ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические рекомендации для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Б1.Б.05 Математика

Направление подготовки 35.03.06 Агроинженерия
Профиль образовательной программы Технический сервис в АПК
Форма обучения заочная

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1. Организационно-методические данные дисциплины

№ п.п .	Наименование темы	Общий объем часов по видам самостоятельной работы				
		подготовка курсового проекта (работы)	подготовка реферата/ эссе	Индивидуальные домашние задания (контрольная работа)	самостоятельное изучение вопросов (СИВ)	подготовка к занятиям (ПкЗ)
1	2	3	4	5	6	7
1	Линейная алгебра	-	-	-		4
2	Векторная алгебра	-	-	-	12	4
3	Линии на плоскости	-	-	-		4
4	Линии в пространстве	-	-	-	14	
5	Функция одной переменной	-	-	-	5	4
6	Производная и ее приложения	-	-	-	35	8
7	ФНП	-	-	8	10	2
8	Комплексные числа	-	-	-	16	
9	Неопределенный интеграл	-	-	4		4
10	Определенный и несобственный интеграл	-	-	8	10	6
11	Кратные интегралы	-	-		20	2
12	Дифференциальные уравнения первого порядка	-	-	-	12	2
13	Дифференциальные уравнения второго порядка	-	-		20	4
14	Ряды				26	8
15	Случайные события				6	6
16	Случайные величины				2	4
17	Элементы математической статистики			20	52	16

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

2.1 Номера задач контрольной работы

Последние две цифры учебного шифра	Номера задач								
01 21 41 61 81	1	21	41	61	81	101	121	141	161
02 22 42 62 82	2	22	42	62	82	102	122	142	162
03 23 43 63 83	3	23	43	63	83	103	123	143	163
04 24 44 64 84	4	24	44	64	84	104	124	144	164
05 25 45 65 85	5	25	45	65	85	105	125	145	165
06 26 46 66 86	6	26	46	66	86	106	126	146	166
07 27 47 67 87	7	27	47	67	87	107	127	147	167
08 28 48 68 88	8	28	48	68	88	108	128	148	168
09 29 49 69 89	9	29	49	69	89	109	129	149	169
10 30 50 70 90	10	30	50	70	90	110	130	150	170
11 31 51 71 91	11	31	51	71	91	111	131	151	171
12 32 52 72 92	12	32	52	72	92	112	132	152	172
13 33 53 73 93	13	33	53	73	93	113	133	153	173
14 34 54 74 94	14	34	54	74	94	114	134	154	174
15 35 55 75 95	15	35	55	75	95	115	135	155	175
16 36 56 76 96	16	36	56	76	96	116	136	156	176
17 37 57 77 97	17	37	57	77	97	117	137	157	177
18 38 58 78 98	18	38	58	78	98	118	138	158	178
19 39 59 79 99	19	39	59	79	99	119	139	159	179
20 40 60 80 100	20	40	60	80	100	120	140	160	180

2.2 Условия задач контрольной работы

Контрольная работа №1.

В задачах 1 – 20 решить систему линейных уравнений: а) методом Гаусса, б) по формулам Крамера.

1. $\begin{cases} 5x-4y+3z=6 \\ x+4y+9z=-2 \\ -x-3y+7z=15 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} 2x-y+3z=4 \\ 4x+7y-2z=-6 \\ x-8y+5z=1 \end{cases}$; 3. $\begin{cases} 2x-4y+9z=28 \\ 7x+3y-6z=-1 \\ 7x+9y-9z=5 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} -3x+5y-6z=-5 \\ 2x-3y+5z=8 \\ x+4y-z=1 \end{cases}$; 5. $\begin{cases} 2x+4y+3z=-10 \\ 3x-2y+4z=3 \\ -x+5y-2z=5 \end{cases}$; 6. $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-3y+2z=2 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$;

7. $\begin{cases} x+7y-2z=3 \\ 3x+5y+z=5 \\ 2x-5y+5z=4 \end{cases}$; 8. $\begin{cases} 3x-9y+8z=5 \\ 2x-5y+5z=4 \\ 2x-y+z=-4 \end{cases}$; 9. $\begin{cases} 4x-7y+3z=10 \\ 2x+9y-z=8 \\ -x+6y-3z=3 \end{cases}$;

10. $\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ 4x-y+5z=6 \\ x-2y+4z=9 \end{cases}$; 11. $\begin{cases} 4x+2y-z=-12 \\ x+7y-5z=-9 \\ -2x+5y-6z=-8 \end{cases}$; 12. $\begin{cases} x+3y-2z=-5 \\ x+9y-4z=-1 \\ -2x+6y-3z=6 \end{cases}$;

13. $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x+4y+3z=2 \\ -3x+y+2z=0 \end{cases}$; 14. $\begin{cases} 5x+8y-z=6 \\ x+2y+3z=10 \\ 2x-3y+2z=22 \end{cases}$; 15. $\begin{cases} x+2y+4z=31 \\ 5x+y+2z=29 \\ 3x-y+z=10 \end{cases}$;

16. $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$; 17. $\begin{cases} x+y+2z=-1 \\ 2x-y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-2 \end{cases}$; 18. $\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 2x+3y+z=1 \\ 2x+y+3z=11 \end{cases}$;

19. $\begin{cases} 4x-3y+2z=9 \\ 2x+5y-3z=4 \\ 5x+6y-2z=18 \end{cases}$; 20. $\begin{cases} 3x-y+z=4 \\ 2x-5y-3z=-17 \\ x+y-z=0 \end{cases}$.

В задачах 21 – 40 доказать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

21. $\vec{a}(5;4;1), \vec{b}(-3;5;2), \vec{c}(2;-1;3), \vec{d}(7;23;4)$.
22. $\vec{a}(2;-1;4), \vec{b}(-3;0;-2), \vec{c}(4;5;-3), \vec{d}(0;11;-14)$.
23. $\vec{a}(-1;1;2), \vec{b}(2;-3;-5), \vec{c}(-6;3;-1), \vec{d}(28;-19;-7)$.
24. $\vec{a}(1;3;4), \vec{b}(-2;5;0), \vec{c}(3;-2;-4), \vec{d}(13;-5;-4)$.
25. $\vec{a}(1;-1;1), \vec{b}(-5;-3;1), \vec{c}(2;-1;0), \vec{d}(-15;-10;5)$.
26. $\vec{a}(3;1;2), \vec{b}(-7;-2;-4), \vec{c}(-4;0;3), \vec{d}(16;6;15)$.
27. $\vec{a}(-3;0;1), \vec{b}(2;7;-3), \vec{c}(-4;3;5), \vec{d}(-16;33;13)$.
28. $\vec{a}(5;1;2), \vec{b}(-2;1;-3), \vec{c}(4;-3;5), \vec{d}(15;-15;24)$.
29. $\vec{a}(0;2;-3), \vec{b}(4;-3;-2), \vec{c}(-5;-4;0), \vec{d}(-19;-5;-4)$.
30. $\vec{a}(3;-1;2), \vec{b}(-2;3;1), \vec{c}(4;-5;-3), \vec{d}(-3;2;-3)$.
31. $\vec{a}(5;3;1), \vec{b}(-1;2;-3), \vec{c}(3;-4;2), \vec{d}(-9;34;-20)$.
32. $\vec{a}(3;1;-3), \vec{b}(-2;4;1), \vec{c}(1;-2;5), \vec{d}(1;12;-20)$.
33. $\vec{a}(6;1;-3), \vec{b}(-3;2;1), \vec{c}(-1;-3;4), \vec{d}(15;6;-17)$.
34. $\vec{a}(4;2;3), \vec{b}(-3;1;-8), \vec{c}(2;-4;5), \vec{d}(-12;14;-31)$.
35. $\vec{a}(-2;1;3), \vec{b}(3;-6;2), \vec{c}(-5;-3;-1), \vec{d}(31;-6;22)$.
36. $\vec{a}(1;3;6), \vec{b}(-3;4;-5), \vec{c}(1;-7;2), \vec{d}(-2;17;5)$.
37. $\vec{a}(7;2;1), \vec{b}(5;1;-2), \vec{c}(-3;4;5), \vec{d}(26;11;1)$.
38. $\vec{a}(3;5;4), \vec{b}(-2;7;-5), \vec{c}(6;-2;1), \vec{d}(6;-9;22)$.
39. $\vec{a}(5;3;2), \vec{b}(2;-5;1), \vec{c}(-7;4;-3), \vec{d}(36;1;15)$.
40. $\vec{a}(11;1;2), \vec{b}(-3;3;4), \vec{c}(-4;-2;7), \vec{d}(-5;11;-15)$.

В задачах 41 – 60 даны вершины треугольника ABC. Найти: а) уравнения сторон треугольника и их угловые коэффициенты; б) периметр треугольника ABC; в) наименьший из углов ΔABC; г) уравнение медианы AM;

д) уравнение высоты CD и ее длину; е) уравнение окружности, для которой высота CD есть диаметр. Сделать рисунок.

41. $A(-5;0),\quad B(7;9),\quad C(5;-5);$ 42. $A(-7;2),\quad B(5;11),\quad C(3;-3);$

43. $A(-5;-3),\quad B(7;6),\quad C(5;-8);$ 44. $A(-6;-2),\quad B(6;7),\quad C(4;-7);$

45. $A(-8;-4),\quad B(4;5),\quad C(2;-9);$ 46. $A(0;-1),\quad B(12;8),\quad C(10;-6);$

47. $A(-6;1),\quad B(6;10),\quad C(4;-4);$ 48. $A(-2;-4),\quad B(10;5),\quad C(8;-9);$

49. $A(-3;0),\quad B(9;9),\quad C(7;-5);$ 50. $A(-9;-2),\quad B(3;7),\quad C(1;-7);$

51. $A(-5;2),\quad B(7;-7),\quad C(5;7);$ 52. $A(-7;5),\quad B(5;-4),\quad C(3;10);$

53. $A(-7;1),\quad B(5;-8),\quad C(3;6);$ 58. $A(0;3),\quad B(12;-6),\quad C(10;8);$

55. $A(-8;4),\quad B(4;-5),\quad C(2;9);$ 56. $A(-2;2),\quad B(10;-7),\quad C(8;7);$

57. $A(1;2),\quad B(13;-7),\quad C(11;7);$ 54. $A(-4;1),\quad B(8;-8),\quad C(6;6);$

59. $A(-7;-1),\quad B(5;-10),\quad C(3;4);$ 60. $A(-3;3),\quad B(9;-6),\quad C(7;8);$

В задачах 61 – 80 найти пределы следующих функций:

61. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2+4x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+3x-2}{3x^2+2x-8}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+1}{x^2+2x-5}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 3x\cdot ctg\,2x$

62. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-1}{x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{2x^2-x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2+x-5}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\sin^2 3x}$

63. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{2x^2-5x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{10x-3x^2-8}{3x^2-8x+4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x-1}{3x^3+x^2-4}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 6x}{2x}$

64. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-5x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-x-3}{x^2-3x-4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^3+2x-3}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{1-\cos 4x}$

65. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-4x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{7x-x^2-12}{2x^2-11x+15}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+1}{x^2+3x+4}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,3x}{2x}$

66. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+1}{2x^2-3x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3-8x-3x^2}{x^2+x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-3}{x^3+3x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot tg\,5x}{\sin^2 3x}$

67. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{2x^2+x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+7x-4}{4-3x-x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-8x+1}{3x^2-x+4}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{\sin 3x}$

68. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x+1}{x^2+2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-17x+35}{x^2-x-20}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^3+3x-4}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{tg\,2x}$

69. а) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2-16}{x^2+5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{9x-2x^2-10}{x^2-x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4x+1}{2x^2+x-3}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 3x}{2\sin^2 2x}$

70. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-3}{x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^3+1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-x-x^2}{2x^2+x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{1-\cos^2 x}$

71. а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{2x^2-17x+35}{x^2-x-20}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x^2+6x^6-1}{4x^6+3x+2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{arctg 3x}$

72. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{3x^2-14x+8}{2x^2-7x-4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{42x^2+5x}{3x^2+14x^4+5}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}5x\cdot ctg 4x$

73. а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2+5x-3}{x^2+5x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{4x^2-25x+25}{2x^2-15x+25}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-4x^3+1}{x^3+x+7}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ctg 3x}{ctg 6x}$

74. а) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{3x^2+11x+10}{2x^2+5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{7x^2+26x-8}{2x^2+x-28}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x^3-8}{2x^2+13x+8}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^3}{\arcsin 2x}$

75. а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-14x+8}{2x^2-7x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2+5x-8}{2x^2+3x-5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^3-2x+9}{x^2+x+4}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}tg 2x\cdot ctg 3x$

76. а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4x^2-25x+25}{2x^2-15x+25}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3-5x-2}{x^2-x^4+4}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{7x\cdot tg 2x}$

77. а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{7x^2+26x-8}{2x^2+x-28}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{6x^2+13x+7}{3x^2+8x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5-3x+1}{3x^2+11x+9}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg 7x}{5x}$

78. а) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{2x^2+15x+25}{x^2+15x+50}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4+x-3}{x^4+3x^3-21}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$

79. а) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x^2+5x-8}{2x^2+3x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x^2+11x+10}{2x^2+5x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-3}{x^7-3x^5-x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 6x\cdot ctg 2x$

80. а) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{6x^2+13x+7}{3x^2+8x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{2x^2+5x-3}{x^2+5x+6}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-81}{3x^2+4x+2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 8x}{4x^4}$.

В задачах 81 – 100 найти производные следующих функций.

81. а) $y=5x^2-\frac{2}{\sqrt{x}}+\sqrt[8]{x^3}-\frac{9}{x^{10}}$; б) $y=\frac{7}{(x-1)^2}-\sqrt{8x-x^2+1}$; в) $y=\frac{x\cdot\sin 3x}{3}+\frac{\cos 3x}{9}$.

82. а) $y=x^4+\frac{3}{x^3}+\frac{1}{\sqrt[6]{x^7}}-\sqrt[4]{x}$; б) $y=\sqrt[5]{3x^2+4x-5}-\frac{4}{(x+7)^3}$; в) $y=\frac{1}{12}\ln\frac{x-5}{x+7}$.

83. а) $y=2x^3-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{4}{x^{11}}+6\sqrt{x}$; б) $y=\sqrt[7]{(x-5)^4}-\frac{8}{x^2+x}$; в) $y=\frac{1}{7}arctg\frac{x+11}{7}$.

84. а) $y=4x^2+\sqrt[3]{x}-\frac{8}{x^5}+7\cdot\sqrt[6]{x^{11}}$; б) $y=\frac{3}{(x+2)^5}-\sqrt[7]{5x-x^2+4}$; в) $y=\arcsin\frac{5x+2}{6}$.

85. а) $y=5x^4-\frac{4}{x^2}-\sqrt[3]{x}+\frac{3}{x^3\cdot\sqrt{x}}$; б) $y=\sqrt{(x-1)^3}-\frac{2}{5+3x}$; в) $y=-\frac{\ln x}{3x^3}-\frac{1}{9x^3}$.

86. а) $y=3x^2-\frac{9}{\sqrt[5]{x^4}}+\frac{1}{x}-8\cdot\sqrt[3]{x}$; б) $y=\sqrt[6]{(x-2)^5}-\frac{3}{9x^2-x+7}$; в) $y=\frac{1}{14}\ln\frac{x+1}{x+8}$.

87. а) $y = 5x^2 - \frac{1}{\sqrt[4]{x}} - \frac{6}{x^6} - x \cdot \sqrt[5]{x}$; б) $y = \frac{3}{(x-4)^6} - \sqrt[3]{4+3x-x^2}$; в) $y = 4arctg\,\frac{x+5}{2}$.

88. а) $y = 4x^5 + \frac{3}{\sqrt[6]{x}} + 2 \cdot \sqrt[13]{x^4} + \frac{1}{x^2}$; б) $y = \frac{2}{(x-1)^3} - \frac{8}{6x^2+3x+7}$; в) $y = \arcsin\frac{3x+4}{5}$.

89. а) $y = x^3 + \frac{4}{x^4} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}} - \sqrt[7]{x^5}$; б) $y = \sqrt{1+5x-2x^2} - \frac{3}{(x-3)^4}$; в) $y = 9\ln\frac{x-2}{x+7}$.

90. а) $y = x^5 + \sqrt[4]{x^3} - \frac{4}{x^4} + \frac{8}{\sqrt[9]{x^4}}$; б) $y = \sqrt[3]{x^2+11x-4} - \frac{2}{7-3x}$; в) $y = \frac{x \cdot e^{3x}}{3} - \frac{1}{9}e^{3x}$.

91. а) $y = 3\sqrt{x} - \frac{7}{\sqrt[6]{x}} + \frac{4}{x^5} + \sqrt[3]{x^2}$; б) $y = \sqrt[4]{5x^2-4x+1} - \frac{7}{(x-5)^2}$; в) $y = \frac{1}{5}arctg\,\frac{x+1}{10}$.

92. а) $y = 5x^3 + \sqrt{x^3} + \frac{2}{x} - \frac{4}{\sqrt[5]{x}}$; б) $y = \sqrt[8]{3-7x+x^2} - \frac{4}{(x-7)^2}$; в) $y = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$.

93. а) $y = 7x^2 + \sqrt[5]{x^4} - \frac{8}{x^3} + \frac{3}{\sqrt{x^5}}$; б) $y = \sqrt{(x-3)^7} + \frac{9}{5x+2}$; в) $y = 3\arcsin\frac{x+7}{12}$.

94. а) $y = 8x^5 - 3x \cdot \sqrt[7]{x^2} - \frac{4}{x} + \frac{1}{\sqrt[14]{x}}$; б) $y = \sqrt[11]{x^2-3x+1} - \frac{3}{(x-8)^4}$; в) $y = \frac{1}{6}\ln\frac{x+7}{x+10}$.

95. а) $y = 3x + 5 \cdot \sqrt[3]{x^4} - \frac{1}{x^4} - \frac{5}{\sqrt[8]{x^7}}$; б) $y = \sqrt{(x+1)^5} - \frac{3}{4x^2-3x+1}$; в) $y = \frac{1}{15}arctg\,\frac{x-2}{3}$.

96. а) $y = \frac{x^9}{3} - \frac{2}{\sqrt{x^3}} + \frac{5}{x} - \sqrt[4]{x^3}$; б) $y = \sqrt[7]{9-x^2+4x} + \frac{5}{2x-4}$; в) $y = \frac{x^2}{2} + 2\ln(x^2-4)$.

97. а) $y = 4x^3 + \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}} - \frac{6}{x} + \sqrt[3]{x^5}$; б) $y = \sqrt[3]{(x+8)^4} - \frac{1}{(3x+2)^2}$; в) $y = \arcsin\frac{5x+11}{2}$.

98. а) $y = 4x^5 - \sqrt[3]{x^7} - \frac{2}{x^6} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$; б) $y = \sqrt[5]{(x-4)^4} - \frac{6}{x-x^2}$; в) $y = 5\ln\frac{x+1}{x+6}$.

99. а) $y = 3x^7 - \frac{4}{\sqrt[5]{x}} - \frac{5}{x^2} - \sqrt[3]{x^4}$; б) $y = \frac{12}{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2-x-2}$; в) $y = \frac{1}{4}arctg\,\frac{x-9}{8}$.

100. а) $y = 4x^3 - \frac{9}{\sqrt[8]{x}} + \frac{6}{x^4} + \sqrt[3]{x^5}$; б) $y = \sqrt[3]{6x^2-x+2} - \frac{5}{x^2+2x+5}$; в) $y = \frac{x^3 \cdot \ln x}{3} - \frac{x^3}{9}$.

В задачах 101 – 120 исследовать заданные функции методами дифференциального исчисления и построить ее график. Исследование функции рекомендуется проводить по следующей схеме:

1) Найти область определения функции.

2) Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва функции и ее односторонние пределы в точках разрыва.

3) Найти асимптоты кривой.

4) Исследовать на четность или нечетность.

5) Найти интервалы возрастания и убывания функции и точки экстремума.

6) Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба.

7) Построить график, используя результаты предыдущих исследований.

101. а) $y=2x^3-9x^2+12x-5$; б) $y=\frac{5-x^2}{x^2+5}$

102. а) $y=x^3-6x^2+9x+1$; б) $y=\frac{x^2}{x-1}$

103. а) $y=-x^3+15x^2-72x+109$; б) $y=\frac{x^2-3}{x+2}$

104. а) $y=x^3+3x^2-9x-10$; б) $y=\frac{6}{x^2+3}$

105. а) $y=x^3+6x^2+9x+2$; б) $y=\frac{x^2+9}{x+4}$

106. а) $y=2x^3-3x^2-12x+5$; б) $y=\frac{x^2+4}{x}$

107. а) $y=\frac{1}{30}x^3-\frac{1}{10}x^2-\frac{3}{2}x+1$; б) $y=\frac{x}{x^2-9}$

108. а) $y=2x^3+9x^2+12x+7$; б) $y=\frac{x^2+5}{x+2}$

109. а) $y=-x^3+9x^2-24x+18$; б) $y=\frac{x^2-5}{x-3}$

110. а) $y=-x^3+18x^2-105x+195$; б) $y=\frac{4x}{x^2+16}$

111. а) $y=2x^3+3x^2-36x-21$; б) $y=\frac{x^2+9}{x}$

112. а) $y=2x^3-15x^2+36x-32$; б) $y=\frac{x^2+8}{x+1}$

113. а) $y=\frac{1}{21}x^3-\frac{1}{7}x^2-\frac{3}{7}x-\frac{1}{2}$; б) $y=\frac{4}{x^2+1}$

114. а) $y=2x^3-9x^2-24x+61$; б) $y=\frac{x^2+16}{x+3}$

115. а) $y=-x^3-6x^2-9x-3$; б) $y=\frac{x^2-12}{x-4}$

116. а) $y=\frac{1}{24}x^3+\frac{1}{4}x^2-\frac{21}{8}x-1$; б) $y=\frac{3-x^2}{3+x^2}$

117. а) $y=x^3-9x^2+24x-18$; б) $y=\frac{x^2+24}{x+1}$

118. а) $y=\frac{1}{15}x^3-\frac{1}{5}x^2-3x-2$; б) $y=\frac{x^2+32}{x-2}$

119. а) $y=x^3+3x^2-24x-21$; б) $y=\frac{x^2+27}{x+3}$

120. а) $y=-x^3-9x^2-24x-21$; б) $y=\frac{x^2-7}{x-4}$

В задачах 121 – 140 исследовать на экстремум функцию двух переменных $z=f(x;y)$.

121. $z=3xy-x^2-3y^2-6x+9y+2$. 122. $z=x^2-xy+y^2+x+y+4$.

123. $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$. 124. $z=x^2+3xy+y^2-x-4y+3$.

125. $z=3xy-x^2-3y^2+x+3$. 126. $z=x^2+xy+y^2-13x-11y+17$.
126. $z=x^2+xy+y^2+4x-y+5$. 128. $z=3xy-x^2-y^2-10x+5y+3$.
129. $z=5+4x+10y-4xy-2x^2-3y^2$. 130. $z=3x^2+5xy+3y^2+4x+7y+1$.
131. $z=2x^2-3xy+2y^2-9x+12y+10$. 132. $z=x^2+xy-y^2-5x+5y-2$.
133. $z=1-x+y-5xy-3x^2-3y^2$. 134. $z=2x^2+3xy+2y^2-4x-10y+12$.
135. $z=x^2-xy+2y^2+2x-8y+3$. 136. $z=3xy-x^2-4y^2+4x-6y+5$.
137. $z=xy-2x^2-y^2+7x-7y-10$. 138. $z=3x^2+3xy+y^2-6x-2y+7$.
139. $z=x^2+3xy-2y^2+2x+3y+1$. 140. $z=xy-x^2-2y^2+x+10y-6$.

В задачах 141 – 160 найти указанные неопределенные интегралы и результаты интегрирования проверить дифференцированием.

141. а) $\int\left(4x^3+\frac{3}{x^4}-\sqrt{x}\right)dx$; б) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^3}}$; в) $\int x\ln 2x dx$; г) $\int\frac{x^3-1}{x^2-2x-3}dx$.

142. а) $\int\left(5x^4-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+x\right)dx$; б) $\int\sin^2 x\cos x dx$; в) $\int xe^{3x}dx$; г) $\int\frac{x^3-85}{x^2-4x-5}dx$.

143. а) $\int\left(2x-\frac{5}{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$; б) $\int xe^{x^2+3}dx$; в) $\int x\sin 2x dx$; г) $\int\frac{x^3-4}{x^2+3x-4}dx$.

144. а) $\int\left(6x^5+\frac{2}{x^3}-\sqrt[3]{x}\right)dx$; б) $\int\frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$; в) $\int x\cos 3x\,dx$; г) $\int\frac{x^3-42}{x^2-7x+10}dx$.

145. а) $\int\left(x^3-\frac{5}{x^5}+\sqrt[4]{x}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\cos^2(3x-1)}$; в) $\int x\ln 3x dx$; г) $\int\frac{x^3-5}{x^2-2x-8}dx$.

146. а) $\int\left(6x^2-\frac{5}{x}+\sqrt[4]{x^3}\right)dx$; б) $\int\frac{x^2dx}{3x^3+4}$; в) $\int x\sin 5x dx$; г) $\int\frac{x^3-16}{x^2-4x+3}dx$.

147. а) $\int\left(10x^4+\frac{4}{x^2}-\sqrt[3]{x^2}\right)dx$; б) $\int\cos^3 x\sin x dx$; в) $\int x\ln 4x dx$; г) $\int\frac{x^3+84}{x^2+4x-5}dx$.

148. а) $\int\left(4x-\frac{5}{x^3}+\sqrt[4]{x}\right)dx$; б) $\int\frac{e^{2x}}{4+e^{2x}}dx$; в) $\int x\sin 3x dx$; г) $\int\frac{x^3+7}{x^2-3x-4}dx$.

149. а) $\int\left(7x^6-\frac{6}{x^7}-e^x\right)dx$; б) $\int\frac{x^2dx}{2x^3+1}$; в) $\int x\cos 4x dx$; г) $\int\frac{x^3+2}{x^2+2x-8}dx$.

150. а) $\int\left(3x^2+\frac{6}{x^7}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$; б) $\int\cos^2 x\sin x dx$; в) $\int x^3\ln 2x dx$; г) $\int\frac{x^3+36}{x^2+6x+5}dx$.

151. а) $\int\left(3x-\frac{1}{x^4}+8\cdot\sqrt[3]{x}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{4x+1}}$; в) $\int x\cos 2x dx$; г) $\int\frac{x^3+1}{x^2-6x+8}dx$.

152. а) $\int\left(8x^2-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{9}{x^3}\right)dx$; б) $\int\frac{5x^2dx}{x^3+1}$; в) $\int x\sin 4x dx$; г) $\int\frac{x^3-6}{x^2+4x+3}dx$.

153. а) $\int\left(x^3+\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{8}{x^3}\right)dx$; б) $\int\sin^3 x\cos x dx$; в) $\int xe^{-x}dx$; г) $\int\frac{x^3+1}{x^2+2x-3}dx$.

154. а) $\int\left(3x^5-\frac{2}{x^2}+3\cdot\sqrt[3]{x^2}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{5x+8}}$; в) $\int x^4\ln 3x dx$; г) $\int\frac{x^3-46}{x^2-6x+5}dx$.

155. а) $\int\left(x^4+\frac{4}{x^3}-5\cdot\sqrt[3]{x^2}\right)dx$; б) $\int\frac{xdx}{\sqrt{4x^2+3}}$; в) $\int xe^{4x}dx$; г) $\int\frac{x^3-17}{x^2-x-2}dx$.

156. а) $\int\left(x^6-\frac{5}{x^4}+7\sqrt{x}\right)dx$; б) $\int\frac{\sqrt{tgx}dx}{\cos^2 x}$; в) $\int xe^{-3x}dx$; г) $\int\frac{x^3-37}{x^2-3x-10}dx$.

157. а) $\int\left(2x^7+7-\sqrt[4]{x^3}\right)dx$; б) $\int xe^{3x^2+1}dx$; в) $\int x\cos 5x dx$; г) $\int\frac{x^3-2}{x^2-5x+4}dx$.

158. а) $\int\left(6x^5-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+3\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{(2+3x)^2+4}$; в) $\int xe^{-4x}dx$; г) $\int\frac{x^3-7}{x^2+5x+4}dx$.

159. а) $\int\left(8x^3-\frac{2}{\sqrt[5]{x^2}}+\frac{6}{x^5}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-(3x-1)^2}}$; в) $\int x\sin 6x dx$; г) $\int\frac{x^3+50}{x^2+3x-10}dx$.

300. а) $\int\left(6x^7+\frac{2}{x^3}-3\cdot\sqrt[6]{x^5}\right)dx$; б) $\int xe^{2x^2+3}dx$; в) $\int xe^{5x}dx$; г) $\int\frac{x^3+22}{x^2+x-2}dx$.

В задачах 161 – 180 вычислить площадь фигуры, ограниченную заданными линиями. Сделать чертеж и заштриховать искомую площадь.

161. $y=2x^2-5x+3,\ x+y-9=0$.

162. $y=-x^2-6x-5,\ x+y+5=0$.

163. $y=\frac{1}{3}x^2-2x+\frac{5}{3},\ 3x-5y-17=0$.

164. $y=-x^2-3x+4,\ 2x+y+2=0$.

165. $y=\frac{1}{4}x^2-x+\frac{3}{4},\ x+2y-3=0$.

166. $y=x^2-4x-5,\ x-y-9=0$.

167. $y=-2x^2+9x-7,\ 5x+y-13=0$.

168. $y=x^2-11x+24,\ 3x+y-12=0$.

169. $y=-\frac{2}{3}x^2+\frac{5}{3}x-1,\ x+y-1=0$.

170. $y=x^2+x-12,\ 4x-y-2=0$.

171. $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-3,\ x-y-1=0$.

172. $y=-x^2-5x+6,\ 3x+y+2=0$.

173. $y=-\frac{3}{4}x^2-\frac{11}{4}x+1,\ 5x+4y+20=0$.

174. $y=2x^2-11x+15,\ x-y+5=0$.

175. $y=\frac{1}{3}x^2+2x+3,\ x-y+3=0$.

176. $y=-4x^2+23x-15,\ 3x-y+1=0$.

177. $y=x^2+7x+10,\ 2x+y+8=0$.

178. $y=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{5}{2},\ 5x+2y-19=0$.

179. $y=3x^2+5x-8,\ 7x+y+17=0$.

180. $y=-x^2+7x-6,\ x-y+2=0$.

Контрольная работа №2.

В задачах 1 – 20: а) исследовать на сходимость знакоположительный ряд с помощью признака Даламбера; б) исследовать на сходимость знакочередующийся ряд с помощью признака Лейбница; в) найти радиус сходимости степенного ряда и определить тип сходимости ряда на концах интервала сходимости.

