ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.Б.03 Моделирование в агроинженерии

Направление подготовки (специальность) 35.04.06 Агроинженерия

Профиль образовательной программы Электротехнологии и электрооборудование в сельском хозяйстве

Форма обучения очная

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1. 1 Лекция №1 (2 часа).

Тема: «Теория подобия и моделирование»

1.1.1 Вопросы лекции:

1. Историческая справка
2. Математическое и физическое подобие
3. Теоремы подобия
4. Моделирование

1.1.2 Краткое содержание вопросов:

1. Историческая справка

Около ста пятидесяти лет назад возникла новая область научного знания – учение о подобии явлений.

Гениальное предвидение этой науки было высказано Ньютоном в 1686 г. Но только в 1848 г. Член французской академии наук Жозеф Бертран впервые установил основное свойство подобных явлений, сформулировав первую теорему подобия, теорему о существовании инвариантов подобия.

Подобными называются явления, происходящие в геометрически подобных системах, если у них во всех сходственных точках отношения одноимённых величин есть постоянные числа. Эти отношения, так называемые константы подобия, не могут быть выбираемы произвольно, так как величины, характеризующие явление, вообще говоря, не независимы друг от друга, а находятся в определённой связи, обусловленной законами природы. Во многих случаях эта связь может быть выражена в виде уравнения. Для подобных между собой явлений оно должно иметь одинаковый вид. Наличие такого «уравнения связи» между физическими величинами, характеризующими явление, налагает определённое ограничение на выбор констант подобия.

Эти отношения, так называемые константы подобия, не могут быть выбираемы произвольно, так как величины, характеризующие явления, вообще говоря, не независимы друг от друга, а находятся в определенной связи, обусловленной законами природы. Во многих случаях эта связь может быть выражена математически в виде уравнения. Для подобных между собой явлений оно должно иметь одинаковый вид. Наличие такого «уравнения связи» между физическими величинами, характеризующими явление, налагает определенное ограничение на выбор констант подобия.

Бертран вывел первую теорему подобия для случая подобия механических явлений.

Исходя из существования математической связи между силой, массой и ускорением, устанавливаемой вторым законом Ньютона, Бертран показал, что у подобных явлений комплекс величин: «сила*длина/масса*скорость в квадрате» имеет одно и то же значение в сходственных точках подобных явлений. Этот комплекс называется инвариантом, или критерием механического подобия. В природе существуют только те подобные явления, у которых критерии одинаковы.

Если бы физическое уравнение связи можно было бы преобразить так, чтобы оно было составлено из инвариантов подобия, то это было бы общее уравнение, численно одинаковое для всех подобных явлений.

Вторая история подобия устанавливает возможность такого преобразования физических уравнений.

Она была выведена русским ученым А. Федерманом в 1911 г. и несколькими годами позже, в 1914 г., американским ученым Букингэмом.

В 1925 г. Т.А. Афанасьева-Эренфест вывела обе теоремы для случая подобия любых явлений природы и показала, что критериальное уравнение содержит, кроме критериев-комплексов, составленных из переменных величин, еще критерии краевых величин и симплексы – отношения одноименных величин (например, отношения двух скоростей, характеризующих явление). Тем самым учение о свойствах подобных явлений в основном было завершено.

Тотчас после вывода первой теоремы она начала находить практическое применение для обработки опытных данях в критериях подобия. Осборн Рейнольдс выразил закон движения жидкости по трубам одной общей формулой, через критерий подобия, названой в последствии его именем. Оказалось возможным объединить таким путем все численные данные опытов по гидравлическому сопротивлению, проведенных различными исследователями на воде, воздухе, паре, различных маслах и т.д. Фруд, изучая мореходные качества судов на моделях, представил результаты опытов над ними в виде критериального уравнения, которое можно было распространить на суда, подобные по своей геометрической конфигурации испытанным моделям. Наш выдающийся ученый Н.Е. Жуковский положил теорию подобия в основу критериальной обработки опытов над моделями самолетов, продуваемых в аэродинамической трубе, для того, чтобы результаты опытов можно было перевести на подобные моделям самолеты.

Вторая теорема узаконила эту практику.

Критерии подобия выводятся из уравнения связи. Поэтому для получения критериального уравнения надо знать уравнение, связывающее между собой величины, характеризующие рассматриваемое явление.

Для большинства физических явлений уравнения связи найдены в форме дифференциальных уравнений, однако получить интегральные решения их удается только для отдельных частных случаев. Поэтому критерии подобия, как правило, выводятся из дифференциальных уравнений связи, и требовалось еще подтвердить, что критерии, выведенные из проинтегрированных уравнений, остаются те же. Это было сделано П.К.Конаковым.

Таким образом, оказалось возможным результаты опытом над явлениями выражать в критериях подобия, полученных из дифференциальных уравнений, аналитическое решение которых не удалось найти.

Для того чтобы иметь право переносить данные опытов, произведенных на одном объекте, на другие, ему подобные, в выводах теории подобия не хватало еще одного важного звена.

Первая и вторая теоремы были выведены на основе предположения, что речь идет о явлениях, подобие которых заранее известно. Обе теоремы устанавливают свойства подобных явлений, но они не указывают способа для определения того, подобны ли два каких-нибудь, сравниваемых между собой, явления. Возникает вопрос, по каким признакам можно узнать, что явления подобны друг другу.

Ответ дается третьей теоремой подобия.

Третья теорема устанавливает условия, необходимые и достаточные для того, чтобы явления оказались подобными друг другу. Формулировка ее была дана М.В. Кирпичевым и А.А. Гухманом, а доказательство теоремы – М.В.Кирпичевым в 1930 г. (8).

Единичное явление выделяется из группы явлений, подчиняющихся одному и тому же уравнению связи, присоединением к нему условий однозначности, или моновалентности. В подобных явлениях входящие в условия однозначности величины, моноваленты, очевидно, должны быть подобны. Далее, согласно первой теореме, реально существующие подобные явления должны иметь одинаковые критерии, в том числе и составленные моновалентов.

Третья теорема доказывает, что два эти признака достаточны для того, чтобы иметь право считать явления подобными.

Сделанный исторический отбор показывает, что учение о подобии, состоящее первоначально в изучении свойств подобных явлений, постепенно сделалось учением о методах обработки физических опытов. Экспериментатор ставит перед собой следующие вопросы: какие величины надо измерять в опыте, как следует обрабатывать результаты опыта и на какие явления их можно распространять.

Теория подобия дает ответ на все три вопроса.

1) Измерить надо все величины, которые входят в состав критериев подобия.
2) Обрабатывать результаты опыта надо в виде зависимости между критериями подобия для того, чтобы можно было распространить их на все подобные явления.
3) Подобие же их можно узнать по подобию моновалентов и одинаковости моновалентных критериев.

Применение теории подобия к эксперименту развивалось в двух направлениях.

С одной стороны, теория подобия проникла в физику и стала научной основой физического эксперимента. С другой стороны, она нашла приложение в технике, открыв возможность изучать различные технические устройства на моделях.

Между обоими направлениями нельзя провести резкую границу, так как эксперимент в физике часто ставится над процессами, протекающими в различных частях технических устройств, модели же могут охватывать также не только целые технические объекты, но и отдельные части их. Таким образом, теория подобия сделалась научной основой одновременно как физического, так и технического эксперимента.

Осуществить все условия подобия, налагаемые третьей теоремой, часто бывает очень трудно.

Поэтому развитию моделирования весьма способствовал разработанный в СССР метод не точного, а приближенного моделирования, когда соблюдаются не все условия подобия и в модели получается с достаточной для практики точностью приближенное подобие.

Экспериментальная проверка приближенного метода моделирования проведена была в широких пределах М.А.Михеевым и рядом других советских ученых.

Иногда исследователю приходится встречаться с явлениями, настолько сложными и неизученными, что их не удается выразить посредством математических формул и составить уравнение связи между физическими величинами. Для случаев, когда оказывается возможным установить те физические величины, которые должны были бы войти в уравнение связи, Ж.Бертран в 1878 г. предложил метод, позволяющий из соображений о размеренности отдельных членов физического уравнения отгадать вид критериев подобия и подобрать эмпирическое уравнение связи для них. Этот путь менее надежен, и его следует применять только при невозможности вывести уравнения связи.

Так как учение о размерности лежат в основе физических уравнений, то с него мы и начнем изложение учения о подобии.

2. Математическое и физическое подобие

Всякое явление природы представляет собой систему материальных тел, которая претерпевает определенное изменение состояния, поскольку в ней протекают различные процессы.

Явлениями, подобными друг другу, называются системы тел, геометрически подобные друг другу, в которых протекают процессы одинаковой природы и в которых одноименные величины, характеризующие явления, относятся между собой как постоянные числа.

Иными словами, можно определить подобие явления так: явление, подобное заданному, может быть получен путем такого его преобразования, когда размер каждой ее величины изменяется в определенное число раз.

Такое преобразование называется подобным преобразованием явления.

Понятие подобного преобразования первоначально возникло в геометрии, где таким путем получаются подобные фигуры и тела; отношение любых сходных отрезков в них равно одному и тому же постоянному числу c_l, так что можно сказать, что тело, подобное первоначальному получено путем изображения его в ином геометрическом масштабе.

Понятие «механическое подобие» прежде всего включает в себя геометрическое подобие систем, затем – кинематическое подобие: подразумевается, что в любых сходных точках систем скорости движущихся тел параллельны и пропорциональны друг другу, т.е. что отношения между их скоростями одинаково во всех точках системы. Если система состоит из отдельных дискретных частиц, то у подобных явлений массы тоже относятся между собой как постоянное число; если же имеет место течение сплошного тела, капельной или газообразной жидкости, то плотности и коэффициенты вязкости во всех сходных точках подобных систем имеют постоянное отношение.

Далее понятие механического подобия включает в себя динамическое подобие, т.е. параллельность и пропорциональность сил в сходственных точках.

Тепловое подобие подразумевает пропорциональность друг другу всех характеризующих тепловые явления величин: температур, тепловых потоков, теплоемкостей, коэффициентов теплопроводности и т.д.

Обозначая отношение расстояний между геометрически подобными точками, т.е. сходственных отрезков длин двух подобных систем, через c_l, скоростей – c_w, масс – c_m, сил – c_f и т.д., можно дать математическую формулировку понятия подобия в виде следующей системы равенств:

$\frac{l''}{l'} = c_l; \frac{w''}{w'} = c_w; \frac{m''}{m'} = c_m; \frac{f''}{f'} = c_f$ и т.д., где одним и двумя штрихами обозначены первое и второе подобные явления.

Коэффициенты пропорциональности c_l, c_w и т.д., называются константами подобия. Для каждого рода величин они имеют свою особую численную величину; поэтому константы подобия имеют соответственные подстрочные значки, показывающие, к какого рода величинам они относятся.

Обобщая сказанное, можно подобие явлений определить, как пропорциональность друг другу всех величин, характеризующих явление, причем коэффициент пропорциональности сохраняет постоянное значение во всех точках системы для определенного наименования величин, но является различным для величин разного наименования.

В общем виде переход от $x_1',\ldots, x_n'$ величин одного явления к $x_1'',\ldots, x_n''$ величинам другого, ему подобного, может быть выражен уравнением

$$x_i' = c_{x_i} * x_i'' \Big|_{i=1}^{i=n} .$$

Это первое основное уравнение теории подобия.

Константы подобия сохраняют свое значение для любых случаев отношения сходственных величин. Например, если l' и l'' – сходственные отрезки двух подобных систем, имеют место равенства:

$$\frac{l''}{l} = \frac{l_1''}{l_1'} = \frac{l_2''}{l_2'} = \frac{l_0''}{l_0'} = \frac{l_2'' - l_1''}{l_2' - l_1'} = \frac{\Delta l''}{\Delta l'} = c_l ,$$

и, следовательно, отношение величин $l''/l' = c_l$ можно заменить отношением любых других отрезков при условии, что замена эта для любых подобных явлений делается одинаковым образом. Это так называемое правило замещения одних величин другими того же наименования.

Такую замену можно делать для всех других величин, например w''/w' и.т.д.

В дальнейшем часто будет встречаться дифференциация величин.

На них также можно распространять правило замещения величин. Это правило можно применять, когда рассматриваемая среда предполагается сплошным телом, т.е. когда наблюдатель имеет дело с такими размерами тела, которые в очень большое число раз превосходят расстояния между молекулами δ, так что дискретное строение тела незаметно и может не приниматься во внимание.

По определению, дифференциал функции dy равен производной, помноженной дифференциал независимой переменной dx:

$$dy = f'(x)dx\,.$$

Здесь dx – произвольная величина, которая в физике должна лежать в пределах

$$\delta << dx << \Delta x\,,$$

т.е. быть значительно больше расстояний между молекулами, для того, чтобы можно было рассматривать тело сплошным, как континуум, и одновременно настолько малым, чтобы к нему с достаточной степенью точности можно было применять формулы дифференциального, а не разностного исчисления. Таким образом, в физике dx есть хотя и очень малая, но конечная величина и, следовательно, должна рассматриваться, как разность x_2-x_1. Поэтому

$$\frac{x_2''}{x_2'} = \frac{x_1''}{x_1'} = \frac{x_2'' - x_1''}{x_2' - x_1'} = \frac{dx''}{dx'} = c_x\,.$$

Подобным же образом dy=y_2-y_1 и, следовательно, к нему применимо $\frac{y_2'' - y_1''}{y_2' - y_1'} = \frac{dy''}{dy'} = c_y$.

Вообще говоря, подобных друг другу явлений бывает не два, а значительное количество. Мы будем говорить, что они составляют группу подобных явлений.

Сравнивая все члены группы с одним явлением, которое служит образцом для них, замечаем, что при переходе от одного, подобного образца явления к другому, к третьему и т.д. константы подобия каждый раз получают другое значение, сохраняя в то же время свое свойство – быть постоянными во всех точках каждой системы, подобной образцу.

Объединяя переход от явления образца ко всем подобным ему, мы можем рассматривать его выражение $x_i'' = c_{x_i} x_i'$ как групповое преобразование явления, подразумевая под константой c_{x_i} последовательно ее значения для всей группы подобных образцу величин.

Подобие явлений можно выразить и другим способом: не константами подобия, а посредством так называемых инвариантов подобия.

Перейдем от абсолютной системы единиц, общей для всех явлений данного класса, к относительной системе, пригодной только для одного явления этого класса. Для этого выберем за единицы измерения величин рассматриваемой системы значения этих величин в каких-нибудь точках самой системы. Отметим их подстрочным индексом (0). Тогда все величины l', w', m' и другие для первого явления получат численные значения:

$$\frac{l'}{l_0'} = L';\ \frac{w'}{w_0'} = W';\ \frac{m'}{m_0'} = M'$$

и т.д.

Если во втором явлении за единицы измерения величин выбрать их значения в сходственных первой системе точках, то их значения в относительных единицах будут

$$\frac{l''}{l_0''} = L'';\ \frac{w''}{w_0''} = W''$$

и.т.д.

Очевидно, L'', W'' и т. д. будут те же, что и L', W' в первой системе.

В самом деле легко видеть, что

$$\frac{l''}{l'} = \frac{l_0''}{l_0'} \text{ и. т. д.}$$

Переставляя члены пропорции, получим

$$\frac{l''}{l_0''} = \frac{l'}{l_0'},\ \text{или}\ \ L'' = L'\,.$$

То же самое получится для любых других величин, характеризующих подобные явления.

Поэтому значки, отмечающие, к какому из явлений относятся величины L, W и т. д., можно отбросить, так как при переходе от одного явления к другому, ему подобному, все величины, выраженные в относительных единицах измерения, останутся численно прежними.

Иными словами, они являются инвариантами подобия. Будем обозначать это свойство их словами inv. (инвариант) или idem (то же самое).

Следовательно, L=idem, W=idem или для общего случая $\frac{x}{x_0} = X = idem$.

Следует уметь хорошо отличить понятия «константа подобия» и «инвариант подобия».

Константа сохраняет постоянное значение во всех точках системы, но она делается другой, когда одна пара подобных явлений заменяется другой.

Инвариант подобия, наоборот, различен для разных точек системы, поскольку он изображает одну из величин этой системы, имеющую разное численное значение в разных точках системы; но он не меняется при переходе от одного явления к любому другому, подобному ему. Иначе говоря, он сохраняет одно и то же значение в сходственных точках всей группы подобных явлений.

В дальнейшем мы будем пользоваться определением подобия и через константы, и через инварианты в зависимости от того, какое определение при рассмотрении различных вопросов оказывается удобнее в смысле простоты изложения.

Возвращаясь к определению подобия через константы подобия, отметим, что на первый взгляд выбор всех констант подобия может казаться произвольным. На самом деле это не так. Величины, характеризующие различные явления, не являются независимыми друг от друга. Часто между ними существует определенная связь. Эта связь, называемая законом природы, во многих случаях может быть выражена в математической форме в виде уравнения.

Наличие такого уравнения, делающего одни величины зависимыми от других, налагает и на константы подобия определенные ограничения.

Нахождение зависимости между константами подобия, вызываемой существованием уравнения, связывающего между собой характеризующие явление величины, составляет содержание теоремы подобия, которая будет изложена в следующей главе.

Уравнения, описывающие различные явления природы, можно рассматривать, как имеющие различную степень общности.

Наиболее общие уравнения, выражающие общие законы природы, такие, как общие законы механики, закон сохранения энергии, можно назвать уравнениями, охватывающими целый класс явлений. Таковы были уравнения, представляющие второй закон Ньютона и первый закон термодинамики. Эти общие уравнения могут получать различные частные виды в зависимости от того, к каким частным видам явлений данного класса они будут прилагаться. Так общие уравнения механики принимают вид уравнения Навье-Стокса в применении к течению жидкости, вид уравнения колебаний упругой среды и т. п. Эти виды явлений содержат отдельные свойства однотипных явлений, отличающихся друг от друга только заданием различных условий однозначности явлений. И, наконец, единичные явления выделяются из семейства численным заданием условий однозначности, которые для каждого единичного явления семейства буквенно одинаковы, но численно отличны друг от друга.

В дальнейшем свойство уравнений связи, которое налагает на них подобие явлений, будет излагаться сперва для самых общих знаков природы и для них будут выводиться теоремы подобия. Однако не меньшее значение будет иметь приложение общей теории подобия к частным случаям и к единичным явлениям, так как только таким путем окажется возможным скрыть наиболее важные стороны учения о подобии.

3 Теоремы подобия

Для обеспечения максимальной эффективности (в широком смысле слова) любых экспериментальных исследований эти исследования необходимо организовать так, чтобы можно было определить критерии подобия и представить полученные результаты критериальной функциональной зависимость. Такой подход позволяет при ограниченном числе экспериментов дать оценку хода процесса или поведения системы при разнообразных сочетаниях параметров, их характеризующих, и, следовательно, получить ответы на те дополнительные вопросы, которые обычно возникают уже после окончания экспериментально-исследовательских и испытательных работ.

Рассмотренные положения, однако, относятся к случаю заведомо подобных процессов, т.е. определяют *необходимые условия существования подобия*. В связи с этим возникает естественный вопрос относительно того, как распознать подобие или специально обеспечить его при построении модели, т. е. вопрос об *условиях*, не только *необходимых*, но и *достаточных для существования подобия*. Такие условия включают в себя наряду с требованием равенства критериев подобия сопоставляемых процессов также и определенные дополнительные требования к условиям однозначности — требования подобия начальных и граничных условий сопоставляемых процессов (а при соблюдении геометрического подобия — и подобия геометрических характеристик соответствующих пространственных областей).

Изложенные выше положения относительно необходимых и достаточных условий подобия обычно систематизируются в виде первой, второй и третьей теорем о подобии; первые две теоремы определяют необходимые, третья — необходимые и достаточные условия подобия (Высказываются соображения, что только вторая теорема подобия может рассматриваться как теорема в том смысле, в каком это понятие употребляется в математике, а первая и третья теоремы являются правилами выявления и обеспечения подобия. В данном изложении сохраняется наиболее распространенная терминология — введенное еще И. Ньютоном название первой теоремы и предложенное М. В. Кирпичевым и А. А. Гухманом название третьей теоремы).

