ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Теоретическая механика

Направление подготовки (специальность) 35.03.06 «Агроинженерия»

Профиль образовательной программы Технический сервис в АПК

Форма обучения заочная

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.1 Лекция № 1 (2 часа).

Тема: «Структура курса. Аксиомы статики. Силовые факторы»

1.1.1 Вопросы лекции

1. Статика. Структура курса. Историческая справка.
2. Аксиомы статики.
3. Связи, реакции связей.

1.1.2 Краткое содержание вопросов

1. Статика. Структура курса. Историческая справка.

Теоретическая механика и её место среди естественных и технических наук. Механика как теоретическая база ряда областей современной техники.

Знание теоретической механики необходимо при изучении законов других естественных наук. Это науки, первоначально входившие в состав теоретической механики по мере накопления знаний, отделившиеся от теоретической механики и получившие самостоятельное значение, хотя теоретическая механики остается для них научной базой. Знание теоретической механики необходимо для расчета различных сооружений, проектирования, производства и эксплуатации машин и механизмов.

Основные исторические этапы развития механики.

Механика является одной из древнейших наук. В те далекие времена, когда запросы производства сводились главным образом к удовлетворению нужд строительной техники, начинает развиваться учение о простейших машинах (блок, рычаг, наклонная плоскость, ворот) и начальные понятия о равновесии тел. Обоснование начал статики появляется уже в сочинениях Архимеда (287 -212 до н.э.). Однако сведения по механике представляли собой ряд отдельных разрозненных работ, не объединенных научной системой. В создании такой системы большую роль сыграли труды Галилео Галилея (1564 - 1642), впервые сформулировавшего идеи об инерции вещества, ускорении, законы сложения движений и скоростей, падения тел. С момента выхода в свет в 1687 г. сочинения Исаака Ньютона (1643 - 1727) "Математические начала натуральной философии" можно считать, что механика действительно стала наукой.

Последующее развитие механики, опирающиеся на дифференциальные и интегральные исчисления, связано с разработкой аналитических методов, основы которых были заложены трудами Л. Эйлера (1707 - 1783), Ж. Даламбера (1717 - 1783), Ж. Лагранжа (1736 - 1813).

Огромное значение для развития механики имели работы отечественных ученых М.В. Остроградского (1801 - 1861), П.Л. Чебышева (1821 - 1894), СВ. Ковалевской (1850 - 1891), А.М. Ляпунова (1857 -1918), И.В. Мещерского (1859 -1935), К.Э. Циолковского (1857 - 1935), А.И. Крылов (1863 - 1945), И.Е. Жуковского (1847 - 1921), С.А. Чаплыгина (1869 - 1942).

Основные понятия и определения статики.

Абсолютно твердое тело (твердое тело, тело) – материальное тело, расстояние между любыми точками в котором не изменяется. Следствие размеры и форма тела не изменяются.

Материальная точка – тело, размерами которого по условиям задачи можно пренебречь.

Свободное тело – тело, на перемещение которого не наложено никаких ограничений.

Несвободное (связанное) тело – тело, на перемещение которого наложены ограничения.

Связи – тела, препятствующие перемещению рассматриваемого объекта (тела или системы тел).

Механическая система – совокупность взаимосвязанных между собой тел или материальных точек.

Твердое тело можно рассматривать как механическую систему, положения и расстояние между точками которой не изменяются.

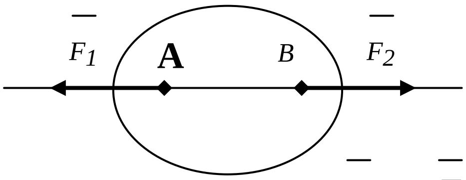
Сила – векторная величина, мера механического воздействия на материальную частицу со стороны других материальных объектов.

Сила как вектор характеризуется точкой приложения, направлением действия и абсолютным значением. Единица измерения модуля силы – Ньютон.

Силу, действие которой задано, называют *активной силой*, силу противодействия называют *реакцией*.

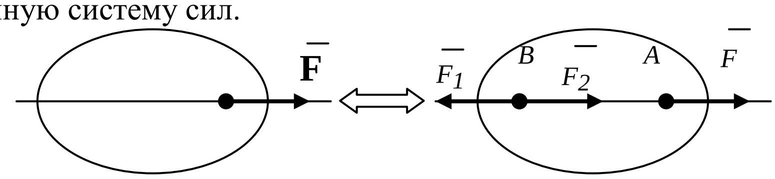
2. Аксиомы статики

1. Аксиома равновесия. Две силы, действующие на твердое тело, составляют уравновешенную систему сил, если они равны по модулю и действуют по одной прямой в противоположные стороны.



$$\bar{F}_2 = -\bar{F}_1$$

2. Аксиома присоединения (исключения) уравновешенной системы сил. Действие системы сил на твердое тело не изменится, если к ней присоединить или исключить из нее любую уравновешенную систему сил.



$$|\bar{F}_1| = |\bar{F}_2| = |\bar{F}|$$

3. Аксиома о параллелограмме сил. Система двух сил, приложенных в одной точке твердого тела, имеет равнодействующую, приложенную в той же точке. Вектор равнодействующей является диагональю параллелограмма, построенного на этих силах.

4. Аксиома противодействия. При действии одного твердого тела на другое возникает сила противодействия, равная по модулю, противоположно направленная действующей силе.

5. Аксиома связей. Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если его мысленно освободить от связей, заменив их действие соответствующими реакциями.

3. Связи, реакции связей.

Условимся называть тело свободным, если его перемещения ничем не ограничены. Тело, перемещения которого ограничены другими телами, называется несвободным, а тела, ограничивающие перемещения данного тела, связями. Как уже упоминалось, в точках контакта возникают силы взаимодействия между данным телом и связями. Силы, с которыми связи действуют на данное тело, называются реакциями связей.

Силы, не зависящие от связей, называются активными силами (заданными), а реакции связей - пассивными силами.

В механике принимают следующее положение, называемое иногда принципом освобождаемости: всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если действия связей заменить их реакциями, приложенными к данному телу.

В статике полностью определить реакции связей можно с помощью условий или уравнений равновесия тела, которые будут установлены в дальнейшем, но направления их во многих случаях можно определить из рассмотрения свойств связей:

1.2 Лекция №2 (2 часа).
Тема: «Основная теорема статики. Уравнения равновесия»

1.2.1 Вопросы лекции

1 Сила и пара сил. Проекции сил на оси и плоскости.
2 Алгебраический и векторный моменты сил относительно точки и оси.
3 Алгебраический и векторный моменты пар сил.
4 Основная теорема статики. Главный вектор и главный момент системы сил.

1.2.2 Краткое содержание вопросов

1. Сила и пара сил. Проекции сил на оси и плоскости.

Для оценки вращательного эффекта силы вводится понятие ее момента. Рассмотрим силу $\vec{F}$, приложенную в точке А твердого тела (Рис.1).

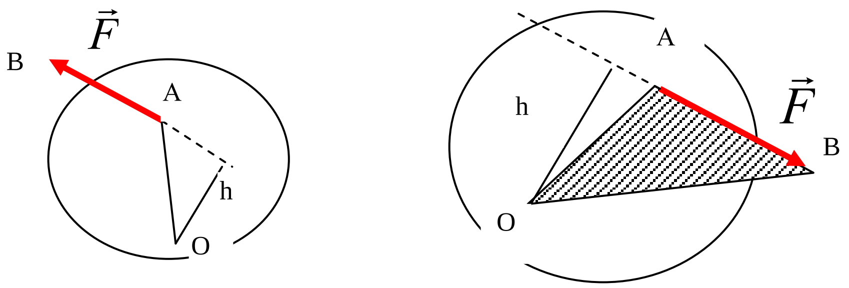


Рис.1

Перпендикуляр h, опущенный из центра О на линию действия силы $\vec{F}$, называется плечом силы $\vec{F}$ относительно центра О.

Так как вектор силы $\vec{F}$ можно перемещать вдоль линии ее действия, то вращательный эффект силы будет зависеть:
1) от модуля силы F и длины плеча h;
2) от положения плоскости поворота ОАВ, проходящей через центр О и силу $\vec{F}$;
3) от направления поворота в этой плоскости.

Пусть все силы лежат в одной плоскости. В этом случае плоскость поворота для всех сил является общей и в дополнительном задании не нуждается. Направление поворота можно охарактеризовать знаком, считая условно поворот в каком-нибудь одном направлении положительным, а в противоположном - отрицательным.

Для количественного измерения вращательного эффекта вводится следующее понятие о моменте силы:

Моментом силы $\vec{F}$ относительно центра О называется величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на длину плеча.

Обозначать момент силы относительно центра О будем символом $m_o(\vec{F})$.

Следовательно: $m_o(\vec{F}) = \pm F \cdot h$ (8.3)

Если сила стремится повернуть тело вокруг центра О против хода часовой стрелки, то будем считать момент положительным, а если по ходу часовой стрелки -момент отрицательный .

Отметим следующие свойства момента силы:

1) момент силы не изменяется при переносе точки приложения силы вдоль линии действия;

2) момент силы относительно центра О равен нулю только тогда, когда сила равна нулю или когда линия действия силы проходит через центр О (плечо равно нулю);

3) момент силы численно выражается удвоенной площадью ΔOAB.

$$m_o(\vec{F}) = \pm 2пл\Delta OAB$$

Пара сил. Момент пары сил.

Парой сил называется система из двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил, действующих на абсолютно твердое тело (рис. 2).

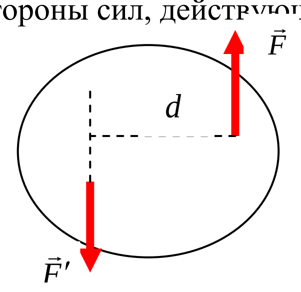


Рис.2

Плоскость, проходящая через линии действия сил пары, называется плоскостью действия пары. Расстояние d между линиями действия сил пары - плечом пары.

Моментом пары называется величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля одной из сил пары на ее плечо : $m = \pm F \cdot d$

Теорема Алгебраическая сумма моментов сил пары относительно любого центра, лежащего в плоскости ее действия, не зависит от выбора этого центра и равна моменту пары.