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+7}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{6^n}\cdot x^n$.

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 4^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2+5}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n+8}\cdot x^n$.

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{7^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+9}\cdot x^n$.

4. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^{n+2}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n}\cdot x^n$.

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n}{n^3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{5n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot x^n$.

6. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)8^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n}{n+11}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3^n}\cdot x^n$.

7. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n+7}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^4+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n}\cdot x^n$.

8. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(n+1)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{6}{\sqrt{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}\cdot x^n$.

9. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n+4}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\cdot x^n$.

10. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^{n+2}}{n+4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{7}{\sqrt[5]{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot 9^n}\cdot x^n$.

11. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^{n+3}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3}{2n+6}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}\cdot x^n$.

12. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^3+5}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 7^n}\cdot x^n$.

13. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n}{n+4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4n}{n+8}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+7}\cdot x^n$.

14. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{13}{n\cdot 8^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5}{\sqrt{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)\cdot x^n$.

15. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+7}{4^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{9\cdot\sqrt[4]{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}\cdot x^n$.

16. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^{n+2}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+4}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot x^n$.

17. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{17}{6n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}\cdot x^n$.

18. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{(n+3)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\sqrt{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{4^n}\cdot x^n$.

19. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8\cdot 3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+4}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{5^{n+2}}\cdot x^n$.

20. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n+6}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{n+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{n}\cdot x^n$.

В задачах 21 – 40 вычислить определенный интеграл с точностью до $0{,}001$ путем предварительного разложения подынтегральной функции в степенной ряд и почленного интегрирования этого ряда.

21. $\int_0^{0,5}\frac{\ln(1+x^2)}{x}dx$. 22. $\int_0^{0,5}e^{-4x^2}dx$. 23. $\int_0^{0,2}\frac{e^{-x}-1}{x}dx$. 24. $\int_0^{1}\cos\sqrt{x}\,dx$.

25. $\int_0^{0,6}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$. 26. $\int_0^{0,3}\cos(10x^2)dx$. 27. $\int_0^{1}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$. 28. $\int_0^{0,5}\cos(2x^2)dx$.

29. $\int_0^{0,5}\sqrt{1+x^3}\,dx$. 30. $\int_0^{0,3}e^{-2x^2}dx$. 31. $\int_0^{1}x\sin\sqrt{x}\,dx$. 32. $\int_0^{0,5}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$.

33. $\int_0^{0,4}e^{-5x^2}dx$. 34. $\int_0^{0,3}\frac{\sin 4x}{x}dx$. 35. $\int_0^{1}x\cos\sqrt[3]{x}\,dx$. 36. $\int_0^{0,2}\frac{1-e^{-x}}{x}dx$.

37. $\int_0^{0,8}\cos(x^2)dx$. 38. $\int_0^{0,7}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^4}}$. 39. $\int_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$. 40. $\int_0^{0,5}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}dx$.

Задачи 41 – 60. В ящике K исправных предохранителей и H с дефектом. Необходимо заменить M предохранителей. Найти вероятность того, что: а) только P предохранителей исправны; б) меньше, чем P предохранителей исправны; в) хотя бы 1 предохранитель исправен.

Исходные данные для решения задач:

№	K	H	M	P	№	K	H	M	P
41.	24	6	4	3	51.	34	6	5	4
42.	29	6	4	3	52.	42	8	4	3
43.	33	7	5	2	53.	33	7	6	4
44.	35	5	4	3	54.	41	9	4	3
45.	32	8	5	3	55.	23	7	4	2
46.	34	6	4	2	56.	32	8	5	4
47.	25	5	4	2	57.	34	6	5	3
48.	24	6	5	3	58.	23	7	6	4
49.	35	5	4	2	59.	36	4	3	2
50.	29	6	5	3	60.	33	7	5	3

Решить задачи 61 – 80.

61. Для сообщения об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора-автомата. Вероятность того, что при аварии сработает первый

сигнализатор, равна $0{,}95$; второй – $0{,}8$. Найти вероятность того, что при аварии сработают два из трех сигнализатора.

62. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что наугад взятое изделие окажется бракованным, равна $0{,}15$. Проверено три изделия. Какова вероятность того, что только одно изделие браковано?

63. В группе студентов, состоящей из 25 человек, 16 юношей и 9 девушек. Для дежурства случайным образом отобрано двое студентов. Какова вероятность того, что дежурить будут только девушки?

64. Два завода производят холодильники одной и той же марки, причем первый завод выпускает продукции вдвое больше, чем второй. Первый завод производит в среднем $70\,\%$ холодильников высшего качества, а второй – $80\,\%$. Выбранный наугад холодильник оказался высшего качества. Найти вероятность того, что холодильник изготовлен на первом заводе.

65. Вероятность того, что в течение дня произойдет сбой в компьютерной системе предприятия, равна $0{,}1$. Какова вероятность того, что в течение трёх дней подряд не произойдет ни одного сбоя?

66. В ящике имеется 20 деталей, из которых 5 деталей нестандартны. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Какова вероятность того, что все они будут нестандартными?

67. В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо друг от друга. Вероятности отказов первого, второго и третьего элементов соответственно равны $0{,}15$, $0{,}2$ и $0{,}25$. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

68. Пассажир может приобрести билет в одной из двух касс. Вероятность обращения в первую кассу составляет $0{,}4$; а во вторую – $0{,}6$. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира нужные ему билеты будут распроданы, равна $0{,}35$ для первой кассы и $0{,}7$ для второй. Пассажир посетил одну из касс и приобрел билет. Найти вероятность того, что он приобрел билет во второй кассе.

69. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение смены его внимания потребует первый станок, равна $0{,}7$, второй – $0{,}75$, третий – $0{,}8$. Найти вероятность того, что в течение смены внимания рабочего потребуют: а) какие-либо два станка; б) все три станка.

70. В магазин поступил одноименный товар, изготовленный двумя предприятиями. С первого предприятия поступило 150 единиц товара, из них 30 единиц первого сорта. Со второго предприятия – 200 единиц, из них 50 – первого сорта. Из общей массы извлекли единицу товара, который оказался первого сорта. Найти вероятность того, что извлеченный товар изготовлен на первом предприятии.

71. Экзаменационный тест содержит три вопроса. Вероятности того, что студент ответит на первый и второй вопросы, одинаковы и равны $0{,}9$, на третий – $0{,}8$. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для

этого необходимо ответить: а) на все вопросы; б) по крайней мере, на два вопроса теста.

72. Покупатель желает приобрести электрическую лампочку. На полке в магазине лежат 200 лампочек, изготовленных на одном заводе и 150 на другом (все лампочки одинаковой мощности). Вероятность брака для первого завода составляет $0{,}01$; для второго $0{,}005$. Продавец взял лампочку для проверки, и она оказалась бракованной. Найти вероятность того, что лампочка изготовлена на втором заводе.

73. Для сообщения об аварии установлены три независимо работающих сигнализатора-автомата. Вероятность того, что при аварии сработает первый сигнализатор, равна $0{,}95$; второй – $0{,}9$, третий – $0{,}85$. Найти вероятность того, что при аварии поступит сигнал; а) хотя бы от одного сигнализатора; б) только от одного сигнализатора.

74. На автопредприятие поступили одноименные детали с двух заводов. Вероятность того, что деталь, изготовленная на первом заводе, соответствует ГОСТу – $0{,}9$; для второго – $0{,}85$. Первый завод поставил 2000 деталей, второй – 3000. Сборщик взял одну деталь, которая оказалась соответствующей ГОСТу. Найти вероятность того, что эта деталь изготовлена на первом заводе.

75. Из трех орудий произвели залп по цели. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого орудия равна $0{,}8$; для второго и третьего орудий эти вероятности соответственно равны $0{,}6$ и $0{,}7$. Найти вероятность того, что только один снаряд попадет в цель.

76. Вероятность выхода из строя станка в течение рабочего дня равна $0{,}05$. Какова вероятность того, что за три рабочих дня станок ни разу не выйдет из строя?

77. Охотник выстрелил три раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в неё в начале стрельбы равна $0{,}7$, а после каждого выстрела уменьшается на $0{,}1$. Найти вероятность того, что он попадёт все три раза.

78. Три стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Вероятность поражения мишени каждым из стрелков равна $0{,}8$. Найти вероятность того, что в мишени окажется более одной пробоины.

79. В цехе ремонта локомотивного депо 3 электровоза. Вероятность того, что за смену не будет отремонтирован первый электровоз, равна $0{,}1$, второй – $0{,}2$, третий – $0{,}05$. Найти вероятность того, что: а) в течение смены второй и третий электровозы будут отремонтированы; б) хотя бы два электровоза будут отремонтированы.

80. С первого станка на сборку поступает $30\,\%$, со второго – $70\,\%$ всех деталей. Среди деталей первого станка $90\,\%$ стандартных, второго – $80\,\%$. Предположим, что выбранная деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что она поступила на сборку с первого станка.

В задачах 81 – 100 в энергосистеме имеется группа из n однотипных агрегатов, находящихся в независимых и одинаковых условиях. Вероятность исправного состояния каждого агрегата в течение времени T одинакова и равна p. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа агрегатов, находящихся в исправном состоянии в течение времени T. Найти числовые характеристики этой случайной величины.

Исходные данные для решения задач:

№	n	p	№	n	p	№	n	p	№	n	p
81.	4	0,55	86.	5	0,6	91.	6	0,75	96.	7	0,75
82.	5	0,65	87.	6	0,55	92.	7	0,9	97.	4	0,73
83.	6	0,85	88.	7	0,8	93.	4	0,92	98.	5	0,78
84.	7	0,7	89.	4	0,87	94.	5	0,84	99.	6	0,7
85.	4	0,85	90.	5	0,9	95.	6	0,8	100.	7	0,85

В задачах 101 – 120 случайная величина X задана функцией распределения $F(X)$. Найти: а) плотность распределения вероятностей $f(x)$; б) математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ случайной величины; в) вероятность того, что случайная величина примет значение на отрезке $[a,b]$.

101. $F(X)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ x^2 & при \quad 0<x\le 1,\\ 1 & при \quad x>1\end{cases}\quad a=0{,}5,\ b=1.$

102. $F(X)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 1\\ \dfrac{x^2-x}{2} & при \quad 1<x\le 2,\\ 1 & при \quad x>2\end{cases}\quad a=1{,}5,\ b=2.$

103. $F(X)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ x^3 & при \quad 0<x\le 1,\\ 1 & при \quad x>1\end{cases}\quad a=0{,}5,\ b=1.$

104. $F(X)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ 3x^2+2x & при \quad 0<x\le \dfrac{1}{3},\\ 1 & при \quad x>\dfrac{1}{3}\end{cases}\quad a=0{,}1,\ b=0{,}25.$

105. $F(X)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 2\\ \dfrac{x}{2}-1 & при \quad 2<x\le 4,\\ 1 & при \quad x>4\end{cases}\quad a=3,\ b=4.$

106. $F(X)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{9} & при \quad 0 < x \le 3, \\ 1 & при \quad x > 3 \end{cases}$ $\quad a=1,\ b=2.$

107. $F(X)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{4} & при \quad 0 < x \le 2, \\ 1 & при \quad x > 2 \end{cases}$ $\quad a=0{,}5,\ b=1.$

108. $F(X)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le -1 \\ \dfrac{1}{4}(x+1)^2 & при \quad -1 < x \le 1, \\ 1 & при \quad x > 1 \end{cases}$ $\quad a=-0{,}5,\ b=0.$

109. $F(X)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le 0 \\ \dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{4}{5} & при \quad 0 < x \le 1, \\ 1 & при \quad x > 1 \end{cases}$ $\quad a=\dfrac{1}{3},\ b=\dfrac{2}{3}.$

110. $F(X)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le -1 \\ \dfrac{1}{9}(x+1)^2 & при \quad -1 < x \le 2, \\ 1 & при \quad x > 2 \end{cases}$ $\quad a=0,\ b=1.$

111. $F(X)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{100} & при \quad 0 < x \le 10, \\ 1 & при \quad x > 10 \end{cases}$ $\quad a=5,\ b=7.$

112. $F(X)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{81} & при \quad 0 < x \le 9, \\ 1 & при \quad x > 9 \end{cases}$ $\quad a=1,\ b=3.$

113. $F(X)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{64} & при \quad 0 < x \le 8, \\ 1 & при \quad x > 8 \end{cases}$ $\quad a=2,\ b=6.$

114. $F(X)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{49} & при \quad 0 < x \le 7, \\ 1 & при \quad x > 7 \end{cases}$ $\quad a=2,\ b=3.$

115. $F(X)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ \dfrac{x^2}{36} & при \quad 0<x\le 6,\\ 1 & при \quad x>6\end{cases}$ $a=4$, $b=5$.

116. $F(X)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ \dfrac{x^2}{25} & при \quad 0<x\le 5,\\ 1 & при \quad x>5\end{cases}$ $a=1$, $b=5$.

117. $F(X)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ \dfrac{x^2}{16} & при \quad 0<x\le 4,\\ 1 & при \quad x>4\end{cases}$ $a=1$, $b=3$.

118. $F(X)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ \dfrac{x^2}{9} & при \quad 0<x\le 3,\\ 1 & при \quad x>3\end{cases}$ $a=1$, $b=3$.

119. $F(X)=\begin{cases}0 & при \quad x\le -1\\ \dfrac{1}{16}(x+1)^2 & при \quad -1<x\le 3,\\ 1 & при \quad x>3\end{cases}$ $a=0{,}5$, $b=2$.

120. $F(X)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{2} & при \quad 0<x\le 1,\\ 1 & при \quad x>1\end{cases}$ $a=\dfrac{1}{3}$, $b=\dfrac{2}{3}$.

В задачах 121 – 140 считается, что отклонение длины изготавливаемых деталей от стандарта является случайной величиной X, распределенной по нормальному закону со стандартной длиной a см и средним квадратическим отклонением σ см. Найти: а) вероятность того, что длина изготавливаемых деталей примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)$; б) вероятность того, что отклонение длины от стандартной составит по абсолютной величине не более δ см; в) интервал, в который попадут значения длины изготавливаемых деталей с вероятностью $0{,}9973$.

Исходные данные для решения задач:

№	a	σ	α	β	δ	№	a	σ	α	β	δ
121.	10	3	7	12	2	131.	16	3	14	20	5
122.	6	2	5	8	1	132.	14	2	10	15	4
123.	5	1	4	7	0,5	133.	4	1	2	7	0,8
124.	7	3	2	8	4	134.	12	1,5	10	15	2
125.	15	4	10	19	3	135.	18	4	15	22	6
126.	2	0,5	1,5	3	1	136.	7	2	6	10	3
127.	13	3	8	14	2	137.	10	2,5	8	14	2
128.	8	2	7	10	1,5	138.	17	3	15	21	4

129.	11	4	8	15	5	139.	3	0,7	2	5	1
130.	9	2	8	12	3	140.	20	5	16	27	6

В задачах 141 – 160 даны измерения 100 обработанных деталей. В таблице указаны значения отклонений от заданного размера и соответствующие им частоты.

$(x_{i-1};\, x_i]$	$(-2;-1{,}5]$	$(-1{,}5;-1]$	$(-1;-0{,}5]$	$(-0{,}5;\,0]$	$(0;\,0{,}5]$	$(0{,}5;\,1]$	$(1;1{,}5]$	$(1{,}5;\,2]$
n_i	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8

Считая, что признак X – отклонение от проектного размера – подчиняется нормальному закону распределения, 1) построить гистограмму относительных частот; 2) записать дискретное распределение признака X; 3) найти выборочную среднюю и исправленное среднее квадратическое отклонение; 4) указать доверительный интервал, покрывающий с надежностью 0,95 неизвестное математическое ожидание a признака X; 5) указать доверительный интервал, покрывающий с надежностью 0,95 неизвестное среднее квадратическое отклонение σ признака X.

Исходные данные для решения задач:

№	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8
141.	2	5	10	18	23	21	14	7
142.	3	5	9	19	22	21	13	8
143.	1	4	10	19	24	20	13	9
144.	2	5	11	18	22	20	15	7
145.	4	6	10	17	21	20	13	9
146.	3	6	9	18	25	19	12	8
147.	1	5	10	17	24	21	14	8
148.	2	4	9	18	23	20	15	9
149.	2	6	11	17	22	19	14	9
150.	3	5	9	18	25	20	12	8
151.	2	7	10	18	22	19	13	9
152.	1	6	10	19	23	21	12	8
153.	4	5	11	17	22	20	13	8
154.	2	6	10	18	24	18	13	9
155.	1	4	12	19	22	20	15	7
156.	2	4	11	19	23	20	14	7
157.	3	4	10	17	25	21	13	7
158.	2	5	9	18	23	21	14	8
159.	3	6	10	19	21	19	12	10
160.	2	3	11	18	22	20	14	9

2.3 Пример выполнения типового задания

Контрольная работа №1

Типовая задача (1-20). Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} x+y-2z=-2 \\ 2x-y+3z=13 \\ 3x+2y-z=5 \end{cases}$ двумя способами: а) методом Гаусса; б) по формулам Крамера.

Решение. а) Решаем методом Гаусса.

Запишем расширенную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду. Для этого первую строку матрицы умножим на (-2) и сложим со второй; ее же умножим на (-3) и сложим с третьей. Затем поменяем местами вторую и третью строки. После вторую строку матрицы умножаем на (-3) и складываем с третьей:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \end{array}\right) \cdot (-2) \cdot (-3) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 7 & 17 \\ 0 & -1 & 5 & 11 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 5 & 11 \\ 0 & -3 & 7 & 17 \end{array}\right) \cdot (-3) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & -16 \end{array}\right).$$

От матрицы ступенчатого вида перейдем к соответствующей системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} x+y-2z=-2 \\ \quad -y+5z=11 \\ \qquad -8z=-16 \end{cases}.$$

Из последнего равенства находим значение z и, подставляя его в первое и второе уравнения, находим остальные неизвестные:

$$\begin{cases} x+y-4=-2 \\ \quad -y+10=11 \\ \qquad z=2 \end{cases}, \text{ т.е. } \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \\ z=2 \end{cases}.$$

Итак, решением системы уравнений является набор чисел $(3; -1; 2)$.

б) Решим эту же систему по формулам Крамера. Составим и вычислим главный определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + (-2) \cdot A_{13} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot M_{11} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot M_{12} + (-2) \cdot (-1)^{1+3} \cdot M_{13} =$$

$$= M_{11} - M_{12} - 2M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = ((-1)\cdot(-1) - 2\cdot 3) - (2\cdot(-1) - 3\cdot 3) -$$

$$- 2 \cdot (2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1)) = (1-6) - (-2-9) - 2\cdot(4+3) = -5 + 11 - 14 = -8.$$

Итак, $\Delta = -8$.

Составим: $\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 13 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + (-2) \cdot A_{13} = -2 \cdot M_{11} - M_{12} - 2 \cdot M_{13} =$

$= -2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 13 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot (1-6) - (-13-15) - 2 \cdot (26 - (-5)) =$

$= 10 + 28 - 62 = -24$.

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 13 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + (-2) \cdot A_{12} + (-2) \cdot A_{13} = M_{11} + 2M_{12} - 2M_{13} =$

$= \begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -28 - 22 + 58 = 8$.

$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 13 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} - 2 \cdot A_{13} = M_{11} - M_{12} - 2M_{13} =$

$= \begin{vmatrix} -1 & 13 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -31 + 29 - 14 = -16$.

Находим значения неизвестных:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-24}{-8} = 3;\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{8}{-8} = -1;\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-16}{-8} = 2.$$

Получаем: $(3; -1; 2)$.

Ответ: $(3; -1; 2)$.

Типовая задача (21 – 40). Доказать, что векторы $\vec{a}(3; -1; 0)$, $\vec{b}(2; 3; 1)$ и $\vec{c}(-1; 4; 3)$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}(2; 3; 7)$ в этом базисе.

Решение.

Базисом в пространстве называется система трех некомпланарных векторов. Три вектора $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, $\vec{c}(x_3; y_3; z_3)$ являются некомпланарными, если определитель, составленный из координат данных векторов отличен от нуля, т.е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Подставим координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в определитель:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 22 \neq 0.$$

Так как значение определителя отлично от нуля, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис, и вектор $\vec{d}$ линейно выражается через базисные векторы:

$$\vec{d} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c}.$$

Запишем данное равенство в координатной форме:

$(2;\,3;\,7) = x \cdot (3;\,-1;\,0) + y \cdot (2;\,3;\,1) + z \cdot (-1;\,4;\,3)$.

Сравнивая одноименные координаты:

$$\begin{cases} 2 = x \cdot 3 + y \cdot 2 + z \cdot (-1) \\ 3 = x \cdot (-1) + y \cdot 3 + z \cdot 4 \\ 7 = x \cdot 0 + y \cdot 1 + z \cdot 3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3x + 2y - z = 2 \\ -x + 3y + 4z = 3 \\ y + 3z = 7 \end{cases}.$$

Решаем полученную систему по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 22,\ \Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 66,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -44,\ \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 66.$$

Находим:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{66}{22} = 3,\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-44}{22} = -2,\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{66}{22} = 3.$$

Поэтому $\vec{d}\,(3;\,-2;\,3)$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Ответ: $\vec{d}\,(3;\,-2;\,3)$.

Типовая задача (41 – 60). Даны вершины треугольника ABC: $A(-2;\,5)$, $B(10;\,-4)$, $C(8;\,10)$. Найти: а) уравнения сторон треугольника и их угловые коэффициенты; б) периметр треугольника ABC; в) наименьший из углов $\Delta\,ABC$; г) уравнение медианы AM; д) уравнение высоты CD и ее длину; е) уравнение окружности, для которой высота CD есть диаметр. Сделать общий рисунок.

Решение.

а) Уравнение прямой, проходящей через точки $A(x_1;\,y_1)$ и $B(x_2;\,y_2)$, имеет вид:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Подставляя в формулу соответствующие координаты точек A и B, находим уравнение стороны AB.

$$\frac{y - 5}{-4 - 5} = \frac{x - (-2)}{10 - (-2)},$$

$$\frac{y - 5}{-9} = \frac{x + 2}{12},$$

$$\frac{y - 5}{-3} = \frac{x + 2}{4},$$

$$4y - 20 = -3x - 6,$$

$3x + 4y - 14 = 0$ – уравнение стороны AB.

Чтобы найти угловой коэффициент прямой AB (k_{AB}), решим полученное уравнение относительно y:

$$4y = -3x + 14,$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{14}{4}, \text{ откуда } k_{AB} = -\frac{3}{4}.$$

Аналогично подставляя в формулу координаты точек A и C, находим уравнение стороны AC.

$$\frac{y-5}{10-5} = \frac{x+2}{8+2},$$

$$\frac{y-5}{5} = \frac{x+2}{10},$$

$$\frac{y-5}{1} = \frac{x+2}{2},$$

$$x + 2 = 2y - 10,$$

$$x - 2y + 12 = 0 \text{ – уравнение стороны } AC; \ k_{AC} = \frac{1}{2}.$$

Аналогично находим уравнение стороны BC: $7x + y - 66 = 0$; $k_{BC} = -7$.

б) Периметр треугольника равен сумме длин всех сторон, т. е.

$$P_{ABC} = |AB| + |AC| + |BC|.$$

Длину стороны AB вычисляем как расстояние между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ по формуле:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Подставляем соответствующие координаты точек A и B:

$$|AB| = \sqrt{(10-(-2))^2 + (-4-5)^2} = \sqrt{144+81} = \sqrt{225} = 15.$$

Аналогично вычисляем длины двух других сторон:

$$|AC| = \sqrt{(8-(-2))^2 + (10-5)^2} = \sqrt{100+25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}.$$

$$|BC| = \sqrt{(8-10)^2 + (10-(-4))^2} = \sqrt{4+196} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}.$$

Таким образом,

$$P_{ABC} = 15 + 5\sqrt{5} + 10\sqrt{2}.$$

в) Меньший угол треугольника лежит против меньшей стороны. У нас $|AC| < |BC| < |AB|$, поэтому угол B, лежащий против стороны AC, является наименьшим.

Если даны две прямые, угловые коэффициенты которых соответственно k_1 и k_2, то угол α между этими прямыми определяется по формуле:

$$tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|.$$

Искомый угол B образован прямыми AB и BC, угловые коэффициенты, которых найдены ранее в пункте 1). Для определения угла B положим $k_1 = k_{AB} = -\frac{3}{4}$ и $k_2 = k_{BC} = -7$. Применяя формулу, получим:

$$tgB=\left|\frac{-7-\left(-\frac{3}{4}\right)}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot(-7)}\right|=\left|\frac{-\frac{25}{4}}{\frac{25}{4}}\right|=|-1|=1; \text{ откуда } \angle B=arctg1=45^o.$$

г) Для нахождения координат точки M - середины отрезка BC воспользуемся формулами деления отрезка пополам:

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{2};\ y_M=\frac{y_B+y_C}{2}.$$

Подставив координаты точек B и C в уравнения, получим:

$$x_M=\frac{10+8}{2}=9;\ y_M=\frac{-4+10}{2}=3, \text{ т.е. } M(9;3).$$

Далее воспользуемся формулой для составления уравнения прямой, проходящей через две данные точки $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$. Для точек $A(-2;5)$ и $M(9;3)$ получаем равенство

$$\frac{y-5}{3-5}=\frac{x-(-2)}{9-(-2)},$$

$$\frac{y-5}{-2}=\frac{x+2}{11},$$

$$11y-55=-2x-4,$$

$$2x+11y-51=0 \text{ - уравнение медианы } AM.$$

д) Высота CD перпендикулярна стороне AB. Известно, что если две прямые взаимно перпендикулярны, то их угловые коэффициенты обратные по величине и противоположны по знаку, т.е.

$$k_{CD}=-\frac{1}{k_{AB}}=-\frac{1}{-\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}, \text{ так как } k_{AB}=-\frac{3}{4}.$$

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_0;y_0)$ с данным угловым коэффициентом k, имеет вид:

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

Подставив координаты точки $C(8;10)$ и найденный угловой коэффициент $k_{CD}=\frac{4}{3}$, получим искомое уравнение высоты CD:

$$y-10=\frac{4}{3}(x-8),$$

$$3y-30=4x-32,$$

$$4x-3y-2=0 \text{ – уравнение высоты } CD.$$

Для нахождения длины высоты CD определим сначала координаты точки D – точки пересечения высоты CD и стороны AB. Решая совместно систему уравнений AB и CD:

$$\begin{cases}3x+4y-14=0\\4x-3y-2=0\end{cases}, \text{ находим } \begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}, \text{ т.е. } D(2;2).$$

Длину высоты CD определяем по формуле (2).

$$|CD| = \sqrt{(2-8)^2 + (2-10)^2} = \sqrt{100} = 10.$$

е) Уравнение окружности с центром в точке $E(a;b)$ и радиусом R имеет вид:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

Так как высота CD является диаметром окружности, то радиус равен половине длины высоты:

$$R = \frac{1}{2}|CD| = \frac{1}{2}\cdot 10 = 5.$$

Центр окружности является серединой высоты CD. Для нахождения координат центра воспользуемся формулами деления отрезка пополам:

$$x_E = \frac{x_C + x_D}{2};\ y_E = \frac{y_C + y_D}{2}.$$

Подставив координаты точек C и D в уравнения, получим:

$$x_E = \frac{8+2}{2} = 5;\ y_E = \frac{10+2}{2} = 6, \text{ т.е. } E(5;6).$$

Таким образом, уравнение окружности имеет вид:

$$(x-5)^2 + (y-6)^2 = 25.$$

На рисунке 1 в декартовой прямоугольной системе координат xOy изображен треугольник ABC, медиана AM, высота CD, окружность с центром в точке E.

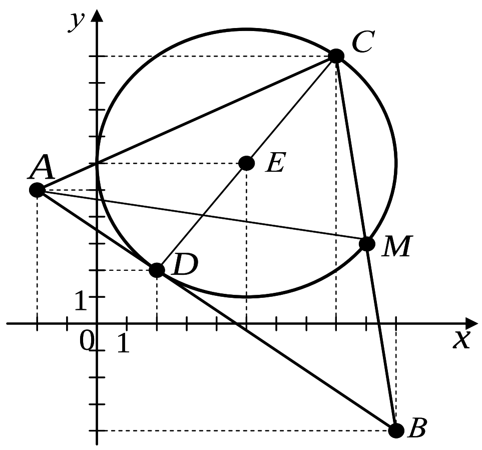


Рис. 1

Ответ: а) $AB: 3x + 4y - 14 = 0$, $k_{AB} = -\frac{3}{4}$; $AC: x - 2y + 12 = 0$, $k_{AC} = \frac{1}{2}$; $BC: 7x + y - 66 = 0$; $k_{BC} = -7$; б) $P_{ABC} = 15 + 5\sqrt{5} + 10\sqrt{2}$; в) $\angle B = 45^o$; г) $AM: 2x + 11y - 51 = 0$; д) $CD: 4x - 3y - 2 = 0$, $|CD| = 10$; е) $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 25$.

Типовая задача (61 – 80). Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2 - 5x + 1}{2x^2 + x - 6}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2 + 3x + 7}{x^2 + x - 2}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2 + x - 10}{x^2 + x - 6}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2 - 3x + 1}{2x^2 + x - 5}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\arcsin 4x}{\cos 2x - 1}$.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+1}{2x^2+x-6}$.

Под знаком предела имеется дробная рациональная функция, знаменатель которой при $x=3$ (предельное значение аргумента) отличен от нуля. Так как данная функция является непрерывной, то, чтобы найти ее предел при $x\to 3$, достаточно аргумент x заменить его предельным значением:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+1}{2x^2+x-6}=\frac{3^2-5\cdot 3+1}{2\cdot 3^2+3-6}=-\frac{1}{3}.$$

б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+7}{x^2+x-2}$.

При $x=-2$ знаменатель дроби равен нулю, а числитель отличен от нуля. Числитель и знаменатель есть непрерывные функции. Следовательно, при $x\to -2$ знаменатель есть величина бесконечно малая, а числитель – ограниченная величина. Данная дробь является бесконечно большой; условно это обозначают символом ∞.

Таким образом, $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+7}{x^2+x-2}=\dfrac{5}{0}=\infty$.

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}$.

При $x=2$ числитель и знаменатель данной дроби равны нулю. Следовательно, непосредственная подстановка предельного значения аргумента $x=2$ приводит к неопределенному выражению $\dfrac{0}{0}$. При $x\to 2$ числитель и знаменатель есть бесконечно малые величины. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ (отношение двух бесконечно малых величин), необходимо предварительно дробь преобразовать. Квадратные трехчлены, стоящие в числителе и знаменателе, раскладываем на множители по формуле:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1, x_2 – корни соответствующего квадратного уравнения.

