ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**Методические рекомендации для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине**

Б1.Б.06 Математика и математическая статистика

**Направление подготовки** 35.03.07 Технология производства и переработки сельскохозяйственной продукции

**Профиль образовательной программы** Технология производства и переработки продукции животноводства

**Форма обучения** очная

## СОДЕРЖАНИЕ

## 1. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1. Организационно-методические данные дисциплины

| № п.п . | Наименование тем | Общий объем часов по видам самостоятельной работы (из табл. 5.1 РПД) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | подготовка курсовой работы (проекта) | подготовка реферата/ эссе | Индивидуаль-ные домашние задания (ИДЗ) | самостоятельное изучение вопросов (СИВ) | подготовка к занятиям (ПкЗ) |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 | Линейная алгебра. Решение СЛУ. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление ФОП. Дифференциальное исчисление ФНП | - | - | - | 5 | 10 |
| 2 | Интегральное исчисление | - | - | - | 3 | 3 |
| 3 | Дифференциальные уравнения первого порядка | - | - | - | 2 | |
| 4 | Ряды | - | - | - | 3 | |
| 5 | Гармонический анализ | - | - | - | 3 | |
| 6 | Численные методы | | | | 2 | |
| 7 | Функция комплексного переменного. Элементы функционального анализа | - | - | - | 5 | - |
| 7 | Теория вероятностей | - | - | - | 5 | 10 |
| 8 | Математическая статистика | - | - | - | | 6 |

# 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ВОПРОСОВ

## 2.1. Линии на плоскости

## 1. Канонические уравнения эллипса, гиперболы, параболы.

**1. Окружность.**

*Линией (кривой) второго порядка* называется множество точек плоскости, декартовы координаты $x$, $y$ которых удовлетворяют уравнению

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

где $A, B, C, D, E, F -$ постоянные действительные числа, причем $A, B, C$ одновременно не равны нулю.

<u>Окружность</u>: $x^2 + y^2 = R^2$ или $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, где $(x_0; y_0) -$ координаты центра окружности, $R -$ радиус окружности.

**2. Эллипс.**

<u>Эллипс:</u> $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ или $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$;

где $(x_0; y_0) -$ координаты центра эллипса,

$a -$ большая полуось, $b -$ малая полуось,

$2c -$ расстояние между фокусами, причем $a^2 - c^2 = b^2$;

$\varepsilon = \dfrac{c}{a} -$ эксцентриситет эллипса ($\varepsilon < 1$);

$F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$ – фокусы эллипса.

**3. Гипербола.**

<u>Гипербола</u>: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ или $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$;

где $(x_0; y_0) -$ координаты центра гиперболы,

$a -$ действительная полуось, $b -$ мнимая полуось,

$2c -$ расстояние между фокусами, причем $c^2 - a^2 = b^2$;

$\varepsilon = \dfrac{c}{a} -$ эксцентриситет гиперболы ($\varepsilon > 1$);

$F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$ – фокусы гиперболы;

$y = \pm\dfrac{b}{a}x$ – уравнения асимптот гиперболы.

**4. Парабола.**

а) С осью симметрии $Ox$:

$y^2 = 2px$ – уравнение параболы; $p -$ параметр параболы,

$F\left(\dfrac{p}{2}; 0\right)$ – фокус параболы; $x = -\dfrac{p}{2}$ – уравнение директрисы

б) С осью симметрии $Oy$:

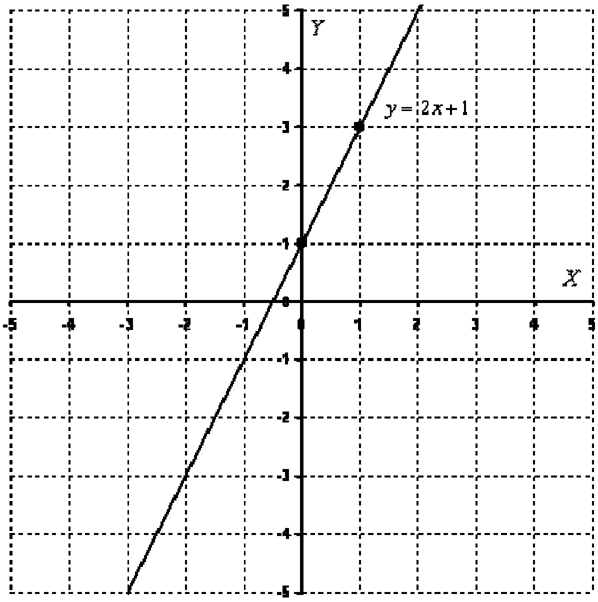
$x^2 = 2py$ – уравнение параболы; $p -$ параметр параболы,

$F\left(0; \dfrac{p}{2}\right)$ – фокус параболы; $y = -\dfrac{p}{2} -$ уравнение директрисы.

## 2.2 Функция

## 1.Основные элементарные функции, их свойства, графики.

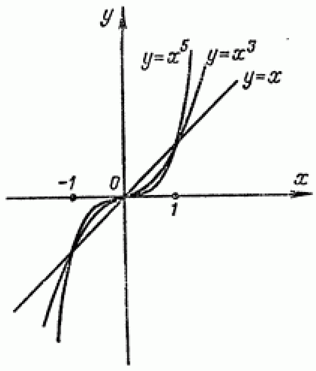
1. Линейная функция задается уравнением $y = ax + b$. График линейной функций представляет собой **прямую**. Для того, чтобы построить прямую достаточно знать две точки.




2. Степенная $y = x^{\alpha}, \alpha \in R$

**Степенная функция с натуральным нечетным показателем, p = n = 1, 3, 5, ...**

Рассмотрим степенную функцию $y = x^p = x^n$ с натуральным нечетным показателем степени n = 1, 3, 5, .... Такой показатель также можно записать в виде: n = 2k + 1, где k = 0, 1, 2, 3, ... – целое не отрицательное. Ниже представлены свойства и графики таких




функций.

**Область определения:** $-\infty < x < \infty$
**Множество значений:** $-\infty < y < \infty$
**Четность:** нечетная, $y(-x) = -y(x)$
**Монотонность:** монотонно возрастает
**Экстремумы:** нет
**Выпуклость:**
при $-\infty < x < 0$ выпукла вверх
при $0 < x < \infty$ выпукла вниз
**Точки перегибов:** $x = 0$, $y = 0$
**Точки пересечения с осями координат:** $x = 0$, $y = 0$

## Степенная функция с натуральным четным показателем, p = n = 2, 4, 6, ...

Рассмотрим степенную функцию $y = x^p = x^n$ с натуральным четным показателем степени n = 2, 4, 6, .... Такой показатель также можно записать в виде: n = 2k, где k = 1, 2, 3, ... – натуральное. Свойства и графики таких функций даны ниже.

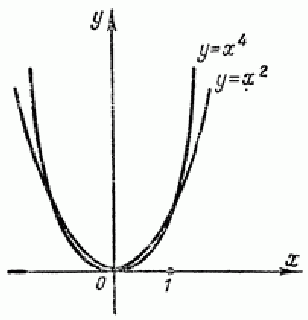


Рис. 20

**Область определения:** $-\infty < x < \infty$
**Множество значений:** $0 \le y < \infty$
**Четность:** четная, $y(-x) = y(x)$
**Монотонность:**
при $x < 0$ монотонно убывает
при $x > 0$ монотонно возрастает
**Экстремумы:** минимум, $x = 0$, $y = 0$
**Выпуклость:** выпукла вниз
**Точки перегибов:** нет
**Точки пересечения с осями координат:** $x = 0$, $y = 0$

## Степенная функция с целым отрицательным показателем, p = n = -1, -2, -3, ...

Рассмотрим степенную функцию $y = x^p = x^n$ с целым отрицательным показателем степени n = -1, -2, -3, .... Если положить n = –k, где k = 1, 2, 3, ... – натуральное, то ее можно представить в виде:

График степенной функции $y = x^n$ с целым отрицательным показателем при различных значениях показателя степени n = -1, -2, -3, ....

**Нечетный показатель, n = -1, -3, -5, ...**

Ниже представлены свойства функции y = x $^{n}$ с нечетным отрицательным показателем n =

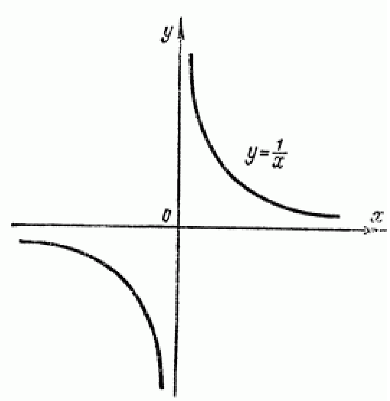


Рис. 21

-1, -3, -5, ....

**Область определения:** $x \neq 0$
**Множество значений:** $y \neq 0$
**Четность:** нечетная, y(–x) = – y(x)
**Монотонность:** монотонно убывает
**Экстремумы:** нет
**Выпуклость:**
при x < 0: выпукла вверх
при x > 0: выпукла вниз
**Точки перегибов:** нет
**Точки пересечения с осями координат:** нет

3. Показательная $y = a^x, a \neq 1, a > 0, a = const$
Сформулируем основные свойства показательной функции :
1. Область определения — множество (R) всех действительных чисел.
2. Область значений — множество (R+) всех положительных действительных чисел.
3. При a > 1 функция возрастает на всей числовой прямой; при 0<a<1 функция убывает.
4. Является функцией общего вида.

