ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.Б.06 Математика и математическая статистика

Направление подготовки 35.03.07 Технология производства и переработки сельскохозяйственной продукции

Профиль Технология производства и переработки продукции животноводства

Квалификация выпускника бакалавр

Форма обучения очная

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.1. Лекция № 1 (2 часа)

Тема «Линия на плоскости»

1.1.1. Вопросы лекции:

1. Способы задания прямой.

2.Взаимное расположение двух прямых.

3. Кривые второго порядка на плоскости.

1.1.2. Краткое содержание вопросов

1. Способы задания прямой.

Понятие линии на плоскости.

Любое уравнение первой степени относительно неизвестных Х и У является уравнением прямой на плоскости: $Ax+By+C=0$

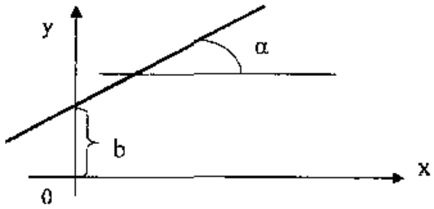
Мы записали **общее** уравнение прямой.

Способы задания прямой.

Это уравнение может быть записано в некоторых специальных видах:

1) Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$y=kx+b$, где $k=tg\alpha$, b - отрезок, отсекаемый графиком на ОУ



2) уравнение прямой проходящей через две заданные точки

$(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

3) Уравнение прямой проходящей через заданную точку в заданном направлении:

точка $M_0(x_0;y_0)$ принадлежит прямой l, $\vec{a}=(m;n)$ - направляющий вектор прямой, т.е. вектор, лежащий на данной прямой или на параллельной ей прямой

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$$ **каноническое уравнение прямой**

2. Взаимное расположение двух прямых на плоскости.

Признаком параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов $k_1=k_2$

Признаком перпендикулярности двух прямых является выполнение

соотношения: $k_1k_2=-1$ *или* $k_2=\frac{1}{k_1}$.

Пусть уравнения прямых записаны в общем виде.

Теорема. Пусть

$L_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ и $L_2: A_2x+B_2y+C_2=0$

– общие уравнения двух прямых на координатной плоскости Оху. Тогда

1) если $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$, то прямые L_1 и L_2 совпадают;

2) если $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$, то прямые L_1 и L_2 параллельные;

3) если $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$, то прямые пересекаются.

Заметим, что если прямые пересекаются, то для нахождения координат их точки пересечения достаточно решить систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2 \end{cases}.$$

Следствие. Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ – определитель системы . Если $\Delta \neq 0$, то прямые пересекаются в одной точке и система имеет единственное решение

Если $\Delta = 0$, то прямые или параллельны и тогда система не имеет решений, или прямые совпадают и тогда система имеет бесконечно много решений.

Итак, в декартовых координатах каждая прямая на плоскости определяется уравнением первой степени, и каждое уравнение первой степени определяет прямую на плоскости.

Расстояние от точки до прямой на плоскости.

Пусть заданы прямая L уравнением $Ax+By+C=0$ и точка $M_0(x_0; y_0)$. Требуется найти расстояние от точки M_0 до прямой L.

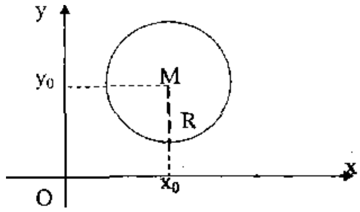
$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

3. Кривые второго порядка на плоскости.

Кривые второго порядка - это линии на плоскости, координаты точек которых связаны уравнениями второй степени относительно x и y в декартовой системе координат. Рассмотрим следующие виды кривых второго порядка: окружность, эллипс, гипербола и парабола.

Окружность.

Окружность - это совокупность точек на плоскости, равноудаленных от одной фиксированной точки (центра). Расстояние от точки, лежащей на окружности, до центра называется радиусом окружности.

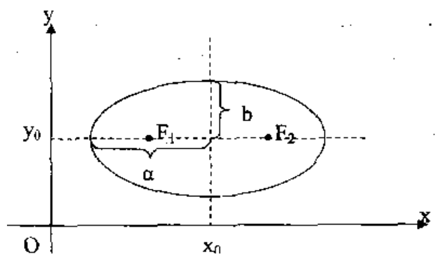


Каноническое уравнение окружности имеет вид:
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2, \quad где \quad M(x_0, y_0)$ -центр окружности, R –радиус.

Эллипс.

Эллипсом называется геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина, большая, чем расстояние между фокусами.

Постоянную сумму расстояний произвольной точки эллипса до фокусов примято обозначать через 2a. Фокусы эллипса обозначают буквами $F_1 \; и \; F_2$, расстояние между ними - через 2c. По определению эллипса 2a > 2c или a > c.



Данная фигура обладает двумя осями симметрии и центром симметрии.

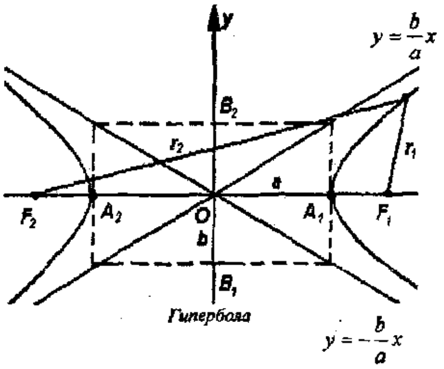
Если фокусы ($F_1 \; и \; F_2$) расположенные на прямой, параллельной оси OX, то каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Здесь точка $A(x_0; y_0)$ - центр эллипса, a и b - большая и малая полуоси эллипса. Фокусы эллипса F_1 и F_2 расположены в точках, удаленных на расстоянии $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ от центра эллипса. Отношение $\frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса и обозначается ε.

Гипербола.

Гиперболой называется геометрическое место точек, для которых разность расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина; указанная разность берется по абсолютному значению и обозначается обычно через 2a. Фокусы гиперболы обозначают буквами F_1 и F_2 расстояние между ними - через 2c. По определению гиперболы 2a < 2c или a < c.



Гипербола

Данная фигура также обладает двумя осями симметрии и центром. Если фокусы F_1 и F_2 расположены на оси Ox, то ее каноническое уравнение имеет вид:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Здесь точка $A(x_0; y_0)$ - центр гиперболы, a и b - действительная и мнимая полуось.

Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы.

Парабола.

Параболой называется геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, называемой директрисой.

Фокус параболы обозначается буквой F, расстояние от фокуса до директрисы - буквой p. Число p называется параметром параболы.

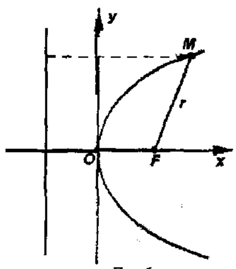
Фигура обладает осью симметрии. Если директриса параболы перпендикулярна Ox (Ox - ось симметрии), то уравнение параболы имеет вид:

$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$, где p - расстояние от фокуса до директрисы, точка (x_0; y_0) - вершина параболы.

Уравнение директрисы: $x = x_0 - \frac{p}{2}$.

Фокус в точке $F\left(x_0 + \frac{p}{2}; y_0\right)$.

Если Oy - ось симметрии, то уравнение параболы имеет вид: $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$. Уравнение директрисы: $y = y_0 - \frac{p}{2}$. Фокус в точке $F\left(x_0; y_0 + \frac{p}{2}\right)$.



Парабола

1.2.Лекция № 2 (2 часа)

Тема «Дифференциальное исчисление ФОП»

1.2.1. Вопросы лекции:

1. Основные понятия. Способы задания функции.

2.Предел функции в точке. Теоремы о пределах.

3. Бесконечно большие функции и их свойства.

4. Бесконечно малые функции и их свойства.

5. Непрерывность функции в точке. Точки разрыва.

6. Понятие производной, ее геометрический и механический смысл.

7. Основные правила дифференцирования.

8. Основные формулы дифференцирования.

1.2.2. Краткое содержание вопросов

1. Основные понятия функции. Способы задания функции.

Величины в математике делятся на постоянные и переменные.

Постоянной называется величина, которая в условиях данного эксперимента сохраняет одно и то же значение.

Примерами таких величин могут быть: $t°$ кипения воды при постоянном давлении; длина R одной и той же окружности.

Некоторые постоянные величины сохраняют свое значение при любых условиях, то есть являются **абсолютно постоянными**. Например, сумма внутренних углов в треугольнике или число секунд в минуте.

Переменной называется величина, которая в условиях данного эксперимента может принимать различные значения.

В практических задачах часто имеют дело с переменными величинами, которые связаны между собой так, что значение одной величины однозначно определяет значение другой. Например, $V_{\text{шара}}=\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Рассмотрим две переменные величины x и y и пусть y зависит от x.

Зависимость y от x, при которой каждому значению переменной x соответствует единственное, вполне определенное, значение переменной y, называется **функциональной.**

Правило или закон, по которому осуществляется функциональная зависимость y от x, называется **функцией.**

Обозначение*:* $y=f(x)$ (y есть функция от x), где x - независимая переменная или аргумент; y - зависимая от x переменная.

В примере с объемом шара объем есть функция радиуса: $V=f(R)$.

Совокупность всех значений аргумента x, при которых функциональное выражение имеет смысл, называется **областью определения функции.** Обозначение: $D(y)$ или Df

Способы задания функции.

Имеется несколько способов задания функций, но наиболее часто используются следующие: 1) аналитический; 2) табличный; 3) графический.

Графиком функции $y=f(x)$ называется линия на плоскости *XOY*, состоящая из точек, у которых абсцисса есть значение аргумента, а ордината соответствует значению функции.

Основные свойства функции.

Монотонность функции.

Возрастающая функция (в некотором промежутке) - функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции.

Убывающая функция (в некотором промежутке) - функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.

Четность (нечетность) функции.

Четная функция - функция, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для любого х из области определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Нечетная функция - функция, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для любого х из области определения справедливо равенство $f(-x) = - f(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Ограниченная и неограниченная функции.

Функция называется *ограниченной*, если существует такое положительное число M, что $|f(x)| \le M$ для всех значений x . Если такого числа не существует, то функция - *неограниченная*.

Периодичность функции.

Функция $f(x)$ - периодическая, если существует такое отличное от нуля число T, что для любого x из области определения функции имеет место: $f(x+T) = f(x)$. Такое наименьшее число называется периодом функции. Все тригонометрические функции являются периодическими.

Неэлементарные функции.

Функции, полученные из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических действий, называются **элементарными**.

Элементарные функции - класс функций, включающий в себя многочлены, рациональные функции, показательные, степенные, логарифмические и тригонометрические функции, а также функции, получаемые из перечисленных с помощью четырёх арифметический действий (сложение, вычитание, умножение, деление) и суперпозиции (образования сложной функции), применённых конечное число раз, эти действия называются элементарными алгебраическими. Элементарные функции могут быть простыми и сложными. Понятие сложной функции рассмотрим далее.

Действия: логарифмирование, возведение в степень с иррациональным показателем, вычисление синусов, косинусов, тангенсов, котангенсов, секансов, косекансов, арксинусов, арккосинусов, арктангенсов, арккотангенсов, арксекансов, арккосекансов, - называются трансцендентными элементарными действиями.

Если функцию можно задать формулой, содержащей элементарные действия, в состав которых входят алгебраические и трансцендентные действия, то её называют трансцендентной функцией (в переводе - "превосходящей", а именно превосходящей силу алгебраических операций).

Другое определение трансцендентной функции: функция y=f(x) называется трансцендентной, если она не удовлетворяет никакому алгебраическому уравнению вида P(x,y)=0, где P(x,y) - многочлен относительно переменных x и y.

Трансцендентная функция может быть простейшей трансцендентной функцией, график которой известен, например: y = sin x, y = lnX, y = arccos x

Таким образом, к простейшим трансцендентным функциям относятся:

- Показательная функция
- Логарифмическая функция
- Степенная функция с иррациональным показателем
- Тригонометрическая функция
- Обратнотригонометрическая функция

Если функцию можно задать формулой, не содержащей трансцендентные действия, её называют алгебраической функцией.

К неэлементарным функциям относят функции, содержащие неэлементарные действия, к таким действиям относятся действия взятия целой части от числа, дробной части от числа, модуля числа и другие

2. Предел функции в точке. Теоремы о пределах.

Рассмотрим функцию $y=f(x)$. Придавая переменной x различные значения, получим $x_1; x_2; x_3; \dots x_n \dots$ - последовательность значений аргумента. Ей соответствует: $f(x_1); f(x_2); f(x_3); \dots; f(x_n); \dots$ - последовательность соответствующих значений функции.

Определение. Если из того, что любая последовательность значений аргумента, взятая из области определения функции и ε-окрестности точки a ($x_n \ne a$) сходится к a ($x \to a$) следует, что последовательность соответствующих значений функции сходится к числу A $\left(f(x) \to A\right)$, то число A называется пределом функции $f(x)$ в точке a.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Теоремы о пределах.

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ существуют и конечны, то

<u>Теорема 1.</u> $\lim\limits_{x \to a} C = C$, где C = const.

<u>Теорема 2.</u> $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)$

<u>Теорема 3.</u> $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$

<u>Следствие.</u> $\lim\limits_{x\to a}C\cdot f(x)=C\cdot\lim\limits_{x\to a}f(x)$

<u>Теорема 4.</u> $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$

<u>Теорема 5.</u> $\lim\limits_{x\to a}[f(x)^n]=\left[\lim\limits_{x\to a}f(x)\right]^n$

<u>Теорема 6.</u> Если $g(x)\le f(x)\le u(x)$ вблизи точки $x=a$ и $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}u(x)=A$, то и $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$.

Нарушение ограничений, накладываемых на функции при вычислении их пределов, приводит к **неопределенностям**.

Например, зная лишь, что $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0}q(x)=\infty$ нельзя сказать заранее, чему равен $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$. В таком случае говорят, что имеет место неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Предел функции на бесконечности.

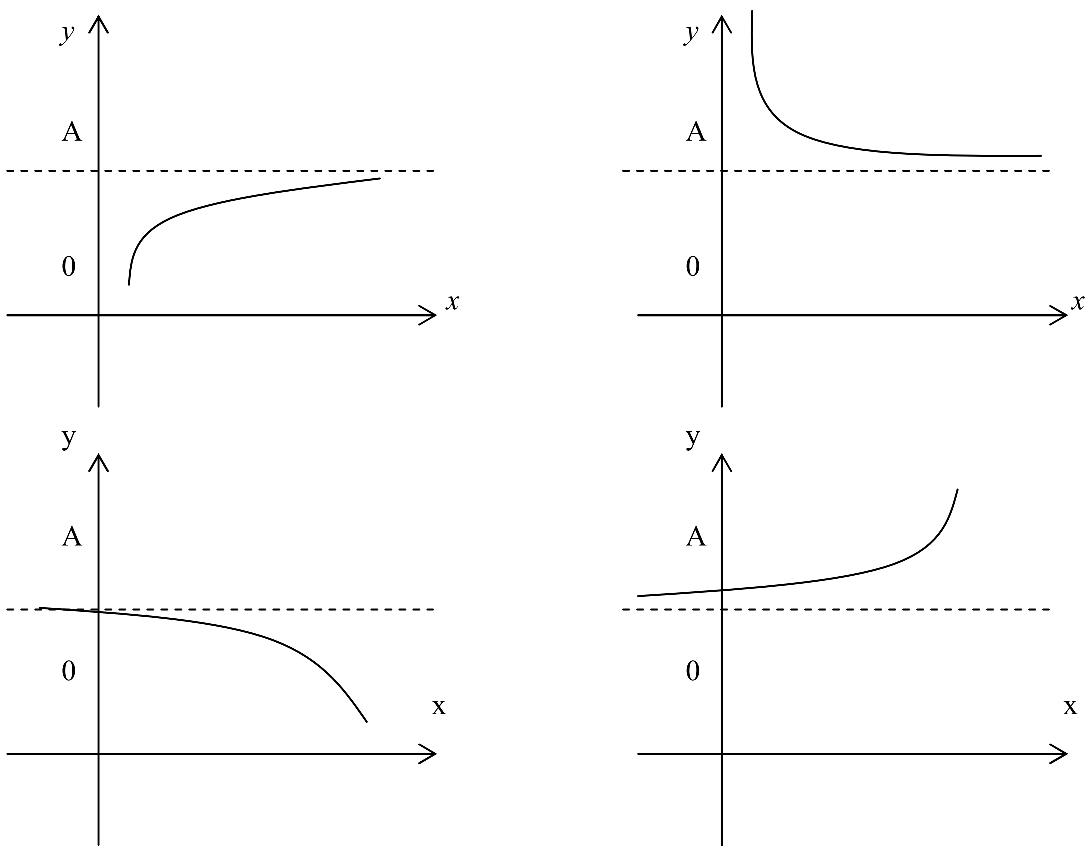
<u>Определение.</u> Число А называется **пределом** функции f(x) при $x\to\infty$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $M>0$, что для всех x, $|x|>M$ выполняется неравенство

$$|A-f(x)|<\varepsilon$$

При этом предполагается, что функция f(x) определена в окрестности бесконечности.

Записывают: $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

Графически можно представить:



Аналогично можно определить пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ для любого x>M и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ для любого x<M.

3 –4 Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства.

Определение. Функция f(x) называется **бесконечно малой** при $x \to a$, где a может быть числом или одной из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Бесконечно малой функция может быть только если указать к какому числу стремится аргумент x. При различных значениях a функция может быть бесконечно малой или нет.

Пример. Функция f(x) = x^n является бесконечно малой при $x \to 0$ и не является бесконечно малой при $x \to 1$, т.к. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$.

Теорема. *Для того, чтобы функция f(x) при $x \to a$ имела предел, равный A, необходимо и достаточно, чтобы вблизи точки x = a выполнялось условие*

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$ ($\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$).

Свойства бесконечно малых функций:

1) Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ тоже бесконечно малая функция при $x \to a$.

2) Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ тоже бесконечно малая функция при $x \to a$.

3) Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки $x = a$ является бесконечно малой функцией при $x \to a$.

4) Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю есть величина бесконечно малая.

Определение. Предел функции f(x) при $x \to a$, где $a-$ число, **равен бесконечности**, если для любого числа $M > 0$ существует такое число $\Delta > 0$, что неравенство $|f(x)| > M$

выполняется при всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \Delta$

Записывается: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

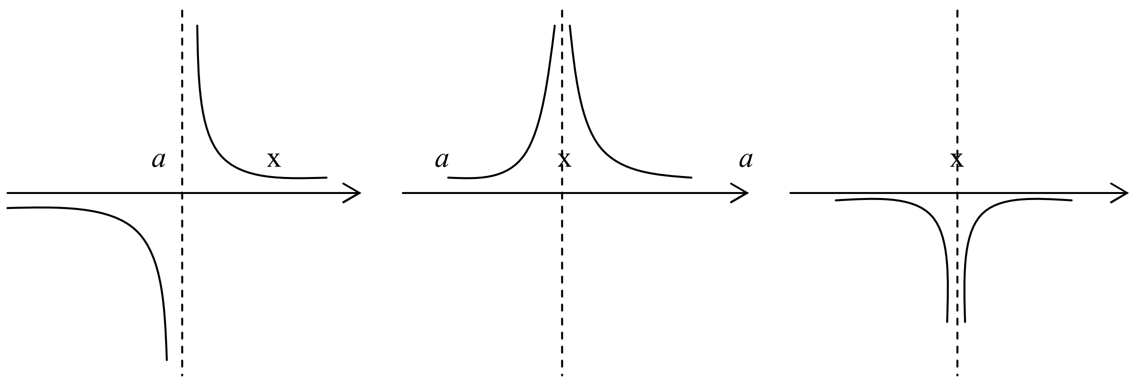
Собственно, если в приведенном выше определении заменить условие $|f(x)| > M$ на $f(x) > M$, то получим:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty,$$

а если заменить на $f(x) < M$, то:

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

Графически приведенные выше случаи можно проиллюстрировать следующим образом:



Определение. Функция называется **бесконечно большой** при $x \to a$, где a – число или одна из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, где A – число или одна из величин ∞, +∞ или -∞.

Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций осуществляется в соответствии со следующей теоремой.

Теорема. Если $f(x) \to 0$ при $x \to a$ (если $x \to \infty$) и не обращается в ноль, то

$$y = \frac{1}{f(x)} \to \infty$$

Отсюда следует:

а) Произведение постоянной величины на бесконечно малую есть величина бесконечно малая.

б) Произведение переменной величины, стремящейся к пределу, на бесконечно малую есть величина бесконечно малая.

в) Произведение двух бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.

5. Отношение двух бесконечно малых величин не обязательно есть величина бесконечно малая.

Отношение двух бесконечно малых величин может быть величиной конечной, бесконечно малой и даже бесконечно большой величиной.

Об отношении двух бесконечно малых величин иногда говорят, что оно представляет собой "неопределенность" вида $\frac{0}{0}$.

Вычисление предела отношения двух бесконечно малых часто называется также раскрытием "неопределенности" вида $\frac{0}{0}$.

Бесконечно большие функции, их свойства.

Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой величиной при $x \to a$, если для каждого положительного сколь угодно большого числа N найдется соответствующее сколь угодно малое положительное число

$y = f(x)$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, будет выполняться неравенство $|f(x)| > N$: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой величиной при $x \to \infty$, если для каждого положительного сколь угодно большого числа N найдется соответствующее сколь угодно большое число K(N) такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > K$, будет выполняться неравенство $|f(x)| > N$: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Сумма бесконечно больших величин есть величина бесконечно большая:

$$\lim_{x \to a} (\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) = \infty.$$

Произведение бесконечно больших величин есть величина бесконечно большая:

$$\lim_{x \to a} (\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) = \infty.$$

Произведение бесконечно большой величины на константу *C*, или на функцию, имеющую конечный предел $\lim\limits_{x \to a} f_3(x) = A$, есть величина бесконечно большая:

$$\lim_{x \to a} C\varphi_1(x) = \infty, \quad \lim_{x \to a} \varphi_1(x) \cdot f_3(x) = \infty.$$

Связь бесконечно малой и бесконечно большой величины

Величина, обратная бесконечно малой величине, есть величина бесконечно большая, и наоборот, величина, обратная бесконечно большой величине, есть величина бесконечно малая.

Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \infty$, тогда $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \infty$ и $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{\varphi(x)} = 0$.

Символически можно записать:

$\frac{1}{0} = \infty$ и $\frac{1}{\infty} = 0$

Сравнение бесконечно малых функций.

Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$. Будем обозначать эти функции α, β и γ соответственно. Эти бесконечно малые функции можно сравнивать по быстроте их убывания, т.е. по быстроте их стремления к нулю.

Например, функция $f(x) = x^{10}$ стремится к нулю быстрее, чем функция $f(x) = x$.

<u>**Определение.**</u> Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = 0$, то функция α называется **бесконечно малой более высокого порядка**, чем функция β.

<u>**Определение.**</u> Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = A,\quad A \neq 0,\quad A = const$, то α и β называются **бесконечно малыми одного порядка**.

<u>**Определение.**</u> Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = 1,$ то функции α и β называются **эквивалентными бесконечно малыми**. Записывают $\alpha \sim \beta$.

<u>Пример.</u> Сравним бесконечно малые при $x\to 0$ функции $f(x) = x^{10}$ и $f(x) = x$.

$$\lim_{x\to a}\frac{x^{10}}{x} = \lim_{x\to a} x^9 = 0$$

т.е. функция $f(x) = x^{10}$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $f(x) = x$.

