ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические рекомендации для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Б1.Б.15 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Направление подготовки: 35.03.06 Агроинженерия

Профиль образовательной программы: «Электрооборудование и электротехнологии»

Форма обучения: заочная

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1 Организационно-методические данные дисциплины

№ п.п.	Наименование темы	Общий объем часов по видам самостоятельной работы				
		подготовка курсового проекта (работы)	подготовка реферата/эссе	индивидуальные домашние задания (ИДЗ)	самостоятельное изучение вопросов (СИВ)	подготовка к занятиям (ПкЗ)
1	2	3	4	5	6	7
2	Структура курса. Аксиомы статики. Силовые факторы.	-	-	4	-	-
3	Основная теорема статики. Уравнения равновесия.	-	-	4	-	-
4	Частные случаи приведения систем сил.	-	-	4	10	-
5	Использование уравнений равновесия. Статическая определимость. Сочленённые конструкции.	-	-	2	-	-
6	Центр тяжести. Способы определения положения ЦТ.	-	-	2	8	-
7	Трение скольжения и качения	-	-	2	8	-
9	Кинематика. Скорости и ускорения точек при различных способах задания движения.	-	-	4	-	-
10	Простейшие движения твёрдого тела. Плоское движение	-	-	4	-	-
11	Составное движение точки.	-	-	8	24	-
12	Составление дифференциальных уравнений движения точки.	-	-	2	-	-
13	Способы решения 2-й задачи динамики.	-	-	4	4	-
14	Свободные, затухающие и вынужденные колебания	-	-	4	5	-
15	Общие свойства системы. Моменты инерции.	-	-	4	10	-

16	Теорема об изменении количества движения. Теорема о моменте количества движения. Принцип Даламбера. Силы инерции.	-	-	4	10	-
17	Теорема о движении центра масс системы. Теорема о кинетической энергии системы	-	-	4	10	-
18	Принцип Даламбера. Силы инерции.	-	-	2	8	-
19	Принцип возможных перемещений.	-	-	4	4	-
20	Общее уравнение динамики.	-	-	2	8	-

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ

2.1 Определение реакций связей. Плоская произвольная система сил.

Жесткая рама (рис. С1. О—С1.9, табл. С1) закреплена в точке А шарнирно, а в точке *В* прикреплена или к невесомому стержню с шарнирами на концах, или к шарнирной опоре на катках.

В точке *С* к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом P=25 кН. На раму действует пара сил с моментом М=60 кН-м и две силы, значения, направления и точки приложения которых указаны в таблице (например, в условиях №1 на раму действуют сила F_2 под_ углом 15^o к горизонтальной оси, приложенная в точке *D,* и сила F_2 под углом 60° к горизонтальной оси, приложенная в точке *Е* и т.д.).

Определить реакции связей в точках *А, В,* вызываемые действующими нагрузками. При окончательных расчетах принять а=0,5 м.

Указания. Задача Cl —на равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил. При ее решении учесть, что натяжения обеих ветвей нити, перекинутой через блок, когда трением пренебрегают, будут одинаковыми. Уравнение моментов будет более простым (содержать меньше неизвестных), если брать моменты относительно точки, где пересекаются линии действия двух реакций связей. При вычислении момента силы *F* часто удобно разложить ее на составляющие *F'* и *F",* для которых плечи легко определяются, и воспользоваться теоремой Вариньона; тогда $m_o(F)=m_o(F')+m_o(F'')$.

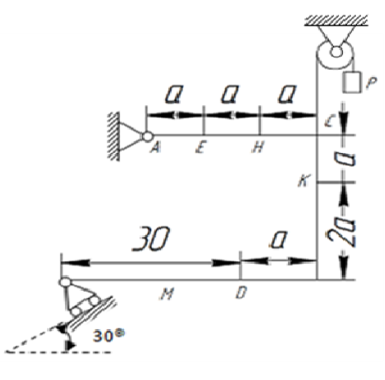


Рис.С1.0

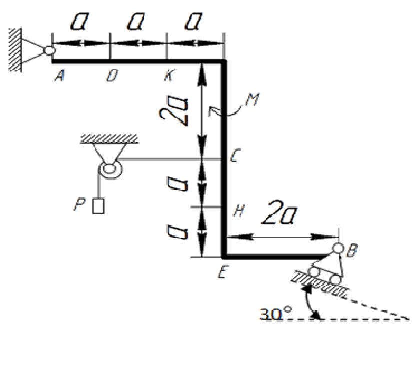


Рис.С1.1

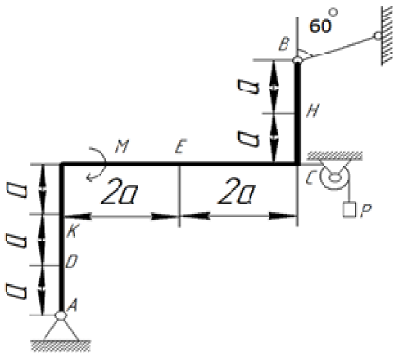


Рис.С1.2

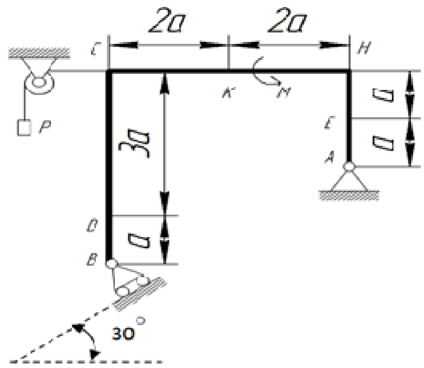


Рис. С1.3

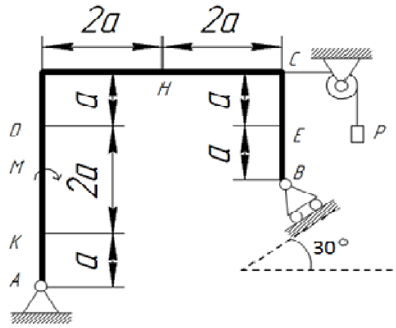


Рис.С1.4

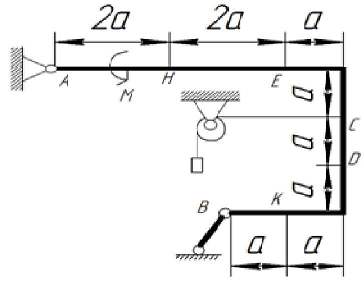


Рис.С1.5

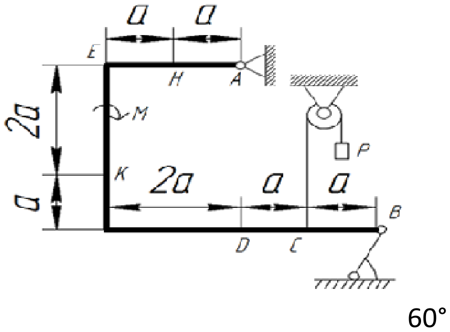


Рис.С.1.6

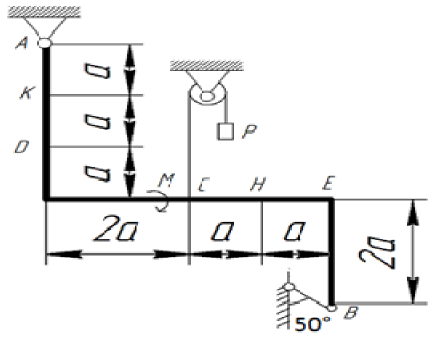


Рис.С.1.7

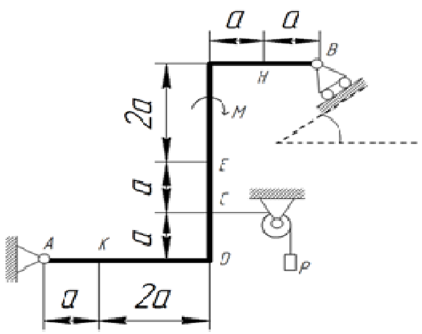


Рис.С.1.8

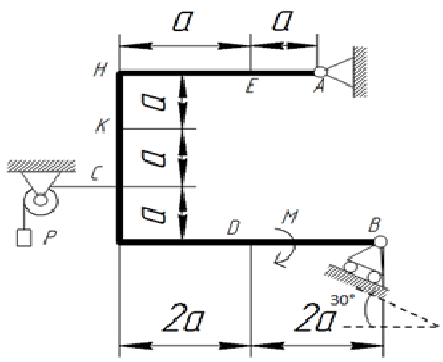


Рис.С.1.9

Пример CI. Жесткая пластина ABCD (рис. C1) имеет в точке *A* неподвижную шарнирную опору, а в точке B—подвижную шарнирную опору на катках. Все действующие нагрузки и размеры показаны на рисунке.

Дано: F=25 кН, a=60°, P=18 кН, γ=75º, M=50 кН•м, β=30°

a=0,5 м. Определить: реакции в точках *A* и *B,* вызываемые действующими нагрузками.

\

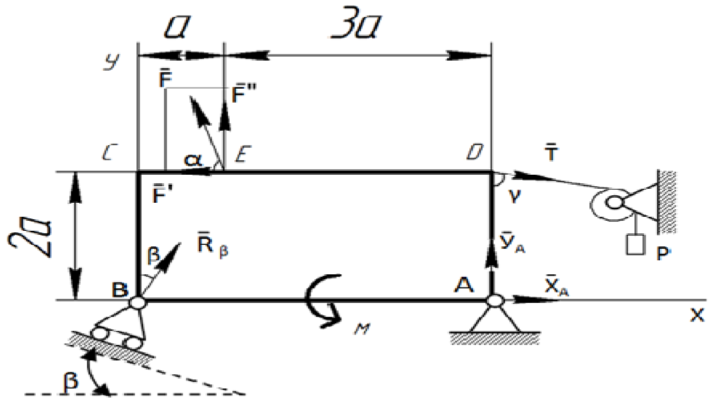


Рис.С.1

Решение: 1. Рассмотрим равновесие пластины. Проведем координатные оси *xy* и изобразим действующие на пластину силы: силу *F,* пару сил с моментом *M,* натяжение троса *T* (по модулю T=P) и реакции связи X_A, Y_A, R_B (реакцию неподвижной шарнирной опоры *A* изображаем двумя ее составляющими, реакция шарнирной опоры на катках направлена перпендикулярно опорной плоскости).

2. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы F относительно точки *A* воспользуемся теоремой Вариньона, т.е. разложим силу F на составляющие F',F" (F'=Fcosα, F"=Fsinα) и учтем, что $m_A(F)=m_A(F')+m_A(F")$. Получим:

$$\begin{cases} \Sigma F_{kx} = 0, \ X_A + R_B \sin\beta - F\cos\alpha + T\sin\gamma = 0 \\ \Sigma F_{ky} = 0, \ Y_A + R_B\cos\beta + F\sin\alpha - T\cos\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Sigma mA(F_k) = 0, \quad M - R_B\cos\beta \cdot 4a + F\cos\alpha \cdot 2a - F\sin\alpha \cdot 3a - T\sin\gamma \cdot 2a = 0$$

Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив эти уравнения, определим искомые реакции.

Ответ: X_A=-8,5 кН; $У_A$=—23,3 кН; R_B=7,3 кН. Знаки указывают, что силы X_A и $У_A$ направлены противоположно показанным на рис. С1.

3а

2.2 Определение реакций связей. Пространственная произвольная система сил.

Две однородные прямоугольные топкие плиты жестко соединены (сварены) под прямым углом друг к другу и закреплены сферическим шарниром (или подпятником) в точке А, цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке В и невесомым стержнем 1 (рис. С5.0—С5.7) или же двумя подшипниками в точках А, и В и двумя невесомыми стержнями 1 и 2 (рис, С5.8, С5.9); все стержни прикреплены к плитам и к неподвижным опорам шарнирами.

Размеры плит указаны на рисунках; вес большей плиты P_1=5 кН. вес меньшей плиты P_2=3 кН. Каждая из плит расположена параллельно одной из координатных плоскостей (плоскость *xy* горизонтальная).

На плиты действуют пара сил с моментом М=4 кН·м, лежащая и плоскости одной из плит, и две силы. Значения этих сил, их направлении и точки приложении указаны и табл. С5; при этом силы F_1 и F_4 лежат в плоскостях, параллельных плоскости *xy,* сила F_2 - в плоскости, параллельной xz, и сила F_3 в плоскости, параллельной yz. Точки приложения сил *(D, E, H, К)* находятся в углах или в серединах сторон плит.

Определить реакции связей в точках А и В и реакцию стержня (стержней). При подсчетах принять а = 0,6 м.

Указания. Задача С5 - на равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил. При се решении учесть, что реакция сферического шарнира (подпятники) имеет три составляющие (по всем трем координатным осям), а реакции цилиндрического шарнира (подшипника) — две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира (подшипника). При вычислении момента силы F часто удобно разложить ее на две составляющие *F′* и F*″,* параллельные координатным осям (или на три); тогда, по теореме Вариньона, $m_x(F)=m_x(F')+m_x(F'')$ и т д.