В данном случае:

$$2x^2+x-10=0,\ a=2, b=1, c=-10.$$

Вычисляем дискриминант уравнения:

$$D=b^2-4ac,$$

$$D=1^2-4\cdot 2\cdot(-10)=1+80=81,\text{ тогда }\sqrt{D}=\sqrt{81}=9.$$

Корни уравнения находим по формуле:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

$$x_1=\frac{-1+9}{2\cdot 2}=\frac{8}{4}=2,\ x_2=\frac{-1-9}{2\cdot 2}=\frac{-10}{4}=-\frac{5}{2}.$$

Тогда: $2x^2+x-10=2\cdot(x-2)\cdot\left(x-\left(-\frac{5}{2}\right)\right)=(x-2)(2x+5)$.

Аналогично на множители раскладываем знаменатель дроби:

$$x^2+x-6=0,\ a=1, b=1, c=-6.$$

$$D=1^2-4\cdot1\cdot(-6)=1+24=25,\text{ тогда } \sqrt{D}=\sqrt{25}=5.$$

$$x_1=\frac{-1+5}{2\cdot1}=\frac{4}{2}=2,\ x_2=\frac{-1-5}{2\cdot1}=\frac{-6}{2}=-3.$$

Тогда: $x^2+x-6=1\cdot(x-2)\cdot(x-(-3))=(x-2)(x+3)$.

Заметим, что аргумент x только стремится к своему предельному значению 2, но не совпадает с ним. По этой причине множитель $(x-2)$ отличен от нуля при $x\to2$.

Далее сократив дробь на $(x-2)$, получим:

$$\lim_{x\to2}\frac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(2x+5)}{(x-2)(x+3)}=\lim_{x\to2}\frac{2x+5}{x+3}=\frac{2\cdot2+5}{2+3}=\frac{9}{5}=1{,}8.$$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-3x+1}{2x^2+x-5}$.

При $x\to\infty$ получаем неопределенное выражение вида $\frac{\infty}{\infty}$. Чтобы найти предел дробной рациональной функции при $x\to\infty$, необходимо предварительно каждое слагаемое числителя и знаменателя дроби разделить на x^n, где n – наивысшая степень многочленов, стоящих в числителе и знаменателе. В данном случае, разделив на x^2 и применив свойства бесконечно малых величин, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+1}{2x^2+x-5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}}=\frac{4-0+0}{2+0-0}=2.$$

д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\arcsin 4x}{\cos 2x-1}$.

В данную дробь подставим вместо переменной x предельное значение:

$$\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\arcsin 4x}{\cos 2x-1}=\frac{0\cdot\arcsin 4\cdot0}{\cos 2\cdot0-1}=\frac{0\cdot\arcsin 0}{\cos 0-1}=\frac{0\cdot0}{1-1}=\frac{0}{0}.$$

При подстановке вместо x предельного значения получили неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. При $x\to0$ числитель и знаменатель дроби есть бесконечно малые величины. Для раскрытия неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ воспользуемся таблицей эквивалентных бесконечно малых. Если $\arcsin x\sim x$ при $x\to0$, то $\arcsin 4x\sim 4x$; если $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$, то $cos 2x-1\sim-\frac{(2x)^2}{2}=-2x^2$.

Заменим одни эквивалентные бесконечно малые на другие:

$$\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\arcsin 4x}{\cos 2x-1}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot4x}{-2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{4}{-2}=\lim_{x\to0}(-2)=-2.$$

Ответ: а) $-\frac{1}{3}$; б) ∞; в) $1{,}8$; г) 2; д) -2.

Типовая задача (81 – 100). Найти производные указанных функций:

а) $y = x^3 - \frac{1}{x^4} + 6\cdot\sqrt[3]{x^2}$; б) $y = (x^3+2)\cdot\sin x$; в) $y = \frac{4x-3}{1+8x}$;

г) $y = \sqrt[4]{1+9x-x^2}$; д) $y = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x+5}$; е) $y = arctg\,\frac{x+3}{4}$.

Решение.

а) $y = x^3 - \frac{1}{x^4} + 6\cdot\sqrt[3]{x^2}$.

Перепишем данную функцию, введя дробные и отрицательные показатели:

$$y = x^3 - \frac{1}{x^4} + 6\cdot\sqrt[3]{x^2} = x^3 - x^{-4} + 6\cdot x^{\frac{2}{3}}.$$

Применив правило дифференцирования алгебраической суммы $(u \pm v)' = u' \pm v'$ и формулу дифференцирования степенной функции $(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$, получим:

$$y' = \left(x^3 - x^{-4} + 6\cdot x^{\frac{2}{3}}\right)' = 3x^2 - (-4)x^{-5} + 6\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 3x^2 + \frac{4}{x^5} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}},$$

$$\Rightarrow y' = 3x^2 + \frac{4}{x^5} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}}.$$

б) $y = (x^3+2)\cdot\sin x$.

Применив правило производной произведения двух функций $(u\cdot v)' = u'v + u\cdot v'$ и формулы $(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$, $(\sin x)' = \cos x$, получим:

$$y' = (x^3+2)'\cdot\sin x + (x^3+2)\cdot(\sin x)' = 3x^2\cdot\sin x + (x^3+2)\cdot\cos x,$$

$$\Rightarrow y' = 3x^2\cdot\sin x + (x^3+2)\cdot\cos x.$$

в) $y = \frac{4x-3}{1+8x}$.

Применим правило дифференцирования частного двух функций $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$:

$$y' = \left(\frac{4x-3}{1+8x}\right)' = \frac{(4x-3)'\cdot(1+8x) - (4x-3)\cdot(1+8x)'}{(1+8x)^2} = \frac{4\cdot(1+8x) - (4x-3)\cdot 8}{(1+8x)^2} =$$

$$= \frac{4+32x-32x+24}{(1+8x)^2} = \frac{28}{(1+8x)^2},$$

$$\Rightarrow y' = \frac{28}{(1+8x)^2}.$$

г) $y = \sqrt[4]{1+9x-x^2}$.

Данная функция является сложной; она может быть представлена так: $y=\sqrt[4]{u}=u^{\frac{1}{4}}$, где $u=1+9x-x^2$. Применим формулу дифференцирования сложной степенной функции $(u^n)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$:

$$y'=\frac{1}{4}u^{\frac{1}{4}-1}\cdot u'=\frac{1}{4}\left(1+9x-x^2\right)^{-\frac{3}{4}}\cdot\left(1+9x-x^2\right)'=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{\left(1+9x-x^2\right)^3}}\cdot(9-2x),$$

$$\Rightarrow y'=\frac{9-2x}{4\cdot\sqrt[4]{\left(1+9x-x^2\right)^3}}$$

д) $y=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x+5}$.

Применяя формулу дифференцирования сложной логарифмической функции $(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'$, где $u=\frac{x+1}{x+5}$, а затем правило дифференцирования частного двух функций $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$, получим:

$$y'=\left(\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x+5}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\left(\ln\frac{x+1}{x+5}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{x+1}{x+5}}\cdot\left(\frac{x+1}{x+5}\right)'=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{x+5}{x+1}\cdot\frac{(x+1)'(x+5)-(x+1)\cdot(x+5)'}{(x+5)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1\cdot(x+5)-(x+1)\cdot 1}{x+5}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}\cdot\frac{x+5-x-1}{x+5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}\cdot\frac{4}{x+5}=\frac{2}{(x+1)(x+5)},$$

$$y'=\frac{2}{(x+1)(x+5)}.$$

е) $y=arctg\,\frac{x+3}{4}$.

Применив формулу дифференцирования сложной функции $(arctg u)'=\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$, где $u=\frac{x+3}{4}$ и преобразовав выражение $\frac{x+3}{4}=\frac{x}{4}+\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\cdot x+\frac{3}{4}$, получим:

$$y'=\left(arctg\,\frac{x+3}{4}\right)'=\frac{1}{1+\left(\frac{x+3}{4}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot x+\frac{3}{4}\right)'=\frac{1}{1+\frac{x^2+6x+9}{16}}\cdot\frac{1}{4}=$$

$$=\frac{1}{\frac{16+x^2+6x+9}{16}}\cdot\frac{1}{4}=\frac{16}{x^2+6x+25}\cdot\frac{1}{4}=\frac{4}{x^2+6x+25}.$$

Ответ: а) $3x^2+\frac{4}{x^5}+\frac{4}{\sqrt[3]{x}}$; б) $3x^2\cdot\sin x+(x^3+2)\cdot\cos x$; в) $\frac{28}{(1+8x)^2}$;

г) $\frac{9-2x}{4\cdot\sqrt[4]{\left(1+9x-x^2\right)^3}}$; д) $\frac{2}{(x+1)(x+5)}$; е) $\frac{4}{x^2+6x+25}$.

Типовая задача (101 – 120). Исследовать функцию $y=\frac{1}{x^2+1}$ методами дифференциального исчисления и построить ее график.

Решение.

Исследование функции проведем по следующей схеме:

а) Найдем область определения функции.

б) Исследуем функцию на непрерывность.

в) Найдем асимптоты кривой.

г) Исследуем на четность или нечетность.

д) Найдем интервалы возрастания и убывания функции и точки экстремума.

е) Найдем интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба.

Реализуем указанную схему:

а) Областью определения данной функции являются все действительные числа: $D(y)=R$.

б) Данная функция является элементарной, поэтому она непрерывна на своей области определения, т.е. на множестве действительных чисел.

в) Так как область определения функции – все действительные числа, то у графика нет вертикальных асимптот.

Для определения уравнения наклонной асимптоты $y=kx+b$ воспользуемся формулами:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x};\ b=\lim_{x\to\infty}\bigl(f(x)-kx\bigr).$$

В данном случае:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(x^2+1\right)\cdot x}=\frac{1}{\infty}=0.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2+1}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{\infty^2+1}=0.$$

Итак, уравнением асимптоты является $y=0\cdot x+0=0$. Следовательно, наклонная асимптота вырождается в горизонтальную.

г) Область определения симметрична относительно нуля, поэтому для установления четности или нечетности в функцию вместо аргумента $x\in D(y)$ подставим $(-x)\in D(y)$:

$$y(-x)=\frac{1}{(-x)^2+1}=\frac{1}{x^2+1}=y(x).$$

Так как $y(-x)=y(x)$, то данная функция является четной.

д) Для исследования функции на возрастание и убывания и экстремум найдем ее первую производную:

$$y'=\left(\frac{1}{x^2+1}\right)'=\frac{1'\cdot\left(x^2+1\right)-1\cdot\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Приравняем производную первого порядка к нулю и найдем критические точки первого рода:

$$y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2} \quad \Rightarrow \quad -2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

Тем самым имеем одну критическую точку, которая разбивает числовую ось на два интервала: $(-\infty; 0), (0; +\infty)$ (рис. 3).

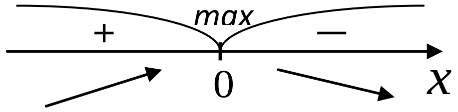


Рис. 3

Определяем знаки производной первого порядка в каждом интервале:

$$y'(-1) = \frac{-2\cdot(-1)}{\left((-1)^2+1\right)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} > 0;$$

$$y'(1) = \frac{-2\cdot 1}{\left(1^2+1\right)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} < 0.$$

Производная y' в первом интервале положительна, а во втором – отрицательна. Следовательно, в первом интервале функция возрастает, а во втором – убывает. При переходе через точку $x = 0$ производная меняет свой знак с плюса на минус. Следовательно, в этой точке функция имеет максимум. Найдем значения функции в точке максимума:

$$y(0) = \frac{1}{0^2+1} = 1.$$

Значит, $A(0;1)$ – точка максимума.

е) Для определения точек перегиба графика функции и интервалов выпуклости и вогнутости найдем производную второго порядка:

$$y'' = \left(\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}\right)' = \frac{(-2x)'\cdot\left(x^2+1\right)^2 - (-2x)\cdot\left(\left(x^2+1\right)^2\right)'}{\left(\left(x^2+1\right)^2\right)^2} =$$

$$= \frac{-2\cdot\left(x^2+1\right)^2 + 2x\cdot 2\cdot\left(x^2+1\right)\cdot\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^4} = \frac{-2\left(x^2+1\right)^2 + 8x^2\cdot\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^4} =$$

$$= \frac{\left(x^2+1\right)\cdot\left(-2\left(x^2+1\right)+8x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^4} = \frac{6x^2-2}{\left(x^2+1\right)^3}.$$

Приравняем вторую производную к нулю и находим критические точки второго рода:

$$y'' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x^2 - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Найденные две критические точки второго рода разбивают всю числовую ось на три интервала: $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$.

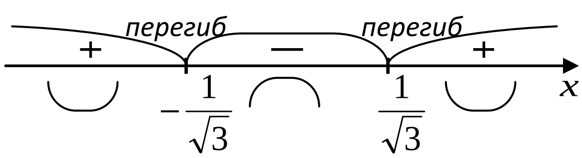


Рис. 4

Определяем знаки производной второго порядка в каждом интервале:

$$y''(-1)=\frac{6\cdot(-1)^2-2}{\left((-1)^2+1\right)^3}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}>0\,;$$

$$y''(0)=\frac{6\cdot 0^2-2}{\left(0^2+1\right)^3}=\frac{-2}{1}=-2<0\,;$$

$$y''(1)=\frac{6\cdot 1^2-2}{\left(1^2+1\right)^3}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}>0\,.$$

В первом и третьем интервалах производная второго порядка положительна, а во втором – отрицательна. Следовательно, в первом и третьем интервале график функции является вогнутым, а во втором – выпуклым. Так как при переходе через критические точки второго рода $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ вторая производная меняет свой знак, то у графика функции две точки перегиба. Вычислим ординаты этих точек.

$$y\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}=\frac{1}{\frac{1}{3}+1}=\frac{3}{4},$$

$$y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}=\frac{1}{\frac{1}{3}+1}=\frac{3}{4}.$$

Итак, $B\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{3}{4}\right)$ и $C\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{3}{4}\right)$ – точки перегиба графика функции.

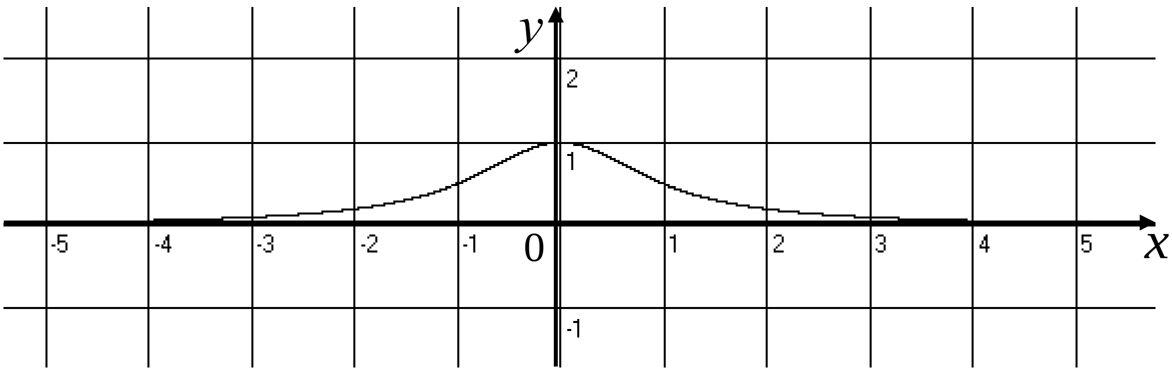


Рис. 5

Типовая задача (121 – 140). Исследовать на экстремум функцию $z=-4+6x-x^2-xy-y^2$.

Решение.

1) Найдём стационарные точки, используя необходимые условия экстремума:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(-4 + 6x - x^2 - xy - y^2\right)'_x = 6 - 2x - y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(-4 + 6x - x^2 - xy - y^2\right)'_y = -x - 2y.$$

2) Решение системы $\begin{cases} 6 - 2x - y = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases}$ дает $x_0 = 4, y_0 = -2$.

Следовательно, данная функция имеет только одну стационарную точку $P_0(4;-2)$.

3) Найдём частные производные второго порядка и их значения в полученной стационарной точке:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (6 - 2x - y)'_x = -2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (6 - 2x - y)'_y = -1; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (-x - 2y)'_y = -2.$$

Как видно, частные производные второго порядка не содержат переменных x и y, они постоянны в любой точке и, в частности, в точке $P_0(4;-2)$.

Обозначим: $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(P_0)$, $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, dy}(P_0)$, $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(P_0)$.

Получим: $A = -2$, $B = -1$, $C = -2$.

Тогда $\Delta = AC - B^2 = (-2)(-2) - (-1)^2 = 3 > 0$.

Так как $\Delta > 0$ и $A < 0$, то в точке $P_0(4;-2)$ данная функция имеет максимум:

$$z_{\max}(4;-2) = -4 + 24 - 16 + 8 - 4 = 8.$$

Ответ: $z_{\max}(4;-2) = 8$.

Типовая задача (141 – 160). Найти указанные неопределенные интегралы и результаты интегрирования проверить дифференцированием:

а) $\int (4x^3 - \sqrt{x} + \frac{6}{x^2})dx$; б) $\int e^{x^2+1} x dx$; в) $\int x^2 \ln x dx$; г) $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 + x - 6} dx$.

Решение.

а) $\int (4x^3 - \sqrt{x} + \frac{6}{x^2})dx$.

Предварительно преобразуем подынтегральную функцию, затем, применив свойства неопределенного интеграла и табличный интеграл, получим:

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1),$$

$$\int (4x^3 - \sqrt{x} + \frac{6}{x^2})dx = \int (4x^3 - x^{\frac{1}{2}} + 6 \cdot x^{-2})dx = 4\int x^3 dx - \int x^{\frac{1}{2}} dx + 6\int x^{-2} dx =$$

$$= 4 \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 6 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C = x^4 - \frac{2}{3} x\sqrt{x} - \frac{6}{x} + C.$$

Сделаем проверку:

$$\left(x^4-\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{6}{x}+C\right)'=\left(x^4\right)'-\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)'-\left(\frac{6}{x}\right)'+C'=4x^3-\frac{2}{3}\cdot\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'-6\left(x^{-1}\right)'=$$

$$=4x^3-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-6\cdot(-1)\cdot x^{-2}=4x^3-\sqrt{x}+\frac{6}{x^2}.$$

б) $\int e^{x^2+1}xdx$.

Чтобы привести данный интеграл к табличному интегралу $\int e^u du=e^u+C$, воспользуемся подстановкой $u=x^2+1$; тогда $du=2xdx$ (дифференциал функции равен произведению производной функции на дифференциал независимой переменной; т.е. $du=d(x^2+1)=(x^2+1)'_x\cdot dx=$ $=2x\cdot dx$, где $dx=\Delta x$). Применив формулу $\int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)dx=\int f(u)du$, получим:

$$\int e^{x^2+1}xdx=\left[\begin{array}{c}u=x^2+1\\ du=2xdx\\ xdx=\dfrac{du}{2}\end{array}\right]=\int e^u\cdot\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^u du=\frac{1}{2}e^u+C=\frac{1}{2}e^{x^2+1}+C.$$

Сделаем проверку:

$$\left(\frac{1}{2}e^{x^2+1}+C\right)'=\frac{1}{2}\left(e^{x^2+1}\right)'+C'=\frac{1}{2}e^{x^2+1}\left(x^2+1\right)'=\frac{1}{2}e^{x^2+1}\cdot 2x=e^{x^2+1}x.$$

в) $\int x^2\ln xdx$.

Для вычисления данного интеграла применим формулу интегрирования по частям: $\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du$: Пусть $u=\ln x$ и $dv=x^2dx$, тогда $du=\dfrac{dx}{x}$, $v=\int x^2dx=\dfrac{x^3}{3}$.

Воспользовавшись формулой интегрирования по частям, получим:

$$\int x^2\ln xdx=\left[\begin{array}{ll}u=\ln x, & du=u'dx=(\ln x)'dx=\dfrac{dx}{x}\\ dv=x^2dx, & v=\int dv=\int x^2dx=\dfrac{x^3}{3}\end{array}\right]=\ln x\cdot\frac{x^3}{3}-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int x^2dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+C=\frac{x^3}{9}(3\ln x-1)+C.$$

Сделаем проверку:

$$\left(\frac{x^3}{9}(3\ln x-1)+C\right)'=\left(\frac{x^3}{9}(3\ln x-1)\right)'+C'=\left(\frac{x^3}{9}\right)'\cdot(3\ln x-1)+\frac{x^3}{9}\cdot(3\ln x-1)'=$$

$$=\frac{1}{9}\cdot 3x^2\cdot(3\ln x-1)+\frac{x^3}{9}\cdot 3\cdot\frac{1}{x}=\frac{x^2}{3}(3\ln x-1)+\frac{x^2}{3}=\frac{x^2}{3}(3\ln x-1+1)=\frac{x^2}{3}\cdot 3\ln x=$$

$$=x^2\ln x.$$

г) $\int\dfrac{x^3+1}{x^2+x-6}dx$.

Под знаком интеграла имеется неправильная рациональная дробь. Поэтому предварительно представляем её в виде суммы некоторого многочлена и правильной дроби. Разделим числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3+1 & x^2+x-6 \\ \underline{x^3+x^2-6x} & \overline{x-1} \\ -\,-x^2+6x+1 & \\ \underline{-x^2-x+6} & \\ 7x-5 & \end{array}$$

Таким образом, получаем:

$$\frac{x^3+1}{x^2+x-6}=x-1+\frac{7x-5}{x^2+x-6}.$$

Проверим можно ли разложить знаменатель на множители:

$$x^2+x-6=0,$$

$$D=b^2-4ac=1-4\cdot1\cdot(-6)=25,$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}, \quad \Rightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-3 \end{cases},$$

$$x^2+x-6=(x-2)(x+3), \quad \Rightarrow \frac{x^3+1}{x^2+x-6}=x-1+\frac{7x-5}{(x-2)(x+3)}.$$

Применив метод неопределенных коэффициентов, полученную правильную дробь представим в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{7x-5}{(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)}.$$

Отбросив знаменатель, получаем следующее тождество:

$$7x-5=A(x+3)+B(x-2).$$

При $x=-3$ получим: $-26=-5B$; $\Rightarrow$ $B=\frac{26}{5}=5\frac{1}{5}$.

При $x=2$ получим: $9=5A$; $\Rightarrow$ $A=\frac{9}{5}=1\frac{4}{5}$.

Таким образом:

$$\frac{x^3+1}{x^2+x-6}=x-1+\frac{\frac{9}{5}}{x-2}+\frac{\frac{26}{5}}{x+3}=x-1+\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{26}{5}\cdot\frac{1}{x+3};$$

$$\int\frac{x^3+1}{x^2+x-6}dx=\int xdx-\int1\cdot dx+\frac{9}{5}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{26}{5}\int\frac{dx}{x+3}=\frac{x^2}{2}-x+\frac{9}{5}\ln|x-2|+\frac{26}{5}\ln|x+3|+C.$$

Сделаем проверку:

$$\left(\frac{x^2}{2}-x+\frac{9}{5}\ln|x-2|+\frac{26}{5}\ln|x+3|+C\right)'=\left(\frac{x^2}{2}\right)'-x'+\frac{9}{5}\cdot\left(\ln|x-2|\right)'+\frac{26}{5}\cdot\left(\ln|x+3|\right)'+C'=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot2x-1+\frac{9}{5}\cdot\frac{(x-2)'}{x-2}+\frac{26}{5}\cdot\frac{(x+3)'}{x+3}=x-1+\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{26}{5}\cdot\frac{1}{x+3}=$$

$$=x-1+\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{26}{5}\cdot\frac{1}{x+3}=\frac{5(x-1)(x-2)(x+3)+9(x+3)+26(x-2)}{5(x-2)(x+3)}=$$

$$=\frac{5\left(x^3-7x+6\right)+9x+27+26x-52}{5(x-2)(x+3)}=\frac{5\left(x^3-7x+6\right)+35x-25}{5(x-2)(x+3)}=\frac{5\left(x^3-7x+6+7x-5\right)}{5(x-2)(x+3)}=$$

$$=\frac{x^3+1}{(x-2)(x+3)}=\frac{x^3+1}{x^2+x-6}.$$

Ответ: а) $4x^3-\sqrt{x}+\frac{6}{x^2}$; б) $\frac{1}{2}e^{x^2+1}+C$; в) $\frac{x^3}{9}(3\ln x-1)+C$;

г) $\frac{x^2}{2}-x+\frac{9}{5}\ln|x-2|+\frac{26}{5}\ln|x+3|+C$.

Типовая задача (111 – 180). Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=2x-\frac{x^2}{2}+6$ и прямой $y=x+2$.

Решение.

Площадь фигуры, ограниченная сверху непрерывной кривой $y=f(x)$, снизу – непрерывной кривой $y=\varphi(x)$, слева – прямой $x=a$ и справа прямой $x=b$, вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b\left[f(x)-\varphi(x)\right]dx.$$

В тех случаях, когда заданные кривые образуют замкнутую область, и прямые $x=a$ и $x=b$ не заданы, то числа a и b совпадают с абсциссами точек пересечения кривых. Найдём точки пересечения заданных линий. Для этого решим совместно систему уравнений:

$$\begin{cases} y=2x-\frac{x^2}{2}+6 \\ y=x+2 \end{cases} \Rightarrow x+2=2x-\frac{x^2}{2}+6.$$

$$x+2=2x-\frac{x^2}{2}+6\ \Big|\cdot 2,$$

$$2x+4=4x-x^2+12,$$

$$x^2-2x-8=0.$$

Получим $x_1=-2$ и $x_2=4$; следовательно, $a=-2$ и $b=4$.

Парабола и прямая пересекаются в точках $A(-2;0)$ и $B(4;6)$. Для построения прямой достаточно двух найденных точек, но для параболы этих данных недостаточно. Поэтому найдем дополнительные точки:

а) вершина параболы $y=ax^2+bx+c$ расположена в точке с координатами $\left(-\frac{b}{2a};y\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$; в данной задаче парабола $y=-\frac{x^2}{2}+2x+6$ ($a=-\frac{1}{2}$, $b=2$) имеет вершину в точке $(2;\,y(2))$, т.е. $(2;8)$.

б) Так как $a=-\frac{1}{2}<0$, следовательно, ветви параболы направлены вниз, и она пересекает ось абсцисс. Найдём точки пересечения с осью Ox:

$$y=0, \quad \Rightarrow \quad -\frac{x^2}{2}+2x+6=0\,,$$

$$D=2^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 6=16\,,$$

$$x_1=\frac{-2+4}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{-1}=-2\,, \quad x_2=\frac{-2-4}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{-6}{-1}=6\,.$$

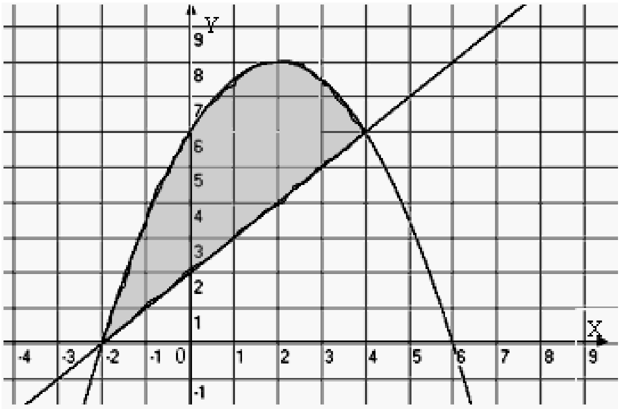


Рис. 9.

Следовательно, парабола пересекает ось Ox в точках с координатами $(-2;0)$ и $(6;0)$ (рис. 9).

Применяя $S=\int\limits_a^b\left[f(x)-\varphi(x)\right]dx$, получим:

$$S=\int\limits_{-2}^{4}\left(\left(2x-\frac{x^2}{2}+6\right)-(x+2)\right)dx=\int\limits_{-2}^{4}\left(-\frac{x^2}{2}+x+4\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+4x\right)\Bigg|_{-2}^{4}=$$

$$=8-\frac{64}{6}+16-2-\frac{8}{6}+8=30-12=18\,.$$

Ответ: $S=18$ кв. ед.

Контрольная работа №2Типовая задача(1-20). а) Исследовать на сходимость с помощью признака Даламбера знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{6^{n+4}}$; б) исследовать на сходимость с помощью признака Лейбница знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+8}}$; в) найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{12^n}\cdot x^n$ и определить тип сходимости ряда на концах интервала.

Решение. а) Общий член знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{6^{n+4}}$ имеет вид $a_n=\frac{n+2}{6^{n+4}}$. Тогда $a_{n+1}=\frac{(n+1)+2}{6^{(n+1)+4}}=\frac{n+3}{6^{n+5}}$. В соответствии с признаком Даламбера вычислим предел:

$$d=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+3}{6^{n+5}}}{\frac{n+2}{6^{n+4}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)\cdot 6^{n+4}}{6^{n+5}\cdot(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)\cdot 6^{n+4}}{6^{n+4}\cdot 6\cdot(n+2)}=\frac{1}{6}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+2}=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{\infty+3}{\infty+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{1}{6}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}+\frac{3}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{2}{n}}=\frac{1}{6}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n}}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1+\frac{3}{\infty}}{1+\frac{2}{\infty}}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1+0}{1+0}=\frac{1}{6}.$$

Так как $d<1$, то по признаку Даламбера для знакоположительного ряда данный ряд сходится.

б) По признаку Лейбница знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ сходится, если выполнены два условия: 1) $a_n>a_{n+1}$; 2) $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

Для данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+8}}$ $a_n=\frac{1}{\sqrt{n+8}}$ и $a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n+9}}$. При этом $\frac{1}{\sqrt{n+8}}>\frac{1}{\sqrt{n+9}}$ или $a_n>a_{n+1}$, т.е. первое условие признака Лейбница выполнено. Далее: $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+8}}=\frac{1}{\sqrt{\infty+8}}=0$. Поэтому выполнены оба условия признака Лейбница, т.е. данный знакочередующийся ряд сходится.