Первая теорема подобия. В основной современной формулировке, учитывающей возможность существования различных видов подобия, первая теорема имеет следующий вид: явления, подобные в том или ином смысле (полно, приближенно, физически, математически и т. д.), имеют определенные сочетания параметров, называемые критериями подобия, численно одинаковые для подобных явлений. Первая теорема подобия называется также теоремой Ньютона или Ньютона—Бертрана.

Первая теорема подобия утверждает, что для явлений (объектов, процессов), подобных в том или ином смысле, существуют одинаковые критерии подобия — идентичные по форме алгебраической записи и равные численно безразмерные степенные комплексы (произведения или отношения) определенных групп физических факторов, характеризующих эти явления. Формулируя необходимые условия существования подобия (одинаковые критерии подобия у подобных явлений), первая теорема, однако, не указывает способы установления подобия и способы его реализации при построении моделей.

Вторая теорема подобия. В основной формулировке эта теорема, чаще встречающаяся под названием π-теоремы, имеет следующий вид: всякое полное уравнение физического процесса, записанное в определенной системе единиц, может быть представлено функциональной зависимостью между критериями подобия, полученными из участвующих в процессе параметров.

Эта теорема утверждает, что полное уравнение физического процесса, записанное в определённой системе единиц, может быть представлено зависимостью между критериями подобия, т. е. зависимостью, связывающей безразмерные величины, определенным образом полученные из участвующих в процессе параметров. Так же как и первая, вторая теорема подобия основывается на предпосылке, что факт подобия между процессами известен, и устанавливает число критериев подобия и существование однозначной зависимости между ними. При этом выражения для критериев подобия могут быть получены, если известен состав параметров (факторов), участвующих в рассматриваемом процессе, но неизвестно его математическое описание. Теорема эта, однако, также как и первая, не указывает способов выявления подобия между сопоставляемыми процессами и способов реализации подобия при построении моделей.

Вторая теорема устанавливает возможность представления интеграла дифференциального уравнения физического процесса не как функции параметров процесса и системы, в которой протекают эти процессы, а как функция соответствующим образом построенных некоторых безразмерных величин — критериев подобия. Если исходное дифференциальное уравнение проинтегрировано, то функциональные связи между критериями подобия будут однозначно определены в соответствии с теми допущениями, которые были приняты при составлении и интегрировании данного уравнения. Если же дифференциальное уравнение отсутствовало или не интегрировалось, то вид функциональных связей между критериями подобия не будет выявлен.

Вторая теорема основывается на исследованиях Букингема, Федермана и Эренфест-Афанасьевой. Возможность представления интеграла как функции от критериев подобия, найденных из дифференциального уравнения, была строго доказана для частного случая Букингемом. В более общем виде это положение как математическая теорема было доказано Федерманом. Эренфест-Афанасье-ва привела доказательство в общем виде, показав условия, при которых интеграл можно представить как функцию критериев подобия. Одновременно было показано, что из соотношений, указывающих на однородность уравнения, связывающего физические величины (одинаковая размерность всех членов уравнения), и из возможности получения безразмерных соотношений после деления этого уравнения на любой из его членов следует важный вывод о существовании определенных соотношений между размерностями физических параметров. Эренфест-Афанасьевой было показано, что критерии подобия можно найти при отсутствии дифференциального уравнения процесса на основе анализа размерностей физических величин, участвующих в этом процессе. Эта возможность была сформулирована и строго доказана в виде теоремы, названной л-теоремой, поскольку упомянутые выше безразмерные параметры (критерии подобия) обозначались буквой л.

Третья теорема подобия. В наиболее распространенной формулировке третья теорема имеет следующий вид: необходимыми и достаточными условиями для создания подобия являются пропорциональность сходственных параметров, входящих в условия однозначности, и равенство критериев подобия сопоставляемых явлений. Третья теорема подобия именуется также обратной теоремой подобия или теоремой Кирпичева—Гухмана.

Напомним понятия условий однозначности. Известно, что дифференциальное уравнение в общем виде описывает бесконечное множество процессов, относящихся к данному классу. Так, например, дифференциальное уравнение u=iR+Ldi/dt описывает изменение тока во времени в цепи с активным сопротивлением R и индуктивностью L при включении ее на u=const. Условия, определяющие индивидуальные особенности процесса или явления и выделяющие из общего класса конкретный процесс или явление, называются условиями однозначности. К ним относятся следующие, не зависящие от механизма самого явления, факторы и условия:

- геометрические свойства системы, в которой протекает процесс;
- физические параметры среды и тел, образующих систему;
- начальное состояние системы (начальные условия);
- условия на границах системы (граничне или краевые условия);
- взаимодействие объекта и внешней среды.

Очевидно, нельзя математически формулировать условия однозначности в общем виде. В каждом конкретном случае они могут быть различны в зависимости от рода решаемой задачи и вида уравнения. Так, для выделения определенного процесса из совокупности процессов, описываемых приведенным уравнением, достаточно знать параметры u, R, L и начальные условия, например, $i=i_0$ при $t=t_0$. В большинстве задач, связанных с исследованием полей, однозначность процессов определяется не только начальными условиями, но и свойствами среды, геометрическими свойствами системы и граничными условиями.

Вторая формулировка третьей теоремы подобия. Практически более удачная формулировка третьей теоремы, предложенная в последнее время, имеет вид, отвечающий реальным задачам создания различных моделей. Эта формулировка состоит из трёх положений.

Положение 1. Создание модели возможно, если критерии подобия (безразмерные комплексы), составленные из величин, характеризующих только ее системные (материальные) параметры, равны соответствующим критериям изучаемой системы-оригинала.

Положение 2. В созданной, согласно положению 1, модели осуществление процессов, подобных оригиналу, возможно, если критерии подобия, содержащие только параметры процессов, входящих в условия однозначности и в том числе начальные условия (параметры исходного режима, возмущений и отклонений), в модели и оригинале соответственно одинаковы.

Положение 3. Осуществление модели согласно формулировкам 1 и 2 возможно в сколь угодно сложных анизотропных, нелинейных или имеющих вероятностно заданные параметры системах при условии одновременного соблюдения соответствующих дополнительных положениях, сформулированных ниже.

Дополнительные положения теории подобия. Эти положения, предложенные авторами, распространяют три основные теоремы подобия на системы сложные, системы с нелинейными или переменными параметрами, анизотропные системы (с различными свойствами по различным координатам) и системы, заданные вероятностно-статистическими характеристиками; этими же положениями охватываются геометрически неподобные системы, а также системы, для которых понятие подобия интерпретируется шире, чем постоянство масштабных коэффициентов в сходственных точках пространства параметров в сходственные моменты времени.

В общем случае дополнительные положения теории подобия формулируются следующим образом:

— *подобие сложных* геометрически подобных и изотропных систем с детерминированно определенными линейными или постоянными параметрами, образованных несколькими соответственно подобными по отдельности подсистемами, обеспечивается, если выполняется дополнительное условие подобия всех сходственных элементов, являющихся общими для этих подсистем;

— *условия подобия* сложных геометрически подобных и изотропных систем с детерминированно определенными линейными и постоянными параметрами могут быть распространены на сложные системы с нелинейными или переменными параметрами, заданными детерминированно, если выполняется дополнительное условие совпадения относительных характеристик сходственных параметров, являющихся нелинейными или переменными;

— *условия подобия* детерминированно определенных геометрически подобных изотропных сложных систем могут быть распространены на анизотропные геометрически подобные сложные системы, заданные детерминированно, если выполняется дополнительное условие обеспечения одинаковой относительной анизотропии в сопоставляемых системах;

— *условия подобия* детерминированно определенных геометрически подобных анизотропных сложных систем с переменными или нелинейными параметрами могут быть распространены на геометрически неподобные сложные системы с детерминированно определенными параметрами, если выполняется дополнительное условие обеспечения такого нелинейного подобия пространства параметров, при котором существуют подобные изменения параметров процесса в сходственных точках этого пространства;

— *условия подобия* сложных геометрически неподобных анизотропных систем с детерминированно определенными нелинейными или переменными параметрами могут быть распространены, на системы с вероятностно (статистически) определенными параметрами, если выполняются дополнительные условия совпадения плотностей вероятностей сходственных параметров и пропорциональности их статистических моментов, степени масштабных коэффициентов при которых совпадают с порядками соответствующих моментов.

4. Моделирование

Подобие физических процессов и систем широко используется в технике для исследования методом моделирования. В тех случаях когда математическое решение задачи затруднено, а то и попросту невозможно, вполне естественным является обращение к экспериментальному исследованию на моделях с последующим перерасчетом полученных результатов на натуру, которая явилась прототипом модели. При этом модель и натура должны находиться между собой в отношениях подобия.

Исследование на моделях позволяет ускорить или замедлить процессы, которые в натурных условиях развиваются со скоростью, затрудняющих вести наблюдение. При проведении эксперимента непосредственно на натуре почти всегда приходится отказываться от активного поиска оптимальных конструктивных решений, ибо это связано со значительными денежными затратами, а не редко и просто не возможно.

Теория моделирования базируется на принципах, вытекающих из теории подобия. Эти принципы заключаются в соблюдении условий, которые определяют соотношения между параметрами модели и натуры, а так же правила пересчета исследуемых величин с модели на натуру и обратно. Однако, известно, что ни одна модель не может с абсолютной полнотой воспроизвести изучаемый оригинал – для этого должно быть полное их тождество. Поэтому при моделировании стараются соблюсти в модели по крайней мере те характеристики натуры, которые являются наиболее существенными в общей картине физического процесса, обеспечивая заданную точность результатов (например при расчете стержневых конструкций пренебрегают собственным весом, а при проектировании плотины насыпи рассматривают как распределенную нагрузку).

1. 2 Лекция №2 (2 часа).

Тема: «Физические аналоговые и математические модели объектов и процессов»

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Виды моделирования и их особенности.
2. Математическое моделирование и его особенности.
3. Физическое моделирование и его особенности
4. Методы подобия в механике
5. Заключение

1.2.2 Краткое содержание вопросов:

1. Виды моделирования и их особенности.

Классификация видов моделирования систем *S* приведена на рисунке 1.

Рисунок 1 - Классификация видов моделирования систем

Детерминированное моделирование отображает процессы, в которых предполагается отсутствие всяких случайных воздействий; *стохастическое моделирование* отображает вероятностные процессы и события. В этом случае анализируется ряд реализаций случайного процесса и оцениваются средние характеристики, т. е. набор однородных реализаций.

Статическое моделирование служит для описания поведения объекта в какой-либо момент времени, а *динамическое моделирование* отражает поведение объекта во времени. *Дискретное моделирование* служит для описания процессов, которые предполагаются дискретными, соответственно непрерывное моделирование позволяет отразить непрерывные процессы в системах, а *дискретно-непрерывное моделирование* используется для случаев, когда хотят выделить наличие как дискретных, так и непрерывных процессов.

В зависимости от формы представления объекта (системы *S*) можно выделить мысленное и реальное моделирование.

Мысленное моделирование часто является единственным способом моделирования объектов, которые либо практически нереализуемы в заданном интервале времени, либо существуют вне условий, возможных для их физического создания. Например, на базе мысленного моделирования могут быть проанализированы многие ситуации микромира, которые не поддаются физическому эксперименту. Мысленное моделирование может быть реализовано в виде *наглядного, символического* и *математического*.

При *наглядном моделировании* на базе представлений человека о реальных объектах создаются различные наглядные модели, отображающие явления и процессы, протекающие в объекте. В основу *гипотетического моделирования* исследователем закладывается некоторая гипотеза о закономерностях протекания процесса в реальном объекте, которая отражает уровень знаний исследователя об объекте и базируется на причинно-следственных связях между входом и выходом изучаемого объекта. Гипотетическое моделирование используется, когда знаний об объекте недостаточно для построения формальных моделей.

Аналоговое моделирование основывается на применении аналогий различных уровней. Наивысшим уровнем является полная аналогия, имеющая место только для достаточно простых объектов. С усложнением объекта используют аналогии последующих уровней, когда аналоговая модель отображает несколько либо только одну сторону функционирования объекта.

Существенное место при мысленном наглядном моделировании занимает *макетирование.* Мысленный макет может применяться в случаях, когда протекающие в реальном объекте процессы не поддаются физическому моделированию, либо может предшествовать проведению других видов моделирования. Если ввести условное обозначение отдельных понятий, т. е. знаки, а также определенные операции между этими знаками, то можно реализовать *знаковое моделирование* и с помощью знаков отображать набор понятий — составлять отдельные цепочки из слов и предложений. Используя операции объединения, пересечения и дополнения теории множеств, можно в отдельных символах дать описание какого-то реального объекта.

В основе *языкового моделирования* лежит некоторый тезаурус. Последний образуется из набора входящих понятий, причем этот набор должен быть фиксированным. Следует отметить, что между тезаурусом и обычным словарем имеются принципиальные различия. Тезаурус — словарь, в котором каждому слову может соответствовать лишь единственное понятие, хотя в обычном словаре одному слову могут соответствовать несколько понятий.

Символическое моделирование представляет собой искусственный процесс создания логического объекта, который замещает реальный и выражает основные свойства его отношений с помощью определенной системы знаков или символов.

Математическое моделирование**.** Под *математическим моделированием* будем понимать процесс установления соответствия данному реальному объекту некоторого математического объекта, называемого математической моделью, и исследование этой модели, позволяющее получать характеристики рассматриваемого реального объекта. Вид математической моли зависит как от природы реального объекта, так и задач исследования объекта и требуемой достоверности и точности решения этой задачи.

Для *аналитического моделирования* характерно то, что процессы функционирования элементов системы записываются в виде некоторых функциональных соотношений (алгебраических, интегродиференциальных, конечно-разностных и т.п.) или логических условий.

Имитационное моделирование позволяет по исходным данным получить сведения о состоянии процесса в определенные моменты времени, дающие возможность оценить характеристики системы S.

2. Математическое моделирование и его особенности

Невозможно представить себе современную науку без широкого применения математического моделирования. Сущность этой методологии состоит в замене исходного объекта его "образом" — математической моделью — и дальнейшем изучении модели с помощью реализуемых на компьютерах вычислительно-логических алгоритмов. Этот "третий метод" познания, конструирования, проектирования сочетает в себе многие достоинства как теории, так и эксперимента. Работа не с самим объектом (явлением, процессом), а с его моделью дает возможность безболезненно, относительно быстро и без существенных затрат исследовать его свойства и поведение в любых мыслимых ситуациях (преимущества теории). В то же время вычислительные (компьютерные, симуляционные, имитационные) эксперименты с моделями объектов позволяют, опираясь на мощь современных вычислительных методов и технических инструментов информатики, подробно и глубоко изучать объекты в достаточной полноте, недоступной чисто теоретическим подходам (преимущества эксперимента). Неудивительно, что методология математического моделирования бурно развивается, охватывая все новые сферы - от разработки технических систем и управления ими до анализа сложнейших экономических и социальных процессов.

Сейчас математическое моделирование вступает в третий принципиально важный этап своего развития, "встраиваясь" в структуры так называемого информационного общества. Впечатляющий прогресс средств переработки, передачи и хранения информации отвечает мировым тенденциям к усложнению и взаимному проникновению различных сфер человеческой деятельности. Без владения информационными "ресурсами" нельзя и думать о решении все более укрупняющихся и все более разнообразных проблем, стоящих перед мировым сообществом. Однако информация как таковая зачастую мало что дает для анализа и прогноза, для принятия решений и контроля за их исполнением. Нужны надежные способы переработки информационного "сырья" в готовый "продукт", т.е. в точное знание. История методологии математического моделирования убеждает: она может и должна быть интеллектуальным ядром информационных технологий, всего процесса информатизации общества.

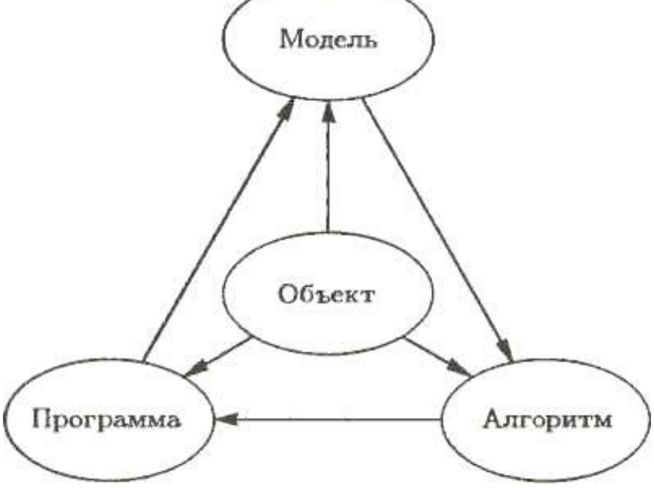

Рисунок 2 – Алгоритм моделирования

На первом этапе выбирается (или строится) "эквивалент" объекта, отражающий в математической форме важнейшие его свойства - законы, которым он подчиняется, связи, присущие составляющим его частям, и т.д. Математическая модель (или ее фрагменты) исследуется теоретическими методами, что позволяет получить важные предварительные знания об объекте.

Второй этап — выбор (или разработка) алгоритма для реализации модели на компьютере. Модель представляется в форме, удобной для применения численных методов, определяется последовательность вычислительных и логических операций, которые нужно произвести, чтобы найти искомые величины с заданной точностью. Вычислительные алгоритмы должны не искажать основные свойства модели и, следовательно, исходного объекта, быть экономичными и адаптирующимися к особенностям решаемых задач и используемых компьютеров.

На третьем этапе создаются программы, "переводящие" модель и алгоритм на доступный компьютеру язык. К ним также предъявляются требования экономичности и адаптивности. Их можно назвать "электронным" эквивалентом изучаемого объекта, уже пригодным для непосредственного испытания на "экспериментальной установке" — компьютере.

Создав триаду "модель—алгоритм—программа", исследователь получает в руки универсальный, гибкий и недорогой инструмент, который вначале отлаживается, тестируется в "пробных" вычислительных экспериментах. После того как адекватность (достаточное соответствие) триады исходному объекту удостоверена, с моделью проводятся разнообразные и подробные "опыты", дающие все требуемые качественные и количественные свойства и характеристики объекта. Процесс моделирования сопровождается улучшением и уточнением, по мере необходимости, всех звеньев триады.

Будучи методологией, математическое моделирование не подменяет собой математику, физику, биологию и другие научные дисциплины, не конкурирует с ними. Наоборот, трудно переоценить его синтезирующую роль. Создание и применение триады невозможно без опоры на самые разные методы и подходы — от качественного анализа нелинейных моделей до современных языков программирования. Оно дает новые дополнительные стимулы самым разным направлениям науки.

Рассматривая вопрос шире, напомним, что моделирование присутствует почти во всех видах творческой активности людей различных "специальностей" — исследователей и предпринимателей, политиков и военачальников. Привнесение в эти сферы точного знания помогает ограничить интуитивное умозрительное "моделирование", расширяет поле приложений рациональных методов. Конечно же, математическое моделирование плодотворно лишь при выполнении хорошо известных профессиональных требований: четкая формулировка основных понятий и предположений, апостериорный анализ адекватности используемых моделей, гарантированная точность вычислительных алгоритмов и т.д. Если же говорить о моделировании систем с участием "человеческого фактора", т.е. трудноформализуемых объектов, то к этим требованиям необходимо добавить аккуратное разграничение математических и житейских терминов (звучащих одинаково, но имеющих разный смысл), осторожное применение уже готового математического аппарата к изучению явлений и процессов (предпочтителен путь "от задачи к методу", а не наоборот) и ряд других.

Решая проблемы информационного общества, было бы наивно уповать только на мощь компьютеров и иных средств информатики. Постоянное совершенствование триады математического моделирования и ее внедрение в современные информационно-моделирующие системы - методологический императив. Лишь его выполнение дает возможность получать так нужную нам высокотехнологичную, конкурентоспособную и разнообразную материальную и интеллектуальную продукцию.