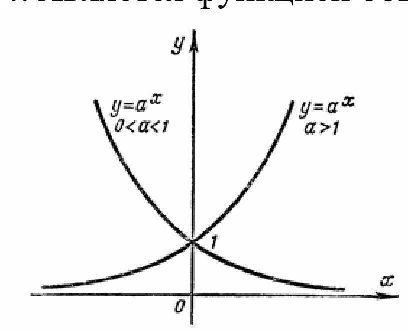
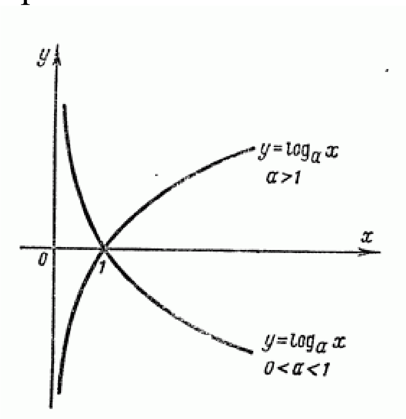


Рис. 23

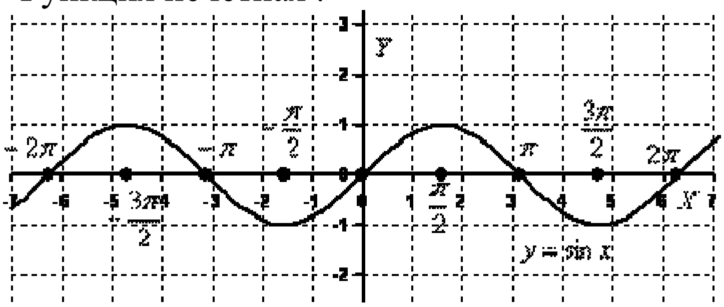
4. Логарифмическая $y = \log_a x, \;\; a \neq 1, a > 0, a = const$
Логарифмическая функция y = $\log_a$ x обладает следующими свойствами :
1. Область определения D(x)Î (0; + ∞).

2. Область значений E(y) Î ( - ∞; + ∞)
3. Функция ни четная, ни нечетная (общего вида).
4. Функция возрастает на промежутке (0; + ∞) при а > 1, убывает на (0; + ∞) при 0 < а < 1.

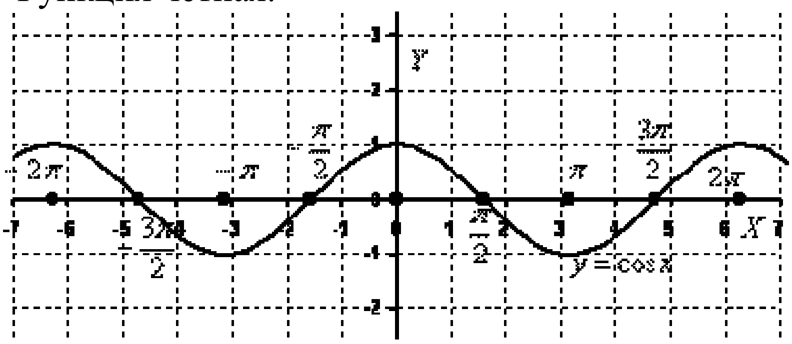



5. Тригонометрические: $y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = tgx,\ y = ctgx$

Функция y = sin (x).
1. Область определения D(x) ÎR.
2. Область значений E(y) Î [ - 1; 1].
3. Функция периодическая; основной период равен 2π.
4. Функция нечетная .




Функция y = cos(x).
1. Область определения D(x) ÎR.
2. Область значений E(y) Î [ - 1; 1].
3. Функция периодическая с основным периодом 2π.
4. Функция четная.



2.3. ФНП

1. Задача обработки опытных данных.
2. Построение эмпирических формул по методу наименьших квадратов.

**Метод наименьших квадратов. Эмпирические формулы**

Пусть данные некоторого эксперимента представлены в виде таблицы значений переменных $x$ и $y$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | $x_0$ | $x_1$ | $\dots$ | $x_m$ |
| $y_i$ | $y_0$ | $y_1$ | $\dots$ | $y_m$ |

Можно поставить задачу об отыскании аналитической зависимости между $x$ и $y$, т. е. некоторой формулы $y = f(x)$, явным образом выражающей $y$ как функцию от $x$. Естественно требовать, чтобы график искомой функции $y = f(x)$ изменялся плавно и не слишком уклонялся от экспериментальных точек $(x_i, y_i)$. Поиск такой функциональной зависимости называют «сглаживанием» экспериментальных данных.

Задачу о сглаживании экспериментальных данных можно решать, используя метод наименьших квадратов. Этот метод относится к классу аппроксимационных методов, а его идея состоит в том, чтобы по данным эксперимента построить приближённо функцию в виде многочлена с тем расчётом, чтобы сумма квадратов отклонений построенной функции от экспериментальной в узловых точках была минимальна.

Будем строить функцию в виде многочлена

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Построить многочлен $f(x)$ – значит определить его коэффициенты $a_i$, $i = \overline{0,n}$. Введём функцию $S = \sum_{i=0}^{m} \delta_i^2$, **где** $\delta_i = f(x_i) - y_i$, и потребуем, чтобы отклонение функции от экспериментальной в точках $x_i$, $i = \overline{0,m}$, т. е. величина (4.1) была минимальной. Используя выражение для $f(x)$, запишем функцию $S$ в виде:

$$S = S(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \left\{ \sum_{i=0}^{m} \left( a_n x_i^n + a_{n-1} x_i^{n-1} + \ldots + a_0 - y_i \right)^2 \right\}.$$

Необходимыми условиями экстремума функции $S$ является равенство нулю её частных производных по всем переменным $a_0, a_1, \ldots, a_n$, т. е.

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0,\ \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \ldots, \frac{\partial S}{\partial a_n} = 0.$$

Условия (4.2) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений с неизвестными $a_0, a_1, \ldots, a_n$ вида:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum\limits_{i=0}^{m}\left(a_n x_i^n + a_{n-1}x_i^{n-1} + \ldots + a_0 - y_i\right) = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum\limits_{i=0}^{m}\left(a_n x_i^n + a_{n-1}x_i^{n-1} + \ldots + a_0 - y_i\right)x_i = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_n} = 2\sum\limits_{i=0}^{m}\left(a_n x_i^n + a_{n-1}x_i^{n-1} + \ldots + a_0 - y_i\right)x_i^n = 0. \end{cases}$$

Запишем эту систему в нормальной форме:

$$\begin{cases} a_0 m + a_1\sum\limits_{i=0}^{m} x_i + a_2\sum\limits_{i=0}^{m} x_i^2 + \ldots + a_n\sum\limits_{i=0}^{m} x_i^n = \sum\limits_{i=0}^{m} y_i, \\ a_0\sum\limits_{i=0}^{m} x_i + a_1\sum\limits_{i=0}^{m} x_i^2 + \ldots + a_n\sum\limits_{i=0}^{m} x_i^{n+1} = \sum\limits_{i=0}^{m} x_i y_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0\sum\limits_{i=0}^{m} x_i^n + a_1\sum\limits_{i=0}^{m} x_i^{n+1} + \ldots + a_n\sum\limits_{i=0}^{m} x_i^{2n} = \sum\limits_{i=0}^{m} x_i^n y_i. \end{cases}$$

Решая эту систему любым из известных методов, определяем коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ искомого многочлена.

В частном случае аппроксимации экспериментальных данных с помощью линейной функции $f(x) = a_1 x + a_0$

(точки $(x_i, y_i)$ располагаются вблизи прямой) имеем

$$\begin{cases} a_0 m + a_1\sum\limits_{i=0}^{m} x_i = \sum\limits_{i=0}^{m} y_i, \\ a_0\sum\limits_{i=0}^{m} x_i + a_1\sum\limits_{i=0}^{m} x_i^2 = \sum\limits_{i=0}^{m} x_i y_i. \end{cases}$$

Если для переменных $x$ и $y$ соответствующие значения экспериментальных данных $(x_i, y_i)$ не располагаются вблизи некоторой прямой, то выбирают новые переменные

$X = \varphi(x, y), \quad Y = \psi(x, y)$

так, чтобы преобразованные экспериментальные данные

$X_i = \varphi(x_i, y_i), \quad Y_i = \psi(x_i, y_i)$

в новой системе координат $(X, Y)$ давали точки $(X_i, Y_i)$, менее уклоняющиеся от прямой. Для аппроксимирующей прямой

$Y = A_1 X + A_0$

числа $A_0$ и $A_1$ можно определить из системы уравнений, аналогичной системе уравнений

$$\begin{cases} A_0 m + A_1 \sum\limits_{i=0}^{m} X_i = \sum\limits_{i=0}^{m} Y_i, \\ A_0 \sum\limits_{i=0}^{m} X_i + A_1 \sum\limits_{i=0}^{m} X_i^2 = \sum\limits_{i=0}^{m} X_i Y_i. \end{cases}$$

Описанный способ нахождения экспериментальной зависимости с помощью сведения к линейному виду называется *выравниванием экспериментальных данных*.

