M этой фигуры. Так как переносным здесь является поступательное движение вместе с полюсом O , то переносные скорости всех точек плоской фигуры будут одинаковыми, равными скорости полюса: $v_{Me} = v_0$



Относительным движением является вращательное движение вокруг полюса. Поэтому, обозначая радиус-вектор точки M относительно полюса O через r_{OM} , согласно формуле Эйлера, для относительной скорости точки M получим $v_{M\Gamma} = \omega \times r_{OM}$. Относительную скорость точки при плоско-параллельном движении тела обозначают двойным индексом, т. е. $v_{M\Gamma} = v_{OM}$. Первый индекс указывает полюс O , вокруг которого происходит вращение, а второй — обозначает рассматриваемую точку M . Следовательно, $v_{M\Gamma} = v_{OM} = \omega \times r_{OM}$. По теореме о сложении скоростей получим $v_a = v_e + v_{\Gamma}$. Следовательно, $v_M = v_O + v_{OM}$.

9. Законы механики Галилея-Ньютона. Задачи динамики.

Динамика – раздел теоретической механики, который изучает движение материальных тел под действием приложенных к ним сил. Классическая динамика базируется на 3 основных законах, называемых законами Ньютона. Приведем формулировки этих законов:

Закон 1. Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, пока оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние.

Закон 2. Изменение количества движения пропорционально приложенной силе и происходит по направлению прямой, по которой эта сила действует.

Закон 3. Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе, взаимодействия двух тел друг с другом равны и направлены в противоположные стороны.

В соответствии с **принципом относительности Галилея**, существует бесконечное множество равноправных инерциальных систем, движение которых одна относительно другой не может быть установлено никаким образом путём наблюдения любых процессов и явлений, происходящих только в этих системах. Прямая траектория движения объекта в одной системе будет выглядеть также прямой в любой другой инерциальной системе.

Если же в некоторой системе отсчёта свободное тело движется по криволинейной траектории и/или с переменной скоростью, то такая система является неинерциальной.

Преобразования Галилея — в классической механике преобразования координат и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

В динамике рассматриваются две основные задачи : нахождение сил, под действием которых может происходить данное движение тела, и определение движения тела, когда известны действующие на него силы.

Если подвижная система отсчета движется параллельно неподвижной системе отсчета с постоянной скоростью, то динамическое уравнение прямолинейного ускоренного движения тела в этой системе отсчёта инвариантно динамическому уравнению ускоренного движения этого же тела относительно неподвижной системы отсчета. Это доказывает физическую и математическую **инвариантность** второго закона Ньютона преобразованиям Галилея. Главным является то, что описанные явления и их закономерности не зависят от скорости движения подвижной системы координат.

10. Механическая система. Дифференциальные уравнения движения механической системы.

Механической системой материальных точек или тел называется такая их совокупность, в которой положение и движение каждой точки (или тела) зависит от положения и движения остальных.

Материальное тело рассматривается, как система материальных точек (частиц), которые образуют это тело.

Внешними силами называют такие силы, которые действуют на точки или тела механической системы со стороны точек или тел, которые не принадлежат данной системе.

Внутренними силами, называют такие силы, которые действуют на точки или тела механической системы со стороны точек или тел той же системы, т.е. с которыми точки или тела данной системы взаимодействуют между собой.

Внешние и внутренние силы системы, в свою очередь могут быть активными и реактивными

Масса системы равняется алгебраической сумме масс всех точек или тел системы. В однородном поле тяжести, для которого, вес любой частицы тела пропорционален ее массе. Поэтому распределение масс в теле можно определить по положению его центра тяжести – геометрической точки C , координаты которой называют центром масс или центром инерции механической системы

Теорема о движении центра масс механической системы: центр масс механической системы движется как материальная точка, масса которой равняется массе системы, и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему

Выводы:

1. Механическую систему или твердое тело можно рассматривать как материальную точку в зависимости от характера ее движения, а не от ее размеров.
2. Внутренние силы не учитываются теоремой о движении центра масс.
3. Теорема о движении центра масс не характеризует вращательное движение механической системы, а только поступательное

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек. Для каждой точки системы в инерциальной системе отсчета справедлив второй закон Ньютона:

$$m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = \vec{F}_k^* + \vec{F}_k^i, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

где

m_k – масса точки с номером k ;

\vec{r}_k – ее радиус-вектор;

\vec{F}_k^* – равнодействующая всех внешних сил как активных, так и реакций связей, действующих на точку с номером k ;

\vec{F}_i – равнодействующая всех внутренних сил, действующих на точку с номером i .

