ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические рекомендации для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Б1.В.01 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Направление подготовки 35.03.06 Агроинженерия

Профиль образовательной программы Технический сервис в АПК

Форма обучения очная

СОДЕРЖАНИЕ

1. **Организация самостоятельной работы**……………………………........................3
2. **Методические рекомендации по самостоятельному изучению вопросов**………3
3. **Методические рекомендации по подготовке к занятиям**…………………………7

3.1 ЛР-1 Интерполирование функций.........………...7

3.2 ЛР-2 Аппроксимация функций …………………………………..........................7

3.3 ЛР-3 Решение обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка …………...7

3.4 ЛР-4 Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.....………………………………...............................7

3.5 ЛР-5 Численные методы решения некоторых задач математической физики …………………………...8

3.6 ЛР-6 Численные методы решения некоторых задач математической физики …………...8

3.7 ЛР-7 Суммирование рядов Фурье.………..8

3.8 ЛР-8 Приложение операционного исчисления ……………………………………8

3.9 ЛР-9 Численные методы решения линейной краевой задачи для уравнения второго порядка ……………………………………………………………….............8

3.10 ПЗ-1 Обыкновенные дифференциальные уравнения …………………………..8

3.11 ПЗ-2 Системы обыкновенных дифференциальных уравнений..………………..8

3.12 ПЗ-3 Уравнения в частных производных первого порядка ……………………..9

3.13 ПЗ-4 Уравнения в частных производных второго порядка..……………………9

3.14 ПЗ-5 Задача Коши для одномерного волнового уравнения.................………..9

3.15 ПЗ-6 Задача Коши для неоднородного одномерного волнового уравнения.......9

3.16 ПЗ-7 Уравнение Лапласа..9

3.17 ПЗ-8 Разложение функций в ряд Фурье...9

4. **Методические рекомендации по выполнению индивидуальных домашних заданий**……………………………………………………………………………10

4.1. Методы решения уравнений математической физики…………………………10

4.2. Численные методы решения дифференциальных уравнений…………………13

1. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1.Организационно-методические данные дисциплины

№ п.п.	Наименование темы	Общий объем часов по видам самостоятельной работы				
		подготовка курсового проекта (работы)	подготовка реферата/эссе	индивидуальные домашние задания (ИДЗ)	самостоятельное изучение вопросов (СИВ)	подготовка к занятиям (ПкЗ)
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	Введение. Основные понятия					2
2	Основные уравнения и основные задачи математической физики				2	2
3	Методы решения уравнений математической физики			6	2	2
4	Численные методы решения уравнений математической физики			6		2
5	Применение функциональных рядов к решению дифференциальных уравнений				4	2
6	Преобразования Фурье					2
7	Преобразования Лапласа				4	
	Всего в семестре			**12**	**12**	**12**

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ВОПРОСОВ

2.1 Уравнение колебаний струны: однородное и неоднородное.

Приведем схему метода решения для задачи о колебаниях струны, закрепленной на концах[8]:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \qquad (2)$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \qquad (3)$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x). \qquad (4)$$

Будем искать тождественно не равные нулю решения уравнения (2), удовлетворяющие краевым условиям (3) в виде произведения

$$u(x,t) = X(x)T(t). \quad (5)$$

Подставим предполагаемый вид решения в уравнение (2) и поделим на $a^2X(x)T(t)$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2T(t)}. \qquad (6)$$

Левая часть равенства (6) является функцией только переменного x, правая — только t. Следовательно, обе части не зависят ни от x, ни от t и равны некоторой константе $-\lambda$. Получаем обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций $X(x)$ и $T(t)$:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(x) \not\equiv 0, \qquad (7)$$

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad T(t) \not\equiv 0, \qquad (8)$$

Подставляя (5) в краевые условия (3), получаем

$$X(0) = X(l) = 0. \qquad (9)$$

Решение уравнения колебаний струны. Задача Штурма-Лиувилля.

Приходим к задаче задаче Штурма-Лиувилля (7),(9). Эта задача только при значениях λ, равных собственным значениям

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

имеет нетривиальные решения (собственные функции)

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

определяемые с точностью до произвольного множителя. Этим же значениям λ_n соответствуют решения уравнения (8)

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at,$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные.