3 Физическое моделирование и его особенности

Модель представляет собой средство и способ выражения черт и соотношений объекта, принятого за оригинал. Модель — это имитация одного или ряда свойств объекта с помощью некоторых иных предметов и явлений. Моделью может быть всякий объект, воспроизводящий требуемые особенности оригинала. Если модель и оригинал — одинаковой физической природы, то мы имеем дело с физическим моделированием. Физическое моделирование применяется как прием экспериментального исследования на моделях свойств строительных конструкций, зданий, самолетов, судов, как способ выявления недостатков в работе соответствующих систем и нахождения путей их устранения. Когда явление описывается той же системой уравнений, что и моделируемый объект, то такое моделирование именуется математическим. Если некоторые стороны моделируемого объекта представлены в виде формальной системы с помощью знаков, которая затем изучается с целью переноса полученных сведений на сам моделируемый объект, то мы имеем дело с логически-знаковым моделированием.

Моделирование играет огромную эвристическую роль, являясь предпосылкой новой теории. Моделирование получает широкое применение потому, что оно дает возможность осуществлять исследование процессов, характерных для оригинала, в отсутствие самого оригинала. Это часто бывает необходимо из-за неудобства исследования самого объекта и по многим другим соображениям: дороговизны, недоступности, необозримости его и т.п.

Существенное значение в познавательной деятельности имеет такой метод, как формализация — обобщение форм различных по содержанию процессов, абстрагирование этих форм от их содержания. Всякая формализация неизбежно является некоторым огрублением реального объекта.

Физическое моделирование Метод сводится обычно к изучению моделей, к-рые отличаются от объекта **моделирование** масштабами (напр., лаб. и про**моделирование** реакторы). В основе физического **моделирование** лежат *подобия теория* и анализ размерностей.

Необходимым условием физического **моделирование** является равенство в объекте и его модели т. наз. критериев подобия, представляющих собой определенные безразмерные комбинации разл. физ. величин, оказывающих влияние на параметры объекта и модели. На практике обеспечить указанное условие в случае равенства неск. критериев подобия чрезвычайно трудно, если только не делать модель тождественной объекту **моделирование** Поэтому используется приближенное физическое **моделирование**, при к-ром второстепенные процессы, происходящие в объекте, либо не моделируются совсем, либо моделируются приближенно. Напр., массообменная тарельчатая колонна моделируется насадочной лаб. колонкой; при этом подобие гидродинамич. обстановки в объекте и модели игнорируется, а моделируется лишь разделит. способность аппарата, определяемая термодинамич. закономерностями межфазного равновесия. Достоинства физического **моделирование**: возможность изучения объектов с меньшими затратами (сырья, энергии, времени); возможность исследования объектов, в к-рых физ.-хи**моделирование** сущность процессов мало изучена; возможность проведения на модели измерений, слишком сложных на объекте **моделирование**

Недостатки метода: возможность проявления собств. св-в модели вследствие несоответствия критериев подобия объекта и модели (напр., разл. условия перемешивания); необходимость применения аналогичных контрольно-изме-рит. приборов на модели и объекте; относит. сложность построения физ. модели, обычно представляющей собой значительно уменьшенную копию объекта; трудность достоверной экстраполяции результатов на др. масштабы из-за полного отсутствия надежных критериев достоверности масштабного перехода. Несмотря на перечисл. недостатки, физическое **моделирование** часто служит единств. ср-вом исследования химико-технол. процессов (особенно мало изученных). При этом оно во мн. случаях предшествует математическому **моделирование**, являясь источником экспери**моделирование** данных для построения и проверки мат. моделей.

4. Методы подобия в механике

Движение математического маятника

В качестве первого примера мы рассмотрим классический пример о движении математического маятника.

Математический маятник (рис. 1) представляет собой тяжелую материальную точку, подвешенную на невесомой и нерастяжимой нити, которая закреплена другим своим концом неподвижно. Совокупность возможных движений мы ограничим условием, что движения маятника плоские.

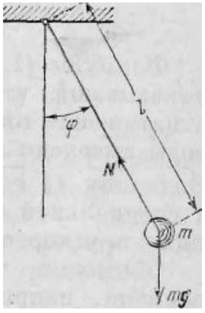

Рис. 1. Математический маятник.

Введем обозначения: l — длина маятника, φ — угол между нитью и вертикалью, t — время, m — масса груза и N — натяжение нити. Если пренебречь силами сопротивления, то задача о движении маятника приводится к решению уравнений

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi, \tag{1}$$

$$m\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 l = N - mg\cos\varphi \tag{2}$$

с начальным условием

при t=0 $\varphi=\varphi_0$ и $\frac{d\varphi}{dt}=0$,

т. е. за начальный момент времени принят тот момент, когда маятник отклонен на угол φ_0, а скорость равна нулю.

Из уравнений (1), (2) и начального условия очевидно, что в качестве определяющих параметров можно взять следующую систему:

$$t, l, g, m, \varphi_0.$$

Числовые значения всех остальных величин определяются полностью значениями этих параметров. Следовательно, мы можем написать

$$\varphi = \varphi\ (t, \varphi_0, l, g, m),\ N=mgf(t, \varphi_0, l, g, m) \tag{3}$$

где φ и f – безразмерные величины.

Числовые значения функций φ и f не должны зависеть от системы единиц измерения. Вид этих функций можно определить либо решая уравнения (1) и (2), либо экспериментальным способом.

Из общих соображений, изложенных выше, вытекает, что пять аргументов функций φ и f можно свести только к двум аргументам, которые представляют собой безразмерные комбинации, составленные из t, l, g, m и φ_0, так как имеются три независимые единицы измерения.

Из величин t, l, g, m и φ_0 можно составить две независимые безразмерные комбинации

$$\varphi_0 \text{ и } t\sqrt{\frac{g}{l}} \tag{4}$$

Все другие безразмерные комбинации, составленные из t, l, g, m и φ_0 или вообще из любых величин, определяемых этими параметрами, будут функциями комбинаций (4). Следовательно, можно написать

$$\varphi = \varphi\left(\varphi_0, t\sqrt{\frac{g}{l}}\right), \tag{5'}$$

$$N = mgf\left(\varphi_0, t\sqrt{\frac{g}{l}}\right). \tag{5''}$$

Формулы (5), полученные с помощью метода размерности, показывают, что закон движения не зависит от массы груза, а натяжение нити прямо пропорционально массе груза. Эти выводы вытекают также непосредственно из уравнений (1) и (2). Величину $t\sqrt{g/l}$ можно рассматривать как время, выраженное в специальной системе единиц измерения, в которой длина маятника и ускорение силы тяжести приняты равными единице.

Обозначим через Г какой-нибудь характерный промежуток времени, например время движения маятника между крайним и вертикальным положениями или между двумя одинаковыми фазами, т. е. период колебания, и т. д. (существование периодического движения можно принять как гипотезу или как результат, известный из дополнительных данных). Имеем

$$\Gamma = f_1(\varphi_0, l, g, m) = \sqrt{\frac{l}{g}}\, f_2(\varphi_0, l, g, m).$$

функция f_2 представляет собой безразмерную величину, а так как из l, g и m нельзя составить безразмерную комбинацию, то очевидно, что функция f_2 не зависит от l, g и m. Следовательно,

$$\Gamma = \sqrt{\frac{l}{g}}\, f_2(\varphi_0). \tag{6}$$

Формула (6) устанавливает зависимость времени Г от длины маятника. Получить вид функции $f_2(\varphi_0)$ с помощью теории размерности нельзя. Определение $f_2(\varphi_0)$ необходимо произвести либо теоретически, на основании уравнения (1), либо экспериментально.

Формулу (6) можно получить непосредственно из соотношений (5'). В самом деле, для периода колебаний соотношение (5') дает

$$\varphi_0 = \varphi\left(\varphi_0, \Gamma\sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

Решая это уравнение, получим формулу (6).

Если Г есть период колебания, то из соображений симметрии очевидно, что период Г не зависит от знака φ_0, т. е.

$$f_2(\varphi_0)= f_2(-\varphi_0).$$

Следовательно, функция f_2 является четной функцией аргумента φ_0. Предполагая, что при малых φ_0 функция $f_2(\varphi_0)$ регулярна, можно написать

$$f_2(\varphi_0) = c_1 + c_2\varphi_0^2 + c_3\varphi_0^4 +\ldots \tag{7}$$

Для малых колебаний члены со степенями φ_0^2 и выше можно отбросить, и для периода Г мы получаем формулу

$$\Gamma = c_1\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \qquad (8)$$

Решение уравнения (1) показывает, что $c_1 = 2\pi$. Таким образом, мы видим, что для малых колебаний маятника с помощью теории размерности можно получить формулу периода колебания маятника с точностью до постоянного множителя.

Формулы (5) и (6) сохранят свою справедливость и в том случае, если вместо уравнения (1) мы возьмем уравнение

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\,f(\varphi)\,,$$

где f(φ) есть любая функция угла φ. Вообще справедливость формул (5) и (6) вытекает из единственного условия, которое состоит в том, что состояние движения определяется параметрами

$$t,\ l,\ g,\ m,\ \varphi_0.$$

Для установления этой системы параметров нам послужили уравнения движения, но ее можно указать и не прибегая к уравнениям движения. В самом деле, для характеристики маятника надо указать l и m. Далее необходимо указать g, так как сущность явления определяется силой тяжести. Наконец, необходимо указать φ_0 и *t*, так как конкретное движение и состояние движения определяются углом крайнего отклонения φ_0 и рассматриваемым моментом времени *t.*

Истечение тяжелой жидкости через водослив

Рассмотрим задачу о струйном движении тяжелой жидкости через водослив (рис. 2), который представляет собой вертикальную стенку с треугольным отверстием, расположенным симметрично относительно вертикали, причем угол отверстия α равен 90°. Жидкость вытекает под напором h, который равен высоте уровня жидкости над вершиной треугольника на далеких расстояниях от отверстия водослива. Для простоты мы примем, что сосуд, в котором находится жидкость, очень велик, и поэтому движение жидкости можно считать установившимся. При струйном движении жидкости основное значение имеют свойства инерции и весомости, которые характеризуются значениями плотности ρ и ускорения силы тяжести g.

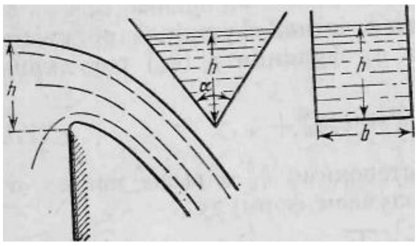

Рис. 2. Перетекание тяжелой жидкости через водослив.

Установившееся течение жидкости через рассматриваемый водослив полностью определяется следующими параметрами:

$$\rho,\ g,\ h.$$

Вес жидкости Q, вытекающий через отверстие водослива в единицу времени, может быть функцией только этих параметров

$$Q = f(\rho, g, h).$$

С помощью теории размерности нетрудно найти вид этой функции. В самом деле, размерность Q равняется кгс/с. Комбинация $\rho g h^3\sqrt{g/h}$ также имеет размерность кгс/с. Поэтому отношение

$$\frac{Q}{\rho g^{3/2} h^{5/2}}$$

является безразмерной величиной. Это отношение является функцией величин ρ, g, h, из которых нельзя образовать безразмерной комбинации, поэтому можно написать

$$\frac{Q}{\rho g^{3/2} h^{5/2}} = C$$

или

$$Q = C\rho g^{3/2} h^{5/2}\,, \qquad (9)$$

где C есть абсолютная постоянная, которую проще всего определить из опыта. Полученная формула полностью определяет зависимость количества протекающей жидкости от напора h и от плотности ρ.

Совокупность рассматриваемых движений можно расширить, допуская водосливы с различными углами α. В этом случае система определяющих параметров дополняется углом α, и формула (9) примет вид

$$Q = C(\alpha)\rho g^{3/2} h^{5/2}, \qquad (10)$$

т. е. коэффициент C будет зависеть от угла α.

Если водослив имеет прямоугольную форму шириной b, то система определяющих параметров будет

ρ, g, h, b.

Все безразмерные величины определяются параметром h/b. Формула (9) в этом случае заменится следующей:

$$Q = f\left(\frac{h}{b}\right)\rho g^{3/2} h^{5/2}. \qquad (11)$$

Функцию f(h/b) можно определить опытным путем, наблюдая течение через водослив различной ширины b, но с постоянным h. Определив таким способом функцию f(h/b), формулу (11) можно применять к случаям постоянной ширины b=const, но с различным напором h, т. е. к случаям, в которых опыт не производился.

Этот пример показывает, что соображения, полученные с помощью метода размерности, могут приносить большую пользу при постановке опытов, позволяя ограничивать их количество и получать благодаря этому экономию не только в средствах, но и во времени. Изменение одних величин можно заменять в опытах изменением других величин. На основе опытов, произведенных с водой, можно дать исчерпывающие ответы о явлении вытекания нефти, ртути и т. д.

5. Заключение

Три теоремы подобия составляют главную основу теории подобия.

Вот краткое содержание изложенной теории подобия:

1)Подобные явления протекают в геометрически подобных системах и описываются буквально одинаковыми уравнениями связи.

Эти уравнения должны быть безусловно или условно однородными.

2)Условно однородными физические уравнения делаются присоединением к ним «обусловливающих равенств», которые устанавливают равенство единице индикаторов подобия, получающихся из уравнений, или, что то же, одинаковость для подобных явлений критерием подобия.

3)Однородные уравнения могут быть представлены как функции степенных комплексов (критериев) и симплексов.

Такие «критериальные» уравнения численно одинаковы для всей группы подобных явлений.

4)Подобны те явления, уравнение связи которых буквенно одинаковы и условия однозначности которых подобны, т. е. у которых одноименные моноваленты (величины, входящие в условия однозначности) находятся в численно постоянном отношении, а одноименные моновалентные (определяющие) критерии одинаковы.

Теория подобия дает, следовательно, общие методические указания, как поступать в каждом отдельном случае при анализе уравнений, описывающих явление, при постановке и обработке данных опыта над ним и при распространении результатов опыта на другие явления. Если же дана натура и исследовать ее хотят на модели, то теория подобия содержит методические указания по расчету и построению модели, подобной натуре.

Основные методические указание о применении теории подобия к опыту, будь то физическое экспериментирование или техническое моделирование, состоит в следующем.

При исследовании явления надо установить для него уравнения связи, дающие взаимную связь физических величин, участвующих в явлении.

Эти уравнения должны быть формулированы для того частного случая, который является объектом исследования. Присоединение к ним условий однозначности делает исследование определенным и позволяет применить теорию подобия.

Поэтому во всех случаях, когда уравнения связи могут быть найдены, метод анализу уравнений есть единственно правильный путь применения теории подобия и только тогда, когда установить математическую зависимость между величинами, характеризующими явление, не удается, надлежит обратиться к методу анализа размерности. Этот путь менее надежен и поэтому результат его необходимо проверять на опыте. Им не следует пренебрегать, так как во многих случаях анализ размерности дает при обработке опытов ценные выводы.

В настоящее время теория подобия имеет следующие направления.

Первым по времени направлением является приложение теории подобия к изучению разнообразных технических сооружений и моделей.

Моделирование стало мощным средством для обнаружения различных недостатков, имеющихся в следующих технических устройствах, и для изыскания путей к их устранению.

Далее моделирование уже стало широко применяться для проверки вновь конструируемых объектов, так что до их выполнения, в процессе проектирования, моделирование позволяет совершенствовать новые, еще не опробованные на практике конструкции.

Теория подобия нашла также применение при обобщении рабочих показателей целых групп однотипных машин и устройств, так что на основании обработки данных многочисленных испытаний оказывается возможным создавать новые, основанные на критериях подобия, способы расчета различных технических объектов, которые приводят к установлению рациональных, связанных с экономией энергии режимов.

Теория подобия стала научной основой обобщения данных физико-технических испытаний, своего рода теорией эксперимента, указывающей во всех тех случаях, когда решение дифференциальных уравнений физики наталкивается на трудности, путь к такой постановке опытов, что их результаты могут быть распространены на всю область изучаемых явлений.

В последнее время теория подобия не только использует уравнения физики для обобщения опытных данных, но и , обратно, при выводе дифференциальных уравнений она дает указания, с одной стороны, о введении в уравнения критериев подобия и безразмерных переменных и, с другой стороны, об использовании обобщения методами теории подобия опытных данных, являющихся исходными для составления уравнений. В качестве примера этого нового направления теории подобия можно привести установлении для турбулентного потока автомодельности отдельно для пограничного слоя и отдельно для турбулентного ядра, что позволяет получить более простую и точную формулу гидравлического сопротивления труб. Таким образом, теория подобия на наших глазах становится неотъемлемой частью теоретической физики.

1. 3 Лекция №3 (2 часа).

Тема: «Математические модели надежности систем обслуживания сельского хозяйства»

1.3.1 Вопросы лекции:

1. Теоретические пояснения

1.3.2 Краткое содержание вопросов:

1. Теоретические пояснения

Во многих случаях возникает задача на основе имеющихся данных наблюдений или испытаний на надёжность определить законы распределения показателей, как некоторых случайных величин.

К сожалению, в настоящее время не существует никакого способа непосредственно получить из некоторых статистических данных математическую модель (математическое выражение) закона распределения показателя. Известные методы позволяют лишь подтвердить (или не подтвердить) соответствие данного статистического материала некоторой заранее выдвинутой гипотезе о законе распределения. Таким образом, процедура нахождения хорошей математической модели - закона распределения случайной величины, всегда слагается из двух этапов:

1. Выдвижение гипотез о математических моделях распределения.
2. Проверка соответствия выдвинутых гипотез имеющимся статистическим данным.

Гипотезы о законе распределения могут выдвигаться на основе теоретического анализа физической природы и свойств рассматриваемой случайной величины. Источником этих гипотез может служить предварительный анализ технических систем на этапах проектирования, испытаний и эксплуатации, а также при оценке правильности установления и продления ресурсов и сроков их эксплуатации.

Знание теоретических законов распределения показателей надежности машин дает возможность прогнозировать надежность техники на определенный период с заданной вероятностью, планировать сроки и трудоёмкость ремонта, оптимизировать объём запасных частей и материалов и решать другие задачи.

Многолетний опыт исследования надёжности автомобилей показывает, что в качестве математических моделей в основном можно использовать ограниченное число законов распределений случайных величин:

- нормальное распределение (распределение Гаусса);
- распределение Вейбулла;

экспоненциальное (показательное) распределение

Нормальное распределение очень часто используется на практике.

Основная его особенность состоит в том, что он является так называемым предельным законом, к которому приближаются другие законы. Распределение показателя подчиняется нормальному закону, если на изменение показателя оказывают влияние много равнозначных факторов, сложение нескольких одинаковых или различных теоретических законов распределения так же в итоге приводит к закону нормального распределения.

Модель нормального распределения применяется для описания:

- рассеивания полных до ремонтных, межремонтных ресурсов и сроков службы машин и их сборочных единиц;
- рассеивания данных о времени и стоимости восстановления работоспособности машин после отказов;
- рассеивания размеров рабочих поверхностей деталей узлов и агрегатов и многих других показателей

Отличительной особенностью нормального распределения является его симметричность относительно среднего значения.

Закон распределения Вейбулла занимает одно из наиболее часто применяемых в оценке надежности технических систем по результатам испытаний и эксплуатации. Это распределение Вейбулл разработал для описания рассеивания параметров усталостной прочности стали и пределов ее упругости, а в дальнейшем применил для решения других задач. В настоящее время закон распределения Вейбулла нашел применение для:

- описания характеристик рассеивания наработок между отказами;
- описания рассеивания ресурсов деталей, отказ которых возникает в следствии изнашивания рабочих поверхностей;
- при описании надежности сложных технических систем и во многих других случаях

1. 4 Лекция №4-5 (4 часа).

Тема: «Физические, аналоговые и математические модели объектов и процессов»

1.1.1 Вопросы лекции:

1. Методы подобия в механике

2. Заключение

1.1.2 Краткое содержание вопросов:

1. Методы подобия в механике

Движение математического маятника

В качестве первого примера мы рассмотрим классический пример о движении математического маятника.

Математический маятник (рис. 1) представляет собой тяжелую материальную точку, подвешенную на невесомой и нерастяжимой нити, которая закреплена другим своим концом неподвижно. Совокупность возможных движений мы ограничим условием, что движения маятника плоские.