Рекомендации по выравниванию экспериментальных данных и аппроксимирующие зависимости с двумя параметрами приведём в табл.

| $j$ | Выравнивание данных (преобразование переменных) | Эмпирическая формула |
|---|---|---|
| 1 | $X = x,\ Y = xy$ | $y = a_1 + \frac{a_0}{x},\ a_1 = A_1,\ a_0 = A_0$ |
| 2 | $X = x,\ Y = \frac{1}{y}$ | $y = \frac{1}{a_1 x + a_0},\ a_1 = A_1,\ a_0 = A_0$ |
| 3 | $X = x,\ Y = \frac{x}{y}$ | $y = \frac{x}{a_1 x + a_0},\ a_1 = A_1,\ a_0 = A_0$ |
| 4 | $X = x,\ Y = \ln y$ | $y = a_1 \cdot (a_0)^x,\ a_1 = e^{A_0},\ a_0 = e^{A_1}$ |
| 5 | $X = \ln x,\ Y = y$ | $y = a_1 \cdot \ln x + a_0, a_1 = A_1,\ a_0 = A_0$ |
| 6 | $X = \ln x, Y = \ln y$ | $y = a_1 \cdot x^{a_0},\ a_1 = e^{A_0},\ a_0 = A_1$ |

Одну из шести представленных в табл. 4.4 формул преобразования к переменным $(X, Y)$ следует выбирать одновременно с проверкой возможности применения линейной зависимости к исходным данным $(x_i, y_i),\ i = \overline{0,m}.$ Условием выбора наилучшей эмпирической формулы является наименьшее уклонение исходных или преобразованных экспериментальных данных от прямой. Уклонение данных от прямой в каждом варианте выравнивания будем определять величиной

$$d_j = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} (Y_i - A_{1j} X_i - A_{0j})^2}{\sum\limits_{i=1}^{m} Y_i^2}},$$

где $j$ − номер соответствующей эмпирической формулы из табл. 4.2.
Для наилучшей эмпирической формулы величина $d$ является наименьшей

2.4. Определенный интеграл

1. Приближенное вычисление определенных интегралов.

Пусть требуется найти определенный интеграл от непрерывной функции $\int_a^b f(x)\,dx$ $f$(x). Если можно найти первообразную F(x) функции $f$(x), то интеграл вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Но отыскание первообразной функции иногда весьма сложно; кроме того, как известно, не для всякой непрерывной функции ее первообразная выражается через элементарные функции. В этих и других случаях (например, функция y = $f$(x) задана графически или таблично) прибегают к приближенным формулам, с помощью которых определенный интеграл находится с любой степенью точности.

Рассмотрим три наиболее употребительные формулы приближенного вычисления определенного интеграла — формулу прямоугольников, формулу трапеций, формулу парабол (Симпсона), основанные на геометрическом смысле определенного интеграла.

1. Формула прямоугольников

Пусть на отрезке [a; b], a < b, задана непрерывная функция $f$(x). Требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, численно равный площади соответствующей криволинейной трапеции.

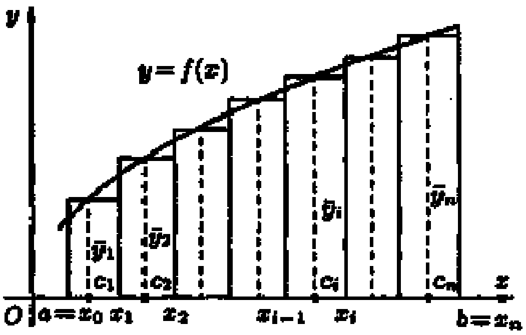



Рис. 200.

Разобьем основание этой трапеции, т. е. отрезок [a; b], на n равных частей (отрезков) длины $h = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$ (шаг разбиения) с помощью точек $x_0 = a$, $x_1, x_2, \dots, x_n = b$. Можно записать, что $x_i = x_0 + h \cdot i$, где i = 1,2,..., n (см. рис. 200).

В середине $c_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ каждого такого отрезка построим ординату $\hat{y}_i = f(c_i)$ графика функции y = $f$(x). Приняв эту ординату за высоту, построим прямоугольник с площадью $h \cdot \hat{y}_i$.

Тогда сумма площадей всех n прямо угольников дает площадь ступенчатой фигуры, представляющую собой приближенное значение искомого определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \dots + \bar{y}_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right). \qquad (42.1)$$

Формула (42.1) называется формулой средних прямоугольников.

Абсолютная погрешность приближенного равенства (42.1) оценивается с помощью следующей формулы:

$$|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^3 \cdot M_2}{24n^2},$$

где $M_2$ — наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке [a; b],

$$|R_n| = \left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) \right|.$$

Отметим, что для линейной функции ($f(x)=kx+b$) формула (42.1) дает точный ответ, поскольку в этом случае $f''(x)=0$.

2. Формула трапеций

Формулу трапеций получают аналогично формуле прямоугольников: на каждом частичном отрезке криволинейная трапеция заменяется обычной.

Разобьем отрезок [a; b] на n равных частей длины $h = \frac{b-a}{n}$. Абсциссы точек деления $a = x_0, x_1, x_2, ..., b = x_n$ (рис. 201). Пусть $y_0, y_1 ..., y_n$ —

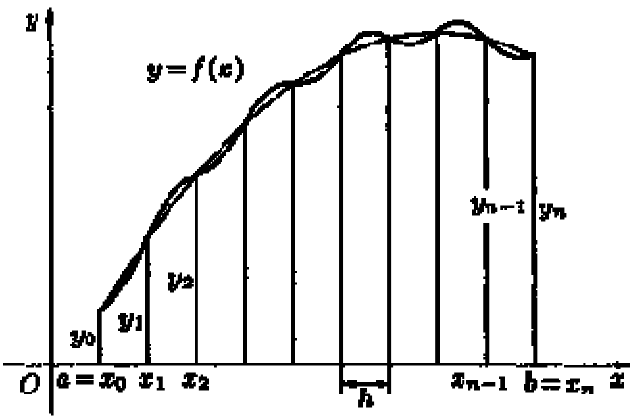



Рис. 201.

соответствующие им ординаты графика функции. Тогда расчетные формулы $h = \frac{b-a}{n}$. для этих значений примут вид $x_i = a+h*i$, $y_i=f(x_i)$, i= 0,1,2,..., n;

Заменим кривую $y=f(x)$ ломаной линией, звенья которой соединяют концы ординат $y_i$ и $y_{i+1}$ (i = 0,1,2,.. .,n). Тогда площадь криволинейной трапеции приближенно равна сумме площадей обычных трапеций с основаниями $y_i$, $y_{i+1}$ и высотой $h = \frac{b-a}{n}$:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{y_0+y_1}{2} \cdot h + \frac{y_1+y_2}{2} \cdot h + \cdots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2} \cdot h$$

или

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right). \qquad (42.2)$$

Формула (42.2) называется формулой трапеций.

2.5. ДУ первого порядка

1.Задача о распаде радия.

Решение различных геометрических, физических и инженерных задач часто приводят к уравнениям, которые связывают независимые переменные, характеризующие ту ил иную задачу, с какой – либо функцией этих переменных и производными этой функции различных порядков.

Скорость распада радия пропорциональна количеству радия в данный момент времени (период полураспада равен 1600 лет).

Скорость охлаждения воды пропорциональна разности температур воды в резервуаре и в окружающей его среде.

**2. Частные и общие решения.**

*Дифференциальным уравнением* называется уравнение, связывающее независимую переменную, функцию этой переменной и производные (или дифференциалы) этой функции.

Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется *порядком дифференциального уравнения.*

*Общим интегралом* дифференциального уравнения называется любое уравнение, не содержащее производных и дифференциалов, для которого данное дифференциальное уравнение является следствием.

*Интегральной кривой* называется график $y=\varphi(x)$ решения дифференциального уравнения на плоскости $xOy$.

**3. ДУ первого порядка. Задача Коши.**

*Общим решением* дифференциального уравнения первого порядка называется такая дифференцируемая функция $y=\varphi(x,C)$, которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

Если при каких-либо начальных условиях $x=x_0$, $y(x_0)=y_0$ существует такое значение $C=C_0$, при котором решением дифференциального уравнения является функция $y=\varphi(x,C_0)$, то функция $y=\varphi(x,C_0)$ называется *частным решением* дифференциального уравнения первого порядка.

*Задачей Коши* называется нахождение частного решения дифференциального уравнения вида $y=\varphi(x,C_0)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0)=y_0$.

**4. ДУ с разделенными и разделяющимися переменными.**

Дифференциальное уравнение $y'=f(x,y)$ называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если его можно записать в виде $y'=\alpha(x)\beta(y)$.

Такое уравнение можно представить также в виде: $X(x)dx+Y(y)dy=0;$
$\int X(x)dx+\int Y(y)dy=C$

После нахождения соответствующих интегралов получается общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

Если заданы начальные условия, то при их подстановке в общее решение находится постоянная величина C, а, соответственно, и частное решение.

## 2.6. Ряды

1.Знакоположительные ряды.

2.Знакочередующиеся ряды.

**Определение.** Сумма членов бесконечной числовой последовательности $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ называется **числовым рядом**. $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ При этом числа $u_1, u_2, ...$ будем называть членами ряда, а $u_n$ – общим членом ряда.

**Определение.** Суммы $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ , $n = 1, 2, ...$ называются **частными (частичными) суммами** ряда.