Таким образом, функции $u_n(x,t) = X_n(x) T_n(t)$ являются частными решениями уравнения (2), удовлетворяющими условиям (3). Решение задачи (2)-(4) получается в виде бесконечной суммы частных решений

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at\right) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где константы A_n и B_n могут быть найдены из начальных условий (4) как коэффициенты Фурье функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx, \quad B_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx.$$

Метод разделения переменных также применим к уравнению колебаний струны общего вида

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x) \frac{\partial u}{\partial x}\right] - q(x) u = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

где k, q и ρ — непрерывные положительные на отрезке $0 < x < l$ функции[9]. В этом случае решение строится в виде ряда по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

$$\frac{d}{dx}\left[k(x) \frac{dX}{dx}\right] - q(x) X + \lambda \rho(x) X = 0, \quad X(0) = X(l) = 0. \qquad (10)$$

2.2 Методы решения линейной краевой задачи для уравнений второго порядка: методы прогонки, коллокации, Галеркина-Ритца.

Метод **коллокации**- проекционный метод решения интегральных и дифференциальных уравнений, в котором приближенное решение определяется из условия удовлетворения уравнению в некоторых заданных точках. Например, для приближенного решения интегрального уравнения

$$u(t) = \int_a^b K(t, s, u(s))\, ds + f(t)$$

выбираются некоторое n-параметрическое семейство функций j(t, c_1,..., c_n) и некоторые точки (узлы коллокации) t_1, ..., t_n на отрезке [a, b]. Приближенное решение u_n(t) =j(t, c_1, ..., c_n)определяется из условий

$$u_n(t_i) = \int_a^b K(t_i, s, u_n(s))\, ds + f(t_i), \quad i = 1, \ldots, n,$$

представляющих собой систему n уравнений относительно неизвестных c_1, ..., c_n. Если данное уравнение линейно, а приближенное решение ищется в виде линейной комбинации u_n(t) = c_1j$_1$(t)+ ... +c_nj$_n$(t) заданных (так наз.

координатных) функций j_1, . .., j_n, то и система уравнений относительно с $_1$, ..., c_n получается линейная.

Сходимость. метода. для линейных краевых задач. Пусть поставлена краевая задача

$$Lu = u^{(m)} + a_1(t)\,u^{(m-1)} + \ldots + a_m(t)\,u = f(t), \quad (1)$$
$$-1 < t < 1;$$
$$\sum_{j=0}^{m-1} [\alpha_{ij} u^{(j)}(-1) + \beta_{ij} u^{(j)}(1)] = 0, \ i = 1, \ldots, m. \ (2)$$

Приближенное решение задачи разыскивается в виде

$$u_n(t) = c_1\varphi_1(t) + \ldots + c_n\varphi_n(t),$$

где j_i(t)- некоторый многочлен степени $m+j$-1, удовлетворяющий краевым условиям (2). Коэффициенты c_1, ..., c_n определяются из линейной системы

$$[Lu_n - f]_{t=t_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (3)$$

с чебышевскими узлами $t_i = t_i^{(u)} = \cos\frac{2i-1}{2n}\pi$, i = 1,... ,n.

Ритца и Галёркина методы

широко распространённые Прямые методы решения главным образом вариационных задач и краевых задач математического анализа

Метод Ритца применяется большей частью для приближённого решения вариационных задач и тех краевых задач, которые сводятся к вариационным. Пусть задан Функционал V [у (х)] (или более сложныйфункционал) и требуется найти такую функцию у (х), принимающую в точках x_0 и x_i заданные значения α = у(x_0) и β = у (x_1), на которой функционал V [у (х)] будет достигать Эк стремума.

Значения исследуемого наэкстремум функционала V [у (х)] рассматриваются не на всех до пустимых в данной задаче функциях у (х), алишь на всевозможных линейных комбинациях вида

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(x)$$

с постоянными коэффициентами a_i, составленных из n первых функций некоторой выбранной сист емыφ_1(x), φ_2(x),..., $\varphi_п$ (x),... (от удачного выбора этой системы функций зависит эффективность при менениметода к решению конкретных задач).

Необходимым условием выбора системы функций φ_1(x) являетсятребование, чтобы функц ии $y_п$ (x) удовлетворяли условиям yп (x_o) = α и y_n (x_1) = α для всех значенийпараметров a_1.

При таком выборе функций $y_п$ (x) функционал V [у (х)] превращается в функцию Ф (a_1, a_2,... ,a_n) коэффициентов a_i, последние выбирают так, чтобы эта функция достигала экстремума, т. е. опр еделяютих из системы уравнений

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a_i} = 0$$

i=1, 2, ..., n).