<u>**Определение.**</u> Бесконечно малая функция α называется **бесконечно малой порядка k** относительно бесконечно малой функции β, если предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta^k}$ конечен и отличен от нуля.

Однако следует отметить, что не все бесконечно малые функции можно сравнивать между собой. Например, если отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ не имеет предела, то функции несравнимы.

<u>Пример.</u> Если $\alpha = x\sin x,\quad \beta = x$, то при $x\to 0$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x^2} = 1$, т.е. функция α - бесконечно малая порядка 2 относительно функции β.

<u>Пример.</u> Если $\alpha = x\sin\frac{1}{x},\quad \beta = x$, то при $x\to 0$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}$ не существует, т.е. функция α и β несравнимы.

Свойства эквивалентных бесконечно малых.

1) $\alpha \sim \alpha$, $\left(\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\alpha} = 1\right)$

2) Если $\alpha \sim \beta$ и $\beta \sim \gamma$, то $\alpha \sim \gamma$, $\left(\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\gamma} = \lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\gamma}\right) = 1\cdot 1 = 1\right)$

3) Если $\alpha \sim \beta$, то $\beta \sim \alpha$, $\left(\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha} = \lim\limits_{x\to a}\frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}} = 1\right)$

4) Если $\alpha \sim \alpha_1$ и $\beta \sim \beta_1$ и $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = k$, то и $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1} = k$ или $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1}$.

<u>Следствие:</u> а) если $\alpha \sim \alpha_1$ и $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = k$, то и $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta}$

б) если $\beta \sim \beta_1$ и $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = k$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta_1}$

Свойство 4 особенно важно на практике, т.к. оно фактически означает, что предел отношения бесконечно малых не меняется при замене их на эквивалентные бесконечно малые. Этот факт дает возможность при нахождении пределов заменять бесконечно малые на эквивалентные им функции, что может сильно упростить вычисление пределов.

5. Замечательные пределы.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ - первый замечательный предел.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ или $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ - второй замечательный предел.

Правила раскрытия неопределенностей

$\left(\dfrac{0}{0}\right)$	$\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$	$(\infty-\infty)$	$(0\cdot\infty)$	(1^∞)
1. Разложение числителя и знаменателя на множители и сокращение дроби 2. Домножение числителя и знаменателя на сопряженное выражение радикалу 3. Применение таблицы эквивалентных бесконечно малых	Деление на степень с наибольшим показателем	Домножение числителя и знаменателя на сопряженное выражение	Приведение к неопределен-ности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$	Применение второго замечательного предела и свойств степеней

Элементарными приемами раскрытия неопределенностей являются:

1) сокращение на множитель, создающий неопределенность;

2) деление числителя и знаменателя на старшую степень аргумента (для отношения многочленов при $x\to\infty$);

3) применение эквивалентных бесконечно малых и бесконечно больших;

4) применение первого замечательного предела и второго замечательного предела $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

Кроме того, при вычислении пределов полезно запомнить следующее:

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=0$, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=c$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$, т.е. $\left(\dfrac{c}{\infty}\right)=0$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\infty$, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=c$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$, т.е. $\left(\dfrac{c}{0}\right)=\infty$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=0$, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=c$, т.е. $\left(\dfrac{0}{c}\right)=0$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\infty$, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=c$, т.е. $\left(\dfrac{\infty}{c}\right)=\infty$

Может также понадобится таблица бесконечно малых в окрестности x_0 функций, эквивалентных данным.

$$\left.\begin{array}{l} tg\,mx \sim mx \\ \sin mx \sim mx \\ \sqrt[3]{x+1}-1 \sim \frac{1}{3}x \\ arctg\, mx \sim mx \\ \sqrt{x+1}-1 \sim \frac{x}{2} \\ 1-\cos^2 x \sim \frac{3}{2}\sin^2 x \\ \arcsin mx \sim mx \\ 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2} \end{array}\right\} \text{при } x \to 0$$

5. Непрерывность функции в точке. Точки разрыва.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Можно дать еще одно определение непрерывности функции, опираясь на понятия приращения аргумента и функции.

Определение. Пусть переменная величина x в некоторый начальный момент равна x_0, в другой (конечный) момент равна x_1; тогда разность $\Delta x = x_1 - x_0$ называется приращением переменной x.

Определение. Пусть исходное (начальное) значение функции равно $y_0 = f(x_0)$, а новое (конечное) значение функции равно $y_1 = f(x_1) = f(x_0 + \Delta x)$; тогда разность $\Delta y = y_1 - y_0 = f(x + \Delta x) - f(x_0)$ называется приращением функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Геометрический смысл Δx и Δy: каждому изменению величины x, соответствует изменение величины y, т.е. Δy зависит от Δx.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции; т.е. существует $\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0 \Leftrightarrow$ предел функции при $x \to x_0$ равен значению функции в этой точке: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Теорема. Если $y = f(x)$ - элементарная функция, определённая в некоторой окрестности точки x_0; то она непрерывна в точке x_0.

Определение. Функция $y = f(x)$, непрерывная в каждой точке заданного интервала, называется непрерывной на всём интервале.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она имеет односторонние пределы, равные между собой и равные в свою очередь значению функции в точке x_0.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной, если она непрерывна на своей области определения.

Заметим: все элементарные функции непрерывны на своих областях определения.

Точки разрыва. Асимптоты графика функции.

Определение 1. Точка, в которой не выполняется условие непрерывности, называется точкой разрыва.

Определение 2. Если функция $y = f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, в точке x_0 не определена или её предел в точке x_0 не равен значению функции в этой точке; то говорят, что функция имеет разрыв в точке x_0, а точку x_0 называют точкой разрыва.

Определение. Точка x_0 называется точкой разрыва 1-го рода, если функция имеет конечные левосторонний $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ и правосторонний пределы $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$, но $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$.

Заметим: $\left| f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0) \right|$ - называется скачком функции в точке x_0.

Определение. Если хотя бы один из односторонних пределов функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен бесконечности или вообще не существует, то x_0 - точка разрыва второго рода.

Точки разрыва

1 рода

2 рода

Устранимый разрыв $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x) \neq f(x_0)$ оба односторонних предела существуют, конечны и равны между собой, но не равны значению функции в этой точке (рис.1)

Неустранимый разрыв (скачок): $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ односторонние пределы конечны, но не равны между собой (рис.2)

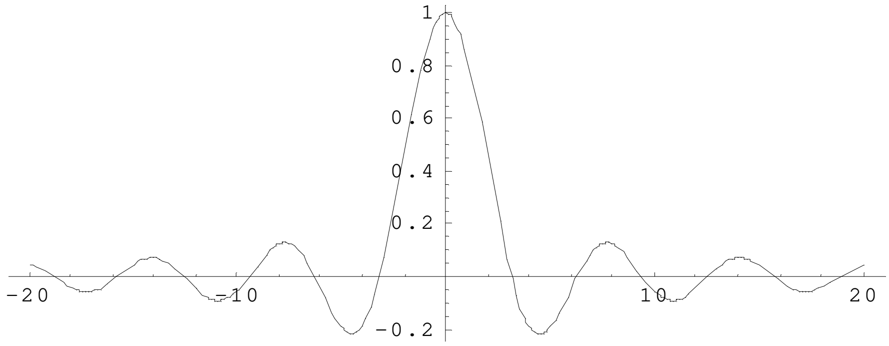
Хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен ∞ (рис3.)

Пример. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

Функция не определена в точке $x = 0$, но имеет в ней конечный предел $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$, т.е. в точке $x = 0$ функция имеет точку разрыва 1 – го рода. Это – устранимая точка разрыва, т.к. если доопределить функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & при \quad x \neq 0 \\ 1, & при \quad x = 0 \end{cases}$$

График этой функции:



Непрерывность функции на интервале и на отрезке.

Определение. Функция f(x) называется **непрерывной на интервале (отрезке)**, если она непрерывна в любой точке интервала (отрезка).

При этом не требуется непрерывность функции на концах отрезка или интервала, необходима только односторонняя непрерывность на концах отрезка или интервала.

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Свойство 1: (Первая теорема Вейерштрасса (Вейерштрасс Карл (1815-1897)- немецкий математик)). Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке, т.е. на отрезке [a, b] выполняется условие $-M \le f(x) \le M$.

Доказательство этого свойства основано на том, что функция, непрерывная в точке x_0, ограничена в некоторой ее окрестности, а если разбивать отрезок [a, b] на бесконечное количество отрезков, которые “стягиваются” к точке x_0, то образуется некоторая окрестность точки x_0.

Свойство 2: Функция, непрерывная на отрезке [a, b], принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.

Т.е. существуют такие значения x_1 и x_2, что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$, причем

$$m \le f(x) \le M$$

Отметим эти наибольшие и наименьшие значения функция может принимать на отрезке и несколько раз (например – f(x) = sinx).

Разность между наибольшим и наименьшим значением функции на отрезке называется **колебанием** функции на отрезке.

Свойство 3: (Вторая теорема Больцано – Коши). Функция, непрерывная на отрезке [a, b], принимает на этом отрезке все значения между двумя произвольными величинами.

Свойство 4: Если функция f(x) непрерывна в точке $x = x_0$, то существует некоторая окрестность точки x_0, в которой функция сохраняет знак.

Свойство 5: (Первая теорема Больцано (1781-1848) – Коши). Если функция f(x)- непрерывная на отрезке [a, b] и имеет на концах отрезка значения противоположных знаков, то существует такая точка внутри этого отрезка, где f(x) = 0.

Асимптоты графика функции

Назовём асимптотами прямые линии, к которым неограниченно приближается график функции, когда точка графика неограниченно удаляется от начала координат. В зависимости от поведения аргумента при этом, различаются два вида асимптот: вертикальные и наклонные.

Определение. Вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется вертикальная прямая $x = a$, если $f(x) \to +\infty$ или $f(x) \to -\infty$ при каком-либо из условий: $x \to a+0$, $x \to a-0$, $x \to a$. Заметим, что мы при этом не требуем, чтобы точка a принадлежала области определения функции $f(x)$, однако она должна быть определена по крайней мере в какой-либо из односторонних окрестностей этой точки: $(a-\delta;\, a)$ или $(a;\, a+\delta)$, где $\delta > 0$.

Итак, для нахождения вертикальных асимптот графика данной функции нужно исследовать точки разрыва функции и точки, лежащие на границах области определения функции, и выяснить, при приближении аргумента к каким из этих точек значения функции стремятся к бесконечности.

Определение. Наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ называется прямая $y = kx + b$, если выполнены два условия:

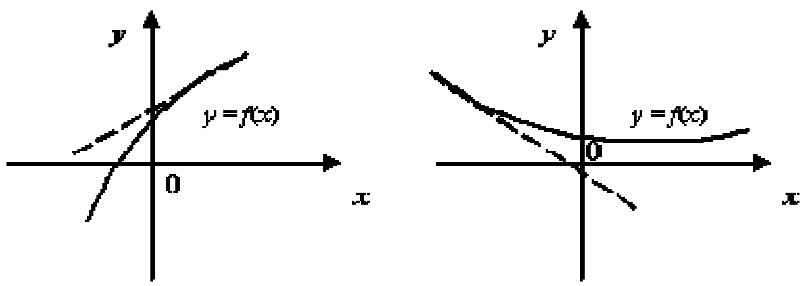
1) некоторый луч $(a;\, +\infty)$ целиком содержится в $D(f)$;

2) расстояние по вертикали между графиком и прямой стремится к 0 при $x \to +\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[f(x) - (kx + b)\right] = 0$

Определение. Наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$ называется прямая $y = kx + b$, если

1) некоторый луч $(-\infty; a)$ целиком содержится в $D(f)$;

2) расстояние по вертикали между графиком и прямой стремится к 0 при $x \to -\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty}\left[f(x) - (kx + b)\right] = 0$.



Графики функций, имеющие наклонные асимптоты при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$

В случае если наклонная асимптота расположена горизонтально, то есть при $k = 0$, она называется горизонтальной асимптотой. Таким образом, горизонтальная асимптота - частный случай наклонной асимптоты; прямая $y = c = const$ является горизонтальной асимптотой графика $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$, если $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = c$ или $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = c$ соответственно.

6. Понятие производной, ее геометрический и механический смыслы.

Рассмотрим в прямоугольной декартовой системе координат график непрерывной функции $y=f(x)$ и любую точку $M_0(x_0;f(x_0))$, принадлежащую графику.

Придадим аргументу x в точке x_0 произвольное приращение $\Delta x \neq 0$. На графике получим точку $M(x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x))$. Через точки M_0 и M проведем секущую, в точке M_0 проведем касательную к графику функции.

Рассмотрим прямоугольный треугольник M_0NM:

Угловой коэффициент секущей M_0M $k_{сек} = tg\alpha = \dfrac{NM}{M_0N} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Определение. Касательной к кривой в точке M_0 называется предельное положение секущей M_0M, когда точка M, двигаясь по кривой стремится совпасть с точкой M_0

Угловой коэффициент секущей ($k_{сек}$) будет стремиться к угловому коэффициенту касательной $M \to M_0, \quad \alpha \to \varphi, \quad tg\alpha \to tg\varphi \qquad tg\varphi = \lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\alpha$, т.е. $k_{кас} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k_{сек}$.

Тогда $\quad k_{кас} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k_{сек} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, если этот предел существует и конечен.

Задача о мгновенной скорости.

Пусть материальная точка движется по закону $S=S(t)$, где S – пройденный путь, t – время. Найдем скорость движения в момент времени t_0 (мгновенная скорость).

Зафиксируем момент времени t_0, придадим аргументу t в точке t_0 произвольное приращение $\Delta t \neq 0$. Функция $S=S(t)$ получит приращение $\Delta S=S(t_0+\Delta t)-S(t_0)$. За промежуток времени Δt средняя скорость точки будет $V_{ср} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$. Устремим Δt к нулю. Чем меньше Δt, тем меньше средняя скорость отличается от скорости в момент времени t_0. Поэтому под скоростью точки в момент времени t_0 (мгновенная скорость) понимается предел средней скорости за промежуток от t_0 до $t_0+\Delta t$, когда $\Delta t\to 0$, т.е. $V=\lim\limits_{\Delta t\to 0}V_{cp}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$.

В первой и во второй задачах, а также во многих других, мы приходим к необходимости вычислять пределы определенного вида, а именно $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Регулярное использование этого предела повлекло за собой необходимость введения нового понятия – понятие производной.

<u>Определение.</u> Производной функции *f(x)* в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Геометрический и механический смыслы производной.

Уравнение касательной к кривой: $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

Уравнение нормали к кривой: $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

Фактически производная функции показывает как бы скорость изменения функции, как изменяется функция при изменении переменной.

Физический смысл производной функции f(t), где t- время, а f(t)- закон движения (изменения координат) – мгновенная скорость движения.

7 - 8 Правила и формулы дифференцирования.

Правила дифференцирования

1) $C'=0$;

2) $y=x,\ y'=1$;

3) $(u\pm v)'=u'\pm v'$;

4) $(u\cdot v)'=u'v+u\cdot v'$;

5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$;

где $u=u(x), v=v(x)$ - дифференцируемые на множестве X функции .

Заметим: *а)* $(C\cdot u)'=C\cdot u'$; *б)* $\left(\dfrac{u}{c}\right)'=\dfrac{u'}{c}$.

Производные основных элементарных функций

1. $(x^{\alpha})'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$

2. $(a^{x})'=a^{x}\cdot\ln a$

$(e^x)'=e^x$

3. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

4. $(\sin x)'=\cos x$

$(\cos x)'=-\sin x$

$(tg\ x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$(ctg\ x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

5. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(arc\cos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(arctg\ x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

$(arcctg\ x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

1.3.Лекция № 3 (2 часа)

Тема «Основные понятия функции двух переменных.»

1.3.1. Вопросы лекции:

1 ОДЗ функции двух переменных и ее геометрическое изображение.

2. Частные приращения.

3. Предел и непрерывность функции двух переменных.

4. Частные производные первого и второго порядка. Теорема Шварца.

5. Понятие экстремума.

6. Необходимое и достаточное условия экстремума.

1.2. Краткое содержание вопросов

1. ОДЗ функции двух переменных и ее геометрическое изображение.

При рассмотрении функций нескольких переменных ограничимся подробным описанием функций двух переменных, т.к. все полученные результаты будут справедливы для функций произвольного числа переменных.

Определение. Если каждой паре независимых друг от друга чисел $(x;y)$ из некоторого множества по какому - либо правилу ставится в соответствие единственное значение переменной z, то переменная z называется **функцией двух переменных.**

Обозначается: $z = f(x;y)$

Определение. Областью определения функции двух переменных называется совокупность пар $(x;y)$, при которых функция z существует.

Пример. Найти область определения функции $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, изобразить ее на координатной плоскости.

2. Частные приращения.

Определение. Пусть в некоторой области задана функция $z = f(x;y)$. Возьмем произвольную точку $M(x;y)$ и зададим приращение Δx для переменной x. Тогда величина $\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x;y)$ называется частным приращением функции по переменой x.

Аналогично, определим частное приращение по переменной y:

$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x;y)$

Определение. Для функции двух переменных $z = f(x;y)$ выражение $\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x;y)$ называется **полным приращением**.

Пример. Найти частные и полное приращения функции $z = x^2 + xy$.

3. Предел и непрерывность функции двух переменных.

Определение. Окрестностью точки $M_0(x_0;y_0)$ радиуса r называется совокупность всех точек $(x;y)$, которые удовлетворяют условию $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$.

Определение. Число A называется **пределом** функции $z = f(x;y)$ при стремлении точки $M(x;y)$ к точке $M_0(x_0;y_0)$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $r > 0$, что для любой точки $M(x;y)$, для которых верно условие $MM_0 < r$ также верно и условие $|f(x,y) - A| < \varepsilon$.

Записывают: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A$

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to -1}} \dfrac{3x + 4y}{x^2 + y^2}$.

Пример. Доказать, что предела функции $z = \dfrac{x + y}{xy}$ в точке $M_0(0;0)$ не существует.

Определение. Пусть точка $M_0(x_0;y_0)$ принадлежит области определения функции $z = f(x;y)$. Тогда функция $z = f(x;y)$ называется **непрерывной** в точке $M_0(x_0;y_0)$, если

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$ причем точка $M(x;y)$ стремится к точке $M_0(x_0;y_0)$ произвольным образом.

Если в какой – либо точке условие не выполняется, то эта точка называется **точкой разрыва** функции $z = f(x;y)$. Это может быть в следующих случаях:

1) Функция $z = f(x;y)$ не определена в точке $M_0(x_0;y_0)$.

2) Не существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$.

3) Этот предел существует, но он не равен $f(x_0;y_0)$.

Аналогично, можно дать определение непрерывности функции $z = f(x;y)$ через приращения.

Определение. Функция $z = f(x;y)$ называется **непрерывной** в точке $M_0(x_0;y_0)$, если $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0$

Определение. Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, непрерывная в этой области.

4. Частные производные первого и второго порядка. Теорема Шварца.

Можно записать $\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$.Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется **частной производной** функции z = f(x, y) по x.

Обозначение: $\dfrac{\partial z}{\partial x}$; z'_x; $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$; $f'_x(x,y)$.

Аналогично определяется частная производная функции по y. $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$

Геометрическим смыслом частной производной (допустим $\dfrac{\partial z}{\partial x}$) является тангенс угла наклона касательной, проведенной в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$ к сечению поверхности плоскостью $y = y_0$.

Если функция f(x, y) имеет непрерывные частные производные, то

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) + f(x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = \left[f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)\right] + \\ + \left[f(x, y+\Delta y) - f(x,y)\right]$$

$$f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = \Delta y\frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y} \quad f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = \Delta x\frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x}$$

здесь $\bar{y} \in (y, y+\Delta y)$; $\quad \bar{x} \in (x, x+\Delta x)$

Тогда получаем $\Delta z = \Delta x\dfrac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} + \Delta y\dfrac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}$

Т.к. частные производные непрерывны, то можно записать равенства:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \quad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

Определение. Выражение $\Delta z = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y$ называется **полным приращением** функции $z = f(x;y)$ в некоторой точке (x, y), где α_1 и α_2 – бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ соответственно.

Если функция $z = f(x;y)$ определена в некоторой области D, то ее частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ тоже будут определены в той же области или ее части.

Будем называть эти производные **частными производными первого порядка.**

Производные этих функций будут **частными производными второго порядка.**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y);$$

Продолжая дифференцировать полученные равенства, получим частные производные более высоких порядков.

Определение. Частные производные вида $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial y}$ и т.д. называются **смешанными производными.**

Теорема. Если функция $z = f(x;\, y)$ и ее частные производные $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ определены и непрерывны в точке $M(x;\, y)$ и ее окрестности, то верно соотношение:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Т.е. частные производные высших порядков не зависят от порядка дифференцирования.

5. Понятие экстремума.

Если для функции $z = f(x;\, y)$, определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;\, y_0)$ верно неравенство $f(x_0, y_0) > f(x, y)$, то точка $M_0(x_0;\, y_0)$ называется *точкой максимума*.

Если для функции $z = f(x;\, y)$, определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;\, y_0)$ верно неравенство $f(x_0, y_0) < f(x, y)$, то точка $M_0(x_0;\, y_0)$ называется *точкой минимума*.

3.6. Необходимое и достаточное условия экстремума.

Необходимые условия экстремума: Если функция $z = f(x;\, y)$ в точке (x_0, y_0) имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю $f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$, либо хотя бы одна из них не существует.

Эту точку (x_0, y_0) называют *критической*.

Достаточные условия экстремума: Пусть в окрестности критической точки $M_0(x_0;\, y_0)$ функция $z = f(x;\, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно.

Рассмотрим выражение: $D(x, y) = f''_{x^2}(x, y) \cdot f''_{y^2}(x, y) - \left[f''_{xy}(x, y)\right]^2$.

1) Если $D(x_0;\, y_0) > 0$, то в точке $M_0(x_0;\, y_0)$ функция $z = f(x;\, y)$ имеет экстремум, если $f''_{x^2}(x_0, y_0) < 0$ - максимум, если $f''_{x^2}(x_0, y_0) > 0$ - минимум.

2) Если $D(x_0;\, y_0) < 0$, то в точке $M_0(x_0;\, y_0)$ функция $z = f(x;\, y)$ не имеет экстремума.

3) В случае если $D = 0$, вывод о наличии экстремума сделать нельзя.

Пример. Исследовать функцию $z = 3xy - x^2 - 3y^2 - 6x + 9y + 2$ на экстремум.

Нахождение наименьшего и наибольшего значений в замкнутой области.

Для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x;\, y)$ в заданной замкнутой области *D*, надо:

1. вычислить первые частные производные;
2. решив систему, найти координаты стационарных точек и, если они принадлежат области *D*, вычислить значение функции в этих точках;
3. найти наибольшее и наименьшее значение функции на границе *D*;
4. из всех найденных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Если координаты стационарных точек не принадлежат заданной области *D*, то наибольшее и наименьшее значение функции лежит на границе.

Пример. Найдем наибольшее и наименьшее значение функции

$$z = x^2 - xy + y^2 - 4x$$

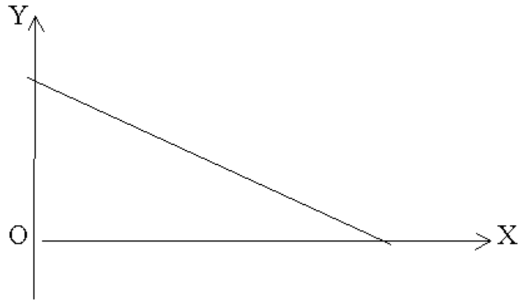
Область *D* определена линиями:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad 2x + 3y - 12 = 0$$

Найдём координаты стационарных точек:

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - y - 4 = 0$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y = 0$. Откуда $M_0\left(\dfrac{8}{3}; \dfrac{4}{3}\right)$

Построим для наглядности границу *D* на плоскости Oxy.