Таким образом, возможно рассматривать последовательности частичных сумм ряда $S_1, S_2, ..., S_n, ...$

**Определение.** Ряд $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **сходящимся**, если сходится последовательность его частных сумм. **Сумма сходящегося ряда** – предел последовательности его частных сумм.

$$\lim S_n = S, \qquad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

**Определение.** Если последовательность частных сумм ряда расходится, т.е. не имеет предела, или имеет бесконечный предел, то ряд называется **расходящимся** и ему не ставят в соответствие никакой суммы.

3.2. Примеры сходящихся и расходящихся рядов.

3.3. Свойства рядов.

1) Сходимость или расходимость ряда не нарушится если изменить, отбросить или добавить конечное число членов ряда.

2) Рассмотрим два ряда $\sum u_n$ и $\sum Cu_n$ , где С – постоянное число.

**Теорема.** *Если ряд $\sum u_n$ сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum Cu_n$ тоже сходится, и его сумма равна CS. ($C \neq 0$)*

3) Рассмотрим два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$ . **Суммой** или **разностью** этих рядов будет называться ряд $\sum (u_n \pm v_n)$, где элементы получены в результате сложения (вычитания) исходных элементов с одинаковыми номерами.

**Теорема.** *Если ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ сходятся и их суммы равны соответственно S и $\sigma$, то ряд $\sum (u_n \pm v_n)$ тоже сходится и его сумма равна $S + \sigma$.*

$$\sum (u_n + v_n) = \sum u_n + \sum v_n = S + \sigma$$

*Разность двух сходящихся рядов также будет сходящимся рядом.*

*Сумма сходящегося и расходящегося рядов будет расходящимся рядом.*

*О сумме двух расходящихся рядов общего утверждения сделать нельзя.*

При изучении рядов решают в основном две задачи: исследование на сходимость и нахождение суммы ряда.

Признаки сходимости знакоположительных рядов.
При изучении знакопостоянных рядов ограничимся рассмотрением рядов с неотрицательными членами (знакоположительных рядов), т.к. при простом умножении на –1 из этих рядов можно получить ряды с отрицательными членами

*Первый признак сравнения*: Пусть даны два ряда с положительными членами: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1) и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ (2), причем для любого n верно неравенство $u_n \le v_n$.
Тогда: если ряд (2) сходится, то сходится и ряд (1); если ряд (1) расходится, то расходится и ряд (2).

*Второй (предельный) признак сравнения:* Пусть даны два ряда с положительными членами: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Если существует конечный предел отношения их общих членов $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \ne 0$, то ряды одновременно либо сходятся, либо расходятся.

*Признак Даламбера*: Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами существует предел отношения (n+1)-го члена ряда к n-му члену $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = d$.
Тогда, если d<1, то ряд сходится; если d>1, то ряд расходится; если d=1, то вопрос о сходимости ряда остается открытым.

*Признак Коши*: Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами существует предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = k$. Тогда, если k<1, то ряд сходится; если k>1, то ряд расходится; если k=1, то вопрос о сходимости ряда остается открытым.

*Интегральный признак сходимости*: Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, члены которого положительны и не возрастают, то есть $u_1 \ge u_2 \ge u_3 \ge \dots \ge u_n \ge \dots$, а функция f(x), определенная при $x \ge 1$, непрерывная и возрастающая и $f(1) = u_1, f(2) = u_2, \dots, f(n) = u_n, \dots$. Тогда для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ необходимо и достаточно, чтобы сходился несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$.
Эталонные ряды.
*«Эталонные» ряды для сравнения*

$\sum_{n=1}^{\infty} a\, q^{n-1} = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots$ – геометрический ряд, сходится при $|q| < 1$, расходится при $|q| \ge 1$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\frac{1}{4^{\alpha}}+\cdots$ – гармонический ряд, сходится при $\alpha>1$, расходится при 0< $\alpha\le 1$.

Знакочередующийся ряд можно записать в виде:

$u_1-u_2+u_3-u_4+...+(-1)^{n+1}u_n+...$ где $u_n>0,\quad n=1,2,3,...$

Признак Лейбница.

*Признак Лейбница*: Знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, если:

1) члены ряда убывают по абсолютной величине, то есть $u_1>u_2>u_3>\cdots>u_n>\cdots$;

2) предел общего члена ряда при $n\to\infty$ равен нулю, то есть $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

При этом сумма ряда не превосходит первого члена: $S\le u_n$.

Признак сходимости знакочередующегося ряда: знакочередующийся ряд $u\;-u_2+u_3-u_4+...=\sum_{\kappa=1}^{\infty}(-1)^{\kappa+1}u_\kappa$ сходится, если $\lim_{\kappa\to\infty}u_\kappa=0$ и $u_\kappa>u_{\kappa+1}\ (\kappa=1,\,2,\,...)$.

3.3. Знакопеременные ряды. Достаточный признак сходимости.

Рассмотрим некоторый знакопеременный ряд (с членами произвольных знаков). $u_1+u_2+...+u_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ и ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда $|u_1|+|u_2|+...+|u_n|+...=\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$

**<u>Теорема.</u>** *Из сходимости ряда* $|u_1|+|u_2|+...+|u_n|+...=\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ *следует сходимость ряда* $u_1+u_2+...+u_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$

Абсолютная и условная сходимость.

Ряд с произвольными членами $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ сходится абсолютно, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|u_\kappa|$.

Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ сходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|u_\kappa|$ расходится, то первый ряд называется условно сходящимся.

<u>Свойства абсолютно сходящихся рядов.</u>

1) **<u>Теорема.</u>** *Для абсолютной сходимости ряда* $\sum u_n$ *необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде разности двух сходящихся рядов с неотрицательными членами.*

**<u>Следствие.</u>** Условно сходящийся ряд является разностью двух расходящихся рядов с неотрицательными членами, стремящимися к нулю членами.

2) В сходящемся ряде любая группировка членов ряда, не изменяющая их порядка, сохраняет сходимость и величину ряда.
3) Если ряд сходится абсолютно, то ряд, полученный из него любой перестановкой членов, также абсолютно сходится и имеет ту же сумму. Перестановкой членов условно сходящегося ряда можно получить условно сходящийся ряд, имеющий любую наперед заданную сумму, и даже расходящийся ряд.
4) **Теорема.** *При любой группировке членов абсолютно сходящегося ряда (при этом число групп может быть как конечным, так и бесконечным и число членов в группе может быть как конечным, так и бесконечным) получается сходящийся ряд, сумма которого равна сумме исходного ряда.*
5) Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся абсолютно и их суммы равны соответственно $S$ и $\sigma$, то ряд, составленный из всех произведений вида $u_i v_k, \quad i,k = 1,2,...$ взятых в каком угодно порядке, также сходится абсолютно и его сумма равна $S \cdot \sigma$ - произведению сумм перемножаемых рядов.
Если же производить перемножение условно сходящихся рядов, то в результате можно получить расходящийся ряд.

2.7. Векторный анализ и элементы теории поля
1.Производная по направлению.
2.Градиент.
$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$
– производная функции u(x, y, z) по направлению вектора $\vec{S}$ в точке с координатами (x, y, z). $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\vec{S}$.
Если в некоторой области D задана функция u = u(x, y, z) и некоторый вектор, координаты которого равны значениям функции u в соответствующей точке, то этот вектор называется градиентом функции u:
$$grad\bar{u} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{dy}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$ или $$grad\bar{u} = \{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{dy}, \frac{\partial u}{\partial z}\}$$.

2.8. Гармонический анализ
1.Ряды Фурье
Ряд Фурье позволяет изучать периодические (непериодические) функции, разлагая их на компоненты. Переменные токи и напряжения, смещения, скорость и ускорение кривошипно-шатунных механизмов и акустические волны - это типичные практические примеры применения периодических функций в инженерных расчетах.
Разложение в ряд Фурье основывается на предположении, что все имеющие практическое значение функции в интервале $-\pi \le x \le \pi$ можно выразить в виде сходящихся тригонометрических рядов (ряд считается сходящимся, если сходится последовательность частичных сумм, составленных из его членов):

**Стандартная (=обычная) запись через сумму sinx и cosx**

$f(x)=a_o+ a_1cosx+a_2cos2x+a_3cos3x+...+b_1sinx+b_2sin2x+b_3sin3x+...$,
где $a_o$, $a_1$,$a_2$,...,$b_1$,$b_2$,.. - действительные константы, т.е.

$$f(x)=a_o+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx+b_n sinnx) \quad (1)$$

**Где для диапазона от -π до π коэффициенты ряда Фурье рассчитываются по формулам:**

$$a_o=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)cosnx\,dx \quad (n=1,2,3,...)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)sinnx\,dx \quad (n=1,2,3,...)$$

Коэффициенты $a_o$,$a_n$ и $b_n$ называются **коэффициентами Фурье**, и если их можно найти, то ряд (1) называется **рядом Фурье,** соответствующим функции f(x). Для ряда (1) член ($a_1$cosx+$b_1$sinx) называется первой или **основной гармоникой,**

**Другой способ записи ряда - использование соотношения acosx+bsinx=csin(x+α)**

**$f(x)=a_o+c_1sin(x+\alpha_1)+c_2sin(2x+\alpha_2)+...+c_nsin(nx+\alpha_n)$**

Где $a_o$ - константа, $c_1=(a_1^2+b_1^2)^{1/2}$ , $c_n=(a_n^2+b_n^2)^{1/2}$- амплитуды различных компонент, а фазовый угол равен $a_n$=arctg $a_n/b_n$.