Систему уравнений (3.1) называют системой дифференциальных уравнений движения точек механической системы. Одна из основных задач механики состоит в том, чтобы, зная активные силы и связи, наложенные на систему, определить движение всех точек системы и определить реакции связей. Решение такой задачи связано с интегрированием системы уравнений (3.1) при заданных начальных условиях. Однако, прямое интегрирование системы (3.1) весьма сложно, что связано как с возможно большим числом этих уравнений, так и, в основном, с неопределенностью информации о внутренних силах.

Во многих практически интересных случаях нет необходимости определять все интегралы системы (3.1), достаточно получить лишь некоторые из них. Это позволяют делать общие теоремы динамики. Являясь прямым следствием уравнений (3.1), общие теоремы динамики связывают основные динамические величины, характеризующие движение системы, с приложенными к ней внешними силами.

11. Количество движения материальной точки и механической системы. Момент количества движения материальной точки относительно центра и оси. Кинетическая энергия материальной точки и механической системы. Общие теоремы динамики. Понятие о силовом поле.

Количество движения материальной точки – векторная величина, которая равняется произведению массы точки на вектор ее скорости.

Единицей измерения количества движения есть (кг м/с).

Количество движения механической системы – векторная величина, равняющаяся геометрической сумме (главному вектору) количества движения всех точек системы. или количество движения системы равняется произведению массы всей системы на скорость ее центра масс

Когда тело (или система) движется так, что ее центр масс неподвижен, то количество движения тела равняется нулю (пример, вращение тела вокруг неподвижной оси, которая проходит через центр масс тела).

Если движение тела сложное, то не будет характеризовать вращательную часть движения при вращении вокруг центра масс. Т.е., количество движения характеризует только поступательное движение системы (вместе с центром масс).

Импульс силы характеризует действие силы за некоторый промежуток времени.

Импульс силы за конечный промежуток времени определяется как интегральная сумма соответствующих элементарных импульсов

Теорема об изменении количества движения материальной точки: (в дифференциальной форме): Производная по времени от количества движения материальной точки равняется геометрической сумме действующих на точки сил (в интегральной форме): Изменение количества движения материальной точки за некоторый промежуток времени равняется геометрической сумме импульсов сил, приложенных к точке за тот же промежуток времени.

Теорема об изменении количества движения механической системы (в дифференциальной форме): Производная по времени от количества движения системы равняется геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил. (в интегральной форме): Изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени равняется геометрической сумме импульсов, действующих на систему внешних сил, за тот же промежуток времени.

Теорема позволяет исключить из рассмотрения заведомо неизвестные внутренние силы.

Теорема об изменении количества движения механической системы и теорема о движе-

нии центра масс являются двумя разными формами одной теоремы.

Закон сохранения количества движения системы.

1. Если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равняется нулю, то вектор количества движения системы будет постоянным по направлению и по модулю.

2. Если сумма проекций всех действующих внешних сил на любую произвольную ось равняется нулю, то проекция количества движения на эту ось является величиной постоянной.

Законы сохранения свидетельствуют, что внутренние силы не могут изменить суммарное количество движения системы.

Кинетической энергией механической системы называется сумма кинетических энергий всех точек этой системы:

$$T = \sum m_k v_k^2 / 2 ,$$

где m_k и v_k - масса и скорость k -й материальной точки, принадлежащей данной системе.

На основании *теоремы Кёнига* кинетическая энергия произвольной механической системы определяется по формуле

$$T = M v_C^2 / 2 + \sum m_k v_{kr}^2 / 2 ,$$

где M - масса всей системы;

v_C - скорость центра масс системы;

m_k - масса k -й точки системы;

v_{kr} - относительная скорость k -й точки при движении её вокруг центра масс

(т.е. $v_k = v_C \oplus v_{kr}$).

Из этой формулы можно получить следующие частные случаи для твёрдого тела:

- при поступательном движении тела $v_k = v_C$, $v_{kr} = 0$,

$$T = m v_C^2 / 2 ;$$

- при вращении тела вокруг оси, проходящей через его центр масс,

$$v_C = 0, v_{kr} = \omega \otimes r_k,$$

$$T = \sum m_k v_{kr}^2 / 2 = J \omega^2 / 2 ,$$

где J - момент инерции тела относительно оси, проходящей в данный момент времени через центр масс;

ω - угловая скорость вращения тела;

- в случае произвольного движения тела (например при плоскопараллельном движении)

$$T = m v_C^2 / 2 + J \omega^2 / 2 .$$

Основные (общие) теоремы динамики систем свободных материальных точек являются уравнениями движения систем свободных материальных точек, т. е. математически дифференциальными уравнениями изменений основных мер движения.