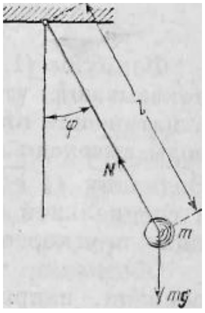

Рис. 1. Математический маятник.

Введем обозначения: l — длина маятника, φ — угол между нитью и вертикалью, t — время, m — масса груза и N — натяжение нити. Если пренебречь силами сопротивления, то задача о движении маятника приводится к решению уравнений

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi, \tag{1}$$

$$m\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 l = N - mg\cos\varphi \tag{2}$$

с начальным условием

$$\text{при } t=0 \ \varphi=\varphi_0 \text{ и } \frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

т. е. за начальный момент времени принят тот момент, когда маятник отклонен на угол φ_0, а скорость равна нулю.

Из уравнений (1), (2) и начального условия очевидно, что в качестве определяющих параметров можно взять следующую систему:

$$t, l, g, m, \varphi_0.$$

Числовые значения всех остальных величин определяются полностью значениями этих параметров. Следовательно, мы можем написать

$$\varphi = \varphi\,(t, \varphi_0, l, g, m),\ N=mgf(t, \varphi_0, l, g, m) \tag{3}$$

где φ и f – безразмерные величины.

Числовые значения функций φ и f не должны зависеть от системы единиц измерения. Вид этих функций можно определить либо решая уравнения (1) и (2), либо экспериментальным способом.

Из общих соображений, изложенных выше, вытекает, что пять аргументов функций φ и f можно свести только к двум аргументам, которые представляют собой безразмерные комбинации, составленные из t, l, g, m и φ_0, так как имеются три независимые единицы измерения.

Из величин t, l, g, m и φ_0 можно составить две независимые безразмерные комбинации

$$\varphi_0 \text{ и } t\sqrt{\frac{g}{l}} \tag{4}$$

Все другие безразмерные комбинации, составленные из t, l, g, m и φ_0 или вообще из любых величин, определяемых этими параметрами, будут функциями комбинаций (4). Следовательно, можно написать

$$\varphi = \varphi\left(\varphi_0, t\sqrt{\frac{g}{l}}\right), \tag{5'}$$

$$N = mgf\left(\varphi_0, t\sqrt{\frac{g}{l}}\right). \tag{5''}$$

Формулы (5), полученные с помощью метода размерности, показывают, что закон движения не зависит от массы груза, а натяжение нити прямо пропорционально массе груза. Эти выводы вытекают также непосредственно из уравнений (1) и (2). Величину $t\sqrt{g/l}$ можно рассматривать как время, выраженное в специальной системе единиц измерения, в которой длина маятника и ускорение силы тяжести приняты равными единице.

Обозначим через Г какой-нибудь характерный промежуток времени, например время движения маятника между крайним и вертикальным положениями или между двумя одинаковыми фазами, т. е. период колебания, и т. д. (существование периодического движения можно принять как гипотезу или как результат, известный из дополнительных данных). Имеем

$$\Gamma = f_1(\varphi_0, l, g, m) = \sqrt{\frac{l}{g}}\, f_2(\varphi_0, l, g, m).$$

функция f_2 представляет собой безразмерную величину, а так как из l, g и m нельзя составить безразмерную комбинацию, то очевидно, что функция f_2 не зависит от l, g и m. Следовательно,

$$\Gamma = \sqrt{\frac{l}{g}}\, f_2(\varphi_0). \tag{6}$$

Формула (6) устанавливает зависимость времени Г от длины маятника. Получить вид функции $f_2(\varphi_0)$ с помощью теории размерности нельзя. Определение $f_2(\varphi_0)$ необходимо произвести либо теоретически, на основании уравнения (1), либо экспериментально.

Формулу (6) можно получить непосредственно из соотношений (5'). В самом деле, для периода колебаний соотношение (5') дает

$$\varphi_0 = \varphi\left(\varphi_0, \Gamma\sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

Решая это уравнение, получим формулу (6).

Если Г есть период колебания, то из соображений симметрии очевидно, что период Г не зависит от знака φ_0, т. е.

$$f_2(\varphi_0)= f_2(-\varphi_0).$$

Следовательно, функция f_2 является четной функцией аргумента φ_0. Предполагая, что при малых φ_0 функция $f_2(\varphi_0)$ регулярна, можно написать

$$f_2(\varphi_0) = c_1 + c_2\varphi_0^2 + c_3\varphi_0^4 +\ldots \tag{7}$$

Для малых колебаний члены со степенями φ_0^2 и выше можно отбросить, и для периода Г мы получаем формулу

$$\Gamma = c_1\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \tag{8}$$

Решение уравнения (1) показывает, что $c_1 = 2\pi$. Таким образом, мы видим, что для малых колебаний маятника с помощью теории размерности можно получить формулу периода колебания маятника с точностью до постоянного множителя.

Формулы (5) и (6) сохранят свою справедливость и в том случае, если вместо уравнения (1) мы возьмем уравнение

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\,f(\varphi)\,,$$

где $f(\varphi)$ есть любая функция угла φ. Вообще справедливость формул (5) и (6) вытекает из единственного условия, которое состоит в том, что состояние движения определяется параметрами

$$t,\ l,\ g,\ m,\ \varphi_0.$$

Для установления этой системы параметров нам послужили уравнения движения, но ее можно указать и не прибегая к уравнениям движения. В самом деле, для характеристики маятника надо указать l и m. Далее необходимо указать g, так как сущность явления определяется силой тяжести. Наконец, необходимо указать φ_0 и *t*, так как конкретное движение и состояние движения определяются углом крайнего отклонения φ_0 и рассматриваемым моментом времени *t*.

Истечение тяжелой жидкости через водослив

Рассмотрим задачу о струйном движении тяжелой жидкости через водослив (рис. 2), который представляет собой вертикальную стенку с треугольным отверстием, расположенным симметрично относительно вертикали, причем угол отверстия α равен 90°. Жидкость вытекает под напором h, который равен высоте уровня жидкости над вершиной треугольника на далеких расстояниях от отверстия водослива. Для простоты мы примем, что сосуд, в котором находится жидкость, очень велик, и поэтому движение жидкости можно считать установившимся. При струйном движении жидкости основное значение имеют свойства инерции и весомости, которые характеризуются значениями плотности ρ и ускорения силы тяжести g.

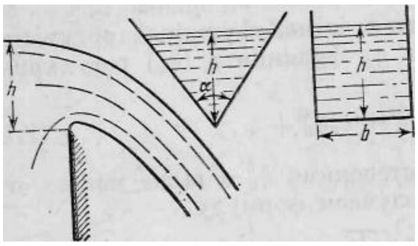

Рис. 2. Перетекание тяжелой жидкости через водослив.

Установившееся течение жидкости через рассматриваемый водослив полностью определяется следующими параметрами:

$$\rho,\ g,\ h.$$

Вес жидкости Q, вытекающий через отверстие водослива в единицу времени, может быть функцией только этих параметров

$$Q = f(\rho,\ g,\ h).$$

С помощью теории размерности нетрудно найти вид этой функции. В самом деле, размерность Q равняется кгс/с. Комбинация $\rho g h^3\sqrt{g/h}$ также имеет размерность кгс/с. Поэтому отношение

$$\frac{Q}{\rho g^{3/2} h^{5/2}}$$

является безразмерной величиной. Это отношение является функцией величин ρ, g, h, из которых нельзя образовать безразмерной комбинации, поэтому можно написать

$$\frac{Q}{\rho g^{3/2} h^{5/2}} = C$$

или

$$Q = C\rho g^{3/2} h^{5/2}, \tag{9}$$

где C есть абсолютная постоянная, которую проще всего определить из опыта. Полученная формула полностью определяет зависимость количества протекающей жидкости от напора h и от плотности ρ.

Совокупность рассматриваемых движений можно расширить, допуская водосливы с различными углами α. В этом случае система определяющих параметров дополняется углом α, и формула (9) примет вид

$$Q = C(\alpha)\rho g^{3/2} h^{5/2}, \tag{10}$$

т. е. коэффициент C будет зависеть от угла α.

Если водослив имеет прямоугольную форму шириной b, то система определяющих параметров будет

ρ, g, h, b.

Все безразмерные величины определяются параметром h/b. Формула (9) в этом случае заменится следующей:

$$Q = f\left(\frac{h}{b}\right)\rho g^{3/2} h^{5/2}. \tag{11}$$

Функцию f(h/b) можно определить опытным путем, наблюдая течение через водослив различной ширины b, но с постоянным h. Определив таким способом функцию f(h/b), формулу (11) можно применять к случаям постоянной ширины b=const, но с различным напором h, т. е. к случаям, в которых опыт не производился.

Этот пример показывает, что соображения, полученные с помощью метода размерности, могут приносить большую пользу при постановке опытов, позволяя ограничивать их количество и получать благодаря этому экономию не только в средствах, но и во времени. Изменение одних величин можно заменять в опытах изменением других величин. На основе опытов, произведенных с водой, можно дать исчерпывающие ответы о явлении вытекания нефти, ртути и т. д.

2. Заключение

Три теоремы подобия составляют главную основу теории подобия.

Вот краткое содержание изложенной теории подобия:

1)Подобные явления протекают в геометрически подобных системах и описываются буквально одинаковыми уравнениями связи.

Эти уравнения должны быть безусловно или условно однородными.

2)Условно однородными физические уравнения делаются присоединением к ним «обусловливающих равенств», которые устанавливают равенство единице индикаторов подобия, получающихся из уравнений, или, что то же, одинаковость для подобных явлений критерием подобия.

3)Однородные уравнения могут быть представлены как функции степенных комплексов (критериев) и симплексов.

Такие «критериальные» уравнения численно одинаковы для всей группы подобных явлений.

4)Подобны те явления, уравнение связи которых буквенно одинаковы и условия однозначности которых подобны, т. е. у которых одноименные моновалентны (величины, входящие в условия однозначности) находятся в численно постоянном отношении, а одноименные моновалентные (определяющие) критерии одинаковы.

Теория подобия дает, следовательно, общие методические указания, как поступать в каждом отдельном случае при анализе уравнений, описывающих явление, при постановке и обработке данных опыта над ним и при распространении результатов опыта на другие явления. Если же дана натура и исследовать ее хотят на модели, то теория подобия содержит методические указания по расчету и построению модели, подобной натуре.

Основные методические указание о применении теории подобия к опыту, будь то физическое экспериментирование или техническое моделирование, состоит в следующем.

При исследовании явления надо установить для него уравнения связи, дающие взаимную связь физических величин, участвующих в явлении.

Эти уравнения должны быть формулированы для того частного случая, который является объектом исследования. Присоединение к ним условий однозначности делает исследование определенным и позволяет применить теорию подобия.

Поэтому во всех случаях, когда уравнения связи могут быть найдены, метод анализу уравнений есть единственно правильный путь применения теории подобия и только тогда, когда установить математическую зависимость между величинами, характеризующими явление, не удается, надлежит обратиться к методу анализа размерности. Этот путь менее надежен и поэтому результат его необходимо проверять на опыте. Им не следует пренебрегать, так как во многих случаях анализ размерности дает при обработке опытов ценные выводы.

В настоящее время теория подобия имеет следующие направления.

Первым по времени направлением является приложение теории подобия к изучению разнообразных технических сооружений и моделей.

Моделирование стало мощным средством для обнаружения различных недостатков, имеющихся в следующих технических устройствах, и для изыскания путей к их устранению.

Далее моделирование уже стало широко применяться для проверки вновь конструируемых объектов, так что до их выполнения, в процессе проектирования, моделирование позволяет совершенствовать новые, еще не опробованные на практике конструкции.

Теория подобия нашла также применение при обобщении рабочих показателей целых групп однотипных машин и устройств, так что на основании обработки данных многочисленных испытаний оказывается возможным создавать новые, основанные на критериях подобия, способы расчета различных технических объектов, которые приводят к установлению рациональных, связанных с экономией энергии режимов.

Теория подобия стала научной основой обобщения данных физико-технических испытаний, своего рода теорией эксперимента, указывающей во всех тех случаях, когда решение дифференциальных уравнений физики наталкивается на трудности, путь к такой постановке опытов, что их результаты могут быть распространены на всю область изучаемых явлений.

В последнее время теория подобия не только использует уравнения физики для обобщения опытных данных, но и , обратно, при выводе дифференциальных уравнений она дает указания, с одной стороны, о введении в уравнения критериев подобия и безразмерных переменных и, с другой стороны, об использовании обобщения методами теории подобия опытных данных, являющихся исходными для составления уравнений. В качестве примера этого нового направления теории подобия можно привести установлении для турбулентного потока автомодельности отдельно для пограничного слоя и отдельно для турбулентного ядра, что позволяет получить более простую и точную формулу гидравлического сопротивления труб. Таким образом, теория подобия на наших глазах становится неотъемлемой частью теоретической физики.

1. 5 Лекция №6 (2 часа).

Тема: «Математические модели надежности систем обслуживания сельского хозяйства»

1.5.1 Вопросы лекции:

1. Понятие надежности систем обслуживания в сельском хозяйстве

2. Пути получения данных: всеобщий контроль, выборочное исследование, планировании эксперимента

3. Экспертные оценки

1.5.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие надежности систем обслуживания в сельском хозяйстве

Теория надежности - наука, изучающая:

- закономерности возникновения отказов систем;
- нормированные критерии и количественные характеристики надежности;
- методы анализа сложных систем по критериям надежности;
- методы повышения надежности;
- методы испытаний на надежность;
- методы эксплуатации систем с учетом надежности (обоснование периодичности технического обслуживания систем, норм запасных частей, методов отыскания неисправностей);
- методы сбора и анализа статистических данных об отказах систем.

Случайный характер времени возникновения отказов, сложность объектов позволяет заключить, что математическим аппаратом теории надежности может быть теория вероятностей и математическая статистика, а также теория массового обслуживания (теория графов и цепи Маркова).

Из-за невозможности точного предсказания отказа как случайного события по времени и месту возникновения следует, что полностью предупредить отказы невозможно. Однако могут быть приняты меры для уменьшения их частоты.

Теория вероятностей изучает:

а) случайные события;
б) случайные величины;
в) случайные процессы (случайные функции).

Если при массовых событиях, например, при массовых испытаниях, обязательно происходит некоторое событие, то такое событие называется достоверным. Если же некоторое событие заведомо не может произойти, то его называют невозможным. События, которые при каждом отдельном явлении (случае, испытании) предсказать невозможно, называют случайными.

Случайной величиной называется переменная величина, которая в результате испытаний или при какихто явлениях может принимать то или иное значение (например, отклонение размера и изделия от номинального значения, время безотказной работы изделий и пр.).

Случайным процессом или случайной функцией называется совокупность случайных величин, отвечающих различным значениям некоторого неслучайного параметра: изменение диаметра по длине валика, внутренние шумы, флюктуации в электрических цепях и т.д.

Законом распределения случайной величины называют соотношение, позволяющее определить вероятность нахождения случайной величины в любом интервале ее возможных значений. Аналитическим выражением закона распределения случайной величины наработки до отказа ***t*** является функция распределения ***F***, равная вероятности ***Q*** того, что случайная величина ***t*** примет любое значение, меньшее заданной наработки***T***

F(t) = Q(t < T)

Следовательно, вероятность отказа за время ***t*** численно равна функции ***F(t)*** распределения времени наработки системы на отказ. Этот важнейший вывод позволяет непосредственно использовать общие закономерности и свойства функции распределения для определения показателей надежности, т.е. функция распределения случайной величины является ее исчерпывающей вероятностной характеристикой.

Методы расчета надежности технических систем

Классификация методов расчетов надежности

Главным назначением расчетов надежности следует считать

- сравнительный анализ различных конструктивных (схемных) вариантов изделия на стадии его проектирования для обоснованного выбора комплектующих элементов, общей структурной схемы, способов резервирования, методов контроля и обслуживания;
- ориентировочная, прогнозируемая оценка надежности изделия на этапе утверждения технического проекта для обоснования вывода о том, что проектируемое изделие может быть изготовлено удовлетворяющим требованиям по надежности;
- ориентировочная, прогнозируемая оценка надежности сложного изделия на этапе отработки опытного образца для обоснования распределения требований к надежности частей изделия и обоснованного, хотя и ориентировочного, определения состава и количества запасных частей и сроков обслуживания.

Применительно к стадиям жизненного цикла систем различают ***расчеты на стадии проектирования*** (прогнозирующие расчеты) и на стадии эксплуатации и испытаний (главным образом - констатирующие расчеты). К первой относятся расчеты, основанные на анализе структуры системы и заданных условий работы. Их принято называть расчетноаналитическими или расчетами надежности. Ко второй - расчеты, связанные с обработкой результатов эксперимента или эксплуатации. Они называются - расчетноэкспериментальными или обработкой опытных, статистических данных. По принципиальным основам расчеты делятся на элементные (системные) и функциональные (частным случаем которых являются расчеты параметрические).

По характеру учитываемых отказов различают расчеты с учетом одного вида отказов (внезапных, полных) и с учетом характеристик отказов (внезапные, постепенные, полные, частичные, типа замыкание, обрыв, сбои и т.д.).

По виду систем - расчеты простых систем и сложных систем. Расчеты простых систем в свою очередь делятся на расчеты резервированных и не резервированных систем, систем без восстановления и с восстановлением. Расчеты сложных систем делятся на расчеты надежности контуров управления и расчеты состояний систем.

Их развитие идет по пути разработки все новых моделей расчета. Реальные системы соответствуют модели расчета с некоторым коэффициентом подобия.

Из приведенных в классификации расчетов надежности наиболее простыми и освоенными являются элементный, системный расчет с учетом одного вида отказов (внезапного, полного). К наиболее трудоемким относятся функциональный расчет с учетом характера отказов (особенно сбоев), а также расчет надежности сложных и больших систем управления.

2. Пути получения данных: всеобщий контроль, выборочное исследование, планировании эксперимента

Выборочное исследование представляет собой способ систематического сбора данных о поведении и установках людей посредством опроса специально подобранной группы респондентов, дающих информацию о себе и своем мнении. Свое название оно получило благодаря использованию специальной процедуры отбора из огромной совокупности единиц исследования (генеральной совокупности) небольшой части (выборочной совокупности), которая очень точно отражает основные параметры целого. Процедура построения выборки основана на методах математической статистики и базируется на принципах теории вероятности. Выборочное исследование более экономично и не менее надежно, чем сплошное, хотя требует более изощренной методики и техники. В категорию специалистов по выборочным исследованиям (Survey Research) включают исследователей в маркетингово - исследовательских фирмах, организациях, изучающих общественное мнение, государственных органах, бизнесе, телевидении, некоммерческих институтах, а также в фирмах, занимающихся опросной статистикой (survey statistics), политическими, экономическими, социально-психологическими и рыночными исследованиями.

Вопросы, на которые отвечают случайно попавшие в выборочную совокупность респонденты, могут быть как письменными, так и устными. В первом случае выборочное исследование называется анкетированием, во втором -- интервьюированием. Помимо традиционного анкетирования и традиционного интервью (на современный манер оно называется face-to-face интервью, или личное интервью) сегодня используются новые методики, в частности интернет-опрос (он-лайн-опрос), телефонное интервью и т.д.

Традиционное анкетирование за рубежом именуется письменным опросом (Written Survey). Выделяют почтовый опрос, групповое анкетирование, индивидуальное анкетирование.

Применение выборочного метода, взамен сплошного, используемого государственной статистики, дает возможность глубже организовать наблюдения, обеспечивает быстроту его проведения, приводит к экономии средств и труда на получение и обработку информации.

Выборочный метод исследования - это наиболее совершенная с научной точки зрения разновидность не сплошного статистического исследования на основе статистической индукции, при котором характеристики всей статистической (генеральной) совокупностью (N) получаются в результате изучения некоторой ее части (n), отобранной с соблюдением определенных правил (на основе случайного отбора) и поэтому являющейся репрезентативной, т.е. репрезентативной и достоверной.

Самый важный признак выборочного исследования - случайный характер выборки, а главная его особенность заключается в том, что при отборе единиц совокупности для обследования обеспечивается равная возможность в отобранную часть любой из единиц.