2.3 Интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность. Дифференцирование и интегрирование по параметру.

<u>Определение.</u>

Интеграл $I(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ называется интегралом, зависящим от параметра, если $f(x,y)$ интегрируема на промежутке $[a,b] \subset X$ при любом фиксированным $y \in [c,d]$, где .

Следовательно, представляет собой функцию $I(y)$ переменной (параметра) y, определенную в промежутке $[c,d]$.

Возможно существование интеграла при фиксированном $x \in [a,b]$, тогда он будет представлять собой функцию переменной (параметра) x, определенную в промежутке $[a,b]$.

Обозначается она $I(x)$, поэтому $I(x) = \int_c^d f(x,y)dy$.

Основная задача будет состоять в том, чтобы, зная свойства функции $f(x,y)$, получить информацию о свойствах функции $I(y)$. Эти свойства имеют многообразные применения, особенно при вычислении несобственных интегралов.

Пример. Найти интеграл $I(y)$ от функции $f(x,y)=yx^2$, $x\in[a,b]$

Функция $f(x,y)=yx^2$ непрерывна на отрезке $[a,b]\subset R$ при любом фиксированном y, а значит, она интегрируема. Тогда

$$I(y)=\int_a^b yx^2dx = y\frac{x^3}{3}\Bigg|_a^b=\frac{y(b^3-a^3)}{3}.$$

Теорема 4 (о непрерывности интеграла как функции параметра). Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике $P=\begin{cases} a\le x\le b \\ c\le y\le d\end{cases}$, тогда интеграл $I(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ будет непрерывной функцией от параметра y в промежутке $[c,d]$.

2.4 Интегральные уравнения, метод итераций. Применение интегральных уравнений в теории колебаний.

В развитии теории интегральных уравнений, кроме внутренних потребностей математики имели большое значение различные задачи физики. Наряду с дифференциальными уравнениями в XX в. интегральные уравнения являются одним из важных средств математического изучения различных вопросов физики.

Рассмотрим стержень, закрепленный на концах (рис. 1). Приложим в точке C силу, действующую в направлении B. Под действием этой силы стержень деформируется и точка C сместится. В силу закона Гука

$$T_1=\varkappa\frac{h}{x},\quad T_2=\varkappa\frac{h}{l-x},$$

где — коэффициент пропорциональности, характеризующий упругие свойства стержня. Условие равновесия сил, действующих на точку C, дает нам

$$f=\varkappa\frac{h}{x}+\varkappa\frac{h}{l-x},\quad \text{т. е.}\quad f=\frac{\varkappa l h}{x(l-x)}.$$

Отсюда

$$h=\frac{f}{\varkappa l}x(l-x).$$

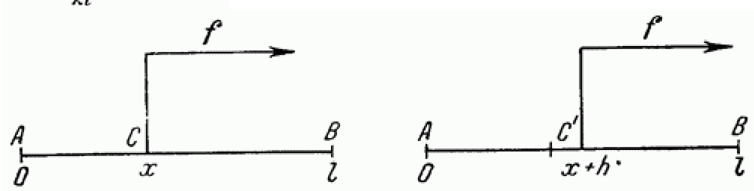

Рис. 1.

Обозначим смещение точки y через к. Тогда, приравняв относительные смещения в точках x и y, получаем

$$\frac{k}{y}=\frac{h}{x},$$

отсюда

$$k(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\varkappa l}y(l-x) & \text{при}\quad y<x,\\ \frac{1}{\varkappa l}x(l-y) & \text{при}\quad y>x.\end{cases}$$

Предположим, что наша упругая система не подвержена действию внешних сил. Если вывести ее из положения равновесия, то она придет в движение. Эти движения называются свободными колебаниями системы.

Напишем при помощи функции влияния уравнение, которому подчиняются свободные колебания рассматриваемой упругой системы.

$$u(x, t) = -\int_a^b k(x, y) \frac{\partial^2 u(y, t)}{\partial t^2} \rho dy.$$

Мы рассматривали свободные колебания упругих систем. Если же во время движения на упругую систему действует гармоническая внешняя сила, то, определяя гармонические колебания под действием этой силы, мы придем к неоднородному интегральному уравнению

$$u(x) = \rho\omega^2 \int_a^b k(x, y) u(y) dy + h(x).$$

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЗАНЯТИЯМ

3.1 Лабораторная работа №1 ЛР-1 «Интерполирование функций»

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты: по определению, **интерполяция** означает построение функции $A(x)$, аппроксимирующей зависимость $y(x)$ в промежуточных точках отрезка $[x_0, x_n]$. Поэтому интерполяцию еще по-другому называют **аппроксимацией**. Отличие интерполяции и экстраполяции, особенности работы с таблицами опытных данных.