1. Для точки M_α уравнение движения относительно инерциальной системы отсчёта:

$$m_\alpha \frac{d\vec{V}_\alpha}{dt} = \vec{F}_\alpha^{(s)} + \vec{F}_\alpha^{(i)}$$

Перенесём все векторы, не изменяя их направления, в центр масс и сложим геометрически:

$$\frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha \vec{V}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^n \vec{F}_\alpha^{(s)}$$

Производная по времени от количества движения системы свободных материальных точек равна геометрической сумме внешних сил. Это теорема об изменении количества движения системы.

$$\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \vec{V}_{\alpha} = M \vec{V}_c$$

Так как то

$$M \frac{d\vec{V}_c}{dt} = \sum_{\alpha=1}^n \vec{F}_{\alpha}^{(e)}$$

Это уравнение движения центра масс системы материальных точек с массой, равной массе всей системы, к которой приложена сумма всех внешних сил (главный вектор внешних сил) или теорема о движении центра масс.

2. Умножим уравнение движения точки M_{α} слева векторно на \vec{r}_{α} и геометрически сложим, перенося векторы в центр масс:

$$\frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^n [\vec{r}_{\alpha} \times m_{\alpha} \vec{V}_{\alpha}] = \sum_{\alpha} [\vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}^{(e)}]$$

Теорема об изменении кинетического момента системы:

Производная по времени от кинетического момента системы свободных материальных точек равна сумме моментов всех внешних сил (главному моменту всех внешних сил).

Существенно: моменты количества движения и моменты сил вычисляются относительно общего неподвижного начала.

3. Умножая скалярно уравнение движения точки M_{α} на $d\vec{r}_{\alpha} = \vec{V}_{\alpha} dt$ и суммируя:

$$d \sum_{\alpha=1}^n \frac{m_{\alpha} V_{\alpha}^2}{2} = \sum_{\alpha=1}^n (\vec{F}_{\alpha}^{(e)} d\vec{r}_{\alpha}) + \sum_{\alpha=1}^n (\vec{F}_{\alpha}^{(i)} d\vec{r}_{\alpha})$$

или

$$d \sum_{\alpha=1}^n \frac{m_{\alpha} V_{\alpha}^2}{2} = \sum_{\alpha=1}^n (\vec{F}_{\alpha}^{(e)} d\vec{r}_{\alpha}) + \sum_{\beta=1}^{n-1} \sum_{\substack{\alpha > \beta \\ \alpha=2}}^n f_{\beta\alpha} d\rho_{\alpha\beta}$$

Теорема об изменении кинетической энергии системы:

Дифференциал кинетической энергии системы свободных материальных точек равен сумме элементарных работ всех внешних и внутренних сил.

Интегралы уравнений движения системы:

1) Если равен нулю главный вектор внешних сил, то $\vec{V}_c = \text{const}$, то есть центр масс системы свободных материальных точек движется равномерно и прямолинейно.

2) Если главный момент внешних сил равен нулю, то сохраняется кинетический момент системы свободных материальных точек:

$$\vec{G} \equiv \sum_{\alpha=1}^n [\vec{r}_{\alpha} \times m_{\alpha} \vec{V}_{\alpha}] = \text{const}$$

3) Если внешние и внутренние силы консервативны, то

$$\sum_{a=1}^n \frac{m_a V_a^2}{2} = \Pi^{(e)} + \Pi^{(i)} + const$$

или

$$\sum_{a=1}^n \frac{m_a V_a^2}{2} + \psi^{(e)} + \psi^{(i)} = E_0$$

Здесь:

$\Pi^{(e)}$ - потенциал внешнего силового поля;

$\Pi^{(i)}$ - потенциал взаимодействия точек;

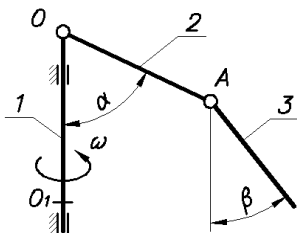
$\psi^{(e)} = -\Pi^{(e)}$ - потенциальная энергия системы точек во внешнем поле;

$\psi^{(i)} = -\Pi^{(i)}$ - потенциальная энергия взаимодействующих точек.