Для ряда (1) член ($a_1$cosx+$b_1$sinx) или $c_1sin(x+\alpha_1)$ называется первой или **основной гармоникой,** ($a_2$cos2x+$b_2$sin2x) или $c_2sin(2x+\alpha_2)$ называется **второй гармоникой** и так далее.

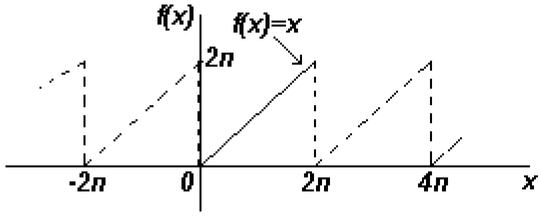
Для точного представления сложного сигнала обычно требуется бесконечное количество членов. Однако во многих практических задачах достаточно рассмотреть только несколько первых членов.

**Ряд Фурье непериодических функций с периодом 2π.**

**Разложение непериодических функций.**

Если функция f(x) непериодическая, значит, она не может быть разложена в ряд Фурье для всех значений x. Однако можно определить ряд Фурье, представляющий функцию в любом диапазоне шириной 2π.

Если задана непериодическая функция, можно составить новую функцию, выбирая значения f(x) в определенном диапазоне и повторяя их вне этого диапазона с интервалом 2π. Поскольку новая функция является периодической с периодом 2π, ее можно разложить в ряд Фурье для всех значений x. Например, функция f(x)=x не является периодической. Однако, если необходимо разложить ее в ряд Фурье на интервале от о до 2π, тогда вне этого интервала строится периодическая функция с периодом 2π (как показано на рис. ниже) .




Для непериодических функций, таких как f(x)=x, сумма ряда Фурье равна значению f(x) во всех точках заданного диапазона, но она не равна f(x) для точек вне диапазона. Для нахождения ряда Фурье непериодической функции в диапазоне 2π используется все таже формула коэффициентов Фурье.

**Четные и нечетные функции.**

Говорят, функция y=f(x) **четная**, если f(-x)=f(x) для всех значений x. Графики четных функций всегда симметричны относительно оси y (т.е. являются зеркально отраженными). Два примера четных функций: $y=x^2$ и y=cosx.

Говорят, что функция y=f(x) **нечетная,** если f(-x)=-f(x) для всех значений x. Графики нечетных функций всегда симметричны относительно начала координат.

**Многие функции не являются ни четными, ни нечетными.**

**Разложение в ряд Фурье по косинусам.**

Ряд Фурье четной периодической функции f(x) с периодом 2π содержит только члены с косинусами (т.е. не содержит членов с синусами) и может включать постоянный член. Следовательно,

$$f(x)=a_o+\sum_{n=1}^{\infty}a_n cosnx$$

**где коэффициенты ряда Фурье,**

$$a_o=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)cosnxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)cosnxdx$$

**Разложение в ряд Фурье по синусам.**

Ряд Фурье нечетной периодической функции f(x) с периодом 2π содержит только члены с синусами (т.е. не содержит членов с косинусами). Следовательно,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n sinnx$$

**где коэффициенты ряда Фурье,**

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)sinnxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)sinnxdx$$

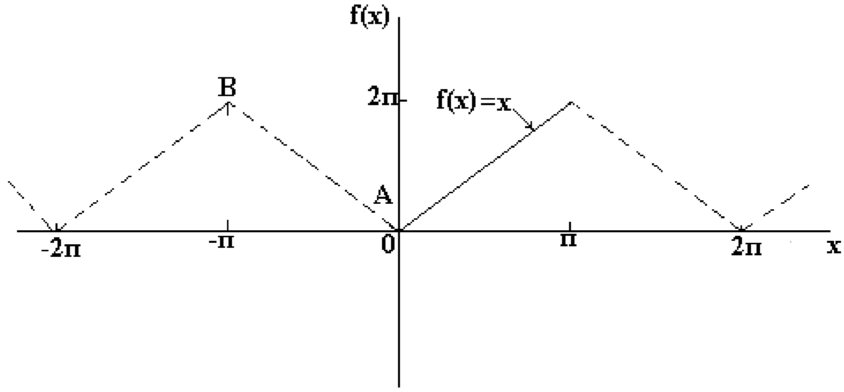
**Ряд Фурье на полупериоде.**

Если функция определена для диапазона, скажем от 0 до π, а не только от 0 до 2π, ее можно разложить в ряд только по синусам или тольо по косинусам. Полученный ряд Фурье называется **рядом Фурье на полупериоде.**

Если требуется получить разложение **Фурье на полупериоде по косинусам** функции f(x) в диапазоне от 0 до π, то необходимо составить четную периодическую функцию. На рис. ниже показана функция f(x)=x, построенная на интервале от x=0 до x=π. Поскольку четная функция симметрична относительно оси f(x), проводим линию AB, как показано на рис. ниже. Если предположить, что за пределами рассмотренного интервала полученная треугольная форма является периодической с периодом 2π, то итоговый график имеет вид, показ. на рис. ниже. Поскольку требуется получить разложение Фурье по косинусам, как и ранее, вычисляем коэффициенты Фурье $a_o$ и $a_n$

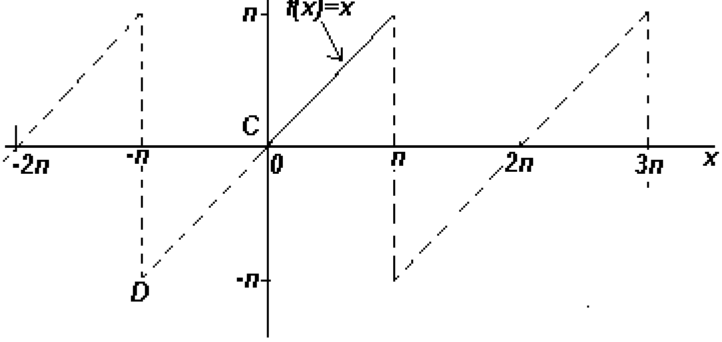
$$f(x) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$\text{Где } a_o = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx \text{ и } a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$




Если требуется получить **разложение Фурье на полупериоде по синусам** функции f(x) в диапазоне от 0 до π, то необходимо составить нечетную периодическую функцию. На рис. ниже показана функция f(x)=x, построенная на интервале от от x=0 до x=π. Поскольку нечетная функция симметрична относительно начала координат, строим линию CD, как показано на рис. Если предположить, что за пределами рассмотренного интервала полученный пилообразный сигнал является периодическим с периодом 2π, то итоговый график имеет вид, показанный на рис. Поскольку требуется получить разложение Фурие на полупериоде по синусам, как и ранее, вычисляем коэффициент Фурье. b

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \text{ где } b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$



2.9. Численные методы

1.Вычисление определенного интеграла

Пусть требуется найти определенный интеграл от непрерывной функции $f$(x). Если можно найти первообразную $\int_a^b f(x)\,dx$ F(x) функции $f$(x), то интеграл вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Но отыскание первообразной функции иногда весьма сложно; кроме того, как известно, не для всякой непрерывной функции ее первообразная выражается через элементарные функции. В этих и других случаях (например, функция y = $f$(x) задана графически или таблично) прибегают к приближенным формулам, с помощью которых определенный интеграл находится с любой степенью точности.

Рассмотрим три наиболее употребительные формулы приближенного вычисления определенного интеграла — формулу прямоугольников, формулу трапеций, формулу парабол (Симпсона), основанные на геометрическом смысле определенного интеграла.

1. Формула прямоугольников

Пусть на отрезке [a; b], a < b, задана непрерывная функция $f$(x). Требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, численно равный площади соответствующей криволинейной трапеции.

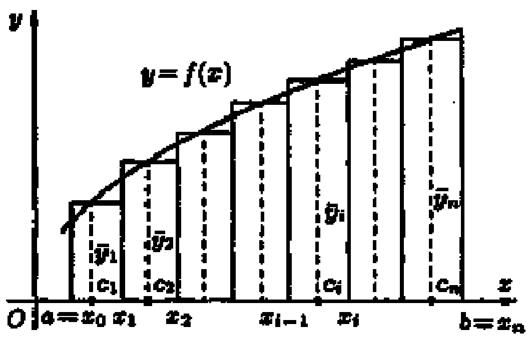


Рис. 200.

Разобьем основание этой трапеции, т. е. отрезок [a; b], на n равных частей (отрезков) длины $h = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$ (шаг разбиения) с помощью точек $x_0 = a$, $x_1, x_2, ..., x_n = b$. Можно записать, что $x_i = x_0 + h \cdot i$, где i = 1,2,..., n (см. рис. 200).

В середине $c_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ каждого такого отрезка построим ординату $\hat{y}_i = f(c_i)$ графика функции y = $f$(x). Приняв эту ординату за высоту, построим прямоугольник с площадью $h \cdot \hat{y}_i$.

Тогда сумма площадей всех n прямо угольников дает площадь ступенчатой фигуры, представляющую собой приближенное значение искомого определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \cdots + \bar{y}_n) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right). \qquad (42.1)$$

Формула (42.1) называется формулой средних прямоугольников.

Абсолютная погрешность приближенного равенства (42.1) оценивается с помощью следующей формулы:

$$|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^3 \cdot M_2}{24n^2},$$

где $M_2$ — наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке [a; b],

$$|R_n| = \left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) \right|.$$

Отметим, что для линейной функции ($f(x)=kx+b$) формула (42.1) дает точный ответ, поскольку в этом случае $f''(x)=0$.