3.2 Лабораторная работа №2 ЛР-2 «Аппроксимация функций»

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

Аппроксима́ция (от лат. *proxima* – ближайшая) или **приближе́ние** — научный метод, состоящий в замене одних объектов другими, в каком-то смысле близкими к исходным, но более простыми.

Аппроксимация позволяет исследовать числовые характеристики и качественные свойства объекта, сводя задачу к изучению более простых или более удобных объектов (например, таких, характеристики которых легко вычисляются или свойства которых уже известны). Одним из наиболее часто употребляемых методов аппроксимации является метод наименьших квадратов. Следует обратить особое внимание на выбор аналитической функции для аппроксимации в ходе обработки результатов опытов.

3.3 Лабораторная работа №3 ЛР-3 «Решение обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка»

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты: обязательная классификация ДУ первого порядка, так как именно она определяет метод решения.

3.4 Лабораторная работа №4 ЛР-4 «Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка»

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты: необходимость в численном интегрировании ДУ, виды численных методов для решения ДУ 1-го порядка, особенности каждого метода.

3.5 Лабораторная работа №5 ЛР-5 «Численные методы решения некоторых задач математической физики»

3.6 Лабораторная работа №6 ЛР-6 «Численные методы решения некоторых задач математической физики»

При подготовки к занятиям необходимо обратить внимание на следующие моменты: необходимость в численном интегрировании ДУ в частных производных, которые моделируют решение задач математической физики, виды численных методов, особенности каждого метода.

3.7 Лабораторная работа №7 ЛР-7 «Уравнение Лапласа»

При подготовки к занятиям необходимо обратить внимание на следующие моменты: классификация физических процессов, которые описываются уравнением Лапласа, формулировка начальных и граничных (краевых) условий, методы решения уравнения.

3.8 Лабораторная работа №8 ЛР-8 «Применение функциональных рядов к решению дифференциальных уравнений»

При подготовки к занятиям необходимо обратить внимание на следующие моменты: проверка возможности разложения функции в степенной или тригонометрический ряд, готовые разложения и возможности их применения. особенности в приложении рядов к решению ДУ.

3.9 Лабораторная работа №9 ЛР-9 «Численные методы решения линейной краевой задачи для уравнения второго порядка»

При подготовки к занятиям необходимо обратить внимание на следующие моменты: классические методы решения линейной краевой задачи и необходимость в численном интегрировании таких уравнений.

3.10 Практическое занятие №1 ПЗ-1 «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты: виды ДУ первого и второго порядка, классификация и методы их решения; формулировка задачи Коши для обыкновенных ДУ первого порядка.

3.11 Практическое занятие №2 ПЗ-2 «Системы обыкновенных дифференциальных уравнений»

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты: необходимость приведения системы ДУ к нормальному виду, обоснование решения задачи Коши, методы решения систем и выбор подходящего метода для конкретной системы.

3.12 Практическое занятие №3 ПЗ-3 «Уравнения в частных производных первого порядка»

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты: виды ДУ в частных производных первого порядка, классификация и методы их решения; формулировка задачи Коши для ДУ первого порядка.

3.13 Практическое занятие №4 ПЗ-4 «Уравнения в частных производных второго порядка»

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты: виды ДУ в частных производных второго порядка, классификация и методы их решения; формулировка задачи Коши для ДУ второго порядка.

3.14 Практическое занятие №5 ПЗ-5 «Задача Коши для одномерного волнового уравнения»

3.15 Практическое занятие №6 ПЗ-6 «Задача Коши для неоднородного одномерного волнового уравнения»

При подготовки к занятиям необходимо обратить внимание на следующие моменты: возможности интегрирования ДУ в частных производных, которые моделируют решение одномерного (однородного и неоднородного) волнового уравнения, виды методов решения, особенности каждого метода.