в) Для нахождения интервала сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{12^n}\cdot x^n$ с общим членом $u_n=\frac{n+3}{12^n}\cdot x^n$ и $u_{n+1}=\frac{n+4}{12^{n+1}}\cdot x^{n+1}$ применим признак абсолютной сходимости Даламбера:

$$d=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+4)x^{n+1}}{12^{n+1}}}{\frac{(n+3)x^n}{12^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+4)\cdot x^{n+1}\cdot 12^n}{12^{n+1}\cdot(n+3)\cdot x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{12}\cdot\frac{n+4}{n+3}\cdot x\right|=\frac{1}{12}|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+4}{n+3}=$$

$$=\frac{1}{12}|x|\cdot\frac{\infty+4}{\infty+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{1}{12}|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{4}{n}}{1+\frac{3}{n}}=\frac{1}{12}|x|\cdot\frac{1+\frac{4}{\infty}}{1+\frac{3}{\infty}}=\frac{1}{12}|x|\cdot 1=\frac{1}{12}|x|.$$

Степенной ряд абсолютно сходится, если величина $d<1$, т.е. $\frac{1}{12}|x|<1$, откуда $|x|<12$, или $-12<x<12$. Следовательно, интервал сходимости имеет вид $-12<x<12$.

Выясним вопрос о типе сходимости ряда на концах интервала сходимости, т.е. в точках $x=12$ и $x=-12$. При $x=12$ заданный ряд принимает вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{12^n}\cdot 12^n=\sum_{n=1}^{\infty}(n+3).$$

Это числовой знакоположительный ряд, который расходится, так как не выполнено необходимое условие сходимости ряда ($\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(n+3)=\infty+3=\infty\neq 0$).

При $x=-12$ заданный ряд принимает вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{12^n}\cdot(-12)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{12^n}\cdot(-1)^n\cdot 12^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+3).$$

Это числовой знакочередующийся ряд, который расходится, так уже первое условие признака Лейбница не выполнено ($n+3<n+4$, т.е. $a_n<a_{n+1}$). Следовательно, при $x\in(-12;12)$ степенной ряд абсолютно сходится, вне этого интервала расходится.

Ответ: а) сходится; б) сходится; в) $(-12;12)$– интервал сходимости, при $x=\pm 12$ ряд расходится.

Типовая задача(21-40). Вычислить интеграл $\int\limits_0^1\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x}dx$ с точностью до $0{,}001$.

Решение.

Предварительно представим подынтегральную функцию в виде степенного ряда, для этого используем разложение функции $\sin x$ в степенной ряд:

$\sin x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...$ - сходится при всех значениях x.

Заменив x в разложении функции $\sin x$, на $\sqrt[3]{x}$, получим:

$$\sin\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x}-\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3}{3!}+\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^5}{5!}-\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^7}{7!}+\dots.$$

Тогда $\dfrac{\sin\sqrt[3]{x}}{x} = x^{-\frac{2}{3}} - \dfrac{1}{3!} + \dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{5!} - \dfrac{x^{\frac{4}{3}}}{7!} + \ldots$,

$$\int_0^1 \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x}dx = \int_0^1 (x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3!} + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{5!} - \frac{x^{\frac{4}{3}}}{7!} + \ldots)dx = \left[3x^{\frac{1}{3}} - \frac{x}{3!} + \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5!\cdot 5} - \frac{3x^{\frac{7}{3}}}{7!\cdot 7} + \ldots\right]\Bigg|_0^1 =$$

$$= 3 - \frac{1}{6} + \frac{1}{200} - \frac{1}{11760} + \ldots .$$

Мы получили знакочередующийся ряд, который удовлетворяет условиям теоремы Лейбница. Так как в полученном ряде четвертый член ряда по абсолютному значению меньше $0{,}001$, то для обеспечения заданной точности достаточно взять первые три члена. Тогда:

$$\int_0^1 \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x}dx \approx 3 - \frac{1}{6} + \frac{1}{200} \approx 2{,}834 .$$

Ответ: $\int_0^1 \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x}dx \approx 2{,}834$.

Типовая задача(61-80). Известно, что 95% изделий выпускаемых данным предприятием, отвечает стандарту. Упрощённая схема проверки качества продукции признает пригодной стандартную деталь с вероятностью $0{,}98$ и нестандартную с вероятностью $0{,}05$. Определить вероятность того, что изделие, прошедшее контроль качества, отвечает стандарту.

Решение.

Обозначим: событие A = {изделие пройдёт контроль}, событие B_1 = {изделие отвечает стандарту}, событие B_2 = {изделие не отвечает стандарту}. Событие A может произойти лишь при условии появления одного из событий: события A/B_1 = {контроль признает пригодной стандартную деталь} или события A/B_2 = {контроль признает пригодной нестандартную деталь}.

По условию задачи $P(B_1) = 0{,}95$. Так как события B_1 и B_2 несовместны и образуют полную группу, то по теореме о сумме вероятностей таких событий $P(B_2) = 1 - P(B_1) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$. Условные вероятности события A: $P(A/B_1) = 0{,}98$, $P(A/B_2) = 0{,}05$.

Вычислим вероятность прохождения контроля наудачу взятым изделием, т.е. $P(A)$, используя формулу полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1)\cdot P(A/B_1) + P(B_2)\cdot P(A/B_2) = 0{,}95\cdot 0{,}98 + 0{,}05\cdot 0{,}05 = 0{,}9335 .$$

По условию задачи необходимо определить вероятность события B_1/A состоящего в том, что изделие, прошедшее контроль качества, отвечает стандарту, т.е. вероятность события B_1 при условии, что событие A произошло. Вероятность $P(B_1/A)$ определим по формуле Байеса:

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)\cdot P(A/B_1)}{P(A)} = \frac{0{,}95\cdot 0{,}98}{0{,}9335} = 0{,}9973 .$$

Ответ: $0{,}9973$.

Типовая задача(81-100). В энергосистеме имеется группа из четырех однотипных агрегатов, находящихся в независимых и одинаковых условиях. Вероятность исправного состояния каждого агрегата в течение времени T одинакова и равна $0{,}6$. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа агрегатов, находящихся в исправном состоянии в течение времени T. Найти числовые характеристики этой случайной величины.

Решение. Случайная величина X может принимать следующие значения:

$x_0 = 0$ – нет агрегатов, находящихся в исправном состоянии;

$x_1 = 1$ – один агрегат находится в исправном состоянии, три – нет;

$x_2 = 2$ – два агрегата находятся в исправном состоянии, а два – нет;

$x_3 = 3$ – три агрегата находятся в исправном состоянии, а один – нет;

$x_4 = 4$ – все четыре агрегата находятся в исправном состоянии.

Вероятности $p_i = P(X = x_i)$ этих событий находятся по формуле Бернулли $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний из n элементов по k элементов, $q = 1 - p$. По условию задачи $n = 4$, $p = 0{,}6$, $q = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$ имеем:

$$p_i = P(X = x_i) = C_4^i \cdot 0{,}6^i \cdot 0{,}4^{4-i},\ i = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Учитывая, что $0! = 1$, в результате вычислений получаем:

$$p_0 = P(X = x_0) = C_4^0 \cdot 0{,}6^0 \cdot 0{,}4^{4-0} = \frac{4!}{0!(4-0)!} \cdot 1 \cdot 0{,}0256 = 0{,}0256;$$

$$p_1 = P(X = x_1) = C_4^1 \cdot 0{,}6^1 \cdot 0{,}4^{4-1} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}064 = 4 \cdot 0{,}0384 = 0{,}1536;$$

$$p_2 = P(X = x_2) = C_4^2 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^{4-2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 0{,}36 \cdot 0{,}16 = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 0{,}0576 = 0{,}3456;$$

$$p_3 = P(X = x_3) = C_4^3 \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^{4-3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot 0{,}216 \cdot 0{,}4 = 0{,}3456;$$

$$p_4 = P(X = x_4) = C_4^4 \cdot 0{,}6^4 \cdot 0{,}4^{4-4} = \frac{4!}{4! \cdot 0!} \cdot 0{,}1296 \cdot 1 = 0{,}1296.$$

Запишем закон распределения дискретной случайной величины X – числа агрегатов, находящихся в исправном состоянии в течение времени T в виде таблицы:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0256	0,1536	0,3456	0,3456	0,1296

Вычислим числовые характеристики случайной величины X:

Математическое ожидание $M(X)$ дискретной случайной величины X вычисляется по формуле

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + ... + x_n \cdot p_n.$$

$$M(X)=0\cdot 0{,}0256+1\cdot 0{,}1536+2\cdot 0{,}3456+3\cdot 0{,}3456+4\cdot 0{,}1296=2{,}4.$$

Дисперсия $D(X)$ дискретной случайной величины X вычисляется по формуле

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2,$$

где $M(X^2)=x_1^{\,2}\cdot p_1+x_2^{\,2}\cdot p_2+...+x_n^{\,2}\cdot p_n$.

Тогда

$$D(X)=0^2\cdot 0{,}0256+1^2\cdot 0{,}1536+2^2\cdot 0{,}3456+3^2\cdot 0{,}3456+4^2\cdot 0{,}1296-2{,}4^2=0{,}96.$$

Среднее квадратическое отклонением $\sigma(X)$ случайной величины X находим по формуле

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

$$\sigma(X)=\sqrt{0{,}96}\approx 0{,}98.$$

Ответ:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0256	0,1536	0,3456	0,3456	0,1296

$M(X)=2{,}4$; $D(X)=0{,}96$; $\sigma(X)\approx 0{,}98$.

Типовая задача(101-120). Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 1\\ \dfrac{1}{8}x^2-\dfrac{1}{8} & при \quad 1<x\le 3\\ 1 & при \quad x>3\end{cases}$. Найти: а) плотность распределения вероятностей $f(x)$; б) математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ случайной величины; в) вероятность того, что случайная величина примет значение на отрезке $\left[2;\,2\frac{1}{2}\right]$.

Решение.

а) По виду $F(x)$ можно заключить, что заданная ею непрерывная случайная величина X принадлежит отрезку $[1;3]$.

$$f(x)=F'(x)\ \Rightarrow\ f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 1\\ \dfrac{1}{4}x & при \quad 1<x\le 3\\ 0 & при \quad x>3\end{cases}.$$

б) Математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение найдем по формулам:

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx,\quad D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-(M(X))^2,\ \sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Получаем

$$M(X)=\int_1^3 x\cdot\frac{1}{4}xdx=\frac{1}{4}\int_1^3 x^2dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^3=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right)=\frac{13}{6}=2\frac{1}{6},$$

$$D(X)=\int_1^3 x^2\cdot\frac{1}{4}xdx-\left(\frac{13}{6}\right)^2=\frac{1}{4}\int_1^3 x^3dx-\frac{169}{36}=\frac{1}{16}x^4\Big|_1^3-\frac{169}{36}=\left(\frac{81}{16}-\frac{1}{16}\right)-\frac{169}{36}=5-\frac{169}{36}=\frac{11}{36},$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{11}{36}}\approx 0{,}55.$$

в) Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал (a,b) находим по формуле $P(a\le X\le b)=F(b)-F(a)$. Так как $a=2$, $b=2\frac{1}{2}$ и $F(x)=\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{8}$, то:

$$P\left(2\le X\le 2\frac{1}{2}\right)=F\left(2\frac{1}{2}\right)-F(2)=\left(\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{1}{8}\cdot 2^2-\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{8}\cdot\frac{25}{4}-\frac{1}{8}\cdot 4=\frac{25-16}{32}=\frac{9}{32}.$$

Ответ: а) $f(x)=\begin{cases}0 & при\quad x\le 1\\ \frac{1}{4}x & при\quad 1<x\le 3\\ 0 & при\quad x>3\end{cases}$; б) $M(X)=2\frac{1}{6}$, $D(X)=\frac{11}{36}$, $\sigma(X)\approx 0{,}55$; в) $P\left(2\le X\le 2\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{32}$.

Типовая задача(121-140). Считается, что отклонение длины изготавливаемых деталей от стандарта является случайной величиной X, распределенной по нормальному закону. Стандартная длина (математическое ожидание) $a=40$ см, среднее квадратическое отклонение $\sigma=0{,}4$ см. Найти: а) вероятность того, что длина изготавливаемых деталей примет значение, принадлежащее интервалу $(39{,}7;\,40{,}2)$; б) вероятность того, что отклонение длины от стандартной составит по абсолютной величине не более $0{,}6$ см; в) интервал, в который попадут значения длины изготавливаемых деталей с вероятностью $0{,}9973$.

Решение.

а) По условию задачи имеем: X – длина детали, $a=40$, $\sigma=0{,}4$, $\alpha=39{,}7$, $\beta=40{,}2$. Подставив эти данные, в формулу вероятности попадания нормально распределенной случайной величины X в интервал (α,β) $P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$, получим:

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{40{,}2-40}{0{,}4}\right)-\Phi\left(\frac{39{,}7-40}{0{,}4}\right)=\Phi(0{,}5)-\Phi(-0{,}75)=$$
$$=0{,}1915+0{,}2734=0{,}4649.$$

Значения функции Лапласа находим в приложении 2.

б) X – длина детали. По условию задачи эта величина должна быть в интервале от $(a-\delta)$ до $(a+\delta)$, где $a=40$ и $\delta=0{,}6$.

Подставим имеющиеся данные в формулу $P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$, получим:

$$P(|X-40|<0{,}6)=2\Phi\left(\frac{0{,}6}{0{,}4}\right)=2\Phi(1{,}5)=2\cdot 0{,}4332=0{,}8664.$$

Следовательно, вероятность того, что изготавливаемые детали по длине будут в пределах от $39{,}4$ до $40{,}6$ см, составляет $0{,}8664$.

в) По условию задачи имеем: $a=40$; $\sigma=0{,}4$; $P(|X-40|\le\delta)=0{,}9973$.

Применяя формулу $P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$, получаем равенство:

$$2\Phi\left(\frac{\delta}{0{,}4}\right)=0{,}9973 \text{ или } \Phi\left(\frac{\delta}{0{,}4}\right)=0{,}49865.$$

По таблице приложения 2 находим, что такое значение функция Лапласа имеет при $x=3$. Следовательно, $\frac{\delta}{0{,}4}=3$, откуда $\delta=1{,}2$.

Таким образом, можно гарантировать, что длина детали будет изменяться в пределах от $38{,}8$ до $41{,}2$ см.

Ответ: а) $0{,}4649$; б) $P(|X-40|<0{,}6)=0{,}8664$; в) $X\in(38{,}8;\,41{,}2)$.

Типовая задача(141-160). Даны измерения 100 обработанных деталей. В таблице указаны значения отклонений от заданного размера и соответствующие им частоты.

$(x_{i-1};\,x_i]$	$(-2;-1{,}5]$	$(-1{,}5;-1]$	$(-1;-0{,}5]$	$(-0{,}5;\,0]$	$(0;\,0{,}5]$	$(0{,}5;\,1]$	$(1;\,1{,}5]$	$(1{,}5;\,2]$
n_i	2	4	10	18	23	21	13	9

Считая, что признак X – отклонение от проектного размера – подчиняется нормальному закону распределения, 1) построить гистограмму относительных частот; 2) записать дискретное распределение признака X; 3) найти выборочную среднюю и исправленное среднее квадратическое отклонение; 4) указать доверительный интервал, покрывающий с надежностью $0{,}95$ неизвестное математическое ожидание a признака X; 5) указать доверительный интервал, покрывающий с надежностью $0{,}95$ неизвестное среднее квадратическое отклонение σ признака X.

Решение. 1) Для каждого интервала вычислим относительную частоту $W_i=\frac{n_i}{n}$ и плотность относительной частоты $\frac{W_i}{h}$, где $n=100$ – объем выборки, $h=0{,}5$ – длина любого частичного интервала. Результаты заносим в таблицу:

$(x_{i-1};\,x_i]$	$(-2;-1{,}5]$	$(-1{,}5;-1]$	$(-1;-0{,}5]$	$(-0{,}5;\,0]$	$(0;\,0{,}5]$	$(0{,}5;\,1]$	$(1;\,1{,}5]$	$(1{,}5;\,2]$
n_i	2	4	10	18	23	21	13	9
W_i	0,02	0,04	0,1	0,18	0,23	0,21	0,13	0,9
$\frac{W_i}{h}$	0,04	0,08	0,2	0,36	0,46	0,42	0,26	0,18

Далее строим гистограмму относительных частот – ступенчатую фигуры, состоящую из прямоугольников, основания которых частичные интервалы, а высоты – соответствующие значения плотности относительных частот.

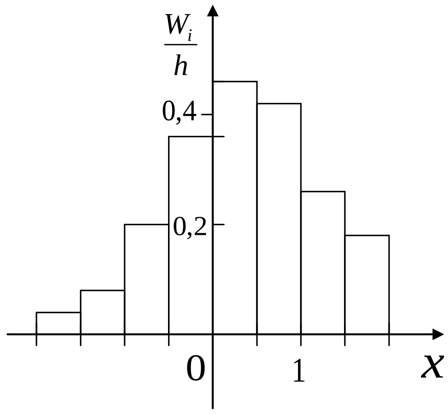


Рис. 7

2) Запишем дискретное распределение признака X, приняв в качестве его вариант середины соответствующих интервалов:

x_i	$-1{,}75$	$-1{,}25$	$-0{,}75$	$-0{,}25$	0,25	0,75	1,25	1,75
n_i	2	4	10	18	23	21	13	9

3) Выборочную среднюю находим по формуле:

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i .$$

Получаем:

$$\bar{x}_B = \frac{1}{100} \cdot \left(-1{,}75 \cdot 2 - 1{,}25 \cdot 4 - 0{,}75 \cdot 10 - 0{,}25 \cdot 18 + 0{,}25 \cdot 23 + 0{,}75 \cdot 21 + 1{,}25 \cdot 13 + 1{,}75 \cdot 9\right) = 0{,}33 .$$

Вычисляем исправленную дисперсию по формуле:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x_B})^2 \cdot n_i .$$

$$s^2 = \frac{1}{99}\left((-2{,}08)^2 \cdot 2 + (-1{,}58)^2 \cdot 4 + (-1{,}08)^2 \cdot 10 + (-0{,}58)^2 \cdot 18 + (-0{,}08)^2 \cdot 23 + 0{,}42^2 \cdot 21\right) +$$

$$+ \frac{1}{99}\left(0{,}92^2 \cdot 13 + 1{,}42^2 \cdot 9\right) = \frac{69{,}36}{99} \approx 0{,}7 .$$

Находим исправленное среднее квадратическое отклонение:

$$s = \sqrt{s^2} \approx 0{,}84 .$$

4) Доверительный интервал, покрывающий с надежностью 0,95 неизвестное математическое ожидание a признака X, в случае большой выборки можно определить из двойного неравенства:

$$\bar{x}_B - t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} ,$$

где t – аргумент функции Лапласа, для которого $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$,

γ – надежность ($\gamma = 0{,}95$).

Так как $\Phi(t) = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$, то по таблице приложения 2 находим $t = 1{,}96$.

Доверительный интервал, покрывающий с надежностью 0,95 неизвестное математическое ожидание a, таков:

$$0{,}33 - 1{,}96 \cdot \frac{0{,}84}{\sqrt{100}} < a < 0{,}33 + 1{,}96 \cdot \frac{0{,}84}{\sqrt{100}},$$

$$0{,}17 < a < 0{,}49, \text{ или } (0{,}17;\, 0{,}49).$$

5) Доверительный интервал, покрывающий с надежностью 0,95 неизвестное среднее квадратическое отклонение σ признака X, находится из двойного неравенства:

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q),$$

где γ – надежность (доверительная вероятность),

$q_\gamma = q(n;\, \gamma)$ – число, определяемое по таблице 3.

В нашем случае:

$$q_\gamma = q(100;\, 0{,}95) = 0{,}143.$$

Тогда:

$$0{,}84 \cdot (1 - 0{,}143) < \sigma < 0{,}84 \cdot (1 + 0{,}143),$$

$$0{,}72 < \sigma < 0{,}96.$$

Итак, доверительный интервал для оценки неизвестного среднего квадратического отклонения имеет вид $(0{,}72;\, 0{,}96)$.

Ответ: 3) $\bar{x}_B = 0{,}33$, $s = 0{,}84$; 4) $(0{,}17;\, 0{,}49)$; 5) $(0{,}17;\, 0{,}49)$.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ВОПРОСОВ

3.1. Произвольный базис. Действия над векторами в координатной форме.

Базисом в пространстве называются любые три некомпланарных и ненулевых вектора, взятые в определенном порядке.

Базисом на плоскости называются любые два неколлинеарных и ненулевых вектора, взятые в определенном порядке.

Векторы $\overrightarrow{a_1},...,\overrightarrow{a_n}$ называются *линейно зависимыми*, если существует линейная комбинация $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = 0$ при не равных нулю одновременно α_i, т.е. $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 \neq 0$.

Если же равенство $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = 0$ выполняется только при $\alpha_i = 0$, то векторы называются *линейно независимыми*.

Свойства линейно зависимых векторов:

1. Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима.
2. Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов представляет собой линейную комбинацию остальных векторов.
3. Любые два коллинеарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые два линейно зависимые векторы коллинеарны.
4. Любые три компланарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые три линейно зависимые векторы компланарны.

5. Любые четыре вектора линейно зависимы.

Если $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ – базис в пространстве и $\vec{a} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\,\overrightarrow{e_2} + \gamma\,\overrightarrow{e_3}$, то числа α, β, γ называются *координатами вектора* $\vec{a}$ в этом базисе.

Ортом координатной оси называется единичный вектор, направление которого совпадает с положительным направлением оси.

Орты осей Ox, Oy и Oz обозначают соответственно $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Эти вектора образуют *ортонормированный (прямоугольный декартовый) базис*.

Пример. Доказать, что векторы $\vec{a}(3; -1; 0)$, $\vec{b}(2; 3; 1)$ и $\vec{c}(-1; 4; 3)$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}(2; 3; 7)$ в этом базисе.

Решение. Базисом в пространстве называется система трех некомпланарных векторов. Три вектора $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, $\vec{c}(x_3; y_3; z_3)$ являются некомпланарными, если определитель, составленный из координат данных векторов, отличен от нуля, т.е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Подставим координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в определитель:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 22 \neq 0 .$$

Так как значение определителя отлично от нуля, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис, и вектор $\vec{d}$ линейно выражается через базисные векторы:

$$\vec{d} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c} .$$

Запишем данное равенство в координатной форме:

$$(2; 3; 7) = x \cdot (3; -1; 0) + y \cdot (2; 3; 1) + z \cdot (-1; 4; 3) .$$

Сравнивая одноименные координаты:

$$\begin{cases} 2 = x \cdot 3 + y \cdot 2 + z \cdot (-1) \\ 3 = x \cdot (-1) + y \cdot 3 + z \cdot 4 \\ 7 = x \cdot 0 + y \cdot 1 + z \cdot 3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 3x + 2y - z = 2 \\ -x + 3y + 4z = 3 \\ \quad y + 3z = 7 \end{cases} .$$

Решаем полученную систему по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 27 + 0 + 1 - 0 - 12 + 6 = 22 ,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 18 + 56 - 3 + 21 - 18 - 8 = 66 ,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 27 + 0 + 7 - 0 + 6 - 84 = -44 ,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 63 + 0 - 2 - 0 + 14 - 9 = 66.$$

Находим:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{66}{22} = 3, \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-44}{22} = -2, \; z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{66}{22} = 3.$$

Поэтому $\vec{d}(3; -2; 3)$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

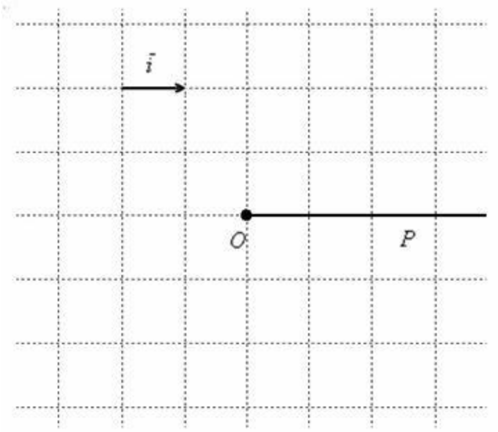
Ответ: $(3; -2; 3)$.

3.2. Полярная система координат. Взаимное расположение прямых и плоскостей

1. Способ задания полярной системы координат.
2. Ограничения для полярного радиуса и полярного угла.
3. Связь между прямоугольными и полярными координатами.
4. Примеры нахождения координат точек в полярной системе координат.

Помимо **аффинной системы координат** и её популярного частного случая – прямоугольной (декартовой) системы, существуют и другие подходы к построению координатной сетки плоскости и пространства. В частности, широкое распространение получила **полярная система координат**, которая невероятно удобна для решения целого спектра практических задач. И через считанные минуты, не успевши опомниться, вы уже будете уверенно ориентироваться в полярных координатах!

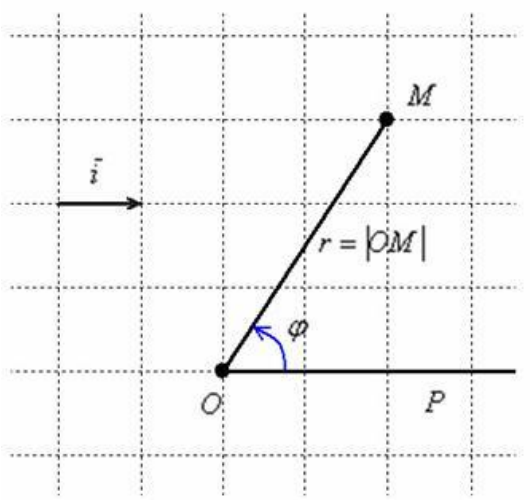
Чтобы определить полярную систему координат на плоскости, достаточно зафиксировать начало координат O и задать единичный координатный вектор $\bar{i}$. Точка O называется **полюсом**, а луч OP, сонаправленный с вектором $\bar{i}$ – **полярной осью**. Графический шаблон – проще некуда, одна точка, один **вектор**, одна линия:



На практике вместо вектора можно где-нибудь в углу указать масштаб, например: **1 ед. = 1 см** (две тетрадные клетки). По возможности, старайтесь выбирать именно такую, удобную во многих отношениях метрику.

А теперь сама мякотка:

Любая *отличная от начала координат* точка M плоскости однозначно определяется своим **расстоянием** $r = |OM|$ от полюса и *ориентированным* **углом** φ между полярной осью и отрезком OM:



Для самого полюса $r = 0$, а угол φ не определён. Число $r = |OM|$ называют **полярным радиусом** точки M или *первой полярной координатой*. Расстояние не может быть отрицательным, поэтому полярный радиус любой точки $r \geq 0$. Первую полярную координату также обозначают греческой буквой ρ («ро»), но я привык к латинскому варианту, и в дальнейшем буду использовать его.

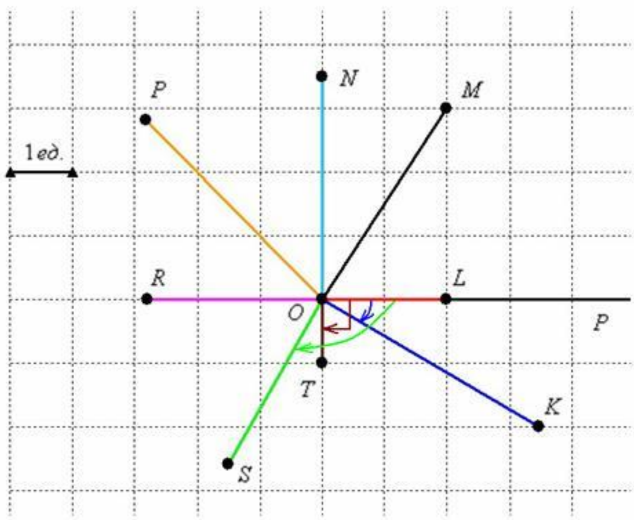
Число φ называют **полярным углом** данной точки или *второй полярной координатой*. Полярный угол стандартно изменяется в пределах $-\pi < \varphi \leq \pi$ (так называемые *главные значения угла*). Однако вполне допустимо использовать диапазон $0 \leq \varphi < 2\pi$, а в некоторых случаях и вовсе возникает прямая необходимость рассмотреть все значения угла от нуля до «плюс бесконечности». Рекомендую, кстати, привыкнуть к радианной мере угла, поскольку оперировать градусами в высшей математике считается не комильфо.

Пару (r, φ) называют **полярными координатами** точки M. Из ΔOMP легко найти и их конкретные значения. Тангенс острого угла прямоугольного треугольника – есть отношение противолежащего катета к прилежащему катету: $tg\varphi = \frac{MP}{OP} = \frac{3}{2}$, следовательно, сам угол: $\varphi = arctg\frac{3}{2} \approx 0{,}98$ рад. $\approx 56°$. По теореме Пифагора, квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов: $OM^2 = OP^2 + MP^2$, значит, полярный радиус: $r = \sqrt{OP^2 + MP^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} =$ ед. $\approx 3{,}6$ ед.

Таким образом, $M\left(\sqrt{13}; arctg\frac{3}{2}\right)$.

Один пингвин хорошо, а стая – лучше

$$K\left(4; -\frac{\pi}{6}\right), L(2; 0), M\left(\sqrt{13}; arctg\frac{3}{2}\right), N\left(\frac{7}{2}; \frac{\pi}{2}\right), P\left(5; \frac{3\pi}{4}\right), R(2{,}8; \pi), S\left(3; -\frac{2\pi}{3}\right), T\left(1; -\frac{\pi}{2}\right):$$



Отрицательно ориентированные углы $\varphi_K = -\frac{\pi}{6}, \varphi_S = -\frac{2\pi}{3}, \varphi_T = -\frac{\pi}{2}$ я на всякий случай отметил стрелками, вдруг кто-то из читателей ещё не знал об этой ориентации. При желании можно «прикрутить» к каждому из них 1 оборот (2π рад. или 360 градусов) и получить, к слову, удобные **табличные значения**:

$$\varphi_K = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}, \quad \varphi_S = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3}, \varphi_T = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2}$$

Но недостаток этих «традиционно» ориентированных углов состоит в том, что они слишком далеко (более чем, на 180 градусов) «закручены» против часовой стрелки. Предчувствую вопрос: «почему недостаток и зачем вообще нужны какие-то отрицательные углы?» В математике ценятся самые короткие и рациональные пути. Ну а уж с точки зрения физики направление вращения зачастую имеет принципиальное значение – каждый из нас пытался открыть дверь, дёргая ручку не в ту сторону =)

Порядок и техника построения точек в полярных координатах

Красивые картинки красивы, однако построение в полярной системе координат – занятие достаточно кропотливое. Трудностей не возникает с точками, у которых полярные углы составляют $\varphi = 0, \varphi = \pm\frac{\pi}{2}, \varphi = \pi$, в нашем примере это точки $L(2;0), N\left(\frac{7}{2};\frac{\pi}{2}\right), R(2{,}8;\pi), T\left(1;-\frac{\pi}{2}\right)$; особых хлопот также не доставляют значения, кратные 45 градусам: $P\left(5;\frac{3\pi}{4}\right)$. Но как правильно и грамотно построить, скажем, точку $S\left(3;-\frac{2\pi}{3}\right)$?