2. Формула трапеций

Формулу трапеций получают аналогично формуле прямоугольников: на каждом частичном отрезке криволинейная трапеция заменяется обычной.

Разобьем отрезок [a; b] на n равных частей длины $h = \frac{b-a}{n}$. Абсциссы точек деления $a = x_0, x_1, x_2, \dots, b = x_n$ (рис. 201). Пусть $y_0, y_1 \dots, y_n$ —

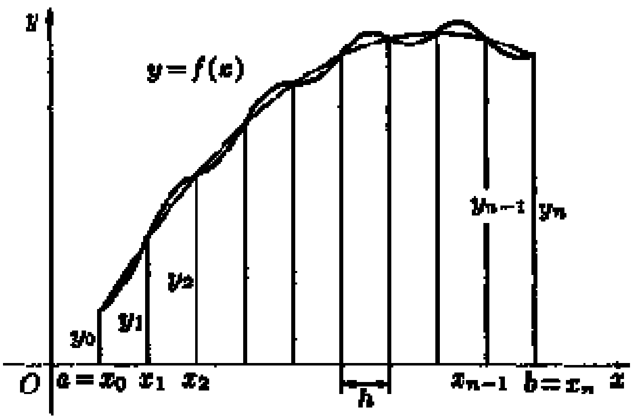



Рис. 201.

соответствующие им ординаты графика функции. Тогда расчетные формулы $h = \frac{b-a}{n}$ для этих значений примут вид $x_i = a+h*i$, $y_i=f(x_i)$, i= 0,1,2,..., n;

Заменим кривую $y=f(x)$ ломаной линией, звенья которой соединяют концы ординат $y_i$ и $y_{i+1}$ (i = 0,1,2,.. .,n). Тогда площадь криволинейной трапеции приближенно равна сумме площадей обычных трапеций с основаниями $y_i$, $y_{i+1}$ и высотой $h = \frac{b-a}{n}$:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{y_0+y_1}{2} \cdot h + \frac{y_1+y_2}{2} \cdot h + \dots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2} \cdot h$$

или

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}\right). \qquad (42.2)$$

Формула (42.2) называется формулой трапеций.

2.10. Функция комплексного переменного. Элементы функционального анализа

1. Комплексные числа.

2.Функция комплексного переменного

3. Ее производные.

Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Def: *Комплексным числом* называется выражение вида $z = a + ib$, где $a, b$ - действительные числа, $i$ - мнимая единица, $i^2 = -1$. (В электродинамике мнимую единицу принято обозначать через *j*, кроме того, следует отметить, что в электротехнике векторная комплексная величина обозначается точкой над величиной, а скалярная - подчеркиванием снизу*)*

$a$ - называется действительной частью числа $z$, $b$ - называется мнимой частью числа $z$. Их обозначают $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$.

Выражение $z = a + ib$ называют *алгебраической формой записи комплексного числа.*

Если $a = 0$, то число $ib$ называется чисто мнимым, если $b$=0, то получается действительное число $a + i0 = a$

Def: Комплексные числа $z = a + ib, \quad \bar{z} = a - ib$, которые отличаются только знаком мнимой части, называются *сопряженными.*

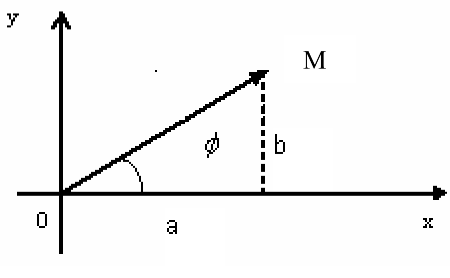
Замечания: 1) Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1, \quad z_2 = a_2 + ib_2$ считаются равными, если равны их действительные и мнимые части соответственно.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$

2) Комплексное число равно нулю тогда и только тогда, когда действительная и мнимая части равны нулю

$$z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Всякое комплексное число $z = a + ib$ можно изобразить на плоскости $Oxy$ в виде точки $M(a,b)$. Обратно, каждой точке плоскости $M(a,b)$ соответствует комплексное число $z = a + ib$. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется комплексной плоскостью. Точкам плоскости, лежащим на оси абсцисс соответствуют действительные числа. Точки, лежащие на оси ординат, изображают чисто мнимые числа. Поэтому, ось $Ox$ называют действительной осью, а ось $Oy$ - мнимой осью.




В алгебраической форме $z_1 = a_1 + ib_1, \quad z_2 = a_2 + ib_2$

Def: Суммой двух комплексных чисел называется комплексное число, определяемое равенством $z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$, т.е. сложение комплексных чисел происходит по правилу сложения радиус-векторов этих чисел.

Пример: $(2-i)+(-1+3i)=1+2i$

При вычитании комплексных чисел их радиус-векторы вычитаются.
Т.о. $z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$

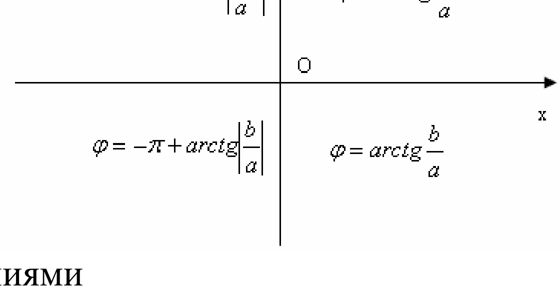
Def: Произведением комплексных чисел называется такое комплексное число, которое получается, если перемножить числа как многочлены, учитывая, что $i^2 = -1$. $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ib_1a_2 + ia_1b_2 + i^2b_1b_2$, проведя преобразования, получим $z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(b_1a_2 + a_1b_2)$.

Замечание: Произведение сопряженных комплексных чисел равно квадрату модуля каждого из них $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$

Def: Частным от деления $z_1$ на $z_2$ называется комплексное число $z$, удовлетворяющее условию. $z_2 \cdot z = z_1$ Т.е
$a_1 + ib_1 = (a_2 + ib_2)(x + iy) = (a_2x - b_2y) + i(a_2y + b_2x)$. Чтобы найти $x$ и $y$ необходимо решить систему уравнений $\begin{cases} a_2x - b_2y = a_1 \\ b_2a_2x + a_2y = b_1 \end{cases}$, решив эту систему, получим $x = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \quad y = \dfrac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$. Окончательно получаем $z = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\dfrac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$. Практически деление комплексных чисел выполняется следующим образом: чтобы разделить $z_1 = a_1 + ib_1$ на $z_2 = a_2 + ib_2$, умножим делимое и делитель на число сопряженное делителю, т. е. на число $a_2 - ib_2$.

Тригонометрическая форма комплексного числа. Формула Муавра.
С каждой точкой $z$ связан радиус-вектор этой точки $\overrightarrow{OM}$. Длина радиус - вектора $r$ называется модулем комплексного числа $r = |z|$. Угол, образованный радиус-вектором точки $z$ с осью $Ox$, называется аргументом $\varphi = Argz$ этой точки. Наименьшее по модулю значение аргумента называется его главным значением и обозначается через $\arg z$:
$-\pi < \arg z \le \pi$.

Для модуля и аргумента комплексного числа справедливы следующие соотношения $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \arg z$,
$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi, \quad tg\varphi = \dfrac{b}{a}$. $r, \quad \varphi$ - полярные координаты точки $z$. Для того чтобы найти аргумент комплексного числа, необходимо определить в какой из координатных четвертей оно располагается, и воспользоваться следующими соотношениями



Подставив полученные нами соотношения в выражение для комплексного числа, получим $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Выражение $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется *тригонометрической формой записи комплексного числа.*

Если $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k \end{cases} \quad k \in N$$
.

Для сопряженных комплексных чисел справедливы следующие соотношения $\bar{z} = a - ib = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$, То есть $\arg\bar{z} = -\arg z$

Если комплексному числу $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, модуль которого равен 1, поставить в соответствие показательное выражение $e^{i\varphi}$, то получим соотношение $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, которое называется *формулой Эйлера.*

Любое комплексное число $z$ можно записать в виде $z = re^{i\varphi}$. Эта форма записи комплексного числа называется *показательной формой*.

Итак, существуют три формы записи комплексного числа:

$z = a + ib$ **– алгебраическая форма;**

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ **– тригонометрическая форма;**

$z = re^{i\varphi}$ **– показательная форма.**

В тригонометрической и показательной форме.

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_1e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_2e^{i\varphi_2}$$

При умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Применив формулу Эйлера, получим правило нахождения произведения комплексных чисел в показательной форме $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

Для нахождения частного двух комплексных чисел в тригонометрической и показательной форме применяют следующие формулы

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Возведение в степень представляет собой произведение $n$ одинаковых сомножителей. В силу правила умножения комплексных чисел получим $z^n = r^n(\cos n\varphi - i\sin n\varphi)$ - формула Муавра. $z^n = r^n e^{in\varphi}$

Формулу Муавра удобно применять для вывода формул кратных углов

Извлечение корня из комплексного числа.

*Корень из комплексного числа.* Пусть $\sqrt[n]{z} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$, где $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда $z = \rho^n(\cos n\psi - i\sin n\psi)$.