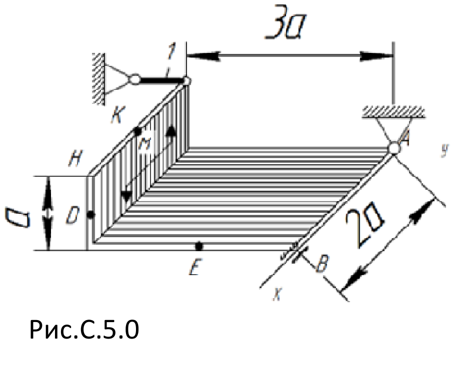


Рис.С.5.0

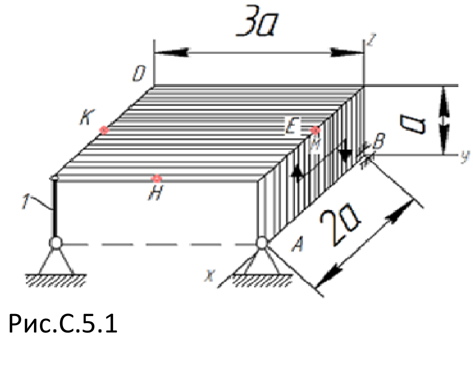
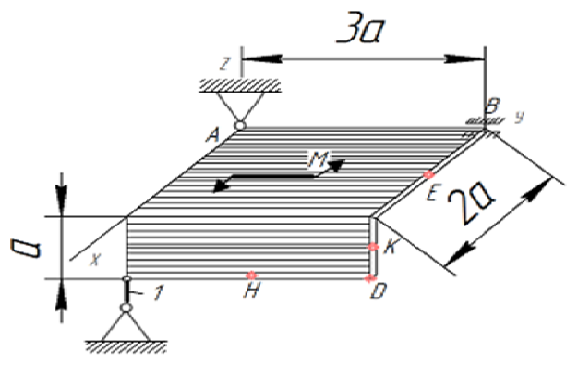


Рис.С.5.1



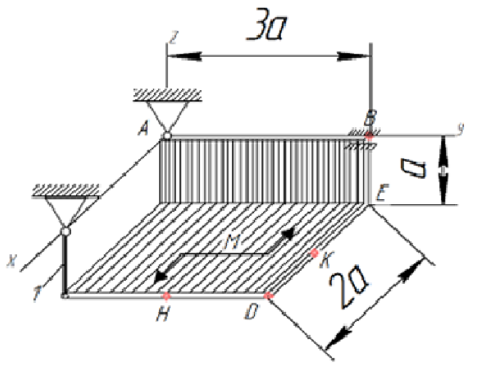


Рис.С.5.2

Рис.С5.3

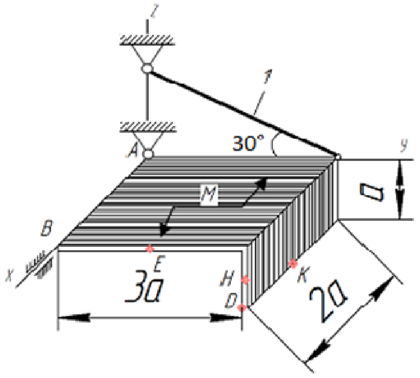


Рис.С.5.4

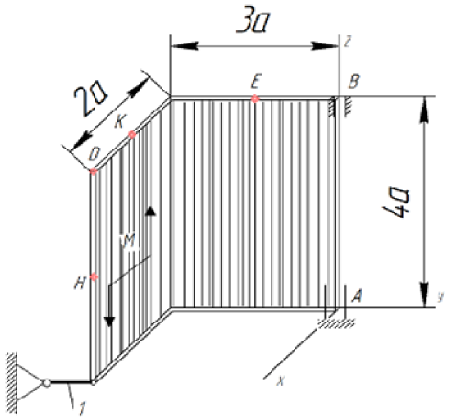


Рис.С.5.5

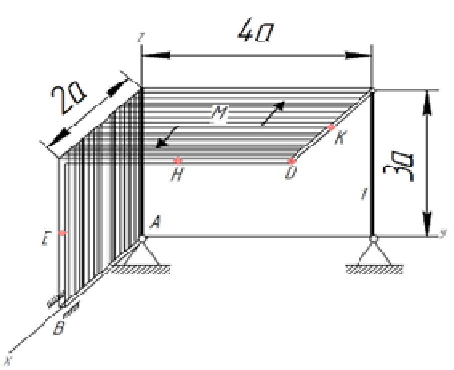


Рис.С.5.6

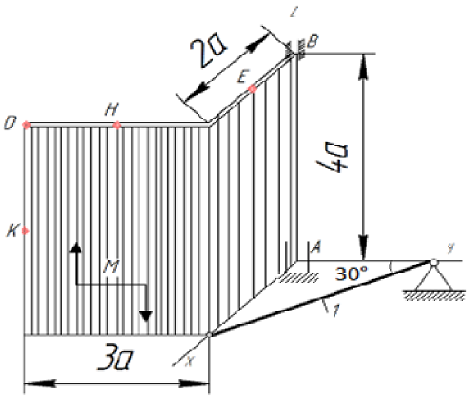


Рис.С.5.7

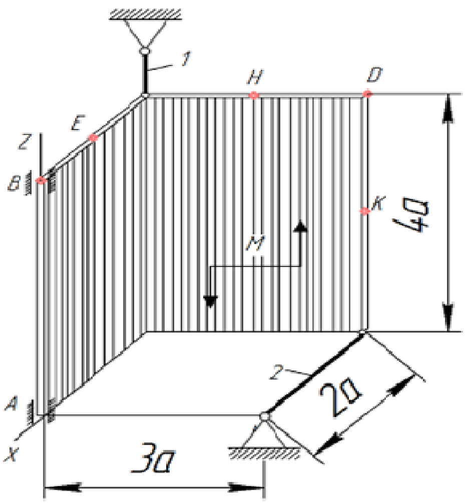


Рис.С.5.8

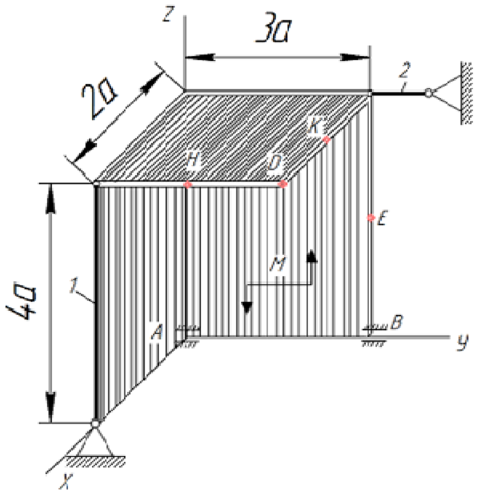


Рис.С.5.9

Пример С5. Горизонтальная прямоугольная плита весом Р (рис. С5) закреплена сферическим шарниром в точке А, цилиндрическим (подшипником) в точке В и невесомым стержнем OD'. На плиту в плоскости, параллельной xz, действует сила F, а в плоскости, параллельной yz, — пара сил с моментом М.

Дано: Р = 3 кН, F=8 кН, М = 4 кН·м, α = 60°, АС =0,8 м, АВ = 1,2 м, ВЕ = 0,4 м, ЕН = 0,4 м. Опреде

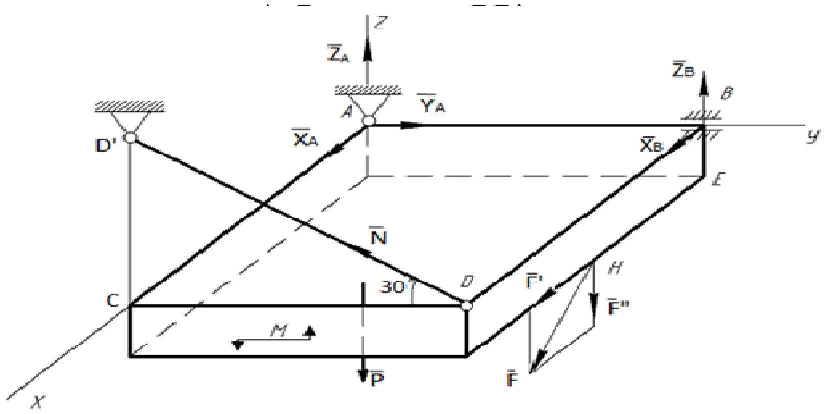


Рис.С.5

Решение. 1. Рассмотрим равновесие плиты. На плиту действуют заданные силы Р, F и пара с моментом М, а также реакции связей. Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие X_A, Y_A, Z_A, цилиндрического (подшипника) – на две составляющие X_B, Z_B (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника); реакцию N стержня направляем вдоль стержня от D к D', предполагая, что ан растянут.

2. Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия действующей на плиту пространственной системы сил:

$$\begin{cases} \Sigma F_{kx} = 0, \; XA + XB + F\cos 60^{\circ} = 0 \\ \Sigma F_{ky} = 0, \quad Y_A - N\cos 30^{\circ} = 0 \\ \Sigma F_{kz} = 0, \quad Z_A + Z_B - P + N\sin 30^{\circ} - F\sin 60^{\circ} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Sigma m_x(\overline{F}_k) = 0, \; M - P\cdot\dfrac{AB}{2} + Z_B\cdot A_B - F\sin 60^{\circ}\cdot AB + N\sin 30^{\circ}\cdot AB = 0 \\ \Sigma m_y(\overline{F}_k) = 0, \quad P\cdot\dfrac{AC}{2} - N\sin 30^{\circ}\cdot AC + F\sin 60^{\circ}\cdot\dfrac{AC}{2} - F\cos 60^{\circ}\cdot BE = 0 \\ \Sigma m_z(\overline{F_k}) = 0, \; -F\cos 60^{\circ}\cdot AB - N\cos 30^{\circ}\cdot AC - XB\cdot AB = 0 \end{cases}$$

Для определения моментов силы F относительно осей разлагаем ее на составляющие F' и F'', параллельные осям x и z (F' = F cosα, F''= sinα), и применяем теорему Вариньона (см. Указания). Аналогично можно поступать при определении моментов реакции N.

Подставив в составленные уравнения числовые значении всех заданных величия и решив эти уравнения, найдем искомые реакции.

Ответ: X_A=3,4 кН; Y_A=5,1 кН; Z_A=4,8 кН; X_B= 7.4 kH; Z_B=2,1 кН; N=5,9 кН. Знак минус указывает, что реакции X_B направлена противоположно показанной на рис. С5.

2.3 Изучение кинематических характеристик (положение, скорость, ускорение) движения точки при различных способах задания (векторный, координатный, естественный).

Точка В движется и плоскости ху (рис. К1.0 - К1.9, табл. К1; траектория точки на рисунках показана условно). Закон движения точки задан уравнениями $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$, где x и у выражены в сантиметрах, t - в секундах.

Найти уравнение траектории точки; для момента времени t_1 =1с. определить скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Зависимость $x=f_t(t)$ указана непосредственно на рисунках, а зависимость $y=f_2(t)$ дана в табл. К1 (для рис. 0-2 в столбце 2, для рис. 3—6 в столбце 3, для рис. 7—9 и столбце 4). Как и в задачах С1—С5, номер рисунка выбирается по предпоследней цифре шифра, а номер условия в табл. К1 - по последней.

Указания. Задача К1 относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в Декартовых координатах (координатный способ задания движения точки), а также формул, по которым определяются касательное и нормальное ускорения точки.

В данной задаче все искомые величины нужно определить только для момента времени t_1=1 с. В некоторых вариантах задачи при определении траектории или при последующих расчетах (для их упрощения) следует учесть известные из тригонометрии формулы: $\cos2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$; $\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

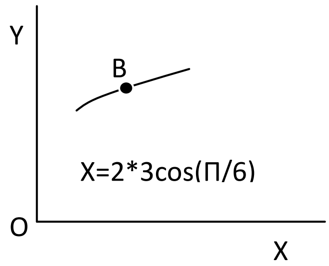


Рис.К1.0

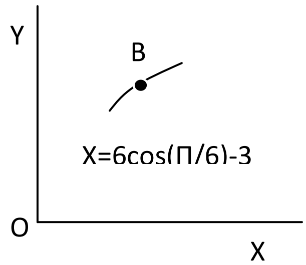


Рис.К.1.1

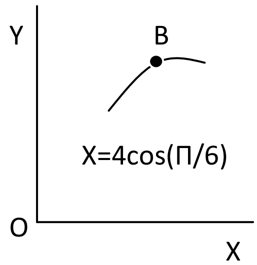


Рис.К.1.2

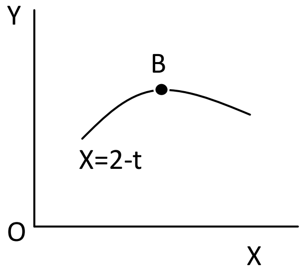


Рис.К 1.3

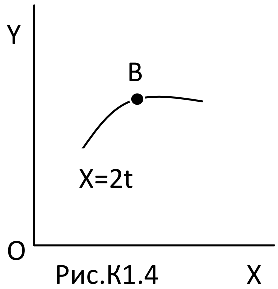


Рис.К1.4

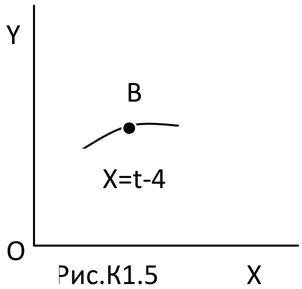


Рис.К1.5

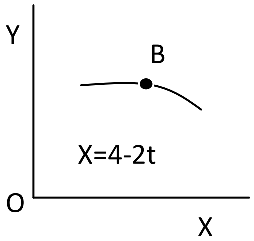


Рис.К1.6

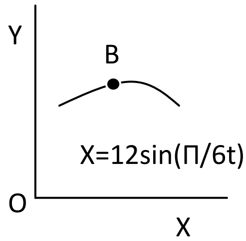


Рис.К1.7

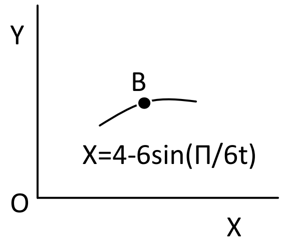


Рис.К1.8

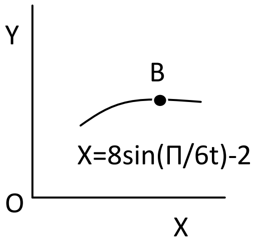


Рис.К1.9

Пример К1. Даны уравнения движения точки и плоскости ху:

$$x = -2\cos(\frac{\pi}{4}t) + 3; \quad y = 2\sin(\frac{\pi}{8}t) - 1$$

(x,y – в сантиметрах, t – в секундах).

Определить уравнение траектории точки, для момента времени t_1=lc. найти скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Решение. 1. Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время t. Поскольку t входит в аргументы тригонометрических функций, где один аргумент вдвое больше другого, используем формулу

$$\cos 2\alpha \quad 1-2\sin^2\alpha \quad \text{или} \quad \cos(\frac{\pi}{4}t) = 1-2\sin^2(\frac{\pi}{8}t).$$

Из уравнений движения находим выражения соответствующих функций и подставляем в полученное выше равенство. Получим:

$$\cos(\frac{\pi}{4}t) = \frac{3-x}{2}, \ \sin(\frac{\pi}{8}t) = \frac{y+1}{2};$$

следовательно,

$$\frac{3-x}{2} = 1 - 2\frac{(y+1)^2}{4}$$

Отсюда окончательно находим следующее уравнение траектории точки (параболы, рис. К1):

$$x = (y+1)^2 + 1.$$

2. Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{4}t);$$

$$\upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4}\cos(\frac{\pi}{8}t);$$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}$$

И при t=1 с. $\upsilon_{1x}=1{,}11$ см/с, $\upsilon_{1y}=0{,}73$ см/с, $\upsilon_1=1{,}33$

3. Аналогично найдем ускорение точки

$$a_x=\frac{d\upsilon_x}{dt}=\frac{\pi^2}{8}\cos(\frac{\pi}{4}t); \qquad a_y=\frac{d\upsilon_y}{dt}=-\frac{\pi^2}{32}\sin(\frac{\pi}{8}t);$$

$$a=\sqrt{{a_x}^2+{a^2}_y}$$

И при t= 1с

$$a_{1x}=0{,}87 \text{ см/с}^2, \qquad a_{1y}=-0{,}12 \text{ см/с}^2$$

$$a_1=0{,}88 \text{ см/с}^2$$

4. Касательное ускорение найдем, дифференцируя по времени равенство $\upsilon^2=\upsilon^2{}_x+\upsilon^2{}_y$

Получим:

$$2\upsilon\frac{d\upsilon}{dt}=2\upsilon_x\frac{d\upsilon_x}{dt}+2\upsilon_y\frac{d\upsilon_y}{dt}$$

$$a_\tau=\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{\upsilon_x a_x+\upsilon_y a_y}{\upsilon}$$

Числовые значения всех величин, входящих в правую часть выражения, определены и даются равенствами. Подставив эти числа, найдем сразу, что при t=1 с $a_\tau=0{,}66$ см/с^2.