При построении социологической выборки используется множество специальных терминов, в том числе два важнейших -- генеральная и выборочная совокупности.

Генеральная совокупность (N) - совокупность единиц, из которой производится отбор некоторой их части для статистического исследования.

Выборочная совокупность (n) - совокупность единиц, которая отобрана из генеральной совокупности и подвергнута наблюдению (регистрации интересующих нас признаков).

Генеральная совокупность (а следом за ней и выборочная совокупность) может быть количественной или качественной, что зависит от того, являются ли признаки свойства единиц наблюдения количественным (возраст) или качественным (пол). Это различие предполагает, что статистическое описание совокупности принимает либо форму средних арифметических, либо форму удельного веса (доли). Совершенно естественно, что между этими показателями (средними или долями) генеральной и выборочной совокупностями имеется какое-то различие, иначе говоря, существует ошибка в определении показателей (средних или долей) выборочной совокупности именно потому, что последняя является частью генеральной совокупности.

Ошибки репрезентативности представляют собой расхождение между показателями выборочной и генеральной совокупности, подчиняются определенным статистическим закономерностям, что и позволяет рассчитывать объем выборочной совокупности. Они могут быть систематическими и случайными. Если первые возникают в связи с особенностями принятой системы отбора и обработки данных наблюдений или в связи с нарушением установленных правил отбора, то вторые - следствие недостаточно равномерного представления в выборке отдельных видов единиц генеральной совокупности.

Главной проблемой выборочного метода является то, насколько уверенно можно по свойствам отобранных объектов следить о действительных свойствах генеральной совокупности. По этому всякое суждение, сделанное на основе выборки, неизбежно имеет вероятностный характер, и задача сводится к тому, чтобы степень вероятности правильности суждения (точность статистических оценок) была, возможно, большей.

Планирование эксперимента (experimental design techniques) – комплекс методов математической статистики, направленных на постановку опытов и проведение рациональных измерений, подверженных случайным ошибкам.

Общая схема проведения эксперимента выглядит следующим образом. Со случайными ошибками измеряется некоторые выходные переменные изучаемой системы, зависящие от неизвестных значений параметров и известных значений переменных-факторов, а также из возможных взаимодействий. Основная цель планирования эксперимента – достижение максимальной точности измерений при минимальном количестве произведенных опытов и сохранении статистической достоверности результатов.

Основные этапы планирования эксперимента:

1. Установление цели эксперимента – постановка целей и задач проведения эксперимента;
2. Уточнение условий проведения эксперимента – выбор оборудования, сроков работ, способа проведения эксперимента и т.п.;
3. Выбор входных и выходных параметров – выбор зависимой измеряемой переменной, определение случайных и детерминированных независимых переменных;
4. Установление необходимой точности результатов измерений – выбор компромисса между минимальным числом испытаний и статистической достоверностью получаемых результатов;
5. Составление плана и проведение эксперимента – количество и порядок испытаний, задание совокупности значений задаваемых переменных-факторов и их взаимодействий в эксперименте;
6. Статистическая обработка результатов эксперимента – применение методов математической статистики для обработки результатов, построение математической модели эксперимента;
7. Формулирование выводов.

Планирование эксперимента широко используют в промышленной статистике. В условиях промышленного эксперимента его основная цель заключается в определении максимального количества информации о влиянии изучаемых факторов на производственный процесс с помощью наименьшего числа дорогостоящих наблюдений. Методы анализа данных промышленных экспериментов опираются на теорию вероятностей и методы математической статистики: корреляционный анализ, регрессионный анализ, дисперсионный анализ.

3 Экспертные оценки

Экспертная оценка (**methods for expert evaluation**) – это метод поиска и результат применения метода, полученный на основании использования персонального мнения эксперта или коллективного мнения группы экспертов.

Эксперт – компетентное для выработки оценки лицо, имеющее специальный опыт в конкретной области и участвующее в исследовании в качестве источника получения информации. Очевидно, в качестве экспертов необходимо использовать тех людей, чьи суждения помогут принятию адекватного решения. При подборе экспертов следует учитывать опасность личной заинтересованности в том или ином решении, который может стать существенным препятствием для получения объективного решения.

Методы экспертных оценок – это методы организации работы со специалистами-экспертами и обработки мнений экспертов.

Сущность методов экспертных оценок заключается в том, что в основу принятого решения, прогноза, вывода закладывается мнение специалиста или коллектива специалистов, основанное на их знаниях и практическом профессиональном опыте. В первую очередь, экспертной достойна называться только та оценка, которая придерживается правил объективности и честности.

Методы получения экспертной оценки:

- *на основе коллективной работы экспертной группы*, когда итоговая оценка представляет собой коллективное мнение экспертов, полученное методом консенсуса – принятием решения на основе общего согласия без проведения голосования;
- *на основе индивидуального мнения* членов экспертной группы, независимо друг от друга формулирующих оценку или на основании мнения лидера мнения.

Методы коллективной работы экспертной группы предполагают получение общего мнения в ходе совместного обсуждения решаемой проблемы.

- *мозговая атака (мозговой штурм)* – выступление экспертов, на которые наложено одно ограничение – нельзя критиковать предложения других;
- *метод «635»* – одна из разновидностей мозговой атаки. Цифры 6, 3, 5 обозначают шесть участников, каждый из которых должен записать три идеи в течение пяти минут. Лист ходит по кругу. Таким образом, за полчаса каждый запишет в свой актив 18 идей, а все вместе – 108;
- *деловая игра* – метод, основанный на моделировании функционирования социальной системы управления при выполнении операций, направленных на достижение поставленной цели.
- *оценка комиссией* – один из методов экспертных оценок, основанный на работе специальных комиссий. Группы экспертов за "круглым столом" обсуждают ту или иную проблему с целью согласования точек зрения и выработки единого мнения.

- *"суд"* – метод, реализуемый по аналогии с ведением судебного процесса, когда в роли "подсудимых" выступают выбираемые варианты решения;

Методы получения индивидуального мнения членов экспертной группы основаны на предварительном получении информации от экспертов, опрашиваемых независимо друг от друга, с последующей обработкой полученных данных.

- *метод "Дельфи"* – разработка программы последовательных многотуровых индивидуальных опросов;
- *метод интервью* предполагает беседу с экспертом по схеме вопрос – ответ;
- *метод доклада* предусматривает тщательную самостоятельную работу эксперта над анализом, с предоставлением мнения в виде аналитической записки.

Способы выработки как коллективных, так и персональных экспертных оценок:

- *оценка на основе ассоциаций* – способ, основанный на изучении схожего по свойствам объекта с другим объектом;
- *оценка на основе по-парных (бинарных) сравнений – способ,* основанный на сопоставлении экспертом альтернативных вариантов;
- *оценка на основе векторов предпочтений* – способ, основанный на экспертном анализе и перебора всего набора альтернативных вариантов и определении наиболее предпочтительного.
- *оценка на основе фокальных объектов* – способ, основанный на перенесении признаков случайно отобранных аналогов на исследуемый объект.
- *оценка на основе поиска средней точки* – формулируются два альтернативных варианта решения. После этого эксперту необходимо подобрать третий альтернативный вариант, оценка которого расположена между значений первой и второй альтернативы.

Применимость метода экспертных оценок. Экспертные оценки применяются на любом этапе исследования: в определении цели и задачи самого исследования, в построении и проверке гипотез, при выявлении проблемных ситуаций, в ходе интерпретации каких-либо процессов, событий или фактов, для обоснования адекватности используемого инструментария, в процессе выработки рекомендаций и т.д. Экспертные методы оценки применяют в ситуациях, когда выбор, обоснование и оценка решений не могут быть выполнены на основе точных расчетов.

1. 6 Лекция №7-8 (4 часа).

Тема: «Технико-экономические модели оптимизации параметров и режимов работы машин и оборудования»

1.6.1 Вопросы лекции:

1. Цели технико-экономической оценки параметров и режимов машин и оборудования в сельском хозяйстве

2. Примеры моделей оценки целесообразности инновационирования

3. Сущность линейного программирования

1.6.2 Краткое содержание вопросов:

1. Цели технико-экономической оценки параметров и режимов машин и оборудования в сельском хозяйстве

Цели технико-экономического анализа конструкций машин могут быть различными: оценка потребительских качеств проектируемой машины, ее конкурентоспособности по сравнению с действующими, а также перспективными машинами аналогичного эксплуатационного назначения, отбор наилучшей по экономическим показателям конструкции из многих вариантов и т. д. Вариант конструкции машины, принимаемой к производству, должен иметь существенные преимущества по сравнению с другими вариантами: обеспечивать высокую производительность общественного труда и высокое качество производимой продукции; облегчать труд работников и др.

Исключительно большое значение имеет своевременность и высокое качество технико-экономического анализа ***(ТЭА)***. В практике, к сожалению, многочисленны случаи, -когда из-за низкого качества **ТЭА** новых конструкций или позднего его проведения в производство принимались экономически неэффективные машины. Даже расчеты, проведенные до начала серийного изготовления новой машины, не исключают определенных потерь, связанных с затратами на создание и освоение новой техники ***(СОНТ)*** в тех случаях, когда эта машина оказывается экономически неэффективной.

Уже к концу формирования принципиальной схемы машины и основных ее характеристик предрешается примерно **75** % затрат на ее изготовление и эксплуатацию, хотя затраты на **СОНТ** еще не достигли и 5 % общей суммы. В связи с этим расчеты экономической эффективности новой машины должны начинаться еще при разработке технического задания ***(ТЗ)*** и постепенно уточняться ***(по мере накопления информации)*** на всех стадиях проектирования, чтобы как можно раньше предотвратить возможность получения экономически неэффективной конструкции.

Необходимо обеспечить достаточно высокую точность расчетов на основе ограниченной информации. Скудность исходной информации особенно характерна для предпроектной стадии и ранних стадий проектирования.

В процессе разработки **ТЗ** и на стадии технического предложения информация по проектируемой машине часто ограничена значениями нескольких основных ее параметров. Однако уже на этих стадиях необходимо иметь уверенность в том, что эти значения выбраны правильно и дальнейшая разработка проекта на их базе даст экономически эффективные результаты.

Среди технико-экономических показателей в сферах СОНТ и производства выделяют:

Расходные показатели - материалоемкость и трудоемкость, на основе которых прогнозируют в ряде случаев себестоимость машины, единовременные затраты на **СОНТ,** капиталовложения в производство.

Унификационные и стандартизационные показатели, существенно влияющие на величину единовременных и текущих затрат в сферах производства и эксплуатации машины.

Временные показатели, определяющие сроки затрат в сферах производства***(включая СОНТ)*** и эксплуатации.

Среди показателей в сфере эксплуатации выделяют:

Показатели производительности машины в единицу времени.

Показатели надежности машины: безотказность, долговечность, ремонтопригодность и др.

расходные показатели - затраты на эксплуатацию машины в единицу времени, на единицу продукции или работы, а также сопутствующие капиталовложения, связанные с ее приобретением и эксплуатацией.

Система показателей, влияющих на экономическую эффективность машины, показана на рис. **4.1.**

Исходя из рассмотренных требований и необходимости предварительного определения основных экономических показателей в системе **СОНТ,** производственных и эксплуатационных параметров и показателей, может быть построена принципиальная схема сравнительного многовариантного **ТЭА** проектируемой машины ***(рис. 4.2)***.

Проводимые расчеты должны обеспечить не только возможность выявления экономической эффективности конструкции машины, но и помогать в определении путей ее повышения на каждой стадии проектирования.

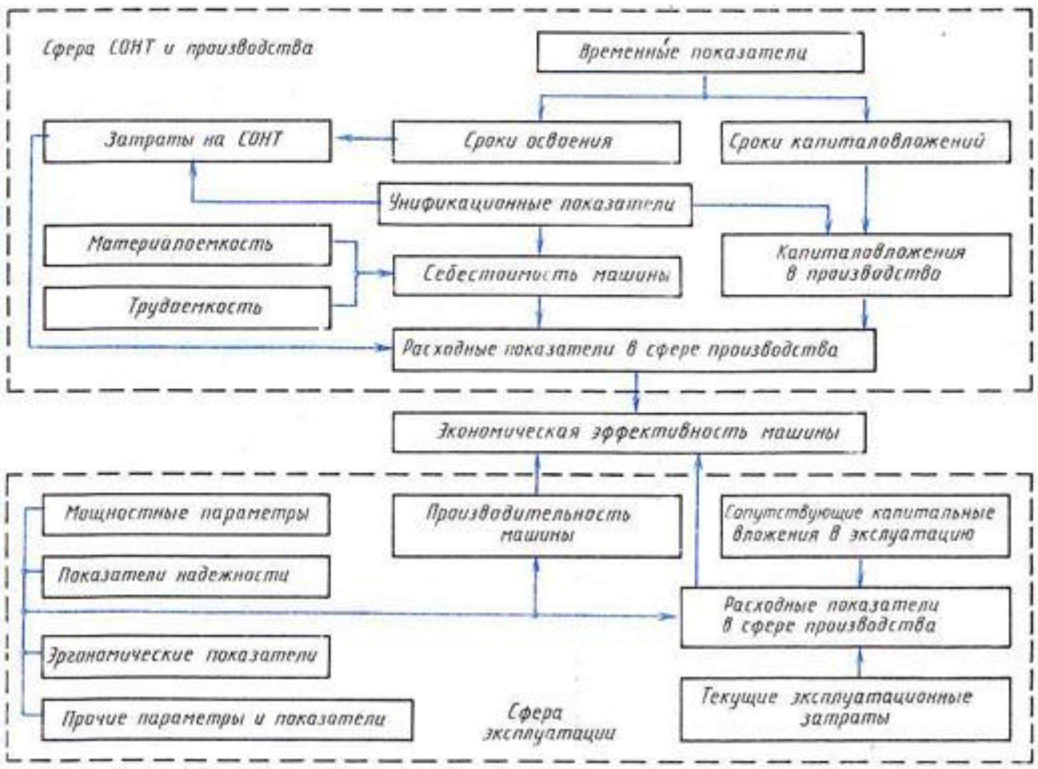

Рис. **4.1.** Система показателей, определяющих экономическую эффективность машины.

Методы расчетов, основанные на исследовании взаимосвязей численных значений технических параметров машины и ее экономических показателей, а также расчетные формулы, отражающие эту взаимосвязь, должны давать возможность конструктору предвидеть, с одной стороны, как изменение численных значений параметров машины влияет на экономическую эффективность ее использования, с другой стороны, «выходить» на экономически оптимальные численные значения конструкционных параметров.

Поэтому все чаще используется понятие технико-экономическая оптимизация ***(ТЭО)***, при которой процессы конструирования и **ТЭА**становятся едиными, т. е. блок «Экономика», особенно в системах автоматизированного проектирования ***(САПР)***, непосредственно встраивается в систему конструкторских расчетов ***(рис. 4.3)***.

Целью такой ТЭО является непосредственный выход на систему экономически оптимальных численных значений параметров конструкции, устанавливаемых на данной стадии проектирования. При этом значения, естественно, должны полностью удовлетворять требованиям **ТЗ.**

ТЭО реализуется в диалоговом режиме работы САПР на основе:

Теоретических и методических разработок межотраслевого и отраслевого характера, которые кладутся в основу официальных методик **ТЭА** и **ТЭО** для всех стадий проектирования.

Математического аппарата, обеспечивающего возможность проведения достаточно точного и надежного **ТЭА** или качественной **ТЭО.**

Достаточного круга статистических данных по технико-экономическим параметрам и показателям других машин аналогичного назначения, технологическим и организационным условиям их производства, технико-экономическим эксплуатационным параметрам и показателям и т. д.

Высокопроизводительной вычислительной техники с большим объемом памяти, автоматизированных систем технико-экономической информации.

Использования обученных специалистов, умеющих связать в единую систему разнородные параметры и показатели, построить технико экономические, а затем и экономико-математические модели их взаимосвязей, провести **ТЭА** и **ТЭО** по правильно выбранному экономическому критерию.

Эти условия созданы пока лишь в отдельных отраслях машиностроения и то далеко не полностью.

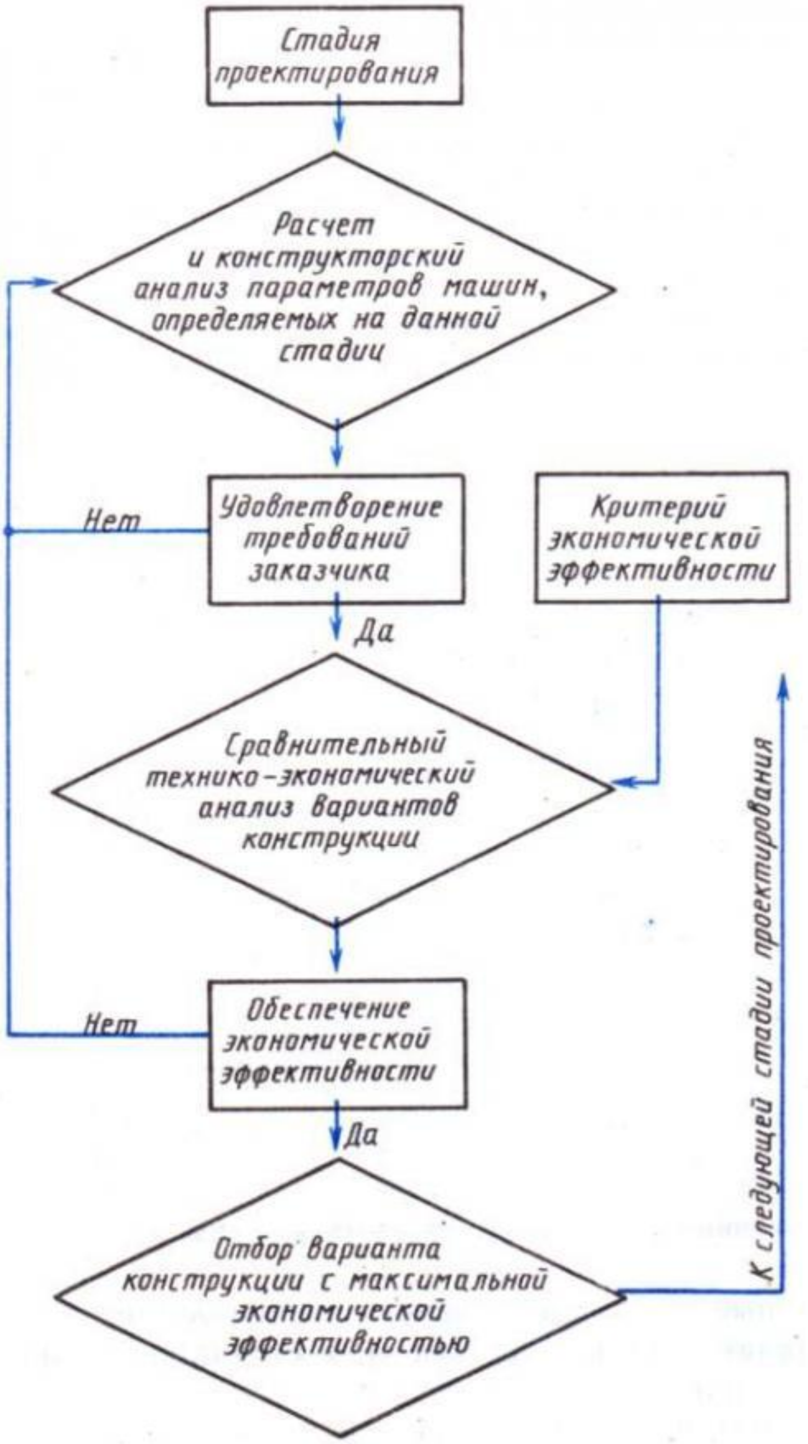

Рис. **4.2.** Укрупненная схема проведения **ТЭА** машины на стадиях проектирования.