3.16 Практическое занятие №7 ПЗ-7 «Уравнение Лапласа»

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты: классификация физических процессов, которые описываются уравнением Лапласа, формулировка начальных и граничных (краевых) условий, методы решения уравнения.

3.17 Практическое занятие №8 ПЗ-8 «Разложение функций в ряд Фурье»

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты: проверка возможности разложения функции в тригонометрический ряд, частные случаи разложения и возможности их применения, особенности в приложении рядов к решению ДУ.

4.Методические рекомендации по выполнению индивидуальных домашних заданий

4.1. Методы решения уравнений математической физики

№ 1. Решить уравнение колебания бесконечной струны, удовлетворяющее данным условиям.

1) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\begin{cases} u(x,0)=0 \\ u'_t(x,0)=\cos x \end{cases}$

2) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\begin{cases} u(x,0)=\cos x \\ u'_t(x,0)=0 \end{cases}$

3) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\begin{cases} u(x,0)=3\cos x \\ u'_t(x,0)=2\sin x \end{cases}$

4) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{9}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\begin{cases} u(x,0)=x^2 \\ u'_t(x,0)=x \end{cases}$

5) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\begin{cases} u(x,0)=x \\ u'_t(x,0)=1 \end{cases}$

6) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\begin{cases} u(x,0)=3\sin 2x \\ u'_t(x,0)=\cos 2x \end{cases}$

7) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\begin{cases} u(x,0)=x^2 \\ u'_t(x,0)=\sin 3x \end{cases}$

8) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\begin{cases} u(x,0)=\cos \pi x \\ u'_t(x,0)=2\sin \pi x \end{cases}$

9) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\begin{cases} u(x,0)=\frac{1}{1+x^2} \\ u'_t(x,0)=\frac{1}{1+x^2} \end{cases}$

10) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\begin{cases} u(x,0)=\sin x \\ u'_t(x,0)=x+1 \end{cases}$

11) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\begin{cases} u(x,0)=1 \\ u'_t(x,0)=\cos 2x \end{cases}$

12) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\begin{cases} u(x,0)=3x \\ u'_t(x,0)=\sin x \end{cases}$

13) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\begin{cases} u(x,0)=x \\ u'_t(x,0)=x^2+1 \end{cases}$

14) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\begin{cases} u(x,0)=3\sin x \\ u'_t(x,0)=\cos x \end{cases}$

15) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\begin{cases} u(x,0)=\sin 2x \\ u'_t(x,0)=1 \end{cases}$

16) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\begin{cases} u(x,0)=2 \\ u'_t(x,0)=3\cos 2x \end{cases}$

17) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\begin{cases} u(x,0)=x^2 \\ u'_t(x,0)=\cos 2x \end{cases}$

18) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\begin{cases} u(x,0)=\cos 3x \\ u'_t(x,0)=\cos x \end{cases}$

19) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\begin{cases} u(x,0)=4\sin x \\ u'_t(x,0)=2x \end{cases}$

20) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\begin{cases} u(x,0)=x^2 \\ u'_t(x,0)=5\sin 2x \end{cases}$

Пример оформления №1.

Решить уравнение колебания бесконечной струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее данным условиям $\begin{cases} u(x,0)=\cos 2x \\ u'_t(x,0)=x^3 \end{cases}$.

Решение.

Имеем задачу свободных колебаний бесконечной струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (без краевых условий). Применяем формулу Даламбера:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(\varphi(x-at)+\varphi(x+at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds, \quad \text{где} \quad \begin{cases} u(x,0)=\varphi(x) \\ u'_t(x,0)=\psi(x) \end{cases}.$$

В данном случае $a=2$, поэтому:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(\cos 2(x-2t)+\cos 2(x+2t))+\frac{1}{2\cdot 2}\int_{x-2t}^{x+2t}x^3dx=\left|\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cos\frac{2x-4t+2x+4t}{2}\cos\frac{2x-4t-2x-4t}{2}+\frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t}x^3dx=\cos 2x\cdot\cos 4t+\frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t}x^3dx=$$

$$=\cos 2x\cdot\cos 4t+\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_{x-2t}^{x+2t}=\cos 2x\cdot\cos 4t+\frac{1}{16}\cdot((x+2t)^4-(x-2t)^4)=$$

$$=\cos 2x\cdot\cos 4t+\frac{1}{16}\cdot((x^2+4xt+4t^2)^2-(x^2-4xt+4t^2)^2)=\cos 2x\cdot\cos 4t+x^3t+4xt^3.$$