5. Нормальное ускорение точки $a_n=\sqrt{a^2-a^2{}_\tau}$. Подставляя

сюда найденные числовые значения a_1 и $a_{1\tau}$, получим, что при t=1с $a_{1n}=0{,}58$ см/с^2.

6. Радиус кривизны траектории $\rho=\dfrac{\upsilon^2}{a_n}$. Подставляя сюда числовые значения υ_1 и a_{1n}, найдем, что при t=1 с $\rho=3{,}05$ см. Ответ: $\upsilon_1=1{,}33$ см/с, $a_1=0{,}88$ см/с^2, $a_{1\tau}=0{,}66$ см/с^2, $a_{1n}=0{,}58$ см/с^2, $\rho_1=3{,}05$ см.

2.4 Динамика материальной точки. Применение дифференциальных уравнений движения для решения прямой и обратной задач динамики.

Груз D массой m, получив в точке А начальную скорость υ_0, движется в изогнутой трубе ABC, расположенной в вертикальной плоскости; участки трубы или оба наклонные, или один горизонтальный, а другой наклонный (рис. Д1.0— Д1.9, табл. Д1).,

На участке *АВ* на груз кроме силы тяжести действуют постоянная сила $\vec{Q}$ (ее направление показано на рисунках) и сила сопротивления среды $\vec{R}$*,* зависящая от скорости $\vec{\upsilon}$ груза (направлена против движения); трением груза о трубу на участке *АВ* пренебречь.

В точке *В* груз, не изменяя своей скорости, переходит на участок ВС трубы, где на него кроме силы тяжести действуют сила трения (коэффициент трения груза о трубу f =0,2) и переменная сила $\vec{F}$, проекция которой F_x, на ось *х* задана в таблице.

Считая груз материальной точкой и зная расстояние АВ=*l* или время t_1 движения груза от точки *А* до точки *В,* найти закон движения груза на участке ВС, т. е. *x=f(t),* где *x=BD.*

Указания. Задача Д1 — на интегрирование дифференциальных уравнений движения точки (решение основной задачи динамики). Решение задачи разбивается на две части. Сначала нужно составить и проинтегрировать методом разделения переменных дифференциальное уравнение движения точки (груза) из участке *AB,* учтя начальные условия. Затем, зная время движения груза на участке *AB* или длину этого участка, определить скорость груза в точке B. Эта скорость будет начальной для движения- груза на участке *BC.* После этого нужно составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения груза на участке *BC* тоже с учетом начальных условий, ведя отсчет времени от момента, когда груз находится в точке *B,* и полагая в этот момент t=0. При интегрировании уравнения движения на участке *AB* в случае, когда задана длина *l* участка, целесообразно перейти к переменному *x,* учтя, что

$$\frac{d\upsilon_x}{dt} = \upsilon_x \frac{d\upsilon_x}{dt}.$$

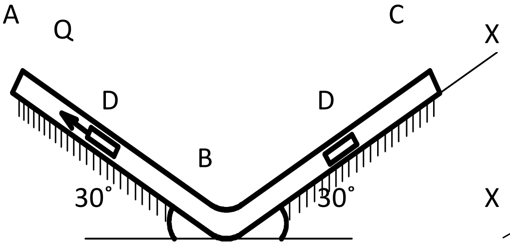


Рис.Д1.0

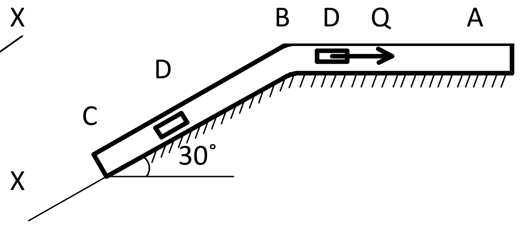


Рис.Д1.1

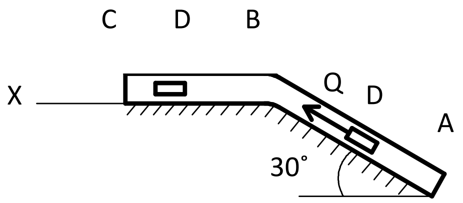


Рис Д1.2

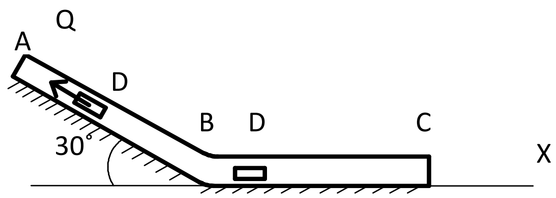


Рис.Д1.3

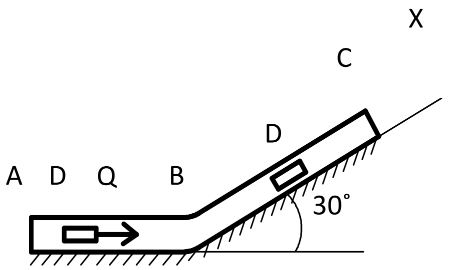


Рис.Д1.4

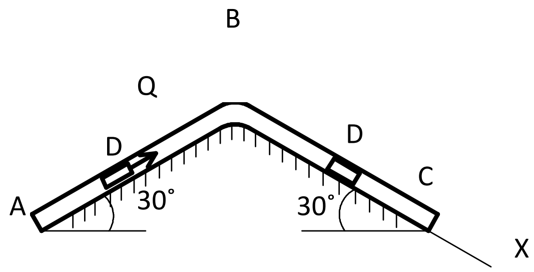


Рис.Д1.5

A D Q B

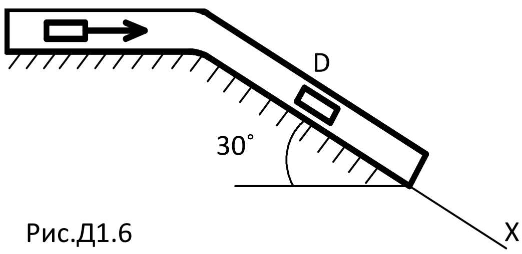


Рис.Д1.6

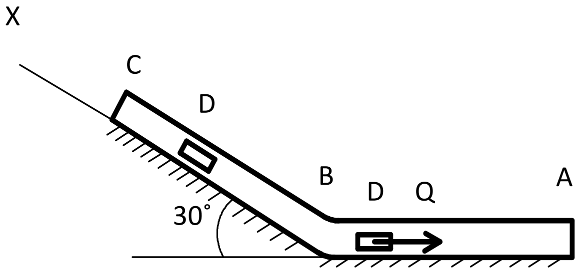
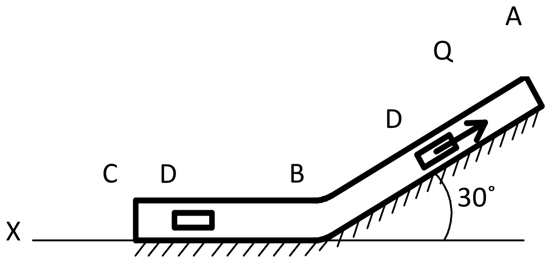


Рис.Д1.7



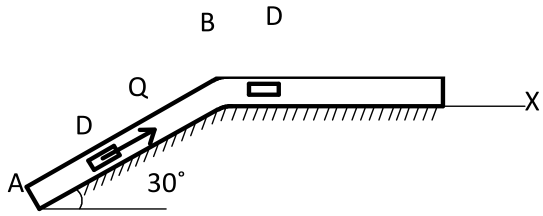


Рис.Д1.9

Рис.Д1.8

Пример Д1. На вертикальном участке *AB* трубы (рис. Д1) на груз D массой m действуют сила тяжести и сила сопротивления $\vec{R}$; движение от точки А, где $\upsilon_0 = 0$, до точки В длится t_1 с. На наклонном участке ВС на груз действуют сила трения (коэффициент трения груза о трубу равен *f*) и переменная сила F=F(t), заданная в ньютонах.

Дано: m=8 кг, $R = \mu\upsilon^2$, где μ=0,2 кг/м,

$\upsilon_0 = 0$, $t_1 = 2c$, *f*= 0,2, $F_x = 16\sin(4t)$, $\alpha = 30^\circ$

Определить: x=*f*(t) – закон движения груза на участке ВС.

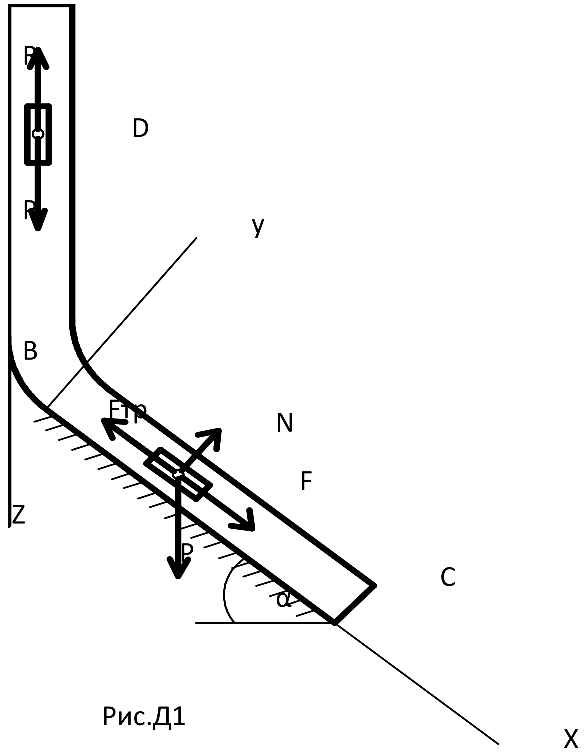


Рис.Д1

Решение: 1. Рассмотрим движение груза на участке *AB,* считая груз материальной точкой. Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $\vec{P} = m\vec{g}$ и $\vec{R}$. Проводим ось A_z и составляем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось;

$$m\frac{d\upsilon_z}{dt} = \sum F_{kz} \text{ или } m\frac{d\upsilon_z}{dt} = P_z + R_z .$$

Введем для сокращения записей обозначение

$$n^2 = \frac{mg}{\mu} = 400 \quad (n = 20\,\text{ì}\ /\text{ñ})$$

где при подсчете принято $g \approx 10\,\text{ì}\ /\text{ñ}^2$. Тогда, разделяя в уравнении (2) переменные и взяв затем от обеих частей равенства интегралы, получим

$$\frac{d\upsilon}{n^2 - \upsilon^2} = \frac{\mu}{m}dt \quad \text{и} \quad \frac{1}{2n}\ln\frac{n+\upsilon}{n-\upsilon} = \frac{\mu}{m}t + C_1$$

По начальным условиям при *t*=0 $\upsilon = \upsilon_0 = 0$, что дает $C_1 = (1/2n).\ln 1 = 0$. Введя еще одно обозначение

$$k = n\frac{\mu}{m} = 0{,}5\,c^{-1},$$

Получим из (4)

$$\ln\frac{n+\upsilon}{n-\upsilon} = 2kt \quad \text{и} \quad \frac{n+\upsilon}{n-\upsilon} = e^{2kt}.$$

Отсюда находим, что

$$\upsilon = n\frac{e^{2kt} - 1}{e^{2kt} + 1}.$$

Полагая здесь $t = t_1 = 2$ с и заменяя *n* и *k* их значениями (3) и (5), определим скорость υ_B груза в точке В (число е=2,7):

$$\upsilon_B = 20\frac{e^2-1}{e^2+1} = 15{,}2\ ì\ /ñ.$$

2. Рассмотрим движение груза на участке ВС; найденная скорость υ_B будет для движения на этом участке начальной скоростью $(\upsilon_0 = \upsilon_B)$. Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $\vec{P} = m\vec{g}$, $\vec{N}$, $\vec{F}_{TP}$ и $\vec{F}$. Проведем из точки B оси B_x и B_y и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось B_x:

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = P_x + N_x + F_{TPx} + F_x \quad \text{или} \qquad m\frac{d\upsilon_x}{dt} = mg\sin\alpha - F_{TP} + F_x,$$

где $F_{TP} = fN$. Для определения N составим уравнение в проекции на ось B_y. Так как $a_y = 0$, получим $0 = N - mg\cos\alpha$, откуда $N = mg\cos\alpha$. Следовательно, $F_{TP} = f\,mg\cos\alpha$; кроме того $F_x = 16\sin(4t)$ и уравнение (8) примет вид

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) + 16\sin(4t).$$

Разделив обе части равенства на m, вычислим $g(\sin\alpha - f\cos\alpha) = g(\sin 30^\circ - 0{,}2\cos 30^\circ)$ =3,2; 16/m=2 и подставим эти значения в (9). Тогда получим

$$\frac{d\upsilon_x}{dt} = 3{,}2 + 2\sin(4t)$$

Умножая обе части уравнения (10) на *dt* и интегрируя, найдем

$$\upsilon_x = 3{,}2t - \frac{1}{2}\cos(4t) + C_2$$

Будем теперь отсчитывать время от момента, когда груз находится в точке В, считая в этот момент t=0. Тогда при $t = 0$ $\upsilon = \upsilon_0 = \upsilon_B$, где υ_B дается равенством (7). Подставляя эти величины в (11), получим

$$C_2 = \upsilon_B + 0{,}5\cos 0 = 15{,}2 + 0{,}5 = 15{,}7.$$

При найденном значении C_2 уравнение (11) дает

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = 3{,}2t - 0{,}5\cos(4t) + 15{,}7.$$

Умножая обе части на *dt* и снова интегрируя, найдем

$$x = 1{,}6t^2 - 0{,}13\sin(4t) + 15{,}7t + C_3.$$

Так как при t=0 x=0, то $C_3 = 0$ и окончательно искомый закон движения груза будет

$$x = 1{,}6t^2 + 15{,}7t - 0{,}13\sin(4t),$$

Где x – в метрах, t – в секундах.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ВОПРОСОВ

3.1. Частные случаи приведения систем сил

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

1)Моментом силы называется векторное произведение радиус вектора на силы, где радиус вектор кратчайшее расстояние от оси вращения до точки приложения силы

2) Моментом силы называется векторное произведение плеча силы на значение силы, перпендикулярное оси вращения, где Р-плечо силы - это кратчайшее расстояние от оси вращения до прямой, вдоль которой действует сила

3) Моментом силы называется векторное произведение, где радиус вектор кратчайшее расстояние от оси вращения до точки приложения силы, а Ft проекция F_ на направление, перпендикулярное радиус-вектору

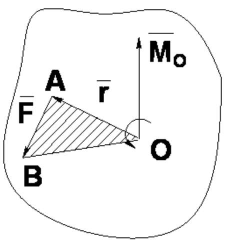
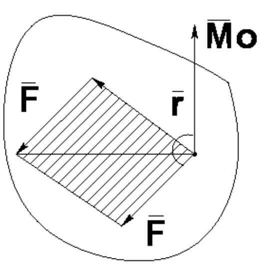
Если тело имеет неподвижную ось, т. е. закрепленную в неподвижных подшипниках, то при любой системе действующих сил тело может вращаться лишь около этой оси. Но не всякая сила может вызвать вращение. Например, сила, параллельная оси (Fy) не вызовет вращения; она лишь стремится сдвинуть тело вдоль оси и в конечном счете уравновешивается реакцией подшипников. Но вот сила, находящаяся в плоскости, перпендикулярной к оси, может при некоторых условиях вызвать вращение.