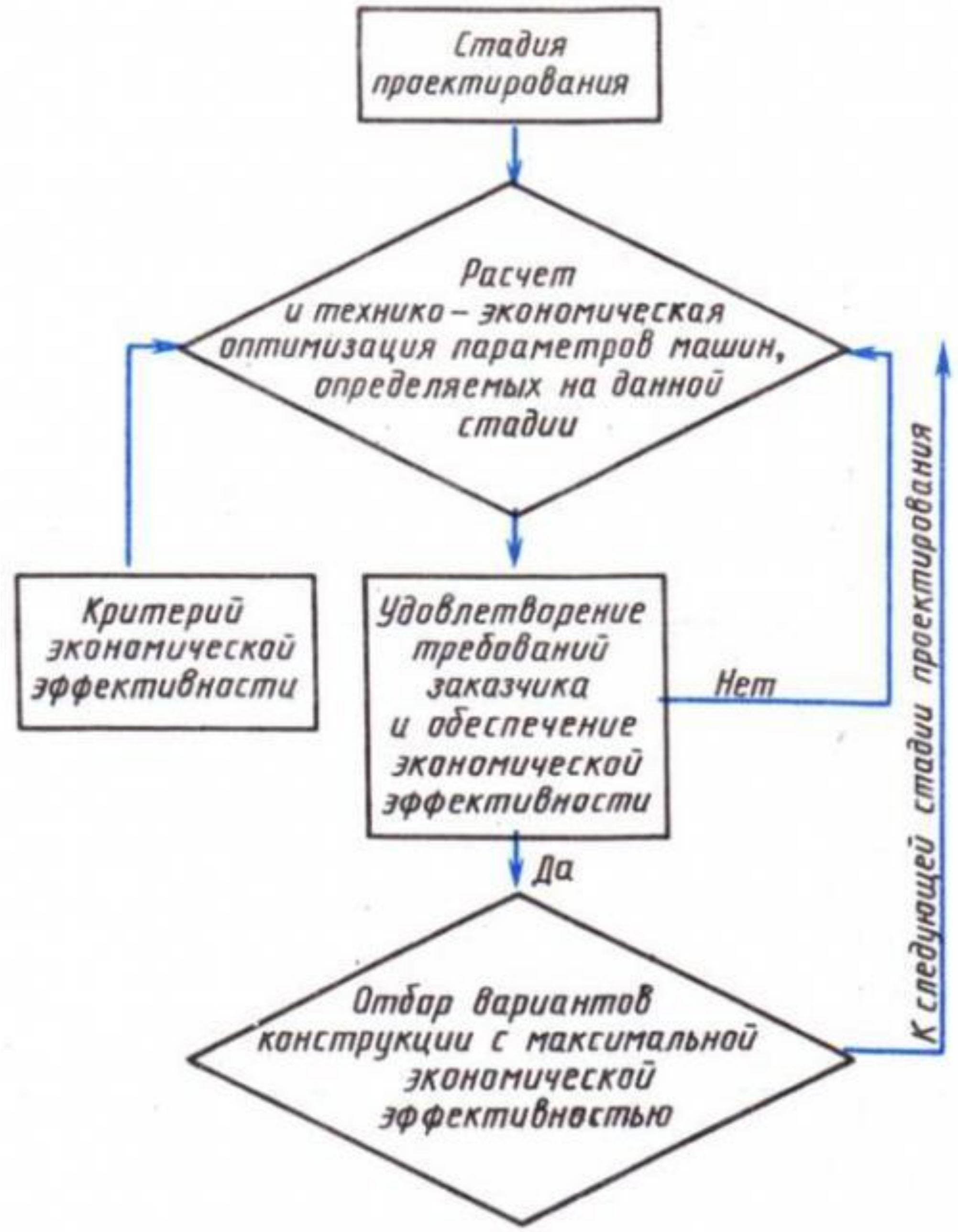

Рис. **4.3.** Укрупненная схема проведения **ТЭО** на стадиях проектирования.

2. Примеры моделей оценки целесообразности инновационирования

Инновационная деятельность — деятельность по доведению научно-технических идей, изобретений, разработок до результата, пригодного в практическом использовании. В полном объеме инновационная деятельность включает все виды деятельности по разработке, освоению и производству, а также реализации инноваций

В чем сущность экономической эффективности инновационной деятельности?

Осуществление инновационной, как и любой другой, деятельности всегда связано с различными внутренними и внешними затратами. Поэтому чтобы определить экономическую эффективность инновационной деятельности, необходимо оценить эффективность затрат на нее.

Следует различать эффективность затрат на инновационную деятельность у производителей (продавцов) и у покупателей.

Чем различается рассматриваемая эффективность у производителей и покупателей?

Основным критерием обоснования экономической эффективности инновационной деятельности у производителей (продавцов) является ее результат: чистый дисконтированный доход, который определяется путем сравнения произведенных затрат и получаемых результатов и принимается за базу для всех последующих обоснований экономической эффективности конкретного инновационного проекта.

Кроме того экономическая эффективность инновационной деятельности включает в себя определение и других рассмотренных нами показателей: индекса доходности, срока окупаемости капитальных затрат и внутренней нормы доходности проекта. Завершается оценка определением устойчивости и чувствительности основных экономических характеристик проекта к изменению внутренних и внешних параметров.

Экономическую эффективность инновационной деятельности у покупателей нужно рассматривать с иной стороны. Покупатель, приобретая новшества, совершенствует свою материально-техническую базу, технологию производства и управления. Он несет затраты, связанные с покупкой новшества, его транспортировкой, освоением и др. Эффективность затрат покупателя на использование новшеств можно определять, а также управлять ею, через сравнение следующих показателей:

- затраты на производство и реализацию продукции до и после введения новшеств;
- выручку от реализации продукции до и после введения новшеств;
- стоимость потребляемых ресурсов до и после введения новшеств;
- среднесписочную численность персонала и т.д.

Что мы понимаем под устойчивостью?

Под устойчивостью проекта понимается предельное негативное значение анализируемого показателя, при котором сохраняется экономическая целесообразность реализации проекта. Устойчивость проекта к изменению анализируемого показателя рассчитывается исходя из приравнивания к 0 уравнения для расчета NPV.

Проект считается устойчивым, если при отклонении показателей проекта (капитальные вложения, объем продаж, текущие затраты и макроэкономические факторы) на 10% в худшую сторону, сохраняется условие NPV = 0.

Что мы понимаем под чувствительностью?

Чувствительность к изменению показателя определяется также с помощью анализа, когда анализируемый показатель изменяется на 10% в сторону негативного отклонения. Если после этого NPV остается положительным, то инновационная деятельность считается нечувствительной к изменению данного фактора. Если же NPV принимает отрицательное значение, то деятельность имеет чувствительность менее 10%-ного уровня и признается рискованной по данному фактору.

Что еще следует учитывать при оценке эффективности инновационной деятельности?

В рыночных условиях хозяйствования очень важен такой показатель, как привлекательность инновационных проектов, определяемая стратегией фирмы-инноватора, условиями привлечения финансовых ресурсов и их источниками, дивидендной политикой инноватора. Кроме того, допустимость проектов должна превышать ставки банковских депозитов, на что, как правило, обращают внимание инвесторы. Необходимо также определять еще и точку безубыточности работы организации-инноватора. Она определяется объемом реализации продукции, при котором покрываются все издержки производства. Следовательно, выбор объекта инвестирования представляет собой одну из важных проблем. Наибольшим предпочтением пользуются те виды инновационной деятельности, которые позволяют иметь сверхмонопольную прибыль, что весьма часто зависит от устойчивого спроса на новые виды продукции или оказываемые услуги.

3 Сущность линейного программирования

Линейное программирование - один из первых и наиболее подробно изученных разделов математического программирования. Именно линейное программирование явилось тем разделом, с которого начала развиваться сама дисциплина «математическое программирование». Термин «программирование» в названии дисциплины ничего общего с термином «программирование (т.е. составление программ) для ЭВМ» не имеет, так как дисциплина «линейное программирование» возникла еще до того времени, когда ЭВМ стали широко применяться при решении математических, инженерных, экономических и др. задач. Термин «линейное программирование» возник в результате неточного перевода английского «linear programming». Одно из значений слова «programming» - составление планов, планирование. Следовательно, правильным переводом «linear programming» было бы не «линейное программирование», а «линейное планирование», что более точно отражает содержание дисциплины. Однако, термин линейное программирование, нелинейное программирование и т.д. в нашей литературе стали общепринятыми.

Итак, линейное программирование возникло после Второй Мировой Войны и стал быстро развиваться, привлекая внимание математиков, экономистов и инженеров благодаря возможности широкого практического применения, а так же математической «стройности».

Можно сказать, что линейное программирование применимо для построения математических моделей тех процессов, в основу которых может быть положена гипотеза линейного представления реального мира: экономических задач, задач управления и планирования, оптимального размещения оборудования и пр.

Задачами линейного программирования называются задачи, в которых линейны как целевая функция, так и ограничения в виде равенств и неравенств. Кратко задачу линейного программирования можно сформулировать следующим образом: найти вектор значений переменных, доставляющих экстремум линейной целевой функции при m ограничениях в виде линейных равенств или неравенств.

Линейное программирование представляет собой наиболее часто используемый метод оптимизации. К числу задач линейного программирования можно отнести задачи:

· рационального использования сырья и материалов; задачи оптимизации раскроя;
· оптимизации производственной программы предприятий;
· оптимального размещения и концентрации производства;
· составления оптимального плана перевозок, работы транспорта;
· управления производственными запасами;
· и многие другие, принадлежащие сфере оптимального планирования.

Так, по оценкам американских экспертов, около 75% от общего числа применяемых оптимизационных методов приходится на линейное программирование. Около четверти машинного времени, затраченного в последние годы на проведение научных исследований, было отведено решению задач линейного программирования и их многочисленных модификаций.

Постановка задачи оптимизации предполагает существование конкурирующих свойств процесса, например:

· количество продукции - расход сырья
· количество продукции - качество продукции

Выбор компромисного варианта для указанных свойств и представляет собой процедуру решения оптимизационной задачи.

При постановке задачи оптимизации необходимо:

1. Наличие объекта оптимизации и цели оптимизации. При этом формулировка каждой задачи оптимизации должна требовать экстремального значения лишь одной величины, т.е. одновременно системе не должно приписываться два и более критериев оптимизации, т.к. практически всегда экстремум одного критерия не соответствует экстремуму другого. Приведем примеры.

Типичный пример неправильной постановки задачи оптимизации:

«Получить максимальную производительность при минимальной себестоимости».

Ошибка заключается в том, что ставится задача поиска оптимальности 2-х величин, противоречащих друг другу по своей сути.

Правильная постановка задачи могла быть следующая:

а) получить максимальную производительность при заданной себестоимости;

б) получить минимальную себестоимость при заданной производительности;

В первом случае критерий оптимизации - производительность, а во втором - себестоимость.

2. Наличие ресурсов оптимизации, под которыми понимают возможность выбора значений некоторых параметров оптимизируемого объекта.

3. Возможность количественной оценки оптимизируемой величины, поскольку только в этом случае можно сравнивать эффекты от выбора тех или иных управляющих воздействий.

4. Учет ограничений.

Обычно оптимизируемая величина связана с экономичностью работы рассматриваемого объекта (аппарат, цех, завод). Оптимизируемый вариант работы объекта должен оцениваться какой-то количественной мерой - критерием оптимальности.

Критерием оптимальности называется количественная оценка оптимизируемого качества объекта.

На основании выбранного критерия оптимальности составляется целевая функция, представляющая собой зависимость критерия оптимальности от параметров, влияющих на ее значение. Вид критерия оптимальности или целевой функции определяется конкретной задачей оптимизации.

Таким образом, задача оптимизации сводится к нахождению экстремума целевой функции.

В зависимости от своей постановки, любая из задач оптимизации может решаться различными методами, и наоборот - любой метод может применяться для решения многих задач. Методы оптимизации могут быть скалярными (оптимизация проводится по одному критерию), векторными (оптимизация проводится по многим критериям), поисковыми (включают методы регулярного и методы случайного поиска), аналитическими (методы дифференциального исчисления, методы вариационного исчисления и др.), вычислительными (основаны на математическом программировании, которое может быть линейным, нелинейным, дискретным, динамическим, стохастическим, эвристическим и т.д.), теоретико-вероятностными, теоретико-игровыми и др. Подвергаться оптимизации могут задачи как с ограничениями, так и без них.

Экономико-математическая модель любой задачи линейного программирования включает: целевую функцию, оптимальное значение которой (максимум или минимум) требуется отыскать; ограничения в виде системы линейных уравнений или неравенств; требование неотрицательности переменных.

В общем виде модель записывается следующим образом:

- целевая функция:

$$= c1x1 + c2x2 + ... + cnxn >$$

max(min);   1.1)

- ограничения:

a11x1 + a12x2 + ... + a1nxn {? =
?} b1,   1.2)
a21x1 + a22x2 + ... + a2nxn {? =
?} b2,
...
am1x1 + am2x2 + ... + amnxn {?
= ?} bm;

- требование неотрицательности:

j ? 0,   1.3)

При этом aij, bi, cj ( ) - заданные постоянные величины.

Задача состоит в нахождении оптимального значения функции (1.1) при соблюдении ограничений (1.2) и (1.3).

Систему ограничений (1.2) называют функциональными ограничениями задачи, а ограничения (1.3) - прямыми.

Вектор , удовлетворяющий ограничениям (1.2) и (1.3), называется допустимым решением (планом) задачи линейного программирования. План , при котором функция (1.1) достигает своего максимального (минимального) значения, называется оптимальным.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

2.1 Практическое занятие №1 (2 часа).

Тема: «Теория подобия и моделирование»

2.1.1 Задание для работы:

1. Определение и понятие системы и ее элементов
2. Понятие и модели моделирования. Классификация моделей.
3. Понятие «черный ящик»
4. Детерминированные и стохастические, управляемые и неуправляемые системы
5. Фундаментальные и прикладные знания

2.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

Система – совокупность элементов, являющаяся объектом исследования, изучения или наблюдения. Элементами могут быть физические объекты (оборудование, машины, приборы, здания и т.п.), явления (нагревание, охлаждение, свечение, электромагнетизм), процессы, в том числе и технологические (упаковка, взвешивание, сортирование, мойка и т.п.). Элемент системы- ее неделимая часть в рамках конкретного исследования, реализующая конкретные функции. Элемент системы описывается множеством различных характеристик, параметров, связями с соседними элементами. Связи между элементами делают систему единым целым. Элементы отличаются друг от друга выполняемыми функциями, состояниями, входами и выходами. Любой элемент может рассматриваться как более мелкая система.

Термин «система» появился в научной литературе давно и является таким же неопределенным, как термины «множество» или «совокупность». Наиболее широко этот термин первоначально использовался в механике, где обозначал материальную систему, т.е. совокупность материальных точек, подчиненных определенным связям. В дальнейшем понятие системы было распространено на биологические, экономические, технологические и другие объекты.

Система- понятие относительное. Некоторая совокупность элементов может быть частью более крупной системы, небольшой ее частью или рассматриваться самостоятельно, не зависимо от окружающего мира. Это зависит от цели исследования. Для установления системы, сферы ее действия необходимо выявить ее границы и состав. При установлении границ системы выявляются причинно-следственные взаимосвязи между ее элементами.

Для выделения системы требуется определить:

- цель, для достижения которой формируется система;
- объект исследования, состоящий из множества элементов, связанных с точки зрения цели в единое целое системными признаками;
- субъект исследования, наблюдения, заказчика, формирующего систему;
- характеристики внешней среды по отношению к системе и отражение их взаимосвязей с системой.

Цель функционирования определяет системные признаки, с помощью которых описываются элементы системы. Система с точки зрения цели есть упорядоченное представление об объекте (существующем или проектируемом). Разные субъекты, в зависимости от цели, могут иметь свои представления об элементах системы, их взаимосвязях и связях с внешней средой.

Цель- это субъективный образ, абстрактная модель несуществующего, но желаемого состояния производства, которое решило бы возникшую проблему.

Цели, которые ставит перед собой человек, редко достижимы только за счет его собственных возможностей, или возможностей производства, к которому он причастен.

Стечение обстоятельств, характеризующееся различием между необходимым (желаемым) и существующим, называется *проблемой, или проблемной ситуацией*. Проблемность существующего положения, в частности с производством продукции, осознается в несколько стадий: *от смутного ощущения, что «что-то не так», к осознанию потребности , затем выявлению проблемы и, наконец, к формулировке цели.*

Вся последующая деятельность, способствующая решению этой проблемы, направлена на достижение поставленной цели. Эта деятельность направлена на отбор из окружающей среды элементов, свойства которых можно использовать на достижение поставленной цели, и на объединение этих элементов надлежащим образом, т.е. как работу по созданию того, что мы называем системой.

В таблице 1.1. приведены примеры целей и систем, предназначенных для их реализации. Соответствие между целями и системами сформулировать достаточно сложно. Так, если между первыми тремя целями и системами формулировка соответствия не вызывает затруднений, то остальные две цели могут иметь несколько систем, и наоборот. Для обеспечения быстрого перемещения сельскохозяйственной продукции с поля в качестве системы можно использовать не только грузовой автомобиль, но тракторный прицеп, контейнеровоз и т.п. Аналогично звуковая информация может быть передана по мобильной радиостанции.

Таблица 1.1. Цели и системы

Nпп	Цель	Система
1	В произвольный момент указать время	Часы
2	Обеспечить производство зерна пшеницы определенной массы	Сельскохозяйственное предприятие
3	Обеспечить выпечку хлеба в заданном ассортименте для значительного количества людей	Пекарня
4	Обеспечить быстрое перемещение заданного количества сельскохозяйственной продукции от поля до склада	Грузовой автомобиль
5	Передать звуковую информацию в пределах определенного района мгновенно независимо от места ее источника	Мобильный телефон

Упорядоченность представления субъекта есть целенаправленное выделение элементов системы, установлении их признаков, взаимосвязей между собой и с внешней средой. При выделении системы учитывают наиболее существенные признаки, все второстепенное, несущественное- исключается.

Понятие модели и моделирования. Классификация моделей

Научные знания можно разделить на две категории: *фундаментальные и прикладные*.

Фундаментальные знания описывают наиболее общие законы природы и техники.

Прикладные знания представляют собой разновидность фундаментальных знаний и находят применение при организации производства товаров и в сфере услуг. Какая-то часть этих товаров и услуг используется в процессе исследований, что, в свою очередь, повышает уровень фундаментальных и прикладных знаний.

Для согласования результатов «смежных» исследовательских программ и выработки единого убедительного для практики заключения - хорошим средством оказывается *модель*.

Модель – материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе изучения замещает объект-оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные его черты.

Моделирование можно рассматривать как замещение исследуемого объекта (оригинала) его условным образом, описанием или другим объектом, именуемым моделью и обеспечивающим адекватное с оригиналом поведение в рамках заданных допущений. Моделирование обычно выполняется с целью познания свойств оригинала путем исследования его модели, а не самого объекта. Моделирование оправдано в том случае, когда оно проще создания самого оригинала или когда последний по каким-то причинам лучше вообще не создавать.

С моделями и моделированием мы сталкиваемся в нашей жизни каждый день. В детстве ребенка окружают игрушки — машинки, куклы, конструкторы и т. д. - модели, повторяющие отдельные свойства реально существующих предметов. Играя, ребенок получает важные знания о них и, вырастая, начинает грамотно применять уже реальные объекты. В процессе мышления человек оперирует образами объектов окружающего мира, которые являются разновидностями моделей – когнитивными (мысленными) моделями.

Реальная польза от моделирования может быть получена при условии, что модель *адекватна* оригиналу в том смысле, что должна с достаточной точностью отображать интересующие исследователя характеристики оригинала.

В большинстве случаев моделирование вовсе не заменяет реальный объект и не отменяет необходимости в его разработке и натурном испытании. Оно просто значи-тельно уменьшает обьем работ по проектированию и исследованию объектов. В тех же случаях, когда это не так, стоимость моделирования может оказаться вполне сравнимой со стоимостью разработок и натурных испытаний изделий (вспомним тренажерную модель самолета).

Дадим классификацию моделей, отражающую в первую очередь методологические вопросы процедуры построения математических моделей и нахождения их решения с помощью ЭВМ.

Если исходить из целевого направления информационных потоков, циркулирующих между объектами и окружающим миром, модели можно разделить на модели для *исследования* и модели для *управления* .