Найденная стационарная точка $M_0\left(\dfrac{8}{3}; \dfrac{4}{3}\right)$ принадлежит заданной области *D*:

$$z\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}\right)^2 - \frac{8}{3} \cdot \frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{8}{3} = -\frac{16}{3}$$

Найдём значения функции на границах:

а) $x = 0$, $z(0; y) = y^2$, $z'_y = 2y = 0$, $y = 0$.

Экстремальная точка на той части границы, которая совпадает с осью *OY*, лежит на нижней границе интервала. Значение функции в этой точке $z(0;0) = 0$.

На другом конце интервала $z(0;4) = 16$.

б) $y = 0$, $z(x;0) = x^2 - 4x$, $z'_x = 2x - 4 = 0$, $x = 2$ – точка экстремума функции на второй границе.

На этой границе, совпадающей с осью *OX*, вычислим значение функции в трёх точках: $(0;0)$; $(2;0)$; $(6;0)$ – правая граница интервала. В первой точке значение функции уже известно из пункта (а): $z(0;0) = 0$, $z(2;0) = -4$; $z(6; 0) = 12$.

Третье аналитическое выражение для границы запишем как $y = f(x)$ и подставим в исходное уравнение:

$$2x + 3y - 12 = 0, , \ z\left(x; 4 - \frac{2}{3}x\right) = \frac{19}{9}x^2 - \frac{40}{3}x + 16.$$

Значение функции на концах отрезка прямой $y = 4 - \dfrac{2}{3}x$ мы уже знаем. Это точка $z(0;4) = 16$ из пункта (а) и точка $z(6; 0) = 12$ из пункта (б).

Найдём экстремальное значение функции (если оно есть) внутри этой границы:

$z'_x = 2 \cdot \dfrac{19}{9}x - \dfrac{40}{3} = 0$, откуда $x = \dfrac{60}{19}$

Это точка экстремума функции внутри границы $y = 4 - \dfrac{2}{3}x$; $z = -\dfrac{96}{19}$.

Тогда из найденных значений функций $z\left(\dfrac{8}{3}; \dfrac{4}{3}\right) = -\dfrac{16}{3}$ – наименьшее, а $z(0;4) = 16$ – наибольшее.

1.4.Лекция № 4 (2 часа)

Тема «Интегральное исчисление. Неопределенный интеграл»

1.4.1. Вопросы лекции:

1. Первообразная функция и ее свойства.
2. Понятие неопределенного интеграла, основные свойства.
3. Таблица интегралов. Непосредственное интегрирование. Замена переменной.
4. Интегрирование по частям.

1.4. 2. Краткое содержание вопросов

1. Первообразная функция и ее свойства.

Определение: Функция F(x) называется первообразной функцией функции f(x) на отрезке [a, b], если в любой точке этого отрезка верно равенство: $F'(x) = f(x)$.

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число. $F_1(x) = F_2(x) + C$.

2. Понятие неопределенного интеграла, основные свойства.

Определение: Неопределенным интегралом функции f(x) называется совокупность первообразных функции. Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C;$

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Свойства:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x);$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$
3. $\int dF(x) = F(x) + C;$
4. $\int (u + v - w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$ где u, v, w – некоторые функции от x.
5. $\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx;$

3. Таблица интегралов. Непосредственное интегрирование. Замена переменной.

Нахождение значения неопределенного интеграла связано главным образом с нахождением первообразной функции. Для некоторых функций это достаточно сложная задача. Ниже будут рассмотрены способы нахождения неопределенных интегралов для основных классов функций – рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных и др.

Для удобства значения неопределенных интегралов большинства элементарных функций собраны в специальные таблицы интегралов, которые бывают иногда весьма объемными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций. Но большинство представленных в этих таблицах формул являются следствиями друг друга, поэтому ниже приведем таблицу основных интегралов, с помощью которой можно получить значения неопределенных интегралов различных функций.

1). $\int du = u + C$

2). $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \ (n \neq -1)$

3). $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

4). $\int e^u du = e^u + C$

5). $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

6). $\int \sin u du = -\cos u + C$

7). $\int \cos u du = \sin u + C$

8). $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$

9). $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C$

10). $\int tgudu = -\ln|\cos u| + C$

11). $\int ctgudu = \ln|\sin u| + C$

12). $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$

13). $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

15. $\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

16. $\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$

17. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$

Непосредственное интегрирование

Рассмотрим три основных метода интегрирования.

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием.

Рассмотрим применение этого метода на примере:

Требуется найти значение интеграла $\int \frac{dx}{x}$. На основе известной формулы дифференцирования $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. можно сделать вывод, что искомый интеграл равен $\ln x + C$, где C – некоторое постоянное число. Однако, с другой стороны $(\ln(-x))' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. Таким образом, окончательно можно сделать вывод: $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

Метод непосредственного интегрирования применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются способы, описанные ниже.

Замена переменной.

Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены x = φ(t) и dx = φ′(t)dt получается: $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$.

Сделаем замену t = sinx, dt = cosxdt.

$$\int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C.$$

Пример. $\int x(x^2+1)^{3/2} dx.$

Замена $t = x^2 + 1; \quad dt = 2xdx; \quad dx = \frac{dt}{2x};$ Получаем:

$$\int t^{3/2} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{3/2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C;$$

4. Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

(uv)′ = u′v + v′u , где u и v – некоторые функции от x.

В дифференциальной форме: d(uv) = udv + vdu

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$uv = \int udv + \int vdu$ или $\int udv = uv - \int vdu$;

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Пример. $$\int x^2 \sin x dx = \begin{Bmatrix} u = x^2; & dv = \sin x dx; \\ du = 2xdx; & v = -\cos x \end{Bmatrix} = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x dx =$$

$$= \begin{Bmatrix} u = x; & dv = \cos x dx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{Bmatrix} = -x^2 \cos x + 2\left[x \sin x - \int \sin x dx\right] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C.$$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

1.5.Лекция № 5 (2 часа)

Тема «Случайные события и их вероятности»

1.5.1. Вопросы лекции:

1 Испытание и событие. Виды событий, их классификация.

2.Понятие вероятности случайного события. Свойства вероятности.

3. Комбинаторика (элементы дискретной математики).

4. Сумма и произведение событий. Теоремы сложения и умножения.

5. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

1.5.2. Краткое содержание вопросов

1. Испытание и событие. Виды событий, их классификация.

Под испытанием будем понимать опыт, эксперимент, любое действие, приводящее к возникновению определенной совокупности условий. Событием называется результат всякого испытания. Все события делятся на достоверные, невозможные и случайные.

Достоверное событие — это событие, которое обязательно наступает в данном испытании.

Невозможное — это событие, которое никогда не наступает в данном испытании.

Случайное событие – это событие, которое в данном испытании может наступить или не наступить.

Случайные событие называются несовместными в данном испытании, если никакие два из них в этом испытании не могут наступить одновременно.

Случайные события образую полную группу, если являются всеми возможными результатами данного испытания.

Случайные события называются противоположными в данном испытании, если они несовместны и образуют полную группу.

Рассмотрим полную группу равновозможных, несовместных, случайных событий. Такие события будут называться случаями, шансами или исходами.

Операции над событиями

Определение. События А и В называются **равными**, если осуществление события А влечет за собой осуществление события В и наоборот.

Определение. Объединением или **суммой** событий A_k называется событие А, которое означает появление **хотя бы одного** из событий A_k.

$$A = \bigcup_k A_k$$

Определение. Пересечением или **произведением** событий A_k называется событие А, которое заключается в осуществлении **всех** событий A_k.

$$A = \bigcap_k A_k$$

Определение. Разностью событий А и В называется событие С, которое означает, что происходит событие А, но не происходит событие В.

$$C = A \setminus B$$

Определение. Дополнительным к событию А называется событие $\overline{A}$, означающее, что событие А **не происходит.**

Определение. Элементарными исходами опыта называются такие результаты опыта, которые взаимно исключают друг друга и в результате опыта происходит одно из этих событий, также каково бы ни было событие А, по наступившему элементарному исходу можно судить о том, происходит или не происходит это событие.

Совокупность всех элементарных исходов опыта называется **пространством элементарных событий**.

События называются равновозможными, если нет оснований считать, что одно является более возможным, чем другое.

2. Понятие вероятности случайного события. Свойства вероятности.

Определение. Вероятностью события А называется математическая оценка возможности появления этого события в результате опыта.

Классическое определение вероятности события. Вероятностью события А называется отношение:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число благоприятствующих случаев (исходов), а n – число всех возможных случаев (исходов), образующих полную группу равновозможных, несовместных, случайных событий.

Если какому-либо событию благоприятствует все n случаев, образующих полную группу равновозможных, несовместных, случайных событий, то оно является достоверным ($p=1$). Событие, которому не благоприятствует ни один из n случаев, является невозможным ($p=0$).

Ограниченность классического определения вероятности

Классическая формула вероятности события применяется для непосредственного подсчета вероятностей тогда, когда задача сводится к «схеме случаев». Другими словами классическое определение предполагает, что число элементарных исходов испытания конечно. На практике же часто встречаются испытания, число возможных исходов которых бесконечно, то есть далеко не всякий опыт может быть сведен к «схеме случаев». Следовательно, существует класс событий, вероятности которых нельзя вычислить по классической формуле. Например, бросается несимметричная игральная кость. Какова вероятность выпадения нужной грани?

Часто так же невозможно представить результат испытания в виде совокупности элементарных исходов или указать основания, позволяющие считать элементарные события равновозможными.

Указанные недостатки могут быть преодолены введением геометрической и статистической вероятностей.

Геометрические вероятности

Геометрической вероятностью называют вероятность попадания наудачу брошенной точки в область (отрезок, часть плоскости, часть пространства).

Пусть отрезок l составляет часть отрезка L. На отрезок L наудачу поставлена точка. Вероятность попадания точки на отрезок l пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения относительно отрезка L:

$$P = \frac{\text{длина l}}{\text{длина L}}.$$

Пусть плоская фигура g составлять часть плоской фигуры G. На G наудачу брошена точка. Вероятность попадания брошенной точки на g пропорциональна площади этой фигуры и не зависит ни от ее расположения относительно G, ни от формы g:

$$P = \frac{\text{площадьg}}{\text{площадьG}}.$$

По аналогии через отношение объемов определяется вероятность попадания наудачу брошенной точки в часть пространства.

Статистическая вероятность события

Введем еще одну количественную оценку возможности появления события в данном испытании, корнями уходящую в опыт, эксперимент.

Относительной частотой наступления события А называется отношение

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

где n – число проведенных опытов (испытаний), а m – число испытаний, в которых событие А наступило.

Заметим, что классическая формула не требует проведения испытаний в действительности, $P(A)$ вычисляется до опыта. Для нахождения относительной частоты испытания должны быть проведены, либо возможно их проведение, $W(A)$ вычисляют после опыта.

При небольшом числе опытов W носит случайный характер и может изменяться. Например, при 10 бросаниях монеты герб может появиться 2 раза, а может 8 раз.

Но при увеличении числа опытов частота утрачивает случайный характер, случайные причины, влияющие на результат каждого отдельного опыта, взаимно «гасят» друг друга и W приближается к некоторой средней, постоянной величине.

Если в одинаковых условиях производят серии опытов и в каждой серии число испытаний довольно велико, то W обнаруживает свойство устойчивости. В таком случае W или близкое к ней число принимают за статистическую вероятность события.

Все свойства вероятности, вытекающие из классического определения, распространяются и на статистическое определение вероятности события.

Для существования статистической вероятности события требуется:

1) возможность, хотя бы принципиальная, производить неограниченное число испытаний, в каждом из которых событие А наступает или нет;

2) устойчивость относительных частот в различных сериях из достаточно большого числа испытаний.

Например, по данным шведской статистики приводится относительная частота рождения девочек по месяцам года: 0,486; 0,489; 0,490; 0,471; 0,478; 0,482; 0,462; 0,484; 0,485; 0,491; 0,482; 0,473.

Значение относительной частоты колеблется около числа 0,482, его можно принять за статистическую вероятность рождения девочки. Статистические данные других стран дают примерно те же значения W и ту же статистическую вероятность.

Рассмотрим другой пример:

Число бросаний монеты	Число появлений герба	W
4040	2048	0,5069
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

Данные таблицы показывают как с увеличением числа испытаний «уточняется» значение относительной частоты.

Недостатком статистического определения является неоднозначность выбора значения относительной частоты при возникновении свойства устойчивости.

При практическом применении вероятностных методов исследования необходимо понимать, принадлежит ли исследуемое случайное явление к категории массовых, для которых выполняется свойство устойчивости частоты и понятие вероятность имеет глубокий практический смысл.

Между относительной частотой события и классической вероятностью существует глубокая, органичная связь. Получая вероятность некоторого события, мы не можем придать этому числу иного реального, практического смысла, чем относительная частота появления данного события при большом числе опытов.

Специальные методы решения вероятностных задач.

3.При решении некоторых задач на определение вероятности применяются формулы из комбинаторики. Рассмотрим основные понятия.

Пусть имеется некоторая совокупность элементов какой угодно природы. Из этой совокупности элементов можно составить отдельные группы, отличающиеся одна от другой либо порядком этих элементов, либо самими элементами, либо тем и другим сразу. Эти группы называются *соединениями*.

Пусть количество всех элементов, из которых составляются соединения, равно числу n, а число элементов в каждом соединении равно k. Очевидно, что число k не может быть больше числа n. Различают три вида соединений: размещения, перестановки, сочетания.

Определение. Размещениями из n различных элементов по k элементов называются комбинации k элементов, отличающиеся одно от другого или самими элементами, или их порядком.

Число всевозможных размещений из n элементов по k обозначается символом A_n^k.

Число всевозможных размещений из n элементов по k вычисляется по формуле: $A_n^k = n(n-1)(n-2)(n-3)...(n-k+1)$.

По определению $A_1^0 = 1$.

Определение. Перестановками называются комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающихся только порядком их расположения.

Число всевозможных перестановок из n элементов обозначают символом P_n и вычисляют по формуле: $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n = n!$

Определение. Сочетаниями называются комбинации, составленные из n различных элементов по k элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по k принято обозначать символом C_n^k. Это число вычисляется по формуле: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Следует иметь в виду, что $0! = 1$.

При решении задач комбинаторики используют следующие правила:

Правило суммы.

Если объект A может быть выбран m способами, а объект B может быть выбран другими n способами, то выбор либо A, либо B из объединенной совокупности может быть осуществлен $m+n$ способами.

Правило произведения.

Если объект A может быть выбран m способами и после каждого такого выбора объект B может быть выбран n способами, то выбор пары объектов A и B в указанном порядке может быть осуществлен $m \cdot n$ способами.

Задача. В урне содержится 5 черных и 6 белых шаров. Случайным образом вынимают 4 шара. Найти вероятность того, что среди них имеется: а) ровно 2 белых шара, б) меньше, чем 2 белых шара, в) хотя бы 1 белый шар.

Решение.

а) Пусть событие А – среди вынутых шаров ровно два белых (тогда два других вынутых шара – черные). Вероятность этого события найдем, используя классическую формулу вероятности: $P(A) = \dfrac{m}{n}$, где n - число всевозможных элементарных исходов, m – число элементарных исходов, благоприятствующих данному событию. Элементарными исходами являются всевозможные сочетания:

$$n = C_{11}^4 = \frac{11!}{4! \cdot (11-4)!} = \frac{11!}{4! \cdot 7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7!} = 330;$$

$$m = C_6^2 C_5^2 = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = 15 \cdot 10 = 150.$$ Получаем: $P(A) = \dfrac{150}{330} = \dfrac{5}{11}$.

б) Пусть событие В – среди вынутых шаров меньше, чем два белых шара. Это возможно, когда вынули один белый и три черных шара или ноль белых и четыре черных шара. Поэтому

$$m = C_6^1 C_5^3 + C_6^0 C_5^4 = \frac{6!}{1! \cdot (6-1)!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} + \frac{6!}{0! \cdot (6-0)!} \cdot \frac{5!}{4! \cdot (5-4)!} = 60 + 5 = 65.$$

Получаем: $P(B) = \dfrac{65}{330} = \dfrac{13}{66}$.

Задача. Из колоды в 56 карт вынимается одна карта. Какова вероятность того, что она пиковой масти?

Испытание: извлечение карты из колоды.

Событие А: появление пиковой масти.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

Задача. Одновременно подбрасывают две монеты. Какова вероятность выпадения герба на обеих монетах сразу?

Испытание: подбрасывание монет (одновременно).

Событие А: появление герба на двух монетах сразу.

Составим схему возможных случаев:

Первая монета	Вторая монета
герб	герб
герб	цифра
цифра	герб
цифра	цифра

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{4}.$$

Задача. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу, попадет в кольцо, образованное двумя окружностями с радиусами 5 и 10 см.

Площадь кольца (фигура g): $S_g=\pi\left(10^2-5^2\right)=75\pi$

$$S_G=\pi\cdot 10^2=100\pi \qquad P=\frac{75\pi}{100\pi}=0{,}75$$

4. Сумма и произведение событий.

Определение. Суммой двух событий А и В называется новое событие С, состоящее в появлении хотя бы одного из данных событий.

В частности, если два события несовместные, то сумма этих событий – событие, состоящее в появление одного из этих событий, безразлично какого.

Определение. Суммой нескольких событий называется новое событие, состоящее в появлении хотя бы одного из исходных событий.

Определение. Произведением (совмещением) двух событий А и В называют новое событие С, состоящее в одновременном появлении и события А, и события В.

Определение. Произведением нескольких событий называют новое событие, состоящее в одновременном появлении всех исходных событий.

Зависимые и независимые события. Условная вероятность.

Определение. Событие А называется **независимым** от события В, вероятность события А не зависит от того, произошло событие В или нет. Событие А называется **зависимым** от события В, если вероятность события А меняется в зависимости от того, произошло событие В или нет.

Если при вычислении вероятности события налагаются дополнительные условия, то вероятность события называют условной.

Определение. Вероятность события В, вычисленная при условии, что имело место событие А, называется **условной вероятностью** события В.

Теоремы сложения и умножения.

Теорема (о сложении вероятностей несовместных событий).

Пусть события А и В несовместны в данном испытании (явлении, опыте), причем вероятности этих событий известны.

Теорема. Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Формула из теоремы справедлива для любого числа попарно несовместных слагаемых:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

Следствие. Если случайные события $A_1, A_2, \ldots A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то справедливо равенство:

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1$$

Определение. Случайные события А и В называются совместными, если в данном испытании могут наступить оба этих события, т.е. произойдет совмещение событий А и В.

Событие, заключающееся в совмещении событий А и В, будем обозначать (А и В) или (АВ).

Теорема (о сложении вероятностей совместных событий).

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совмещения: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$

Событие А называется независимым от события В, если вероятность появления события А не зависит от того, наступило событие В в данном испытании или нет.

Теорема (об умножении вероятностей независимых событий).

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Замечание. Равенство из теоремы справедливо для любых *n* независимых событий:

$$P(A_1 \cdot A_2 \ \dots \ A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$$

Замечание. С учетом теоремы об умножении вероятностей теорема о сложении вероятностей совместных событий записывается следующим образом:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B),$$

если события А и В – совместны, но независимы.

Например, в урне 3 белых и 2 черных шара. Наудачу вынимают один шар, затем еще один. Событие В: появление белого шара при первом вынимании; событие А: появление белого шара при втором вынимании. Тогда $P_B(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Теорема (об умножении вероятностей зависимых событий). Вероятность совмещения двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго, вычисленную в предположении, что первое событие наступило:

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

Из теоремы произведения вероятностей можно сделать вывод о вероятности появления хотя бы одного события.

Если в результате испытания может появиться *n* событий, независимых в совокупности, то вероятность появления хотя бы одного из них равна

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 ... q_n$$

Здесь событие А обозначает наступление хотя бы одного из событий A_i, а q_i – вероятность противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$.

Пример. Из полной колоды карт (52 шт.) одновременно вынимают четыре карты. Найти вероятность того, что среди этих четырех карт будет хотя бы одна бубновая или одна червонная карта.

Обозначим появление хотя бы одной бубновой карты – событие А, появление хотя бы одной червонной карты – событие В. Таким образом нам надо определить вероятность события С = А + В.

Кроме того, события А и В – совместны, т.е. появление одного из них не исключает появления другого.

Всего в колоде 13 червонных и 13 бубновых карт.

При вытаскивании первой карты вероятность того, что не появится ни червонной ни бубновой карты равна $\frac{26}{52}$, при вытаскивании второй карты - $\frac{25}{51}$, третьей - $\frac{24}{50}$, четвертой - $\frac{23}{49}$.

Тогда вероятность того, что среди вынутых карт не будет ни бубновых, ни червонных равна $P(\overline{C}) = \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50} \cdot \frac{23}{49}$.

Тогда $P(C) = 1 - P(\overline{C}) \approx 0{,}945$

5 Формула полной вероятности. Формулы Байеса.

Теорема (формула полной вероятности)

Пусть некоторое событие А может произойти вместе с одним из несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n$, составляющих полную группу событий. Пусть известны вероятности этих событий $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$ и условные вероятности наступления события А при наступлении события H_i $P(A/H_1), P(A/H_2), ..., P(A/H_n)$.

Теорема. Вероятность события А, которое может произойти вместе с одним из событий $H_1, H_2, ..., H_n$, равна сумме парных произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующие им условные вероятности наступления события А.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i)$$

Фактически эта формула **полной вероятности** уже использовалась при решении примеров, приведенных выше, например, в задаче с револьвером.

Доказательство.

Т.к. события $H_1, H_2, ..., H_n$ образуют полную группу событий, то событие А можно представить в виде следующей суммы:

$$A = AH_1 + AH_2 + ... + AH_n = \sum_{i=1}^{n} AH_i$$

Т.к. события $H_1, H_2, ..., H_n$ несовместны, то и события AH_i тоже несовместны. Тогда можно применить теорему о сложении вероятностей несовместных событий:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i)$$

При этом $P(AH_i) = P(H_i)P(A/H_i)$

Окончательно получаем: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$. Теорема доказана.

Пример. Один из трех стрелков производит два выстрела. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для первого стрелка равна 0,4, для второго – 0,6, для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что в цель попадут два раза.

Вероятность того, что выстрелы производит первый, второй или третий стрелок равна $\frac{1}{3}$.

Вероятности того, что один из стрелков, производящих выстрелы, два раза попадает в цель, равны:

- для первого стрелка: $p_1^2 = 0{,}4^2 = 0{,}16$;
- для второго стрелка: $p_2^2 = 0{,}6^2 = 0{,}36$;
- для третьего стрелка: $p_3^2 = 0{,}8^2 = 0{,}64$;

Искомая вероятность равна:

$$p = \frac{1}{3}p_1^2 + \frac{1}{3}p_2^2 + \frac{1}{3}p_3^3 = \frac{1}{3}(0{,}16 + 0{,}36 + 0{,}64) = \frac{29}{75}$$

Допустим, что событие А уже наступило. Это изменит вероятности гипотез $P(B_1), P(B_2), ..., P(B_n)$. Требуется определить условные вероятности этих гипотез $P_A(B_1), ..., P_A(B_n)$, в предположении, что событие А уже наступило.