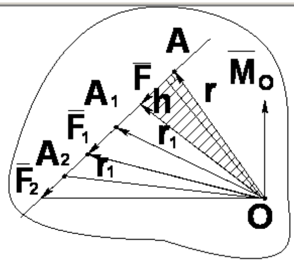
Две антипараллельные силы одинаковой величины, приложенные к разным точкам, но направленные не по одной прямой, называют парой сил. Пара не имеет равнодействующей и представляет собой самостоятельный динамический элемент.

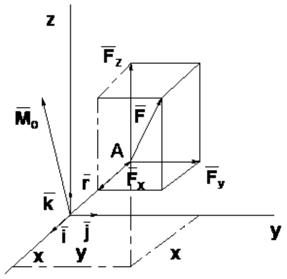
Момент силы относительно центра

Моментом силы F относительно некоторого неподвижного центра О называется вектор, расположенный перпендикулярно к плоскости, проходящей через вектор силы и центр О, направленный в ту сторону, чтобы смотря с его конца можно было видеть поворот силы F относительно центра О против часовой стрелки.

Свойства момента силы относительно центра:

	1) Модуль момента силы относительно центра может быть выражен удвоенной площадью треугольника **ОАВ** $M_O = 2S_{\Delta OAB}$ (1.1) 2) Момент силы относительно центра **<u>равен нулю</u>** в том случае, если линия действия силы проходит через эту точку, то есть *h = 0*.
	3) Если из точки **О** в точку приложения силы **А** провести радиус вектор , то вектор момента силы можно выразить векторным произведением $\overline{M}_o = \overline{r} \times \overline{F}$ (1.2)

	4) При переносе силы по линии ее действия вектор ее момента относительно данной точки не изменяется.

	5) Если через центр ***O*** провести оси координат ***Oxyz*** то выражение (4.2) позволяет вычислить момент $\boldsymbol{M_O}$ аналитически относительно координатных осей. $$\overline{M}_o = \overline{r} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$ $$\left.\begin{aligned} M_x &= yZ - zY \\ M_y &= zX - xZ \\ M_z &= xY - yX \end{aligned}\right\} \qquad (1.3)$$

Если к твердому телу приложено несколько сил, лежащих в одной плоскости, можно вычислить алгебраическую сумму моментов этих сил относительно любой точки этой плоскости

$$M_{10} = F_1 h_1; \quad M_{20} = F_2 h_2 \dots \quad M_{50} = F_5 h_5$$

Момент $\boldsymbol{M_O}$, равный алгебраической сумме моментов данной системы относительно какой-либо точки в той же плоскости, называют <u>главным моментом системы сил</u> относительно этой точки.

Момент силы относительно оси

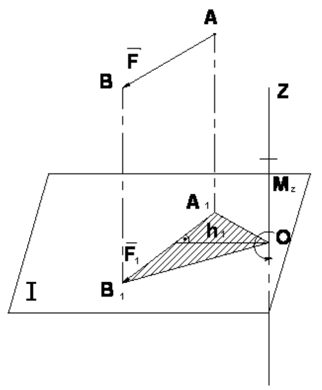
Чтобы определить момент силы относительно оси необходимо:

1) провести плоскость, перпендикулярную к оси Z;
2) определить точку *O* пересечения оси с плоскостью;
3) спроецировать ортогонально силу *F* на эту плоскость;
4) найти момент проекции силы *F* относительно точки O пересечения оси с плоскостью.

<u>Правило знаков:</u>

$$M_z = \pm F_1 h_1$$

Момент силы относительно оси считается <u>положительным</u>, если, смотря навстречу оси Z**,** можно видеть проекцию $\overline{F}_1$, стремящейся вращать плоскость ***I*** вокруг оси Z в сторону, противоположную вращению часовой стрелки.



Свойства момента силы относительно оси

1) Момент силы относительно оси изображается отрезком, отложенным по оси Z от точки О в положительном направлении, если $M_z > 0$ и в отрицательном направлении, если $M_z < 0$.

2) Значение момента силы относительно оси может быть выражено удвоенной площадью ΔOA_1B_1

$$M_z = \pm F_1 h_1 \qquad (1.5)$$

3) Момент силы относительно оси <u>равен нулю</u> в двух случаях:

- если $F_1 = 0$, то есть линия действия силы параллельна оси;
- если $h_1 = 0$, то есть линия действия силы пересекают ось.

Пара сил. Векторный и алгебраический момент пары сил

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

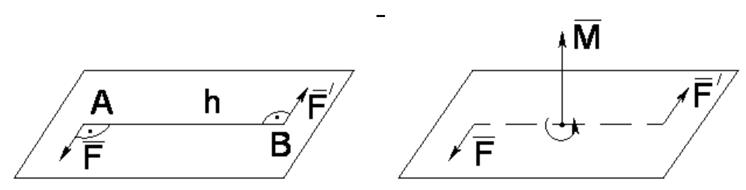
Система двух равных по модулю, параллельных и противоположно направленных сил $\overline{F}$ и $\overline{F}'$, называется **<u>парой сил.</u>**

Плоскость, в которой находятся линии действия сил $\overline{F}$ и $\overline{F}'$, называется **<u>плоскостью действия пары сил.</u>**

Кратчайшее расстояние *h*между линиями действия сил, составляющих пару, называется **<u>плечом пары сил</u>**.

<u>Момент пары сил</u> определяется произведением модуля одной из сил пары на плечо.

$$M = F \cdot h \,, \quad (H \cdot м) \qquad (1.6)$$



<u>Правило знаков</u>

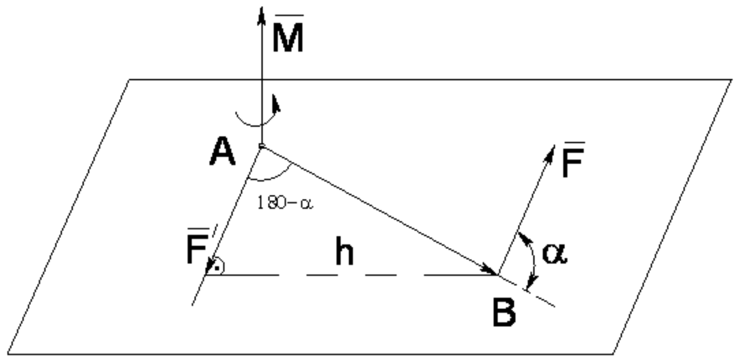
Вектор момента М пары $\overline{F}$ и $\overline{F}'$ направляют перпендикулярно к плоскости действия пары сил в такую сторону, что бы смотря навстречу этому вектору, видеть пару сил стремящейся вращать плоскость ее действия в сторону, обратную вращению часовой стрелки.

4. Свойства пар сил на плоскости

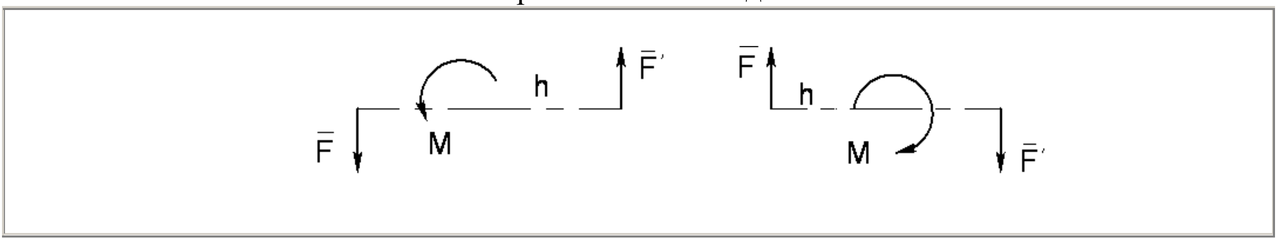
<u>Свойство 1</u>. Вектор-момент M пары $\left(\overline{F}, \overline{F}'\right)$ по модулю и направлению равен векторному произведению радиуса вектора AB на ту из сил этой пары, к началу которой направлен радиус-вектор AB, то есть

$$\overline{M} = A\overline{B} \times \overline{F} \tag{1.7}$$

$$\left(\overline{AB} \times \overline{F}\right) = AB \cdot F \sin\alpha = F \cdot h = \left|\overline{M}\right|$$



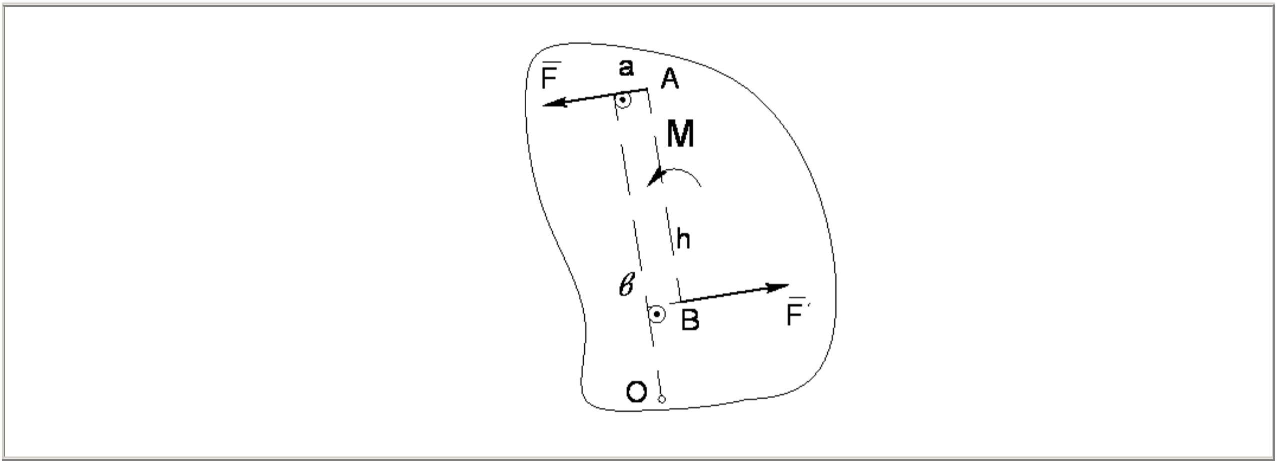
Если пары сил лежат в одной плоскости



$$M = \pm F \cdot h.$$

<u>Свойство 2</u>. Главный момент сил, составляющих пару относительно произвольной точки на плоскости действия пары, не зависит от положения этой точки и равняется моменту этой пары сил.

$$M_o = M_o(\overline{F}) + M_o(\overline{F}') = F \cdot Oa - F \cdot Oв = F(Oa - Oв) = F \cdot h$$



Условия равновесия систем сил

Из основных аксиом статики следуют элементарные операции над силами:

1) силу можно переносить вдоль линии действия;

2) силы, линии действия которых пересекаются, можно складывать по правилу параллелограмма (по правилу сложения векторов);

3) к системе сил, действующих на твёрдое тело, можно всегда добавить две силы, равные по величине, лежащие на одной прямой и направленные в противоположные стороны.

Элементарные операции не изменяют механического состояния системы.

Назовём две системы сил *эквивалентными,* если одна из другой может быть получена с помощью элементарных операций (как в теории скользящих векторов).

Система двух параллельных сил, равных по величине и направленных в противоположные стороны, называется *парой сил* (рис.12).

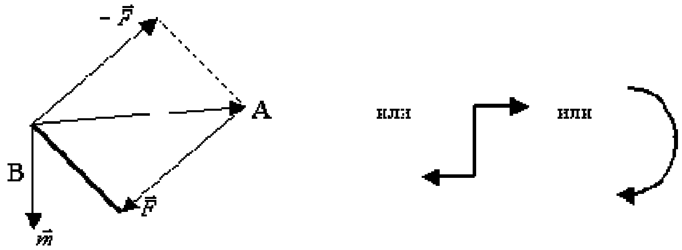


Рис.12.

Момент пары сил $\vec{m}$ - вектор, по величине равный площади параллелограмма, построенного на векторах пары, и направленный ортогонально к плоскости пары в ту сторону, откуда вращение, сообщаемое векторами пары, видно происходящим против хода часовой стрелки.

$\vec{m} = \overrightarrow{BA} \times \vec{F}$, то есть момент силы $\vec{F}$ относительно точки B.

Пара сил полностью характеризуется своим моментом.

Пару сил можно переносить элементарными операциями в любую плоскость, параллельную плоскости пары; изменять величины сил пары обратно пропорционально плечам пары.

Пары сил можно складывать, при этом моменты пар сил складываются по правилу сложения (свободных) векторов.

Приведение системы сил, действующих на твёрдое тело, к произвольной точке (центру приведения) - означает замену действующей системы более простой: системой трёх сил, одна из которых проходит через наперёд заданную точку, а две другие представляют пару.

Доказывается с помощью элементарных операций (рис.13).

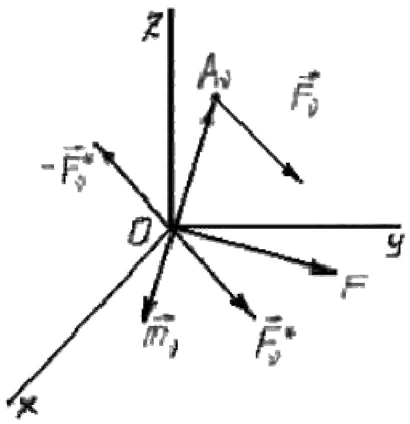


Рис.13.

$$\left.\begin{array}{l} A_\nu(x_\nu, y_\nu, z_\nu) \\ \vec{F}_\nu(X_\nu, Y_\nu, Z_\nu) \\ \vec{F}^*_\nu, -\vec{F}^*_\nu \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Система сходящихся сил $\vec{F}^*_\nu$ и система пар сил $\vec{m}_\nu$.

$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$ - результирующая сила $\vec{F}$.

$\vec{m}_0 = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \ldots + \vec{m}_n$ - результирующая пара $\vec{m}_0$.Что и требовалось показать.

Две системы сил будут *эквивалентны* тогда и только тогда, когда обе системы приводятся к одной результирующей силе и одной результирующей паре, то есть при выполнении условий:

$$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_k \qquad \vec{F} = \vec{F}`,$$

$$\vec{F}_1`, \vec{F}_2`, \ldots, \vec{F}_r` \; \vec{m}_0 = \vec{m}_0`$$

Общий случай равновесия системы сил, действующих на твёрдое тело

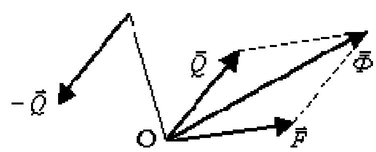


Рис.14.

Приведём систему сил к (рис.14):

$\vec{F}$ - результирующая сила через начало координат;

$\{\vec{Q}, -\vec{Q}\}$ - результирующая пара, причём, $\vec{Q}$ через точку О.

$\vec{\Phi} = \vec{F} + \vec{Q}$

То есть привели к $\vec{\Phi}$ и $\vec{Q}$ - две силы, одна из которых $(\vec{\Phi})$ проходит через заданную точку О.