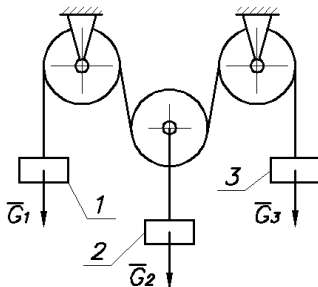
12. Принцип Даламбера для материальной точки и механической системы. Метод кинетостатики. Определение динамических реакций подшипников при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси

Принцип Даламбера

1. Вал 1, установленный вертикально, вращается с постоянной угловой скоростью ω . В точке O вала с помощью цилиндрического шарнира, ось которого перпендикулярна оси вала 1, прикреплен невесомый стержень 2, с которым соединен цилиндрическим шарниром тяжелый однородный стержень 3. Оси шарниров A и O параллельны. При движении системы стержни 2 и 3 располагаются в вертикальной плоскости, проходящей через ось O_1O , $0 < \alpha < 0,5\pi$. Указать, какое из соотношений ($\beta < \alpha$, $\beta = \alpha$, $\beta > \alpha$) справедливо для состояния относительного равновесия системы. Ответ аргументировать.

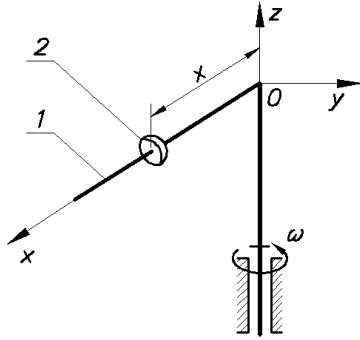


2 Чему должен быть равен вес груза G_3 , чтобы груз 3 был неподвижен в механической системе, у которой $G_1 = G_2 = G$. Массами блоков и нитей и трением пренебрегаем.

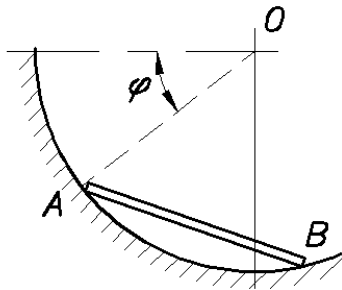


3 Идеально гладкий тонкий стержень 1 вращается равномерно вокруг вертикальной оси z с угловой скоростью ω . Вдоль стержня скользит кольцо 2 массой m . В начальный момент $x_0 = a$, $\dot{x} = 0$. Кольцо принять за материальную точку.

Найти силу, с которой кольцо давит на стержень, в зависимости от координаты x .



4 (Тонкий однородный стержень массы m и длины l скользит, оставаясь все время в одной вертикальной плоскости, по внутренней поверхности гладкого цилиндра радиуса r . Найти реакции цилиндра в точке A для произвольного угла φ , если в начальный момент этот угол был равен 30° и стержень покоился.



13. Принцип возможных перемещений. Обобщенные координаты системы.

Пусть система состоит из N точек и, следовательно, ее положение в пространстве в каждый момент времени определяется $3N$ координатами точек системы, например декартовыми (x_i, y_i, z_i) .

Предположим, что на систему наложены голономные связи, уравнения которых в общем случае могут содержать и производные от координат точек, но после их интегрирования они свелись к геометрическим и имеют форму

$$f_s(x_i, y_i, z_i, t) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, l. \quad (222)$$

Освобождающие связи, выражающиеся неравенствами, не рассматриваются. Таким образом, $3N$ координат связаны l уравнениями и независимых координат будет $n = 3N - l$.

Любые n декартовых координат можно задать независимо друг от друга. Остальные координаты определяются из уравнений связей. Вместо n независимых декартовых координат можно выбрать любые другие независимые параметры q_1, q_2, \dots, q_n , зависящие от всех или части декартовых координат точек системы. Эти независимые параметры, определяющие положение системы в пространстве, называются обобщенными координатами системы. В общем случае они могут зависеть от всех декартовых координат точек системы, т. е.

$$q_i = q_i(x_i, y_i, z_i), \quad (223)$$

где k изменяется от 1 до N . Задание обобщенных координат полностью определяет положение точек системы относительно выбранной системы отсчета, например декартовых осей координат.

У свободной точки три обобщенные координаты. Если точка должна двигаться по заданной поверхности, то обобщенных координат только две и т.д. Используя уравнения связей (222) и выражения обобщенных координат через декартовы (223), можно выразить декартовы координаты через обобщенные, т.е. получить

$$\begin{aligned}x_k &= x_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \\y_k &= y_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \\z_k &= z_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t).\end{aligned}$$

Соответственно, для радиуса-вектора каждой точки системы $\vec{r}_k = x_k \vec{i} + y_k \vec{j} + z_k \vec{k}$, получим

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t). \quad (224)$$

В случае стационарных связей время явно не входит в уравнения связей. Для голономных систем вектор возможного перемещения точки $\delta \vec{r}_k$ в соответствии с (224) можно выразить в форме

$$\delta \vec{r}_k = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_n} \delta q_n = \sum \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (225)$$