Потребуется клетчатый листок бумаги, карандаш и следующие чертёжные инструменты: линейка, циркуль, **транспортир**. В крайнем случае, можно обойтись одной линейкой, а то… и вовсе без неё! Читайте дальше и вы получите ещё одно доказательство, что эта страна непобедима =)

Пример 1

Построить точку $S\left(3;-\frac{2\pi}{3}\right)$ в полярной системе координат.

Строим =)

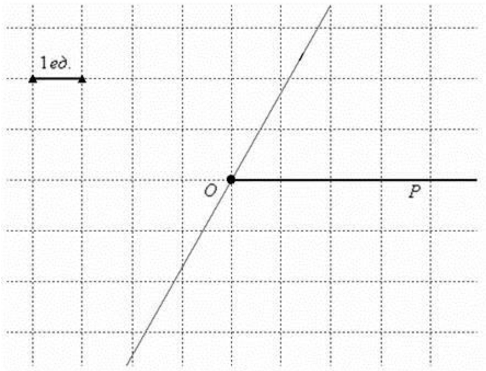
Прежде всего, необходимо выяснить градусную меру угла $-\frac{2\pi}{3}$. Если угол малознаком или вас есть сомнения, то всегда лучше воспользоваться **таблицей** либо общей формулой перевода радианов в градусы. Итак, наш угол составляет -120° (или 240°).

Начертим полярную систему координат (см. начало урока) и возьмём в руки транспортир. Обладателям круглого инструмента не составит труда отметить 240 градусов, но с большой вероятностью у вас на руках будет полукруглая версия девайса. Проблема полного отсутствия транспортира при наличии принтера и ножниц **решается рукоделием**.

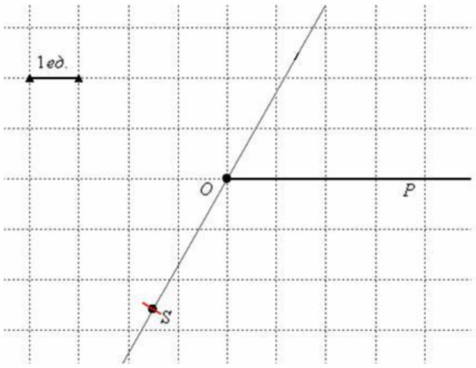
Есть два пути: перевернуть листок и отметить 120 градусов, либо «прикрутить» пол оборота и рассмотреть противоположный угол $-\frac{2\pi}{3}+\pi=\frac{\pi}{3}$. Выберем взрослый способ и сделаем отметку в 60 градусов:

То ли транспортир лилипутский, то ли клетка гигантская =) Впрочем, чтобы отмерить угол масштаб не важен.

Проводим карандашом тонкую прямую, проходящую через полюс и сделанную отметку:



С углом разобрались, на очереди полярный радиус. Берём циркуль и **по линейке** устанавливаем его раствор в 3 единицы, чаще всего, это, конечно же, сантиметры:
Теперь аккуратно устанавливаем иглу на полюс, и вращательным движением выполняем небольшую засечку (красный цвет). Искомая точка $S\left(3;-\frac{2\pi}{3}\right)$ построена:

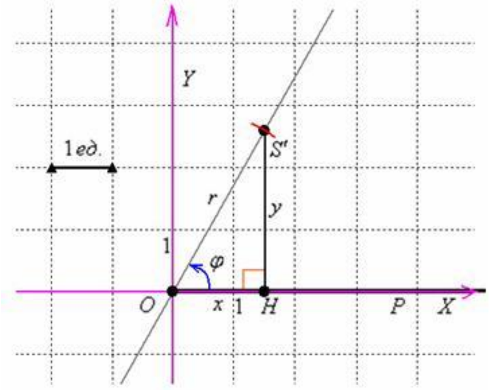


Можно обойтись без циркуля, приложив линейку непосредственно к построенной прямой и отмерив 3 сантиметра. Но, как мы увидим позже, **в задачах на построение в полярной системе координат** типична ситуация, когда нужно отметить две или бОльшее количество точек с одним и тем же полярным радиусом, поэтому эффективнее закалять металл. В частности, на нашем чертеже, развернув ногу циркуля на 180 градусов, легко

сделать вторую засечку и построить симметричную относительно полюса точку $S'\left(3; \frac{\pi}{3}\right)$.
На ней давайте и отработаем материал следующего параграфа:

Взаимосвязь прямоугольной и полярной системы координат

Очевидным образом *присоединим* к полярной системе координат «обычную» координатную сетку OXY и изобразим на чертеже точку $S'\left(3; \frac{\pi}{3}\right)$:



Такое присоединение всегда полезно держать в голове, когда выполняете чертёж в полярных координатах. Хотя, волей-неволей оно напрашивается и без лишнего намёка.

Установим взаимосвязь полярных $(r; \varphi)$ и декартовых $(x; y)$ координат на примере конкретной точки S'. Рассмотрим прямоугольный треугольник OHS', в котором гипотенуза равна полярному радиусу: $OS' = r$, а катеты – «иксовой» и «игрековой» координатам точки S' в декартовой системе координат: $OH = x,\ HS' = y$.

Синус острого угла – есть отношение противолежащего катета к гипотенузе:

$$\sin\varphi = \frac{HS'}{OS'} = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\sin\varphi$$

Косинус острого угла – есть отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos\varphi = \frac{OH}{OS'} = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\varphi$$

Заодно повторили определения синуса, косинуса (и чуть ранее тангенса) из программы 9 класса общеобразовательной школы.

Пожалуйста, занесите в свой справочник рабочие формулы $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$, выражающие декартовы координаты точки через её полярные координаты – с ними нам придётся столкнуться ещё неоднократно, и в следующий раз прямо сейчас =)

Найдём координаты точки $S'\left(3; \frac{\pi}{3}\right)$ в прямоугольной системе координат:

$$x = r\cos\varphi = 3\cos\frac{\pi}{3} = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$y = r\sin\varphi = 3\sin\frac{\pi}{3} = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}6$$

Таким образом: $S'\left(\frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

Полученные формулы открывают ещё одну лазейку в задаче построения, когда можно обойтись вообще без транспортира: сначала находим декартовы координаты точки (понятно, на черновике), затем мысленно находим нужное место на чертеже и отмечаем данную точку. На заключительном этапе проводим тонкую прямую, которая проходит через построенную точку и полюс. В результате получается, что угол якобы был отмерян транспортиром.

Забавно, что совсем отчаянные студенты, могут обойтись даже без линейки, используя вместо неё ровный край учебника, тетради или зачётной книжки – ведь о метрике позаботились производители тетрадей, 1 клетка = 5 миллиметров.

Напомнило мне всё это известный анекдот, в котором находчивые лётчики прокладывали курс по пачке Беломора =) Хотя, шутки шутками, а анекдот не так далёк от реальности, помнится, на одном из внутренних рейсов по РФ в лайнере отказали все навигационные приборы, и экипаж успешно посадил борт при помощи обычного стакана с водой, который показывал угол наклона самолёта относительно земли. А лётная полоса – вот она, из лобового стекла виднА.

Используя процитированную в начале урока теорему Пифагора, легко получить и обратные формулы: $r=\sqrt{OH^2+HS'^2}=\sqrt{x^2+y^2}$, следовательно:

$$\cos\varphi=\frac{x}{r}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\sin\varphi=\frac{y}{r}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Сам угол «фи» стандартно выражается через арктангенс – абсолютно так же как и **аргумент комплексного числа** со всеми его заморочками.

Вторую группу формул также целесообразно поместить в свой справочный багаж.

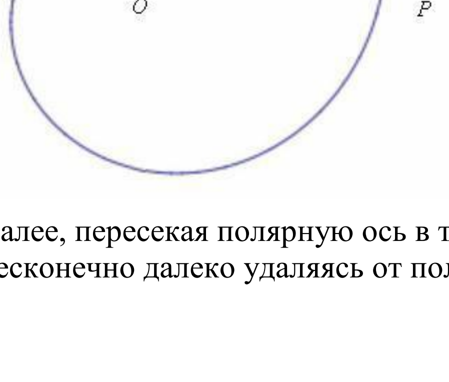
После подробного разбора полётов с отдельно взятыми точками перейдём к закономерному продолжению темы:

Уравнение линии в полярных координатах

По существу, уравнение линии в полярной системе координат представляет собой **функцию полярного радиуса $r=r(\varphi)$ от полярного угла (аргумента)**. При этом полярный угол учитывается в радианах (!) и *непрерывно* принимает значения от 0 до 2π *(иногда следует рассмотреть до бесконечности, или же в ряде задач для удобства от $-\pi$ до π)*. Каждому значению угла «фи», которое входит в **область определения** функции $r=r(\varphi)$, соответствует единственное значение полярного радиуса.

Полярную функцию можно сравнить со своеобразным радаром – когда луч света, исходящий из полюса, вращается против часовой стрелки и «обнаруживает» (прорисовывает) линию.

Дежурным примером полярной кривой является *Архимедова спираль* $r=\varphi$. На следующем рисунке изображен её *первый виток* – когда полярный радиус вслед за полярным углом принимает значения от 0 до 2π:



Далее, пересекая полярную ось в точке $r=\varphi=2\pi$, спираль продолжит раскручиваться, бесконечно далеко удаляясь от полюса. Но подобные случаи на практике встречаются довольно редко; более типичная ситуация, когда на всех последующих оборотах мы «пройдёмся по той же самой линии», которая получена в диапазоне $0 \le \varphi < 2\pi$.

В первом же примере мы сталкиваемся и с понятием **<u>области определения</u>** полярной функции: поскольку полярный радиус неотрицателен $r \ge 0$, то отрицательные углы здесь рассматривать нельзя.

! Примечание*: в ряде случаев принято использовать* ***обобщённые полярные координаты****, где радиус может быть отрицательным, и такой подход мы вкратце изучим чуть позже*

Кроме спирали Архимеда, есть множество других известных кривых, но искусством, как говорится, сыт не будешь, поэтому я подобрал примеры, которые очень часто встречаются в реальных практических заданиях.

Сначала простейшие уравнения и простейшие линии:

Уравнение вида $\varphi = K = const$ задаёт исходящий из полюса **луч**. Действительно, вдумайтесь, если значение угла **всегда** (каким бы ни было «эр») постоянно, то какая это линия?

Примечание*: в обобщённой полярной системе координат данное уравнение задаёт прямую, проходящую через полюс*

Уравнение вида $r = K = const$ определяет… догадайтесь с первого раза – если **для любого** угла «фи» радиус остаётся постоянным? Фактически это определение **<u>окружности</u>** с центром в полюсе радиуса K.

Например, $r = 2$. Для наглядности найдём уравнение данной линии в прямоугольной системе координат. Используя полученную в предыдущем параграфе формулу $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, проведём замену:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2$$

Возведём обе части в квадрат:

$x^2 + y^2 = 2^2$ – **<u>уравнение окружности</u>** с центром в начале координат радиуса 2, что и требовалось проверить.

Со времён создания и релиза статьи **<u>о линейной зависимости и линейной независимости векторов</u>** я получил несколько писем от посетителей сайта, которые задавали вопрос в духе: «вот есть простая и удобная прямоугольная система координат, зачём нужен ещё какой-то косоугольный аффинный случай?». Ответ прост: математика стремится объять всё и вся! Кроме того, в той или иной ситуации немаловажно удобство – как видите, с окружностью значительно выгоднее работать именно в полярных координатах по причине предельной простоты уравнения $r = const$.

А иногда математическая модель предвосхищает научные открытия. Так, в своё время ректор Казанского университета Н.И. Лобачевский **строго доказал**, через произвольную точку плоскости можно провести **бесконечно много прямых**, параллельных данной. В результате он был ошельмован всем научным миром, но… опровергнуть данный факт никто не смог. Только спустя доброе столетие астрономы выяснили, что свет в космосе распространяется по кривым траекториям, где и начинает работать неевклидова геометрия Лобачевского, формально разработанная им задолго до этого открытия. Предполагается, что это свойство самого пространства, кривизна которого нам незаметна ввиду малых (по астрономическим меркам) расстояний.

Рассмотрим более содержательные задачи на построение:

<u>Пример 2</u>

Построить линию $r = 4\cos\varphi$

Решение: в первую очередь найдём **<u>область определения</u>**. Так как полярный радиус неотрицателен, то должно выполняться неравенство $\cos\varphi \ge 0$. Можно вспомнить школьные правила решения тригонометрических неравенств, но в простых случаях как этот, я советую более быстрый и наглядный метод решения:

Представьте график косинуса. Если он ещё не успел отложиться в памяти, то найдите его на странице **Графики элементарных функций**. О чём нам сообщает неравенство $\cos\varphi \geq 0$? Оно сообщает нам о том, что график косинуса должен располагаться **не ниже** оси абсцисс. А это происходит на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. И, соответственно, интервал $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ не подходит.

Таким образом, область определения нашей функции: $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то есть график $r = 4\cos\varphi$ расположен справа от полюса (по терминологии декартовой системы – в правой полуплоскости).

В полярных координатах часто бывает смутное представление о том, какую линию определяет то или уравнение, поэтому чтобы её построить, необходимо найти принадлежащие ей точки – и чем больше, тем лучше. Обычно ограничиваются десятком-другим (а то и меньшим количеством). Проще всего, конечно же, взять **табличные значения угла**. Для бОльшей ясности к отрицательным значениям я буду «прикручивать» один оборот:

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow r = 4\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 4\cos\frac{3\pi}{2} = 4 \cdot 0 = 0$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow r = 4\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 4\cos\frac{5\pi}{3} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow r = 4\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 4\cos\frac{7\pi}{4} = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 2{,}83$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow r = 4\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\frac{11\pi}{6} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 3{,}46$$

$$\varphi = 0 \quad \Rightarrow r = 4\cos 0 = 4 \cdot 1 = 4$$

В силу чётности косинуса $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ соответствующие положительные значения можно заново не считать:

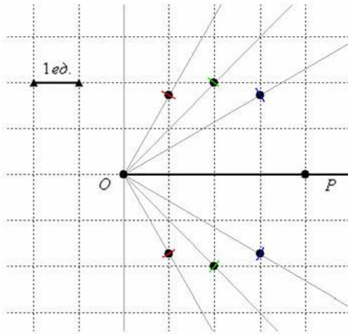
$$\varphi = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow r \approx 3{,}46$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow r \approx 2{,}83$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow r = 2$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow r = 0$$

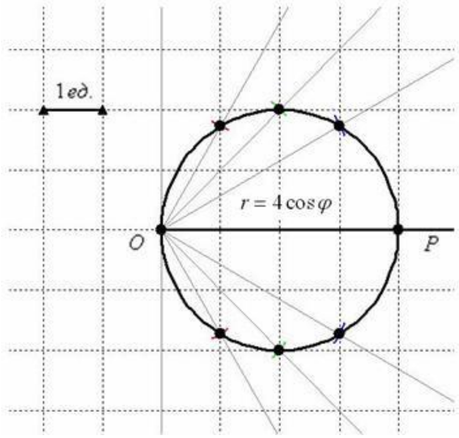
Изобразим полярную систему координат и отложим найденные точки, при этом одинаковые значения «эр» удобно откладывать за один раз, делая парные засечки циркулем по рассмотренной выше технологии:



В принципе, линия отчётливо прорисовывается, но чтобы стопроцентно подтвердить догадку, давайте найдём её уравнение в декартовой системе координат. Можно применить недавно выведенные формулы $r=\sqrt{x^2+y^2},\ \cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, но я расскажу вам о более хитром приёме. Обе части уравнения $r=4\cos\varphi$ искусственно домножаем на «эр»:
$r^2=4r\cos\varphi$ и используем более компактные формулы перехода $r^2=x^2+y^2,\ r\cos\varphi=x$:
$x^2+y^2=4x$

Выделяя полный квадрат, приводим уравнение линии к узнаваемому виду:
$x^2-4x+y^2=0$
$x^2-4x+4+y^2=4$
$(x-2)^2+y^2=2^2$ – **уравнение окружности** с центром в точке $(2;0)$, радиуса 2.

Коль скоро по условию требовалось просто выполнить построение и всё, плавно соединяем найденные точки линией:



Готово. Ничего страшного, если получится немного неровно, вы же не обязаны были знать, что это окружность ;-)

Почему мы не рассмотрели значения угла вне промежутка $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$? Ответ прост: нет смысла. Ввиду периодичности функции $r=4\cos\varphi$ нас ждёт бесконечный бег по построенной окружности.

Несложно провести нехитрый анализ и прийти к выводу, что уравнение вида $r=d\cos\varphi\quad(d>0)$ задаёт окружность диаметра d с центром в точке $\left(\dfrac{d}{2};0\right)$. Образно говоря, все такие окружности «сидят» на полярной оси OP и обязательно проходят через полюс. Если же $d<0$, то весёлая компания перекочует налево – на продолжение полярной оси (подумайте, почему).

Похожая задача для самостоятельного решения:

Пример 3

Построить линию $r = 3\sin\varphi$ и найти её уравнение в прямоугольной системе координат.

Систематизируем порядок решения задачи:

В первую очередь находим область определения функции, для этого удобно посмотреть на **синусоиду**, чтобы сразу же понять, где синус неотрицателен.

На втором шаге рассчитываем полярные координаты точек, используя **табличные значения углов**; проанализируйте, нельзя ли сократить количество вычислений?

На третьем шаге откладываем точки в полярной системе координат и аккуратно соединяем их линией.

И, наконец, находим уравнение линии в декартовой системе координат.

Примерный образец решения в конце урока.

Общий алгоритм и технику построения в полярных координатах мы детализируем **и существенно ускорим** во второй части лекции, но перед этим познакомимся ещё с одной распространённой линией:

Полярная роза

Совершенно верно, речь пойдёт о цветке с лепестками:

Пример 4

Построить линии, заданные уравнениями в полярных координатах

а) $r = 2\sin 2\varphi$

б) $r = 2\sin 3\varphi$

Существует два подхода к построению полярной розы. Сначала пойдём по накатанной колее, считая, что полярный радиус не может быть отрицательным:

Решение:

а) Найдём область определения функции:

$r \geq 0 \Rightarrow \sin 2\varphi \geq 0$

Такое тригонометрическое неравенство тоже нетрудно решить графически: из материалов статьи **Геометрические преобразования графиков** известно, что если аргумент функции удвоить, то её график сожмётся к оси ординат в 2 раза. Пожалуйста, найдите график функции $y = \sin 2x$ в первом же примере указанного урока. Где данная синусоида находится выше оси абсцисс? На интервалах $\left(0; \frac{\pi}{2}\right), \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. Следовательно, неравенству $\sin 2\varphi \geq 0$ удовлетворяют соответствующие отрезки, и **область определения** нашей функции: $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Вообще говоря, решение рассматриваемых неравенств представляет собой объединение бесконечного количества отрезков, но, повторюсь, нас интересует только один период.

Возможно, некоторым читателям более лёгким покажется аналитический способ нахождения области определения, условно назову его «нарезка круглого пирога». Резать будем **на равные части** и, прежде всего, найдём границы первого куска. Рассуждаем следующим образом: **синус неотрицателен, когда его аргумент** находится в пределах от 0 до π рад. включительно. В нашем примере: $0 \leq 2\varphi \leq \pi$. Разделив все части двойного неравенства на 2, получаем искомый промежуток:

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

Теперь начинаем последовательно «нарезать равные куски по 90 градусов» против часовой стрелки:

– найденный отрезок $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, понятно, входит в область определения;

– следующий интервал $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ – не входит;

– следующий отрезок $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ – входит;

– и, наконец, интервал $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ – не входит.

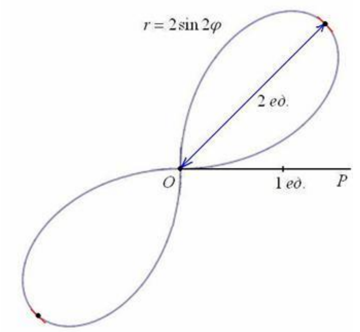
Прямо, как по ромашке – «любит, не любит, любит, не любит» =) С тем отличием, что тут не гадание. Да, прямо какая-то любовь по-китайски получается….

Итак, $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ и линия $r = 2\sin 2\varphi$ представляет собой розу с двумя одинаковыми лепестками. Чертёж вполне допустимо выполнить схематически, однако крайне желательно правильно найти и отметить **вершины лепестков**. Вершинам соответствуют <u>середины отрезков области определения</u>, которые в данном примере имеют очевидные угловые координаты $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}, \varphi_2 = \frac{5\pi}{4}$. При этом **длины лепестков** составляют:

$$r\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2} = 2 \cdot 1 = 2 \text{ ед.}$$

$$r\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 2\sin\left(2 \cdot \frac{5\pi}{4}\right) = 2\sin\frac{5\pi}{2} = 2 \cdot 1 = 2 \text{ ед.}$$

Вот закономерный результат заботливого садовника:



Следует отметить, что длину лепестка легко сразу усмотреть из уравнения $r = 2\sin 2\varphi$ – так как синус ограничен: $-1 \le \sin 2\varphi \le 1$, то максимальное значение «эр» заведомо не превзойдёт двух.

б) Построим линию, заданную уравнением $r = 2\sin 3\varphi$. Очевидно, что длина лепестка этой розы тоже равна двум, но, прежде всего, нас интересует область определения. Применим аналитический метод «нарезки»: **синус неотрицателен, когда его аргумент** находится в пределах от нуля до «пи» включительно, в данном случае: $0 \le 3\varphi \le \pi$. Делим все части неравенства на 3 и получаем первый промежуток:

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$$

Далее начинаем «нарезку пирога кускам» по $\frac{\pi}{3}$ рад. (60 градусов):

– отрезок $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ войдёт в область определения;

– интервал $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$ – не войдёт;
– отрезок $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$ – войдёт;
– интервал $\left(\pi; \frac{4\pi}{3}\right)$ – не войдёт;
– отрезок $\left[\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$ – войдёт;
– интервал $\left(\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right)$ – не войдёт.

Процесс успешно завершён на отметке 360 градусов.

Таким образом, область определения: $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$.

Проводимые действия полностью либо частично несложно осуществлять и мысленно.

Построение. Если в предыдущем пункте всё благополучно обошлось прямыми углами и углами в 45 градусов, то здесь придётся немного повозиться. Найдём **вершины лепестков**. Их длина $r = 2$ была видна с самого начала задания, осталось вычислить угловые координаты, которые равны серединам отрезков области определения:

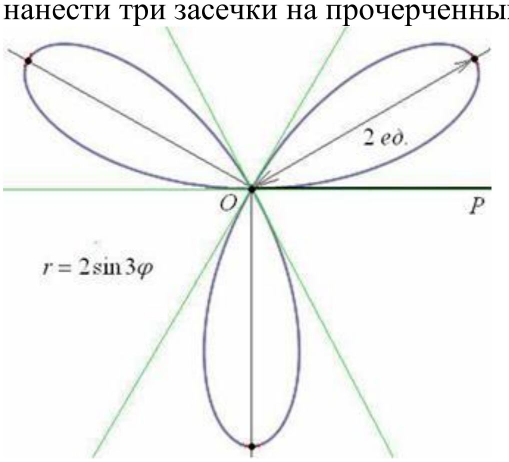
$$\varphi_1 = \frac{0 + \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{6} \text{ рад. } (30°)$$

$$\varphi_2 = \frac{\frac{2\pi}{3} + \pi}{2} = \frac{5\pi}{6} \text{ рад. } (150°)$$

$$\varphi_3 = \frac{\frac{4\pi}{3} + \frac{5\pi}{3}}{2} = \frac{3\pi}{2} \text{ рад. } (270°)$$

Обратите внимание, что между вершинами лепестков должны обязательно получиться равные промежутки, в данном случае 120 градусов.

Чертёж желательно разметить на 60-градусные секторы (отграничены зелёными линиями) и провести направления вершин лепестков (серые линии). Сами вершины удобно наметить с помощью циркуля – единожды отмерять расстояние в 2 единицы и нанести три засечки на прочерченных направлениях в 30, 150 и 270 градусов:



Готово. Понимаю, что занятие хлопотное, но если хотите всё оформить по уму, то придётся потратить время.

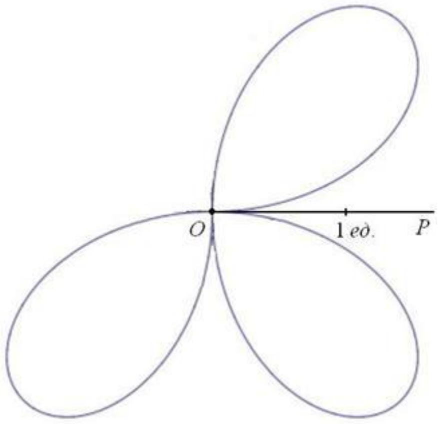
Сформулируем общую формулу: уравнение вида $r = m\sin(k\varphi)$ $(m > 0, k > 0$, k – <u>натуральное число</u>), задаёт полярную k-лепестковую розу, длина лепестка которой равна m.

Например, уравнение $r = 5\sin 4\varphi$ задаёт четырёхлистник с длиной лепестка в 5 единиц, уравнение $r = 3\sin 5\varphi$ – 5-лепестковую розу с длиной лепестка в 3 ед. и т.д.

О втором подходе я хотел вообще умолчать, однако не могу пройти мимо – уж слишком он распространён. Суть состоит в том, что полярная роза часто рассматривается **в обобщённых полярных координатах**, где **полярный радиус может быть отрицательным**. Вопрос области определения отпадает, но появляются другие приколы.

Во-первых, разберёмся, как строить точки с отрицательным значением «эр». Если $r < 0$, то необходимо **мысленно** найти точку с таким же углом, но радиуса $|r|$ и **отобразить её симметрично** относительно полюса. Вернёмся к первой полярной розе $r = 2\sin 2\varphi$ и рассмотрим интервал $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, на котором полярный радиус отрицателен. Как, например, изобразить точку $\left(-2; \frac{3\pi}{4}\right)$? Мысленно находим точку $\left(2; \frac{3\pi}{4}\right)$ (левый верхний сектор) и отображаем её симметрично относительно полюса в точку $\left(2; -\frac{\pi}{4}\right)$.

Таким образом, **когда угол принимает значения из интервала** $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, то **прорисовывается ещё один лепесток в правом нижнем секторе**:



И, соответственно, когда угол проходит значения $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$, то прорисовывается 4-й лепесток в противоположном (левом верхнем) секторе:

Угол между прямыми в пространстве равен углу между их направляющими векторами. Поэтому, если две прямые заданы каноническими уравнениями вида

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2},$$

косинус угла между ними можно найти по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых тоже сводятся к соответствующим условиям для их направляющих векторов:

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$$ - **условие параллельности прямых**,

$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$ - **условие перпендикулярности прямых**,

Угол φ между прямой, заданной каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$ и плоскостью, определяемой общим уравнением

$Ax + By + Cz + D = 0$, можно рассматривать как дополнительный к углу ψ между направляющим вектором прямой и нормалью к плоскости. Тогда

$$\sin\varphi=\cos\psi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

У**словием параллельности прямой и плоскости** является при этом условие перпендикулярности векторов ***n*** и ***a**:*

$Al + Bm + Cn= 0$, а **условием перпендикулярности прямой и плоскости** – условие параллельности этих векторов: $A/l = B/m = C/n$.

3. Понятие поверхности в пространстве.

Поверхность в пространстве, как правило, можно рассматривать как геометрическое место точек, удовлетворяющих какому-либо условию.

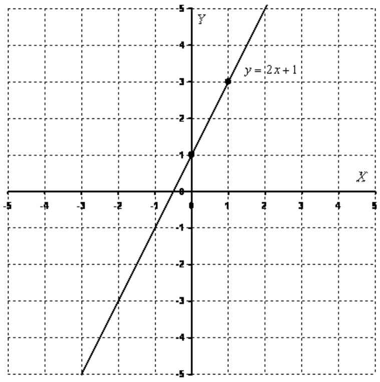
Прямоугольная система координат $Oxyz$ в пространстве позволяет установить взаимно однозначное соответствие между точками пространства и тройками чисел x, y и z - их координатами. Свойство, общее всем точкам поверхности, можно записать в виде уравнения, связывающего координаты всех точек поверхности.

Уравнением данной поверхности в прямоугольной системе координат $Oxyz$ называется такое уравнение $F(x,y,z)=0$ с тремя переменными x, y и z, которому удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на поверхности, и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на этой поверхности. Переменные x, y и z в уравнении поверхности называются **текущими координатами** точек поверхности.

3.3. Основные элементарные функции, их свойства, графики.

1. Определение функции.
2. Свойства функций: область определения, область значений, четность, периодичность, монотонность, точки экстремума.
3. Графики взаимообратных функций.

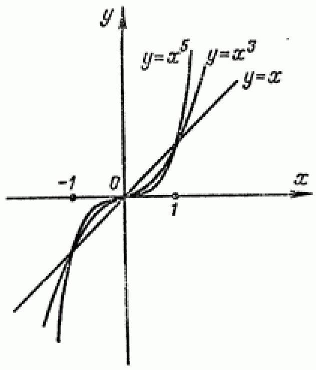
1. Линейная функция задается уравнением $y=ax+b$. График линейной функций представляет собой прямую. Для того, чтобы построить прямую достаточно знать две точки.



2. Степенная $y = x^{\alpha}, \alpha \in R$

Степенная функция с натуральным нечетным показателем, p = n = 1, 3, 5, ...

Рассмотрим степенную функцию $y = x^{p} = x^{n}$ с натуральным нечетным показателем степени n = 1, 3, 5, ... Такой показатель также можно записать в виде: n = 2k + 1, где k = 0, 1, 2, 3, ... – целое не отрицательное. Ниже представлены свойства и графики таких



функций.

Область определения: $-\infty < x < \infty$

Множество значений: $-\infty < y < \infty$

Четность: нечетная, $y(-x) = -y(x)$

Монотонность: монотонно возрастает

Экстремумы: нет

Выпуклость:

при $-\infty < x < 0$ выпукла вверх

при $0 < x < \infty$ выпукла вниз

Точки перегибов: x = 0, y = 0

Точки пересечения с осями координат: x = 0, y = 0

Степенная функция с натуральным четным показателем, p = n = 2, 4, 6, ...

Рассмотрим степенную функцию $y = x^{p} = x^{n}$ с натуральным четным показателем степени n = 2, 4, 6, ... Такой показатель также можно записать в виде: n = 2k, где k = 1, 2, 3, ... – натуральное. Свойства и графики таких функций даны ниже.