Равновесие, если $\vec{\Phi}$ и $-\vec{Q}$ на одной прямой, равны, направлены противоположно (аксиома 2).

Тогда $-\vec{Q}$ проходит через точку О, то есть $\vec{m}_0 = 0$.

Далее: $\vec{F} = 0$, так как остаётся только эта сила.

Итак, общие условия равновесия твёрдого тела:

$$\vec{F} = 0, \quad \vec{m} = 0.$$

Эти условия справедливы для произвольной точки пространства.

Методы преобразования систем сил

Особенности метода преобразования систем сил как способа раскрытия статической неопределимости стержневых и рамных систем. Некорректные преобразования заданной системы в основные могут быть по причине кинематической изменяемости. Примером служит расчет рамы, суммарной эпюры изгибающих моментов.

Составление и использование уравнений равновесия.

РАВНОВЕСИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Для равновесия плоской системы сил, приложенных к твердому телу и не пересекающихся в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор R этих сил и их главный момент относительно произвольной точки O, лежащей в плоскости действия этих сил, были равны нулю, т. е.

$$\left.\begin{aligned}&\sum \overline{F}_i = 0,\\&\sum m_O(\overline{F}_i) = 0.\end{aligned}\right\}$$

В координатной форме эти условия выражаются следующими тремя уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}&\sum F_{ix} = 0,\\&\sum F_{iy} = 0,\\&\sum m_O(\overline{F}_i) = 0.\end{aligned}\right\}$$

Условия равновесия плоской системы сил, расположенных как угодно на плоскости, можно выразить еще в двух других видах.

- Алгебраическая сумма моментов сил относительно трех произвольных точек A, B, C, не лежащих на одной прямой, равна нулю, т. е.

$$\left.\begin{aligned}&\sum m_A(\overline{F}_i) = 0,\\&\sum m_B(\overline{F}_i) = 0,\\&\sum m_C(\overline{F}_i) = 0.\end{aligned}\right\}$$

- Алгебраическая сумма моментов всех сил относительно двух произвольных точек A и B равна нулю и сумма проекций этих сил на какую-либо ось, не перпендикулярную к прямой, соединяющей точки A и B, равна нулю, т. е.

$$\left.\begin{aligned}&\sum m_A(\overline{F}_i) = 0.\\&\sum m_B(\overline{F}_i) = 0,\\&\sum F_{ix} = 0.\end{aligned}\right\}$$

В частном случае, если все силы плоской системы параллельны, то условия равновесия (20) таких сил выражаются не тремя, а двумя уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}&\sum F_{ix} = 0,\\&\sum m_O(\overline{F}_i) = 0,\end{aligned}\right\}$$

причем ось $\boxed{2}$ параллельна данным силам.

Условия равновесия плоской системы параллельных сил можно выразить и в другой форме:

$$\left.\begin{aligned}&\sum m_A(\overline{F}_i) = 0,\\&\sum m_B(\overline{F}_i) = 0,\end{aligned}\right\}$$

причем прямая AB не параллельна данным силам.

Задачи на равновесие плоской системы сил можно разбить на два основных типа, а именно:

1) задачи на равновесие плоской системы параллельных сил;

2) задачи на равновесие плоской системы сил, расположенных как угодно.

Задачи второго типа можно еще классифицировать по характеру связей, наложенных на рассматриваемое тело, подразделяя их на следующие две группы:

а) задачи, в которых линии действия реакций всех связей известны;

б) задачи, в которых линия действия реакции одной из связей неизвестна.

Чтобы задача была статически определима, число неизвестных реакций должно быть не больше трех, так как при равновесии твердого тела под действием плоской системы сил в общем случае можно составить три уравнения равновесия.

При составлении уравнений равновесия за центр моментов следует выбирать такую точку, через которую проходят линии действия двух неизвестных сил, тогда в уравнение моментов относительно этой точки войдет только одна неизвестная сила и ее легко будет определить из этого уравнения.

Если данное тело находится в равновесии под действием плоской системы параллельных сил, то число неизвестных реакций не должно быть больше двух, так как в этом случае мы имеем только два уравнения равновесия.

3.2. Центр тяжести. Способы определения положения центра тяжести

На каждую частицу тела, находящегося вблизи поверхности Земли, действует направленная вертикально вниз сила, которая называется *силой тяжести*. Силы тяжести каждой частицы тела, строго говоря, направлены по радиусам к центру Земли и не являются параллельными. Но для тел, размеры которых малы по сравнению с размерами Земли, непараллельность настолько незначительна, что в расчетах с большой точностью силы тяжести их частиц можно считать параллельными, сохраняющими свои значения, точки приложения и параллельность при любых поворотах тела. Поэтому, обозначив силу тяжести частицы через Рк , можно, согласно формулам $\bar{r}_C = \dfrac{\sum_{k=1}^{N} P_k \bar{r}_k}{\sum_{k=1}^{N} P_k}$ и

$$x_C = \frac{1}{P}\sum_{k=1}^{N} P_k x_k\ ;\quad y_C = \frac{1}{P}\sum_{k=1}^{N} P_k y_k\ ;\quad z_C = \frac{1}{P}\sum_{k=1}^{N} P_k z_k$$

, найти точку С, которая неизменно связана с телом и называется центром системы параллельных сил тяжести. Таким образом, центром тяжести твердого тела называется центр системы параллельных сил тяжести частиц данного тела. Точка С — это геометрическая точка, она может и не принадлежать телу, но она всегда с ним связана, например центр тяжести баскетбольного мяча, кольца и др. Выразим силу тяжести (вес) частицы тела через ее объем V. Тогда величина

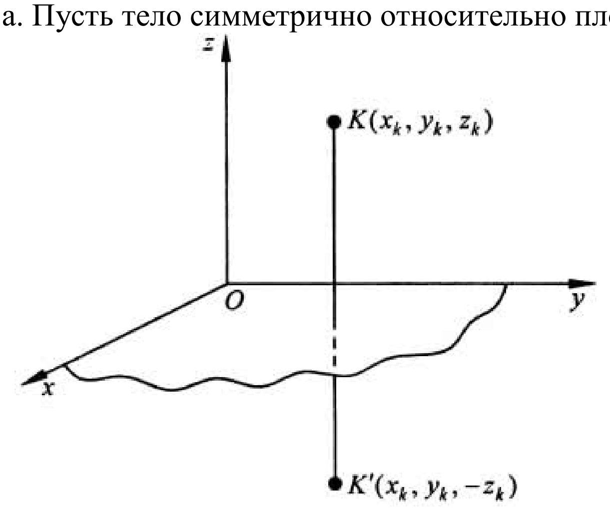
$\gamma = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\Delta P}{\Delta V} = \dfrac{dP}{dV}$ называется *удельным весом*, а величина $\rho = \gamma / g$ - плотностью тела в данной точке. ("гамма"-Н/м3) ("ро"-Н*с2/м4)

Методы нахождения центра тяжести.

1) Метод симметрии.

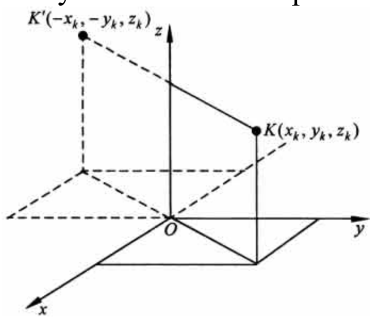
Покажем, что если однородное тело имеет плоскость, ось или центр материальной симметрии, то его центр тяжести находится соответственно в плоскости, на оси или в центре симметрии.

а. Пусть тело симметрично относительно плоскости Oxy



Тогда вследствие симметрии каждому элементу К тела объемом $\Delta V_k(x_k, y_k, z_k)$ будет соответствовать элемент К' того же объема с координатами $(x_k, y_k, -z_k)$. Поэтому статический момент объема $\sum_{k=1}^{N} z_k \Delta V_k = 0$ и координата $z_C = \sum_{k=1}^{N} z_k \Delta V_k / V = 0$. Следовательно, центр тяжести тела будет лежать в плоскости симметрии Oxy.

б. Пусть тело симметрично относительно оси Oz.

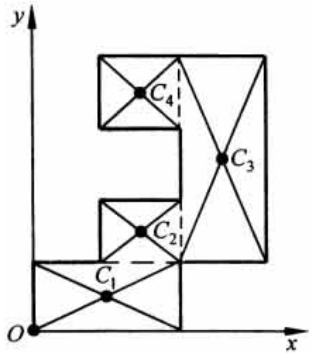


Тогда всякому элементу К тела объемом ΔV_k с координатами (x_k, y_k, z_k) будет соответствовать такой же по объему элемент К', расположенный симметрично относительно оси Oz и имеющий координаты $(-x_k, -y_k, z_k)$. Поэтому статические моменты $\sum_{k=1}^{N} x_k \Delta V_k = 0$, $\sum_{k=1}^{N} y_k \Delta V_k = 0$, $\sum_{k=1}^{N} z_k \Delta V_k \neq 0$ и, следовательно, координаты $x_C = \frac{\sum_{k=1}^{N} x_k \Delta V_k}{V} = 0$, $y_C = \frac{\sum_{k=1}^{N} y_k \Delta V_k}{V} = 0$, $z_C = \frac{\sum_{k=1}^{N} z_k \Delta V_k}{V} \neq 0$. Таким образом, центр тяжести будет находится на оси симметрии.

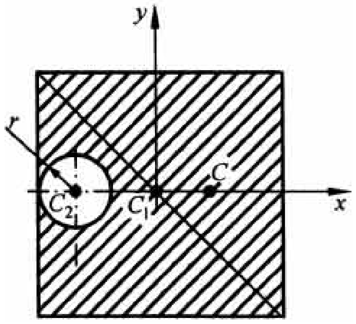
в. Пусть тело имеет центр симметрии, который примем за начало координат. Тогда всякой частице тела объемом ΔV_k, определяемой радиус-вектором rк, будет соответствовать частица такого же объема с радиус-вектором (-rк), симметричная ей относительно центра О. Поэтому $\bar{r}_O = \sum_{k=1}^{N} \bar{r}_k \Delta V_k = 0$. Следовательно, центр тяжести будет находиться в центре симметрии. Например, центры тяжести однородных куба, сферы, кольца, прямоугольной или круглой пластины лежат в геометрическом центре этих тел.

2) Метод разбиения.

Этот метод основан на применении формул $\bar{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^{N} P_k \bar{r}_k}{\sum_{k=1}^{N} P_k}$ и $x_C = \frac{1}{P}\sum_{k=1}^{N} P_k x_k$; $y_C = \frac{1}{P}\sum_{k=1}^{N} P_k y_k$; $z_C = \frac{1}{P}\sum_{k=1}^{N} P_k z_k$. Его используют, когда тело можно разбить на ряд частей, центры тяжести которых известны из условий симметрии. Метод разбиения можно наглядно проиллюстрировать с помощью рисунка.



Расположив тело в системе координат, разделив его мысленно на отдельные части, веса которых P1, P2, P3, P4, а центры тяжести известны, вычислим вес тела и, согласно формулам $x_C = \frac{1}{P}\sum_{k=1}^{N} P_k x_k$; $y_C = \frac{1}{P}\sum_{k=1}^{N} P_k y_k$; $z_C = \frac{1}{P}\sum_{k=1}^{N} P_k z_k$, координаты центра тяжести C всего тела. Если тело имеет вырез, причем известны центр тяжести тела без выреза и центр тяжести вырезанного тела, то для определения координат центра тяжести используют метод отрицательных масс (частный случай метода разбиения).



На рисунке изображена квадратная пластина, сторона которой a. В пластине выполнено круглое отверстие с радиусом r=0,2a и координатами центра x2=-0,3a; y2=0. Координаты центра тяжести C, пластины без отверстия x1=0, y1=0. Рассмотрим два тела: пластину без отверстия и диск, соответствующий вырезанному отверстию. При использовании формул $x_C = \frac{1}{P}\sum_{k=1}^{N} P_k x_k$; $y_C = \frac{1}{P}\sum_{k=1}^{N} P_k y_k$; $z_C = \frac{1}{P}\sum_{k=1}^{N} P_k z_k$ вес диска будем считать отрицательным.

Тогда

$$P = p(a^2 - \pi r^2);$$

$$x_C = \frac{1}{P}(P_1 x_1 - P_2 x_2) = \frac{p}{P}\left[a^2 \cdot 0 - \pi r^2(-0{,}3a)\right] = \frac{0{,}3\pi a r^2}{a^2 - \pi r^2};$$

$$y_C = 0,$$

где p — вес единицы площади пластины.

3.3. Трение скольжения и качения.

Силой трения называют силу, которая возникает при движении одного тела по поверхности другого. Она всегда направлена противоположно направлению движения. Сила трения прямо пропорциональна силе нормального давления на трущиеся поверхности и зависит от свойств этих поверхностей. Законы трения связаны с электромагнитным взаимодействием, которое существует между телами.

Различают трение внешнее и внутреннее.

Внешнее трение возникает при относительном перемещении двух соприкасающихся твердых тел (трение скольжения или трение покоя).

Внутреннее трение наблюдается при относительном перемещении частей одного и того же сплошного тела (например, жидкость или газ).

Различают сухое и жидкое (или вязкое) трение.

Сухое трение возникает между поверхностями твердых тел в отсутствие смазки.

Жидким (вязким) называется трение между твердым телом и жидкой или газообразной средой или ее слоями.

Сухое трение, в свою очередь, подразделяется на трение скольжения и трение качения.

Рассмотрим законы сухого трения (рис. 4.5).

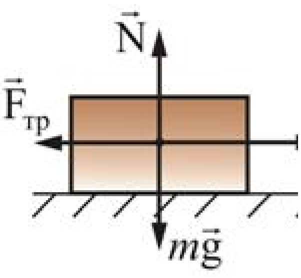


Рис. 4.5

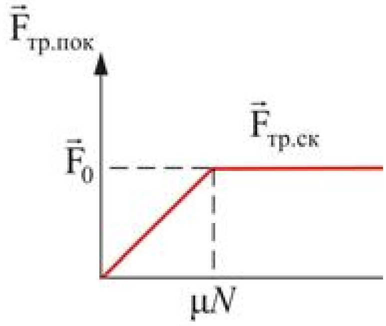


Рис. 4.6

Подействуем на тело, лежащее на неподвижной плоскости, внешней силой $\vec{F}_{дв}$, постепенно увеличивая ее модуль. Вначале брусок будет оставаться неподвижным, значит, внешняя сила $\vec{F}_{дв}$ уравновешивается некоторой силой $\vec{F}_{тр}$, направленной по касательной к трущейся поверхности, противоположной силе $\vec{F}_{дв}$. В этом случае $\vec{F}_{тр}$ и есть сила трения покоя.

Установлено, что максимальная сила трения покоя не зависит от площади соприкосновения тел и приблизительно пропорциональна модулю *силы нормального давления* N:

$$F_{тр.пок} = \mu_0 N,$$

μ_0 – *коэффициент трения покоя*, зависящий от природы и состояния трущихся поверхностей.