Отсюда, $r = \rho^n, \quad n\psi = \varphi + 2\pi k \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$, т. е.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$ где $k = 0,1,2,3,\ldots n-1$

Из этой формулы следует, что корень $n$-степени из любого отличного от нуля комплексного числа имеет точно $n$ значений. Геометрически они изображаются точками, равноотстоящими друг от друга на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$.

**Понятие о функции комплексного аргумента.**

Если каждому комплексному числу $z \in D$ по некоторому закону поставлено в соответствие определенное комплексное число $w \in G$, то на этой области задана *однозначная функция комплексного переменного*:

$w = f(z)$

Множество $D$ называется *областью определения*, множество $G$ – *областью значений функции*.

Комплексную функцию можно записать в виде:

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$$

$$v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$$

*u, v* – действительные функции от переменных *x* и *y*.

Если каждому $z \in D$ соответствует несколько различных значений *w*, то функция $w = f(z)$ называется *многозначной*.

**Основные трансцендентные функции**

*Трансцендентными* называются аналитические функции, которые не являются алгебраическими.

Если аргументом показательной или тригонометрических функций является комплексное число, то определение этих функций, вводимое в элементарной алгебре, теряет смысл.

Функции $e^z$, cosz, sinz связаны между собой формулой Эйлера. Эта формула может быть очень легко получена сложением соответствующих рядов.

$$e^{-iz} = \cos z + i \sin z$$

Также справедливы равенства:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}; \qquad \left(e^z\right)^m = e^{zm}; \qquad e^{z+2\pi i} = e^z;$$

$$tgz = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})};$$

$$ctgz = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}};$$

Для тригонометрических функций комплексного аргумента справедливы основные тригонометрические тождества (синус и косинус суммы, разности и т.д.), которые справедливы для функций действительного аргумента.

**Определение. Гиперболическим синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом** называются соответственно функции:

$$sh\,z = \frac{e^z - e^{-z}}{2};\quad ch\,z = \frac{e^z + e^{-z}}{2};\quad th\,z = \frac{sh\,z}{ch\,z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}};\quad cth\,z = \frac{ch\,z}{sh\,z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}};$$

Гиперболические функции могут быть выражены через тригонометрические:

$$sh\,z = -i\sin iz;\qquad ch\,z = \cos iz;$$

$$th\,z = -itg\,iz;\qquad cth\,z = ictg\,iz;$$

Гиперболические функции *sh z* и *ch z* имеют период 2πi, а функции *th z* и *cth z* – период πi.

Пример. Найти sin(1+2i).

$$\sin(1+2i) = \frac{e^{i-2} - e^{2-i}}{2i} = \frac{e^{-2}e^{i} - e^{2}e^{-i}}{2i} = \frac{e^{-2}(\cos 1 + i\sin 1) - e^{2}(\cos 1 - i\sin 1)}{2i} =$$

$$= \frac{\cos 1(e^{-2} - e^{2}) + i\sin 1(e^{2} + e^{-2})}{2i} = \frac{e^{2} + e^{-2}}{2}\sin 1 + i\frac{e^{2} - e^{-2}}{2}\cos 1 = ch2\sin 1 + sh2\cos 1.$$

*Логарифмическая функция* комплексного аргумента определяется как функция, обратная показательной.

$$e^{w} = z;\qquad w = Lnz.$$

Если $w = u + iv$, то $\left|e^{w}\right| = e^{u}$ и $Arg\ e^{w} = \arg z + 2\pi k = v$.

Тогда $e^{u} = |z|;\qquad u = \ln|z|$.

Итого: $w = Lnz = \ln|z| + i\arg z + 2\pi ik;\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Для комплексного числа $z = a + ib$ $\qquad \arg z = arctg\frac{b}{a};$

Выражение $\ln z = \ln|z| + i\arg z$ называется *главным значением логарифма***.**

Логарифмическая функция комплексного аргумента обладает следующими свойствами:

1) $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2;$ 2) $\ln\frac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2;$ 3) $\ln(z)^n = n\ln z;$ 4) $\ln\sqrt[n]{z} = \frac{1}{n}\ln z;$

**Обратные тригонометрические функции** комплексного переменного имеют вид:

$$Arc\cos z = -i\left[\ln\left|z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right| + i\left[\arg(z \pm \sqrt{z^2 - 1}) + 2\pi k\right]\right] = \frac{1}{i}Ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

$$Arc\sin z = -i\left[\ln\left|iz \pm \sqrt{1 - z^2}\right| + i\left[\arg(iz \pm \sqrt{1 - z^2}) + 2\pi k\right]\right] = \frac{1}{i}Ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$$

$$Arctgz = -i\left[\ln\left|\frac{1 + zi}{1 - zi}\right| + i\left(\arg\frac{1 + zi}{1 - zi} + 2\pi k\right)\right] = \frac{1}{2i}Ln\frac{i - z}{i + z}$$

$$Arshz = \ln\left|z \pm \sqrt{z^2 + 1}\right| + i\left[\arg(z \pm \sqrt{z^2 + 1}) + 2\pi k\right] = Ln\left(z \pm \sqrt{z^2 + 1}\right)$$

$$Archz = \ln\left|z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right| + i\left[\arg(z \pm \sqrt{z^2 - 1}) + 2\pi k\right] = Ln\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

$$Arcthz = \frac{1}{2}Ln\frac{1 + z}{1 - z}$$

2.11. Случайные величины

1.Закон больших чисел.

2.Неравенство Чебышева.

**1.Закон больших чисел- Теорема Чебышева.**

Многие явления и процессы протекают непрерывно или периодически при большом числе испытаний. В этом случае среднее значение случайной величины колебается в определенных пределах или даже стремится к вполне определенному значению. Иными словами, случайная величина перестает быть случайной и может быть предсказана с высокой степенью вероятности (рис.1). Отклонение случайной величины от средней арифметической в каждом конкретном случае есть безусловно. А при беконечно большом числе испытаний эти отклонения взаимно погашают друг друга и средний их результат стремится к какому-то постоянному значению, т.е к математическому ожиданию. В этом и заключается смысл закона больших чисел.

Другими словами, если взять предел вероятности отклонения случайной величины от ее математического ожидания при стремлении к бесконечности числа испытаний n, то он будет равен единице.

$$\lim_{n\to\infty} P\,(X_{cp} - a \leq \varepsilon) = 1$$

Рассмотрим пример: пусть вероятность поступления заказа в магазин А равна 0,2 или каждый 5-й звонящий делает заказ. Составим закон распределения поступления 5-ти заказов.

n = 5

m - число поступивших заказов

p = 0.2

q = 1 - p

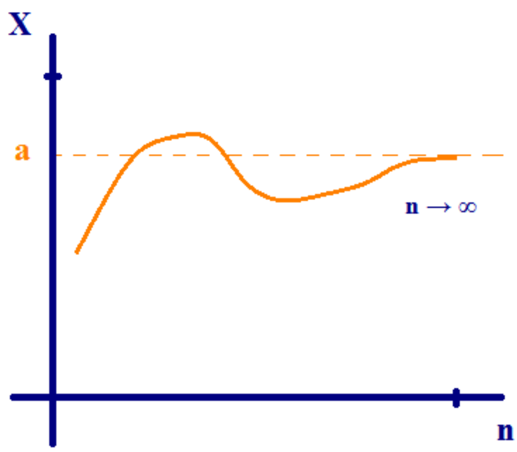



Рис.1

| m | $C_n^m$ | $p^m$ | $q^{n-m}$ | $p_i$ | $x_i\ p_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 0,32768 | 0,32768 | 0 |
| 1 | 5 | 0,2 | 0,4096 | 0,4096 | 0,4096 |
| 2 | 10 | 0,04 | 0,512 | 0,2048 | 0,4096 |
| 3 | 10 | 0,008 | 0,64 | 0,0512 | 0,1536 |
| 4 | 5 | 0,0016 | 0,8 | 0,0064 | 0,0256 |
| 5 | 1 | 0,00032 | 1 | 0,00032 | 0,0016 |
| | | | | 1 | M(X) = 1 |

Из графика (рис.2) можно увидеть, что вероятность поступления 3-х заказов составляет чуть больше 0,05, а 4-х и 5-ти - очень низкая. Т.е. в каждой серии из 5-ти звонков число заказов может выпадать например 2 0 1 0 1 2 0 1 0 3 ...... и т.д. Числа 3, 4, 5 будут выпадать очень редко. Число 5 - практически невозможное событие. Вообщем, если число серий по 5 звонков будет стремится к бесконечности, то средняя арифметическая случайной величины X1 - будет стремится к математическому ожиданию M(X) = 1. Что и описывает закон больших чисел.

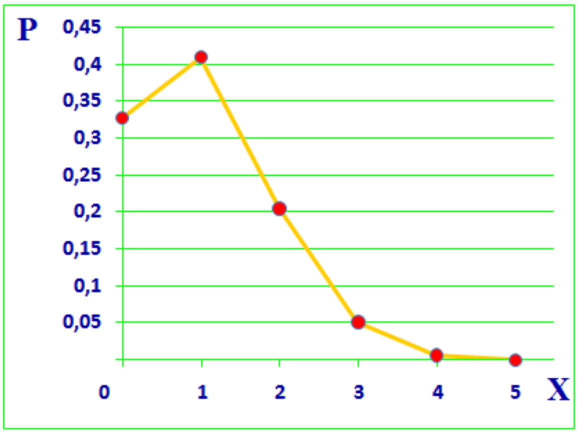



Рис.2

Отсюда можно сформулировать теорему Чебышева, которая гласит, что если дисперсии n независимых случайных величин не превышают какую-то величину C, т.е. ограниченны, то при стремлении числа n к бесконечности средняя арифметическая этих случайных величин сходится по вероятности к средней арифметической их математических ожиданий. Т.е.

$$\lim_{n\to\infty} P\left( \left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right| \le \varepsilon \right) = 1$$

Это означает, что отклонение средней арифметической случайных величин от средней арифметической их математических ожиданий не превысит сколь угодно малое число ε или ( |Xср - aср| < ε). В этом заключается смысл данной теоремы.