Система, имеющая n независимых обобщенных координат, характеризуется также n независимыми возможными перемещениями или вариациями $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$, если связи голономны. Для голономных систем число независимых возможных перемещений совпадает с числом независимых обобщенных координат. Следовательно, число степеней свободы голономной системы равно числу независимых обобщенных координат этой системы, т. е. $n = 3N - l$. Для неголономных систем в уравнения связей могут входить производные от декартовых координат точек и даже могут быть такие уравнения связей, в которые входят только одни производные. Такие уравнения связей наложат ограничения на вариации $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$, и, следовательно, уменьшат число независимых вариаций, не вызывая функциональной зависимости сами обобщенные координаты q_1, q_2, \dots, q_n . Число степеней свободы неголономной системы, равное числу независимых возможных перемещений, меньше числа обобщенных координат системы. В дальнейшем рассматриваются только голономные системы, т. е. системы с голономными связями.

Перейдем к составлению уравнений Лагранжа 2 рода.

Общее уравнение динамики материальной системы: $\sum_{k=1}^n (F_k - m_k w_k) \cdot \delta r_k = 0$

Общее уравнение динамики системы материальных точек в обобщенных координатах имеет вид:

$$\delta q_1 \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} - Q_1 \right) + \delta q_2 \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} - Q_2 \right) + \dots + \delta q_n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial T}{\partial q_n} - Q_n \right) = 0$$

Так как $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ в случае системы, подчиненной голономным связям, являются независимыми обобщенными возможными перемещениями, то общее уравнение динамики удовлетворяется лишь при условии, что коэффициенты, стоящие при возможных перемещениях, равны нулю, т. е.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} - Q_1 = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} - Q_2 = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} - Q_s = 0$$

Эти уравнения называются уравнениями Лагранжа второго рода.

При наличии голономных связей, наложенных на систему, число уравнений Лагранжа равно числу независимых обобщенных координат, т. е. числу степеней свободы. Система состоит из обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Если задаваемые силы системы потенциальны, то уравнения Лагранжа можно за-

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_1}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_2}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_s}$$

писать в виде:

Явления удара.

Взаимодействие тел, при котором за малый промежуток времени скорости точек изменяются на конечную величину, называется **ударом**. Силы, возникающие при таком взаимодействии, называются ударными. Из теоремы об изменении количества движения следует, что импульс этих сил за время удара есть конечная величина. Импульс обычных (неударных) сил имеет тот же порядок малости, что и время удара. Этот же порядок малости имеет и перемещение точки за время удара.

В связи с этим, в теории удара принимают следующие основные допущения:

Скорости точек изменяются практически мгновенно на конечную величину.

Импульсами неударных сил пренебрегают.

Точки системы за время удара не перемещаются.

Пусть \vec{v} – скорость материальной точки до удара, \vec{u} – скорость этой точки после удара.

Применяя теорему об изменении количества движения, находим:

Основное уравнение теории удара. Изменение количества движения материальной точки за время удара равно сумме ударных импульсов, действующих на точку.

$$m\vec{u} - m\vec{v} = \sum_{k=1}^n \vec{S}_k$$

Теорема об изменении количества движения механической системы при ударе.

Изменение количества движения механической системы за время удара равно сумме внешних ударных импульсов, действующих на точки системы.

$$\bar{Q} - \bar{Q}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{S}_k^e$$

Доказательство. Разделим ударные силы, действующие на каждую точку механической системы, на внешние и внутренние. Запишем основное уравнение удара для каждой точки системы

$$m_k \bar{u}_k - m_k \bar{v}_k = \bar{S}_k^e + \bar{S}_k^i, \quad k=1, 2, \dots, n,$$

где \bar{S}_k^e , \bar{S}_k^i – равнодействующие внешних и внутренних ударных импульсов. Суммируя полученные равенства, с учетом свойства внутренних сил находим:

$$\sum_{k=1}^n m_k \bar{u}_k - \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k = \sum_{k=1}^n \bar{S}_k^e.$$

Следствие. При действии на механическую систему лишь внутренних ударных импульсов количество движения системы не изменяется.