Когда модуль внешней силы, а следовательно, и модуль силы трения покоя превысит значение F_0, тело начнет скользить по опоре – трение покоя $F_{тр.пок}$ сменится трением скольжения $F_{ск}$ (рис. 4.6):

$$F_{тр} = \mu N, \qquad (4.4.1)$$

где μ – коэффициент трения скольжения.

Трение качения возникает между шарообразным телом и поверхностью, по которой оно катится. Сила трения качения подчиняется тем же законам, что и сила трения скольжения, но коэффициент трения μ ; здесь значительно меньше.

Подробнее рассмотрим силу трения скольжения на наклонной плоскости (рис. 4.7).

На тело, находящееся на наклонной плоскости с сухим трением, действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, нормальная сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила сухого трения $\vec{F}_{тр}$. Сила $\vec{F}$ есть равнодействующая сил $m\vec{g}$ и $\vec{N}$; она направлена вниз, вдоль наклонной плоскости. Из рис. 4.7 видно, что

$$F = mg \sin \alpha, \qquad N = mg \cos \alpha.$$

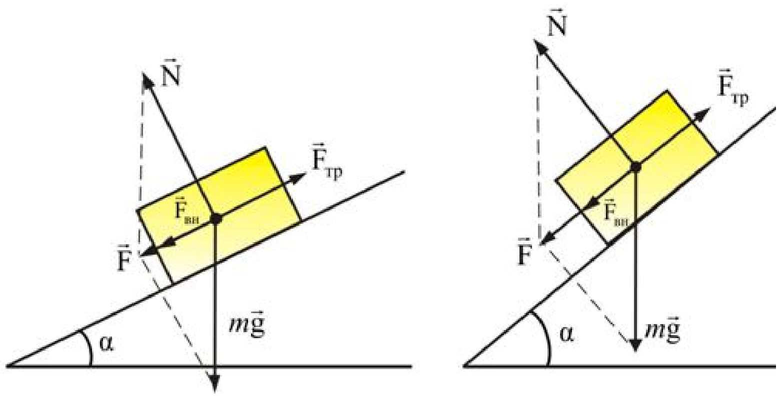


Рис. 4.7

Если $F < (F_{тр.})_{max} = \mu N$ – тело остается неподвижным на наклонной плоскости. Максимальный угол наклона α определяется из условия $(F_{тр})_{max} = F$ или $\mu\, mg \cos\alpha = mg \sin\alpha$, следовательно, $\mathrm{tg}\, \alpha_{max} = \mu$, где μ – коэффициент сухого трения.

$$F_{тр} = \mu N = mg \cos\alpha,$$

$$F = mg \sin\alpha.$$

При $\alpha > \alpha_{max}$ тело будет скатываться с ускорением

$$a = g\,(\sin\alpha - \mu \cos\alpha),$$

$$F_{ск} = ma = F - F_{тр}.$$

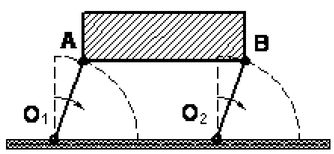
Если дополнительная сила $F_{вн}$, направленная вдоль наклонной плоскости, приложена к телу, то критический угол α_{max} и ускорение тела будут зависеть от величины и направления этой внешней силы.

3.4. Составное движение точки

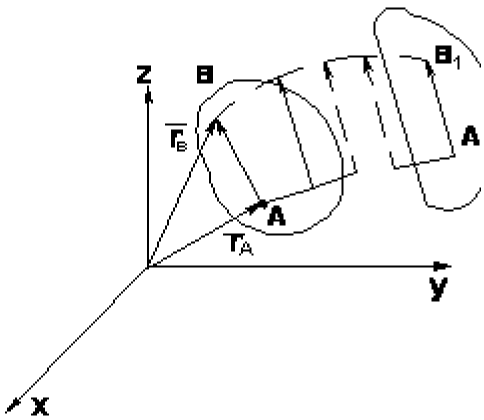
1. Поступательное движение твердого тела

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая проведенная в этом теле, перемешается, оставаясь параллельной самой себе.

Поступательное движение не значит прямолинейное:



ТЕОРЕМА: при поступательном движении все точки тела описывают одинаковые (при наложении совпадающие) траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.



$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB} \quad (3.1)$$

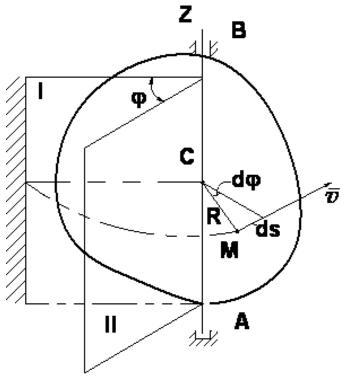
$$\frac{d\,r_B}{dt} = \frac{d\,r_A}{dt} + \frac{d(\overline{AB})}{dt}$$

$$\bar{v}_A = \bar{v}_B \quad (3.2)$$

$$\frac{d\bar{v}_A}{dt} = \frac{d\bar{v}_B}{dt} \Rightarrow \bar{a}_A = \bar{a}_B$$

2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

Вращательным называется такое движение твердого тела, при котором во все время движения какие-либо две точки тела остаются неподвижными (проходящая через эти неподвижные точки прямая называется *осью вращения*), а все остальные точки описывают траектории, представляющие собой окружности, плоскости которых перпендикулярны к оси вращения, а центры лежат на этой оси.



$$\varphi = f(t) \quad (3.3)$$

$$\omega_{ср} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

$$\omega = \underbrace{\lim}_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{или} \quad \omega = \dot{\varphi}$$

(3. 4)

$$\varepsilon_{ср} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\varepsilon = \underbrace{\lim}_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad \text{или}$$

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \quad (3.5)$$

<u>Примеры:</u>

Равномерное вращение
(ω = const)

Равнопеременное вращение
(ε= const)

$d\varphi = \omega dt$

$\varphi = \omega t$

$\omega = \varphi / t$

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \approx 0{,}1\, n$$

$$d\,\omega = \varepsilon\, d\,t$$

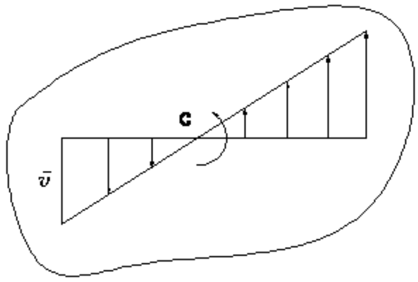
$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$$

$$\frac{d\,\varphi}{d\,t} = \omega_0 + \varepsilon t$$

$$\Rightarrow d\,\varphi = \omega_0\, d\,t + \varepsilon t\, d\,t$$

$$\varphi = \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}$$

3. Скорости и ускорения точек вращающегося твердого тела



Вращательная скорость точки

$$v = \frac{d\,s}{d\,t} = R\frac{d\,\varphi}{d\,t}$$

$v = R\,\omega$ (3. 6)

Модуль вращательной скорости точки твердого тела равен произведению расстояния от точки до оси вращения на угловую скорость тела

Ускорение точки

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad (\rho = R)$$

$$a_\tau = R\frac{d\,\omega}{dt}, \quad a_n = \frac{R^2\omega^2}{R}$$

или $a_\tau = R\varepsilon = a_\varepsilon$ (3.7) - *вращательное ускорение*

$a_n = R\omega^2 = a_\omega$ (3.8) – *центростремительное ускорение*

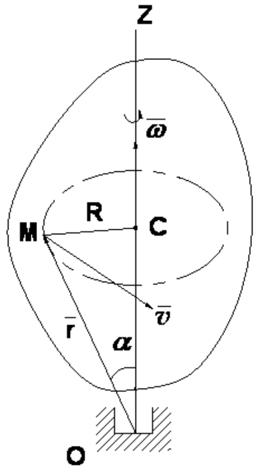
$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{R^2\omega^2 + R^2\omega^4}$ (3.9) – *полное ускорение*

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

$$tg\,\mu = \frac{|a_\tau|}{a_n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \qquad (3.10)$$

4. Векторные выражения вращательной скорости, вращательного и центростремительного ускорений.

Формулы Эйлера.



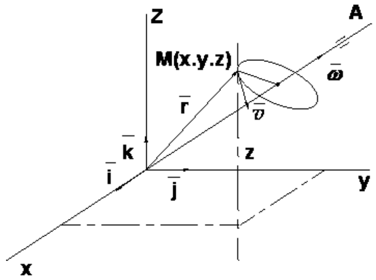
$$\overline{v} = \overline{\omega}\times\overline{r} \quad (3.11)$$

$$\left.\begin{aligned} v &= R\cdot\omega = \omega r\cdot \sin\alpha \\ |\overline{\omega}\times\overline{r}| &= \omega\cdot r\cdot \sin\alpha \end{aligned}\right\}$$

$$\overline{v} = \overline{\omega}\times\overline{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}(\omega_y z - \omega_z y) + \bar{j}(\omega_z\cdot x - \omega_x z) +$$

$$+ \bar{k}(\omega_x\cdot y - \omega_y x)$$



$$\left.\begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x \end{aligned}\right\} \quad (3.12)$$

- *формулы Эйлера*

Векторные выражения вращательного и центростремительного ускорения точки

$$\overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d\overline{\omega}}{dt}\times\overline{r} + \overline{\omega}\times\frac{d\overline{r}}{dt}$$

$$\frac{d\overline{\omega}}{dt} = \overline{\varepsilon}; \quad \frac{d\overline{r}}{dt} = \overline{v} = \overline{\omega}\times\overline{r}$$

$$\overline{a} = \overline{\varepsilon}\times\overline{r} + \overline{\omega}\times\overline{v}$$

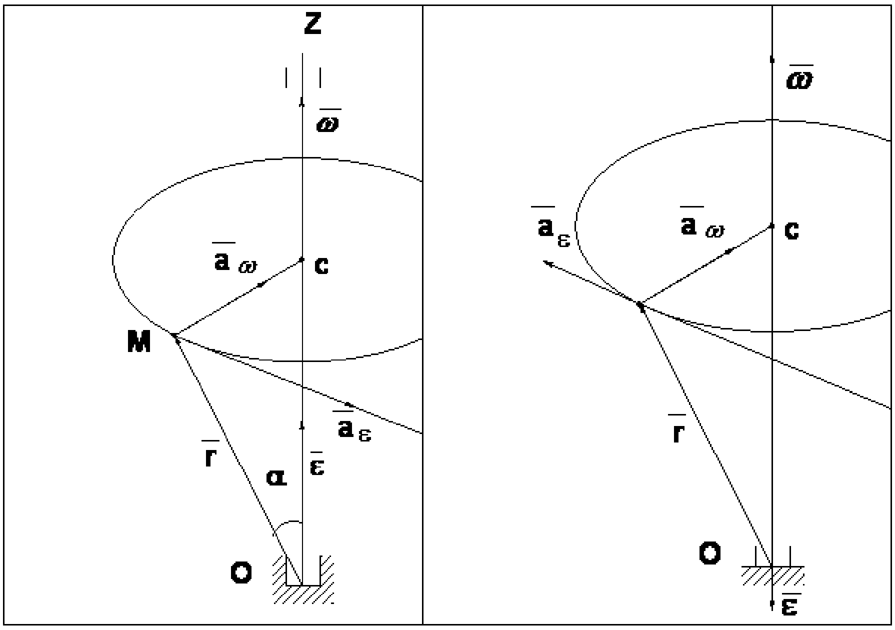
$$\overline{a} = \overline{\varepsilon}\times\overline{r} + \overline{\omega}\times(\overline{\omega}\times\overline{r})$$ - *полное ускорение точки*

$$|\overline{\varepsilon}\times\overline{r}| = \varepsilon\cdot r\cdot\sin\alpha \Rightarrow |\overline{a}_\varepsilon| = |\overline{\varepsilon}\times\overline{r}|$$ - *вращательное ускорение точки*

$$a_\omega = \omega^2 R = \omega\cdot v$$

$$\overline{\omega}\, x\overline{v} = \omega\cdot v\cdot\sin(\overline{\omega},\overline{v}) = \omega\cdot v$$

- *центростремительное ускорение точки*



Плоское движение твердого тела и движение плоской фигуры в ее плоскости. Абсолютное и относительное движение точки. Сложное движение твердого тела.

Основной задачей кинематики сложного движения твердого тела является установление соотношений между характеристиками абсолютного и относительного движений.Сложное движение твердого тела может состоять из поступательных движений, вращательных движений, или может быть получено в результате сложения поступательного и вращательного движений.В некоторых задачах кинематики заданное сложное движение твердого тела раскладывают на составляющие движения (анализ); в других — требуется определить сложное движение твердого тела как результат сложения более простых движений (синтез). Как при анализе, так и при синтезе движений речь идет о разложении и сложении движений, рассматриваемых в данный момент (мгновенных движений).Сложение поступательных движений твердого тела.

Теорема. В результате сложения мгновенных поступательных движений твердого тела получается результирующее мгновенно поступательное движение.

Доказательство. Пусть твердое тело одновременно участвует в двух мгновенных поступательных движениях, из которых одно является относительным со скоростью υ_1 а второе — переносным со скоростью υ_2.По теореме о параллелограмме скоростей имеем для любой точки твердого тела$\upsilon_a = \upsilon_r + \upsilon_e = \upsilon_1 + \upsilon_2$,

а так как и относительное, и переносное движения твердого тела являются мгновенно поступательными, то относительные, переносные и, следовательно, согласно формуле (II.98), абсолютные скорости всех точек тела соответственно между собой равны в каждый момент времени, т.е. абсолютное движение тела также является мгновенно поступательным. Теорема доказана.

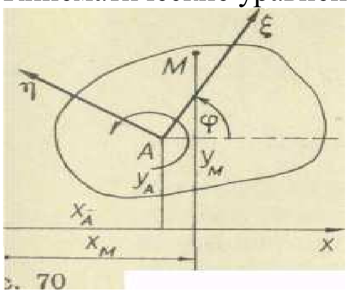
Очевидно, что данная теорема применима к сложному движению твердого тела, состоящему из трех и более мгновенно поступательных движении; тогда в общем случае $\bullet = \sum_{i=1}^{n} \bullet_i$ Заметим, что мгновенно поступательное твердого тела отличается от поступательного тем, что во втором случае в каждый момент времени равны между собой скорости и ускорения всех точек тела, между тем, как в первом случае в данный момент времени равны между собой только скорости всех точек тела.

ПЛОСКО-ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Плоско-параллельным (или плоским) движением твердого тела называется такое движение, при котором все точки тела движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.

Из определения плоско-параллельного движения следует, что движения точек тела, расположенных на перпендикуляре к неподвижной плоскости, одинаковы. Поэтому, вместо движения всего тела в пространстве, можно рассмотреть движение плоской фигуры S, являющейся проекцией тела на неподвижную плоскость. Нетрудно показать, что, зная движение некоторого отрезка плоской фигуры S, можно определить движение всей фигуры. Пусть отрезок AB плоской фигуры занимает положение, указанное на рис. 68. Положение произвольной точки M плоской фигуры определим, соединив эту точку с точками A и B отрезка. Если отрезок AB изменит свое положение и перейдет в новое положение A_1B_1, то для определения нового положения этой точки достаточно построить треугольник $A_1B_1M_1$, равный треугольнику ABM. Так как стороны треугольников, как расстояния между двумя точками абсолютно твердого тела, остаются неизмененными, то $A_1B_1 = AB$; $AM= A_1M_1$; $BM =B_1M_1$. Таким образом, кинематика плоско-параллельного движения тела сводится к кинематике движения отрезка прямой на плоскости.