Модели для исследования являются формой организации и представления знаний, средством соединения новых знаний с имеющимися. При расхождении модели с реальностью это несоответствие ликвидируется путем изменения модели.

Модели для управления являются средством организации практических действий, способом представления эталонных действий или их результата, т.е. являются рабочим представлением целей. Модели для управления используются для того, чтобы при обнаружении расхождения между моделью и реальным процессом направить усилия на изменение реальности так, чтобы приблизить ее к модели. Они носят нормативный характер, играют роль стандарта, под который подгоняются как сама деятельность, так и ее результат. Примерами моделей управления служат планы и программы, уставы организаций, законы, алгоритмы, рабочие чертежи и шаблоны, параметры отбора, технологические допуски, технические и агротехнологические требования и т.д.

Основное различие между исследовательскими моделями и моделями для управления состоит в том ,что модели для исследований отражают существующее, а модели для управления – не существующее, но желаемое и возможно осуществимое.

По форме представления модели делят на *физические, символические и смешанные.*

Физические модели подразделяются на модели *подобия и аналоговые*.

Модели *подобия* характеризуются некоторыми масштабными изменениями, выбираемыми в соответствии с критериями подобия (например, глобус- модель земного шара). Природа процесса и его физическая сущность одинаковы как для модели, так и для исследуемого оригинала.

Аналоговые модели основаны на известных аналогиях между протеканием процессов в механических, тепловых, электрических, пневматических, гидравлических и других динамических системах и предназначены для исследования статических и динамических свойств объекта.

Символические модели характеризуются тем, что параметры реального объекта и отношения между ними представлены символами:

- семантическими (словами),
- математическими,
- логическими.

Класс символических моделей весьма широк. Наряду со словесными описаниями функционирования объектов - сценариями, сюда также относятся схематические модели: чертежи, графики и блок-схемы, логические блок-схемы (например, алгоритмы программ) и таблицы решений, таблицы и номограммы, а также математические описания — *математические модели*.

Математическая модель представляет собой набор формальных соотношений, которые отображают поведение исследуемой системы и состоящее из совокупности связанных между собой математическими зависимостями (формулами, уравнениями, неравенствами, логическими условиями) величин -факторов. По своей роли эти факторы целесообразно подразделить на параметры и характеристики (рис.1.2).

Модели функционирования включают широкий спектр символических моделей, например:

модель жизненного цикла системы, описывающая процессы существования системы от зарождения до прекращения функционирования;

модели операций, выполняемых объектом, представляют описание взаимосвязанной совокупности процессов функционирования отдельных элементов объекта. Так, в состав моделей операций могут входить модели надежности, характеризующие выход элементов системы из строя под влиянием эксплуатационных факторов;

информационные модели, отображающие во взаимосвязи источников и потре-бителей информации, виды информации, характер ее преобразования, а также их временные и количественные характеристики;

процедурные модели, описывающие порядок взаимодействия элементов иссле-дуемого объекта при выполнении различных операций, например обработки материалов, деятельности персонала, использования информации, в том числе и реализации процедур принятия управленческих решений;

временные модели, описывающие процедуру функционирования объекта во времени и распределение ресурса "время" по отдельным компонентам объекта.

Параметрами объекта называются факторы, характеризующие свойства объекта или составляющих его элементов. В процессе исследования объекта ряд параметров может изменяться, поэтому они называются *переменными*, которые в свою очередь подразделяются на *переменные состояния и переменные управления.*

Переменные состояния объекта являются функцией переменных управления и воздействий внешней среды.

Характеристиками (выходными характеристиками) называются интересующие исследователя непосредственные конечные результаты функционирования объекта (естественно, что выходные характеристики являются переменными состояния).

Характеристики внешней среды описывают свойства внешней среды, которые сказываются на процессе и результата функционирования объекта. Значения ряда факторов, определяющие начальное состояние объекта или внешней среды, назы-ваются *начальными условиями.*

При описании математической модели оперируют следующими понятиями:

- *критерий оптимальности;*
- *целевая функция;*
- *система ограничений;*
- *уравнение связи;*
- *решение модели.*

Критерием оптимальности называется некоторый показатель, служащий формализацией конкретной цели управления и выражаемый при помощи целевой функции через факторы модели. Критерий оптимальности определяет смысловое содержание целевой функции. В ряде случаев в качестве критерия оптимальности может выступать одна из выходных характеристик объекта.

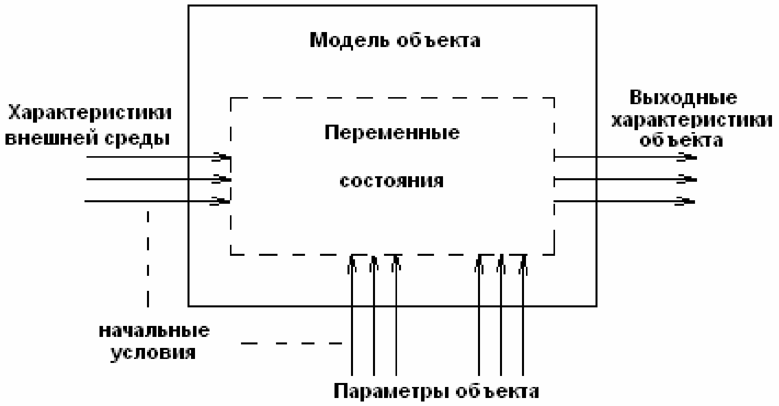

Рис.1.2. Классификация факторов по их роли в модели.

Целевая функция математически связывает между собой факторы модели, и ее значение определяется значениями этих величин. Содержательный смысл целевой функции придает только критерии оптимальности.

Система ограничения определяет пределы, сужающие область осуществимых, приемлемых или допустимых решений и фиксирующие внешние и внутренние свойства объекта. Ограничения определяют область протекания процесса, пределы изменения параметров и характеристик объекта.

Уравнения связи являются математической формализацией системы ограничений.

Критерии оптимальности и система ограничений определяют концепцию построения будущей математической модели, т.е. *концептуальную модель*, а их форма-лизация, т.е. целевая функция и уравнения связи, представляет собой *математическую модель.*

Решением математической модели называется такой набор (совокупность) значений переменных, который удовлетворяет ее уравнениям связи.

Модели, имеющие много решений, называются *вариантными* в отличие от *безвариантных*, имеющих одно решение. Среди допустимых решений вариантной модели, как правило, находится одно решение, при котором целевая функция, в зависимости от смысла модели, имеет наибольшее или наименьшее значение. Такое решение, как и соответствующее значение целевой функции, называется *оптимальным.*

В зависимости от степени формализованности связей между факторами различают *аналитические и алгоритмические модели.*

Аналитической называется модель в виде уравнений или неравенств, не имеющих разветвлений вычислительного процесса при определении значений любых переменных состояния модели, целевой функции и уравнений связи.

Если в математических моделях единственная целевая функция и ограничения заданы аналитически, то подобные модели относятся к классу моделей математического программирования.

Характер функциональных зависимостей может быть линейным и нелинейным. Соответственно этому математические модели делятся на *линейные и нелинейные*.

В сложной системе зачастую гораздо легче построить ее модель в виде *алгоритма*, показывающего отношения между элементами системы в процессе ее функционирования, задаваемые обычно в виде логических условий - разветвлений хода процесса.

К алгоритмическим моделям относятся и *имитационные модели* – моделирующие алгоритмы, имитирующие поведение элементов изучаемого объекта и взаимодействие между ними в процессе функционирования.

При имитационном моделировании процесс функционирования подсистем, выраженный в виде правил и уравнений, связывающих переменные, имитируется на компьютере. Для имитации используются специальные среды имитационного моделирования, позволяющие строить модели, имитирующие работу моделируемой системы, с любой степенью достоверности без проведения подробных аналитических преобразований.

В зависимости от того, содержит ли математическая модель случайные факторы, она может быть отнесена к классу *стохастических или детерминированных.*

В *детерминированных* моделях ни целевая функция, ни уравнения связи не содержат случайных факторов. Следовательно, для данного множества входных значений модели на выходе может быть получен только один единственный результат. Главная особенность детерминированной модели заключается в том, что любой прогноз (живая масса животного, урожайность культуры, количество осадков) она формирует в виде числа, а не в виде распределения вероятностей. Это в ряде случаев приемлемо, однако когда приходится иметь дело с величинами, значение которых предсказать трудно (количество осадков), такой подход оказывается совершенно неудовлетворительным.

Стохастические математические модели имеют факторы с вероятностной природой и характеризуются какими-либо законами распределения. Значения выходных характеристик в таких моделях могут быть предсказаны только в вероятностном смысле. Это даёт возможность оценивать не только среднее значение прогнозируемого параметра, но и его дисперсию.

Следующим признаком, по которому можно различать математические модели, является связь с фактором времени.

Статическая модель — это математическая функция, в которую не включена переменная времени. Все особенности поведения системы, имеющие выраженную зависимость от времени, при этом игнорируют. А поскольку все в мире быстро ли, медленно ли, но меняется, то любая статическая модель условна. Статическими моделями пользуются, когда в рамках поставленной задачи инерционностью и "памятью" реальной системы можно пренебречь. Это возможно при выполнении ряда условий, в число которых входят следующие:

- система устойчива, т.е. переходные процессы после скачкообразного изменения входов затухают;
- входы меняются медленно;
- выходы изменяются редко.

Математическая модель системы называется *динамической*, если значение ее выхода y(t) может зависеть от времени t протекания процесса, его прошлого s:

$y(t) = F(\{u(s), s<t\})$. (1.1)

Динамические модели позволяют учесть наличие "памяти", инерционности системы. Математическим аппаратом описания динамических систем являются дифференциальные, разностные уравнения, конечные автоматы, случайные процессы. Динамические модели, имеющие практическую ценность, обычно строятся на основе дифференциальных уравнений, не поддающихся прямому интегрированию, и решение их нельзя получить в виде простых аналитических выражений. В этом случае прибегают к численным методам решений на компьютере с помощью специального программного обеспечения.

Система может быть *дискретной или непрерывной* по входам, выходам и по времени. Под дискретным понимается конечное или счетное множество- один, два, три и т.д. Под непрерывным понимается множество - отрезок, луч или прямая линия, т.е. связное числовое множество, количество элементов которого стремится к бесконечности. Как правило, дискретность входа влечет за собой дискретность выхода объекта. Кроме того, для статических систем исчезает разница между непрерывным и дискретным временём.

Смешанные модели могут содержать как физические, так и символические элементы.

Эмпирические модели описывают связи между параметрами элементов одного уровня. Разработчик эмпирической модели всегда остается в пределах одного един-ственного уровня организационной иерархии, где он и строит уравнения, связывающие между собой параметры, свойственные подсистеме только данного уровня.

Функциональная модель объясняет связи между элементами как одного уровня иерархии, так и между различными уровнями. Разработчик функциональной модели стремится описать поведение системы с фундаментальных позиций, затрагивающих основу работы объекта, учитывающих наиболее общие закономерности его работы.

Всегда можно построить такую эмпирическую модель, которая была бы согла-сована с массивом опытных данных лучше, чем функциональная, т.к. эмпирическая модель практически свободна от ограничений, в то время как возможности функци-ональной модели ограничиваются положенными в ее основу допущениями, идеями и гипотезами.

Понятие «черный ящик»

Решение проблемы есть то, что заполняет промежуток между существующей и желаемой системами. Важное значение для человека имеют наглядные, образные, визуальные модели. Для наглядного представления системы ее изображают в виде «черного ящика», выделенного из окружающей среды и имеющего входы и выходы, рис.1.1. Название «черный ящик» образно подчеркивает полное отсутствие сведений о внутреннем содержании ящика: задаются, фиксируются, перечисляются только входные и выходные связи системы со средой. Такой подход, несмотря на его простоту и на отсутствие сведений о внутренней структуре системы, часто оказывается полезным.

Сопоставляя входы и выходы за ряд моментов времени, находят такие вход-ные параметры X, при которых рассчитанные значения выходных параметров Y лучше всего аппроксимируют фактические значения выходов.

Сущность метода "черного ящика" состоит в том, что при исследовании объектов они рассматриваются как недоступный для наблюдения, изучения и описания "черный ящик", имеющий определенные входы и выходы. Вследствие сложности устройства "черного ящика", т.е. изучаемого объекта, возможно лишь наблюдать состояние входов в него и соответствующих им выходов, т.е. изучать поведение, не зная его внутреннего устройства.

Однако, как бы детально ни изучалось поведение "черного ящика", нельзя вывести обоснованного суждения о его внутреннем устройстве, ибо одним и тем же поведением могут обладать различные объекты, а одно и то же соотношение между входами и выходами может в пределах имеющихся статистических данных удовлетворительно описываться несколькими различными математическими выражениями. С увеличением числа факторов регрессионной модели обычно падает ее достоверность. Как показывает практика, удовлетворительные модели получаются при описании ситуации, в которой выходной фактор существенно связан не более чем с пятью-шестью входными факторами.

Во многих случаях достаточно содержательного словесного описания входов и выходов.

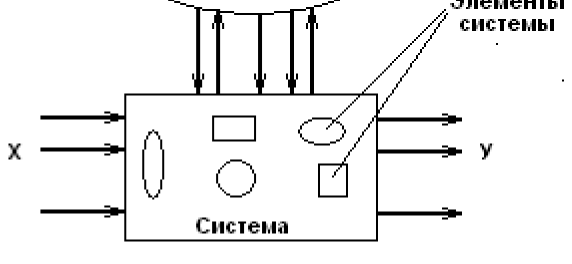

Рис.1.1. К понятию «черного ящика».

Опишем входы и выходы системы «грузовой автомобиль». В данном случае за выход можно принять Y_1 - грузоподъемность автомобиля, а также, например, Y_2 -затраты горючего на единицу перевезенной продукции. Сформулировав таким образом выходы системы, можно прийти к выводу, что они могут относиться ко всем автомобилям, а не только к грузовым. Чтобы различить автомобили вообще и грузовые автомобили можно указать, что грузоподъемность должна быть, например, не меньше 5 т. Еще можно добавить достаточную для определенной зоны эксплуатации проходимость автомобиля.

В качестве входов для грузового автомобиля обозначим те его элементы, которые предназначены для управления во время движения: X_1 - руль, X_2 , X_3 ,X_4 - педали сцепления, газа и тормоза, X_5 - рычаг переключения передач, X_6 – переключатели сигнализации и освещения, X_7 - ручка ручного тормоза. Необходимо учесть также буквальные входы: X_8 - двери кабины и X_9 -борта для загрузки продукции в кузов автомобиля.

Дальнейший анализ возможных входов грузового автомобиля показывает, что входное воздействие на него оказывает X_{10} - другие пассажиры, тип и количество груза, способы крепления последнего в кузове.

Окружающая среда также оказывает входные воздействия на грузовой автомобиль. В перечень входов следует поэтому записать X_{11} - окна и зеркала, с помощью которых водитель наблюдает за окружающей средой. Но тогда можно отметить, что свойства дороги, по которой движется грузовой автомобиль, также оказывают входное воздействие: по разному приходится действовать водителю при езде по асфальту и по грунтовой дороге, в поле, дождь, гололед, грязь. Добавляем к списку входов X_{12} - механическое воздействие грунта на колеса. Рассуждая далее, можно определить в качестве входов следующие воздействия внешней среды: X_{13} – аэродинамическое сопротивление воздуха, X_{14} -силы инерции, возникающие при торможении, причем последние зависят как от окружающей среды, так и от самого грузового автомобиля и груза.

Рассмотренный пример свидетельствует, что построение модели «черного ящика» не является тривиальной задачей, так как на вопрос, сколько и какие входы и выходы следует включать в модель ответ не прост. Главной причиной большого количества входов и выходов в модели «черного ящика» является то, что всякая реальная система взаимодействует с объектами окружающей среды неограниченным числом способов.

Детерминированные и стохастические, управляемые и неуправляемые системы

Различают *детерминированные и стохастические системы.*

В детерминированных системах цель исследования полностью определена, сами элементы и отношения между ними и внешней средой известны. Примером детерминированной системы может быть, например, уборка фруктов как производ-ственно-экономическая система. Элементами системы являются деревья и фрукты на них, подъездные пути, транспортные средства, тара, упаковочный материал, количество сборщиков и т.п. Существенными системными признаками являются качество фруктов, их количество, цена на рынке, себестоимость производства, погодные условия, квалификация сборщиков. К несущественным признакам можно отнести фамилии сборщиков, цвет материала из которого сделана тара и т.д.

Системы со стохастической структурой не имеют либо ясно выраженной цели исследования, либо выраженных существенных элементов и отношений между ними (признаков). Подобные системы выделяются на этапах разработки, проектирования сложных производств, технологических процессов и оборудования.

Системы разделяются на *управляемые и неуправляемые*. Управление можно определить как организацию различных действий, процессов для достижения намеченной цели.

Управляемые системы обеспечивают целенаправленное функционирование при изменяющихся внутренних или внешних условиях. Управление осуществляется человеком или специальным устройством (для технических систем). К управляемым системам относятся, например, движение автотранспорта, работа технологической линии или предприятия в целом.

Неуправляемые системы не обеспечивают целенаправленного функционирования. К неуправляемым относятся стихийные явления природы, работа оборудования после отказа, движение ветра.

При рассмотрении, анализе и синтезе систем существуют два подхода: *индук-тивный (классический) и системный.*

Индуктивный подход предполагает изучение системы путем перехода от част-ного к общему и дальнейший синтез системы за счет слияния ее компонентов.

Системный подход предполагает переход от общего к частному при выделении исследуемого объекта из окружающей среды при единой цели.

Структуру системы можно изучать исходя из состава отдельных подсистем *(структурный подход)* или путем анализа функционирования отдельных свойств, позволяющих достичь заданной цели (*функциональный подход*).

Структурный подход позволяет выделить состав элементов системы и связи между ними. Наиболее общее описание структуры- топологическое описание на базе теории сетей и графов.

Структура системы- совокупность связей между элементами системы, отра-жающая их взаимодействие. Структура системы может изучаться с разных позиций- извне (состава отдельных элементов системы и отношений между ними) и изнутри (при анализе свойств системы, приводящих к намеченной цели). Связи между элементами, определяющие систему, могут быть *устойчивые, неустойчивые, статистически устойчивые.*

Устойчивые связи существуют постоянно в течение рассматриваемого промежутка времени или возникают регулярно.

Неустойчивые связи возникают редко, от случая к случаю.

Статистически устойчивые связи с течением времени стремятся к определенным значениям.

Связи могут определяться экономическими отношениями, физическими или социальными законами, отношениями родства, подчиненности и т.д. Они могут быть функциональными, информационными, причинными, логическими и т.д.

Функциональный подход рассматривает отдельные функции, алгоритмы, приводящие к достижению цели.

Характеристики системы могут быть количественные и качественные. Коли-чественно система характеризуется числами, выражающими отношение между заданной величиной (эталоном) и исследуемой величиной. Качественные характеристики выражаются описанием типа хороший, плохой, больше, меньше или с помощью различных шкал, например методами экспертных оценок.

Функционирование системы – проявление функций системы во времени, переход от одного состояния к другому (движение в пространстве состояний). При использовании системы важно качество ее функционирования. Один и тот же закон функционирования может быть реализован с помощью различных алгоритмов. Процесс функционирования можно рассматривать как последовательную смену состояний. Совокупность всех возможных значений состояний системы называют *пространством состояний системы*.

Внешняя среда- множество существующих вне системы элементов любой природы, оказывающих влияние на систему или находящихся под ее воздействием. Внешняя среда определяет условия функционирования системы посредством воздействия внешних факторов, являющихся движущей силой процесса и определяющих характеристики этого процесса. В зависимости от цели внешние факторы могут быть *стимулирующими, регулирующими, ограничивающими, возмущающими и разрушающими.*

Стимулирующие факторы стимулируют развитие процесса, например, подача углекислого газа (внешний фактор) в теплицу (систему) приводит к ускорению созревания растений.

Регулирующие, управляющие факторы приводят к изменению целей, режимов и алгоритмов функционирования системы.

Ограничивающими факторами являются различные нормативно-правовые акты, законы, нормы поведения, технические условия, регламенты и стандарты функционирования технологических процессов и технических систем.