2. Алгебраический и векторный моменты сил относительно точки и оси.

Тела, препятствующие перемещению рассматриваемого объекта, будем называть связями. Сила, с которой связь действует на рассматриваемый объект, препятствуя его перемещению, называется *реакцией связи*. При определении возможных реакций связи следует исходить из того, что реакция это сила, препятствующая перемещению рассматриваемого тела. Реакция направлена в сторону, противоположную той, куда связь не позволяет перемещаться телу.

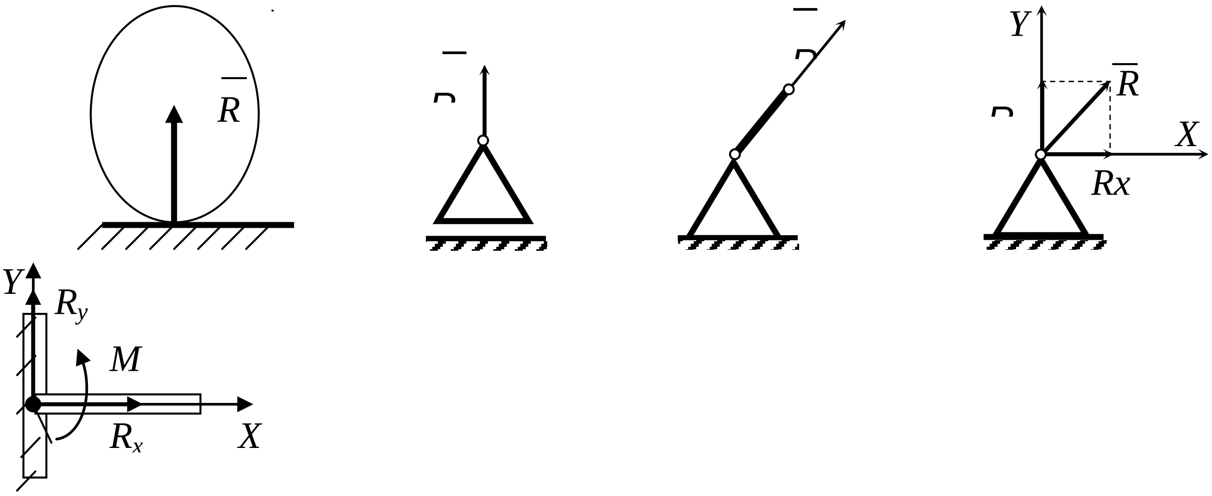
Гладкая поверхность ограничивает перемещение по нормали к поверхности опоры. Реакция направлена по общей нормали в точке касания.

Шарнирная подвижная опора ограничивает перемещение тела по нормали к опорной плоскости. Реакция направлена по нормали к опорной поверхности.

Шарнирная неподвижная опора противодействует любому перемещению в плоскости, перпендикулярной к оси шарнира. При расчетах реакцию, как правило, представляют в виде двух составляющих по осям X и Y.

Шарнирный невесомый стержень противодействует перемещению тела по линии, соединяющей центры шарниров. Реакция будет направлена по линии, соединяющей центры шарниров.

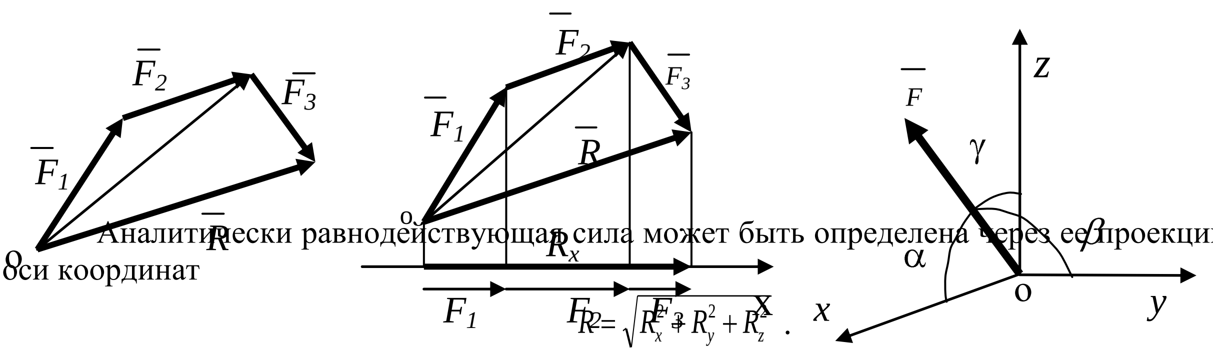
Глухая заделка противодействует любому перемещению и вращению в плоскости. Ее действие можно заменить силой, представленной в виде двух составляющих и парой сил с моментом.



3. Алгебраический и векторный моменты пар сил.

Равнодействующая $\overline{R}$ двух сходящихся сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ находится на основании аксиомы о параллелограмме сил. Геометрическая сумма любого числа сходящихся сил может быть определена путем последовательного сложения двух сил – способ векторного многоугольника.

Вывод*: система сходящихся сил ($\vec{F}$ $_n$) приводится к одной равнодействующей силе* $\vec{R}$.



Аналитически равнодействующая сила может быть определена через ее проекции на оси координат

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}\ .$$

Согласно теореме: *проекция равнодействующей на ось равна сумме проекций слагаемых сил на эту ось.* $R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$, или в общем виде

$$R_x = \sum F_{kx}\ .$$

Равнодействующая определяется выражением

$$R = \sqrt{\left(\sum F_{kx}\right)^2 + \left(\sum F_{ky}\right)^2 + \left(\sum F_{kz}\right)^2}\ .$$

Направление вектора равнодействующей определяется косинусами углов между вектором $\vec{R}$ и осями x, y, z

$$cos\alpha = \frac{\sum F_{kx}}{R}; \quad \cos\beta = \frac{\sum F_{ky}}{R}; \quad \cos\gamma = \frac{\sum F_{kz}}{R},$$ где α, β, γ

1.3 Лекция №3 (2 часа).

Тема: «Использование уравнений равновесия»

1.3.1 Вопросы лекции

1. Статическая определимость.
2. Сочлененные конструкции.
3. Приведение системы сил к равнодействующей.
4. Инварианты системы сил.
5. Уравнение центральной оси.

1.3.2 Краткое содержание вопросов

1. Статическая определимость.

Статическая система называется статически определимой, если число опорных реакций соответствует числу степеней свободы, и величины опорных реакций по принципу механического равновесия можно определить из величин внешних нагрузок.

Все другие системы называются статически неопределимыми.

Для расчёта всех статически определимых систем достаточно решать уравнения равновесия:

Осадка опор, температурные воздействия и неточности сборки в статически определимых системах не влияют на распределение и величину усилий.

2. Сочлененные конструкции

Равновесие сочлененных тел. Железнодорожные и строительные конструкции могут состоять из сочлененных между собой тел (балок, ферм). Количество наложенных связей может превышать число независимых уравнений равновесия, которые можно составить для рассматриваемой конструкции. Такие задачи являются статически неопределимыми. Степень статической неопределимости для плоских систем равна: где Д – число жестких дисков, Ж – число жестких заделок, Ш – число неподвижных шарниров (опорных и соединяющих диски между собой, С – число шарнирных стержней (опорных или соединяющих диски между собой) или подвижных шарниров

3. Приведение системы сил к равнодействующей

Силы называются сходящимися, если линии действия всех сил, составляющих систему, пересекаются в одной точке.

Теорема: Система сходящихся сил эквивалентна одной силе (равнодействующей), которая равна сумме всех этих сил и проходит через точку пересечения их линий действия.

Пусть задана система сходящихся сил F_1, F_2, F_3, ..., F_n, приложенных к абсолютно твердому телу (рис. 2.1, а). Перенесем точки приложения сил по линиям их действия в точку пересечения этих линий (21, б). Получили сист сил, прил к одной точке. Она эквивалентна заданной. Сложим F_1 и F_2, получим их равнодействующую: $R_2=F_1+F_2$. Сложим R_2 с F_3: $R_3=R_2+F_3=F_1+F_2+F_3$. Сложим $F_1+F_2+F_3+\ldots+F_n=R_n=R=$å$F_i$. Ч.т.д. Вместо параллелограммов можно построить силовой многоугольник. Пусть система состоит из 4 сил (рис 2.2.). От конца вектора F_1 отложим вектор F_2. Вектор, соединяющий начало О и конец вектора F_2, будет вектором R_2. Далее отложим вектор F_3 помещая его начало в конце вектора F_2. Тогда мы получим вектор R_8, идущий от точки О к концу вектора F_3. Точно так же добавим вектор F_4; при этом получим, что вектор, идущий от начала первого вектора F_1 к концу вектора F_4, является равнодействующей R. Такой пространственный многоугольник называется силовым. Если конец последней силы не совпадает с началом первой силы, то силовой многоугольник наз разомкнутый. Если для нах равнодействующей исп прав геометр, то этот способ наз геометрическим.

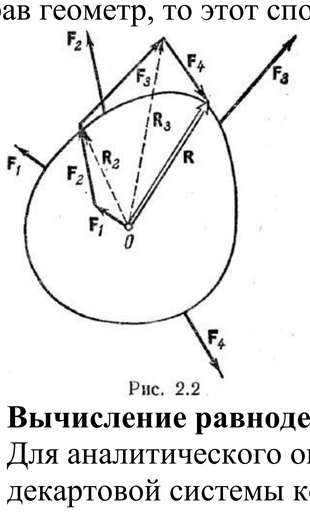


Рис. 2.2

Вычисление равнодействующей

Для аналитического определения равнодействующей найдем ее проекции R_x, R_y, R_z на оси декартовой системы координат. Имеем

$$R_x = \Sigma F_{kx}, \qquad R_y = \Sigma F_{ky}, \qquad R_z = \Sigma F_{kz}. \qquad (2)$$

Тогда величина равнодействующей определится следующей формулой:

$$R^* = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (3)$$

или

$$R^* = \sqrt{(\sum_{k=1}^{N} F_{kx})^2 + (\sum_{k=1}^{N} F_{ky})^2 + (\sum_{k=1}^{N} F_{kz})^2} \quad (4)$$

Для определения направления равнодействующей R^* воспользуемся обычными выражениями для направляющих косинусов:

$$\cos\alpha = R_x/R, \quad \cos\beta = R_y/R, \quad \cos\gamma = R_z/R. \quad (5)$$

Здесь α, β, γ - углы между положительным направлением осей координат и равнодействующей.