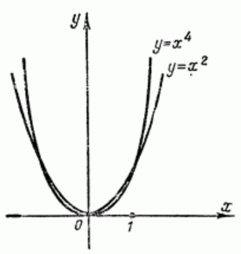


Рис. 20

Область определения: $-\infty < x < \infty$

Множество значений: $0 \le y < \infty$

Четность: четная, $y(-x) = y(x)$
Монотонность:
при $x < 0$ монотонно убывает
при $x > 0$ монотонно возрастает
Экстремумы: минимум, $x = 0$, $y = 0$
Выпуклость: выпукла вниз
Точки перегибов: нет
Точки пересечения с осями координат: $x = 0$, $y = 0$

Степенная функция с целым отрицательным показателем, $p = n = -1, -2, -3, \ldots$

Рассмотрим степенную функцию $y = x^p = x^n$ с целым отрицательным показателем степени $n = -1, -2, -3, \ldots$. Если положить $n = -k$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$ – натуральное, то ее можно представить в виде:
График степенной функции $y = x^n$ с целым отрицательным показателем при различных значениях показателя степени $n = -1, -2, -3, \ldots$.

Нечетный показатель, $n = -1, -3, -5, \ldots$

Ниже представлены свойства функции $y = x^n$ с нечетным отрицательным показателем n

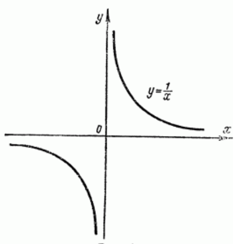


Рис. 21

$= -1, -3, -5, \ldots$.

Область определения: $x \neq 0$
Множество значений: $y \neq 0$
Четность: нечетная, $y(-x) = -y(x)$
Монотонность: монотонно убывает
Экстремумы: нет
Выпуклость:
при $x < 0$: выпукла вверх
при $x > 0$: выпукла вниз
Точки перегибов: нет
Точки пересечения с осями координат: нет

3. Показательная $y = a^x, a \neq 1, a > 0, a = const$

Сформулируем основные свойства показательной функции :

1. Область определения — множество (R) всех действительных чисел.
2. Область значений — множество (R+) всех положительных действительных чисел.
3. При a > 1 функция возрастает на всей числовой прямой; при 0<a<1 функция убывает.
4. Является функцией общего вида.

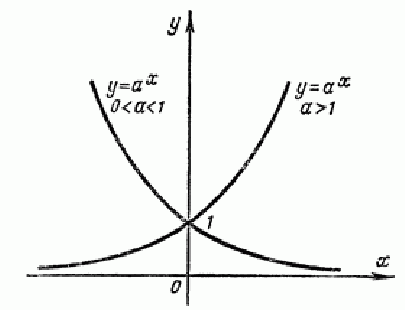
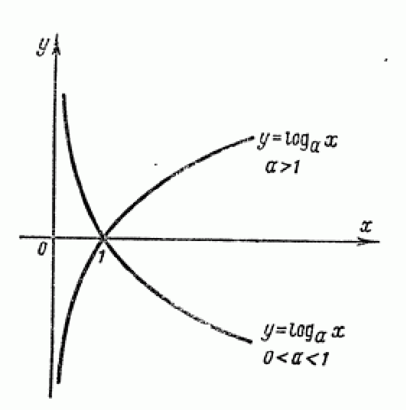


Рис. 23

4. Логарифмическая $y = \log_a x, \quad a \neq 1, a > 0, a = const$

Логарифмическая функция y = $\log_a$ x обладает следующими свойствами :

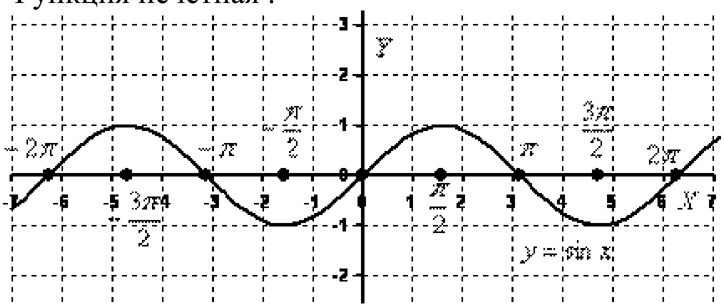
1. Область определения D(x)Î (0; + ∞).
2. Область значений E(y) Î (- ∞; + ∞)
3. Функция ни четная, ни нечетная (общего вида).
4. Функция возрастает на промежутке (0; + ∞) при a > 1, убывает на (0; + ∞) при 0 < a < 1.



5. Тригонометрические: $y = \sin x, \ y = \cos x, \ y = tgx, \ y = ctgx$

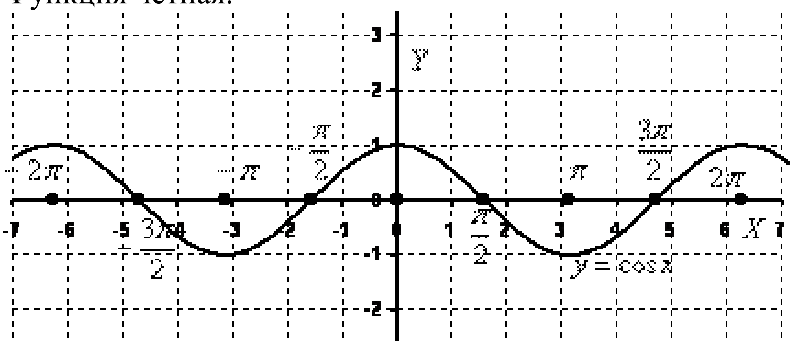
Функция y = sin (x).

1. Область определения D(x) ÎR.
2. Область значений E(y) Î [- 1; 1].
3. Функция периодическая; основной период равен 2π.
4. Функция нечетная .



Функция y = cos(x).

1. Область определения D(x) ÎR.
2. Область значений E(y) Î [- 1; 1].
3. Функция периодическая с основным периодом 2π.
4. Функция четная.



3.4 Свойства функций, непрерывных на отрезке

1. Теорема Вейерштрасса.
2. Теорема Больцано – Коши.
3. Метод интервалов.

Свойство 1: (Первая теорема Вейерштрасса (Вейерштрасс Карл (1815-1897) - немецкий математик)). Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке, т.е. на отрезке $[a,b]$ выполняется условие - $M \le f(x) \le M$.

Доказательство этого свойства основано на том, что функция, непрерывная в точке x_0, ограничена в некоторой ее окрестности, а если разбивать отрезок $[a,b]$ на бесконечное количество отрезков, которые "стягиваются" к точке x_0, то образуется некоторая окрестность точки x_0.

Свойство 2: Функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$, принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.

Т.е. существуют такие значения x_1 и x_2, что $f(x_1) = m, f(x_2) = M$, причем $m \le f(x) \le M$.

Отметим эти наибольшие и наименьшие значения функция может принимать на отрезке и несколько раз (например - $f(x) = \sin x$).

Разность между наибольшим и наименьшим значением функции на отрезке называется колебанием функции на отрезке.

Свойство 3: (Вторая теорема Больцано - Коши). Функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$, принимает на этом отрезке все значения между двумя произвольными величинами.

Свойство 4: Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, то существует некоторая окрестность точки x_0, в которой функция сохраняет знак.

Свойство 5: (Первая теорема Больцано (1781-1848) - Коши). Если функция $f(x)$ - непрерывная на отрезке $[a,b]$ и имеет на концах отрезка значения противоположных знаков, то существует такая точка внутри этого отрезка, где $f(x) = 0$.

Т.е. если $sign(f(a)) \ne sign(f(b))$, то $\exists x_0 : f(x_0) = 0$.

Определение. Функция $f(x)$ называется равномерно непрерывной на отрезке $[a,b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\Delta > 0$ такое, что для любых точек $x_1 \in [a,b]$ и $x_2 \in [a,b]$ таких, что $|x_2 - x_1| < \Delta$ верно неравенство $f(x_2) - f(x_1) < \varepsilon$.

Отличие равномерной непрерывности от "обычной" в том, что для любого е существует свое Δ, не зависящее от x, а при "обычной" непрерывности Δ зависит от ε и x .

Свойство 6: Теорема Кантора (Кантор Георг (1845-1918) - немецкий математик). Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем. (Это свойство справедливо только для отрезков, а не для интервалов и полуинтервалов.)

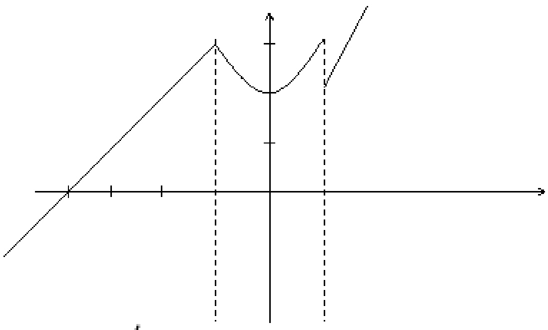
Свойство 7: Если функция $f(x)$ определена, монотонна и непрерывна на некотором промежутке, то и обратная ей функция $x = g(y)$ тоже однозначна, монотонна и непрерывна.

Пример. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = 3 \quad \lim_{x \to 1-0} f(x) = 3$$

они есть. $\lim_{x \to -1+0} f(x) = 3 \quad \lim_{x \to 1+0} f(x) = 2$ в точке $x = 1$ функция непрерывна в точке $x = 1$

точка разрыва 1 - го рода



$y'_t = \left(t^3\right)' = 3t^2$

производная x **по** t**:**

$x'_t = (\ln t)' = \dfrac{1}{t}$

Тогда

$y'_x = \dfrac{3t^2}{\frac{1}{t}} = 3t^3$

Вторая производная равна

$y''_{xx} = \left(3t^3\right)' \cdot \dfrac{1}{\frac{1}{t}} = 3 \cdot \left(t^3\right)' \cdot t = 3t \cdot 3t^2 = 9t^3$

Ответ. $y''_{xx} = 9t^3$

Теорема Ролля

Пусть функция f: $[a, b] \to$ R непрерывна на сегменте $[a, b]$, и имеет конечную или бесконечную производную внутри этого сегмента. Пусть, кроме того, $f(a) = f(b)$. Тогда внутри сегмента $[a, b]$ найдется точка ξ такая, что $f'(\xi) = 0$.

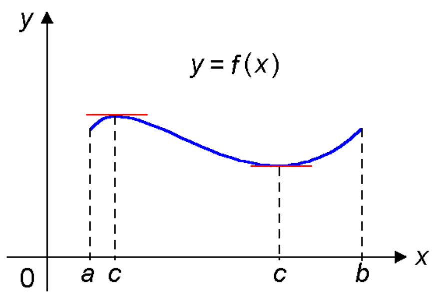


Рис. 1

Теорема Лагранжа

Если функция f: $[a, b] \to$ R непрерывна на сегменте $[a, b]$ и имеет конечную или бесконечную производную во внутренних точках этого сегмента, то $\exists \xi \in \,]a, b[$ такое, что $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

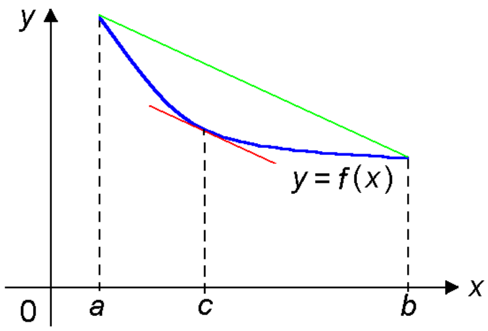


Рис. 2

Теорема Коши

Если каждая из функций f и g непрерывна на $[a, b]$ и имеет конечную или бесконечную производную на $]a, b[$ и если, кроме того, производная $g'(x) \neq 0$ на $]a, b[$, то $\exists \xi \in]a, b[$ такое, что справедлива формула

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Если дополнительно потребовать, чтобы $g(a) \neq g(b)$, то условие $g'(x) \neq 0$ можно заменить менее жестким:

$$(f'(x))^2+(g'(x))^2 \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[.$$

3.5. Метод наименьших квадратов

1. Смысл метода наименьших квадратов.
2. Нормированная система для нахождения параметров линейной и квадратичной зависимостей.
3. Нахождение зависимости между признаками по данным эксперимента.

Пусть данные некоторого эксперимента представлены в виде таблицы значений переменных x и y .

x_i	x_0	x_1	…	x_m
y_i	y_0	y_1	…	y_m

Можно поставить задачу об отыскании аналитической зависимости между x и y, т. е. некоторой формулы $y=f(x)$, явным образом выражающей y как функцию от x. Естественно требовать, чтобы график искомой функции $y=f(x)$ изменялся плавно и не слишком уклонялся от экспериментальных точек (x_i, y_i). Поиск такой функциональной зависимости называют «сглаживанием» экспериментальных данных.

Задачу о сглаживании экспериментальных данных можно решать, используя метод наименьших квадратов. Этот метод относится к классу аппроксимационных методов, а его идея состоит в том, чтобы по данным эксперимента построить приближённо функцию в виде многочлена с тем расчётом, чтобы сумма квадратов отклонений построенной функции от экспериментальной в узловых точках была минимальна.

Будем строить функцию в виде многочлена

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0.$$

Построить многочлен $f(x)$ – значит определить его коэффициенты $a_i,\ i=\overline{0,n}$.

Введём функцию $S=\sum_{i=0}^{m}\delta_i^2,$ где $\delta_i=f(x_i)-y_i,$

и потребуем, чтобы отклонение функции от экспериментальной в точках $x_i,\ i=\overline{0,m},$ т. е. величина (4.1) была минимальной. Используя выражение для $f(x)$, запишем функцию S в виде:

$$S=S(a_0,a_1,\ldots,a_n)=\left\{\sum_{i=0}^{m}\left(a_n x_i^n+a_{n-1}x_i^{n-1}+\ldots+a_0-y_i\right)^2\right\}.$$

Необходимыми условиями экстремума функции S является равенство нулю её частных производных по всем переменным $a_0,a_1,\ldots,a_n$, т. е.

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0,\ \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \ldots, \frac{\partial S}{\partial a_n} = 0$$

. Условия (4.2) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений с неизвестными $a_0, a_1, \ldots, a_n$ вида:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum\limits_{i=0}^{m}\left(a_n x_i^n + a_{n-1}x_i^{n-1} + \ldots + a_0 - y_i\right) = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum\limits_{i=0}^{m}\left(a_n x_i^n + a_{n-1}x_i^{n-1} + \ldots + a_0 - y_i\right)x_i = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_n} = 2\sum\limits_{i=0}^{m}\left(a_n x_i^n + a_{n-1}x_i^{n-1} + \ldots + a_0 - y_i\right)x_i^n = 0. \end{cases}$$

Запишем эту систему в нормальной форме:

$$\begin{cases} a_0 m + a_1\sum\limits_{i=0}^{m} x_i + a_2\sum\limits_{i=0}^{m} x_i^2 + \ldots + a_n\sum\limits_{i=0}^{m} x_i^n = \sum\limits_{i=0}^{m} y_i, \\ a_0\sum\limits_{i=0}^{m} x_i + a_1\sum\limits_{i=0}^{m} x_i^2 + \ldots + a_n\sum\limits_{i=0}^{m} x_i^{n+1} = \sum\limits_{i=0}^{m} x_i y_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0\sum\limits_{i=0}^{m} x_i^n + a_1\sum\limits_{i=0}^{m} x_i^{n+1} + \ldots + a_n\sum\limits_{i=0}^{m} x_i^{2n} = \sum\limits_{i=0}^{m} x_i^n y_i. \end{cases}$$

Решая эту систему любым из известных методов, определяем коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ искомого многочлена.

В частном случае аппроксимации экспериментальных данных с помощью линейной функции $f(x) = a_1 x + a_0$

(точки $(x_i,\ y_i)$ располагаются вблизи прямой) имеем

$$\begin{cases} a_0 m + a_1\sum\limits_{i=0}^{m} x_i = \sum\limits_{i=0}^{m} y_i, \\ a_0\sum\limits_{i=0}^{m} x_i + a_1\sum\limits_{i=0}^{m} x_i^2 = \sum\limits_{i=0}^{m} x_i y_i. \end{cases}$$

Если для переменных x и y соответствующие значения экспериментальных данных $(x_i,\ y_i)$ не располагаются вблизи некоторой прямой, то выбирают новые переменные

$$X = \varphi(x, y), \quad Y = \psi(x, y)$$

так, чтобы преобразованные экспериментальные данные

$$X_i = \varphi(x_i, y_i), \quad Y_i = \psi(x_i, y_i)$$

в новой системе координат (X, Y) давали точки (X_i, Y_i), менее уклоняющиеся от прямой. Для аппроксимирующей прямой

$$Y = A_1 X + A_0$$

числа A_0 и A_1 можно определить из системы уравнений, аналогичной системе уравнений

$$\begin{cases} A_0 m + A_1 \sum_{i=0}^{m} X_i = \sum_{i=0}^{m} Y_i, \\ A_0 \sum_{i=0}^{m} X_i + A_1 \sum_{i=0}^{m} X_i^2 = \sum_{i=0}^{m} X_i Y_i. \end{cases}$$

Описанный способ нахождения экспериментальной зависимости с помощью сведения к линейному виду называется *выравниванием экспериментальных данных*.

Рекомендации по выравниванию экспериментальных данных и аппроксимирующие зависимости с двумя параметрами приведём в табл.

j	Выравнивание данных (преобразование переменных)	Эмпирическая формула
1	$X = x,\ Y = xy$	$y = a_1 + \frac{a_0}{x},\ a_1 = A_1,\ a_0 = A_0$
2	$X = x,\ Y = \frac{1}{y}$	$y = \frac{1}{a_1 x + a_0},\ a_1 = A_1,\ a_0 = A_0$
3	$X = x,\ Y = \frac{x}{y}$	$y = \frac{x}{a_1 x + a_0},\ a_1 = A_1,\ a_0 = A_0$
4	$X = x,\ Y = \ln y$	$y = a_1 \cdot (a_0)^x,\ a_1 = e^{A_0},\ a_0 = e^{A_1}$
5	$X = \ln x,\ Y = y$	$y = a_1 \cdot \ln x + a_0, a_1 = A_1,\ a_0 = A_0$
6	$X = \ln x, Y = \ln y$	$y = a_1 \cdot x^{a_0},\ a_1 = e^{A_0},\ a_0 = A_1$

Одну из шести представленных в табл. 4.4 формул преобразования к переменным (X, Y) следует выбирать одновременно с проверкой возможности применения линейной зависимости к исходным данным $(x_i, y_i),\ i = \overline{0, m}$. Условием выбора наилучшей эмпирической формулы является наименьшее уклонение исходных или преобразованных экспериментальных данных от прямой. Уклонение данных от прямой в каждом варианте выравнивания будем определять величиной

$$d_j = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} (Y_i - A_{1j} X_i - A_{0j})^2}{\sum_{i=1}^{m} Y_i^2}},$$

где j – номер соответствующей эмпирической формулы из табл. 4.2.

Для наилучшей эмпирической формулы величина d является наименьшей

3.6. Приложения производных ФНП

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в некоторой области D, точка $M(x_0; y_0) \in D$.

Если для функции $z = f(x; y)$ в некоторой окрестности точки $M(x_0; y_0)$ верно неравенство $f(x_0; y_0) > f(x; y)$, то точка M_0 называется *точкой максимума*.

Если для функции $z = f(x; y)$ в некоторой окрестности точки $M(x_0; y_0)$ верно неравенство $f(x_0; y_0) < f(x; y)$, то точка M_0 называется *точкой минимума.*

Необходимое и достаточное условия экстремума.

Теорема 1 (необходимые условия экстремума).

Если функция $f(x; y)$ в точке $(x_0; y_0)$ имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю $f'_x(x_0; y_0) = 0, \quad f'_y(x_0; y_0) = 0$, либо хотя бы одна из частных производных не существует.

Точка, в которой значения частных производных первого порядка равны нулю, называют *стационарной точкой.*

Точка, в которой значения частных производных первого порядка равны нулю или хотя бы одна частная производная первого порядка не существует, называют *критической точкой.*

Теорема 2 (достаточные условия экстремума).

Пусть в окрестности критической точки $(x_0; y_0)$ функция $f(x; y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно.

Обозначим $A = f''_{xx}(x_0; y_0),\ C = f''_{yy}(x_0; y_0),\ B = f''_{xy}(x_0; y_0)$.

Рассмотрим выражение $\Delta = AC - B^2$.

1) Если $\Delta > 0$, то в точке $(x_0; y_0)$ функция $f(x; y)$ имеет экстремум, при этом, если $A < 0$ – максимум, если $A > 0$ – минимум.

2) Если $\Delta < 0$, то в точке $(x_0; y_0)$ функция $f(x; y)$ не имеет экстремума.

3) Если $\Delta = 0$, то вывод о наличии экстремума в точке $(x_0; y_0)$ сделать нельзя.

3.7. Комплексные числа.

1. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.
2. Тригонометрическая форма комплексного числа. Формула Муавра.
3. Извлечение корня из комплексного числа.

Комплексным числом называется выражение вида $z = a + bi$, где $a, b \in R$, $i^2 = -1$.

$\mathrm{Re}(a + bi) = a$ – действительная часть комплексного числа;

$\mathrm{Im}(a + bi) = b$ – мнимая часть комплексного числа;

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ – модуль комплексного числа $r \geq 0$;

$\bar{z} = a - bi$ – сопряженное для $z = a + bi$.

1) $z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$;

2) $z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$;

3) $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_2 b_1 + a_1 b_2)i$;

4) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \dfrac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)}$.

Тригонометрическая форма комплексного числа. Формула Муавра.

1) $z = a + bi$ – алгебраическая форма комплексного числа.

2) $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ – тригонометрическая форма комплексного числа, где $\varphi = \arg z$ – аргумент комплексного числа ($0 \leq \varphi < 2\pi$).

3) $z = r \cdot e^{i\varphi}$ – показательная форма комплексного числа.

$\begin{cases} a = r \cdot \cos\varphi \\ b = r \cdot \sin\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ tg\varphi = \dfrac{b}{a} \end{cases}$ – связь между алгебраической и тригонометрической формами комплексного числа.

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$; $\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$; $\sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$ – формулы Эйлера.

1) $z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$;

2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$;

3) $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ – формула Муавра;

Извлечение корня из комплексного числа.

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), k = 0; 1; ...; n-1$ – извлечение корня $n-ой$ степени из комплексного числа.

Замечание. Все значения $\sqrt[n]{z}$ на комплексной плоскости образуют правильный $n-$угольник.

Основная теорема алгебры: всякий многочлен n степени имеет хотя бы один корень.

Следствие: любой многочлен n степени с комплексными переменными имеет ровно n корней.

Следствием из основной теоремы алгебры является утверждение о том, что любое квадратное уравнение имеет ровно два корня.

Решить во множестве комплексных чисел уравнение $x^2 - 8x + 17 = 0$.

Решение. Для квадратного уравнения $x^2 - 8x + 17 = 0$ дискриминант $D = (-8)^2 - 4 \cdot 17 = 64 - 68 = -4 < 0$, а, значит, уравнение не имеет вещественных корней, но есть комплексные корни:

$D = -4 = 4 \cdot (-1) = 4i^2$, $\sqrt{D} = \sqrt{4i^2} = 2i$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a};$$

$$x_1 = \frac{-(-8) + 2i}{2 \cdot 1} = \frac{8 + 2i}{2} = 4 + i;$$

$$x_2 = \frac{-(-8) - 2i}{2 \cdot 1} = \frac{8 - 2i}{2} = 4 - i.$$

Итак, при решении квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом корнями являются два сопряженных числа $4 \pm i$.

Ответ: $4 \pm i$.

3.8. Дифференцирование параметрически заданной функции

Предположим, что функциональная зависимость y от x не задана непосредственно $y = f(x)$, а через промежуточную величину — t. Тогда формулы

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

задают параметрическое представление функции одной переменной.

Пусть функция $y = y(x)$ задана в параметрической форме, то есть в виде:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

где функции $x = x(t)$и $y = y(t)$определены и непрерывны на некотором интервале изменения параметра t. Найдем дифференциалы от правых и левых частей каждого из равенств:

$$\begin{cases} dx = x'_t dt \\ dy = y'_t dt \end{cases}$$

Далее, разделив второе уравнение на первое, и с учетом того, что $\frac{dy}{dx} = y'_x$, получим выражение для первой производной функции, заданной параметрически:

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Для нахождения второй производной $\frac{d^2y}{dx^2} = y''_{xx}$выполним следующие преобразования:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''_{xx} = (y'_x)' = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{\frac{dy'_x}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$$

Пример

Задание. Найти вторую производную y''_{xx}для функции $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^3 \end{cases}$ заданной параметрически.

Решение. Вначале находим первую производную y'_xпо формуле:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Производная функции yпо переменной tравна:

$$y'_t = \left(t^3\right)' = 3t^2$$

производная xпо t:

$$x'_t = (\ln t)' = \frac{1}{t}$$

Тогда

$$y'_x = \frac{3t^2}{\frac{1}{t}} = 3t^3$$

Вторая производная равна

$$y''_{xx} = \left(3t^3\right)' \cdot \frac{1}{\frac{1}{t}} = 3 \cdot \left(t^3\right)' \cdot t = 3t \cdot 3t^2 = 9t^3$$

Ответ. $y''_{xx} = 9t^3$

3.9. Кривизна кривой для функций заданных параметрически

Найдём длину дуги AB кривой $y = f(x)$, где $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$

Длиной дуги называется предел, к которому стремится длина вписанной ломаной линии при условии, что число звеньев неограниченно возрастает и длина наибольшего из них стремится к нулю.

$$l = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i$$

, Δl_i – длина звена M_i-1M_i ломаной AB.

Рассмотрим незамкнутую дугу AB, заданную уравнением $y = f(x)$.

Пусть $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны на [a, b] . Разобьём дугу AB на n частей произвольным образом точками

$$A = M_0, M_1, M_2, ..., M_n = B$$

и проведём хорды

$$M_0M_1, M_2, \dots, M_n\text{-}1, M_n.$$

Длина i -того звена Δl_i равна длине вектора $\overline{M_{i-1}M_i}$.

$$\Delta l_i = |M_{i-1}M_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2},$$

где y_i-1 = f (x_i-1), $y_i = f(x_i)$, $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, $y_i - y_{i-1} = \Delta y_i$,

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i, \; i = 1, 2, 3, n.$$

Просуммировав все Δl_i, получим приближенное значение длины дуги AB:

$$l_{AB} \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left[f'(\xi_i)\right]^2}\Delta x_i.$$

Перейдя к пределу при $n \to \infty$ и $\max \Delta l_i \to 0$, получим точное значение длины дуги.

$$l_{AB} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta l_i \to 0}} \sqrt{1 + \left[f'(\xi_i)\right]^2}\Delta x_i.$$

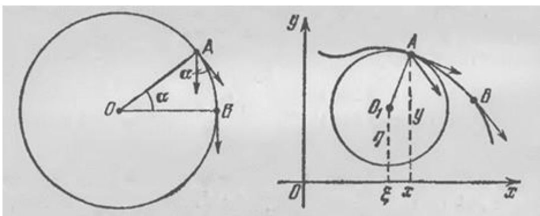
В правой части равенства предел интегральной суммы существует в силу непрерывности функции $f(x)$ и её производной и не зависит от способа разбиения дуги на части.

$$l_{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$$

2. Угол смежности и кривизна.

Рассмотрим плоскую гладкую кривую Γ. Угол α $(0 \le \alpha \le \pi)$ между касательными к Γ в точках A и B называется углом смежности дуги $\overset{\frown}{AB}$. Отношение угла смежности дуги $\overset{\frown}{AB}$ к ее длине называется средней кривизной дуги $\overset{\frown}{AB}$ (рис. 86). Наконец, кривизной кривой Γ в ее точке A называется предел (конечный или бесконечный) отношения угла смежности α дуги $\overset{\frown}{AB}$ кривой к ее длине $\left|\overset{\frown}{AB}\right| = |\Delta s|$, когда последняя стремится к нулю:

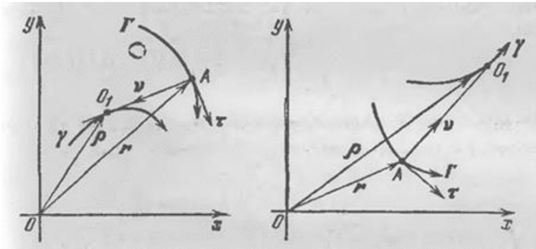
$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\alpha}{|\Delta s|}.$$



3. Радиус и круг кривизны.

Таким образом, $0 \le K \le \infty$. По определению, величина $R = 1/K$ (где считается, что $0 = 1/\infty, \; \infty = 1/0$) называется радиусом кривизны Γ в точке A.

Точка O_1, лежащая на нормали к Γ в точке A на расстоянии $R = 1/K$ от A в сторону вогнутости Γ, называется центром кривизны Γ в точке A. Очевидно, что центр окружности совпадает с центром ее кривизны.



Пусть кривая Γ задана функцией $y = f(x)\ (c \le x \le d)$, имеющей непрерывную вторую производную. Найдем ее кривизну в точке $A = (x,\ f(x))$. Пусть φ_1 и φ_2 - углы, которые составляют касательные к Γ в точках A и $B = (x + \Delta x,\ f(x + \Delta x))$ с положительным направлением оси x.

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = f'(x), \qquad \operatorname{tg} \varphi_2 = f'(x + \Delta x),$$

$$\alpha = \left| \operatorname{arctg} f'(x) - \operatorname{arctg} f'(x + \Delta x) \right|.$$

Далее

$$\Delta s = |AB| = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + (f'(u))^2}\, du.$$

Поэтому из (1), применяя правило Лопиталя (по Δx), получаем

$$K = \lim_{\Delta x \to 0} \left| \frac{\operatorname{arctg} f'(x) - \operatorname{arctg} f'(x + \Delta x)}{\int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + (f'(u))^2}} \right| = = \lim_{\Delta x \to 0} \left| \frac{\dfrac{f''(x + \Delta x)}{1 + (f'(x + \Delta x))^2}}{\sqrt{1 + (f'(x + \Delta x))^2}} \right| = \frac{|f''(x)|}{\left(1 + (f'(x))^2\right)^{3/2}}.$$

Мы получили формулу для кривизны

$$K = \left| \frac{|f''(x)|}{\left(1 + (f'(x))^2\right)^{3/2}} \right|.$$

Если гладкая кривая Γ задана параметрически

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned}\right\} \quad (a \le t \le b),$$

где φ и ψ - дважды непрерывно дифференцируемые функции, то, пользуясь правилом дифференцирования параметрически заданных функций, получим

$$f'(x) = \frac{y'_t}{x'_t}, \qquad f''(x) = \frac{x'_t y''_t - y'_t x''_t}{(x'_t)^3}, \qquad R = \left| \frac{\left(x'^2_t + y'^2_t\right)^{3/2}}{y'_t x''_t - x'_t y''_t} \right|, \qquad K = \frac{1}{R}$$

4. Эволюта и эвольвента.