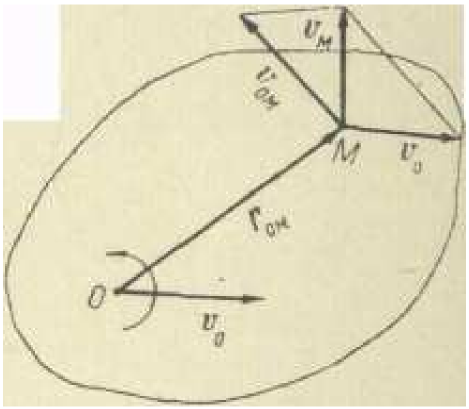
Кинематические уравнения плоско-параллельного движения



Допустим, что плоская фигура движется в неподвижной плоскости Oxy. Выбрав, например, точку A плоской фигуры за полюс, неизменно свяжем с этой фигурой подвижную систему координат Aξη с началом в полюсе A (рис. 70). Для определения положения подвижной системы координат Aξη относительно неподвижной нужно знать координаты точки A (т. е. x_A и y_A), а также угол поворота φ вокруг полюса (т. е. угол, образованный осью Aξη с осью Ox). Следовательно, кинематические уравнения плоско-параллельного движения твердого тела имеют вид $x_A= x_A(t)$. $y_A = y_A (t)$. $\varphi = \varphi (t)$, где $x_A(t)$ $y_A (t)$, $\varphi (t)$— конечные, однозначные, непрерывные и дифференцируемые функции времени.Пользуясь формулами преобразования координат, можно получить уравнения движения любой точки M плоской фигуры $x = x_A + \xi\cos \varphi - \eta\sin \varphi$, $y = y_A + \xi\sin \varphi + \eta\cos \varphi$ -Скорости точек тела

Теорема. При плоско-параллельном движении твердого тела скорость любой его точки равна векторной сумме скорости полюса и скорости во вращательном движении вокруг полюса.

Доказательство. Пусть полюс O движется со скоростью υ_0, а плоская фигура вращается вокруг полюса с угловой скоростью ω (рис. 71). Требуется определить скорость произвольной точки M этой фигуры. Так как переносным здесь является поступательное движение вместе с полюсом O, то переносные скорости всех точек плоской фигуры будут одинаковыми, равными скорости полюса: $\upsilon_{Me}= \upsilon_0$



Относительным движением является вращательное движение вокруг полюса. Поэтому, обозначая радиус-вектор точки ^ М относительно полюса О через r_{OM} , согласно формуле Эйлера, для относительной скорости точки М получим $\upsilon_{Mr}= \omega \times r_{OM}$. Относительную скорость точки при плоско-параллельном движении тела обозначают двойным индексом, т. е. $\upsilon_{Mr} = \upsilon_{OM}$. Первый индекс указывает полюс О, вокруг которого происходит вращение, а второй — обозначает рассматриваемую точку М. Следовательно, $\upsilon_{Mr}= \upsilon_{OM}= \omega \times r_{OM}$
По теореме о сложении скоростей получим $\upsilon_a=\upsilon_e+\upsilon_r$. Следовательно, $\upsilon_M=\upsilon_O+\upsilon_{OM}$.

3.5. Способы решения второй задачи динамики.

Динамика – раздел теоретической механики, который изучает движение материальных тел под действием приложенных к ним сил. Классическая динамика базируется на 3 основных законах, называемых законами Ньютона. Приведем формулировки этих законов:

Закон 1. Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, пока оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние.

Закон 2. Изменение количества движения пропорционально приложенной силе и происходит по направлению прямой, по которой эта сила действует.

Закон 3. Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе, взаимодействия двух тел друг с другом равны и направлены в противоположные стороны.

В соответствии с **принципом относительности Галилея** , существует бесконечное множество равноправных инерциальных систем, движение которых одна относительно другой не может быть установлено никаким образом путём наблюдения любых процессов и явлений, происходящих только в этих системах. Прямая траектория движения объекта в одной системе будет выглядеть также прямой в любой другой инерциальной системе.

Если же в некоторой системе отсчёта свободное тело двигается по криволинейной траектории и/или с переменной скоростью, то такая система является неинерциальной.

Преобразования Галилея — в классической механике преобразования координат и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

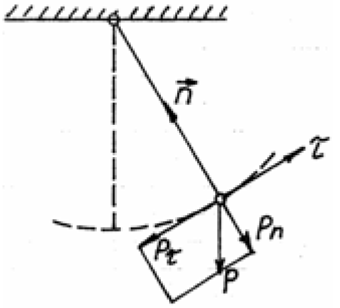
В динамике рассматриваются две основные задачи: нахождение сил, под действием которых может происходить данное движение тела, и определение движения тела, когда известны действующие на него силы.

Если подвижная система отсчета движется параллельно неподвижной системе отсчета с постоянной скоростью, то динамическое уравнение прямолинейного ускоренного движения тела в этой системе отсчёта инвариантно динамическому уравнению ускоренного движения этого же тела относительно неподвижной системы отсчета. Это доказывает физическую и математическую **инвариантность** второго закона Ньютона преобразованиям Галилея. Главным является то, что описанные явления и их закономерности не зависят от скорости движения подвижной системы координат.

3.6. Свободные, затухающие и вынужденные колебания

Прямолинейное колебание материальной точки.

Колебания являются одним из распространённых видов движения.



Колебания возникают при наличии так называемой восстанавливающей силы (это обязательное условие). Т.е. сила, которая стремится вернуть точку в положение равновесия. В роли восстанавливающей силы могут выступать силы различной физической природы, например силы упругости, составляющей силы тяжести, электромагнитные.

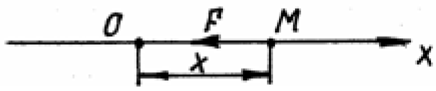
В зависимости от действующих сил, различают следующие виды колебания:

свободные или собственные

свободно затухающие колебания

вынужденные колебания.

Свободные колебания. Сопротивление материалов Расчет валов Рассмотрим расчет вала на прочность и жесткость.



Рассмотрим прямолинейное движение точки.

Точка O в положении равновесия, F – восстанавливающая сила.

Рассмотрим простой, но часто встречающийся случай, когда сила F пропорциональна отклонению от положения равновесия. Пусть x – отклонение от положения равновесия: $F = c \cdot |x|$, где c – постоянная пропорциональности. В случае пружины, эта постоянная называется коэффициентом упругости.

$$F_x = -cx$$

$$m\ddot{x} = -cx$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0$$

$$k^2 = \frac{c}{m}$$

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 \quad (1)$$

Уравнение (1) – дифференциальное уравнение свободных колебаний.

$$\lambda^2 + k^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-k^2} = \pm ki, \qquad i = \sqrt{-1}$$

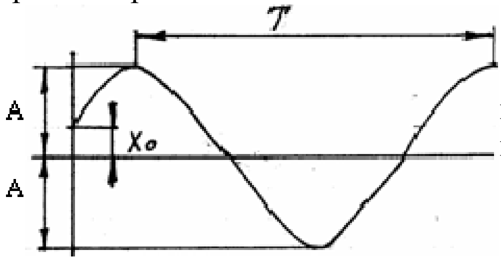
При мнимых корнях, характеристическое решение уравнения (1): $x = c_1 \cdot \cos kt + c_2 \cdot \sin kt$, где c_1, c_2 - произвольные постоянные.

Введём новые постоянные:

$$c_1 = A\sin\alpha, c_2 = A\cos\alpha$$
$$x = A\sin(kt+\alpha) \quad (2)$$
$$(1) t = 0, x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$
$$\dot{x} = Ak\cos(kt+\alpha)$$
$$Из\,(2)\,при\, t = 0 \quad x_0 = A\sin\alpha$$
$$Из\,(3)\,при\, t = 0 \quad x_0 = Ak\cos\alpha$$
$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0}{k^2}}$$

A – амплитуда колебаний; $(kt+\alpha)$ - фаза колебаний; α - начальная фаза колебаний; k - круговая частота (определяет число колебаний за 2π секунд).

Таким образом, под действием одной только восстанавливающей силы, точка совершает гармонические колебания по синусоиде.



Колебания являются периодическими, т.е. $x(t) = x(t+T)$. Периодом T колебаний, называется время между двумя амплитудами колебаний (движение точки полностью повторяется).

$$k(t+T)+\alpha-(kt+\alpha) = 2\pi$$
$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$$

Круговая частота k и период колебаний T, от начальных условий не зависят, а определяются только параметрами системы, поэтому частота свободных колебаний называется собственной частотой. От начальных условий зависит амплитуда A.

Свободные колебания. Пусть мат. точка М массой m отклоняется от положения равновесия О на расстояние x. В результате растяжения пружины на неё будет действовать восстанавливающая сила Fb, стремящаяся вернуть точку в положение равновесия. Наличие восстанавливающей силы - необходимое условие возникновения свободных колебаний

3.7. Общие свойства системы. Моменты инерции.

Механической системой материальных точек или тел называется такая их совокупность, в которой положение и движение каждой точки (или тела) зависит от положения и движения остальных.

Материальное тело рассматривается, как система материальных точек (частиц), которые образуют это тело.

Внешними силами называют такие силы, которые действуют на точки или тела механической системы со стороны точек или тел, которые не принадлежат данной системе.

Внутренними силами , называют такие силы, которые действуют на точки или тела механической системы со стороны точек или тел той же системы, т.е. с которыми точки или тела данной системы взаимодействуют между собой.

Внешние и внутренние силы системы, в свою очередь могут быть активными и реактивными

Масса системы равняется алгебраической сумме масс всех точек или тел системыВ однородном поле тяжести, для которого , вес любой частицы тела пропорционален ее массе. Поэтому распределение масс в теле можно определить по положению его центра тяжести – геометрической точки *C*, координаты которой называют центром масс или центром инерции механической системы

Теорема о движении центра масс механической системы: центр масс механической системы движется как материальная точка, масса которой равняется массе системы, и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему

Выводы:

1. Механическую систему или твердое тело можно рассматривать как материальную точку в зависимости от характера ее движения, а не от ее размеров.
2. Внутренние силы не учитываются теоремой о движении центра масс.
3. Теорема о движении центра масс не характеризует вращательное движение механической системы, а только поступательное

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек. Для каждой точки системы в инерциальной системе отсчета справедлив второй закон Ньютона:

$$m_k \frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i; \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (3.1)$$

где

m_k – масса точки с номером k;

$\vec{r}_k$ – ее радиус–вектор;

$\vec{F}_k^e$ – равнодействующая всех внешних сил как активных, так и реакций связей, действующих на точку с номером k;

$\vec{F}_k^i$ – равнодействующая всех внутренних сил, действующих на точку с номером k.

Систему уравнений (3.1) называют системой дифференциальных уравнений движения точек механической системы. Одна из основных задач механики состоит в том, чтобы, зная активные силы и связи, наложенные на систему, определить движение всех точек системы и определить реакции связей. Решение такой задачи связано с интегрированием системы уравнений (3.1) при заданных начальных условиях. Однако, прямое интегрирование системы (3.1) весьма сложно, что связано как с возможно большим числом этих уравнений, так и, в основном, с неопределенностью информации о внутренних силах.

Во многих практически интересных случаях нет необходимости определять все интегралы системы (3.1), достаточно получить лишь некоторые из них. Это позволяют сделать общие теоремы динамики. Являясь прямым следствием уравнений (3.1), общие теоремы динамики связывают основные динамические величины, характеризующие движение системы, с приложенными к ней внешними силами.

3.8. Теорема об изменении количества движения. Теорема о моменте количества движения.

Количество движения материальной точки – векторная величина , которая равняется произведению массы точки на вектор ее скорости.

Единицей измерения количества движения есть (кг м/с).

Количество движения механической системы – векторная величина , равняющаяся геометрической сумме (главному вектору) количества движения всех точек системы.или количество движения системы равняется произведению массы всей системы на скорость ее центра масс

Когда тело (или система) движется так, что ее центр масс неподвижен , то количество движения тела равняется нулю (пример, вращение тела вокруг неподвижной оси, которая проходит через центр масс тела).

Если движение тела сложное, то не будет характеризовать вращательную часть движения при вращении вокруг центра масс. Т.е., количество движения характеризует только поступательное движение системы (вместе с центром масс).

Импульс силы характеризует действие силы за некоторый промежуток времени. Импульс силы за конечный промежуток времени определяется как интегральная сумма соответствующих элементарных импульсов

Теорема об изменении количества движения материальной точки:
(в дифференциальной форме): Производная за временем от количества движения материальной точки равняется геометрической сумме действующих на точки сил
(в интегральной форме): Изменение количества движения материальной точки за некоторый промежуток времени равняется геометрической сумме импульсов сил, приложенных к точке за тот же промежуток времени.

Теорема об изменении количества движения механической системы
(в дифференциальной форме): Производная по времени от количества движения системы равняется геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил.
(в интегральной форме): Изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени равняется геометрической сумме импульсов, действующих на систему внешних сил, за тот же промежуток времени.

Теорема позволяет исключить из рассмотрения заведомо неизвестные внутренние силы.

Теорема об изменении количества движения механической системы и теорема о движении центра масс являются двумя разными формами одной теоремы.

Закон сохранения количества движения системы.

1. Если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равняется нулю, то вектор количества движения системы будет постоянным по направлению и по модулю.
2. Если сумма проекций всех действующих внешних сил на любую произвольную ось равняется нулю, то проекция количества движения на эту ось является величиной постоянной.

Законы сохранения свидетельствуют, что внутренние силы не могут изменить суммарное количество движения системы.

Кинетической энергией механической системы называется сумма кинетических энергий всех точек этой системы:

$T = \sum m_k v_k^2 / 2$,

где m_k и v_k - масса и скорость k-й материальной точки, принадлежащей данной системе.

На основании *теоремы Кёнига* кинетическая энергия произвольной механической системы определяется по формуле

$T = Mv_C^2/2 + \sum m_k v_{kr}^2 / 2$,

где M - масса всей системы;

v_C - скорость центра масс системы;

m_k - масса k-й точки системы;

v_{kr} - относительная скорость k-й точки при движении её вокруг центра масс (т.е. $v_k = v_C \oplus v_{kr}$).

Из этой формулы можно получить следующие частные случаи для твёрдого тела:

- при поступательном движении тела $v_k = v_C$, $v_{kr} = 0$,

$T = mv_C^2 / 2$;

- при вращении тела вокруг оси, проходящей через его центр масс,

$v_C = 0$, $v_{kr} = \omega \otimes r_k$,

$T = \sum m_k v_{kr}^2 / 2 = J\omega^2/2$,

где J - момент инерции тела относительно оси, проходящей в данный момент времени через центр масс;

ω - угловая скорость вращения тела;

- в случае произвольного движения тела (например при плоскопараллельном движении)

$T = mv_C^2 / 2 + J\omega^2/2.$

Основные (общие) теоремы динамики систем свободных материальных точек являются уравнениями движения систем свободных материальных точек, т. е. математически дифференциальными уравнениями изменений основных мер движения.