Теорема об изменении кинетического момента механической системы при ударе. *Изменение кинетического момента механической системы относительно любого неподвижного центра за время удара равно сумме моментов всех внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы, относительно этого же центра.*

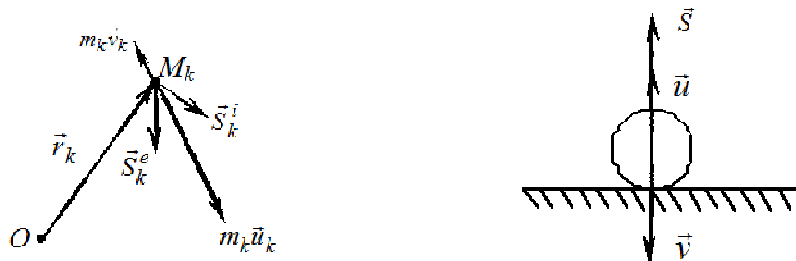
$$\bar{K}_O - \bar{K}_{O0} = \sum_{k=1}^n \bar{m}_O(\bar{S}_k^e)$$

Основное уравнение удара для каждой точки системы

$m_k \bar{u}_k - m_k \bar{v}_k = \bar{S}_k^e + \bar{S}_k^i$, $k=1, 2, \dots, n$. Так как положение точек системы за время удара не изменяется, то умножая на радиус-вектор k -ой точки \bar{r}_k (рис. 18.1), можно записать $\bar{r}_k \times m_k \bar{u}_k - \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k = \bar{r}_k \times \bar{S}_k^e + \bar{r}_k \times \bar{S}_k^i$, $k=1, 2, \dots, n$.

Суммируя полученные равенства,

$$\sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times m_k \bar{u}_k - \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{S}_k^e \Rightarrow \bar{K}_O - \bar{K}_{O0} = \sum_{k=1}^n \bar{m}_O(\bar{S}_k^e).$$



Следствие. Внутренние ударные импульсы не влияют на изменение кинетического момента системы.

Теорема об изменении кинетического момента в скалярной форме. *Изменение кинетического момента механической системы относительно неподвижной оси за*

время удара равно сумме моментов всех внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы, относительно той же оси.

$$K_z - K_{z0} = \sum_{k=1}^n m_k (\vec{S}_k^e)$$

этот результат получается проектированием предыдущего равенства на ось Oz .

Коэффициент восстановления при ударе

Импульсы ударных сил зависят не только от масс и скоростей, но и от свойств соударяющихся тел.

Рассмотрим падение шара на неподвижную плиту (рис. 18.2). При этом \vec{S} – импульс реакции за время удара.

Разделим удар на две фазы:

1. От соприкосновения шара с плоскостью до его полной остановки. Кинетическая энергия шара переходит при этом в потенциальную энергию упругой деформации $T_0 \rightarrow \Pi$, частично теряясь на необратимое изменение его формы и рассеиваясь в виде тепла.

2. Скорость меняет направление и величину от 0 до u . При этом накопленная потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию $\Pi \rightarrow T$ ($T < T_0$).

Величина, равная отношению скорости точки после удара к ее скорости до удара,

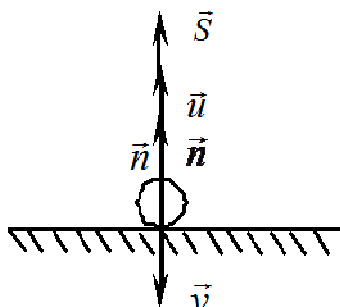
называется **коэффициентом восстановления** при ударе о неподвижную плиту $k = \frac{u}{v}$, $0 \leq k \leq 1$. Если $k=1$, то удар абсолютно упругий ($u=v$), если $k=0$, то удар абсолютно неупругий ($u=0$). Коэффициент восстановления определяется экспериментально и в зависимости от материала соударяющихся тел может принимать различные значения: дерево о дерево ... $k=1/2$, сталь о сталь ... $k=5/9$, стекло о стекло ... $k=15/16$.

Одним из способов определения коэффициента восстановления при ударе может служить определение высоты отскока шара от неподвижной поверхности, падающего на нее с высоты H без начальной скорости (рис. 18.3). Скорость шара в начале удара $v = \sqrt{2gH}$. В конце удара $u = \sqrt{2gh}$, где h – высота, на которую шар поднимется после удара. Тогда

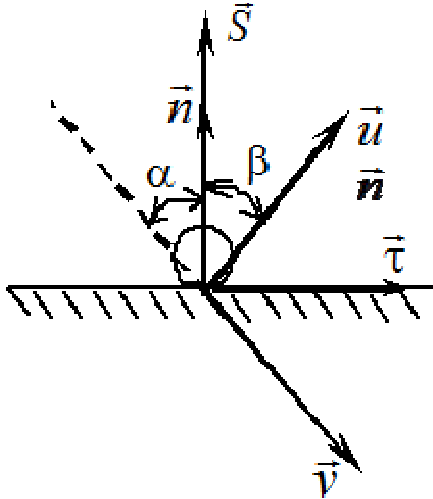
$$k = \frac{u}{v} = \sqrt{\frac{h}{H}}$$

Удар о неподвижную поверхность. Удар двух тел

Рассмотрим прямой удар тела массы m о неподвижную поверхность (рис. 18.4). Скорость тела до удара \vec{v} , коэффициент восстановления k . Определим скорость тела после удара и величину ударного импульса. Из основного уравнения теории удара в проекции на нормаль $mu_n - mv_n = S$.