Равенства (2)-(5) позволяют определить модуль и направление равнодействующей по заданным проекциям составляющих сил.

В случае плоской системы сходящихся сил оси координат можно взять в плоскости действия сил и тогда формулы (2)-(5) упрощаются.

4. Инварианты системы сил

Инварианты в статике, такие величины, для рассматриваемой системы сил, которые не изменяются при изменении центра приведения.

Виды инвариантов:

1) Векторный инвариант - главный вектор системы сил (R);

2) Скалярный инвариант.

Скалярное произведение главного вектора на главный момент не зависит от центра приведения.

Проекция главного момента на главный вектор не зависит от центра приведения.

Частные случаи приведения системы сил:

1) Приведение к паре сил.

В этом случае система сил приводится к одной паре.

2) Приведение к равнодействующей.

1.4 Лекция 4 (2 часа).

Тема: «Скорости и ускорения точек при различных способах задания движения»

1.4.1 Вопросы лекции

1. Основные понятия раздела.
2. Кинематика точки.
3. Определение скорости точки при задании ее движения векторным, естественным и координатным способом.
4. Определение ускорения точки при задании ее движения векторным, координатным и естественным способом.

1.4.2 Краткое содержание вопросов

1. Основные понятия раздела.

Кинематикой (от греческого «кинема» — движение) называется раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их инертности (массы) и действующих на них сил.

В кинематике изучают зависимости между пространственно-временными характеристиками механического движения. Поэтому кинематику называют также геометрией движения.

Основной задачей кинематики является нахождение положения тела в любой момент времени, если известны его положение, скорость и ускорение в начальный момент времени.

Обычно кинематику подразделяют на две части — кинематику точки и кинематику твердого тела.

Механическое движение - это изменение положения тел (или частей тела) относительно друг друга в пространстве с течением времени.

Для определения положения движущегося тела (или точки) в разные моменты времени с телом, по отношению к которому изучается движение, жестко связывают какую-нибудь систему координат, образующую вместе с этим телом систему отсчета.

Тело отсчета - тело (или группа тел), принимаемое в данном случае за неподвижное, относительно которого рассматривается движение других тел.

Система отсчета - это система координат, связанная с телом отсчета, и выбранный способ измерения времени (рис. 1).

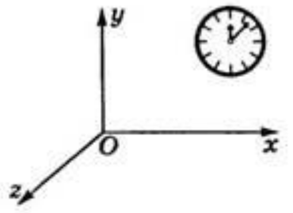


Рис.1

Изображать систему отсчета будем в виде трех координатных осей (не показывая тело, с которым они связаны).

Движение тел совершается в пространстве с течением времени. Пространство в механике мы рассматриваем, как трехмерное евклидово пространство.

Время является скалярной, непрерывно изменяющейся величиной. В задачах кинематики время t принимают за независимое переменное (аргумент). Все другие переменные величины (расстояния, скорости и т. д.) рассматриваются как изменяющиеся с течением времени, т.е. как функции времени t.

В теоретической механике при измерении пространства за основную единицу длины принимают метр (м), а за основную единицу времени — секунду (с). Время предполагается одинаковым в любых системах отсчета (системах координат) и не зависимым от движения этих систем относительно друг друга. Время обозначается буквой и рассматривается как непрерывно изменяющаяся величина, принимаемая в качестве аргумента.

При измерении времени в кинематике различают такие понятия, как промежуток времени, момент времени, начальный момент времени.

Промежутком времени называется время, протекающее между двумя физическими явлениями. Моментом времени называют границу между двумя смежными промежутками времени. Начальным моментом называется время, с которого начинают отсчет времени.

Для решения задач кинематики надо, чтобы изучаемое движение было как-то задано (описано).

2. Кинематика точки.

Кинематически задать движение или закон движения тела (точки) - значит задать положение этого тела (точки) относительно данной системы отсчета в любой момент времени.

Основная задача кинематики точки и твердого тела состоит в том, чтобы, зная закон движения точки (тела), установить методы определения всех кинематических величин, характеризующих данное движение.

Положение тела можно определить с помощью радиус-вектора $\vec{r}$ или с помощью координат.

Радиус-вектор $\vec{r}$ точки М - направленный отрезок прямой, соединяющий начало отсчета О с точкой М (рис. 2).

Координата х точки М - это проекция конца радиуса-вектора точки М на ось Ох. Обычно пользуются прямоугольной системой координат Декарта. В этом случае положение точки M на линии, плоскости и в пространстве определяют соответственно одним (x), двумя (x, y) и тремя (x, y, z) числами - координатами (рис. 2.1).

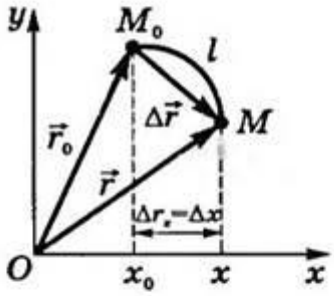


Рис.2

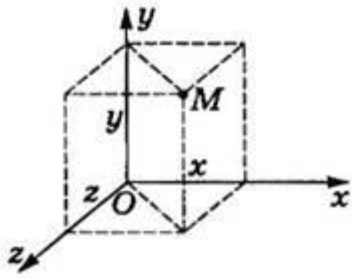


Рис.2.1

Материальная точка - тело, размерами которого в данных условиях можно пренебречь.

Этой моделью пользуются в тех случаях, когда линейные размеры рассматриваемых тел много меньше всех прочих расстояний в данной задаче или когда тело движется поступательно.

Основной задачей кинематики точки является изучение законов движения точки. Зависимость между произвольными положениями движущейся точки в пространстве и времени определяет закон ее движения. Закон движения точки считают известным, если можно определить положение точки в пространстве в произвольный момент времени. Положение точки рассматривается по отношению к выбранной системе координат.

Поступательным называется движение тела, при котором прямая, проходящая через любые две точки тела, перемещается, оставаясь параллельной самой себе. При поступательном движении все точки тела описывают одинаковые траектории и в любой момент времени имеют одинаковые скорости и ускорения. Поэтому для описания такого движения тела достаточно описать движение его одной произвольной точки.

В дальнейшем под словом "тело" будем понимать "материальная точка".

Линия, которую описывает движущееся тело в определенной системе отсчета, называется траекторией. На практике форму траектории задают с помощью математических формул (y=f(x) — уравнение траектории) или изображают на рисунке. Вид траектории зависит от выбора системы отсчета. Например, траекторией тела, свободно падающего в вагоне, который движется равномерно и прямолинейно, является прямая вертикальная линия в системе отсчета, связанной с вагоном, и парабола в системе отсчета, связанной с Землей.

3. Определение скорости точки при задании ее движения векторным, естественным и координатным способом.

Одной из основных кинематических характеристик движения точки является векторная величина, называемая скоростью точки. Понятие скорости точки в равномерном прямолинейном движении относится к числу элементарных понятий.

Скорость - мера механического состояния тела. Она характеризует быстроту изменения положения тела относительно данной системы отсчета и является векторной физической величиной.

Единица измерения скорости – м/с. Часто используют и другие единицы, например, км/ч: 1 км/час=1/3,6 м/с.

Движение точки называется равномерным, если приращения радиуса-вектора точки за одинаковые промежутки времени равны между собой. Если при этом траекторией точки является прямая, то движение точки называется прямолинейным.

Для равномерно-прямолинейного движения

$\Delta r = v\Delta t$, (1)

где v – постоянный вектор.

Вектор v называется скоростью прямолинейного и равномерного движения полностью его определяет.

Из соотношения (1) видно, что скорость прямолинейного и равномерного движения является физической величиной, определяющей перемещение точки за единицу времени. Из (1) имеем $v = \frac{\Delta r}{\Delta t}$.

Направление вектора v указано на рис. 6.1.

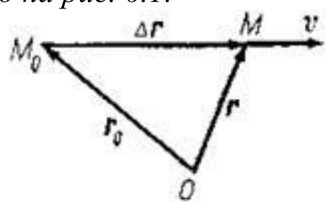


Рис.6.1

При неравномерном движении эта формула не годится. Введем сначала понятие о средней скорости точки за какой-нибудь промежуток времени.

Определение скорости точки при координатном способе задания движения

Вектор скорости точки $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, учитывая, что r_x=x, r_y=y, r_z=z, найдем:

$$v_x = \frac{dx}{dt},\quad v_y = \frac{dy}{dt},\quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Таким образом, проекции скорости точки на координатные оси равны первым производным от соответствующих координат точки по времени.

Зная проекции скорости, найдем ее модуль и направление (т.е. углы α, β, γ, которые вектор v образует с координатными осями) по формулам

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2};$$

$$cos\alpha = \frac{v_x}{v},\quad cos\beta = \frac{v_y}{v},\quad cos\gamma = \frac{v_z}{v}.$$

Итак, численная величина скорости точки в данный момент времени равна первой производной от расстояния (криволинейной координаты) *s* точки по времени.

Направлен вектор скорости по касательной к траектории, которая нам наперед известна.

Определение скорости точки при естественном способе задания движения

Величину скорости можно определить как предел (Δr – длина хорды MM_1):

$$v = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta s} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta s}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t},$$

где Δs – длина дуги MM_1. Первый предел равен единице, второй предел – производная ds/dt.

Следовательно, скорость точки есть первая производная по времени от закона движения:

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}.$$

Направлен вектор скорости, как было установлено ранее, по касательной к траектории. Если величина скорости в данный момент будет больше нуля, то вектор скорости направляется в положительном направлении

4. Определение ускорения точки при задании ее движения векторным, координатным и естественным способом.