Найдем

$$P(A \cdot B_1) = p(B_1) \cdot P_{B_1}(A) = p(A) \cdot P_A(B_1) \Rightarrow P_A(B_1) = \frac{P(A \cdot B_1)}{P(A)} = \frac{p(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}$$

Заменим $P(A)$ формулой полной вероятности события:

$$P_A(B_1) = \frac{p(B_1) \cdot P_{B1}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}$$

Аналогично определяется $P_A(B_2), ..., P_A(B_n)$.

Окончательно получаем формулу Байеса или формулу из теоремы гипотез:

$$P_A(B_k) = \frac{p(B_k) \cdot P_{B_k}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}.$$

1.6.Лекция № 6 (2 часа)

Тема «Случайные величины»

1.6.1. Вопросы лекции:

1 Определение случайной величины и ее виды.

2. Способы задания ДСВ.

3. Числовые характеристики ДСВ.

4. Виды распределений ДСВ .

5. Способы задания НСВ.

6. Числовые характеристики НСВ.

7. Виды распределений НСВ.

1.6.2. Краткое содержание вопросов

1 Определение случайной величины. Ее виды.

Выше рассматривались случайные события, являющиеся качественной характеристикой случайного результата опыта. Для получения количественной характеристики вводится понятие случайной величины.

Рассмотрим событие: появление определения числа очков на грани игральной кости, выпавшей при бросании. При этом может появляться любое из чисел 1,2,3, … 6. Наперед определить число выпавших очков невозможно, поскольку оно зависит от многих случайных причин, которые полностью не могут быть учтены. В этом смысле число очков есть случайная величина, а числа 1,2, … 6 - возможные значения этой величины.

Определение. Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принимать то или иное значение, причем заранее известно какое именно.

Обозначение: X, Y, Z, … - случайные величины; x, y, z, … - значения случайных величин.

Случайные величины делятся на дискретные (ДСВ) и непрерывные (НСВ).

Определение. Дискретной случайной величиной называется такая величина, которая в результате опыта может принимать определенные значения с определенной вероятностью, образующие счетное множество (множество, элементы которого могут быть занумерованы).

Это множество может быть как конечным, так и бесконечным.

Значения ДСВ отделены промежутками и могут быть перечислены до проведения испытания. Например, число студентов группы, успешно сдавших экзамен по математике.

Определение. Непрерывной случайной величиной называется такая величина, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Очевидно, что число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно. Например, скорость ветра в течение суток в данной местности или отклонение размера детали от стандарта.

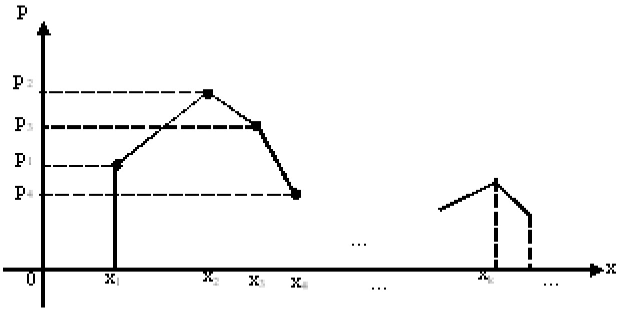
2 Способы задания ДСВ.

Переменная величина X, принимающая в результате испытания одно из конечной или бесконечной последовательности значений $x_1, x_2, \dots x_k$, называется дискретной, если каждому значению x_k соответствует определенная вероятность p_k того, что переменная величина X примет именно это значение.

Функциональная зависимость вероятности p_k от значения x_k называется законом распределения вероятностей ДСВ X (или кратко «закон распределения случайной величины»).

Возможные значения случайной величины	x_1	x_2	x_3	…	x_k	…
Вероятности этих значений	p_1	p_2	p_3	…	p_k	…

Закон распределения можно задать графически:



3. Числовые характеристики ДСВ. Их роль и назначение.

Случайная величина полностью определяется законом распределения.

Однако во многих вопросах практики нет необходимости характеризовать СВ полностью, исчерпывающим образом. Достаточно указать отдельные числовые параметры, характеризующие основные черты распределения. Такие параметры называются числовыми характеристиками случайной величины. Числовые характеристики задают случайную величину косвенно, описывают случайную величину суммарно. В теории вероятностей применяется большое количество числовых характеристик, имеющих различное назначение. Из них рассмотрим только некоторые, наиболее часто встречающиеся характеристики: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Имеется ДСВ *X* с соответствующим законом распределения:

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$p(X =$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Математическим ожиданием ДСВ *X* (M[x] или m_x) называют сумму произведений всех возможных значений этой величины на вероятности этих значений:

$$M[x] = x_1 p_1 + \ldots + x_n p_n = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k \text{ , при этом } \sum_{k=1}^{n} p_k = 1 \text{ .}$$

Если значения случайной величины образуют бесконечную последовательность, то $m_x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p_k$. Мы будем рассматривать только такие случайные величины, для которых этот ряд сходится.

Замечание. Математическое ожидание случайной величины есть неслучайная (постоянная) величина.

Вероятностный смысл M[*X*]: математическое ожидание приближенно равно (чем больше число испытаний, тем точнее) среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины. На числовой оси возможные значения случайной величины расположены слева и справа от M[*X*]. Поэтому M[*X*] называют центром распределения вероятностей случайной величины (точнее – абсциссой центра).

Свойства математического ожидания:

1. Математическое ожидание постоянной равно самой постоянной $M[c] = c$, где с – ДСВ, которая имеет одно возможное значение с и принимает его с *p*=1. Следовательно, $M[c] = c \cdot 1 = c$.

2. Постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания: $M[cX] = c \cdot M[X]$.

3. $M[X \cdot У] = M[X] \cdot M[У]$, $M[X + У] = M[X] + M[У]$

где величины *X* и *У* – независимы.

Дисперсия дискретной случайной величины, целесообразность ее введения. Свойства дисперсии.

Математическое ожидание не полностью характеризует случайную величину. На практике часто требуется оценить рассеяние возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения. Например, насколько кучно лягут снаряды вблизи цели, которая должна быть поражена.

Дисперсией случайное величины X называется математическое ожидание квадрата соответствующей центрированной случайной величины:

$$D[X] = M\left[(X - m_x)^2\right] \quad или \quad D[X] = \sum_{k=1}^{n} (X_k - m_x)^2 \cdot p_k$$

Для вычисления $D[X]$ удобно использовать формулу:

$$D[X] = \sum_{k=1}^{n} (X_k - m_x)^2 \cdot p_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot p_k - 2\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot m_x \cdot p_k + \sum_{k=1}^{n} m_x^2 \cdot p_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot p_k -$$

$$- 2\mathrm{m}_x \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k + m_x^2 \sum_{k=1}^{n} p_k = M\left[X^2\right] - 2\mathrm{m}_x \cdot m_x + m_x^2 \cdot 1 = M\left[X^2\right] - m_x^2$$

Следовательно, $D[X] = M\left[X^2\right] - m_x^2$, т.е. дисперсия равна разности математического ожидания квадрата случайной величины и квадрата математического ожидания этой случайной величины.

Свойства дисперсии:

1. $D[C] = M\left[(c-c)^2\right] = M[0] = 0$, $M[c] = c$
2. $D[CX] = C^2 \cdot D[X]$
3. $D[X+Y] = D[X] + D[Y]$
4. $D[C+X] = D[C] + D[X] = 0 + D[X] = D[X]$
5. $D[X-Y] = D[X] + D[Y]$

Среднее квадратическое отклонение.

Легко показать, что дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины. В связи с этим в тех случаях, когда желательно, чтобы оценка рассеяния имела размерность случайной величины, вычисляют квадратный корень из дисперсии.

Определение. Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии.

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]}$$

Среднее квадратическое отклонение случайной величины можно вычислить по формуле $\sigma[X] = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - m_x)^2 \cdot p_k}$

Теорема. Среднее квадратичное отклонение суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин равно квадратному корню из суммы квадратов средних квадратических отклонений этих величин.

$$\sigma(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \ldots + \sigma^2(X_n)}$$

Пример. Случайная величина X задана законом распределения:

X	2	3	10
p	0,1	0,4	0,5

Найти среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Решение. Найдем математическое ожидание случайной величины X:

$$M(X) = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}4 + 10 \cdot 0{,}5 = 6{,}4$$

Найдем математическое ожидание случайной величины X^2:

$$M(X^2) = 2^2 \cdot 0{,}1 + 3^2 \cdot 0{,}4 + 10^2 \cdot 0{,}5 = 54$$

Найдем дисперсию:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 54 - 6{,}4^2 = 13{,}04$$

Искомое среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{13{,}04}\approx 3{,}6$$

4 Виды распределений ДСВ.

Биномиальное распределение.

Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие А может появиться с одинаковой вероятностью p в каждом из испытаний, то вероятность того, что событие не появится, равна $q = 1 - p$.

Примем число появлений события в каждом из испытаний за некоторую случайную величину Х.

Чтобы найти закон распределения этой случайной величины, необходимо определить значения этой величины и их вероятности.

Значения найти достаточно просто. Очевидно, что в результате n испытаний событие может не появиться вовсе, появиться один раз, два раза, три и т.д. до n раз.

Вероятность каждого значения этой случайной величины можно найти по формуле Бернулли.

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad k=0,1,2,...$$

Эта формула аналитически выражает искомый закон распределения. Этот закон распределения называется **биноминальным**.

Числовые характеристики биномиального распределения:

$$M(X)=np\,,\ D(X)=npq\,,\ \sigma(X)=\sqrt{npq}$$

Пример. В партии 10% нестандартных деталей. Наугад отобраны 4 детали. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины Х – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных и построить многоугольник полученного распределения.

Вероятность появления нестандартной детали в каждом случае равна 0,1.

Найдем вероятности того, что среди отобранных деталей:

1) Вообще нет нестандартных.

$$P_4(0)=\frac{4!}{0!\cdot 4!}0{,}1^0\cdot 0{,}9^4=0{,}6561$$

2) Одна нестандартная.

$$P_4(1)=\frac{4!}{1!\cdot 3!}0{,}1^1\cdot 0{,}9^3=0{,}2916$$

3) Две нестандартные детали.

$$P_4(2)=\frac{4!}{2!\cdot 2!}0{,}1^2\cdot 0{,}9^2=0{,}0486$$

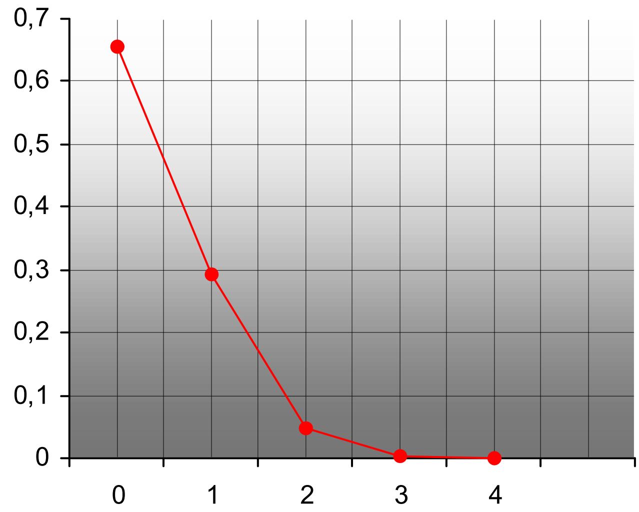
4) Три нестандартные детали.

$$P_4(3)=\frac{4!}{3!\cdot 1!}0{,}1^3\cdot 0{,}9^1=0{,}0036$$

5) Четыре нестандартных детали.

$$P_4(4)=\frac{4!}{4!\cdot 0!}0{,}1^4\cdot 0{,}9^0=0{,}0001$$

Построим многоугольник распределения.



Пример. Две игральные кости одновременно бросают 2 раза. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины Х – числа выпадений четного числа очков на двух игральных костях.

Каждая игральная кость имеет три варианта четных очков – 2, 4 и 6 из шести возможных, таким образом, вероятность выпадения четного числа очков на одной кости равна 0,5.

Вероятность одновременного выпадения четных очков на двух костях равна 0,25.

Вероятность того, что при двух испытаниях оба раза выпали четные очки на обеих костях, равна:

$$P_2(2) = \frac{2!}{0! \cdot 2!} 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^0 = 0{,}0625$$

Вероятность того, что при двух испытаниях один раз выпали четные очки на обеих костях:

$$P_2(1) = \frac{2!}{1! \cdot 1!} 0{,}25^1 \cdot 0{,}75^1 = 0{,}375$$

Вероятность того, что при двух испытаниях ни одного раза не выпаде четного числа очков на обеих костях:

$$P_2(0) = \frac{2!}{0! \cdot 2!} 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^2 = 0{,}5625$$

Распределение Пуассона.

Пусть производится n независимых испытаний, в которых появление события А имеет вероятность p. Если число испытаний n достаточно велико, а вероятность появления события А в каждом испытании мало ($p \le 0{,}1$), то для нахождения вероятности появления события А k раз находится следующим образом.

Сделаем важное допущение – произведение np сохраняет постоянное значение:

$$np = \lambda$$

Практически это допущение означает, что среднее число появления события в различных сериях испытаний (при разном n) остается неизменным.

По формуле Бернулли получаем:

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

Найдем предел этой вероятности при $n \to \infty$.

$$P_n(k) \cong \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \right] = \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Получаем формулу **распределения Пуассона:**

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Если известны числа λ и k, то значения вероятности можно найти по соответствующим таблицам распределения Пуассона.

Числовые характеристики распределения Пуассона:

$$M(X) = np\,,\ D(X) \approx np\,,\ \sigma(X) \approx \sqrt{np}\ .$$

Пусть имеется некоторая последовательность событий, наступающих в случайные моменты времени (будем называть это потоком событий). *Интенсивность* потока (среднее число событий, появляющихся в единицу времени) равна λ. Пусть этот поток событий - *простейший* (пуассоновский), т.е. обладает тремя свойствами:

1) вероятность появления k событий за определённый промежуток времени зависит только от длины этого промежутка, но не от точки отсчёта, другими словами, интенсивность потока есть постоянная величина (свойство *стационарности*);

2) вероятность появления k событий в любом промежутке времени не зависит от того, появлялись события в прошлом или нет (свойство *«отсутствия последействия»*);

3) появление более одного события за малый промежуток времени практически невозможно (свойство *ординарности*).

Вероятность того, что за промежуток времени *t* событие произойдёт *k* раз, равна

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}$$

Геометрическое и гипергеометрическое распределение.

Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события A равна p, и следовательно, вероятность его непоявления равна $q = 1 - p$. Испытания заканчиваются, как только появится событие A. Таким образом, если событие появилось в $k-$м испытании, то в предшествующих $k-1$ испытаниях оно не появлялось.

Обозначим через X дискретную случайную величину – числа испытаний, которые нужно произвести до первого появления события A.

Таблица распределения имеет вид

X	1	2	...	k	...
P	p	$p(1-p)$	...	$p(1-p)^{k-1}$	...

Если количество испытаний не ограничено, т.е. если случайная величина может принимать значения 1, 2, ..., ∞, то математическое ожидание и дисперсию геометрического распределения можно найти по формулам $M(X) = \frac{1}{p}$, $D(X) = \frac{q}{p^2}$, $\sigma(X) = \frac{\sqrt{q}}{p}$.

Гипергеометрическое распределение.

Задача. Пусть в партии из N изделий имеется M стандартных ($M < N$). Из партии случайно отбирают n изделий, причем отобранное изделие перед отбором следующего не возвращается. Обозначим через X случайную величину – число m стандартных изделий среди n отобранных. Вероятность того, что среди n отобранных окажется ровно m стандартных вычисляется по формуле: $P(X = m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$.

Формула определяет распределение вероятностей, которое называют гипергеометрическим.

5. Способы задания НСВ

Во всех рассмотренных выше случаях случайная величина определялась путем задания значений самой величины и вероятностей этих значений.

Однако такой метод применим далеко не всегда. Например, в случае непрерывной случайной величины, ее значения могут заполнять некоторый произвольный интервал. Очевидно, что в этом случае задать все значения случайной величины просто нереально.

Даже в случае, когда это сделать можно, зачастую задача решается чрезвычайно сложно. Рассмотренный только что пример даже при относительно простом условии (приборов только четыре) приводит к достаточно неудобным вычислениям, а если в задаче будет несколько сотен приборов?

Поэтому встает задача по возможности отказаться от индивидуального подхода к каждой задаче и найти по возможности наиболее общий способ задания любых типов случайных величин.

Пусть *x* – действительное число. Вероятность события, состоящего в том, что X примет значение, меньшее *x*, т.е. X < *x*, обозначим через F(x).

Определение. Функцией распределения называют функцию F(x), определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее *x*.

$$F(x) = P(X < x)$$

Функцию распределения также называют **интегральной функцией**.

Функция распределения существует как для непрерывных, так и для дискретных случайных величин. Она полностью характеризует случайную величину и является одной из форм закона распределения.

Для дискретной случайной величины функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$$

Знак неравенства под знаком суммы показывает, что суммирование распространяется на те возможные значения случайной величины, которые меньше аргумента *x*.

Функция распределения дискретной случайной величины X разрывна и возрастает скачками при переходе через каждое значение x_i.

Свойства функции распределения

1) значения функции распределения принадлежат отрезку [0, 1].

$$0 \le F(x) \le 1$$

2) F(x) – неубывающая функция.

$$F(x_2) \ge F(x_1) \text{ при } x_2 \ge x_1$$

3) Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (*a, b*) , равна приращению функции распределения на этом интервале.

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$$

4) На минус бесконечности функция распределения равна нулю, на плюс бесконечности функция распределения равна единице.

5) Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю.

Таким образом, не имеет смысла говорить о каком – либо конкретном значении случайной величины. Интерес представляет только вероятность попадания случайной величины в какой – либо интервал, что соответствует большинству практических задач.

Перейдем к особенностям функции распределения дискретной и непрерывной случайных величин.

Для ДСВ график $F(x)$ имеет разрывный, ступенчатый вид. График расположен в полосе, ограниченной прямыми $y = 0$, $y = 1$.

Функция распределения полностью характеризует случайную величину, однако, имеет один недостаток. По функции распределения трудно судить о характере распределения случайной величины в небольшой окрестности той или иной точки числовой оси.

Определение. Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называется функция *f(x)* – первая производная от функции распределения F(x).

$$f(x) = F'(x).$$

Плотность распределения также называют **дифференциальной функцией**. Для описания дискретной случайной величины плотность распределения неприемлема.

Смысл плотности распределения состоит в том, что она показывает как часто появляется случайная величина X в некоторой окрестности точки *x* при повторении опытов.

После введения функций распределения и плотности распределения можно дать следующее определение непрерывной случайной величины.

Определение. Случайная величина X называется **непрерывной**, если ее функция распределения F(x) непрерывна на всей оси OX, а плотность распределения f(x) существует везде, за исключением(может быть, конечного числа точек.

Зная плотность распределения, можно вычислить вероятность того, что некоторая случайная величина X примет значение, принадлежащее заданному интервалу.

Теорема. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b.*

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Доказательство этой теоремы основано на определении плотности распределения и третьем свойстве функции распределения, записанном выше.

Геометрически это означает, что вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью OX, кривой распределения f(x) и прямыми $x = a$ и $x = b$.

Функция распределения может быть легко найдена, если известна плотность распределения, по формуле: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$

Свойства плотности распределения.

1) вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b: $P(a < X < b) = \int\limits_{a}^{b} p(x)dx$;

2) функция распределения может быть легко найдена, если известна плотность распределения, по формуле $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(x)dx$;

3) плотность распределения – неотрицательная функция: $p(x) \geq 0$;

4) несобственный интеграл от плотности распределения на бесконечном интервале равен единице: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$.

6. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.

Пусть непрерывная случайная величина X задана функцией распределения *p(x)*. Допустим, что все возможные значения случайной величины принадлежат отрезку [*a,b*].

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку [a,b], называется определенный интеграл вида:
$$M(X) = \int\limits_{a}^{b} xp(x)dx$$

Если возможные значения случайной величины рассматриваются на всей числовой оси, то *математическое ожидание* находится по формуле:
$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

При этом предполагается, что несобственный интеграл сходится.

Дисперсией непрерывной случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения:
$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 p(x)dx$$

По аналогии с дисперсией дискретной случайной величины, для практического вычисления дисперсии используется формула:
$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx - [M(X)]^2$$

Средним квадратичным отклонением называется квадратный корень из дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Модой Mo непрерывной случайной величины называется такое значение случайной величины, при которой плотность распределения имеет максимум: $f(M_0) = \max$.

Если кривая распределения случайной величины имеет два или несколько максимумов, то такое распределение называется двумодальным или многомодальным.

Если распределение имеет минимум, но не имеет максимума, то оно называется *антимодальным*.

Медианой Ме случайной величины Х называется такое ее значение, относительно которого равновероятно получение большего или меньшего значения случайной величины: $P(X < Me) = P(X > Me)$.

Геометрически медиана – абсцисса точки, в которой площадь, ограниченная кривой распределения, делится пополам.

Пример. Задана непрерывная случайная величина *x* своей функцией распределения $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} A\cos 2x, & при \quad -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4} \\ 0, & при \quad |x| > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Требуется определить коэффициент А, найти функцию распределения, построить графики функции распределения и плотности распределения, определить вероятность того, что случайная величина *x* попадет в интервал $\left(\frac{\pi}{6}; 2\right)$.