Ответ: $u(x,t)=\cos 2x\cdot\cos 4t+x^3t+4xt^3$

№ 2. Решить уравнение теплопроводности при заданных начальных и граничных условиях

1) $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \begin{cases}u(x,0)=\frac{1}{2}\cos\pi x\\ u(0,t)=u(2,t)=0\end{cases}$

2) $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \begin{cases}u(x,0)=2\sin\frac{\pi x}{6}\\ u(0,t)=u(3,t)=0\end{cases}$

3) $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{16}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \begin{cases}u(x,0)=\begin{cases}x,\ [0,1]\\ 2-x,\ (1,2]\end{cases}\\ u(0,t)=u(2,t)=0\end{cases}$

4) $\frac{\partial u}{\partial t}=25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \begin{cases}u(x,0)=x(3-x)\\ u(0,t)=u(3,t)=0\end{cases}$

5) $\frac{\partial u}{\partial t}=81\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \begin{cases}u(x,0)=\begin{cases}x/4,\ [0,4]\\ (6-x)/2,\ (4,6]\end{cases}\\ u(0,t)=u(4,t)=0\end{cases}$

6) $\frac{\partial u}{\partial t}=25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \begin{cases}u(x,0)=\cos\frac{\pi x}{2}\\ u(0,t)=u(2,t)=0\end{cases}$

7) $\frac{\partial u}{\partial t}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \begin{cases}u(x,0)=4x+1\\ u(0,t)=u(3,t)=0\end{cases}$

8) $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{16}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \begin{cases}u(x,0)=5x-3\\ u(0,t)=u(2,t)=0\end{cases}$

9) $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{36}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \begin{cases}u(x,0)=3\sin\frac{\pi x}{6}\\ u(0,t)=u(2,t)=0\end{cases}$

10) $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \begin{cases}u(x,0)=\cos 6\pi x\\ u(0,t)=u(2,t)=0\end{cases}$

11) $\frac{\partial u}{\partial t}=9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \begin{cases}u(x,0)=\frac{1}{2}\sin\pi x\\ u(0,t)=u(3,t)=0\end{cases}$

12) $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \begin{cases}u(x,0)=x^2\\ u(0,t)=u(3,t)=0\end{cases}$

13) $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{25}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \begin{cases}u(x,0)=3\cos 2\pi x\\ u(0,t)=u(1,t)=0\end{cases}$

14) $\frac{\partial u}{\partial t}=25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \begin{cases}u(x,0)=2-4x\\ u(0,t)=u(4,t)=0\end{cases}$

15) $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{16}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \begin{cases}u(x,0)=4x+1\\ u(0,t)=u(6,t)=0\end{cases}$

16) $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \begin{cases}u(x,0)=4\cos\frac{\pi x}{3}\\ u(0,t)=u(6,t)=0\end{cases}$

17) $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \begin{cases}u(x,0)=2\cos\frac{\pi x}{2}\\ u(0,t)=u(2,t)=0\end{cases}$

18) $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \begin{cases}u(x,0)=4\sin\frac{\pi x}{4}\\ u(0,t)=u(2,t)=0\end{cases}$

19) $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \begin{cases}u(x,0)=\begin{cases}x/2,\ [0,2]\\ (3-x)/2,\ (2,4]\end{cases}\\ u(0,t)=u(2,t)=0\end{cases}$

20) $\frac{\partial u}{\partial t}=16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \begin{cases}u(x,0)=2\cos\frac{3\pi x}{4}\\ u(0,t)=u(3,t)=0\end{cases}$

Пример оформления № 2.

Решить уравнение теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при заданных начальных и граничных условиях $\begin{cases} u(x,0) = \cos\frac{3\pi x}{2} \\ u(0,t) = u(2,t) = 0 \end{cases}$

Решение.