Ускорение — векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения скорости. Оно показывает, на какую величину изменяется скорость тела за единицу времени. В СИ единицей ускорения является метр на секунду в квадрате $\left(\frac{м}{с^2}\right)$.

Пусть в некоторый момент времени t движущаяся точка находится в положении *M* и имеет скорость v, а в момент t_1 приходит в положение M_1 и имеет скорость v_1 (рис. 8).

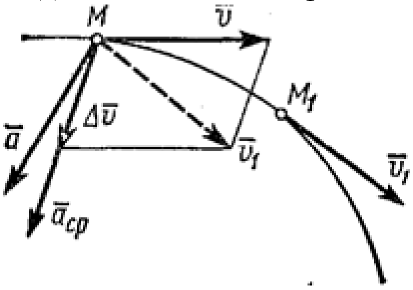


Рис.8

Тогда за промежуток времени $\Delta t=t_1-t$ скорость точки получает приращение $\Delta\vec{v}=\vec{v}_1-\vec{v}$. Для построения вектора $\Delta\vec{v}$ отложим от точки *M* вектор, равный v_1, и построим параллелограмм, в котором диагональю будет $\vec{v}_1$, а одной из сторон $\vec{v}$. Тогда, очевидно, вторая сторона и будет изображать вектор $\Delta\vec{v}$. Заметим, что вектор $\Delta\vec{v}$ всегда направлен в сторону вогнутости траектории.

Отношение приращения вектора скорости $\Delta\vec{v}$ к соответствующему промежутку времени Δt определяет вектор среднего ускорения точки за этот промежуток времени:

$\vec{a}_{ср}=\Delta\vec{v}/\Delta t$.

Вектор среднего ускорения имеет то же направление, что и вектор $\Delta\vec{v}$, т.е. направлен в сторону вогнутости траектории.

Ускорением точки в данный момент времени *t* называется векторная величина $\vec{a}$, к которой стремится среднее ускорение $\vec{a}_{ср}$ при стремлении промежутка времени Δt к нулю: Вектор ускорения точки в данный момент времени равен первой производной от вектора скорости или второй производной от радиуса-вектора точки по времени.

Ускорение точки равно нулю лишь тогда, когда скорость точки *v* постоянна как по величине, так и по направлению: это соответствует только прямолинейному и равномерному движению.

При прямолинейном движении с возрастающей по модулю скоростью (рис. 9, а) векторы $\vec{a}$ и $\overrightarrow{v_0}$ сонаправлены ($\vec{a}\uparrow\uparrow\overrightarrow{v_0}$) и проекция ускорения на направление движения положительна.

При прямолинейном движении с убывающей по модулю скоростью (рис. 9, б) направления векторов $\vec{a}$ и $\overrightarrow{v_0}$ противоположны ($\vec{a}\uparrow\downarrow\overrightarrow{v_0}$) и проекция ускорения на направление движения отрицательна.

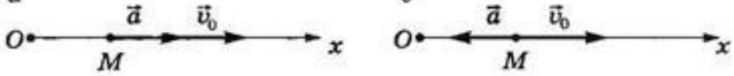


Рис.9

Определение ускорения при координатном способе задания движения

Вектор ускорения точки $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$ в проекции на оси получаем:

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2},\qquad a_y=\frac{dv_y}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2},\qquad a_z=\frac{dv_z}{dt}=\frac{d^2z}{dt^2}$$

Или

$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z},$

т.е. проекция ускорения точки на координатные оси равны первым производным от проекций скорости или вторым производным от соответствующих координат точки по времени. Модуль и направление ускорения найдутся из формул

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$$

$$cos\alpha_1 = \frac{a_x}{a}, \quad cos\beta_1 = \frac{a_y}{a}, \quad cos\gamma_1 = \frac{a_z}{a},$$

где α_1, β_1, γ_1 - углы, образуемые вектором ускорения с координатными осями.

Определение ускорения при естественном способе задания движения. Касательное и нормальное ускорение точки

При естественном способе задания движения вектор $\vec{a}$ определяют по его проекциям на оси Mτnb, имеющие начало в точке *M* и движущиеся вместе с нею (рис.11). Эти оси, называемые осями естественного трехгранника (или скоростными (естественными) осями), направлены следующим образом: ось Mτ - вдоль касательной к траектории в сторону положительного отсчета расстояния *s*; ось Mn - по нормали, лежащей в соприкасающейся плоскости и направленной в сторону вогнутости траектории; ось Mb - перпендикулярно к первым двум так, чтобы она образовала с ними правую тройку. Нормаль Mn, лежащая в соприкасающейся плоскости (в плоскости самой кривой, если кривая плоская), называется главной нормалью, а перпендикулярная к ней нормаль Mb - бинормалью.

Естественные оси – это подвижные оси, связанные с движущейся точкой M и образующие правую прямоугольную систему координат. Плоскость, проходящая через обе нормали (главную нормаль n и бинормаль b), называется нормальной плоскостью. Координатная плоскость, проходящая через касательную нормаль n, называется соприкасающейся плоскостью.

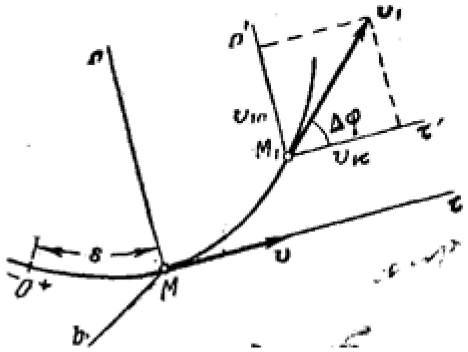


Рис.11

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}; \quad a_n = \frac{v^2}{p}.$$

Проекция ускорения точки на касательную равна первой производной от численной величины скорости или второй производной от расстояния (криволинейной координаты) *s* по времени, а проекция ускорения на главную нормаль равна квадрату скорости деленному на радиус кривизны траектории в данной точке кривой; проекция ускорения на бинормаль равна нулю (a_b=0).

1.5 Лекция 5 (2 часа).

Тема: «Простейшие движения твердого тела»

1.5.1 Вопросы лекции

1. Поступательное движение твердого тела.
2. Вращательное движение твердого тела.
3. Плоское движение.

1.5.2 Краткое содержание вопросов

1. Поступательное движение твердого тела.

В кинематике, как и в статистике, будем рассматривать все твердые тела как абсолютно твердые.

Абсолютно твердым телом называется материальное тело, геометрическая форма которого и размеры не изменяются ни при каких механических воздействиях со стороны других тел, а расстояние между любыми двумя его точками остается постоянным.

Кинематика твердого тела, также как и динамика твердого тела, является одним из наиболее трудных разделов курса теоретической механики.

Задачи кинематики твердого тела распадаются на две части:

1) задание движения и определение кинематических характеристик движения тела в целом;

2) определение кинематических характеристик движения отдельных точек тела.

Существует пять видов движения твердого тела:

1) поступательное движение;

2) вращение вокруг неподвижной оси;

3) плоское движение;

4) вращение вокруг неподвижной точки;

5) свободное движение.

Первые два называются простейшими движениями твердого тела.

Начнем с рассмотрения поступательного движения твердого тела.

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, перемещается, оставаясь параллельной своему начальному направлению.

Поступательное движение не следует смешивать с прямолинейным. При поступательном движении тела траектории его точек могут быть любыми кривыми линиями. Приведем примеры.

1. Кузов автомобиля на прямом горизонтальном участке дороги движется поступательно. При этом траектории его точек будут прямыми линиями.

2. Спарник *AB* (рис.3) при вращении кривошипов O_1A и O_2B также движется поступательно (любая проведенная в нем прямая остается параллельной ее начальному направлению). Точки спарника движутся при этом по окружностям.

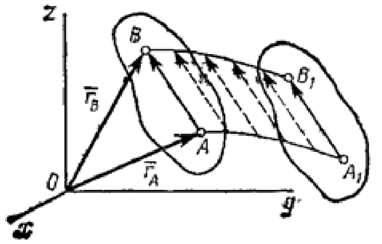


Рис.3

Поступательно движутся педали велосипеда относительно его рамы во время движения, поршни в цилиндрах двигателя внутреннего сгорания относительно цилиндров, кабины колеса обозрения в парках (рис.4) относительно Земли.

Рис.4

Свойства поступательного движения определяются следующей теоремой: при поступательном движении все точки тела описывают одинаковые (при наложении совпадающие) траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

Для доказательства рассмотрим твердое тело, совершающее поступательное движение относительно системы отсчета *Oxyz*. Возьмем в теле две произвольные точки *A* и *B*, положения которых в момент времени *t* определяются радиусами-векторами $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$ (рис.5).

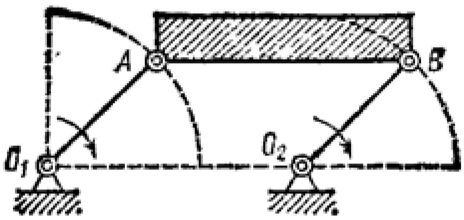


Рис.5

Проведем вектор $\overrightarrow{AB}$, соединяющий эти точки.

Тогда $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}$.

При этом длина *AB* постоянна, как расстояние между точками твердого тела, а направление *AB* остается неизменным, так как тело движется поступательно. Таким образом, вектор *AB* во все время движения тела остается постоянным (*AB*=const). Вследствие этого, траектория точки В получается из траектории точки А параллельным смещением всех ее точек на постоянный вектор $\overrightarrow{AB}$. Следовательно, траектории точек *A* и *B* будут действительно одинаковыми (при наложении совпадающими) кривыми.

Для нахождения скоростей точек *A* и *B* продифференцируем обе части равенства по времени. Получим

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt}.$$

Но производная от постоянного вектора *AB* равна нулю. Производные же от векторов $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$ по времени дают скорости точек *A* и *B*. В результате находим, что

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B,$$

т.е. что скорости точек *A* и *B* тела в любой момент времени одинаковы и по модулю, и по направлению. Беря от обеих частей полученного равенства производные по времени:

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{d\vec{v}_B}{dt} \quad \text{или} \quad \vec{a}_A = \vec{a}_B.$$

Следовательно, ускорения точек *A* и *B* тела в любой момент времени тоже одинаковы по модулю и направлению.