Найдем коэффициент A.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} A\cos 2xdx + \int_{\pi/4}^{\infty} 0dx = \frac{A\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = A = 1.$$

Найдем функцию распределения:

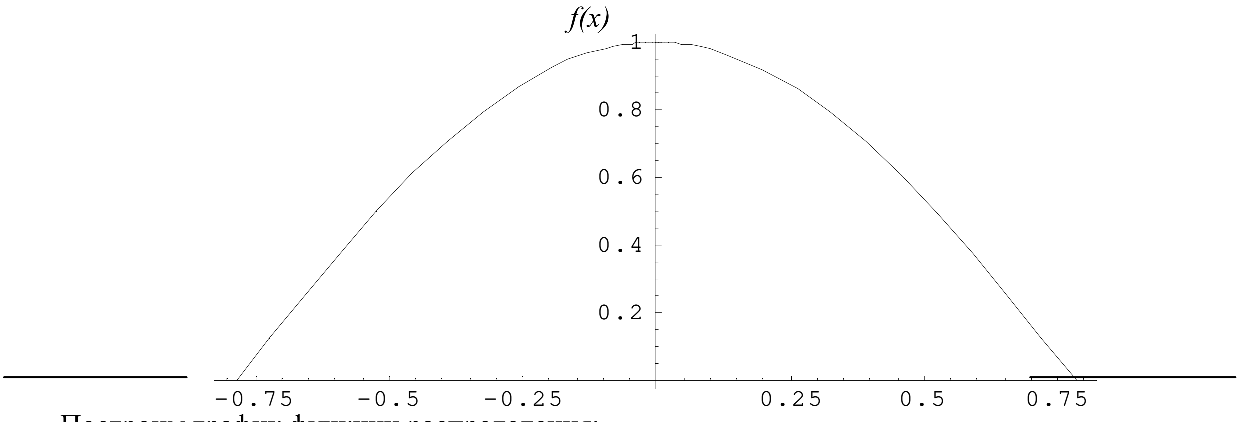
1) На участке $x < -\frac{\pi}{4}$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0.$

2) На участке $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$: $F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int_{-\pi/4}^{x} \cos 2xdx = \frac{\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{x} = \frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{2}.$

3) На участке $x > \frac{\pi}{4}$: $F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2xdx + \int_{\pi/4}^{x} 0dx = \frac{\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 1.$

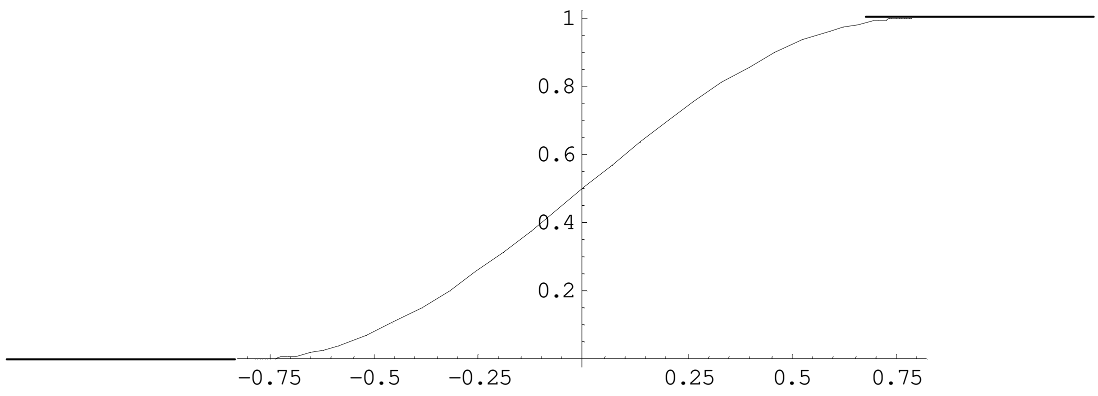
Итого: $f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & при \quad -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4} \\ 0, & при \quad |x| > \frac{\pi}{4} \end{cases}$; $\quad F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < -\frac{\pi}{4} \\ \frac{\sin 2x + 1}{2}, & при \quad -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}; \\ 1, & при \quad x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$

Построим график плотности распределения:



Построим график функции распределения:

F(x)



Найдем вероятность попадания случайной величины в интервал $\left(\frac{\pi}{6}; 2\right)$.

$$P\left(\frac{\pi}{6} < x < 2\right) = \int\limits_{\pi/6}^{2} f(x)dx = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \cos 2x dx + \int\limits_{\pi/4}^{2} 0 dx = \frac{\sin 2x}{2}\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0{,}067;$$

Ту же самую вероятность можно искать и другим способом:

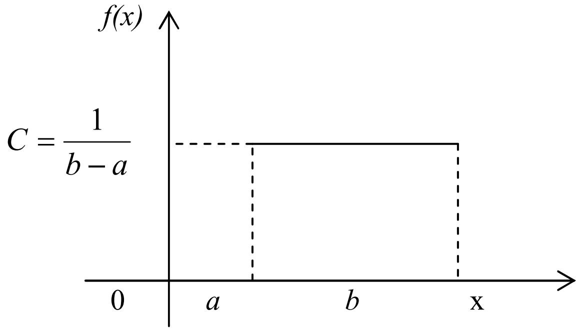
$$P\left(\frac{\pi}{6} < x < 2\right) = F(2) - F(\pi/6) = 1 - \frac{\sin(\pi/3) + 1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0{,}067.$$

7 Виды распределение НСВ.

Определение. Непрерывная случайная величина имеет **равномерное** распределение на отрезке $[a; b]$, если на этом отрезке плотность распределения случайной величины постоянна, а вне его равна нулю.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ C, & a \le x \le b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

Постоянная величина С может быть определена из условия равенства единице площади, ограниченной кривой распределения.

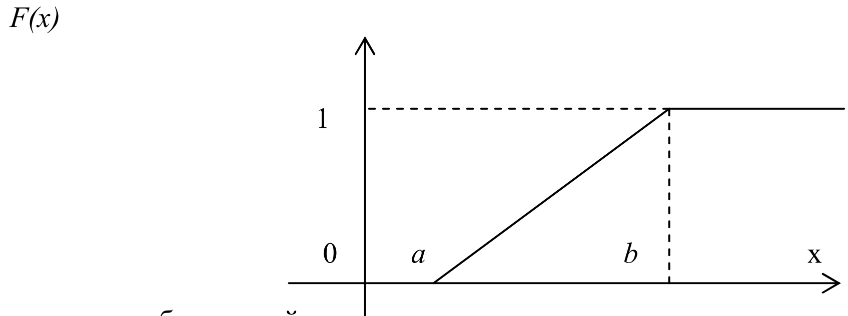


Получаем $C = \frac{1}{b-a}$.

Найдем функцию распределения *F(x)* на отрезке $[a; b]$.

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int\limits_{a}^{x} \frac{1}{b-a} dx = \frac{x}{b-a}\Big|_{a}^{x} = \frac{x-a}{b-a}.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & при \quad a \le x \le b \\ 1, & при \quad x > b \end{cases}$$



Для того чтобы случайная величина подчинялась закону равномерного распределения необходимо, чтобы ее значения лежали внутри некоторого определенного интервала, и внутри этого интервала значения этой случайной величины были бы равновероятны.

Определим математическое ожидание и дисперсию случайной величины, подчиненной равномерному закону распределения.

$$m_x = \int_a^b x f(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b = \frac{a+b}{2}.$$

$$m_{x^2} = \int_a^b x^2 f(x)dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

$$D_x = m_{x^2} - m_x^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{b-a} = \frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

Показательное распределение.

__Определение.__ **Показательным (экспоненциальным)** называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины Х, которое описывается плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & при \quad x \ge 0 \end{cases}$$

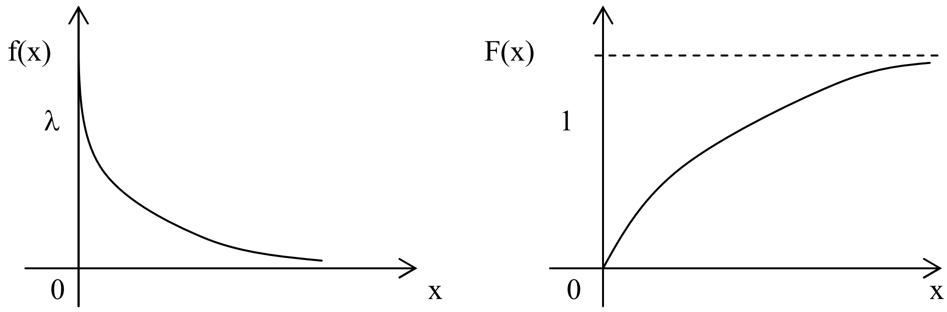
где λ - положительное число.

Найдем закон распределения.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \lambda\int_0^x e^{-\lambda x}dx = 1 - e^{-\lambda x}.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & при \quad x \ge 0 \end{cases}$$

Графики функции распределения и плотности распределения:



Найдем математическое ожидание случайной величины, подчиненной показательному распределению.

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = \begin{Bmatrix} u = x; & e^{-\lambda x}dx = dv; \\ du = dx; & -\dfrac{e^{-\lambda x}}{\lambda} = v; \end{Bmatrix} = \lambda\left(-\frac{xe^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}dx\right) =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Результат получен с использованием того факта, что

$$xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{\lambda x}} - 0 = \begin{Bmatrix} \text{По} \quad \text{правилу} \\ \text{Лопиталя} \end{Bmatrix} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{-\lambda e^{\lambda x}} = 0.$$

Для нахождения дисперсии найдем величину M(X^2).

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{\infty}\lambda x^2 e^{-\lambda x}dx$$

Дважды интегрируя по частям, аналогично рассмотренному случаю, получим:

$$M(X^2) = \frac{2}{\lambda^2};$$

Тогда $D(X) = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$

Итого: $M(X) = \frac{1}{\lambda}; \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}; \quad \sigma_x = \frac{1}{\lambda}.$

Видно, что в случае показательного распределения математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение равны.

Также легко определить и вероятность попадания случайной величины, подчиненной показательному закону распределения, в заданный интервал.

$$P(a < x < b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Показательное распределение широко применяется в приложениях теории вероятностей, в частности, в теории надежности, одним из основных понятий этой теории является функция надежности.

Будем называть элементом любое устройство, независимо от его сложности.

Рассмотрим НСВ T – длительность времени безотказной работы элемента.

Функция распределения T определяет вероятность отказа элемента за время длительностью t: $P(T < t) = F(t)$.

Следовательно, вероятность безотказной работы за то же время:

$P(T \ge t) = 1 - F(t) = R(t)$ определяет функцию надежности.

$R(t) = e^{-\lambda t}; F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$

Часто, но не всегда, случайная величина Т имеет показательное распределение.

Нормальный закон распределения, его параметры.

Нормальным называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью вероятности:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}}$$

Можно легко показать, что параметры *a* и σ_x, входящие в плотность распределения являются соответственно математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением случайной величины *X*.

Нормальный закон распределения также называется *законом Гаусса*.

Нормальный закон распределения занимает центральное место в теории вероятностей. Это обусловлено тем, что этот закон проявляется во всех случаях, когда случайная величина является результатом действия большого числа различных факторов. К нормальному закону приближаются все остальные законы распределения.

Функция распределения имеет вид: $F(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma_x^2}} dt$.

Вероятность попадания случайной величины, распределенной по нормальному закону, в заданный интервал находится по формуле:

$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$,где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ – *функция Лапласа или интеграл вероятностей***.**

Значения этой функции при различных значениях *x* посчитаны и приводятся в специальных таблицах.

Функцию Лапласа является нечетной, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Существует множество распределений, основанных на нормальном распределении. В частности, χ^2 – распределение (хи-квадрат), распределение Стьюдента, распределение Фишера-Снедекора и другие.

Кривая Гаусса. Ее свойства и график.

График плотности нормального распределения называется *кривой Гаусса.*

Нормальная кривая обладает следующими свойствами:

1) функция определена на всей числовой оси;
2) при всех *x* функция распределения принимает только положительные значения;
3) ось OX является горизонтальной асимптотой графика плотности вероятности, т.к. при неограниченном возрастании по абсолютной величине аргумента *x*, значение функции стремится к нулю;
4) в точке *x = a* функция имеет максимум, равный $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$;
5) функция является симметричной относительно прямой *x = a*, т.к. разность (*x – a*) входит в функцию плотности распределения в квадрате;
6) при *x = a* + σ и *x = a* - σ функция имеет перегиб. Значение функции равно $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$.

Построим график функции плотности распределения.

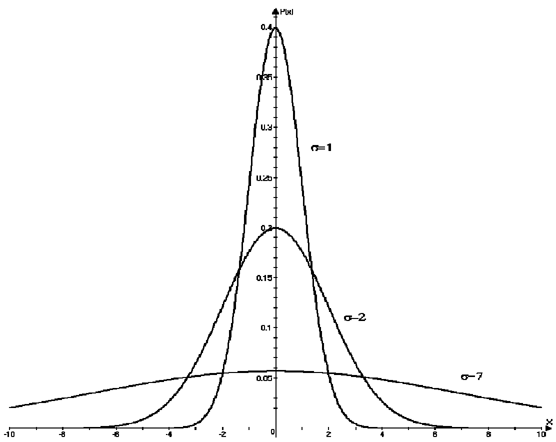


График функции плотности распределения

Построены графики при $a = 0$ и трех возможных значениях среднего квадратичного отклонения $\sigma = 1$, $\sigma = 2$ и $\sigma = 7$.

При $a = 0$ и $\sigma = 1$ кривая называется *нормированной*. Уравнение нормированной кривой: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Функции от случайных величин.

Найдем вероятность попадания случайной величины, распределенной по нормальному закону, в заданный интервал.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Обозначим $\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}} = t;\quad \frac{a-m}{\sigma\sqrt{2}} = \alpha;\quad \frac{b-m}{\sigma\sqrt{2}} = \beta;$

Тогда $P(a < X < b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-t^2} \sigma\sqrt{2}dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\left[\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)\right]$

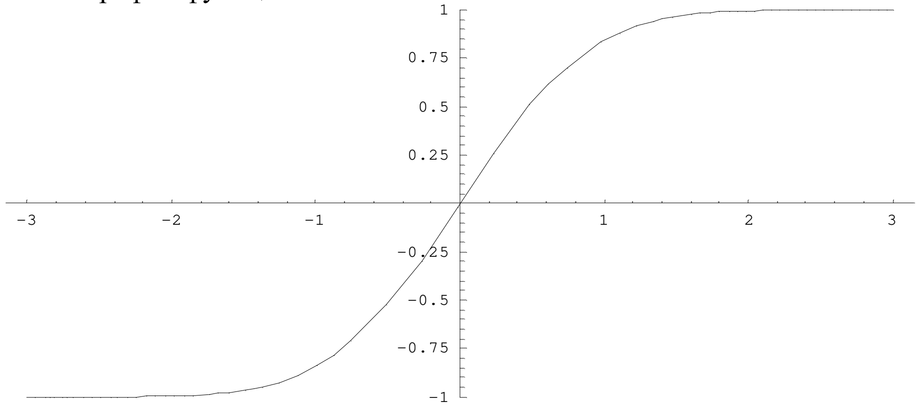
Т.к. интеграл $\int e^{-t^2} dt$ не выражается через элементарные функции, то вводится в рассмотрение функция

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

которая называется **функцией Лапласа** или **интегралом вероятностей**.

Значения этой функции при различных значениях x посчитаны и приводятся в специальных таблицах.

Ниже показан график функции Лапласа.



Функция Лапласа обладает следующими свойствами:

1) $\Phi(0) = 0$;

2) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;

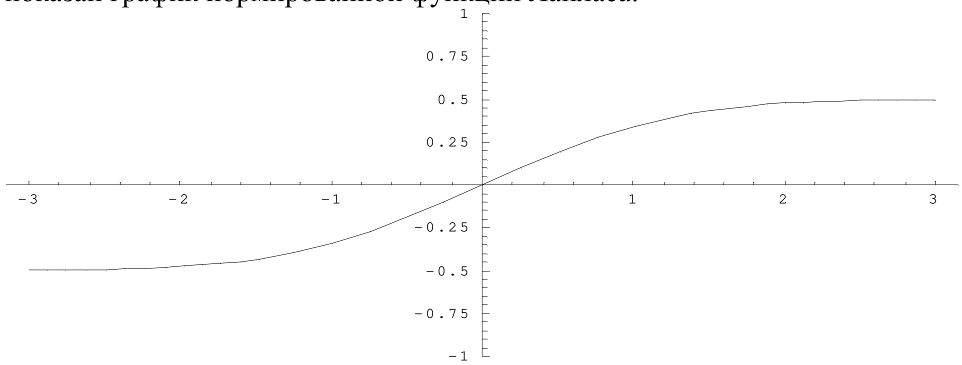
3) $\Phi(\infty) = 1$.

Функцию Лапласа также называют **функцией ошибок** и обозначают $\mathrm{erf}\,x$.

Еще используется **нормированная** функция Лапласа, которая связана с функцией Лапласа соотношением:

$$\overline{\Phi}(x) = \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt;$$

Ниже показан график нормированной функции Лапласа.



При рассмотрении нормального закона распределения выделяется важный частный случай, известный как **правило трех сигм**.

Запишем вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины от математического ожидания меньше заданной величины Δ:

$$P(|X-m| < \Delta) = \overline{\Phi}\left[\frac{m+\Delta-m}{\sigma}\right] - \overline{\Phi}\left[\frac{m-\Delta-m}{\sigma}\right] = \overline{\Phi}\left[\frac{\Delta}{\sigma}\right] - \overline{\Phi}\left[-\frac{\Delta}{\sigma}\right] = 2\overline{\Phi}\left[\frac{\Delta}{\sigma}\right]$$

Если принять $\Delta = 3\sigma$, то получаем с использованием таблиц значений функции Лапласа:

$$P(|X-m| < 3\sigma) = 2\overline{\Phi}(3) = 2\cdot 0{,}49865 = 0{,}9973$$

Т.е. вероятность того, что случайная величина отклонится от своего математического ожидание на величину, большую чем утроенное среднее квадратичное отклонение, практически равна нулю.

Это правило называется **правилом трех сигм**.

Не практике считается, что если для какой – либо случайной величины выполняется правило трех сигм, то эта случайная величина имеет нормальное распределение.

Пример. Поезд состоит из 100 вагонов. Масса каждого вагона – случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожидание a = 65 т и средним квадратичным отклонением σ = 0,9 т. Локомотив может везти состав массой не более 6600 т, в противном случае необходимо прицеплять второй локомотив. Найти вероятность того, что второй локомотив не потребуется.

Второй локомотив не потребуется, если отклонение массы состава от ожидаемого (100·65 = 6500) не превосходит 6600 – 6500 = 100 т.

Т.к. масса каждого вагона имеет нормальное распределение, то и масса всего состава тоже будет распределена нормально.

Получаем:

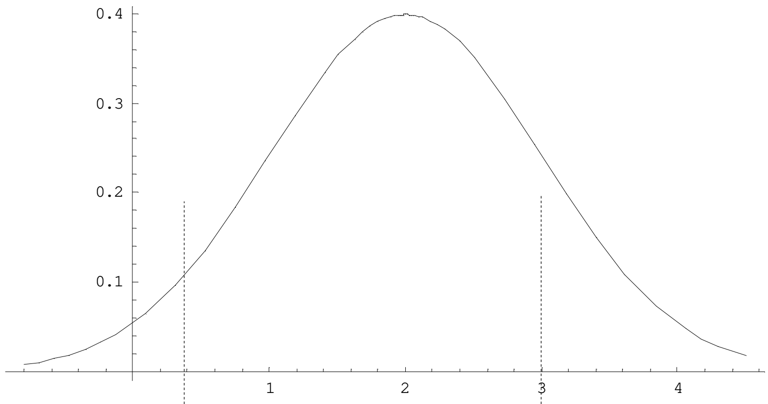
$$P(|X - M(X)| < 100 = 2\overline{\Phi}\left[\frac{100}{100\sigma}\right] = 2\overline{\Phi}[1{,}111] = 2\cdot 0{,}3665 = 0{,}733$$

Пример. Нормально распределенная случайная величина Х задана своими параметрами – a $=2$ – математическое ожидание и σ = 1 – среднее квадратическое отклонение. Требуется написать плотность вероятности и построить ее график, найти вероятность того, Х примет значение из интервала (1; 3), найти вероятность того, что Х отклонится (по модулю) от математического ожидания не более чем на 2.

Плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}};$$

Построим график:



Найдем вероятность попадания случайной величины в интервал (1; 3).

$$P(1 < X < 3) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{3-2}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{\sqrt{2}}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\Phi(0{,}7071) + \Phi(0{,}7071)\right] = 0{,}6778.$$

Найдем вероятность отклонение случайной величины от математического ожидания на величину, не большую чем 2.

$$P(|X-2| < 2) = \Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma\sqrt{2}}\right) = \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \Phi(\sqrt{2}) \approx 0{,}95.$$

Тот же результат может быть получен с использованием нормированной функции Лапласа.

$$P(|X-2| < 2) = 2\overline{\Phi}\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right) = 2\overline{\Phi}(2) = 2 \cdot 0{,}4772 \approx 0{,}95.$$

1.7.Лекция № 7 (2 часа)

Тема «Основные понятия математической статистики»

1.7.1. Вопросы лекции:

1 Статистические методы.

2Статистическое описание.

3. Определение и вычисление статистик случайной выборки.

1.7.2. Краткое содержание вопросов

1 Статистические методы.

Предметом математической статистики является изучение случайных величин (или случайных событий) по результатам наблюдений.

Для получения опытных данных необходимо провести обследование соответствующих объектов.

Определение. Совокупность всех мысленно возможных объектов данного вида, над которыми проводятся наблюдения с целью получения конкретных значений определённой случайной величины, называется генеральной совокупностью.

Генеральную совокупность будем называть конечной или бесконечной в зависимости от того, конечна или бесконечна совокупность составляющих её элементов.

Определение. Часть отобранных объектов из генеральной совокупности называется выборочной совокупностью или выборкой.

Определение. Число N объектов генеральной совокупности и число n объектов выборочной совокупности будем называть объёмами генеральной и выборочной совокупности соответственно.

Для того чтобы по выборке можно было достаточно уверенно судить о случайной величине, выборка должна быть представительной (репрезентативной). Репрезентативность выборки означает, что объекты выборки достаточно хорошо представляют генеральную совокупность. Она обеспечивается случайностью отбора.

2 Статистическое описание.

На практике применяют различные способы отбора статистического материала. Принципиально эти два способа можно разделить на два вида:

1) Отбор, не требующий расчленения генеральной совокупности на части. Сюда относятся: а) простой случайный бесповторный отбор; б) простой случайный повторный отбор. Один от другого отличается тем, что элемент генеральной совокупности либо не возвращается обратно, либо возвращается.

2) Отбор, при котором генеральная совокупность разбивается на части. Сюда относятся: а) механический; б) типический и в) серийный отборы.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 – n_2 раз, …, x_k – $n_к$ раз и $\sum n_i = n$ – объем выборки.

Определение. Наблюдаемые значения x_i называют **вариантами**, числа наблюдений n_i – **частотами**.

Определение. Вариационный ряд – ряд из вариант, записанных в возрастающем порядке.

Определение. Относительные частоты – отношения частот к объему выборки: $W_i = \dfrac{n_i}{n}$

Определение. Статистическое распределение выборки – это перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот.

Виды статистических распределений выборки:

1) дискретное распределение выборки:

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_k
n_i	n_1	n_2	n_3	…	n_k

или

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_k
W_i	W_1	W_2	W_3	…	W_k

2) интервальное распределение выборки:

$(x_{i-1};x_i)$	$(x_0;x_1)$	$(x_1;x_2)$	$(x_2;x_3)$	…	$(x_{k-1};x_k)$

n_i	n_1	n_2	n_3	…	n_k

или

$(x_{i-1};x_i)$	$(x_0;x_1)$	$(x_1;x_2)$	$(x_2;x_3)$	…	$(x_{k-1};x_k)$
W_i	W_1	W_2	W_3	…	W_k

Определение. Полигон частот – ломанная, отрезки которой соединяют точки $(x_1;n_1)$, $(x_2;n_2)$, …, $(x_k;n_k)$.

Определение. Полигон относительных частот – ломанная, отрезки которой соединяют точки $(x_1;W_1)$, $(x_2;W_2)$, …, $(x_k;W_k)$.

Определение. Гистограмма частот – ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых являются частичные интервалы длиною Δx, а высотами – значения плотностей частот: $h_i = \dfrac{n_i}{h}$.

Замечание. Площадь гистограммы частот равна объему выборки.

Определение. Гистограмма относительных частот – ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых являются частичные интервалы длиною h, а высотами – соответствующие значения плотностей относительных частот: $P_i' = \dfrac{W_i}{h}$.

Замечание. Площадь гистограммы относительных частот равна единице.

3. Определение и вычисление статистик случайной выборки.