При этом $u_n = u$, $v_n = -v$, $k = \frac{|u_n|}{|v_n|}$. Тогда $u = kv$, $S = m(k+1)v$. Ударный импульс достигает максимального значения в случае *абсолютно упругого удара* и минимального в случае *абсолютно неупругого*.



Рассмотрим косой удар тела массы m о гладкую (!) неподвижную поверхность (рис. 18.5).

Скорость тела до удара v и составляет угол α с нормалью к поверхности, коэффициент восстановления k . Определим скорость тела после удара и величину ударного импульса. Из основного уравнения теории удара в проекциях на нормаль и касательную $mu_n - mv_n = S$, $mu_\tau - mv_\tau = 0$. При

$$k = \frac{|u_n|}{|v_n|}$$

этом

$$u_n = u \cos \beta, \quad u_\tau = u \sin \beta, \quad v_n = -v \cos \alpha, \quad v_\tau = v \sin \alpha$$

Тогда $u = v \sqrt{\sin^2 \alpha + k^2 \cos^2 \alpha}$, $S = m(k+1)v \cos \alpha$. Кроме того, $k = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta}$, где α – угол падения, β – угол отражения.

Рассмотрим прямой центральный удар двух тел (шаров) массы m_1, m_2 , движущихся до удара поступательно со скоростями \vec{v}_1, \vec{v}_2 (рис. 18.6). Коэффициент восстановления k . Определим скорости тел после удара и величину ударного импульса. $v_1 > v_2$. Так как отсутствуют внешние ударные импульсы, для системы двух тел количество движения не изменяется $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$.

$$k = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2}$$

Кроме того, Решая полученную систему уравнений, находим:

$$u_1 = v_1 + (1+k) \frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_2 - v_1), \quad u_2 = v_2 + (1+k) \frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)$$

$$m_1 u_1 - m_1 v_1 = -S$$
$$S = (1 + k) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)$$

Теорема об изменении кинетической энергии (теорема Карно)

Доказательство. Рассмотрим прямой центральный неупругий удар двух шаров массы m_1 и m_2 , \vec{v}_1 , \vec{v}_2 – скорости тел до удара, $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \vec{u}$ – скорость тел после удара. По следствию из теоремы об изменении количества движения системы $(m_1 + m_2)u_x - (m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}) = 0$

$$u_x = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2}$$

$$T_0 = \frac{1}{2}m_1v_{1x}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2x}^2$$
$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u_x^2$$

Рассмотрим дополнительное соотношение:

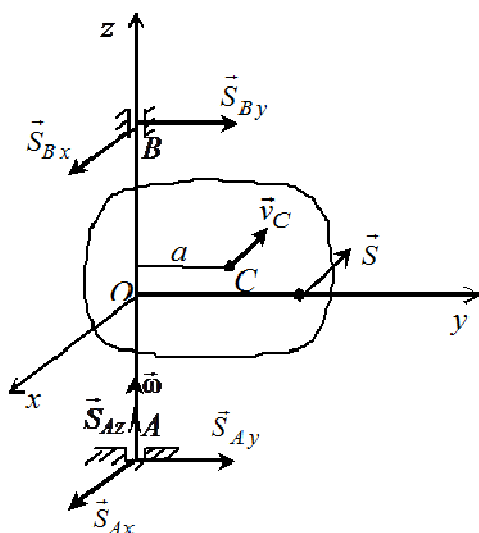
$$T_0 - T = T_0 - 2T + T$$

$$T_0 - T = \frac{1}{2}m_1v_{1x}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2x}^2 - 2\frac{(m_1 + m_2)u_x(m_1v_{1x} + m_2v_{2x})}{2(m_1 + m_2)} + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u_x^2 = \frac{1}{2}m_1(v_{1x} - u_x)^2 + \frac{1}{2}$$

$$T_0 - T = \frac{1}{2} m_1 (v_{1x} - u_x)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_{2x} - u_x)^2$$

В случае упругого удара:

$$T_0 - T = \frac{1-k}{1+k} \left[\frac{1}{2} m_1 (v_{1x} - u_{1x})^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_{2x} - u_{2x})^2 \right]$$



Рассмотрим действие ударного импульса на твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси (рис. 18.7). Воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента механической системы в скалярной форме $K_z - K_{z0} = m_z(\bar{S})$, или

$$J_z \omega_z - J_z \omega_{z0} = m_z (\vec{S}). \quad \text{Откуда} \quad \omega_z = \omega_{z0} + \frac{m_z (\vec{S})}{J_z}$$