Так как точки *A* и *B* были выбраны произвольно, то из найденных результатов следует, что у всех точек тела их траектории, а также скорости и ускорения в любой момент времени будут одинаковы. Таким образом, теорема доказана.

Из теоремы следует, что поступательное движение твердого тела определяется движением какой-нибудь одной из его точки. Следовательно, изучение поступательного движения тела сводится к задаче кинематике точки, нами уже рассмотренной.

При поступательном движении общую для всех точек тела скорость $\vec{v}$ называют скоростью поступательного движения тела, а ускорение $\vec{a}$ - ускорением поступательного движения тела. Векторы $\vec{v}$ и $\vec{a}$ можно изображать приложенными в любой точке тела.

Заметим, что понятие о скорости и ускорении тела имеют смысл только при поступательном движении. Во всех остальных случаях точки тела, как мы увидим, движутся с разными скоростями и ускорениями, и термины <<скорость тела>> или <<ускорение тела>> для этих движений теряют смысл.

2. Вращательное движение твердого тела.

Для кинематического описания вращательного движения абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси используются те же величины, что и для описания движения материальной точки по окружности.

Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу (или неизменно с ним связанные), остаются во все время движения неподвижными (рис.9).

Промежуток времени, в течение которого тело совершает один полный оборот вокруг оси, — период вращения. Величина, обратная периоду, — частота вращения.

Проходящая через неподвижные точки *A* и *B* прямая *AB* называется осью вращения.

Так как расстояния между точками твердого тела должны оставаться неизменными, то очевидно, что при вращательном движении все точки, принадлежащие оси вращения, будут неподвижны, а все остальные точки тела будут описывать окружности, плоскости которых перпендикулярны оси вращения, а центры лежат на этой оси.

Для определения положения вращающегося тела проведем через ось вращения, вдоль которой направим ось Az, полуплоскость - неподвижную и полуплоскость, врезанную в само тело и вращающуюся вместе с ним (рис. 9).

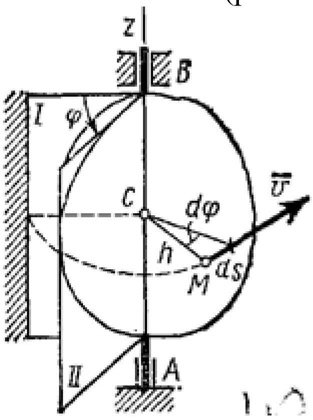


Рис.9

Тогда положение тела в любой момент времени однозначно определится взятым с соответствующим знаком углом φ между этими полуплоскостями, который назовем углом поворота тела. Будем считать угол φ положительным, если он отложен от неподвижной плоскости в направлении против хода часовой стрелки (для наблюдателя, смотрящего с положительного конца оси Az), и отрицательным, если по ходу часовой стрелки. Измерять угол φ будем всегда в радианах. Чтобы знать положение тела в любой момент времени, надо знать зависимость угла φ от времени *t*, т.е.

$\varphi=f(t)$.

Уравнение выражает закон вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

При вращательном движении абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси *углы поворота радиуса-вектора различных точек тела одинаковы.*

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения твердого тела являются его угловая скорость ω и угловое ускорение ε.

Если за промежуток времени $\Delta t=t_1-t$ тело совершает поворот на угол $\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi$, то численно средней угловой скоростью тела за этот промежуток времени будет $\omega_{ср}=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$. В пределе при $\Delta t\to 0$ найдем, что

$\omega=\frac{d\varphi}{dt}$ или $\omega=\dot{\varphi}$.

Таким образом, числовое значение угловой скорости тела в данный момент времени равно первой производной от угла поворота по времени. Знак ω определяет направление вращения тела. Легко видеть, что когда вращение происходит против хода часовой стрелки, $\omega>0$, а когда по ходу часовой стрелки, то $\omega<0$.

Размерность угловой скорости 1/T (т.е. 1/время); в качестве единицы измерения обычно применяют рад/с или, что тоже, 1/с ($с^{-1}$), так как радиан - величина безразмерная.

Угловую скорость тела можно изобразить в виде вектора $\vec{\omega}$, модуль которого равен $|\vec{\omega}|$ и который направлен вдоль оси вращения тела в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки (рис.10). Такой вектор определяет сразу и модуль угловой скорости, и ось вращения, и направление вращения вокруг этой оси.

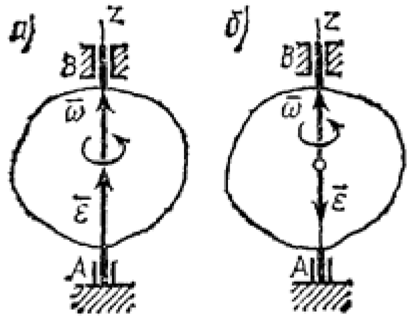


Рис.10

Угол поворота и угловая скорость характеризуют движение всего абсолютно твердого тела в целом. Линейная скорость какой-либо точки абсолютно твердого тела пропорциональна расстоянию точки от оси вращения:

$$v = \omega R = 2\pi\vartheta R = \frac{2\pi}{T} R$$

При равномерном вращении абсолютно твердого тела углы поворота тела за любые равные промежутки времени одинаковы, тангенциальные ускорения у различных точек тела отсутствуют, а нормальное ускорение точки тела зависит от ее расстояния до оси вращения:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = 4\pi^2\vartheta^2 R = \frac{4\pi^2}{\mathrm{T}^2}\mathrm{R}$$

Вектор $\overrightarrow{a_n}$ направлен по радиусу траектории точки к оси вращения.

Угловое ускорение характеризует изменение с течением времени угловой скорости тела. Если за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ угловая скорость тела изменяется на величину $\Delta\omega = \omega_1 - \omega$, то числовое значение среднего углового ускорения тела за этот промежуток времени будет $\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$. В пределе при $\Delta t \to 0$ найдем,

$$\varepsilon = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad \text{или } \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\omega}.$$

Таким образом, числовое значение углового ускорения, тела в данный момент времени равно первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота тела по времени.

Размерность углового ускорения $1/T^2$ ($1/\text{время}^2$); в качестве единицы измерения обычно применяется рад/с^2 или, что то же, $1/c^2$ ($c\text{-}^2$).

Если модуль угловой скорости со временем возрастает, вращение тела называется ускоренным, а если убывает, - замедленным. Легко видеть, что вращение будет ускоренным, когда величины ω и ε имеют одинаковые знаки, и замедленным, - когда разные.

Угловое ускорение тела (по аналогии с угловой скоростью) можно также изобразить в виде вектора ε, направленного вдоль оси вращения. При этом

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

3. Плоское движение

Плоскопараллельным (или плоским) называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой фиксированной плоскости *П* (рис. 28). Плоское движение совершают многие части механизмов и машин, например катящееся колесо на прямолинейном участке пути, шатун в кривошипно-ползунном механизме и др. Частным случаем плоскопараллельного движения является вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси.

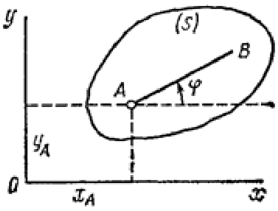


Рис.28

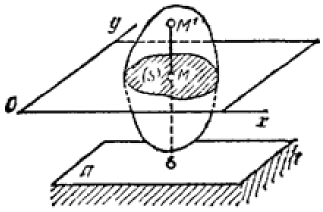


Рис.29

Рассмотрим сечение S тела какой-нибудь плоскости Oxy, параллельной плоскости $П$ (рис.29). При плоскопараллельном движении все точки тела, лежащие на прямой MM', перпендикулярной течению S, т. е. плоскости $П$, движутся тождественно.

Отсюда заключаем, что для изучения движения всего тела достаточно изучить, как движется в плоскости Oxy сечение S этого тела или некоторая плоская фигура S. Поэтому в дальнейшем вместо плоского движения тела будем рассматривать движение плоской фигуры S в ее плоскости, т.е. в плоскости Oxy.

Положение фигуры S в плоскости Oxy определяется положением какого-нибудь проведенного на этой фигуре отрезка AB (рис. 28). В свою очередь положение отрезка AB можно определить, зная координаты x_A и y_A точки A и угол φ, который отрезок AB образует с осью x. Точку A, выбранную для определения положения фигуры S, будем в дальнейшем называть полюсом.

При движении фигуры величины x_A и y_A и φ будут изменяться. Чтобы знать закон движения, т. е. положение фигуры в плоскости Oxy в любой момент времени, надо знать зависимости

$$x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t).$$

Уравнения, определяющие закон происходящего движения, называются уравнениями движения плоской фигуры в ее плоскости. Они же являются уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела.

Первые два из уравнений движения определяют то движение, которое фигура совершала бы при φ=const; это, очевидно, будет поступательное движение, при котором все точки фигуры движутся так же, как полюс A. Третье уравнение определяет движение, которое фигура совершала бы при $x_A = const$ и $y_A = const$, т.е. когда полюс A неподвижен; это будет вращение фигуры вокруг полюса A. Отсюда можно заключить, что в общем случае движение плоской фигуры в ее плоскости может рассматриваться как слагающееся из поступательного движения, при котором все точки фигуры движутся так же, как полюс A, и из вращательного движения вокруг этого полюса.

Основными кинематическими характеристиками рассматриваемого движения являются скорость и ускорение поступательного движения, равные скорости и ускорению полюса $\vec{v}_{пост} = \vec{V}_A$, $\vec{a}_{пост} = \vec{a}_a$, а также угловая скорость ω и угловое ускорение ε вращательного движения вокруг полюса.

Определение скоростей точек плоской фигуры

Было отмечено, что движение плоской фигуры можно рассматривать как слагающееся из поступательного движения, при котором все точки фигуры движутся со скоростью v_A полюса A, и из вращательного движения вокруг этого полюса. Покажем, что скорость любой точки M фигуры складывается геометрически из скоростей, которые точка получает в каждом из этих движений.