Для описания основных свойств статистических распределений чаще всего используют *выборочные характеристики* следующих видов:

- *выборочная средняя:* характеризует типичное для выборки значение признака *X*; приближенно характеризует (оценивает) типичное для генеральной совокупности значение признака *X;*
- *средняя арифметическая*: применяется к вариационному ряду (данные наблюдения не сгруппированы) $\overline{x}_{\text{в}} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_j$;
- *взвешенная средняя арифметическая* (частоты m_i, и частости w_i называют весами): используется, если данные сгруппированы; непосредственно применима только к статистическому распределению дискретного признака (дискретному ряду)

$$\overline{x}_{\text{в}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} x_i \cdot m_i}{\sum\limits_{i=1}^{k} m_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot m_i\ ,\ \overline{x}_{\text{в}} = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot w_i\ ;$$

- *медиана* – это серединное значение признака *X*; по определению

$$F^*\left(x_{\text{ме}}\right) = \frac{1}{2}\ .$$

$x_{\text{ме}} = \dfrac{x_j + x_{j+1}}{2}$,если $n = 2j$ – четное;

$x_{\text{ме}} = x_{j+1}$, если $n = 2j+1$ – нечетное;

- *мода* – наиболее часто встречающееся значение признака *X*. $x_{\text{мо}} = x_i$, если $m_i = m_{\max}$ (справедливо только для дискретного ряда).

Если $\overline{x}_{\text{в}} = x_{\text{мо}} = x_{\text{ме}}$, то распределение симметричное. При нарушении симметрии равенство нарушается.

Характеристики вариации (рассеяния)

- *выборочная дисперсия* есть выборочная средняя арифметическая квадратов отклонений значений признака X от выборочной средней $\bar{x}_{\text{в}}$ (равна «среднему квадрату без квадрата средней»):

$$D_{\text{в}} = \overline{(x - \bar{x}_{\text{в}})^2}\,,\ D_{\text{в}} = \overline{x^2} - \bar{x}_{\text{в}}^2\,;$$

Выборочная дисперсия применяется к вариационному ряду (данные наблюдения не сгруппированы):

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x}_{\text{в}})^2\ ;$$

- *выборочная взвешенная дисперсия:* используется, если данные сгруппированы; непосредственно применима только к статистическому распределению дискретного признака (дискретному ряду)

$$D_{\text{в}} = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2 \cdot m_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2 \cdot m_i\,,\ D_{\text{в}} = \sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2 \cdot w_i\ ;$$

- *средний квадрат* есть выборочная средняя арифметическая квадратов значений признака X (для вариационного ряда и для дискретного распределения соответственно):

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^2\,,\ \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot m_i\ ;$$

- *выборочное среднее квадратическое отклонение* есть арифметическое значение корня квадратного из дисперсии; оно показывает, на сколько в среднем отклоняются значения x_j признака X от выборочной средней $\bar{x}_{\text{в}}$: $\sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}}$;
- *размах вариации:* $R = x_{\max} - x_{\min}$;
- *коэффициент вариации:* применяют для сравнения вариации признаков сильно отличающихся по величине, или имеющих разные единицы измерения (разные наименования): $v = \dfrac{\sigma_{\text{в}}}{\bar{x}_{\text{в}}} \cdot 100\ \%$.

Если исходный вариационный ряд недоступен, приведенные выше формулы вычисления выборочных характеристик, применимые только к дискретному ряду, могут быть использованы для приближенного вычисления выборочных характеристик непрерывного признака, представленного интервальным рядом. Для этого предварительно каждый интервал x_{i-1}–x_i заменяется его серединой $x'_i = (x_{i-1} + x_i)/2$, то есть производится замена интервального ряда дискретным, соответствующим ему приближенно.

1.8.Лекция № 8 (2 часа)

Тема «Точечные и интервальные оценки»

1.8.1. Вопросы лекции:

1 Точечные оценки. Несмещенные и состоятельные оценки.

2Доверительный интервал. Надежность.

3. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения.

1.8.2. Краткое содержание вопросов

1 Точечные оценки. Несмещенные и состоятельные оценки.

Важной задачей математической статистики является задача оценивания (приближенного определения) по выборочным данным параметров закона распределения признака *X* генеральной совокупности. Другими словами, необходимо по данным выборочного распределения оценить неизвестные параметры теоретического распределения. Статистические оценки могут быть точечными и интервальными.

Пусть признак *X* генеральной совокупности распределен нормально, то есть теоретическое распределение имеет вид:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

с параметрами:

$a = M(X) = \overline{x}_{\text{ген}}$ – математическое ожидание признака *X*;

$\sigma = \sqrt{M((X - M(X))^2)} = \sigma_{\text{ген}}$ – среднеквадратическое отклонение признака *X*.

Точечной оценкой неизвестного параметра называют число (точку на числовой оси), которое приблизительно равно оцениваемому параметру и может заменить его с достаточной степенью точности в статистических расчетах.

Для того чтобы точечные статистические оценки обеспечивали «хорошие» приближения неизвестных параметров, они должны быть несмещенными, состоятельными и эффективными.

Пусть θ^* – точечная оценка неизвестного параметра θ.

Несмещенной называют такую точечную статистическую оценку θ^*, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру: $M\left(\theta^*\right) = \theta$.

Состоятельной называют такую точечную статистическую оценку, которая при $n \to \infty$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру. В частности, если дисперсия несмещенной оценки при $n \to \infty$ стремится к нулю, то такая оценка оказывается и состоятельной.

Эффективной называют такую точечную статистическую оценку, которая при фиксированном *n* имеет наименьшую дисперсию.

Можно показать, что выборочная средняя $\overline{x}_{\text{в}}$ является несмещенной, состоятельной и эффективной оценкой генеральной средней $\overline{x}_{\text{ген}}$. Точечными оценками генеральной дисперсии $D_{\text{ген}} = \sigma^2$ могут служить выборочная дисперсия $D_{\text{в}}$, или, при малых объемах выборки n, исправленная выборочная дисперсия: $S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_{\text{в}}$.

Точечными оценками для генерального среднеквадратического отклонения $\sigma_{\text{ген}} = \sigma$ могут служить: $\sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}}$ – выборочное среднее квадратическое отклонение или $S = \sqrt{S^2}$ – исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение.

2 Доверительный интервал. Надежность.

Для построения *интервальной оценки* рассмотрим событие, заключающееся в том, что отклонение точечной оценки параметра θ^* от истинного значения этого параметра θ по абсолютной величине не превышает некоторую положительную величину Δ. Вероятность такого события $P\left(\left|\theta-\theta^*\right|<\Delta\right)=\gamma$. Заменив неравенство $\left|\theta-\theta^*\right|<\Delta$ на равносильное, получим: $P\left(\theta^*-\Delta<\theta<\theta^*+\Delta\right)=\gamma$.

Вероятность того, что *доверительный интервал* $(\theta^*-\Delta\,,\ \theta^*+\Delta)$ заключает в себе (покрывает) неизвестный параметр θ равна γ и называется *доверительной вероятностью* или *надежностью* интервальной оценки. Величину Δ называют *точностью* оценки.

3. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения.

Построим интервальную оценку параметра $a=\overline{x}_{\text{ген}}$ для двух случаев:

1) параметр σ нормального закона распределения признака X генеральной совокупности *известен*. В этом случае интервальная оценка параметра $a=\overline{x}_{\text{ген}}$ с заданной надежностью γ определяется формулой:

$$\overline{x}_{\text{в}}-\Delta<a<\overline{x}_{\text{в}}+\Delta,$$

где $\Delta=\dfrac{t\cdot\sigma}{\sqrt{n}}$,

t – аргумент функции Лапласа: $\Phi(t)=\dfrac{\gamma}{2}$;

2) параметр σ нормального закона распределения признака X генеральной совокупности *неизвестен*. В этом случае интервальная оценка параметра $a=\overline{x}_{\text{ген}}$ с заданной надежностью γ определяется формулой:

$$\overline{x}_{\text{в}}-\Delta<a<\overline{x}_{\text{в}}+\Delta,$$

где $\Delta=\dfrac{t_\gamma\cdot S}{\sqrt{n}}$,

S – точечная оценка параметра σ,

$t_\gamma=t(\gamma,n)$ – значения распределения Стьюдента, которые находим по таблице.

Итак, доверительный интервал для оценки генеральной средней имеет вид:

$$I_\gamma=\begin{cases}\left(\overline{x}-t_\gamma\cdot\dfrac{s}{\sqrt{n}};\,\overline{x}+t_\gamma\cdot\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right), & \textit{при } n<30\\[2ex] \left(\overline{x}-t\cdot\dfrac{s}{\sqrt{n}};\,\overline{x}+t\cdot\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right), & \textit{при } n\ge 30\end{cases},$$

где

$\gamma-$ надежность,

$t_\gamma=t(n;\gamma)$ – значение в табл. 4;

$t-$аргумент функции Лапласа, $\Phi(t)=\dfrac{\gamma}{2}$.

1.9.Лекция № 9 (2 часа)

Тема «Статистическая проверка статистических гипотез»

1.9.1. Вопросы лекции:

1 Понятие статистической гипотезы. Нулевая и альтернативная гипотезы.

2.Статистические критерии проверки гипотез.

1.9.2. Краткое содержание вопросов

1 Понятие статистической гипотезы. Нулевая и альтернативная гипотезы.

Определение. Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения, или о параметрах известных распределений.

Например, во многих практических задачах точный закон распределения исследуемого признака X генеральной совокупности неизвестен. В этом случае необходимо проверить *гипотезу* о предполагаемом законе распределения.

Определение. Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0.

Определение. Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу H_1, которая противоречит основной.

Например:

H_0: признак X имеет нормальный закон распределения.

H_1: признак X имеет закон распределения, отличный от нормального.

Определение. Простой называют гипотезу, содержащую только одно предположение.

Определение. Сложной называют гипотезу, которая состоит из конечного или бесконечного числа простых гипотез.

Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость ее проверки. В итоге статистической проверки гипотезы в двух случаях могут быть допущены ошибки:

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза. Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза.

Таким образом, возможны случаи:

Гипотеза H_0	Принимается	Отвергается
Верна	Правильное решение	*Ошибка первого рода*
Неверна	*Ошибка второго рода*	Правильное решение

Определение. Вероятность допустить ошибку первого рода (отвергнуть нулевую гипотезу, когда она верна) называется *уровнем значимости критерия*.

Определение. Вероятность не допустить ошибку второго рода (отвергнуть нулевую гипотезу, когда она неверна) называется *мощностью критерия.*

2 Статистические критерии проверки гипотез. Мощность критерия.

Для проверки нулевой гипотезы используют специально подобранную случайную величину, точное или приближенное значение которой известно. Обозначим эту величину K.

Определение. Статистическим критерием называют случайную величину K, которая служит для проверки нулевой гипотезы.

Для проверки гипотезы по данным выборок вычисляют частные значения входящих в критерий величин и таким образом получают наблюдаемое значение критерия.

После выбора определенного критерия множество всех его возможных значений разбивают на два непересекающихся подмножества: одно из них содержит значения критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается (критическая область), другое – при которых она принимается (область допустимых значений).

Основной принцип проверки статистических гипотез: если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области, то гипотезу отвергают, если области допустимых значений, то гипотезу принимают. Поскольку критерий K - одномерная случайная величина, все ее значения принадлежат некоторому интервалу. Поэтому существуют точки, которые отделяют критическую область от области допустимых значений.

Определение. Критическими точками называют точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

Различают одностороннюю (правостороннюю и левостороннюю) и двустороннюю критические области.

Параметрические и непараметрические критерии. Условия применимости.

Критерий χ^2 Пирсона («хи-квадрат») – наиболее часто употребляемый критерий, может применяться для проверки гипотезы о любом законе распределения. Независимо от того, какое распределение имеет *X*, распределение случайной величины χ^2: $\chi^2 = \sum\limits_{i=1}^{s} \dfrac{(m_i^{\text{э}} - m_i^{\text{т}})^2}{m_i^{\text{т}}}$,

где $m_i^{\text{э}}$ – эмпирические частоты, $m_i^{\text{т}}$ – теоретические частоты; при $n \to \infty$ стремится к χ^2– распределению с k степенями свободы.

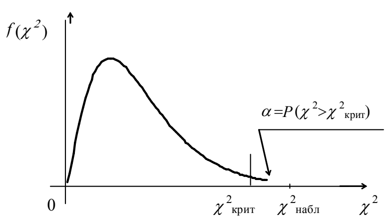
Теоретические частоты определяются, исходя из предположения о законе распределения генеральной совокупности, в данном случае о нормальном законе. Так как $p_i = \dfrac{m_i}{n}$, где p_i – теоретическая вероятность, то $m_i^{\text{т}} = n \cdot p_i$. *Для дискретного ряда*: $p_i = \dfrac{h}{\sigma_{\text{в}}} \cdot f(u_i)$, где $u_i = \dfrac{x_i - \overline{x}_в}{\sigma_{\text{в}}}$, $f(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}$ –дифференциальная функция нормированного нормального распределения, шаг $h = x_i - x_{i-1}$, $\overline{x}_{\text{в}}$ – выборочная средняя, $\sigma_{\text{в}}$ – выборочное среднее квадратическое отклонение.

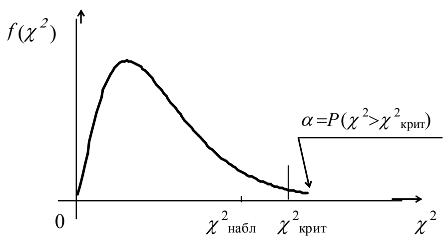
Для интервального ряда: $p_i = P(x_{i-1} < X < x_i) = \Phi\left(\dfrac{x_i - \overline{x}_{\text{в}}}{\sigma_{\text{в}}}\right) - \Phi\left(\dfrac{x_{i-1} - \overline{x}_{\text{в}}}{\sigma_{\text{в}}}\right)$, где $\Phi(t)$ – функция Лапласа.

Рассчитав теоретические частоты, находят $\chi^2_{\text{набл}}$. Из таблицы *критических точек* распределения χ^2 по заданному уровню значимости α (достаточно малая вероятность) и числу степеней свободы *k* находят $\chi^2_{\text{крит}}(\alpha, k)$ – границу правосторонней критической области. Здесь $k = s - r - 1$, где s – число различных значений x_i дискретного или число интервалов $(x_{i-1} - x_i)$ непрерывного признака *X*, *r* – число параметров предполагаемого закона распределения, для нормального распределения $r = 2$, отсюда $k = s - 3$. Затем сравнивают $\chi^2_{\text{набл}}$ и $\chi^2_{\text{крит}}(\alpha, k)$ и делают вывод.

При формулировке вывода руководствуются следующим правилом:

- если *наблюдаемое значение* критерия $\chi^2_{\text{набл}}$ попало в *область принятия гипотезы* ($\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{крит}}(\alpha, k)$), как показано на рисунке (Рисунок 3а.), то нет оснований отвергать нулевую гипотезу, по данным наблюдения признак *X* имеет нормальный закон распределения, расхождение между эмпирическими и теоретическими частотами ($m_i^{\text{э}}$ и $m_i^{\text{т}}$) случайное;
- если наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{\text{набл}}$ попало в *критическую область* ($\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{крит}}(\alpha, k)$), как показано на рисунке (Рисунок 3б.), то нулевая гипотеза отвергается, справедлива конкурирующая гипотеза, то есть признак *X* имеет закон распределения, отличный от нормального, расхождение между эмпирическими и теоретическими частотами ($m_i^{\text{э}}$ и $m_i^{\text{т}}$) значимо.





1.10.Лекция № 10 (2 часа)

Тема «Корреляция»

1.10.1. Вопросы лекции:

1 Виды зависимостей между величинами (общая характеристика). Основные этапы статистического исследования зависимостей.

2.Корреляционная зависимость. Корреляционная таблица.

3. Коэффициент корреляции и его свойства.

4. Линейная регрессия, ее параметры.

1.10.2. Краткое содержание вопросов

1 Виды зависимостей между величинами (общая характеристика). Основные этапы статистического исследования зависимостей. 2.Корреляционная зависимость. Корреляционная таблица.

Корреляционная зависимость.

Условимся обозначать через X независимую переменную, а через Y – зависимую переменную.

Зависимость величины Y от X называется **функциональной**, если каждому значению величины X соответствует единственное значение величины Y. С функциональной зависимостью мы встречаемся, например, в математике, при изучении физических законов. Обратим внимание на то, что если X – детерминированная величина (т.е. принимающая вполне определённые значения), то и функционально зависящая от неё величина Y тоже является детерминированной; если же X – случайная величина, то и Y также случайная величина.

Однако гораздо чаще в окружающем нас мире имеет место не функциональная, а **стохастическая**, или **вероятностная**, **зависимость**, когда каждому фиксированному значению независимой переменной X соответствует не одно, а множество значений переменной Y, причём сказать заранее, какое именно значение примет величина Y, нельзя. Более частое появление такой зависимости объясняется действием на результирующую переменную не только контролируемого или контролируемых факторов (в данном случае таким контролируемым фактором является переменная X), а и многочисленных неконтролируемых случайный факторов. В этой ситуации переменная Y является случайной величиной. Переменная же X может быть как детерминированной, так и случайной величиной. Следует заметить, что со стохастической зависимостью мы уже сталкивались в дисперсионном анализе.

Допустим, что существует стохастическая зависимость случайной переменной Y от X. Зафиксируем некоторое значение x переменной X. При X = x переменная Y в силу её стохастической зависимости от X может принять любое значение из некоторого множества, причём какое именно – заранее неизвестно. Среднее этого множества называют **групповым генеральным средним** переменной Y при X = x или **математическим ожиданием случайной величины Y, вычисленным при условии, что X = x; это условное математическое ожидание обозначают так: M(Y/X = x)**. Если существует стохастическая зависимость Y от X, то прежде всего стараются выяснить, изменяются или нет при изменении x условные математические ожидания M(Y/X=x). Если при изменении x условные математические ожидания M(Y/X=x) изменяются, то говорят, что имеет место **корреляционная зависимость** величины Y от X; если же условные математические ожидания остаются неизменными, то говорят, что корреляционная зависимость величины Y от X отсутствует.

Функция φ(x)=M(Y/X=x), описывающая изменение условного математического ожидания случайной переменной Y при изменении значений x переменной X, называется **функцией регрессии**.

Выясним, почему именно при наличии стохастической зависимости интересуются поведением условного математического ожидания.

Рассмотрим пример. Пусть X – уровень квалификации рабочего, Y – его выработка за смену. Ясно, что зависимость Y от X не функциональная, а стохастическая: на выработку помимо квалификации влияет множество других факторов. Зафиксируем значение x уровня квалификации: ему соответствует некоторое множество значений выработки Y. Тогда M(Y/X = x) – средняя выработка рабочего при условии, что его уровень квалификации равен x, или, иначе говоря, M(Y/X = x) – это норматив выработки при уровне квалификации, равном x. Зная зависимость этого норматива от уровня квалификации, можно для любого уровня квалификации рассчитать норматив выработки и, сравнив его с реальной выработкой, оценить работу рабочего.

Корреляционная таблица.

Обратим внимание на то, что введённые понятия стохастической и корреляционной зависимости относились к генеральной совокупности.

Пусть имеется n наблюдений двумерной величины (X, Y). Наблюдавшиеся «иксы « и «игреки» поместим в табл. 17, которая называется **корреляционной таблицей** и строится следующим образом:

- «иксы» группируются в вариационный ряд, число групп которого обозначим ν; если это дискретный ряд, то x_1, x_2, …, x_ν– различающиеся между собой результаты наблюдений или варианты; если это интервальный ряд, то x_1, x_2, …, x_ν– центры интервалов;

- «игреки» группируют в вариационный ряд, число групп которого обозначим q: $y_1, y_2, \ldots, y_q$ – это либо варианты, если ряд дискретный, либо середины интервалов, если ряд интервальный;

- подсчитывают числа m_{ji} таких наблюдавшихся пар чисел (x, y), у которых x попадает в группу x_i, а y – в группу y_j, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, $j = 1, 2, \ldots, q$; например, m_{12} – число пар чисел (x, y), у которых x попало в группу x_2, а y – в группу y_1. Числа m_{11}, m_{12}, …, $m_{q\nu}$ называются **частотами**.

2. Коэффициент корреляции.

Определение. Корреляционным моментом μ_{xy} случайных величин X и Y называется математическое ожидание произведения отклонений этих величин.

$$\mu_{xy} = M\{[X - M(X)][Y - M(Y)]\}$$

Практически используются формулы:

Для дискретных случайных величин:

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[x_i - M(X)][y_j - M(Y)]p(x_i, y_j)$$

Для непрерывных случайных величин:

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x - M(X)][y - M(Y)]f(x, y)dxdy$$

Корреляционный момент служит для того, чтобы охарактеризовать связь между случайными величинами. Если случайные величины независимы, то их корреляционный момент равен нулю.

Корреляционный момент имеет размерность, равную произведению размерностей случайных величин X и Y. Этот факт является недостатком этой числовой характеристики, т.к. при различных единицах измерения получаются различные корреляционные моменты, что затрудняет сравнение корреляционных моментов различных случайных величин.

Для того, чтобы устранить этот недостаток применятся другая характеристика – коэффициент корреляции.

Определение. Коэффициентом корреляции r_{xy} случайных величин X и Y называется отношение корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений этих величин. $r_{xy} = \dfrac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$

Коэффициент корреляции является безразмерной величиной. Коэффициент корреляции независимых случайных величин равен нулю.

Свойство: Абсолютная величина корреляционного момента двух случайных величин X и Y не превышает среднего геометрического их дисперсий. $|\mu_{xy}| \le \sqrt{D_x D_y}$

Свойство: Абсолютная величина коэффициента корреляции не превышает единицы.

$$|r_{xy}| \le 1$$

Случайные величины называются **коррелированными**, если их корреляционный момент отличен от нуля, и **некоррелированными**, если их корреляционный момент равен нулю.

Если случайные величины независимы, то они и некоррелированы, но из некоррелированности нельзя сделать вывод о их независимости.

Если две величины зависимы, то они могут быть как коррелированными, так и некоррелированными.

Рассмотрим следующую задачу. Была проведена серия измерений двух случайных величин X и Y, причем измерения проводились попарно: т.е. за одно измерение мы получали два значения - x_i и y_i. Имея выборку, состоящую из пар $(x_i,\ y_i)$, мы хотим определить, имеется ли между этими двумя переменными зависимость.

Зависимость между случайными величинами может иметь функциональный характер, т.е. быть строгим функциональным отношением, связывающим их значения. Однако при обработке экспериментальных данных гораздо чаще встречаются зависимости другого рода: статистические зависимости. Различие между двумя видами зависимостей состоит в том, что функциональная зависимость устанавливает строгую взаимосвязь между переменными, а статистическая зависимость лишь говорит о том, что распределение случайной величины Y зависит от того, какое значение принимает случайная величина X.

Одной из мер статистической зависимости между двумя переменными является коэффициент корреляции. Он показывает, насколько ярко выражена тенденция к росту одной переменной при увеличении другой. Коэффициент корреляции находится в диапазоне *[-1, 1]*. Нулевое значение коэффициента обозначает отсутствие такой тенденции (но не обязательно отсутствие зависимости вообще). Если тенденция ярко выражена, то коэффициент корреляции близок к *+1* или *-1* (в зависимости от знака зависимости), причем строгое равенство единице обозначает крайний случай статистической зависимости - функциональную зависимость. Промежуточные значения коэффициента корреляции говорят, что хотя тенденция к росту одной переменной при увеличении другой не очень ярко выражена, но в какой-то мере она все же присутствует.

Замечание.