1. Для точки M_α уравнение движения относительно инерциальной системы отсчёта:

$$m_\alpha \frac{d\vec{V}_\alpha}{dt} = \vec{F}_\alpha^{(e)} + \vec{F}_\alpha^{(i)}$$

Перенесём все векторы, не изменяя их направления, в центр масс и сложим геометрически:

$$\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha \vec{V}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{F}_\alpha^{(e)}.$$

Производная по времени от количества движения системы свободных материальных точек равна геометрической сумме внешних сил. Это теорема об изменении количества движения системы.

ТЕОРЕМА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ (в дифференциальной форме).

1. Для точки: производная от количества движения точки по времени равна равнодействующей приложенных к точке сил $\bar{R}$:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R} = \Sigma\bar{P},$$

или в координатной форме:

$$\frac{dQ_x}{dt} = X_R = \Sigma X; \ \frac{dQ_y}{dt} = Y_R = \Sigma Y; \ \frac{dQ_z}{dt} = Z_R = \Sigma Z.$$

2. Для системы: производная от количества движения системы по времени равна главному вектору $\bar{R}^e$внешних сил системы (векторной сумме внешних сил $\bar{P}^e$, приложенных к системе):

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}^e = \Sigma\bar{P}^e,$$

или в координатной форме:

$$\frac{dQ_x}{dt} = X_R^e = \Sigma X^e; \ \frac{dQ_y}{dt} = Y_R^e = \Sigma Y^e; \ \frac{dQ_z}{dt} = \Sigma Z^e = Z_R^e.$$

ТЕОРЕМА ИМПУЛЬСОВ (теорема количества движения в конечной форме).

1. Для точки: изменение количества движения точки за конечный промежуток времени равно сумме импульсов, приложенных к точке сил (или импульсу равнодействующей приложенных к точке сил)

$$\bar{Q}_2 - \bar{Q}_1 = \Sigma\bar{S} = \Sigma\int_{t_1}^{t_2} \bar{P}\,dt,$$

или в координатной форме:

$$Q_{2x} - Q_{1x} = \Sigma S_x;\ Q_{2y} - Q_{1y} = \Sigma S_y;\ Q_{2z} - Q_{1z} = \Sigma S_z.\}$$

2. Для системы: изменение количества движения системы за конечный промежуток времени равно сумме импульсов внешних сил:

$$\bar{Q}_2 - \bar{Q}_1 = \Sigma \bar{S}^e,$$

или в координатной форме:

$$Q_{2x} - Q_{1x} = \Sigma S_x^e;\ Q_{2y} - Q_{1y} = \Sigma S_y^e;\ Q_{2z} - Q_{1z} = \Sigma S_z^e.\}$$

Следствия: при отсутствии внешних сил количество движения системы есть величина постоянная; если внешние силы системы перпендикулярны некоторой оси, то проекция количества движения на эту ось есть величина постоянная.

ТЕОРЕМА О МОМЕНТЕ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

1. Для точки: Производная по времени от момента количества движения точки относительно некоторого центра (оси) равна сумме моментов приложенных к точке сил относительно того же центра (оси):

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \Sigma \bar{M}_0;\ \frac{dK_x}{dt} = \Sigma L;\ \frac{dK_y}{dt} = \Sigma M;\ \frac{dK_z}{dt} = \Sigma N.\}$$

2. Для системы:

Производная по времени от момента количества движения системы относительно некоторого центра (оси) равна сумме моментов внешних сил системы относительно того же центра (оси):

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \Sigma \bar{M}_0^e;\ \frac{dK_x}{dt} = \Sigma M_x^e;\ \frac{dK_y}{dt} = \Sigma M_y^e;\ \frac{dK_z}{dt} = \Sigma M_z^e.\}$$

Следствия: если внешние силы системы не дают момента относительно данного центра (оси), то момент количества движения системы относительно этого центра (оси) есть величина постоянная.

Если силы, приложенные к точке, не дают момента относительно данного центра, то момент количества движения точки относительно этого центра есть величина постоянная и точка описывает плоскую траекторию.

3.9. Теорема о кинетической энергии системы. Теорема о движении центра масс системы.

ТЕОРЕМА О КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

1. Для точки: изменение кинетической энергии точки на конечном ее перемещении равно работе приложенных к ней активных сил (касательные составляющие реакций неидеальных связей включаются в число активных сил):

$$T_2 - T_1 = \Sigma A^{\text{акт}} = \int_{s_1}^{s_2} P^{\text{акт}} \cos\alpha \; ds.$$

Для случая относительного движения: изменение кинетической энергии точки при относительном движении равно работе приложенных к ней активных сил и переносной силы инерции (см. "Частные случаи интегрирования"):

$$T_2 - T_1 = \Sigma A^{\text{акт}} + \Sigma A^{e}_{\text{ин}}.$$

2. Для системы: изменение кинетической энергии системы на некотором перемещении ее точек равно работе приложенных к ней внешних активных сил и внутренних сил, приложенных к точкам системы, расстояние между которыми меняется:

$$T_2 - T_1 = \Sigma A^{\text{акт}} + \Sigma A^{i}.$$

Если система неизменяема (твердое тело), то $\Sigma A^{i}=0$ и изменение кинетической энергии равно работе только внешних активных сил.

ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ. Центр масс механической системы движется как точка, масса которой равна массе всей системы $M=\Sigma m_i$, к которой приложены все внешние силы системы:

$$M\bar{\omega}_c = \Sigma \bar{P}^{e},$$

или в координатной форме:

$$M\ddot{x}_c = \Sigma X^{e};\; M\ddot{y}_c = \Sigma Y^{e};\; M\ddot{z}_c = \Sigma Z^{e},$$

где $\bar{\omega}_c, \ddot{x}_c, \ddot{y}_c, \ddot{z}_c$- ускорение центра масс и его проекции на оси декартовых координат; $\bar{P}^{e}, X^{e}, Y^{e}, Z^{e}$ – внешняя сила и ее проекции на оси декартовых координат.

3.10. Принцип Даламбера. Силы инерции.

Принцип Даламбера

Принцип кинетостатики используют для упрощения решения ряда технических задач.

Реально силы инерции приложены к телам, связанным с разгоняющимся телом (к связям). Даламбер предложил условно прикладывать силу инерции к активно разгоняющемуся телу. Тогда система сил, приложенных к материальной точке, становится уравновешенной, и можно при решении задач динамики использовать уравнения статики.

Принцип Даламбера:

Материальная точка под действием активных сил, реакций связей и условно приложенной силы инерции находится в равновесии:

$$\sum_{0}^{n} F_k + \sum_{0}^{n} R_k + F_{ин} = 0; \qquad F_{ин} = -ma.$$

Порядок решения задач с использованием принципа Даламбера
1. Составить расчетную схему.
2. Выбрать систему координат.
3. Выяснить направление и величину ускорения.
4. Условно приложить силу инерции.
5. Составить систему уравнений равновесия. Определить неизвестные величины

Сила инерции

Инертность — способность сохранять свое состояние неизменным, это внутреннее свойство всех материальных тел.
Сила инерции — сила, возникающая при разгоне или торможении тела (материальной точки) и направленная в обратную сторону от ускорения. Силу инерции можно измерить, она приложена к «связям» — телам, связанным с разгоняющимся или тормозящимся телом. Рассчитано, что сила инерции равна

Таким образом, силы, действующие на материальные точки ml и m2(Рис. 23.), при разгоне платформы соответственно равны

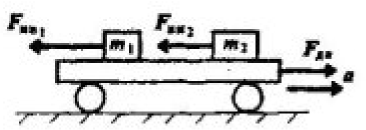


Рис. 23.

$$F_{ин1} = m_1 a;$$
$$F_{ин2} = m_2 a.$$

Разгоняющееся тело (платформа с массой т (Рис. 23.)) силу инерции не воспринимает, иначе разгон платформы вообще был бы невозможен.
При вращательном движении (криволинейном) возникающее ускорение принято представлять в виде двух составляющих: нормального ап и касательного а, (Рис. 24.).
Поэтому при рассмотрении криволинейного движения могут возникнуть две составляющие силы инерции: нормальная и касательная

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = v'; \; a_t = \varepsilon r; \; F_{ин}^t = m\varepsilon r;$$
$$a_n = \frac{v^2}{r}; \; F_{ин}^n = \frac{mv^2}{r}.$$

При равномерном движении по дуге всегда возникает нормаль¬ное ускорение, касательное ускорение равно нулю, поэтому действует только нормальная составляющая силы инерции, направленная по радиусу из центра дуги

3.11. Принцип возможных перемещений.

Пусть система состоит из N точек и, следовательно, ее положение в пространстве в каждый момент времени определяется $3N$ координатами точек системы, например декартовыми (x_k, y_k, z_k).

Предположим, что на систему наложены голономные связи, уравнения которых в общем случае могут содержать и производные от координат точек, но после их интегрирования они свелись к геометрическим и имеют форму

$$f_s(x_k, y_k, z_k; t) = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, l. \quad (222)$$

Освобождающие связи, выражающиеся неравенствами, не рассматриваются. Таким образом, $3N$ координат связаны l уравнениями и независимых координат будет $n = 3N - l$.

Любые n декартовых координат можно задать независимо друг от друга. Остальные координаты определятся из уравнений связей. Вместо n независимых декартовых координат можно выбрать любые другие независимые параметры $q_1, q_2, \ldots, q_n$, зависящие от всех или части декартовых координат точек системы. Эти *независимые параметры, определяющие положение системы в пространстве, называются обобщенными координатами системы*. В общем случае они могут зависеть от всех декартовых координат точек системы, т. е.

$$q_i = q_i(x_k, y_k, z_k), \quad (223)$$

где k изменяется от 1 до N. Задание обобщенных координат полностью определяет положение точек системы относительно выбранной системы отсчета, например декартовых осей координат.

У свободной точки три обобщенные координаты. Если точка должна двигаться по заданной поверхности, то обобщенных координат только две и т.д. Используя уравнения связей (222) и выражения обобщенных координат через декартовы (223), можно выразить декартовы координаты через обобщенные, т.е. получить

$$x_k = x_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, t),$$
$$y_k = y_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, t),$$
$$z_k = z_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, t).$$

Соответственно, для радиуса-вектора каждой точки системы $\bar{r}_k = x_k\bar{i} + y_k\bar{j} + z_k\bar{k}$, получим

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, t). \quad (224)$$

В случае стационарных связей время явно не входит в уравнения связей. Для голономных систем вектор возможного перемещения точки $\delta\bar{r}_k$ в соответствии с (224) можно выразить в форме

$$\delta\bar{r}_k = \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_n}\delta q_n = \sum \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i. \quad (225)$$

Система, имеющая n независимых обобщенных координат, характеризуется также n независимыми возможными перемещениями или вариациями $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$, если связи голономны. *Для голономных систем число независимых возможных перемещений совпадает* *с числом независимых обобщенных координат. Следовательно, число степеней свободы голономной системы равно числу независимых обобщенных координат этой системы, т. е.* $n = 3N - l$. Для неголономных систем в уравнения связей могут входить производные от декартовых координат точек и даже могут быть такие уравнения связей, в которые входят только одни производные. Такие уравнения связей наложат ограничения на вариации $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_s$, и, следовательно, уменьшат число независимых вариаций, не связывая функциональной зависимостью сами обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_s$. *Число степеней свободы неголономной системы, равное числу независимых возможных перемещений, меньше числа обобщенных координат системы*. В дальнейшем рассматриваются только голономные системы, т. е. системы с голономными связями.

Перейдем к составлению уравнений Лагранжа 2 рода.

Общее уравнение динамики материальной системы: $\sum_{k=1}^{n}(F_k - m_k w_k) \cdot \delta r_k = 0$

Общее уравнение динамики системы материальных точек в обобщенных координатах имеет вид: $\delta q_1(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} - Q_1) + \delta q_2(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} - Q_2) + \ldots + \delta q_s(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} - Q_s) = 0$

Так как $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_s$ в случае системы, подчиненной голономным связям, являются независимыми обобщенными возможными перемещениями, то общее уравнение динамики удовлетворяется лишь при условии, что коэффициенты, стоящие при возможных перемещениях, равны нулю, т. Е.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} - Q_1 = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} - Q_2 = 0$$

. . . .

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} - Q_s = 0$$

Эти уравнения называются уравнениями Лагранжа второго рода.

При наличии голономных связей, наложенных на систему, число уравнений Лагранжа равно числу независимых обобщенных координат, т. е. числу степеней свободы. Система состоит из обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Если задаваемые силы системы потенциальны, то уравнения Лагранжа можно записать в виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}$$

. . . .

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_s}$$

3.12. Общее уравнение динамики

Принцип возможных перемещений, дающий общий метод решения задач статики, можно применить и к решению задач динамики. На основании принципа Германа—Эйлера—Даламбера для несвободной механической системы в любой момент времени геометрическая сумма равнодействующей задаваемых сил, равнодействующей реакций связей и силы инерции для каждой точки Mn механической системы равна нулю.

Если система получает возможное перемещение, при котором каждая точка имеет возможное перемещение , то сумма работ этих сил на перемещении должна быть равна нулю.

Общее уравнение динамики для системы с идеальными связями

Положим, что все связи в рассматриваемой механической системе двусторонние и идеальные (силы трения, если они имеются, отнесены к числу задаваемых сил). Тогда сумма работ реакций связей на возможных перемещениях системы равна нулю.

При движении механической системы с идеальными связями в любой данный момент времени сумма элементарных робот всех активных (заданных) сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы равняется нулю.

Общие уравнения динамики позволяют составить дифференциальные уравнения движения любой механической системы. Если механическая система состоит из отдельных твердых тел, то силы инерции точек каждого тела можно привести к силе, приложенной в некоторой точке тела, и паре сил. Сила равна главному вектору сил инерции точек этого тела, а момент пары равен главному моменту этих сил относительно центра приведения. Чтобы воспользоваться принципом возможных перемещений, к каждому телу прикладывают действующие на него задаваемые силы, а также условно прикладывают силу и пару, составленные силами инерции точек тела. Затем системе сообщают возможное перемещение и для всей совокупности задаваемых сил и приведенных сил инерции составляют общее уравнение динамики

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЗАНЯТИЯМ

4.1 Статика

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

- Понятие равнодействующей системы сил.
- Понятие момента силы относительно центра и оси.
- Инвариантность главного вектора и скалярного произведения главного вектора на главный момент.
- Условия равновесия системы сил.

4.2 Кинематика

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

- Векторный, координатный и естественный способы задания движения. Определение кинематических характеристик в каждом из способов.
- Виды движений твёрдого тела. Кинематические характеристики в каждом из движений.
- Составное движение.

4.3 Динамика

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

- Дифференциальные уравнения движения в координатной и естественной формах.
- Применение общих теорем динамики для точки, твёрдого тела и механической системы.
- Применение принципов динамики для решения первой и второй задач динамики.