В самом деле, положение любой точки M фигуры определяется по отношению к осям Oxy радиусом-вектором $\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{r}\,'$ (рис.30), где $\vec{r}_A$- радиус-вектор полюса A, $\vec{r}\,' = \overrightarrow{AM}$- вектор, определяющий положение точки M относительно осей Axy', перемещающихся вместе с полюсом A поступательно (движение фигуры по отношению к этим осям представляет собой вращение вокруг полюса A). Тогда

$$\vec{v}_M = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}\,'}{dt}$$

В полученном равенстве величина $\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_A$ есть скорость полюса A; величина же $\frac{d\vec{r}\,'}{dt}$ равна скорости $\vec{v}_{MA}$, которую точка M получает при $\vec{r}_A = const$, т.е. относительно осей $Ax'y'$, или, иначе говоря, при вращении фигуры вокруг полюса A. Таким образом, из предыдущего равенства действительно следует, что

$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA}$.

Скорость $\vec{v}_{MA}$, которую точка M получает при вращении фигуры вокруг полюса A:

$v_{MA} = \omega MA \qquad \vec{v}_{MA} \perp \overline{MA}$,

где ω - угловая скорость фигуры.

Таким образом, скорость любой точки M плоской фигуры геометрически складывается из скорости какой-нибудь другой точки A, принятой за полюс, и скорости, которую точка M получает при вращении фигуры вокруг этого полюса. Модуль и направление скорости $\vec{v}_M$ находятся построением соответствующего параллелограмма (рис.31).

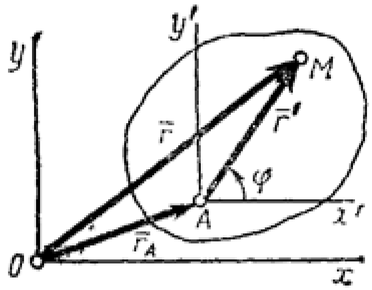


Рис.30

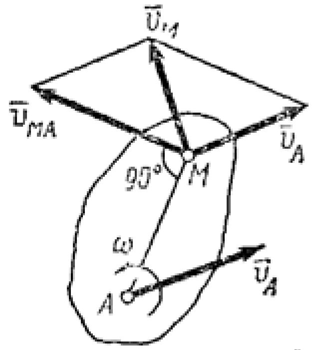


Рис.31

Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей.

Наглядный метод определения скоростей точек плоской фигуры (или тела при плоском движении) основан на понятии о мгновенном центре скоростей.

Мгновенным центром скоростей называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Легко убедиться, что если фигура движется непоступательно, то такая точка в каждый момент времени t существует и притом единственная. Пусть в момент времени t точки A и B плоской фигуры имеют скорости $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$, не параллельные друг другу (рис.33). Тогда точка P, лежащая на пересечении перпендикуляров Aa к вектору $\vec{v}_A$ и Bb к вектору $\vec{v}_B$, и будет мгновенным центром скоростей так как $\vec{v}_P = 0$. В самом деле, если допустить, что $\vec{v}_P = 0$, то по теореме о проекциях скоростей вектор $\vec{v}_P$ должен быть одновременно перпендикулярен и AP (так как $\vec{v}_A \perp AP$) и BP (так как $\vec{v}_B \perp BP$), что невозможно. Из той же теоремы видно, что никакая другая точка фигуры в этот момент времени не может иметь скорость, равную нулю.

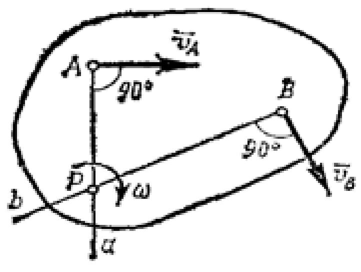


Рис.33

Если теперь в момент времени t взять точку P за полюс, то скорость точки A будет $\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PA}$, так как $\vec{v}_P = 0$. Аналогичный результат получается для любой другой точки фигуры. Следовательно, скорости точек плоской фигуры определяются в данный момент времени так, как если бы движение фигуры было вращением вокруг мгновенного центра скоростей. При этом $v_A = \omega PA \quad (\vec{v}_A \perp PA)$; $v_B = \omega PB \quad (\vec{v}_B \perp PB)$ и т.д.

Из равенств, следует еще, что $\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB}$ точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от МЦС.

Полученные результаты приводят к следующим выводам.

1. Для определения мгновенного центра скоростей надо знать только направления скоростей $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ каких-нибудь двух точек A и B плоской фигуры (или траектории этих точек); мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения перпендикуляров, восставленных из точек A и B к скоростям этих точек (или к касательным к траекториям).

2. Для определения скорости любой точки плоской фигуры, надо знать модуль и направление скорости какой-нибудь одной точки A фигуры и направление скорости другой ее точки B. Тогда, восставив из точек A и B перпендикуляры к $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$, построим мгновенный центр скоростей P и по направлению $\vec{v}_A$ определим направление поворота фигуры. После этого, зная v_A, найдем скорость v_M любой точки M плоской фигуры. Направлен вектор $\vec{v}_M$ перпендикулярно PM в сторону поворота фигуры.

3. Угловая скорость ω плоской фигуры равна в каждый данный момент времени отношению скорости какой-нибудь точки фигуры к ее расстоянию от мгновенного центра скоростей P:

$\omega = v_B/PB$.

Рассмотрим некоторые частные случаи определения мгновенного центра скоростей.

а) Если плоскопараллельное движение осуществляется путем качения без скольжения одного цилиндрического тела по поверхности другого неподвижного, то точка P катящегося тела, касающаяся неподвижной поверхности (рис.34), имеет в данный момент времени вследствие отсутствия скольжения скорость, равную нулю ($\vec{v}_P = 0$), и, следовательно, является мгновенным центром скоростей. Примером служит качение колеса по рельсу.

б) Если скорости точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу, причем линия AB не перпендикулярна $\vec{v}_A$ (рис.35,а), то мгновенный центр скоростей лежит в бесконечности и скорости всех точек параллельны $\vec{v}_A$. При этом из теоремы о проекциях скоростей следует, что $v_B cos\beta = v_A cos\alpha$ т. е. $v_B = v_A$; аналогичный результат получается для всех других точек. Следовательно, в рассматриваемом случае скорости всех точек фигуры в данный момент времени равны друг другу и по модулю, и по направлению, т.е. фигура имеет мгновенное поступательное распределение скоростей (такое состояние движения тела называют еще мгновенно поступательным). Угловая скорость ω тела в этот момент времени, как видно равна нулю.

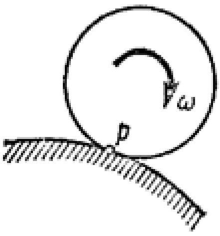


Рис.34

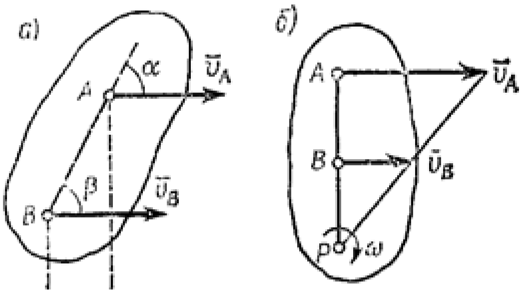


Рис.35

в) Если скорости точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу и при этом линия AB перпендикулярна $\vec{v}_A$, то мгновенный центр скоростей P определяется построением, показанным на рис. 35,б. Справедливость построений следует из пропорции.

В этом случае, в отличие от предыдущих, для нахождения центра P надо кроме направлений знать еще и модули скоростей v_B и v_A.

г) Если известны вектор скорости $\vec{v}_B$ какой-нибудь точки B фигуры и ее угловая скоростьω, то положение мгновенного центра скоростей P, лежащего на перпендикуляре к $\vec{v}_B$ (рис.35,б), можно найти как $BP = v_B/\omega$.

1.6 Лекция 6, 7 (4 часа).

Тема: «Динамика точки»

1.6.1. Вопросы лекции

1. Аксиомы динамики.
2. Динамика свободной материальной точки. Составление дифференциальных уравнений движения точки.
3. Способы решения второй задачи динамики.

1.6.2 Краткое содержание вопросов

1. Аксиомы динамики.

Динамикой называется раздел механики, в котором изучаются законы движения материальных тел под действием сил.

Под материальной точкой понимают материальное тело столь малых размеров, что различием в движении отдельных его точек можно пренебречь и положение которого можно определить координатами одной из его точек.

Точку будем называть изолированной, если на точку не оказывается никакого влияния, никакого действия со стороны других тел и среды, в которой точка движется. Конечно, трудно привести пример подобного состояния. Но представить такое можно.

При вращательном движении тела точки могут двигаться неодинаково, в этом случае некоторые положения динамики можно применять только к отдельным точкам, а материальный объект рассматривать как совокупность материальных точек.

Законы динамики

В основе динамики лежат законы, установленные путем обобщения результатов целого ряда опытов и наблюдений над движением тел и проверенные обширной общественно-исторической практикой человечества. Систематически эти законы были впервые изложены И. Ньютоном.

Первый закон (закон инерции), открытый Галилеем, гласит: существуют такие системы отсчета, относительно которых тело покоится или движется прямолинейно и равномерно, если на него не действуют другие тела или действие этих тел компенсировано или в другой формулировке: если сумма действующих на тело сил равна нулю, то тело движется равномерно и прямолинейно или находится в покое.

Движение, совершаемое точ-кой при отсутствии сил, называется движением по инерции.

Закон инерции отражает одно из основных свойств материи - пребывать неизменно в движении и устанавливает для материальных тел эквивалентность состояний покоя и движения по инерции. Из него следует, что если F=0, то точка покоится или движется с постоян-ной по модулю и направлению скоростью (=const); ускорение точки при этом равно нулю: = 0); если же движение точки не является равномерным и прямолинейным, то на точку действует сила.

Система отсчета, по отношению к которой выполняется закон инерции, называется инерциальной системой отсчета (иногда ее условно называют неподвижной). По данным опыта для нашей Сол-нечной системы инерциальной является система отсчета, начало кото-рой находится в центре Солнца, а оси направлены на так называемые неподвижные звезды. При решении большинства технических задач инерциальной, с достаточной для практики точностью, можно считать систему отсчета, жестко связанную с Землей.