Коэффициент корреляции, рассчитанный на основе выборки конечного размера, лишь приближенно равен истинному значению коэффициента корреляции между двумя случайными величинами. В частности, если две случайные величины не зависят друг от друга, коэффициент корреляции между ними равен нулю. Но рассчитав его на основе конечной выборки, мы скорее всего получим ненулевое значение. Чтобы определить, насколько значимо отличие коэффициента корреляции от ноля, можно воспользоваться соответствующим методом проверки гипотез.

4.Линейная регрессия, ее параметры.

Следующим этапом является *регрессионный анализ*, с помощью которого корреляционную зависимость между признаками приближенно выражают в виде линейного уравнения регрессии вида $\overline{y}_x \approx a_0 + a_1\overline{x}$. Неизвестные параметры a_0 и a_1 находятся методом наименьших квадратов. Применяя этот метод, получаем следующую систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} a_0 + a_1\overline{x} = \overline{y} \\ a_0\overline{x} + a_1\overline{x^2} = \overline{xy} \end{cases}.$$

Решая систему, находят оценки параметров a_0 и a_1. Уравнение регрессии можно записать в таком виде: $\overline{y}_x - \overline{y} = \dfrac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\sigma_x^2}(x - \overline{x})$.

Параметр $a_1 = \dfrac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\sigma_x^2}$ – *коэффициент регрессии* – показывает, как изменится в среднем результативный признак, если факторный признак увеличится на единицу своего измерения. Уравнение регрессии можно использовать для *прогнозирования* (предсказания).

Существует несколько различных коэффициентов корреляции, к каждому из которых относится сказанное выше. Наиболее широко известен коэффициент корреляции Пирсона, характеризующий степень линейной зависимости между переменными. Он определяется, как

$$r = \frac{\sum_i (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_i (x_i - \overline{x})^2}\sqrt{\sum_i (y_i - \overline{y})^2}}$$

Свойства выборочного коэффициента корреляции:

1) $-1 \le r \le 1$;

2) чем больше $|r|$, тем теснее линейная корреляция между двумя признаками;

3) если $|r| = 1$, то корреляционная зависимость становится функциональной;

4) если $r = 0$, то между изучаемыми признаками нет линейной корреляции, но возможно существование какого-либо другого вида корреляционной зависимости (параболической, гиперболической и т.д.).

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ

ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

2.1 Лабораторная работа №1 (2 часа).

Тема: «Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения. Полигон и гистограмма. Статистические оценки параметров распределения. Точечные оценки. Интервальные оценки. Статистическая проверка статистических гипотез»

2.1.1 Цель работы: научится определять значимость числовых характеристик

статистического распределения

2.1.2 Задачи работы:

1.Рассмотреть определение статистической гипотезы.
2. Выяснить что называется проверкой гипотез?
3. Задачи статистической проверки гипотез.
4. Определение нулевой гипотезы.
5. Определение конкурирующей гипотезы.
6. Определение статистического критерия.
7. Основной принцип проверки гипотез.

2.1.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

2.1.4 Описание (ход) работы:

Понятие статистической гипотезы. Нулевая и альтернативная гипотезы.

Определение. Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения, или о параметрах известных распределений.

Например, во многих практических задачах точный закон распределения исследуемого признака X генеральной совокупности неизвестен. В этом случае необходимо проверить *гипотезу* о предполагаемом законе распределения.

Определение. Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0.

Определение. Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу H_1, которая противоречит основной.

Например:

H_0: признак X имеет нормальный закон распределения.

H_1: признак X имеет закон распределения, отличный от нормального.

Определение. Простой называют гипотезу, содержащую только одно предположение.

Определение. Сложной называют гипотезу, которая состоит из конечного или бесконечного числа простых гипотез.

Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость ее проверки. В итоге статистической проверки гипотезы в двух случаях могут быть допущены ошибки:

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза. Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза.

Таким образом, возможны случаи:

Гипотеза H_0	Принимается	Отвергается
Верна	Правильное решение	*Ошибка первого рода*
Неверна	*Ошибка второго рода*	Правильное решение

Определение. Вероятность допустить ошибку первого рода (отвергнуть нулевую гипотезу, когда она верна) называется *уровнем значимости критерия*.

Определение. Вероятность не допустить ошибку второго рода (отвергнуть нулевую гипотезу, когда она неверна) называется *мощностью критерия.*

Статистические критерии проверки гипотез. Мощность критерия.

Для проверки нулевой гипотезы используют специально подобранную случайную величину, точное или приближенное значение которой известно. Обозначим эту величину K.

Определение. Статистическим критерием называют случайную величину K, которая служит для проверки нулевой гипотезы.

Для проверки гипотезы по данным выборок вычисляют частные значения входящих в критерий величин и таким образом получают наблюдаемое значение критерия.

После выбора определенного критерия множество всех его возможных значений разбивают на два непересекающихся подмножества: одно из них содержит значения критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается (критическая область), другое – при которых она принимается (область допустимых значений).

Основной принцип проверки статистических гипотез: если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области, то гипотезу отвергают, если области допустимых значений, то гипотезу принимают.

Поскольку критерий K - одномерная случайная величина, все ее значения принадлежат некоторому интервалу. Поэтому существуют точки, которые отделяют критическую область от области допустимых значений.

Определение. Критическими точками называют точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

Различают одностороннюю (правостороннюю и левостороннюю) и двустороннюю критические области.

Параметрические и непараметрические критерии. Условия применимости.

Критерий χ^2 Пирсона («хи-квадрат») – наиболее часто употребляемый критерий, может применяться для проверки гипотезы о любом законе распределения. Независимо от того, какое распределение имеет *X*, распределение случайной величины χ^2: $\chi^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{(m_i^{э} - m_i^{т})^2}{m_i^{т}}$, где $m_i^{э}$ – эмпирические частоты, $m_i^{т}$ – теоретические частоты; при $n \to \infty$ стремится к χ^2 – распределению с k степенями свободы.

Теоретические частоты определяются, исходя из предположения о законе распределения генеральной совокупности, в данном случае о нормальном законе. Так как $p_i = \frac{m_i}{n}$, где p_i – теоретическая вероятность, то $m_i^{т} = n \cdot p_i$.

Для дискретного ряда: $p_i = \frac{h}{\sigma_в} \cdot f(u_i)$, где $u_i = \frac{x_i - \bar{x}_в}{\sigma_в}$, $f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}$ – дифференциальная функция нормированного нормального распределения, шаг $h = x_i - x_{i-1}$, $\bar{x}_в$ – выборочная средняя, $\sigma_в$ – выборочное среднее квадратическое отклонение.

Для интервального ряда:

$$p_i = P(x_{i-1} < X < x_i) = \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}_в}{\sigma_в}\right) - \Phi\left(\frac{x_{i-1} - \bar{x}_в}{\sigma_в}\right),$$ где $\Phi(t)$ – функция Лапласа.

Рассчитав теоретические частоты, находят $\chi^2_{набл}$. Из таблицы *критических точек* распределения χ^2 по заданному уровню значимости α (достаточно малая вероятность) и числу степеней свободы k находят $\chi^2_{крит}(\alpha, k)$ – границу правосторонней критической области. Здесь $k = s - r - 1$, где s – число различных значений x_i дискретного или число интервалов $(x_{i-1} - x_i)$ непрерывного признака *X*, *r* – число параметров предполагаемого закона распределения, для нормального распределения $r=2$, отсюда $k=s-3$. Затем сравнивают $\chi^2_{\text{набл}}$ и $\chi^2_{\text{крит}}(\alpha, k)$ и делают вывод.

При формулировке вывода руководствуются следующим правилом:

* если *наблюдаемое значение* критерия $\chi^2_{\text{набл}}$ попало в *область принятия гипотезы* ($\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{крит}}(\alpha, k)$), как показано на рисунке (Рисунок 3а.), то нет оснований отвергать нулевую гипотезу, по данным наблюдения признак X имеет нормальный закон распределения, расхождение между эмпирическими и теоретическими частотами ($m_i^{\text{э}}$ и $m_i^{\text{т}}$) случайное;

* если наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{\text{набл}}$ попало в *критическую область* ($\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{крит}}(\alpha, k)$), как показано на рисунке (Рисунок 3б.), то нулевая гипотеза отвергается, справедлива конкурирующая гипотеза, то есть признак X имеет закон распределения, отличный от нормального, расхождение между эмпирическими и теоретическими частотами ($m_i^{\text{э}}$ и $m_i^{\text{т}}$) значимо.

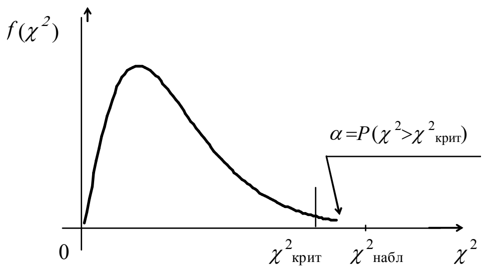


Рисунок 3а – Область принятия гипотезы

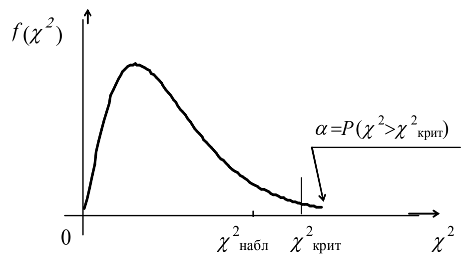


Рисунок 1 – Критическая область

Задания к работе:

На 10 опытных полях получены урожайности некоторой сельскохозяйственной культуры в контроле и в опыте с использованием некоторого комплексного удобрения. Результаты испытаний представлены в таблице. Проверить статистическую гипотезу о равенстве урожайностей в опыте (y) и в контроле (x) для уровня значимости α=0,05, предлагая, что урожайность является нормально распределенной случайной величиной.

№ п/п	Номер варианта									
	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10
	x y	xy	xy	xy	xy	xy	xy	xy	xy	xy
1	41 47	25 36	11 9	15 12	26 36	3 5	28 30	1 6	13 15	4 5
2	40 48	30 38	10 12	14 16	23 28	8 9	29 31	2 3	14 19	3 9
3	39 44	25 42	6 8	17 19	18 21	2 3	27 26	5 9	10 12	6 7
4	38 45	30 36	8 10	10 12	12 19	4 7	18 27	8 7	11 8	2 7
5	36 42	35 34	9 9	13 18	14 13	3 4	16 15	2 6	15 15	3 8
6	37 45	35 38	12 13	15 15	17 23	2 9	17 21	1 1	18 19	7 9
7	39 50	40 44	7 8	16 19	15 28	5 5	27 31	3 9	11 9	9 7
8	36 47	41 39	6 9	11 15	20 29	4 7	24 19	5 7	10 18	4 6
9	36 46	35 36	8 7	19 20	31 28	3 8	18 23	4 6	12 16	6 8
10	38 46	27 31	10 11	16 18	19 20	5 7	26 20	8 5	17 16	3 2

2.1 Лабораторная работа №2 (2 часа).

Тема: «Элементы теории корреляции. Коэффициент корреляции**»**

2.1.1 Цель работы: установить существование зависимости между двумя признаками и определять тесноту этой зависимости.

2.1.2 Задачи работы:

1. Дайте определение корреляционной зависимости.
2. В чем состоят две основные задачи теории корреляции?
3. Какую корреляционную зависимость называют линейной?
4. Дайте определение выборочного коэффициента корреляции и перечислите его свойства.
5. Запишите выборочные уравнения прямых регрессий.

2.1.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

2.1.4 Описание (ход) работы:

Определение. ***Корреляционной зависимостью (корреляцией)*** *называют зависимость, при которой изменение одной из величин влечет за собой изменение среднего значения другой величины.*

Определение. ***Корреляционной таблицей*** *называется таблица, в которой результаты наблюдений записаны в возрастающем порядке с указанием частот* n_{ij} *появления пары* $(x_i\,;\,y_j)$.

Определение. ***Условным средним*** $\overline{y}_x$ *называют среднее арифметическое значение величины* Y*, вычисленное при условии, что* X *принимает фиксированное значение.*

Определение. ***Эмпирической линией регрессии*** Y *на* X *называется ломанная, соединяющая точки* $M(x_i\,;\,\overline{y}_{x_i})$.

Определение. ***Теоретической линией регрессии*** Y *на* X *называется «сглаживающая» кривая, около которой группируются точки* $M(x_i\,;\,\overline{y}_{x_i})$*, а соответствующее уравнение* $y = f(x)$ *–* ***уравнением регрессии*** Y *на* X.

Для установления между двумя признаками линейной корреляции служит ***выборочный коэффициент корреляции***, который вычисляется по формуле:

$$r = \frac{\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \overline{x})^2} \cdot \sqrt{\sum (y_i - \overline{y})^2}} \qquad (1)$$

Свойства выборочного коэффициента корреляции:

1) $-1 \le r \le 1$;

2) чем больше $|r|$, тем теснее линейная корреляция между двумя признаками;

3) если $|r| = 1$, то корреляционная зависимость становится функциональной;

4) если $r = 0$, то между изучаемыми признаками нет линейной корреляции, но возможно существование какого-либо другого вида корреляционной зависимости (параболической, гиперболической и т.д.).

Если в результате опыта линейная зависимость между величинами Y и X выражена в виде таблицы:

X	x_1	x_2	. . .	x_i	. . .	x_n
Y	y_1	y_2	. . .	y_i	. . .	y_n

то параметры a и b уравнения прямой регрессии $y = ax + b$ находятся из нормированной системы по методу наименьших квадратов:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \qquad (2)$$

В случае малой выборки уравнение прямой регрессии вычисляют по формуле:

$$y - \overline{y} = b_{Y/X}\,(x - \overline{x}), \qquad (3)$$

где $b_{Y/X}$ - коэффициент регрессии, вычисляемый следующим образом:

$$b_{Y/X} = \frac{\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum (x_i - \overline{x})^2} \qquad (4)$$

$\overline{x}$ – выборочная средняя признака X,
$\overline{y}$ – выборочная средняя признака Y.

Пример 1. Значения величин X и Y, полученные в результате опыта, представлены в виде таблицы:

x_i	2	4	6	8	10
y_i	5,5	8,5	13,6	17,3	20,1

Найти способом наименьших квадратов уравнение прямой регрессии.

Решение. Для вычисления параметров удобно составить следующую таблицу:

x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
2	5,5	4	11
4	8,5	16	34
6	13,6	36	81,6
8	17,3	64	138,4
10	20,1	100	201
$\sum x_i = 30$	$\sum y_i = 65$	$\sum x_i^2 = 220$	$\sum x_i \cdot y_i = 466$

Подставив эти значения в систему, получим:

$$\begin{cases} 220a + 30b = 466 \\ 30a + 5b = 65 \end{cases}$$

Решая систему, находим параметры $a = 1{,}9$; $b = 1{,}6$.

Таким образом, зависимость между величинами X и Y выражается формулой $y = 1{,}9x + 1{,}6$.

Пример 2. Для 10 петушков леггорнов 15-дневного возраста были получены следующие данные о массе их тела X (г) и массе гребня Y (мг):

x_i	83	72	69	90	90	95	95	91	75	70
y_i	56	42	18	84	56	107	90	68	31	48

Требуется:
1) Найти коэффициент корреляции и сделать вывод о тесноте и направлении линейной корреляционной связи между признаками;
2) Составить уравнение прямой регрессии Y на X.

Решение. 1) Сначала сделаем промежуточные вычисления, которые удобно располагать в виде таблицы:

№	x_i	y_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$y_i - \overline{y}$	$(y_i - \overline{y})^2$	$(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$
1	83	56	0	0	– 4	16	0
2	72	42	–11	121	– 18	324	198

3	69	18	–14	196	– 42	1764	588
4	90	84	7	49	24	576	168
5	90	56	7	49	– 4	16	-28
6	95	107	12	144	47	2209	564
7	95	90	12	144	30	900	360
8	91	68	8	64	8	64	64
9	75	31	– 8	64	– 29	841	232
10	70	48	– 13	169	–12	144	156
$\sum$	830	600	0	1000	0	6854	2302

Вычисляем средние:

$$\bar{x} = \frac{830}{10} = 83; \quad \bar{y} = \frac{600}{10} = 60$$

Теперь заполняем последние пять столбцов таблицы. Суммируя элементы в соответствующих столбцах, находим:

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 1000,$$

$$\sum (y_i - \bar{y})^2 = 6854,$$

$$\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 2302$$

Подставляя вычисленные значения в формулу (83), получаем:

$$r = \frac{2302}{\sqrt{1000} \cdot \sqrt{6854}} \approx 0{,}88$$

<u>Вывод:</u> между массой тела X и массой гребня Y у 15-дневных петушков существует тесная положительная линейная корреляционная связь.

2) Используя данные из таблицы, по формуле (86) находим коэффициент регрессии $b_{Y/X}$:

$$b_{Y/X} = \frac{2302}{1000} \approx 2{,}3$$

Подставляя теперь в формулу (85) найденные значения $\bar{x} = 83$, $\bar{y} = 60$, $b_{Y/X} = 2{,}3$, имеем:

$y - 60 = 2{,}3(x - 83)$

Последнее уравнение преобразуем к виду

$$y = 2{,}3x - 130{,}9$$

Отметим, что полученная математическая модель (уравнение прямой регрессии) обладает прогнозирующими свойствами лишь при изменении x от 69 до 95. Так, например, можно с достаточной степенью достоверности считать, что при массе петушка 80 г масса его гребня составит

$$y = 2{,}32 \cdot 80 - 132{,}56 \approx 53 \text{ мг}.$$

Таким образом, $r \approx 0{,}88$, $y = 2{,}3x - 130{,}9$.

<u>Задания к работе:</u>

1. Получены данные между длиной колоса (X) и числом зерен (Y) в нем:

X	7	8	11	12	9	7	9	10	7	8	10	13	13	14	12	7	9	8	9	10
Y	15	20	28	28	23	17	23	25	16	21	23	28	31	32	30	16	25	20	23	25

По данным составить корреляционную таблицу; построить эмпирическую линию регрессии и записать уравнение теоретической линии регрессии, используя метод наименьших квадратов.

2. Методом наименьших квадратов найти уравнение прямой регрессии Y на X по данным, приведенным в корреляционной таблице:

X \ Y	16	26	36	46	56	n_x
20	4					4
25	6	8				14
30		10	32	4		46
35			3	12	1	16
40			9	6	5	20
n_y	10	18	44	22	6	100

3. Дано: $\overline{x} = 34{,}1$; $\overline{y} = 97{,}6$; $\sum (x_i - \overline{x})^2 = 244{,}4$; $\sum (y_i - \overline{y})^2 = 40{,}9$; $\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = -94{,}6$. Вычислить коэффициент корреляции и найти уравнение прямой регрессии Y на X.

4. Вычислите коэффициент регрессии Y на X, если известно, что $\overline{x} = 63$; $\overline{y} = 24$; $\sum (x_i - \overline{x})^2 = 356$; $\sum (y_i - \overline{y})^2 = 169$; $\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = 193$.

5. В таблице представлены данные о длине туши X (см) и толщине шпика Y (мм) для свиней:

x_i	93	101	95	97	102	94	96	100	95	92
y_i	36	31	34	35	30	35	36	31	36	37

Доказать, что между признаками X и Y существует обратная линейная корреляция. Записать уравнение прямой регрессии.

6. Были произведены измерения общей длины ствола в см (X) и длины его части без ветвей (Y) десяти молодых сосен. Результаты этого измерения представлены в таблице. Вычислить выборочный коэффициент корреляции и найти уравнение прямой регрессии Y на X.

x_i	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115
y_i	14	18	19	20	23	23	24	26	29	34

7. Сравнение массы каждого растения (Y) со средней массой его семян (X) показало следующие значения:

x_i	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105
y_i	70	72	71	73	75	74	76	77	78	77

Сделать вывод о тесноте и форме корреляции и найти уравнение прямой регрессии Y на X.

8. Графически оцените связь между массой тела и долей, какую масса мозга составляет от общей массы у обыкновенного тюленя.

Масса тела, кг	7,5	12,5	17,5	22,5	37,5	27,5	32,5
Масса мозга, %	4,10	2,24	1,12	0,85	0,55	0,68	0,55

9. Наблюдения показали, что удой группы коров ярославской породы изменяется по месяцам лактации следующим образом:

Лактация, мес.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Удой, ц.	18,2	20,1	23,4	24,6	25,6	25,9	23,6	22,7	19,2

Графически оцените зависимость между удоем коровы и сроками лактации.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

3.1.Практическое занятие 1

Тема: «Решение систем уравнений.» (2 часа)

3.1.1 Задание для работы:

1. Входной контроль.
2. Решение систем двух уравнений с двумя переменными.
3. Системы уравнений, имеющие одно, ни одного и бесчисленное множество решений.
4. Методы решения СЛУ.

3.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

Примерный вариант входного контроля

1. Вычислить: $2\frac{3}{4}:\left(1\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right)\cdot 1\frac{17}{19}$.

2. Найти a, если $\frac{a}{600}=\frac{1{,}25+\frac{1}{4}}{0{,}4\cdot 4{,}5}$

Решение систем уравнений

1. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases}2x-3y=-7\\5x+y=8\end{cases}$; б) $\begin{cases}8x-5y=3\\7x+3y=10\end{cases}$

2. Сколько решений имеет система линейных уравнений?

а) $\begin{cases}2x-3y=-7\\8x-12y=8\end{cases}$; б) $\begin{cases}2x-3y=-7\\8x-12y=-28\end{cases}$

Д.З. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases}5x-7y=-25\\4x+3y=23\end{cases}$; б) $\begin{cases}5x-7y=-25\\10x-14y=23\end{cases}$; в) $\begin{cases}5x-7y=-25\\10x-14y=-50\end{cases}$

3.1.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами получены знания основных понятий и методов математического анализа, теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики.

Приобретены умения использования математико-статистических методов обработки экспериментальных данных.

Сформировались навыки владения основными методами математического анализа.

3.2.Практическое занятие 2.

Тема: «Прямая линия на плоскости». (2 часа)

3.2.1 Задание для работы:

1. Способы задания прямой.
2. Взаимное расположение двух прямых.
3. Составление уравнения линии в треугольнике.

3.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Способы задания прямой.

1. Составить уравнение прямой, если: а) ее угловой коэффициент $\kappa = -5$ и она проходит через точку $A(7;-3)$; б) она проходит через точки $A(-3;5)$ и $B(1;7)$; в) проходит через точки $M(-1;8)$ и $N(-1;-4)$.

2. Составить уравнение прямой с нормальным вектором $\vec{n}\ (3;-2)$ и проходящей через точку $C(6;-11)$.

2. Взаимное расположение двух прямых.

3. Найти угол между прямыми $y = 0{,}5x + 4$ и $y = -0{,}75x - 9$.

4. Найти наименьший угол треугольника ABC с вершинами $A(-3;\,5);\,B(-6;\,1);\,C(9;\,0)$.

3. Составление уравнения линии в треугольнике.

5. Даны вершины треугольника $A(-2;\,1),\,B(2;3),\,C(3;-4)$. Составить уравнения: а) стороны AC; б) медианы BM; в) наименьшей высоты.

6. Составить уравнение серединного перпендикуляра, проведенного к отрезку AB, где $A(-5;0)$ и $B(-7;-1)$.

Д.З.

Даны вершины треугольника ABC: $A(-2;5),\,B(10;-4);\,C(8;10)$. Требуется: а) найти длину стороны AB; б) составить уравнения сторон AB и AC в общем виде и найти их угловые коэффициенты; в) составить уравнение медианы AD; г) составить уравнение высоты CE.

3.1.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами получены знания основных понятий и методов математического анализа, теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики.

Приобретены умения использования математико-статистических методов обработки экспериментальных данных.