**2.Неравенство Маркова.**

Допустим есть случайная величина X, которая принимает только положительные значения и имеет математическое ожидание, например число заказов на покупку офисной техники в месяц. Тогда для любого положительного числа A верно неравенство:

$$P\,(x>A) \le \frac{M\,(X)}{A}$$

или

$$P\,(x \le A) \ge 1 - \frac{M\,(X)}{A}$$

Второе неравенство справедливо выполняется, т.к. события P (x > A) и P (x ≤ A) противоположные.

Например, среднее число заказов на покупку офисной техники за месяц равно 500. Оценить вероятность того, что в следующем месяце число заказов составит более 600.

по формуле:

$$P\,(x>A) \le \frac{M\,(X)}{A}$$

$$P\,(x > 600) \le \frac{500}{600} \approx 0{,}833$$

Т.е. вероятность того, что число заказов превысит 600 составляет не более 0,833. Соответственно вероятность того что, число заказов составит не более 600 будет:

$$P\,(x \leq A) \geq 1 - \frac{M\,(X)}{A}$$

или

$$P\,(x \leq 600) \geq 1 - \frac{500}{600} \approx 0{,}166$$

**3.Неравенство Чебышева.**

С помощью неравенства Чебышева можно рассчитать вероятность отклонения случайной величины от любого числа ε. Но здесь уже используется дисперсия случайной величины.

Неравенство Чебышева имеет вид:

$$P\,(|\,X - a\,| > \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

где

$a = M(X)$

$\varepsilon > 0$

Данная формула позволяет рассчитать вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания превысит любое число ε. Вероятность противоположного события, т.е. $P\,(|X - a| \leq \varepsilon)$, так же как и в неравенстве Маркова рассчитывается по следующей формуле:

$$P\,(|\,X - a\,| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

Неравенство Чебышева можно применять для любых случайных величин. В первом случае оно устанавливает верхнюю границу вероятности, а во втором - нижнюю.

**4.Центральная предельная теорема (Теорема Ляпунова).**

Закон больших чисел устанавливает условия, при которых среднее значение случайной величины стремится к некоторой постоянной, при стремлении числа испытаний к бесконечности. Существует группа теорем, которая описывает условия стремления закона распределения случайной величины к нормальному. Одна из таких теорем - теорема Ляпунова. Данная теорема устанавливает некоторые условия, при которых закон распределения суммы $Yn = X1 + X2 + ... + Xn$ случайных величин при стремлении n к бесконечности стремится к нормальному закону распределению. Рассмотрим эти условия: если есть независимые случайные величины X1, X2, X3 ... и каждая из этих величин имеет математическое ожидание M(Xi) и дисперсию D(Xi), абсолютный центральный момент третьего порядка bi и предел отношения

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} D(X_i)\right)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

стремится к нулю, то закон распределения суммы этих величин при стремлении n к бесконечности приближается к нормальному закону распределения

с математическим ожиданием $\sum_{i=1}^{n} M(X_i)$

и дисперсией $\sum_{i=1}^{n} D(X_i)$

Необходимо отметить то, что скорость стремления закона распределения случайной величины в каждом явлении может быть разная. В одних случаях n может равняться десяткам, а в других сотням, тысячам и т.д.

Закон больших чисел играет важное значение в теоретическом плане, т.к. он служит обоснованием методов математической статистики. На практике закон больших чисел можно продемонстрировать на примере погоды. Например, атмосферное давление каждый день есть величина случайная. Однако ее среднегодовое значение в течении многих лет практически не изменяется.

# 3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЗАНЯТИЯМ

**3.1 Практические занятия по теме «Линейная алгебра Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление»**

1.Входной контроль.
2. Решение систем двух уравнений с двумя переменными.
3. Системы уравнений, имеющие одно, ни одного и бесчисленное множество решений.
4. Методы решения СЛУ.
5. Способы задания прямой.
6. Взаимное расположение двух прямых.
7. Составление уравнения линий в треугольнике.
8. Составление уравнения линий в треугольнике.
9. Решение задач.
10. Функция. Область определения функции.
11. Производная. Правила дифференцирования.
12. Геометрический смысл производной.
13. Механический смысл производной.

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на следующем:

1. Определение количества решений системы линейных уравнений.
2. Составление уравнений линий в треугольнике.
3. Условие параллельности и перпендикулярности прямых.
4. Определение свойств функции.
5. Построение графиков элементарных и неэлементарных функций.
6. Понятие неопределенности. Ее виды. Правила раскрытия.
7. Нахождение производной по определению и формулам.
8. Геометрический и механический смыслы производной.
9. Производные высших порядков.

## 3.2. Практические занятия по теме «Интегральное исчисление. Дифференциальные уравнения»

Вопросы к занятию

1. Способы задания функции двух переменных.
2. Нахождение ОДЗ функции двух переменных.
3. Частные производные первого и второго порядков.
4. Исследование функции двух переменных на экстремум.
5. Вычисление неопределенного интеграла по таблице.
6. Непосредственное интегрирование.
7. Интегрирование заменой переменной.
8. Интегрирование по частям.
9. Вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница.
10. Дифференциальные уравнения с разделенными переменными.
11. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
12. Комбинаторика.
13. Решение задач на нахождение вероятностей.
14. Сумма и произведение событий.
15. Теоремы сложения и умножения.
16. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.
17.Формула Бернулли.
18. Локальная теорема Муавра-Лапласа.

19. Формула Пуассона.
20. Интегральная теорема Лапласа.
21. Определение случайной величины и её виды.
22. Способы задания дискретной случайной величины (ДСВ).
23. Числовые характеристики ДСВ. Их роль и назначения.
24. Виды распределений ДСВ.
25. Способы задания непрерывной случайной величины (НСВ).
26. Числовые характеристики НСВ.
27. Виды распределений НСВ.

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на следующем:

1. Нахождение области определения функции двух переменных.
2. Правила и формулы дифференцирования.
3. Физические примеры градиента.
4. Исследование функции двух переменных на экстремум.
5. Нахождение наименьшего и наибольшего значений в замкнутой области.
6. Метод наименьших квадратов.
7. Нахождение первообразной функции.
8. Вычисление неопределенного интеграла по таблице.
9. Геометрический смысл неопределенного интеграла.
10. Связь неопределенного интеграла с определенным интегралом.
11. Свойства определенного интеграла.
12. Замена переменной в определенном интеграле.
13. Интегрирование по частям в определенном интеграле.
14. Приближенное вычисление определенного интеграла основывается на его геометрическом смысле.
15. Использование определенного интеграла при решении геометрических и физических задач.
16. Геометрические и физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
17. Виды дифференциальных уравнений и способы их решения.
18. Нахождение вероятности случайного события с использованием формул комбинаторики.
19. Условия применимости формул при решении задач на повторные независимые события.
20. Составление закона распределения, построение многоугольника распределения дискретной случайной величины.
21. Нахождение числовых характеристик видов распределений дискретной случайной величины.
22. Построение интегральной функции распределения для дискретной случайной величины.
23. Связь интегральной и дифференциальной функций распределения.
24. Определение числовых характеристик видов распределений непрерывной случайной величины.

## 3.3. Практические занятия по теме «Теория вероятностей»

Вопросы к занятию

1. Нахождение точечных оценок совокупности.
2. Оценка генеральной средней по выборочной средней.
3. Определение доверительной вероятности.
4. Определение доверительного интервала.

5. Определение доверительного интервала для оценки математического ожидания нормального распределения.

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на следующем:

1. Виды статистического распределения выборки.
2. Основное свойство выборочной средней.
3. Построение полигона и гистограммы.
4. Характеристики точечных оценок.
5. Задание надежности при решении практических задач.
6. Построение доверительных интервалов.

## 3.4. Практические занятия по теме «Математическая статистика»

Вопросы к занятию

1. Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения. Полигон и гистограмма. Статистические оценки параметров распределения. Точечные оценки. Интервальные оценки.
2. Элементы теории корреляции. Линейная корреляция. Корреляционная таблица. Коэффициент корреляции. Уравнение прямой регрессии У на Х и Х на У.
3. Определение нулевой и альтернативной гипотез.
4. Применение статистических критериев проверки гипотез.
5. Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей. Сравнение двух средних генеральных совокупностей, дисперсии которых известны (большие независимые выборки).
6. Вычисление коэффициента корреляции.
7. Определение параметров линейной регрессии.

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на следующем:

1. Виды статистического распределения выборки.
2. Основное свойство выборочной средней.
3. Построение полигона и гистограммы.
4. Характеристики точечных оценок.
5. Задание надежности при решении практических задач.
6. Построение доверительных интервалов.
7. Виды зависимостей между признаками.
8. Составление корреляционной таблицы.
9. Нахождение параметров прямой регрессии методом наименьших квадратов.
10. Ошибки первого и второго рода.