Системы отсчета, в которых не выполняется первый закон Ньютона, называются неинерциальными. Неинерциальными будут системы, движущиеся с ускорением, или вращающиеся.

Второй закон (основной закон динамики) гласит: произведение массы точки на ускорение, которое она получает под действием данной силы, равно по модулю этой силе, а направление ускорения совпадает с направлением силы

Третий закон (закон равенства действия и противодействия) устанавливает характер механического взаимодействия между мате-риальными телами. Для двух материальных точек он гласит: две ма-териальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.

Заметим, что силы взаимодействия между свободными материаль-ными точками (или телами), как приложенные к разным объектам, не образуют уравновешенной системы.

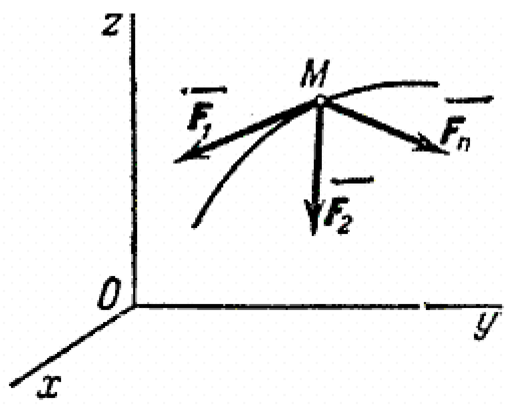
Четвертый закон (закон независимого действия сил). При одновременном действии на материальную точку нескольких сил ускорение точки относительно инерционной системы отсчета от действия каждой отдельной силы не зависит от наличия других, приложенных к точке, сил и полное ускорение равно векторной сумме ускорений от действия отдельных сил.

2. Динамика свободной материальной точки. Составление дифференциальных уравнений движения точки.

С помощью дифференциальных уравнений движения решается вторая задача динамики. Правила составления таких уравнений зависят от того, каким способом хотим определить движение точки.

1) ***Определение движения точки координатным способом.***

Рассмотрим свободную материальную точку, движущуюся под действием сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$. Проведем неподвижные координатные оси *Oxyz*. Проектируя обе части равенства $ma = \sum F_k$ на эти оси и учитывая, что $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$ и т.д., получим ***дифференциальные уравнения криволинейного движения точки*** в проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат: $m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{ky}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{kz}.$



Так как действующие на точку силы могут зависеть от времени, от положения точки и от ее скорости, то правые части уравнений могут содержать время *t*, координаты точки *x*, *y*, *z* и проекции ее скорости $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$. При этом в правую часть каждого из уравнений могут входить все эти переменные.Чтобы с помощью этих уравнений решить основную задачу динамики, надо, кроме действующих сил, знать еще начальные условия, т.е. положение и скорость точки в начальный момент. В координатных осях *Oxyz* начальные условия задаются в виде: при t=0

$$\begin{cases} x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0 \\ v_x = v_{x_0}, \quad v_y = v_{y_0}, \quad v_z = v_{z_0} \end{cases}.$$

Зная действующие силы, после интегрирования уравнений найдем координаты *x, y, z* движущейся точки, как функции времени *t*, т.е. найдем закон движения точки.

3. Способы решения второй задачи динамики.

Общие теоремы динамики точки

Для решения многих задач динамики, особенно в динамике системы, вместо метода интегрирования дифференциальных уравнений движения оказывается более удобным пользоваться так называемыми общими теоремами, являющимися следствиями основного закона динамики.

Значение общих теорем состоит в том, что они устанавливают наглядные зависимости между основными динамическими характери-стиками движения материальных тел и открывают тем самым новые возможности исследования движений механических систем, широко при-меняемые в инженерной практике. Кроме того, общие теоремы позво-ляют изучать отдельные, практически важные стороны данного явле-ния, не изучая явление в целом. Наконец, применение общих теорем избавляет от необходимости проделывать для каждой задачи те опе-рации интегрирования, которые раз и навсегда производятся при выводе этих теорем; тем самым упрощается процесс решения. Сейчас мы рас-смотрим, как выглядят эти теоремы для одной материальной точки.

Количество движения (импульс) точки

Основными динамическими характеристиками движения точки являются количество движения и кинетическая энергия.

Количеством движения точки называется векторная величина   равная произведению массы точки на вектор ее скорости. Направлен вектор   так же, как и скорость точки, т. е. по каса-тельной к ее траектории.

Кинетической энергией (или живой силой) точки называется скалярная величина , равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости.

Необходимость введения двух динамических характеристик объяс-няется тем, что одной характеристикой нельзя охватить все особен-ности движения точки.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

2.1 Практическое занятие № ПЗ-1 (2 часа).

Тема: «Статика. Плоская система сходящихся сил»

2.1.1 Задание для работы

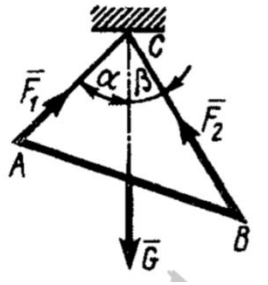
1. Реакции связей.
2. Система сходящихся сил.
3. Аналитический способ решения.

2.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

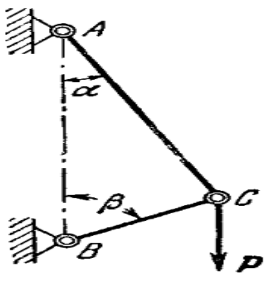
1. Плоская система трех сходящихся сил F_1 F_2 и F_3 находится в равновесии. Заданы модули сил $F_1 = 3$ Н и $F_2 = 2$ Н, а также углы, образованные векторами сил F_1 и F_2 с положительным направлением горизонтальной оси *Ox,* соответственно равные $\alpha_1 = 15$ и $\alpha_2 = 45$. Определить модуль силы F_3. (4,84)

2. Силы $F_1 = F_2 = 10$ Н и F_3 находятся в равновесии. Линии действия сил между собой образуют углы по 120°. Определить модуль силы F_3. (10)

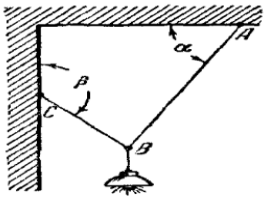
3. Определить вес балки *AB,* если известны силы натяжения веревок $F_1 = 120$ Н и $F_2 = 80$ Н. Заданы углы $\alpha = 45°$ и $\beta = 30°$ между вертикалью и веревками *AC* и *BC* соответственно. (154)



4. Стержни *AC* и *BC* соединены между собой и с вертикальной стеной посредством шарниров. На шарнирный болт *C* действует вертикальная сила $P = 1000$ Н. Определить реакции этих стержней на шарнирный болт *C,* если углы, составляемые стержнями со стеной, равны: $\alpha = 30°$ и $\beta = 60°$.
Ответ: 866 Н; 500 Н.



5. Электрическая лампа веса 20 Н подвешена к потолку на шнуре *AB* и затем оттянута к стене веревкой *BC.* Определить натяжения: T_A шнура *AB* и T_C веревки *BC,* если известно, что угол $\alpha = 60°$, а угол $\beta = 135°$. Весом шнура и веревки пренебречь.
Ответ: $T_{A=}14{,}6$ Н; $T_C = 10{,}4$ Н.



2.1.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные теоретические основы механики, методы составления и исследования уравнений статики; научится составлять и рассчитывать механическую систему по уравнениям статики; овладеет навыками использования методов теоретической механики при решении практических задач.

2.2 Практическое занятие № ПЗ-2 (2 часа).

Тема: «Основная теорема статики. Уравнения равновесия»

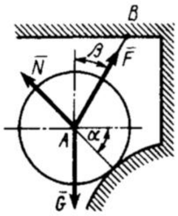
2.2.1 Задание для работы

1. Геометрический способ решения задачи.
2. Определение проекции силы на направление.
3. Определение проекции силы на плоскость.

2.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

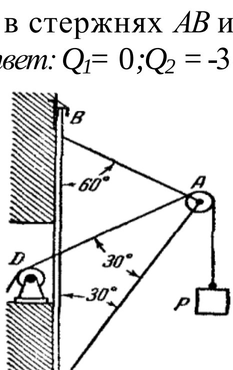
1. Два стержня *AC* и *BC* соединены шарнирно в точке *C*, к которой через блок D подвешен груз *1* весом 12 Н. Определить реакцию стержня *BC*, если угол, α= 60^6. (-6)

2. Цилиндр весом *G* удерживается в равновесии с помощью веревки *AB*. Нормальная реакция опорной поверхности N = 40 Н. Определить натяжение веревки *F*, если известны углы α= 45° и β = 30°. (56,6)



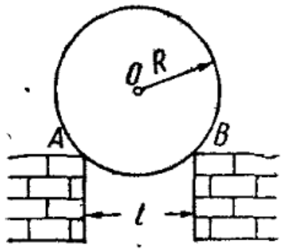
3. Груз *P*= 20 кН поднимается магазинным краном *BAC* посредством цепи, перекинутой через блок *A* и через блок *D*, который укреплен на стенетак, что угол *CAD*= 30°. Углы между стержнями крана: *ABC*= 60°, *ACB* = 30°. Определить усилия Q_1и Q_2 в стержнях *AB* и *AC*.

Ответ: Q_1= 0;Q_2 = -34,6 кН.



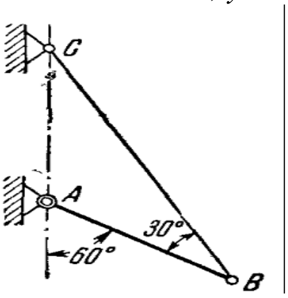
4. Однородный шар веса 10 Н удерживается в равновесии двумя тросами *AB* и *CD*,расположенными в одной вертикальной плоскости и составляющими один с другим угол 150°. Трос *AB* наклонен к горизонту под углом 45°. Определить натяжение тросов.

Ответ: T_B= 19,3 Н, T_C= 14,1 Н.