78

равную отношению момента этого импульса относительно оси вращения к моменту инерции тела относительно той же оси. Для определения импульсов ударных реакций в подшипниках введем подвижную систему координат, проведя плоскость Oyz через центр масс (рис. 18.8), а ось Oy – через точку приложения ударного импульса, и воспользуем-

$$\bar{Q} - \bar{Q}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{S}_k^e$$

ся теоремами об изменении количества движения и об изменении кинетического момента

$$\vec{K}_O - \vec{K}_{O0} = \sum_{k=1}^n \vec{m}_O(\vec{S}_k^e)$$

При этом

При этом

$$\bar{Q} = m\bar{v}_C, \quad Q_x = -m\omega_z a, \quad Q_y = Q_z = 0,$$

$$\vec{K}_O = J\vec{\omega}, \quad K_{Ox} = -J_{xz}\omega_z, \quad K_{Oy} = -J_{yz}\omega_z, \quad K_{Oz} = J_z\omega_z.$$

В проекциях на оси координат:

$$Q_x - Q_{x0} = \sum_{k=1}^n S_{kx}^e, \quad Q_y - Q_{y0} = \sum_{k=1}^n S_{ky}^e, \quad Q_z - Q_{z0} = \sum_{k=1}^n S_{kz}^e, \quad K_x - K_{x0} = \sum_{k=1}^n m_x(\bar{S}_k^e),$$

$$K_y - K_{y0} = \sum_{k=1}^n m_y(\bar{S}_k^e),$$

$$K_z - K_{z0} = m_z(\bar{S})$$

или

$$-ma(\omega_z - \omega_{z0}) = S_{Ax} + S_{Bx} + S_x, \quad 0 = S_{Ay} + S_{By} + S_y, \quad 0 = S_{Az} + S_z,$$

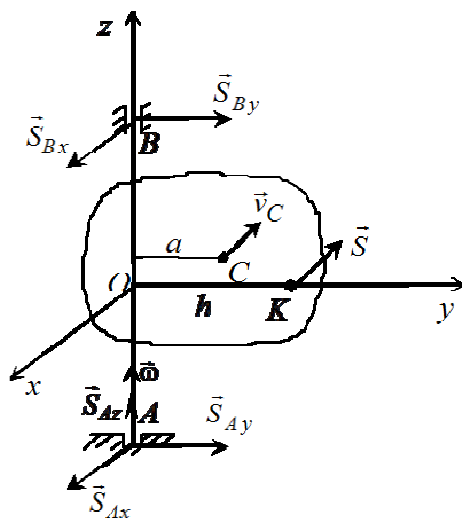
$$-J_{xz}(\omega_z - \omega_{z0}) = S_{Ay}AO - S_{By}OB + m_x(\bar{S})$$

$$-J_{yz}(\omega_z - \omega_{z0}) = -S_{Ax}AO + S_{Bx}OB,$$

$$J_z(\omega_z - \omega_{z0}) = m_z(\bar{S}).$$

Эти шесть уравнений позволяют определить импульсы ударных реакций и угловую скорость после удара.

Центр удара



Центр удара – это точка вращающегося тела, при действии на которую ударного импульса, не возникают ударные реакции. Если что такая точка существует.

$S_{Ax} = S_{Ay} = S_{Az} = S_{Bx} = S_{By} = 0$. Из первых трех уравнений для определения импульсов реакций в подшипниках следует, что приложенный к телу импульс направлен вдоль оси Ox и равен

$S_x = -ma(\omega_z - \omega_{z0})$. Обозначим расстояние от точки приложения K ударного импульса до оси вращения через h (рис. 18.9). Из последнего уравнения

находим $J_z(\omega_z - \omega_{z0}) = -S_x h$. Откуда $h = \frac{J_z}{ma}$.

Для системы координат с началом в точке O и направлением оси Oy таким образом, чтобы она проходила через точку приложения ударного импульса, то для обращения в ноль импульсов реакций необходимо $J_{xz} = J_{yz} = 0$, т.е. ось Oz должна быть главной осью инерции для точки O .

Для того чтобы при действии ударного импульса на вращающееся тело в подшипниках не возникали ударные реакции, надо, чтобы выполнялись условия:

Центр удара лежит в плоскости, проходящей через центр масс и ось вращения, на расстоянии $h = \frac{J_z}{ma}$ от оси.

Ударный импульс направлен перпендикулярно этой плоскости.

Ось вращения является главной для точки ее пересечения с плоскостью действия ударного импульса.