Общее решение уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ с начальными условиями $\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \end{cases}$ имеет вид:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(x)e^{-\lambda a^2 t}\sin\frac{\pi nx}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi nx}{l}.$$

Для выполнения начальных условий необходимо взять в качестве C_n коэффициент Фурье:

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx.$$

В данном случае $a = 4$. Найдем C_n:

$$C_n = \frac{2}{4}\int_0^4 \cos\frac{3\pi x}{2}\sin\frac{\pi nx}{4}dx = \left|\cos\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^4\left(\sin\left(\frac{3\pi x}{2}+\frac{\pi nx}{4}\right)+\sin\left(\frac{3\pi x}{2}-\frac{\pi nx}{4}\right)\right)dx = \frac{1}{4}\int_0^4\left(\sin\left(\frac{6\pi+\pi n}{4}\right)x+\sin\left(\frac{6\pi-\pi n}{4}\right)x\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{4}{6\pi+\pi n}\cos\left(\frac{6\pi+\pi n}{4}\right)x+\frac{4}{6\pi-\pi n}\cos\left(\frac{6\pi-\pi n}{4}\right)x\right)\Bigg|_0^4 =$$

$$= -\left(\frac{1}{6\pi+\pi n}\cos(6\pi+\pi n)+\frac{1}{6\pi-\pi n}\cos(6\pi-\pi n)-\frac{1}{6\pi+\pi n}\cos 0-\frac{1}{6\pi-\pi n}\cos 0\right) =$$

$$= -\left(\frac{1}{6\pi+\pi n}\cos(\pi n)+\frac{1}{6\pi-\pi n}\cos(\pi n)-\frac{1}{6\pi+\pi n}-\frac{1}{6\pi-\pi n}\right) =$$

$$= -\left(\frac{1}{6\pi+\pi n}(-1)^n+\frac{1}{6\pi-\pi n}(-1)^n-\frac{1}{6\pi+\pi n}-\frac{1}{6\pi-\pi n}\right) =$$

$$= -\left((-1)^n\frac{6\pi-\pi n+6\pi+\pi n}{36\pi^2-\pi^2 n^2}-\frac{6\pi-\pi n+6\pi+\pi n}{36\pi^2-\pi^2 n^2}\right) = -\left((-1)^n\frac{12}{36\pi-\pi n^2}-\frac{12}{36\pi-\pi n^2}\right) =$$

$$= -\frac{12}{36\pi-\pi n^2}\left((-1)^n-1\right).$$

Данное выражение будет равно 0 при четных значениях *n*. Найдем C_n для нечетных значений *n*, т.е. для $2n-1$ получим:

$$C_n = \frac{24}{36\pi-\pi(2n-1)^2}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{24}{36\pi-\pi(2n-1)^2}e^{-\left(\frac{\pi(2n-1)4}{2}\right)^2 t}\sin\frac{\pi nx}{2} = \frac{24}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{36-(2n-1)^2}e^{-(2\pi(2n-1))^2 t}\sin\frac{\pi nx}{2}.$$

Ответ: $u(x,t) = \frac{24}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{36-(2n-1)^2}e^{-(2\pi(2n-1))^2 t}\sin\frac{\pi nx}{2}.$

4.2. Численные методы решения дифференциальных уравнений

Решить дифференциальное уравнение методом Рунге-Кутта, методом Эйлера и аналитически при начальном условии y(0) = 1 на отрезке [0; 0,5] с шагом 0,1. Сравнить полученные результаты.

1) $y' = 2x + y$

2) $y' - 2y = x$

3) $y' - 3x + y = 0$

4) $y' = 4x - y$

5) $y' + y = 5x$

6) $y' = 2x + 3y$

7) $y' = x - 3y$

8) $y' + 2y = 5x$

9) $y' = -6x - y$

10) $y' + y = -3x$

11) $y' = -2x - y$

12) $y' + 2y = x$

13) $y' - 3y - x = 0$

14) $y' = 5x - 2y$

15) $y' + 3x + 3y = 0$

16) $y' = -4x - y$

17) $y' + 2y = 6x$

18) $y' - 3y - 4x = 0$

19) $y' = 5x - 3y$

20) $y' - y = 6x$

Пример оформления.

Решить дифференциальное уравнение $y' = x + y$ методом Рунге-Кутта, методом Эйлера и аналитически при начальном условии y(0) = 1 на отрезке [0; 0,5] с шагом 0,1. Сравнить полученные результаты.

Решение.