Кривая γ, являющаяся геометрическим местом центров O_1 кривизны плоской кривой Γ, называется эволютой Γ. Сама кривая Γ называется эвольвентой γ.

Найдем параметрическое уравнение эволюты γ кривой Γ, заданной уравнением $y = f(x)$. Имеем $\frac{1}{R} = \left|\frac{|f''(x)|}{\left(1+(f'(x))^2\right)^{3/2}}\right| = \frac{f''(x)\operatorname{sign} f''(x)}{\left(1+(f'(x))^2\right)^{3/2}}$.

Центр кривизны O_1 кривой Γ в ее точке $A(x, f(x))$ пусть имеет координаты (ξ, η). Он определяется вектором

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} + R\boldsymbol{\nu},$$

где $\mathbf{r}$ - радиус-вектор точки $A \in \Gamma$, а $\boldsymbol{\nu}$ - единичный вектор нормали, направленный в сторону вогнутости Γ. Кривая Γ имеет векторное уравнение

$$\mathbf{r} = (x, y).$$

Отсюда

$$\dot{\mathbf{r}}_x = (1, y'_x), \qquad \ddot{\mathbf{r}}_x = (0, y''_x). \quad \boldsymbol{\nu} = \pm\left(\frac{-y'_x}{\sqrt{1+{y'_x}^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+{y'_x}^2}}\right).$$

Знак надо выбрать так, чтобы вектор $\boldsymbol{\nu}$ был направлен в сторону вогнутости Γ, т. е. чтобы скалярное произведение $(\boldsymbol{\nu}, \ddot{\mathbf{r}}_x)$ имело положительный знак:

$$(\boldsymbol{\nu}, \ddot{\mathbf{r}}_x) = \pm\frac{y''_x}{\sqrt{1+{y'_x}^2}} = y''_x(\operatorname{sign} y''_x)\left(1+{y'_x}^2\right)^{-1/2}.$$

Итак

$$\boldsymbol{\nu} = \operatorname{sign} y''_x \cdot \left(\frac{-y'_x}{1+{y'_x}^2}, \frac{1}{\sqrt{1+{y'_x}^2}}\right). \quad \xi = x + \frac{\left(1+{y'_x}^2\right)^{3/2}}{y''_x \operatorname{sign} y''_x} \cdot \frac{-y'_x \operatorname{sign} y''_x}{\left(1+{y'_x}^2\right)^{1/2}} = x - \frac{y'_x\left(1+{y'_x}^2\right)}{y''_x},$$

$$\eta = y + \frac{\left(1+{y'_x}^2\right)^{3/2}}{y''_x \operatorname{sign} y''_x} \cdot \frac{\operatorname{sign} y''_x}{\left(1+{y'_x}^2\right)^{1/2}} = y + \frac{1+{y'_x}^2}{y''_x}.$$

Докажем, что нормаль к кривой (эвольвенте) в точке $A = (x, f(x))$ является касательной к эволюте γ в точке $O_1 = (\xi, \eta)$. Достаточно для этого доказать, что касательные к кривой Γ и к эволюте γ в соответствующих точках ортогональны (перпендикулярны):

$$x'_x\xi'_x + y'_x\eta'_x = 1 \cdot \left[1 + y''_x \frac{1+{y'_x}^2}{y''_x} y'_x \left(\frac{1+{y'_x}^2}{y''_x}\right)\right] + y'_x\left[y'_x + \left(\frac{1+{y'_x}^2}{y''_x}\right)'\right] = 0.$$

Другое важное свойство эволюты заключается в следующем. Приращение радиуса кривизны эвольвенты равно с точностью до знака приращению длины соответствующей дуги эволюты:

$$R_2 - R_1 = \pm|\sigma_2 - \sigma_1|.$$

На доказательстве этого свойства мы не останавливаемся.

Представим себе нить, навернутую на эволюту. Пусть она сматывается с последней, будучи все время натянутой. Отделяясь от эволюты, она, очевидно, все время будет касаться эволюты. Свободный же ее конец будет описывать эвольвенту . Так как длина нити может быть произвольной, то эволюта порождает бесконечно много эвольвент. Длина, на которую сматывается нить с эволюты, равна, очевидно, приращению радиуса кривизны эвольвенты. Если кривая Γ задана параметрически: $x = x(t),\ \ y = y(t)$, то эволюта определяется уравнениями

$$\xi = x - y'_t \frac{x'^2_t + y'^2_t}{x'_t y''_t - y'_t x''_t}, \qquad \eta = y + x'_t \frac{x'^2_t + y'^2_t}{x'_t y''_t - y'_t x''_t}$$

3.10. Приближенное вычисление определенных интегралов.

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная функция $f(x)$. Разобьем основание этой трапеции на n равных частей. Определенный интеграл приближенно вычисляется по формулам:

1. Формула прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}) \text{ или } \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + \ldots + y_{n-1} + y_n).$$

2. Формула трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \ldots + y_{n-1}\right).$$

3. Формула парабол (Симпсона):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + \ldots + y_{2n-2})\right)$$

3.11. Вычисление длины дуги кривой.

Известно, что определенный интеграл на отрезке представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f(x). Если график расположен ниже оси Ox, т.е. $f(x) < 0$, то площадь имеет знак “-“, если график расположен выше оси Ox, т.е. $f(x) > 0$, то площадь имеет знак “+”.

Для нахождения суммарной площади используется формула $S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$.

Площадь фигуры, ограниченной некоторыми линиями может быть найдена с помощью определенных интегралов, если известны уравнения этих линий.

Для нахождения площади криволинейного сектора введем полярную систему координат. Уравнение кривой, ограничивающей сектор в этой системе координат, имеет вид $\rho = f(\varphi)$, где ρ - длина радиус – вектора, соединяющего полюс с произвольной точкой кривой, а φ - угол наклона этого радиус – вектора к полярной оси.

Площадь криволинейного сектора может быть найдена по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)d\varphi$$

3. Нахождение объема тела вращения.

Пусть имеется тело объема V. Площадь любого поперечного сечения тела Q, известна как непрерывная функция Q = Q(x). Разобьем тело на “слои” поперечными сечениями, проходящими через точки x_i разбиения отрезка [a, b]. Т.к. на каком- либо промежуточном отрезке разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ функция Q(x) непрерывна, то принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. Обозначим их соответственно M_i и m_i.

Если на этих наибольшем и наименьшем сечениях построить цилиндры с образующими, параллельными оси x, то объемы этих цилиндров будут соответственно равны $M_i\Delta x_i$ и $m_i\Delta x_i$ здесь $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Произведя такие построения для всех отрезков разбиения, получим цилиндры, объемы которых равны соответственно $\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ и $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$.

При стремлении к нулю шага разбиения λ, эти суммы имеют общий предел:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \int_a^b Q(x)dx$$

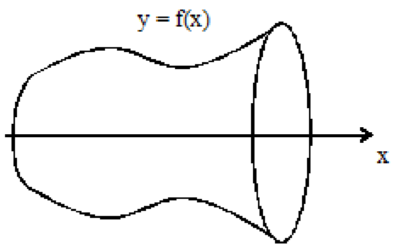
Таким образом, объем тела может быть найден по формуле:

$$V = \int_a^b Q(x)dx$$

Недостатком этой формулы является то, что для нахождения объема необходимо знать функцию Q(x), что весьма проблематично для сложных тел.

Объем тел вращения.

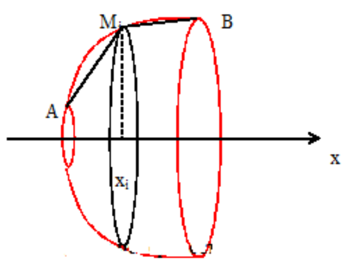
Рассмотрим кривую, заданную уравнением y = f(x). Предположим, что функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b]. Если соответствующую ей криволинейную трапецию с основаниями a и b вращать вокруг оси Ох, то получим так называемое **тело вращения**.



Т.к. каждое сечение тела плоскостью x = const представляет собой круг радиуса $R = |f(x)|$, то объем тела вращения может быть легко найден по полученной выше формуле:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

Площадь поверхности тела вращения.



<u>**Определение:**</u>**Площадью поверхности вращения** кривой АВ вокруг данной оси называют предел, к которому стремятся площади поверхностей вращения ломаных, вписанных в кривую АВ, при стремлении к нулю наибольших из длин звеньев этих ломаных.

Площадь поверхности, описанной ломаной равна:

$$P_n = \pi\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_{i-1}) + f(x_i)\big)\sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)}\Delta x_i$$

Эта сумма не является интегральной, но можно показать, что

$$P = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_{i-1}) + f(x_i) \right) \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)} \Delta x_i = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} 2 f(\varepsilon_i) \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)} \Delta x_i$$

Тогда $P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$ - формула вычисления **площади поверхности тела вращения.**

4. Вычисление длины дуги кривой.

Длина ломаной линии, которая соответствует дуге, может быть найдена как $S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$.

Тогда длина дуги равна $S = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$.

Из геометрических соображений: $\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right)^2} \cdot \Delta x_i$

В то же время $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i}$

Тогда можно показать , что

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$$

Т.е. $S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

Если уравнение кривой задано параметрически, то с учетом правил вычисления производной параметрически заданной функции, получаем

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt ,$$

где x = φ(t) и y = ψ(t).

Если задана **пространственная кривая**, и x = φ(t), y = ψ(t) и z = Z(t), то

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [Z'(t)]^2} dt$$

Если кривая задана в **полярных координатах**, то

$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\varphi$,   ρ = f(φ).

3.12. Понятия тройного и криволинейного интегралов. поверхностные интегралы. Криволинейные интегралы. Векторное и потенциальное поле. Дивергенция поля.

Двойной интеграл – это обобщение определенного интеграла для функции двух переменных.

Пусть в замкнутой области D задана непрерывная функция $z = f(x; y)$. Разобьем область D на n «элементарных областей» D_i, площади которых ΔS_i, диаметры - d_i. В каждой области D_i выберем произвольную точку $M_i(x_i; y_i)$ и вычислим значение функции в этой точке. Составим сумму вида $\sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i$, которую назовем интегральной суммой.

Рассмотрим предел интегральной суммы, когда $n \to \infty$ таким образом, что $\max d_i \to 0$. Если этот предел существует, то он называется двойным интегралом от функции $z = f(x;y)$ по области D.

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \lim_{n\to\infty} \sum f(x_i;y_i) \cdot \Delta S_i$$.

Теорема: если функция непрерывна в замкнутой области, то она интегрируема в этой области.

Замечание: из определения двойного интеграла следует, что он не зависит от способа разбиения области на части. Таким образом, область можно разбивать на площадки прямыми, параллельными координатным осям.

2. Геометрический смысл.

Геометрический смысл двойного интеграла: двойной интеграл от неотрицательной функции численно равен объему цилиндрического тела.

Основные свойства двойного интеграла:

1. $\iint_D c \cdot f(x;y)dxdy = c \cdot \iint_D f(x;y)dxdy$.

2. $\iint_D (f(x;y) \pm g(x;y))dxdy = \iint_D f(x;y)dxdy \pm \iint_D g(x;y)dxdy$.

3. Если $D = D_1 \cup D_2$, то $\iint_D f(x;y)dxdy = \iint_{D_1} f(x;y)dxdy + \iint_{D_2} f(x;y)dxdy$.

4. Знак двойного интеграла определяется знаком подынтегральной функции.

5. Больше функции соответствует больший двойной интеграл.

6. Если функция непрерывна в замкнутой области D, то в этой области существует такая точка $(x_0;y_0)$, что $\iint_D f(x;y)dxdy = f(x_0;y_0) \cdot S$. Величину $f(x_0;y_0)$ называют средним значением функции двух переменных в области D.

3. Способы вычисления двойного интеграла.

Способы вычисления двойного интеграла

1. Область, правильная в направлении оси ординат: любая прямая, параллельная оси ординат, пересекает границу области не более чем в двух точках.

Пусть область D представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную прямыми $x = a$ и $x = b$, $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$. Тогда

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy$$

2. Область, правильная в направлении оси абсцисс: любая прямая, параллельная оси абсцисс, пересекает границу области не более чем в двух точках.

Пусть область D представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную прямыми $y = a$ и $y = b$, $x = \psi_1(y)$ и $x = \psi_2(y)$. Тогда

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \int_a^b dy \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x;y)dx$$

4. Перестановка пределов интегрирования.

Способы вычисления двойного интеграла

1. Область, правильная в направлении оси ординат: любая прямая, параллельная оси ординат, пересекает границу области не более чем в двух точках.

Пусть область D представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную прямыми $x = a$ и $x = b$, $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$. Тогда

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy$$

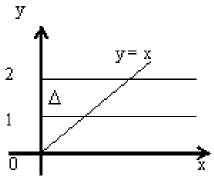
2. Область, правильная в направлении оси абсцисс: любая прямая, параллельная оси абсцисс, пересекает границу области не более чем в двух точках.
Пусть область D представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную прямыми $y = a$ и $y = b$, $x = \psi_1(y)$ и $x = \psi_2(y)$. Тогда

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \int_a^b dy \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x;y)dx$$

<u>Теорема.</u>*Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, ограниченной линиями y = c, y = d (c<d), x = Φ(y), x = Ψ(y) (Φ(y) ≤Ψ(y)), то*

$$\iint_\Delta f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\Phi(y)}^{\Psi(y)} f(x,y)dx$$

<u>Пример.</u> Вычислить интеграл $\iint_\Delta (x^2 + y^2)dxdy$, если область Δ ограничена линиями y = x, x = 0, y = 1, y = 2.



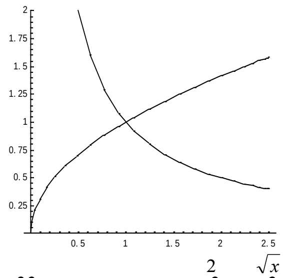
$$\iint_\Delta (x^2 + y^2)dxdy = \int_1^2 dy \int_0^x (x^2 + y^2)dx = \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x\right)\Big|_0^y dy = \int_1^2 \frac{4}{3} y^3 dy = \frac{4}{12} y^4 \Big|_1^2 = \frac{64}{12} - \frac{4}{12} = 5$$

<u>Пример.</u> Вычислить интеграл $\iint_\Delta (3x^2 - 2xy + y)dxdy$, если область интегрирования Δ ограничена линиями x = 0, x = y^2, y = 2.

$$\iint_\Delta (3x^2 - 2xy + y)dxdy = \int_0^2 dy \int_0^{y^2} (3x^2 - 2xy + y)dx = \int_0^2 (x^3 - yx^2 + yx)\Big|_0^{y^2} dy =$$

$$= \int_0^2 (y^6 - y^5 + y^3)dy = \left(\frac{y^7}{7} - \frac{y^6}{6} + \frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^2 = \frac{244}{21}$$

<u>Пример.</u> Вычислить двойной интеграл $\iint_\Delta y \ln x dxdy$, если область интегрирования ограничена линиями xy=1, y = $\sqrt{x}$, x = 2.



$$\iint_\Delta y \ln x dxdy = \int_1^2 dx \int_{1/x}^{\sqrt{x}} y \ln x dy = \int_1^2 \frac{y^2}{2} \ln x \Big|_{1/x}^{\sqrt{x}} dx = \int_1^2 \left[\frac{x \ln x}{2} - \frac{\ln x}{2x^2}\right]dx$$

1. $$\int x\ln x dx = \left\{\begin{matrix} u=\ln x; & dv = xdx; \\ du = \frac{1}{x}dx; & v = \frac{x^2}{2} \end{matrix}\right\} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4};$$

$$\int_1^2 x\ln x dx = \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right)\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

2. $$\int \frac{\ln x}{x^2}dx = \left\{\begin{matrix} \ln x = t; & x = e^t; \\ dt = \frac{1}{x}dx; & \end{matrix}\right\} = \int \frac{txdt}{x^2} = \int \frac{tdt}{x} = \int e^{-t}tdt = \left\{\begin{matrix} u=t; & du = dt; \\ dv = e^{-t}dt; & v = -e^{-t}; \end{matrix}\right\} = -te^{-t} +$$

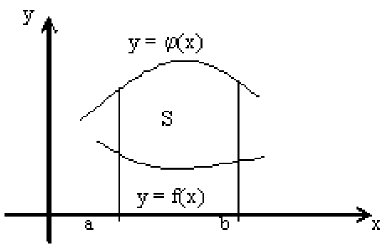
$$+\int e^{-t}dt = -te^{-t} - e^{-t} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x};$$

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx = \left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 = -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} + 1 = -\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2};$$

3. $$\iint\limits_{\Delta} y\ln x dxdy = \frac{1}{2}\left(2\ln 2 - \frac{3}{4} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{5\ln 2}{2} - \frac{5}{4}\right) = \frac{5\ln 2}{4} - \frac{5}{8}.$$

1. Вычисление площади плоской кривой.

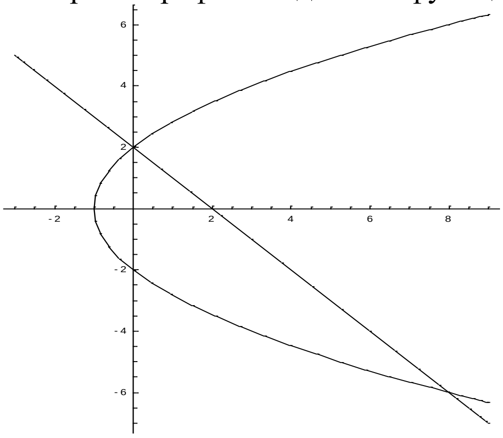
1) Вычисление площадей в декартовых координатах.



Площадь S, показанная на рисунке может быть вычислена с помощью двойного интеграла по формуле:

$$S = \int_a^b \int_{f(x)}^{\varphi(x)} dydx$$

<u>Пример.</u> Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x + 4$; $x + y - 2 = 0$. Построим графики заданных функций:



Линии пересекаются в двух точках – (0, 2) и (8, -6). Таким образом, область интегрирования ограничена по оси Ox графиками кривых от $x = \frac{y^2 - 4}{4}$ до $x = 2 - y$, а по оси Oy – от –6 до 2. Тогда искомая площадь равна:

$$S=\int_{-6}^{2}\int_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y}dxdy=\int_{-6}^{2}\left(2-y-\frac{y^2-4}{4}\right)dy=\int_{-6}^{2}\left(\frac{8-4y-y^2+4}{4}\right)dy=\frac{1}{4}\int_{-6}^{2}\left(-y^2-4y+12\right)dy=$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\frac{y^3}{3}-\frac{4y^2}{2}+12y\right)\Bigg|_{-6}^{2}=\frac{1}{4}\left(-\frac{8}{3}-8+24-\left(\frac{36\cdot 6}{3}-\frac{4\cdot 36}{2}-12\cdot 6\right)\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(88-\frac{8}{3}\right)=21\frac{1}{3}$$

2) Вычисление площадей в полярных координатах.

$$S=\iint_{\tau}\rho d\rho d\theta=\iint_{\Delta}dydx=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{f(\theta)}^{\varphi(\theta)}\rho d\rho d\theta$$

Вычисление площади кривой поверхности.

Если поверхность задана уравнением: f(x, y, z) = 0, то площадь ее поверхности находится по формуле:

$$S=\iint_{\Delta}\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}{\frac{\partial f}{\partial z}}dydx$$

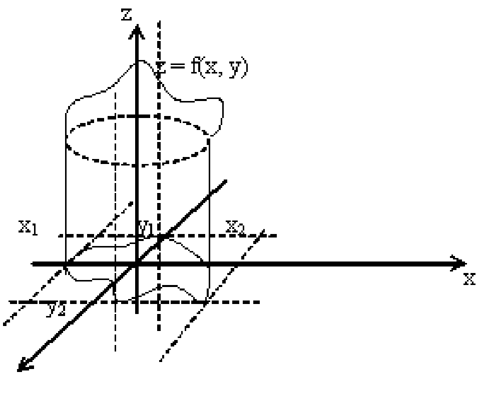
Если поверхность задана в неявном виде, т.е. уравнением z = φ(x, y), то площадь этой поверхности вычисляется по формуле:

$$S=\iint_{\Delta}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dydx$$

2. Нахождение объема пространственного тела.

Пусть тело ограничено снизу плоскостью xy, а сверху– поверхностью z = f(x,y), а с боков – цилиндрической поверхностью.

Такое тело называется **цилиндроид.**



$$V=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{\Delta}\sum z\Delta y\Delta x=\iint_{\Delta}zdydx=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}zdydx$$

<u>Пример.</u> Вычислить объем, ограниченный поверхностями: $x^2 + y^2 = 1$; x + y + z =3 и плоскостью XOY.

Пределы интегрирования: по оси OX: $y_1=-\sqrt{1-x^2}$; $y_2=\sqrt{1-x^2}$; по оси OY: $x_1 = -1$; $x_2 = 1$;

$$V=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x}}(3-x-y)dydx=3\pi;$$

3. Нахождение координат центра тяжести однородной пластины.

Вычисление моментов инерции площадей плоских фигур.
Пусть площадь плоской фигуры (область Δ) ограничена линией, уравнение которой f(x,y) = 0. Тогда моменты инерции этой фигуры находятся по формулам:

- относительно оси Ox: $I_x = \iint\limits_{\Delta} y^2 dydx$
- относительно оси Oy: $I_y = \iint\limits_{\Delta} x^2 dydx$
- относительно начала координат: $I_0 = I_x + I_y = \iint\limits_{\Delta} (x^2 + y^2) dydx$ - этот момент инерции называют еще **полярным моментом инерции.**

Вычисление центров тяжести площадей плоских фигур.
Координаты центра тяжести находятся по формулам:

$$x_C = \frac{\iint\limits_{\Delta} wxdydx}{\iint\limits_{\Delta} wdydx}; \qquad y_C = \frac{\iint\limits_{\Delta} wydydx}{\iint\limits_{\Delta} wdydx};$$

здесь w – поверхностная плотность ($dm = wdydx$ –масса элемента площади).
Вычисление объемов тел с помощью тройного интеграла.

Если поверхность тела описывается уравнением f(x, y, z) = 0, то объем тела может быть найден по формуле:

$$V = \int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_{y_1}^{y_2} \int\limits_{z_1}^{z_2} dzdydx$$

при этом z_1 и z_2 – функции от x и y или постоянные, y_1 и y_2 – функции от x или постоянные, x_1 и x_2 – постоянные.
Координаты центра тяжести тела.

$$x_C = \frac{\iiint\limits_{r} wxdv}{\iiint\limits_{r} wdv}; \quad y_C = \frac{\iiint\limits_{r} wydv}{\iiint\limits_{r} wdv}; \quad z_C = \frac{\iiint\limits_{r} wzdv}{\iiint\limits_{r} wdv};$$

Моменты инерции тела относительно осей координат.

$$I_x = \iiint\limits_{r} (y^2 + z^2) wdv; \quad I_y = \iiint\limits_{r} (x^2 + z^2) wdv; \quad I_z = \iiint\limits_{r} (x^2 + y^2) wdv;$$

Моменты инерции тела относительно координатных плоскостей.

$$I_{xy} = \iiint\limits_{r} z^2 wdv; \quad I_{xz} = \iiint\limits_{r} y^2 wdv; \quad I_{yz} = \iiint\limits_{r} x^2 wdv;$$

Момент инерции тела относительно начала координат.

$$I_0 = \iiint\limits_{r} (x^2 + y^2 + z^2) wdv;$$

Вычисление массы неоднородного тела.

$$M = \iiint\limits_{r} wdv;$$

Теперь плотность w – величина переменная.
3.13. Задача о распаде радия

Установлено, что скорость распада радия прямо пропорциональна его количеству в каждый данный момент. Определить закон изменения массы радия в зависимости от времени, если при $t = 0$ масса радия была m_0.

Скорость распада определяется следующим образом. Пусть в момент t была масса m, в момент $t + \Delta t$ - масса $m + \Delta m$. За время Δt распалась масса Δm.

Отношение $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ есть средняя скорость распада. Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$, т.е. $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}$ есть скорость распада радия в момент t. По условию задачи $\frac{dm}{dt} = -km$, где $k -$ коэффициент пропорциональности ($k > 0$). Мы ставим знак минус потому, что при увеличении времени масса радия убывает.

Уравнение $\frac{dm}{dt} = -km$ есть уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные: $\frac{dm}{m} = -kdt$

Решая уравнение, получим $\ln m = -kt + \ln C$, откуда $m = Ce^{-kt}$.

Так как при $t = 0$ масса радия была m_0, то C должно удовлетворять соотношению $m_0 = Ce^{-k \cdot 0} = C$. Подставляя это значение C, получим искомую зависимость массы радия как функцию времени:

$$m = m_0 e^{-kt}$$

Коэффициент k определен из наблюдений и получено, что для радия $k = 0{,}000436$ (единица измерения времени год). Таким образом, зависимость массы радия от времени выражается формулой:

$$m = m_0 e^{-0{,}000436t}$$

Найдем период полураспада радия, т. е. промежуток времени, за который распадается половина первоначальной - массы радия. Подставляя в последнюю формулу вместо m значение $\frac{m_0}{2}$ получим $\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-0{,}000436t}$, откуда

$$T = \frac{\ln 2}{0{,}000436} \approx 1590 \text{ (лет).}$$

3.14Решение ЛНДУ по методу Лагранжа.

На практике удобно применять метод **вариации произвольных постоянных**.

Для этого сначала находят общее решение соответствующего однородного уравнения в виде:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i;$$

Затем, полагая коэффициенты C_i функциями от x, ищется решение неоднородного уравнения: $y = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i(x) y_i$;

Можно доказать, что для нахождения функций $C_i(x)$ надо решить систему уравнений: $\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i' = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$

Пример. Решить уравнение $y'' + y = x - \sin 2x.$

Решаем линейное однородное уравнение $y'' + y = 0.$

$k^2 + 1 = 0;\quad k_1 = i;\quad k_2 = -i.\ y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x);\quad \alpha = 0;\quad \beta = 1;\ y = A\cos x + B\sin x;$

Решение неоднородного уравнения будет иметь вид: $y = A(x)\cos x + B(x)\sin x;$

Составляем систему уравнений: $\begin{cases} A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0 \\ -A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = x - \sin 2x \end{cases}$

Решим эту систему: $\begin{cases} B'(x) = -A'(x)\dfrac{\cos x}{\sin x} \\ -A'(x)\sin x - A'(x)\dfrac{\cos^2 x}{\sin x} = x - \sin 2x \end{cases}$ $\quad\begin{cases} \dfrac{-A'(x)}{\sin x} = x - \sin 2x \\ B'(x) = \cos x(x - \sin 2x) \end{cases}$

Из соотношения $A'(x) = 2\sin^2 x\cos x - x\sin x$ найдем функцию $A(x)$.

$$A(x) = \int\left(2\sin^2 x\cos x - x\sin x\right)dx = 2\int\sin^2 x\cos x dx - \int x\sin x dx = \frac{2}{3}\sin^3 x - \int x\sin x dx =$$

$$= \begin{Bmatrix} u = x; & dv = \sin x dx; \\ du = dx; & v = -\cos x \end{Bmatrix} = \frac{2}{3}\sin^3 x + x\cos x - \int\cos x dx = \frac{2}{3}\sin^3 x + x\cos x - \sin x + C_1.$$

Теперь находим $B(x)$.

$$B(x) = \int x\cos x dx - 2\int\cos^2 x\sin x dx = \begin{Bmatrix} u = x; & dv = \cos x dx; \\ du = dx; & v = \sin x; \end{Bmatrix} = x\sin x - \int\sin x dx + \frac{2}{3}\cos^3 x =$$

$$= \frac{2}{3}\cos^3 x + x\sin x + \cos x + C_2.$$

Подставляем полученные значения в формулу общего решения неоднородного уравнения:

$$y = \frac{2}{3}\sin^3 x\cos x + x\cos^2 x - \sin x\cos x + C_1\cos x + \frac{2}{3}\sin x\cos^3 x + x\sin^2 x + \sin x\cos x + C_2\sin x =$$

$$= \frac{2}{3}\sin x\cos x(\sin^2 x + \cos^2 x) + x(\sin^2 x + \cos^2 x) + C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Окончательный ответ: $y = \frac{1}{3}\sin 2x + x + C_1\cos x + C_2\sin x;$

Таким образом, удалось избежать нахождения частного решения неоднородного уравнения методом подбора.

Вообще говоря, метод вариации произвольных постоянных пригоден для нахождения решений любого линейного неоднородного уравнения. Но т.к. нахождение фундаментальной системы решений соответствующего однородного уравнения может быть достаточно сложной задачей, этот метод в основном применяется для неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами.

3.15. Ряды Фурье

Рассмотрим некоторую функцию $y = f(x)$, которая **определена** по крайне мере на промежутке $[-\pi;\pi]$ (а, возможно, и на большем промежутке). Если данная функция интегрируема на отрезке $[-\pi;\pi]$, то её можно разложить в тригонометрический **ряд Фурье**:

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right)$, где a_0, a_n, b_n – так называемые *коэффициенты Фурье*.

При этом число $T = 2\pi$ называют **периодом разложения**, а число $l = \frac{T}{2} = \pi$ – **полупериодом разложения**.
Очевидно, что в общем случае ряд Фурье состоит из синусов и косинусов:
Нулевой член ряда принято записывать в виде $\frac{a_0}{2}$.
Коэффициенты Фурье рассчитываются по следующим формулам:
$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$; $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx$; $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx$;
Пример. Разложить функцию $f(x) = x+1$ в ряд Фурье на промежутке $[-\pi;\pi]$.
Построить график $f(x) = x+1$, график суммы ряда $S(x)$.
Решение: первая часть задания состоит в разложении функции в ряд Фурье.