Сформировались навыки владения основными методами математического анализа.

3.3.Практическое занятие 3.

Тема: «Прямая линия на плоскости». (2 часа)

3.3.1 Задание для работы:

1. Составление уравнения линий в треугольнике.
2. Решение задач.

3.3.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Составление уравнения линий в треугольнике.

Разбор теоретического материала

2. Решение задач.

1. Треугольник ABC задан своими вершинами $A(3;2),\ B(9;\ 4);\ C(6;6)$. Определить координаты центра описанной около треугольника окружности.

2. Среди прямых указать параллельные и перпендикулярные: $5x-8y+7=0$, $8x+5y-5=0$, $5x+3y-8=0$, $8x-y-5=0$, $10x+6y-13=0$.

3.3.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами получены знания основных понятий и методов математического анализа, теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики.

Приобретены умения использования математико-статистических методов обработки экспериментальных данных.

Сформировались навыки владения основными методами математического анализа.

3.4.Практическое занятие 4.

Тема: «Дифференциальное исчисление ФОП. (2 часа)

3.4.1 Задание для работы:

1. Функция. Область определения функции.
2. Производная. Правила дифференцирования.
3. Геометрический смысл производной.
4. Механический смысл производной

3.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Функция. Область определения функции.

1. Найти область определения следующих функций:

а) $y=\sqrt{6-x}+\dfrac{1}{x+5}$; б) $y=\sqrt[7]{3-x^2}$; в) $y=\log_5(4-x^2)$; г) $y=\dfrac{\sqrt{9-x}}{\ln(4+x)}$.

2. Найдите $E(y)$: а) $y=4\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\sin(\pi+x)$; б) $y=x^2-6x+5$.

2. Производная. Правила дифференцирования.

1. Найти производную: а) $y=\dfrac{2x-7}{3}$; б) $y=x^4-\dfrac{1}{12x^4}+6\cdot\sqrt[5]{x^2}+\sin 4$; в) $y=\dfrac{5}{x^7}-\sqrt[9]{x^4}+3^x$; г) $y=(x^3+2)\cdot\sin x$; д) $y=\dfrac{\ln x}{x-4}$.

2. Найдите $f'(1)+3f(1)$ для функции $f(x)=(3x+4)\cdot\sqrt{x}$.

3. Геометрический смысл производной.

1. Касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 образует с отрицательным направлением оси абсцисс угол 45^0. Найдите $f'(x_0)$.

2. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ в точке его пересечения с осью ординат. Сделать рисунок.

4. Механический смысл производной

1. Найти скорость и ускорение точки, движущейся прямолинейно по закону $s(t)=2\sin\dfrac{\pi t}{3}$ в момент времени $t=1\,c$.

Д.З.

1. При каких значениях *x* функция $f(x)=\sqrt{9-3x^2}$ не дифференцируема?
2. Найти y' : а) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}-\dfrac{4}{x^{11}}+6\sqrt{x}$; б) $y=\sqrt[7]{(6x-5)^4}-\dfrac{8}{x^2+x}$; в) $y=\dfrac{1}{7}arctg\dfrac{x+11}{7}$
3. Тело массой 10 кг движется прямолинейно по закону $s(t)=2t^2+5t+4$. Найти кинетическую энергию тела $\dfrac{mv^2}{2}$ через 3 с после начала движения.

3.4.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами получены знания основных понятий и методов математического анализа, теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики.

Приобретены умения использования математико-статистических методов обработки экспериментальных данных.

Сформировались навыки владения основными методами математического анализа.

3.5.Практическое занятие 5.

Тема: Функция двух переменных. (2 часа)

3.5.1 Задание для работы:

1. Способы задания функции двух переменных.
2. Нахождение ОДЗ функции двух переменных.
3. Частные производные первого и второго порядков.
4. Исследование функции двух переменных на экстремум.

3.5.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Способы задания функции двух переменных.

Разбор теоретического материала. Проведение устного опроса

2. Нахождение ОДЗ функции двух переменных.

1. Найти области определения функции двух переменных: а) $z = \dfrac{1}{3y - x}$;

 б) $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$; в) $z = \dfrac{\ln x}{25 - x^2 - y^2}$; г) $z = \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y}$; д) $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$.

3. Частные производные первого и второго порядков.

1.Найти частные производные данных функций по каждой независимой переменной: а) $z = x^2 - y$; б) $z = \dfrac{x}{y} + 3xy^4$; в) $z = \sin(e^x - 5y^3)$.

2.Найти значения частных производных: а) $f(x; y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $(3; 4)$; б) $z = \ln\left(x + \dfrac{y}{2x}\right)$ в точке $(1; 2)$.

4. Исследование функции двух переменных на экстремум.

1. Исследовать на экстремум функции:

а) $z = -4 + 6x - x^2 - xy - y^2$;

б) $z = x^2 - xy + y^2 + 8x - 4y + 15$;

в) $z = 2x^2 - 14xy + y^2 + 2x - 9y + 1$.

Д.З.

1.Составить таблицу значений функции $z = \sqrt{x^2 + 4y}$, давая независимым переменным значения от 0 до 1 через $0{,}2$. Значения функции вычислять с точностью до $0{,}01$.

2. Найти области определения функции: а) $z = \dfrac{15}{5x^2 - 9y^2 - 45}$; б) $z = \ln xy$.

3. Определить разрывы функции: а) $z = \dfrac{y^2 - x}{y^2 - 2x}$; б) $z = \dfrac{1}{\sin \pi x} + \dfrac{1}{\sin \pi y}$.

4. Вычислить частные производные первого и второго порядка: а) $z = \sin(5x - 7y)$; б) $z = x^5 y - 8x \cdot \cos y + \sqrt{y}$; в) $u = \ln(x - 6y)$.

3.5.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами получены знания основных понятий и методов математического анализа, теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики.

Приобретены умения использования математико-статистических методов обработки экспериментальных данных.

Сформировались навыки владения основными методами математического анализа.

3.6.Практическое занятие.6.

Тема: «Непосредственное интегрирование функций. Замена переменной в неопределенном интеграле.» (2 часа)

3.6.1 Задание для работы:

1. Вычисление неопределенного интеграла по таблице.
2. Непосредственное интегрирование.
3. Интегрирование заменой переменной.

3.5.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Найти: $\int 8dx$; $\int \frac{dx}{4}$; $\int dx$; $\int x^{11}dx$; $\int x^{-3}dx$; $\int \frac{1}{z^6}dz$; $\int \sqrt[5]{x}dx$; $\int \frac{1}{4t}dt$; $\int \frac{6}{x\cdot\sqrt[3]{x}}dx$.
2. Вычислить: $\int \frac{dx}{\sqrt{36-x^2}}$; $\int \frac{dc}{\sqrt{2-c^2}}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{12-3x^2}}$; $\int \frac{dx}{4+x^2}$; $\int \frac{dn}{29+n^2}$.
3. Найти: $\int \frac{dx}{x^2-1}$; $\int \frac{dx}{10x^2-5}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}$; $\int \frac{da}{\sqrt{a^2-8}}$.

Д.З.

1. Дано уравнение скорости движения тела $v(t)=2t+5$. Найти уравнение пути, если за первые $3\ с$ движения тело прошло $32\ м$.
2. Найти интегралы: а) $\int\left(x^4+\frac{4}{x^3}-5\sqrt[3]{x^2}\right)dx$; б) $\int 4^x\left(3+\frac{4^{-x}}{\sqrt[7]{x}}\right)dx$; в) $\int(7\cos x-10^x)dx$; г) $\int\left[\frac{2}{9+x^2}-\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}+\frac{3}{x}\right]dx$; д) $\int\frac{dx}{\cos 2x-\cos^2 x}$; е) $\int\frac{dx}{9x^2+1}$; ж) $\int\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$; з) $\int\frac{dv}{\sqrt{v^2-17}}$.

3.5.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами получены знания основных понятий и методов математического анализа, теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики.

Приобретены умения использования математико-статистических методов обработки экспериментальных данных.

Сформировались навыки владения основными методами математического анализа.

3.7.Практическое занятие 7.

Тема: «Методы интегрирования». (2 часа)

3.7.1 Задание для работы:

1. Интегрирование по частям.
2. Вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница.

3.7.2.Краткое описание проводимого занятия:

1.Вычислить интегралы: а) $\int x^2 \ln x dx$; б) $\int x arctgx dx$; в) $\int \arcsin 10x dx$.

2.Найти: а) $\int x\cos 2x dx$; б) $\int xe^{-\frac{x}{2}}dx$; в) $\int x\sin 6x dx$; г) $\int (x^2+1)e^{-x}dx$.

3.Найти: а) $\int \cos^3 x \cdot \sin 2x\, dx$; б) $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}$

Д.З.

1. Вычислить интеграл: а) $\int (5x-1)^7 dx$; б) $\int e^{-5x}dx$; в) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6+1}}$.
2. Преобразовать и вычислить: а) $\int \frac{3tg^2 x+4}{\sin^2 x}dx$; б) $\int \frac{2^x+5^x}{10^x}dx$.
3. Вычислить: а) $\int arccrgx dx$; б) $\int (6x+1)\cdot \sin\frac{x}{3}dx$; в) $\int e^x \sin 2x dx$.
4. Вычислить: а) $\int e^{2x}\cos x dx$; б) $\int e^{\sqrt{x}}dx$; в) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$; г) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[5]{x}}dx$.

3.7.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами получены знания основных понятий и методов математического анализа, теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики.

Приобретены умения использования математико-статистических методов обработки экспериментальных данных.

Сформировались навыки владения основными методами математического анализа.

3.8.Практическое занятие 8.
Тема: «ДУ первого порядка». (2 часа)

3.8.1 Задание для работы:

1. ДУ с разделенными переменными.
2. ДУ с разделяющимися переменными.

3.8.2.Краткое описание проводимого занятия:

1) Определить порядок ДУ: а) $y'' + 2x^2 \cdot y' = y^5$; б) $y''' - 5xy'' = y \cdot y'$.

2) Найти общий интеграл ДУ: а) $\sqrt{y}dy = x^3 dx$; б) $y^3 dy = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

3) Найти частное решение ДУ $x^2 dy + (y-1)dx = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $x_0 = 1,\ y_0 = 2$.

4) Известно, что функция $y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = \dfrac{3}{2+x} \cdot y$ и $y(-3) = 5$. Найти $y(1)$.

Д.З.

Решить ДУ: а) $y' = \dfrac{6}{1+3x} y$; б) $\dfrac{y'}{x} - \dfrac{1+x^2}{y^3} = 0$

3.8.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами получены знания основных понятий и методов математического анализа, теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики.

Приобретены умения использования математико-статистических методов обработки экспериментальных данных.

Сформировались навыки владения основными методами математического анализа.

3.9.Практическое занятие 9.

Тема: «Формулы комбинаторики. Вычисление вероятностей по классическому определению. Относительная частота событий». (2 часа)

3.9.1. Задание для работы:

1. Комбинаторика.
2. Решение задач на нахождение вероятностей.

3.9.2.Краткое описание проводимого занятия:

1. Вычислить: а) $C_{11}^{2} \cdot C_{12}^{11}$; б) $C_{16}^{3} - P_{6} + A_{7}^{3}$.
2. Сколькими способами можно выбрать четырех дежурных из группы в 30 человек?
3. Сколько результатов может быть в тираже «Спортлото 5 из 36»?

Д.З.

1. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 120. Найти вероятность того, что номер жетона не содержит цифры 3.
2. В хозяйстве четыре участка земли, которые необходимо занять под четыре культуры. Какова вероятность того, что произвольное закрепление культур за участками совпадет с запланированным?
3. С какой вероятностью можно угадать правильно три номера в тираже «Спортлото 5 из 36»?

3.9.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами получены знания основных понятий и методов математического анализа, теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики.

Приобретены умения использования математико-статистических методов обработки экспериментальных данных.

Сформировались навыки владения основными методами математического анализа.

3.10.Практическое занятие 10.

Тема: «Теоремы сложения и умножения вероятностей». (2 часа)

3.10.1. Задание для работы:

1. Сумма и произведение событий.
2. Теоремы сложения и умножения.
3. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.

3.10.2.Краткое описание проводимого занятия:

1. Игральная кость налита свинцом, в результате чего вероятность выпадения каждого числа очков пропорциональна этому числу. Найдите указанные вероятности.
2. Два стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Вероятность поражения мишени каждым из стрелков равна 0,9. Найти вероятность того, что: 1) оба стрелка поразят мишень; 2) хотя бы один стрелок поразит мишень; 3) ни один стрелок не поразит мишень.
3. Студент выучил 16 из 20 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает ответ: а) на два вопроса; б) только на один вопрос из двух, содержащихся в его экзаменационном билете.

3.10.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами получены знания основных понятий и методов математического анализа, теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики.

Приобретены умения использования математико-статистических методов обработки экспериментальных данных.

Сформировались навыки владения основными методами математического анализа.

3.11.Практическое занятие 11.

Тема: «Случайные величины ДСВ». (2 часа)

3.11.1. Задание для работы:

1. Определение случайной величины и ее виды.
2. Способы задания ДСВ.
3. Числовые характеристики ДСВ. Их роль и назначение.
4. Виды распределений ДСВ.

3.11.2.Краткое описание проводимого занятия:

1. Задан закон распределения случайной величины X.

X	2	3	6	7	8	10
p	0,1	0,2		0,2	0,15	0,1

Найти: 1) математическое ожидание M (X); 2) дисперсию D (X); 3) среднее квадратическое отклонение σ (X); 4) построить многоугольник распределения.

2. Случайная величина X принимает одно и тоже значение, равное $5{,}7$. Найти числовые характеристики случайной величины.
3. Известно, что $M(X)=5, M(Y)=8, D(X)=2, D(Y)=6$. Найти: а) $M(X-3)$; б) $M(9X-4Y)$; в) $M(3Y-2X+5)$; г) $D(Y+4)$; д) $D(X-7)$; е) $D(-2X)$; ж) $D(3X-2Y)$; з) $D(3X+4Y-5)$.
4. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50 рублей и десять выигрышей по 1 рублю. Найти закон распределения случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета. Вычислить математическое ожидание ДСВ.
5. Студент – второкурсник решил помочь библиотеке университета. Ему поручили заполнить 500 книжных формуляров. Вероятность ошибки при заполнении формуляра равна 0,002. Составить закон распределения случайной величины – число формуляров, заполненных студентом верно.

Д.З.

1. Студент – второкурсник решил помочь библиотеке университета. Ему поручили заполнить 300 книжных формуляров. Вероятность ошибки при заполнении формуляра равна 0,005. Составить закон распределения случайной величины – число формуляров, заполненных студентом верно.
2. В партии 15 изделий, среди них имеются 4 бракованных. Для проверки выбирают случайно 2. Составить закон распределения числа бракованных изделий в выборке. Найти математическое ожидание и дисперсию.

3.11.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами получены знания основных понятий и методов математического анализа, теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики.

Приобретены умения использования математико-статистических методов обработки экспериментальных данных.

Сформировались навыки владения основными методами математического анализа.

3.12.Практическое занятие 12.

Тема: «Случайные величины НСВ». (2 часа)

3.12.1. Задание для работы:

1. Способы задания непрерывной случайной величины.
2. Числовые характеристики НСВ.
3. Виды распределений НСВ.

3.12.2.Краткое описание проводимого занятия:

1. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=2x$ в интервале $(0;1)$, вне этого интервала $f(x)=0$. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.
2. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=0{,}5x$ в интервале $(0;2)$, вне этого интервала $f(x)=0$. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.
3. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=x+0{,}5$ на интервале $(0;1)$, вне этого интервала $f(x)=0$. Найти математическое ожидание случайной величины.
4. Непрерывная случайная величина задана плотностью вероятностей

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 1\\ a\,x, & \text{при} \quad 1<x<3\\ 0, & \text{при} \quad x\ge 3\end{cases}$$

Найти: 1) параметр a; 2) $D(X)$; 3) $P(2<X<2{,}5)$.

Д.З.

Разбор теоретического материала

3.11.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами получены знания основных понятий и методов математического анализа, теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики.

Приобретены умения использования математико-статистических методов обработки экспериментальных данных.

Сформировались навыки владения основными методами математического анализа.

3.13.Практическое занятие 13.

Тема: «Нормальный закон распределения вероятностей. Виды распределений НСВ». (2 часа)

3.13.1. Задание для работы:

1. Равномерное распределение.
2. Показательное распределение.
3. Нормальный закон распределения, его параметры.
4. Кривая Гаусса. Ее свойства и график.

3.13.2.Краткое описание проводимого занятия:

1. Найти математическое ожидание случайной величины X, распределенной равномерно в интервале $(0;10)$.

2. Эколог изучает процесс рассеивания семян определенного растения. Допустим, что семена рассеиваются в среднем на расстояние в 1 м от материнского растения и что распределение вероятностей для этого расстояния экспоненциальное. Какая доля семян рассеивается более чем на 2 м от растения?

3. Нормально распределенная случайная величина задана плотностью вероятностей $f(x) = C \cdot e^{-\frac{(x-13)^2}{32}}$. Найти: 1) значение коэффициента *C*; 2) произведение $M(X) \cdot D(X)$; 3) промежутки вогнутости функции $f(x)$; 4) ось симметрии нормальной кривой; 5) значение функции $f(x)$ в точках перегиба; 6) вероятность попадания в интервал $(10;14)$.

4. Для некоторого вида млекопитающих масса взрослой особи является нормально распределенной случайной величиной со средним 100 кг и стандартным отклонением 8 кг. Чему равны вероятности того, что животное имеет массу: а) меньше 90 кг; б) от 95 до 110 кг?

5. Случайная величина Х – масса одного зерна – распределена нормально с $a = 0{,}18$ г и $\sigma = 0{,}05$ г. Хорошие всходы дают зерна, масса которых больше 0,15 г. Найдите: а) процент семян, которые дадут хорошие всходы; б) величину, которую с вероятностью 0,95 не превысит масса отобранного зерна.

3.13.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами получены знания основных понятий и методов математического анализа, теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики.

Приобретены умения использования математико-статистических методов обработки экспериментальных данных.

Сформировались навыки владения основными методами математического анализа.

3.14.Практическое занятие 14.

Тема: «Статистические оценки параметров распределения. Точечные оценки. Интервальные оценки». (2 часа)

3.14.1. Задание для работы:

1. Нахождение точечных оценок совокупности. Оценка генеральной средней по выборочной средней.

2. Оценка генеральной средней по выборочной средней.

3.14.2.Краткое описание проводимого занятия:

1. Десять последовательных испытаний, в ходе которых наблюдалась случайная величина X, дали следующие результаты: 2; 4; 0; 2; 5; 2; 6; 2; 4; 6

Требуется:

1) построить вариационный ряд;
2) записать статистическое распределение частот и относительных частот;
3) построить полигон частот и относительных частот.

2. В результате испытания случайная величина X приняла следующие значения: 16 17 9 13 21 11 7 19 7 5 17 5 20 18 11 4 6 22 21 15 23 15 19 25 2. Построить гистограмму частот.

3.14.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами получены знания основных понятий и методов математического анализа, теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики.

Приобретены умения использования математико-статистических методов обработки экспериментальных данных.

Сформировались навыки владения основными методами математического анализа.

3.15.Практическое занятие 15.

Тема: «Интервальные оценки». (2 часа)

3.15.1. Задание для работы:

1. Определение доверительной вероятности.

2. Определение доверительного интервала.

3. Определение доверительного интервала для оценки математического ожидания нормального распределения.

3.15.2.Краткое описание проводимого занятия:

1. Найти несмещенные оценки для неизвестных математического ожидания и дисперсии случайной величины X, заданной статистическим распределением выборки:

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

2. По выборке объема $n = 16$ из генеральной совокупности определены выборочная средняя $\bar{x} = 41{,}7$ и исправленное среднее квадратическое отклонение $s = 4$. Найти 95-процентный доверительный интервал для генеральной средней и генерального среднего квадратического отклонения.

3. Проведено 25 равноточных измерений некоторой физической величины и найдено среднее арифметическое результатов измерений $\bar{x} = 42{,}5$. Все измерения проведены одним и тем же прибором с известным средним квадратическим отклонением ошибок измерений $\sigma = 2{,}1$. Считая результаты измерений нормально распределенной случайной величиной, найти с надежностью $\gamma = 0{,}9$ доверительный интервал для оценки истинного значения измеряемой физической величины.

4. Высота растений яровой пшеницы X – случайная величина, имеющая нормальное распределение. Сколько необходимо отобрать растений, чтобы с вероятностью в 95% выборочная средняя отличалась от математического ожидания меньше чем на 2 см, если известно, что $s = 5{,}7$?

3.15.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами получены знания основных понятий и методов математического анализа, теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики.

Приобретены умения использования математико-статистических методов обработки экспериментальных данных.

Сформировались навыки владения основными методами математического анализа

3.16.Практическое задание 16.

Тема: «Статистическая проверка статистических гипотез». (2 часа)

3.16.1. Задание для работы:

1. Определение нулевой и альтернативной гипотез.
2. Применение статистических критериев проверки гипотез.
3. Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей. Сравнение двух средних генеральных совокупностей, дисперсии которых известны (большие независимые выборки).

3.16.2.Краткое описание проводимого занятия:

1. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с заданным эмпирическим распределением.

интервалы	3 – 5	5 – 7	7 – 9	9 – 11	11 – 13	13 –15	15 – 17	17 –19	19 – 21
частоты	5	8	10	18	20	16	11	7	5

2. Дано статистическое распределение

варианты	0	1	2	3	4	5	6	7
частоты	7	21	26	21	13	7	3	2

Оценить степень согласованности статистического распределения с распределением Пуассона.

3.16.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами получены знания основных понятий и методов математического анализа, теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики.

Приобретены умения использования математико-статистических методов обработки экспериментальных данных.

Сформировались навыки владения основными методами математического анализа

3.17-18.Практическое задание 17-18.

Тема: Корреляционная зависимость. Коэффициент корреляции. (4 часа)

3.17-18.1. Задание для работы:

1. Вычисление коэффициента корреляции.
2. Определение параметров линейной регрессии.

3.17-18.2.Краткое описание проводимого занятия:

1. Получены данные между длиной колоса (X) и числом зерен (Y) в нем:

X	7	8	11	12	9	7	9	10	7	8	10	13	13	14	12	7	9	8	9	10
Y	15	20	28	28	23	17	23	25	16	21	23	28	31	32	30	16	25	20	23	25

По данным составить корреляционную таблицу; построить эмпирическую линию регрессии и записать уравнение теоретической линии регрессии, используя метод наименьших квадратов.

2. Методом наименьших квадратов найти уравнение прямой регрессии Y на X по данным, приведенным в корреляционной таблице:

X \ Y	16	26	36	46	56	n_x
20	4					4
25	6	8				14
30		10	32	4		46
35			3	12	1	16
40			9	6	5	20
n_y	10	18	44	22	6	100

3. Были произведены измерения общей длины ствола в см (X) и длины его части без ветвей (Y) десяти молодых сосен. Результаты этого измерения представлены в таблице. Вычислить выборочный коэффициент корреляции и найти уравнение прямой регрессии Y на X .

x_i	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115
y_i	14	18	19	20	23	23	24	26	29	34

3.17-18.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами получены знания основных понятий и методов математического анализа, теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики.

Приобретены умения использования математико-статистических методов обработки экспериментальных данных.

Сформировались навыки владения основными методами математического анализа