5. Однородный стержень *AB* прикреплен к вертикальной стене посредством шарнира *A* и удерживается под углом 60° к вертикали при помощи троса *BC*, образующего с ним угол 30°. Определить величину и направление реакции *R*шарнира, если известно, что вес стержня равен 20 Н.

Ответ: R= 10 Н, угол (R, AC) = 60°.



2.2.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные теоретические основы механики, методы составления и исследования уравнений статики; научится составлять и рассчитывать механическую систему по уравнениям статики; овладеет навыками использования методов теоретической механики при решении практических задач.

2.3 Практическое занятие № ПЗ-3 (2 часа).

Тема: «Плоская система сил. Система тел. Раскрытие статической неопределённости. Пространственная система сходящихся сил»

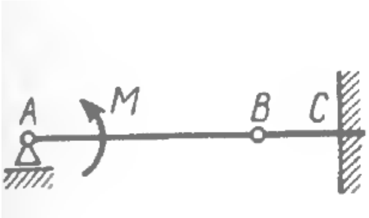
2.3.1 Задание для работы

1. Понятие распределенной нагрузки. Статическая неопределенность.
2. Применение аксиомы действия и противодействия при работе с системой тел.
3. Использование уравнений равновесия.

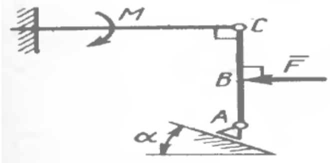
2.3.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Укажите номер статически определимой конструкции. (2)

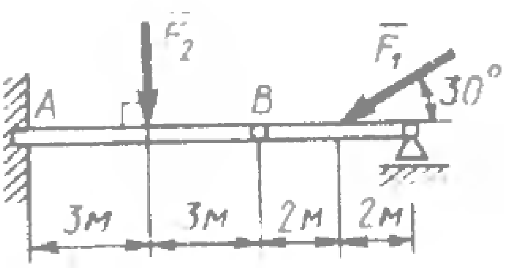
2.На балку *AB* действует пара сил с моментом M = 800 Н • м. Определить момент в заделке *C*, если AB = 2 м и BC = 0,5 м. (200)



3. Определить реакцию опоры *A* в кН, если сила F = 3 кН, угол $\alpha = 30°$, размеры $AB = BC$. (3)

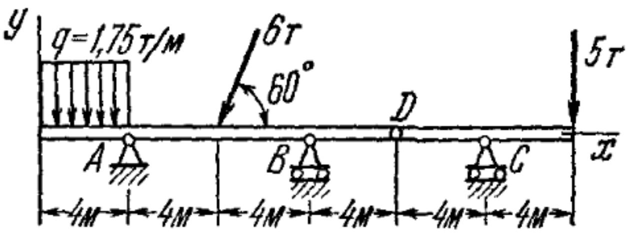


4. Два стержня соединены в шарнире *B*. Определить момент в заделке *A*, если силы F_1 = 60 Н, F_2 = 50 Н. (240)



5. Определить реакции опор *A, B, C* и шарнира *D* составной балки, изображенной на рисунке вместе с нагрузкой.

Ответ: $X_A = -2{,}8$ кН, $Y_A = -4{,}4$ кН, $Y_B = 22{,}2$ кН, $Y_C = 5$ кН. $X_D = 0$, $Y_D = \pm 5$кН.



2.3.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные теоретические основы механики, методы составления и исследования уравнений статики; научится составлять и рассчитывать механическую систему по уравнениям статики; овладеет навыками использования методов теоретической механики при решении практических задач.

2. 4 Практическое занятие № ПЗ-4 (2 часа).

Тема: «Кинематика. Траектория и уравнения движения точки»

2.4.1 Задание для работы

1. Задача кинематики. Годограф радиус-вектора точки. Оси естественного трёхгранника.
2. Уравнения движения точки при различных способах задания её движения.
3. Варианты переходов от одного способа задания движения к другому.

2.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

1.Задано уравнение движения точки $r=3ti + 4tj$. Определить координату y точки в момент времени, когда r=5 м. (4)

2. Заданы уравнения движения точки $x = 2t, y = t$. Определить время t, когда расстояние от точки до начала координат достигнет 10м. (4,47)

3. По данным уравнениям движения точки найти уравнения ее траектории в координатной форме и указать на рисунке направление движения x = 3t- 5, y= 4 -2t.
Ответ: Полупрямая $2x + 3y - 2 = 0$ с началом в точке $x = -5$, y = 4.

4. По заданным уравнениям движения точки найти уравнение ее траектории, а также указать закон движения точки по траектории, отсчитывая расстояние от начального положения точки.
$x = 31^2$, $y = 4t^2$.
Ответ: Полупрямая $4x — 3y = 0$; $s= 5t^2$.

5. По заданным уравнениям движения точки найти уравнение ее траектории, а также указать закон движения точки по траектории, отсчитывая расстояние от начального положения точки.
$x = a \cos^2 t, y = a \sin^2 t$.
Ответ: Отрезок прямой x+y-a=0, причем $0 \leq x \leq \alpha$; $s=\alpha\sqrt{2}\sin^2 t$

2.4.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные теоретические основы механики, методы составления и исследования уравнений кинематики; научится составлять и рассчитывать механическую систему по уравнениям кинематики; овладеет навыками использования методов теоретической механики при решении практических задач.

2.5 Практическое занятие № ПЗ-5 (2 часа).

Тема: «Скорость и ускорение точки. Способы задания движения точки»

2.5.1 Задание для работы

1. Определение скорости при различных способах задания движения.
2. Понятие ускорения. Вычисление ускорения при различных способах задания движения.
3. Дифференцирование вектора постоянного модуля по независимому скалярному аргументу.
4. Касательное и нормальное составляющие ускорения.
5. Виды движения точки. Критерии их распознания.
6. Графики движения.

2.5.2 Краткое описание проводимого занятия:

1.Скорость движения точки $v = 2ti + 3j$ Определить угол в градусах между вектором скорости и осью Ox в момент времени t=4 с (20,6)

2. Самолет при посадке касается посадочной полосы с горизонтальной скоростью 180 км/ч. После пробега 1000 м самолет останавливается. Определить модуль среднего замедления самолета. (1,25)

3. Скорость автомобиля 90 км/ч. Определить путь торможения до остановки, если среднее замедление автомобиля равно 3 м/с. (104)

2.5.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные теоретические основы механики, методы составления и исследования уравнений кинематики; научится составлять и рассчитывать механическую систему по уравнениям кинематики; овладеет навыками использования методов теоретической механики при решении практических задач.

2.6 - 2.9 Практическое занятие №6-9 (6 часов).

Тема: «Динамика точки. Первая основная задача динамики точки. Вторая основная задача динамики точки»

2.6.1-2.9.1 Задание для работы

1. Законы динамики.
2. Последовательность решения задачи динамики.
3. Дифференциальные уравнения движения точки в координатной и естественной формах.
4. Частные случаи решения дифференциальных уравнений движения в координатной и естественной формах.
5. Определение постоянных интегрирования дифференциальных уравнений движения.
6. Движение тела брошенного под углом к горизонту. Движение под действием силы зависящей от скорости.

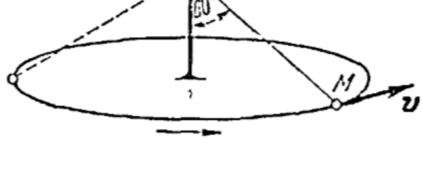
2.6.2-2.9.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Деталь массой m = 0,5 кг скользит вниз по лотку. Под каким углом к горизонтальной плоскости должен располагаться лоток, для того чтобы деталь двигалась с ускорением a = 2 м/с^2? Угол выразить в градусах. (11,8)

2. Определить модуль равнодействующей сил, действующих на материальную точку массой m = 3 кг в момент времени t= 6 с, если она движется по оси Ox согласно уравнению x =0,04 t^3. (4,32)

3. В шахте опускается равноускоренно лифт масел 280 кг. В первые 10 с он проходит 35 м. Найти натяжение каната, на котором висит лифт.
Ответ. 2548 Н.

4. Груз M массы 0,102 кг, подвешенный на нити длины 30 см в неподвижной точке O, представляет собой конический маятник, т. е. описывает окружность в горизонтальной плоскости, причем нить составляет с вертикалью угол 60°. Определить скорость v груза и натяжение T нити.
Ответ: ν = 2,1 м/с, T = 2 Н.



5. Тяжелое тело спускается по гладкой плоскости, наклоненной под углом 30° к горизонту. Найти, за какое время тело пройдет путь 9,6 м, если в начальный момент его скорость равнялась 2 м/с.
Ответ: 1,61 с.

6. На материальную точку массой m = 20 кг, которая движется по горизонтальной прямой, действует сила сопротивления $R = 0{,}2v^2$. За сколько секунд скорость точки уменьшится с 10 до 5 м/с? (10)

7. Дифференциальное уравнение колебательного движения груза массой m=0,5 кг, подвешенного к пружине, имеет вид $\ddot{y} + 60y = 0$. Определить коэффициент жесткости пружины. (30)

8. При скоростном спуске лыжник массы 90 кг скользил по склону в 45°, не отталкиваясь палками. Коэффициент трения лыж о снег f = 0,1. Сопротивление воздуха движению лыжника пропорционально квадрату скорости лыжника и при скорости в 1 м/с равно 0,635 Н. Какую наибольшую скорость мог развить лыжник? Насколько увеличится максимальная скорость, если подобрав лучшую мазь, лыжник уменьшит коэффициент трения до 0,05?
Ответ: $v_{1\,max}$= 29,73 м/с; скорость увеличится до $v_{2\,max}$= 30,55 м/с.

9. При угле бросания а снаряд имеет горизонтальную дальность 1_a. Определить горизонтальную дальность при угле бросания, равном α/2. Сопротивлением воздуха пренебречь.
Ответ: $l_{a/2} = \frac{l_\alpha}{2\cos\alpha}$

2.6.3-2.9.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные теоретические основы механики, методы составления и исследования уравнений динамики; научится составлять и рассчитывать механическую систему по уравнениям динамики; овладеет навыками использования методов теоретической механики при решении практических задач.