В данной задаче период разложения $T = 2\pi$, полупериод $l = \frac{T}{2} = \pi$.
Используя соответствующие формулы, найдём *коэффициенты Фурье*. Теперь нужно составить и вычислить три **определённых интеграла**. Для удобства я буду нумеровать пункты:
1) Первый интеграл самый простой, однако и он уже требует глаз да глаз:
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}+\pi-\left(\frac{(-\pi)^2}{2}-\pi\right)\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}+\pi-\left(\frac{\pi^2}{2}-\pi\right)\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}+\pi-\frac{\pi^2}{2}+\pi\right) = \frac{1}{\pi}\cdot 2\pi = 2$$
2) Используем вторую формулу:
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)\cos nxdx = (*)$$
Данный интеграл хорошо знаком и **берётся он по частям**
$u = x+1 \Rightarrow du = dx$
$$dv = \cos nxdx \Rightarrow v = \int \cos nxdx = \frac{1}{n}\int \cos nxd(nx) = \frac{1}{n}\sin nx$$
При нахождении v использован метод подведения функции под знак дифференциала**.**
Используем формулу интегрирования по частям в определённом интеграле
$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$
$$(*) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}(x+1)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\cdot[(\pi+1)\sin \pi n - (-\pi+1)\sin(-\pi n)] - \frac{1}{n}\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)\cdot\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) =$$
$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\cdot(0-0)+\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(0+\frac{1}{n^2}(\cos \pi n - \cos(-\pi n))\right) = \frac{1}{\pi n^2}(\cos \pi n - \cos \pi n) = 0$$
3) Ищем третий коэффициент Фурье:
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)\sin nxdx = (*)$$

Получен родственник предыдущего интеграла, который тоже **интегрируется по частям**:
$u = x+1 \Rightarrow du = dx$

$$dv = \sin nx dx \Rightarrow v = \int \sin nx dx = \frac{1}{n}\int \sin nx d(nx) = -\frac{1}{n}\cos nx$$

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Далее:

$$(*) \overset{(1)}{=} \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}(x+1)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx\right) \overset{(2)}{=}$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\cdot\left[(\pi+1)\cos\pi n - (-\pi+1)\cos(-\pi n)\right] + \frac{1}{\pi n}\cdot\frac{1}{n}(\sin nx)\Big|_{-\pi}^{\pi} \overset{(3)}{=}$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\cdot\left[(\pi+1)(-1)^n - (-\pi+1)(-1)^n\right] + \frac{1}{\pi n^2}\cdot(\sin\pi n - \sin(-\pi n)) \overset{(4)}{=}$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\cdot\left[\pi+1+\pi-1\right]\cdot(-1)^n + \frac{1}{\pi n^2}\cdot(0-0) \overset{(5)}{=} -\frac{1}{\pi n}\cdot 2\pi\cdot(-1)^n + 0 = -\frac{2\pi\cdot(-1)^n}{\pi n} = -\frac{2\cdot(-1)^n}{n}$$

Наконец-то найдены все три коэффициента Фурье: $a_0 = 2, a_n = 0, b_n = -\frac{2}{n}(-1)^n$.

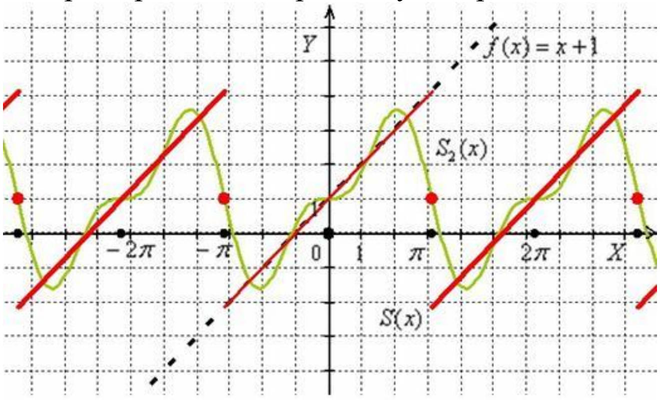
Подставим их в формулу $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ и получим:

$$f(x) = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin nx}{n}.$$

При этом не забываем разделить a_0 пополам. На последнем шаге константа («минус два»), не зависящая от «эн», вынесена за пределы суммы. Таким образом, мы получили разложение функции $f(x) = x+1$ в ряд Фурье на промежутке $[-\pi;\pi]$.

Изучим вопрос сходимости ряда Фурье. Во второй части задачи требуется изобразить график $f(x) = x+1$, график суммы ряда $S(x)$ и график $S_2(x)$.

График функции $f(x) = x+1$ представляет собой обычную **прямую на плоскости**, которая проведена чёрным пунктиром:



Разбираемся с суммой ряда $S(x)$. Как вы знаете, функциональные ряды сходятся к функциям. В нашем случае построенный ряд Фурье $1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin nx}{n}$ при любом значении «икс» сойдётся к функции $S(x)$, которая изображена красным цветом. Данная функция терпит **разрывы 1-го рода** в точках $...x=-3\pi, x=-\pi, x=3\pi...$, но определена и в них (красные точки на чертеже)

Таким образом: $1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin nx}{n}=S(x)$. Легко видеть, что $S(x)$ заметно отличается от исходной функции $f(x)=x+1$.

На практике обычно достаточно изобразить три периода разложения, как это сделано на чертеже. Ну и ещё «обрубки» соседних периодов – чтобы было понятно, что график продолжается.

Особый интерес представляют **точки разрыва 1-го рода**. В таких точках ряд Фурье сходится к изолированным значениям, которые расположены ровнёхонько посередине «скачка» разрыва (красные точки на чертеже). Как узнать ординату этих точек? Сначала найдём ординату «верхнего этажа»: для этого вычислим значение функции в крайней правой точке центрального периода разложения: $f(\pi)=\pi+1$. Чтобы вычислить ординату «нижнего этажа» проще всего взять крайнее левое значение этого же периода: $f(-\pi)=-\pi+1$. Ордината среднего значения – это среднее арифметическое суммы «верха и низа»: $y=\frac{f(\pi)+f(-\pi)}{2}=1$. Приятным является тот факт, что при построении чертежа вы сразу увидите, правильно или неправильно вычислена середина.

Построим частичную сумму ряда $S_2(x)$ и заодно повторим смысл термина «сходимость». Мотив известен ещё из урока о **сумме числового ряда**. Распишем наше богатство подробно:

$$S(x)=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin nx}{n}=1-2\cdot\left(\frac{(-1)^1\sin x}{1}+\frac{(-1)^2\sin 2x}{2}+\frac{(-1)^3\sin 3x}{3}+\frac{(-1)^4\sin 4x}{4}+...\right)=$$

$$=1-2\cdot\left(-\sin x+\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 4x}{4}-...\right)$$

Чтобы составить частичную сумму $S_2(x)$ необходимо записать нулевой + ещё два члена ряда. То есть, $S_2(x)=1-2\left(-\sin x+\frac{\sin 2x}{2}\right)=1+2\sin x-\sin 2x$.

На чертеже график функции $S_2(x)=1+2\sin x-\sin 2x$ изображен зелёным цветом, и, как видите, он достаточно плотно «обвивает» полную сумму $S(x)$. Если рассмотреть частичную сумму из пяти членов ряда $S_5(x)$, то график этой функции будет ещё точнее приближать красные линии, если сто членов $S_{100}(x)$ – то «зелёный змий» фактически полностью сольётся с красными отрезками и т.д. Таким образом, ряд Фурье сходится к своей сумме $S(x)$.

Интересно отметить, что любая частичная сумма $S_n(x)$ – это **непрерывная функция**, однако полная сумма ряда $S(x)$ всё же разрывна.

Ответ: $f(x)\sim 1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin nx}{n}$.

Во многих задачах функция терпит **разрыв 1-го рода** прямо на периоде разложения:

Разложение функции в ряд* Фурье *на произвольном периоде

Если $f(x)$ - периодическая функция с периодом $2l$, определенная на $[-l;l]$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\frac{m\pi x}{l}+b_m\sin\frac{m\pi x}{l}\right)$$ - ряд Фурье;

где $a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx$; $a_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}dx$; $b_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx$;

Если $l=\pi$, то получаются формулы промежутка $[-\pi,\pi]$, с которых мы начинали. Алгоритм и принципы решения задачи полностью сохраняются, но возрастает техническая сложность вычислений:

Разложение в ряд Фурье чётных и нечётных функций

С чётными и нечётными функция процесс решения задачи заметно упрощается.

1) $f(x)$ - четная периодическая функция с периодом $2l$, определенная на $[-l;l]$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\frac{m\pi x}{l}\right)$$ - ряд Фурье,

$a_0=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)dx$, $a_m=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}dx$;

2) $f(x)$ - нечетная периодическая функция с периодом $2l$, определенная на $[-l;l]$:

$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(b_m\sin\frac{m\pi x}{l}\right)$ - ряд Фурье, $b_m=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx$.

В ряде случаев симметричное продолжение функции надо записать аналитически

3.16. Простейший (пуассоновский) поток событий. Другие виды потоков.

Влияние параметров нормальной кривой на ее вид

Простейший (пуассоновский) поток событий. Другие виды потоков.

Влияние параметров нормального распределения на форму нормальной кривой.

Виды и способы отбора статистического материала, влияние на репрезентативность выборки

Одним из центральных вопросов организации СМО является выяснение закономерностей, которым подчиняются моменты поступления в систему требований на обслуживание. Рассмотрим наиболее употребляемые математические модели входных потоков.

Определение: Поток требований называют однородным, если он удовлетворяет условиям:

1. все заявки потока с точки зрения обслуживания являются равноправными;

вместо требований (событий) потока, которые по своей природе могут быть различными, рассматриваются толь ко моменты их поступления.

Определение: Регулярным называются поток, если события в потоке следуют один за другим через строгие интервалы времени.

Функция f(x) плотности распределения вероятности случайной величины T – интервала времени между событиями имеет при этом вид:

$$f(x)=\delta(x-M_T)$$

,где δ- дельта функция, M_T- математическое ожидание, причем M_T=T, дисперсия D_T=0 и интенсивность наступления событий в поток τ =1/M_T=1/T.

Определение: Поток называют **случайным**, если его события происходят в случайные моменты времени.

Случайный поток может быть описан как случайный вектор, который, как известно, может быть задан однозначно законом распределения двумя способами:

a. Заданием закона распределения моментов появления событий

$$F(t_1,t_2,..t_n\quad)=P(\tau_1<t_1,\tau_2<t_2,...,\tau_n<t_n).Здесь\tau_1,\tau_2,..\tau_n-$$

случайные моменты времени появления событий в потоке, t1, t2, tn- их назначение, P – вероятность;

b. Заданием многомерного закона распределения системы случайных величин T_1, T_2,… Tn , являющихся длинами интервалов между последовательными событиями :

$$F(z_1, z_2, \ldots z_n) = P(\tau_1 < z_1, \tau_2 < z_2, \ldots, \tau_n < z_n).$$

Где, zi- значения Ti(i=1,n), В этом случае моменты наступления событий могут быть вычислены следующим образом

$t_1=t_0+z1$

$t_2=t_1+z2$

………,

где, t_0 - момент начала потока.

Простейший пуассоновский поток.

Для решения большого числа прикладных задач бывает достаточным применить математические модели однородных потоков, удовлетворяющих требованиям стационарности, без последействия и ординарности.

Определение: Поток называется стационарным, если вероятность появления n событий на интервале времени (t,t+T) зависит от его расположения на временной оси t.

Определение: Поток событий называется ординарным, если вероятность появления двух или более событий в течении элементарного интервала времени D t есть величина бесконечно малая по сравнению с вероятностью появления одного события на этом интервале, т.е. $\lim_{\Delta t \to 0} P(n, \Delta t)=0$ при n=2,3,…

Определение: Поток событий называется **потоком без последствия**, если для любых непересекающихся интервалов времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий попадающих на другой.

Определение: Если поток удовлетворяет требованиям стационарности, ординарности и без последствия он называется **простейшим, пуассоновским потоком.**

Доказано, что для простейшего потока число n событий попадающих на любой интервал z распределено по закону Пуассона:

$$P(n, z) = \frac{(\lambda z)^n \exp(-\lambda z)}{n!}, n = 0,1,2,\ldots$$

Вероятность того, что на интервале времени z не появится ни одного события равна:

$$P(0, z) = e^{-\lambda z}$$

$$P(T < z) = 1 - e^{-\lambda z}$$

тогда вероятность противоположного события:

где по определению P(T<z)=F(z) это функция распределения вероятности T. Отсюда получим, что случайная величина T распределена по показательному закону:

$$f(z) = \frac{dF}{dz} = \lambda e^{-\lambda z}$$

параметр λ называют плотностью потока. Причем,

$$M[T] = \frac{1}{\lambda}, \quad D[T] = \frac{1}{\lambda^2}$$

Впервые описание модели простейшего потока появились в работах выдающихся физиков начала века – А. Эйнштейна и Ю.Смолуховского, посвященных броуновскому движению.

Свойства простейшего пуассоновского потока.

Известны два свойства простейшего потока, которые могут быть использованы при решении практических задач.

2.3.1. Введем величину a= λ x. В соответствии со свойствами Пуассоновского распределения при $a\to\infty$ оно стремится к нормальному. Поэтому для больших a для вычисления P{X(a)меньше, либо равно n}, где X(a) – случайная величина распределенная по Пуассону с матожиданием a можно воспользоваться следующим приближенным равенством:

$$P\{X(a)\le n\}\approx 1\div\sqrt{2\pi a}\int_{-\infty}^{n+1/2}\exp\{-{(t-a)^2}/{2a}\}dt\,,\quad (\ \ .4)$$

$$=\Phi\left(\frac{n-a+\frac{1}{2}}{\sqrt{a}}\right),\quad где\quad \Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x\exp(-\frac{t^2}{2}dt).$$

2.3.2. Еще одно свойство простейшего потока связано со следующей теоремой:
Теорема: При показательном распределении интервала времени между требованиями T, независимо от того, сколько он длился, оставшаяся его часть имеет тот же закон распределения.

Доказательство: пусть T распределено по показательному закону: $F(x)=1-e^{-\lambda x}$
Предположим, что промежуток a уже длился некоторое время a<T. Найдем условный закон распределения оставшейся части промежутка T_1=T-a
F_a(x)=P(T-a<x½ T>x)
По теореме умножения вероятностей:
P((T>a)(T-a<z))=P(T>z) P(T-a<z|T>a)=P(T>a) F_a(z).
Отсюда,

$$F_a=\frac{R((T>a)\wedge(T-a<z))}{P(T>a)},\quad но\quad события\quad (T>a)\wedge(T-a<z)$$

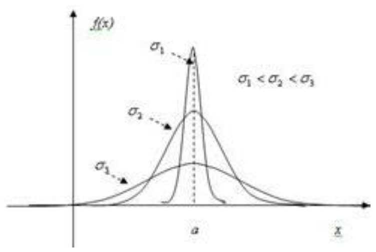
равносильно событию a<T<z+a, для которого P(a<T<z+a)=F(z+a)-F(a); с другой стороны P(T>a)=1-F(a), таким образом
F_a(x)=(F(z+a)-F(a))/(1-F(a))
Отсюда, учитывая (3):

$$F_a(z)=\frac{(e^{-\lambda z}-e^{-\lambda(z-a)})}{e^{-\lambda a}}=1-e^{-\lambda z}=F(z).,\quad ч.т.д.$$

Этим свойством обладает только один вид потоков – простейшие пуассоновские.

Изменение величины параметра a (математического ожидания) не изменяет формы нормальной кривой, а приводит лишь к ее сдвигу вдоль оси *Ox*: вправо, если a Возрастает, и влево, если a Убывает:

Максимум функции плотности вероятностей нормального распределения равен $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.
Отсюда следует, что с возрастанием σ Максимальная ордината нормальной кривой убывает, а сама кривая становится более пологой, то есть сжимается к оси *Ox*; при убывании σ нормальная кривая становится более “островершинной” и растягивается в положительном направлении оси *Oy*:



Замечание: При любых значениях параметров a и σ площадь, ограниченная нормальной кривой и осью *Ox*, остается равной единице.

3.17. Способы отбора статистического материала, его группировки

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Для того чтобы выборочная совокупность отражала характеристики генеральной, необходимо обеспечить репрезентативность (представительность) выборки, то есть рассчитать необходимый объем выборки и определить метод и способы отбора. Но как бы тщательно не была организована выборка, как правило, выборочные характеристики в какой-то степени будут отклоняться от характеристик генеральной совокупности, т.е. обычно имеют место ошибки репрезентативности.

Ошибками репрезентативности называют расхождения (разность) между средними, а также относительными показателями выборочной и генеральной совокупностей при условии отсутствия ошибок регистрации. И основная задача выборочного метода сводится к минимизации ошибки репрезентативности.

Как уже отмечалось, сущность выборочного метода заключается в том, что характеристики выборочной совокупности распространяются на всю генеральную совокупность и для формирования выборочной совокупности главными условиями являются:

- равновозможность каждой единицы генеральной совокупности попасть в выборку;
- достаточная численность выборки.

Для обеспечения равной возможности единиц генеральной совокупности попасть в выборку статистика применяет следующие методы и способы.

Методы:

- *повторный* - это такой метод отбора, при котором однажды отобранная единица возвращается обратно в генеральную совокупность и снова участвует в выборке. При повторном отборе сохраняется постоянная вероятность попасть в выборку для всех единиц;
- *бесповторный* - это такой метод отбора, при котором отобранная однажды единица в совокупность не возвращается, и вероятность каждой новой единицы попасть в выборку увеличивается.

Существуют различные способы формирования выборочной совокупности:

1. *Случайный отбор*. При этом способе каждая единица из генеральной совокупности отбирается в состав выборочной случайно (жеребьевка, использование таблиц случайных чисел).
2. *Механический отбор* - исходит из учета некоторых особенностей расположения объектов в генеральной совокупности, их упорядоченности (по списку, номеру, алфавиту). Механическая выборка осуществляется путем отбора отдельных объектов генеральной совокупности через определенный интервал (каждый 10 или 20). Если расположение объектов в генеральной совокупности носит случайный характер, то механическая выборка по содержанию аналогична случайному отбору. При механическом отборе, как правило, применяется только бесповторная выборка.
3. *Типический отбор*. При типическом отборе вся генеральная совокупность на основе предварительного анализа изучаемой совокупности разбивается на группы по какому-либо существенному признаку, и непосредственный отбор единиц производится в пределах отдельных типических групп. При этом способе отбора генеральная совокупность расчленяется на однородные в некотором отношении группы, которые

имеют свои характеристики, и вопрос сводится к определению объема выборок из каждой группы. Может быть равномерная выборка - при этом способе из каждой типической группы отбирается одинаковое число единиц ($n_1 = n_2 = m_n$). Такой подход оправдан лишь при равенстве численностей исходных типических групп. В противном случае выборки могут оказаться не репрезентативными.
При проведении типологической выборки непосредственный отбор из каждой группы, как правило, проводится методом случайного отбора.
4. *Серийный отбор*. В некоторых случаях характер размещения объектов в генеральной совокупности может быть таким, что они расположены сериями (ящики, мешки, классы). В таких случаях формирование выборочной совокупности путем отбора отдельных единиц нецелесообразно. Проще организовать отбор сериями и провести сплошное обследование по способу механической или случайной выборки.
5. *Многофазная выборка*. Она характеризуется тем, что на всех ступенях выборки сохраняется одна и та же единица отбора, но проводится несколько фаз (стадий) выборочных обследований, которые различаются между собой широтой программы обследования. Важной особенностью является возможность использовать данные первой фазы наблюдения для дополнительной характеристики и уточнения результатов, полученных на 2, 3 и далее фазах.
На практике чаще всего приходится сочетать различные виды и способы статистического наблюдения.
Необходимым условием научной организации выборочного наблюдения является требование достаточного объема выборки. Логический смысл этого требования вполне очевиден. Чем больше единиц будет взято для обследования, тем достовернее они смогут отобразить генеральную совокупность. Объем выборки (n) при достаточно большой численности генеральной совокупности (больше 1000 элементов) рассчитывается по формуле: $n = t^2$ p (100% - p), где: t^2 - критерий достоверности, зависящий от надежности оценок (при надежности, равной 95%, критерий равен ~ 2); p - показатель распространенности явления в %; - требуемая точность оценок в %.
3.18. Доверительный интервал.
Доверительный интервал. Надежность.
Для построения *интервальной оценки* рассмотрим событие, заключающееся в том, что отклонение точечной оценки параметра θ^* от истинного значения этого параметра θ по абсолютной величине не превышает некоторую положительную величину Δ. Вероятность такого события $P\left(\left|\theta-\theta^*\right|<\Delta\right)=\gamma$. Заменив неравенство $\left|\theta-\theta^*\right|<\Delta$ на равносильное, получим: $P\left(\theta^*-\Delta<\theta<\theta^*+\Delta\right)=\gamma$.
Вероятность того, что *доверительный интервал* $(\theta^*-\Delta\,,\ \theta^*+\Delta)$ заключает в себе (покрывает) неизвестный параметр θ равна γ и называется *доверительной вероятностью* или *надежностью* интервальной оценки. Величину Δ называют *точностью*оценки.
3. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения.
Построим интервальную оценку параметра $a=\bar{x}_{\text{ген}}$ для двух случаев:
1) параметр σ нормального закона распределения признака X генеральной совокупности *известен*. В этом случае интервальная оценка параметра $a=\bar{x}_{\text{ген}}$ с заданной надежностью γ определяется формулой:

$\bar{x}_{\text{в}}-\Delta<a<\bar{x}_{\text{в}}+\Delta$, где $\Delta=\dfrac{t\cdot\sigma}{\sqrt{n}}$,

t – аргумент функции Лапласа: $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$;

2) параметр σ нормального закона распределения признака X генеральной совокупности ***неизвестен***. В этом случае интервальная оценка параметра $a = \bar{x}_{\text{ген}}$ с заданной надежностью γ определяется формулой:

$\bar{x}_{\text{в}} - \Delta < a < \bar{x}_{\text{в}} + \Delta$,

где $\Delta = \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}}$,

S – точечная оценка параметра σ,

$t_\gamma = t(\gamma, n)$ – значения распределения Стьюдента, которые находим по таблице.

Другой вид доверительного интервала для оценки $\sigma(X)$ нормального распределения имеет вид:

$S(1-q) < \sigma < S(1+q)$ при $q < 1$;

$0 < \sigma < S(1+q)$ при $q > 1$;

где S - исправленное среднее квадратическое отклонение;

$q = q(\gamma; n)$ находим по таблице значений (Приложение 5).

Пример 9. Для оценки параметра нормально распределенной случайной величины была сделана выборка объема в 25 единиц и вычислено $S = 0{,}8$.

Найти доверительный интервал, покрывающий σ с вероятностью $\gamma = 0{,}95$.

¦ Имеем $n = 25$, $\gamma = 0{,}95$, $S = 0{,}8$

По таблице значений $q = q(\gamma; n)$ находим $q = 0{,}32$.

Доверительный интервал имеет вид:

$(0{,}8(1-0{,}32); 0{,}8(1+0{,}32))$ или $(0{,}544; 1{,}056)$. □

3.19. Методика вычисления выборочного коэффициента корреляции

Соотношение x и y линейное, если прямая линия, проведенная через центральную часть скопления точек, дает наиболее подходящую аппроксимацию наблюдаемого соотношения.

Можно измерить, как близко находятся наблюдения к прямой линии, которая лучше всего описывает их линейное соотношение путем вычисления коэффициента корреляции Пирсона, обычно называемого просто коэффициентом корреляции.

Его истинная величина в популяции (генеральный коэффициент корреляции) (греческая буква «ро») оценивается в выборке как *r (выборочный коэффициент корреляции)*, которую обычно получают в результатах компьютерного расчета.

Пусть $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ - выборка из n наблюдений пары переменных (X, Y).

Выборочный коэффициент корреляции r определяется как

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x-\bar{x})^2(y-\bar{y})^2}},$$

где $\bar{x}$, $\bar{y}$ - выборочные средние, определяющиеся следующим образом:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Свойства коэффициента корреляции *r*

- *r* изменяется в интервале от —1 до +1.
- Знак *r* означает, увеличивается ли одна переменная по мере того, как увеличивается другая (положительный *r*), или уменьшается ли одна переменная по мере того, как увеличивается другая (отрицательный *r*).
- Величина *r* величина указывает, как близко расположены точки к прямой линии. В частности, если r = +1 или r= —1, то имеется абсолютная (функциональная) корреляция по всем точкам, лежащим на линии (практически это маловероятно); если $r \cong 0$, то линейной корреляции нет (хотя может быть нелинейное соотношение). Чем ближе *r* к крайним точкам (±1), тем больше степень линейной связи.
- Коэффициент корреляции *r* безразмерен, т. е. не имеет единиц измерения.
- Величина *r* обоснованна только в диапазоне значений *x* и *y* в выборке. Нельзя заключить, что он будет иметь ту же величину при рассмотрении значений *x* или *y*, которые значительно больше, чем их значения в выборке.
- *x* и *y* могут взаимозаменяться, не влияя на величину *r* ($r_{xy} = r_{yx}$).
- Корреляция между *x* и *y* не обязательно означает соотношение причины и следствия.
- r^2 представляет собой долю вариабельности *y*, которая обусловлена линейным соотношением с *x*.

Когда не следует рассчитывать *r*

Расчет *r* может ввести в заблуждение, если:

- соотношение между двумя переменными нелинейное, например квадратичное;
- данные включают более одного наблюдения по каждому случаю;
- есть аномальные значения (выбросы);
- данные содержат ярко выраженные подгруппы наблюдений**.**

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЗАНЯТИЯМ

4.1 Практические занятия по теме «Линейная алгебра»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Виды матриц.
2. Действия над матрицами.
3. Определители второго и третьего порядка.
4. Миноры, алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.
5. Нахождение обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений.
6. Ранг матрицы.
7. Системы линейных уравнений.
8. Методы решения СЛУ.
9. Теорема Кронекера – Капелли.

4.2 Практические занятия по теме «Векторная алгебра»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Виды векторов.
2. Линейные операции над векторами.
3. ПДСК. Базис. Координаты вектора.
4. Скалярное произведение векторов, его свойства, приложения.
5. Векторное произведение векторов, его свойства, приложения.
6. Смешанное произведение векторов, его свойства, приложения.

4.3 Практические занятия по теме «Линии на плоскости»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Способы задания прямой линии на плоскости.
2. Взаимное расположение двух прямых.
3. Окружность.
4. Эллипс.
5. Гипербола.
6. Парабола.

4.4 Практические занятия по теме «Линии в пространстве»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Плоскость в пространстве. Способы задания плоскости в пространстве.
2. Взаимное расположение плоскостей.
3. Прямая в пространстве. Способы задания прямой в пространстве.
4. Взаимное расположение прямой и плоскости.
5. Понятие поверхности в пространстве.

4.5 Практические занятия по теме «Функция одной переменной»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Основные понятия.
2. Способы задания функции.
3. Основные свойства функции.
4. Элементарные и неэлементарные функции.
5. Понятие последовательности.
6. Предел числовой последовательности.
7. Предел функции в точке.
8. Правила раскрытия неопределенностей.
9. Бесконечно малые функции, их свойства.
10. Бесконечно большие функции, их свойства.
11. Замечательные пределы.
12. Односторонние пределы.
13. Непрерывность функции в точке.
14. Точки разрыва.
15. Асимптоты графика функции.

4.6 Практические занятия по теме «Производная и ее приложения»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Понятие производной.
2. Геометрический и механический смыслы производной.
3. Правила и формулы дифференцирования.
4. Производные высших порядков.
5. Понятие дифференциала. Геометрический смысл дифференциала.
6. Правило Лопиталя.
7. Исследование на монотонность функции, точки экстремума.
8. Нахождение наименьшего и наибольшего значений функции на отрезке.

9. Исследование на вогнутость и выпуклость функции, точки перегиба.
10. Общий план исследования функции и построения графика
11. Длина дуги кривой.
12. Угол смежности и кривизна.
13. Радиус и круг кривизны.
14. Эволюта и эвольвента.

4.7 Практические занятия по теме «ФНП»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. ОДЗ функции двух переменных и ее геометрическое изображение.
2. Частные приращения.
3. Частные производные первого и второго порядка. Теорема Шварца.
4. Полный дифференциал.
5. Производная по направлению. Градиент.
6. Касательная плоскость и нормаль.
7. Понятие экстремума функции двух переменных.
8. Необходимое и достаточное условия экстремума.
9. Метод наименьших квадратов.

4.8 Практические занятия по теме «Неопределенный интеграл»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Первообразная функция и ее свойства.
2. Понятие неопределенного интеграла, основные свойства.
3. Таблица интегралов.
4. Методы интегрирования: непосредственное интегрирование, замена переменной, интегрирование по частям.
5. Интегрирование простейших рациональных дробей.
6. Интегрирование рациональных функций.
7. Интегрирование тригонометрических и иррациональных функций.

4.9 Практические занятия по теме «Определенный и несобственный интеграл»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Понятие определенного интеграла.
2. Геометрический и физический смыслы.
3. Основные свойства определенного интеграла.
4. Формула Ньютона – Лейбница.
5. Приемы интегрирования.
6. Приближенное вычисление определенных интегралов.
7. Вычисление площадей плоских кривых.
8. Нахождение объема тела вращения.
9. Вычисление длины дуги кривой.
10. Вычисление работы переменной силы.
11. Нахождение давления.
12. Вычисление пути при неравномерном движении.
13. Несобственные интегралы первого рода.
14. Несобственные интегралы второго рода.
15. Геометрический смысл несобственных интегралов, его применение.

4.10 Практические занятия по теме «Дифференциальные уравнения первого порядка»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Частные и общие решения.
2. ДУ первого порядка. Задача Коши.
3. ДУ с разделенными и разделяющимися переменными.
4. ЛДУ первого порядка. Методы Лагранжа и Бернулли.
5. Уравнения Бернулли. Метод Бернулли.
6. Однородные ДУ и приводящиеся к ним.
7. ДУ в полных дифференциалах.

4.11 Практические занятия по теме «Дифференциальные уравнения второго порядка»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.
2. Линейно зависимые и линейно независимые функции.
3. ФСР. Определитель Вронского.
4. Структура общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.
5. Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.
6. Метод Лагранжа решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.
7. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка второго порядка с правой частью специального вида.

4.12 Практические занятия по теме «Случайные величины»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Понятие случайной величины. Ее виды.
2. Закон распределения и многоугольник распределения дискретной случайной величины.
3. Числовые характеристики, их свойства.
4. Виды распределений дискретной случайной величины: биномиальное распределение, распределение Пуассона, геометрическое и гипергеометрическое распределения.
5. Интегральная функция распределения, ее свойства
6. Дифференциальная функция распределения непрерывной случайной величины, ее свойства.
7. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.
8. Виды распределений непрерывной случайной величины: равномерное распределение, показательное распределение, нормальный закон распределения, его параметры.
9. Кривая Гаусса. Ее свойства и график.

4.13. Практические занятия по теме «Элементы математической статистики»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Задачи математической статистики.
2. Генеральная совокупность и выборка.

3. Выборочные характеристики.
4. Точечные оценки. Несмещенные и состоятельные оценки.
5. Доверительный интервал. Надежность.
6. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения.
7. Доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения нормального распределения.
8. Корреляционная зависимость.
9. Корреляционная таблица.
10. Коэффициент корреляции.
11. Линейная регрессия, ее параметры.
12. Понятие статистической гипотезы. Нулевая и альтернативная гипотезы.
13. Статистические критерии проверки гипотез. Мощность критерия.
14. Параметрические и непараметрические критерии.