Для $i = 0$ вычислим коэффициенты k_i.

$$k_1^{(0)} = hf(x_0, y_0) = 0{,}1(x_0 + y_0) = 0{,}1(0+1) = 0{,}1;$$

$$k_2^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}\right) = 0{,}1(0{,}05 + 1{,}05) = 0{,}11;$$

$$k_3^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}\right) = 0{,}1(0{,}05 + 1{,}055) = 0{,}1105;$$

$$k_4^{(0)} = hf\left(x_0 + h; y_0 + k_3^{(0)}\right) = 0{,}1(0{,}1 + 1{,}1105) = 0{,}1211;$$

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)}) = \frac{1}{6}(0{,}1 + 0{,}22 + 0{,}221 + 0{,}1211) = 0{,}1104;$$

$$x_1 = x_0 + h = 0{,}1;$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0{,}1104 = 1{,}1104;$$

Последующие вычисления приводить не будем, а результаты представим в виде таблицы.

i	x_i	k		Δy_i	y_i
0	0	1	0,1000	0,1104	1
		2	0,1100		
		3	0,1105		
		4	0,1155		
1	0,1	1	0,1210	0,1325	1,1104
		2	0,1321		
		3	0,1326		
		4	0,1443		
2	0,2	1	0,1443	0,1569	1,2429
		2	0,1565		
		3	0,1571		
		4	0,1700		
3	0.3	1	0,1700	0,1840	1,3998
		2	0,1835		
		3	0,1842		

		4	0,1984		
4	0,4	1	0,1984	0,2138	1,5838
		2	0,2133		
		3	0,2140		
		4	0,2298		
5	0,5				1,7976

Решим этот же пример методом Эйлера.
Применяем формулу $y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$.

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \qquad f(x_0, y_0) = x_0 + y_0 = 1;$$
$$hf(x_0, y_0) = h(x_0 + y_0) = 0{,}1;$$
$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0{,}1 = 1{,}1.$$

$$x_1 = 0{,}1 \quad y_0 = 1{,}1 \qquad f(x_1, y_1) = x_1 + y_1 = 1{,}2;$$
$$hf(x_1, y_1) = h(x_1 + y_1) = 0{,}12;$$
$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1{,}1 + 0{,}12 = 1{,}22.$$

Производя аналогичные вычисления далее, получаем таблицу значений:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_i	1	1,1	1,22	1,362	1,528	1,721

Применим теперь уточненный метод Эйлера.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_i	1	1,1	1,243	1,400	1,585	1,799

Для сравнения точности приведенных методов численного решение данного уравнения решим его аналитически и найдем точные значения функции y на заданном отрезке.

Уравнение $y' - y = x$ является линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка. Решим соответствующее ему однородное уравнение.

$$y' - y = 0; \qquad y' = y; \qquad \frac{dy}{dx} = y; \qquad \frac{dy}{y} = dx; \qquad \int \frac{dy}{y} = \int dx;$$
$$\ln|y| = x + \ln C; \qquad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = x; \qquad y = Ce^x;$$

Решение неоднородного уравнения имеет вид $y = C(x)e^x$.

$$y' = C'(x)e^x + C(x)e^x;$$
$$C'(x)e^x + C(x)e^x = x + C(x)e^x; \qquad C'(x)e^x = x; \qquad C'(x) = xe^{-x};$$
$$C(x) = \int xe^{-x}dx = \begin{vmatrix} u = x \\ dv = e^{-x}dx \\ du = dx \\ v = -e^{-x} \end{vmatrix} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C;$$

Общее решение: $y = Ce^x - x - 1;$

С учетом начального условия: $1 = C - 0 - 1;$ $C = 2;$

Частное решение: $y = 2e^x - x - 1;$

Для сравнения полученных результатов составим таблицу.

i	x_i	y_i			
		Метод Эйлера	Уточненный метод Эйлера	Метод Рунге - Кутта	Точное значение
0	0	1	1	1	1
1	0,1	1,1	1,1	1,1104	1,1103
2	0,2	1,22	1,243	1,2429	1,2428
3	0,3	1,362	1,4	1,3998	1,3997
4	0,4	1,528	1,585	1,5838	1,5837
5	0,5	1,721	1,799	1,7976	1,7975

Как видно из полученных результатов метод Рунге – Кутта дает наиболее точный ответ. Точность достигает 0,0001. Кроме того, следует обратить внимание на то, ошибка (расхождение между точным и приближенным значениями) увеличивается с каждым шагом вычислений. Это обусловлено тем, что во – первых полученное приближенное значение округляется на каждом шаге, а во – вторых – тем, что в качестве основы вычисления принимается значение, полученное на предыдущем шаге, т.е. приближенное значение. Таким образом, происходит накопление ошибки.

Это хорошо видно из таблицы. С каждым новым шагом приближенное значение все более отличается от точного.