Возмущающие факторы – это отрицательные факторы, негативно влияющие на работу системы, достижение ее цели. Эти факторы можно спрогнозировать и компенсировать.

Разрушающие факторы – это отрицательные факторы, которые сложно спрог-нозировать, а значит, и предотвратить. Они приводят к частичному или полному уничтожению системы.

Отношения между элементами системы и системой определяются их иерархией.

Иерархия **–** это упорядоченная по старшинству совокупность элементов и подсистем, входящих в данную систему, например, завод – цех – участок – линия- аппарат. Смысл термина «иерархия» (или более полно — «организационная иерархия») удобнее всего пояснить на типичном для сельского хозяйства примере:

Уровень	Описание уровня
…	…
i+1	Совокупность организмов (стадо, сельскохозяйственная культура)
i	Организм (животное, растение)
i-1	Органы
i-2	Ткани
i-3	Клетки
i-4	Органеллы
i-4	Макромолекулы.

В *иерархической системе* объект расчленяется на уровни согласно принципу подчинения низших уровней высшим. Степень декомпозиции будет определяться как спецификой решаемой задачи, так и имеющейся информацией об объекте.

Иерархическая организация, конечно, не является исключительной особенностью сельского хозяйства - такой подход к структурированию приложим к самым разнообразным системам - коммерческим предприятиям, комплектам компьютерных программ, социальному устройству, электронному оборудованию и т. п.

Объекты, принадлежащие каждому структурному уровню, могут рассматриваться и как системы, образованные из подсистем (объекты более низких уровней), и как подсистемы, входящие в состав некоторой системы (объект более высокого уровня).

Для иерархических систем характерны три важных свойства:

1. Каждый уровень иерархии имеет свой собственный язык, свою систему кон-цепций или принципов. К примеру, понятия «производство продуктов животноводства», «урожайность сельскохозяйственной культуры» практически лишены смысла на уровне клетки или органеллы.

2. На каждом уровне иерархии происходит обобщение свойств объектов более низких уровней. Закономерности, обнаруженные и описанные для последних, мо-гут быть включены в объясняющую (функциональную) схему, обретая при этом связь с объектом высшего уровня. Таким образом, описание на уровне i способствует объяснению (пониманию) явлений, имеющих место на уровне i- 1.

3. Взаимосвязи между уровнями не симметричны. Для нормального функци-онирования объектов высшего уровня необходимо, чтобы успешно «работали» объекты более низкого уровня, но не наоборот.

Однако главная задача при этом — выбрать компоненты системы таким образом, чтобы каждому из них была присуща относительная автономия, то есть чтобы внутренние связи в пределах каждой подсистемы были сильными, а взаимодействия между подсистемами — слабыми. Обычно решающим оказывается то обстоятельство, что подсистемы, подлежащие рассмотрению, должны быть хорошо изучены и описаны.

2.1.3 Результаты и выводы:

Изучить основные понятия и определения

2.1 Практическое занятие №2 (2 часа).

Тема: «Физические, аналоговые и математические модели объектов и процессов»

2.1.1 Задание для работы:

1. Статические и динамические модели

2.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

Следующим признаком, по которому можно различать математические модели, является связь с фактором времени.

Статическая модель — это математическая функция, в которую не включена переменная времени. Все особенности поведения системы, имеющие выраженную зависимость от времени, при этом игнорируют. А поскольку все в мире быстро ли, медленно ли, но меняется, то любая статическая модель условна. Статическими моделями пользуются, когда в рамках поставленной задачи инерционностью и "памятью" реальной системы можно пренебречь. Это возможно при выполнении ряда условий, в число которых входят следующие:

- система устойчива, т.е. переходные процессы после скачкообразного изменения входов затухают;
- входы меняются медленно;
- выходы изменяются редко.

Математическая модель системы называется *динамической*, если значение ее выхода y(t) может зависеть от времени t протекания процесса, его прошлого s:

$y(t) = F(\{u(s), s<t\})$. (1.1)

Динамические модели позволяют учесть наличие "памяти", инерционности системы. Математическим аппаратом описания динамических систем являются дифференциальные, разностные уравнения, конечные автоматы, случайные процессы. Динамические модели, имеющие практическую ценность, обычно строятся на основе дифференциальных уравнений, не поддающихся прямому интегрированию, и решение их нельзя получить в виде простых аналитических выражений. В этом случае прибегают к численным методам решений на компьютере с помощью специального программного обеспечения.

Система может быть *дискретной или непрерывной* по входам, выходам и по времени. Под дискретным понимается конечное или счетное множество- один, два, три и т.д. Под непрерывным понимается множество - отрезок, луч или прямая линия, т.е. связное числовое множество, количество элементов которого стремится к бесконечности. Как правило, дискретность входа влечет за собой дискретность выхода объекта. Кроме того, для статических систем исчезает разница между непрерывным и дискретным временём.

Смешанные модели могут содержать как физические, так и символические элементы.

Эмпирические модели описывают связи между параметрами элементов одного уровня. Разработчик эмпирической модели всегда остается в пределах одного един-ственного уровня организационной иерархии, где он и строит уравнения, связывающие между собой параметры, свойственные подсистеме только данного уровня.

Функциональная модель объясняет связи между элементами как одного уровня иерархии, так и между различными уровнями. Разработчик функциональной модели стремится описать поведение системы с фундаментальных позиций, затрагивающих основу работы объекта, учитывающих наиболее общие закономерности его работы.

Всегда можно построить такую эмпирическую модель, которая была бы согла-сована с массивом опытных данных лучше, чем функциональная, т.к. эмпирическая модель практически свободна от ограничений, в то время как возможности функци-ональной модели ограничиваются положенными в ее основу допущениями, идеями и гипотезами.

2.1.3 Результаты и выводы:

Изучить физические, аналоговые и математические модели объектов и процессов

2.1 Практическое занятие №3-4 (4 часа).

Тема: «Математические модели надежности систем обслуживания сельского хозяйства»

2.1.1 Задание для работы:

1. Аппроксимация исходных данных: интерполяция, регрессия, сглаживание с фильтрацией
2. Функции роста

2.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

Аппроксимация исходных данных- способ представления данных в виде той или иной зависимости. Для более эффективного первоначального анализа экспериментальной информации сочетание двух величин представляют на графике в виде точек x_i y_i (имеет место также и многомерная аппроксимация). Возможны следующие виды аппроксимации:

- *интерполяция*, когда аппроксимирующая функция должна пройти через все экспериментальные точки;
- *регрессия*, когда аппроксимирующая функция усредняет экспериментальные данные, проходит вблизи них;
- *сглаживание с фильтрацией*, когда функция не учитывает выбросы, шумы, случайные данные и артефакты.

При интерполяции через экспериментальные точки проводятся кривые разной степени гладкости, разной степени приближения к данным. При линейной интерполяции аппроксимирующая функция соединяет соседние экспериментальные точки отрезками прямых линий. Интерполяцию осуществляют в функции одной и более переменных.

Кубическая сплайн-интерполяция соединяет несколько соседних экспериментальных точек гладкой кривой, первая и вторая производные которой в каждой точке непрерывны.

Экстраполяция – это интерполяция за пределами заданного интервала экспериментальных точек, предсказание значений по имеющимся данным.

Представление данных в виде временных рядов. Временные ряды, ряды динамики, характеризуют изменение того или иного показателя во времени, временной функции. Временной ряд могут составлять как отдельные числа, так и вектора и матрицы.

В каждом ряду имеется два основных элемента: показатель времени t и соответствующий ему уровень развития изучаемого явления Y=f(t). Основным показателем для получения правильных выводов при анализе рядов динамики является сопоставимость его элементов.

Ряды формируются при обработке результатов наблюдений (аргумент x в таблице 2.1. – время t). Значения одноименных показателей повторяющихся во времени располагаются в хронологической последовательности. Каждый ряд охватывает отдельные периоды времени, в которые могут происходить изменения, приводящие к несопоставимости с данными других периодов. Среди причин, приводящих к несопоставимости, можно назвать следующие:

- ошибки в показаниях интервалов времени;
- неоднородность изучаемого явления во времени, изменения в методиках учета;
- применение различных единиц измерения и т.д.

При изучении временных рядов используют понятие *тренда.*

Тренд- это тенденция изменения выходной величины во времени под действием входных факторов, ее усредненное состояние за определенный промежуток времени. Изучение тренда - важное направление в исследовании надежности технических и биологических , социально-экономических, демографических и экологических процессов, осуществляемое путем применения специальных методов анализа временных рядов. Постоянно действующие факторы имеют определяющее значение и формируют тренд. Периодически действующие факторы вызывают повторяющиеся колебания уровней рядов. Действие разовых факторов вызывает случайные изменения уровней рядов динамики.

Аппроксимация данных функциональными зависимостями

Две случайные величины X и Y связаны функциональной зависимостью, если существует такая числовая функция f , что Y=f (X). Если X и Y независимы, то условные законы распределения случайной величины Y по отношению X не меняется в зависимости от X.

При статистической зависимости случайных величин изменение значения одной величины влечет за собой изменение распределения другой. Показателем степени статистической зависимости является корреляционное отношение

$C_{x/y} = [D(Y/X) / D(Y)]^{0.5}$, (2.16)

где D(Y/X) - дисперсия выходной величины Y при изменении регулируемой переменной X и постоянных нерегулируемых переменных, D(Y)- полная дисперсия выходной величины Y.

Корреляционное отношение находится в пределах $0 <= C_{x/y} <= 1$. Для функциональной зависимости необходимо и достаточно, что бы $C_{x/y}=1$. Чем ближе корреляционное отношение к единице, тем ближе статистическая зависимость к функциональной зависимости и обратно.

Предположим, что в некоторое наблюдение

$y = F(a_1, a_2, \ldots, a_n, x)$ (2.17.)

входят неизвестные параметры $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Проделан ряд экспериментов и получено n опытных данных (x_i , y_i) с целью установления значений параметров. Возникает вопрос, как выбрать параметры закона так, чтобы результаты эксперимента соответствовали ему наилучшим образом. Как правило, решение вопроса о подборе параметров основано на методе наименьших квадратов, который в данном случае состоит в нахождении минимума выражения

$$0.5*\sum [\ F(a_1, a_2,\ldots,a_n, x_i , y_i\ ]^{\overset{n}{2}}_{i=1} \quad (2.18)$$

по всем возможным значениям $a_1, a_2,\ldots,a_n$. Дополнительно могут быть поставлены ограничения на параметры, например на их величину или сочетания.

Более простым методом является метод выбранных точек. На координатную плоскость x y наносят экспериментальные данные и проводят через них функцию аппроксимации. Далее определяют вид этой функции, например, в соответствии с таблицей элементарных эмпирических зависимостей, табл.2.2. После того как выбран вид функции аппроксимации, осуществляется переход к определению наилучших ее параметров. В данном методе по числу параметров выбранной функции выбирают n точек экспериментальных данных по возможности равномерно расположенные вокруг нее. Параметры $a_1, a_2,\ldots,a_n$ определяют из системы алгебраических уравнений (2.1):

$$\begin{aligned} &y_1=F(a_1, a_2,\ldots,a_n, x_1)\\ &y_2=F(a_1, a_2,\ldots,a_n, x_2)\\ &\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.19)\\ &y_n=F(a_1, a_2,\ldots,a_n, x_n). \end{aligned}$$

Рассеяние результатов наблюдений вблизи уравнения аппроксимации можно оценить с помощью остаточной дисперсии (дисперсии адекватности):

$$S^2_{\text{ад}} = S^2_{\text{ост}} = 1/(n - l) * \sum (y_i - \sum a_j * x^j_i)^2, \quad \overset{n}{\underset{i=1}{(2.20)}}\ \ \overset{n}{\underset{j=0}{}}$$

где l- число параметров уравнения.

Степень адекватности полученной модели оценивается по критерию Фишера

$F = S^2_y/S^2_{ост}$,   (2.21)

где $S^2_y = 1/(n-1) *\sum_{i=1}^{n}(y_i- y_{ср})^2$ – дисперсия y относительно среднего значения $y_{ср}$.

Критерий F показывает, во сколько раз рассеяние y_i относительно среднего значения больше относительного рассеяния вокруг полученного уравнения аппроксимации. Чем больше значение критерия, тем полученное уравнение лучше описывает экспериментальные данные- степень адекватности выше.

Оценка достоверности полученной модели осуществляется сравнением расчитанной величины критерия F с его табличным значением $F_{кр}$, определенным для заданного уровня значимости α и степеней свободы ν_1 = n-l и ν_2 = n-1. Уровень значимости α = 0.88…0.88 определяет вероятность, с которой можно считать достоверной принятую аппроксимирующую зависимость при имеющемся числе опытов n и параметров l.

При $F < F_{кр}$ результат аппроксимации считается значимым и найденные параметры принимаются. В противном случае результат не принимается, считается, что данное уравнение не адекватно описывает экспериментальные данные. В этом случае необходимо увеличивать число экспериментов, снижать уровень достоверности (если это возможно) или поменять вид аппроксимирующего уравнения.

Выбор аппроксимирующего уравнения должен производиться с учетом физических законов, определяющих течение процесса, т.е. всегда следует стремиться к функциональной модели. Если из физического смысла переменные связаны линейной зависимостью, то не следует производить аппроксимацию полиномом второй степени- это приведет лишь к искажению модели, снижению ее адекватности. Следует избегать использования полиномов, зависимостей большого порядка (более 4), так как они описывают более высокие колебания, связанные с ошибками, артефактами или не учитываемыми шумами (неуправляемыми переменными).

Экспоненциальные полиномы. Уравнения этого класса записываются в виде

$W = \exp(a_0 t^0 +a_1 t^1 +a_2 t^2 +a_3 t^3+…)$, (2.22)

где a_0,a_1,... — постоянные коэффициенты.

После логарифмирования выражение (2.22) принимает вид

$\ln W = a_0 t^0 +a_1 t^1 +a_2 t^2 +a_3 t^3+…$. (2.23)

После вычисления производной от последней функции зависимость (2.22) может быть представлена в виде

$(1/W)*dW/dt = a_1 +2a_2 t^1 + 3a_3 t^2+…$. (2.24)

Экспериментальные данные, аппроксимируемые экспоненциальным полиномом, можно обработать на компьютере статистическим методами. В результате будут рассчитаны коэффициенты a_i полиноминального уравнения. В практике обычно ограничиваются 2-ой или 3-ей степенями полинома.

Аллометрические зависимости. Предположим, что P и Q — некоторые свойства организма (наблюдаемые количественные характеристики): например, P и Q могут быть массами различных конечностей животного или P может задавать сухую массу растения, а Q — площадь поверхности его листьев. Поскольку организм растет и развивается, то и P, и Q будут изменяться с течением времени, то есть

P = P(t) и Q = Q(t). (2.25)

Считается, что P и Q аллометрически зависимы, если они удовлетворяют аллометрическому уравнению

$P=a* Q^b$, (2.26)

где a и b — постоянные коэффициенты.

P и Q изменяются во времени таким образом, что соотношение (2.26) сохраняет справедливость на всем интервале наблюдения.

Функции роста

Другим видом функций, широко используемых в демографических, медицинских, агрономических и биологических исследованиях, связанных с ростом, динамикой развития растений, животных, человека и их популяций, являются «*функции роста*», обозначающие некоторую аналитическую функцию зависимости величины W от времени t : W = f(t). Назначение функций роста — связать временные ряды данных, относящихся к росту организма или его части, в рамках единого математического выражения. Предпочтительно построить такую функцию, которая отличалась бы определенным биологическим, технологическим или физическим правдоподобием и интерпретируемостью параметров, то есть отображала бы лежащие в основе изучаемого процесса физиологические или биохимические механизмы и ограничения, т.е. была бы функциональной.

Обычно динамику процесса роста описывают дифференциальным уравнением

$dW/dt = g(t)$, где $g(t) = df/dt$ (2.27)

или, если исключить промежуточные переменные, в виде *темпа роста* - приращения, например, массы или объема в единицу времени

$dW/dt = h(W)$,   (2.27a)

где h- некоторая функция.

Это уравнение есть зависимость темпа роста dW/dt от состояния объекта (растения, животного и т.д.), где в качестве переменной состояния выступает переменная W.

В некоторых случаях используют форму, где в качестве одного из параметров является время

$dW/dt = u(W,t),$ (2.28)

где u есть некоторая функция от W и t.

Для более полного описания динамики процесса используют относительный темп роста

$(1/W)*dW/dt,$ (2.29)

показывающий темп роста относительно изменяющейся величины W в данный момент времени.

Для аппроксимации временных рядов роста с целью более наглядного представления и математической обработки применяется полу - логарифмическая шкала. В этом случае кривая сложной формы может преобразовать свой вид и утратить свою первоначальную специфику. Рассмотрим принципы создания математических моделей функций роста на нескольких примерах.

Пусть существует изолированная система с двумя компонентами - нет ни входов, ни выходов, рис.2.7.

Первый компонент -субстрат S является источником для второго компонента- сухого вещества W (сушка материала, рост растения) . Предполагается, что в процессе преобразование первого компонента S в материал второго компонента W потерь нет.

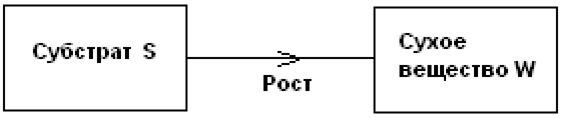

Рис.2.7. Замкнутая двухкомпонентная модель роста.

Различные предположения относительно зависимости скорости процесса (темпа роста) от W и S приводят к различным математическим моделям. Эти уравнения выводятся на основе анализа более простых моделей — обычно путем интег-рирования дифференциального уравнения. Такой подход облегчает интерпретацию параметров зависимостей типа «сухая масса — время».

Если допустить, что на рассматриваемом отрезке времени система потерь не имеет- не получает из внешней среды и не теряет никакого материала, то справедливы следующие дифференциальные уравнения

$dW/dt = - dS/dt;$

$$dW/dt + dS/dt = d(W+S) = 0, \qquad (2.30)$$

так что

$W + S = const = W_0 + S_0 = W_f + S_f = C,$ (2.31)

где W_0 и S_0 - исходные значения сухого вещества W и субстрата S в момент времени t = 0;

W_f и S_f – значения к которым приближаются эти параметры при $t \longrightarrow \infty$, в допущении, что система со временем приходит в устойчивое состояние;

C- постоянная величина – это состояние которое приобретает система через определенный промежуток времени- количество субстрата S становится равным нулю и весь он преобразуется в сухое вещество W.

Первое из уравнений (2.60) показывает, что темп роста сухого вещества dW/dt равен отрицательному темпу роста субстрата - dS/dt, а второе - общий темп роста системы равty нулю. В итоге после достаточного промежутка времени весь субстрат перейдет в сухое вещество, а их суммарное количество не изменится и останется первоначальным.

Темп роста можно представить в виде некоторой функции ν, зависящей от текущих значений субстрата и сухого вещества, такой, что

$dW/dt = \nu (W,S).$ (2.32)

Из уравнения (2.31) следует, что S = C- W, тогда уравнение (2.32) можно записать в виде

$dW/dt = \nu (W, C - W) = h(W),$ (2.33)

где h – функция одной переменной W.

Таким образом математической моделью системы, изображенной на рис.2.7. является модель с одной переменной. Остается решить какую функцию ν использовать в уравнении (2.63). Выводы по виду функции ν будут зависеть от характера процесса, происходящего в системе.

Простой экспоненциальный рост. Для системы на рисунке 2.7. примем некоторые допущения (ограничения, условия):

- темп роста пропорционально количеству сухой массы W;
- механизм роста «работает» с максимальным темпом на протяжении всего времени, пока существует питательная среда;
- процесс роста необратим и прекращается, как только истощается питательная среда.

Уравнение (2.33) приобретает вид

$dW/dt = \mu*W$, (2.34)

где μ- параметр относительного темпа роста.

Параметр μ зависит, во-первых, от вида сухой массы W , соответствующей в заданной пропорции ресурсу питательной среды, и, во-вторых, от производительности или скорости с которой осуществляется процесс роста. Интегрирование уравнения (2.64) дает изменение массы во времени t:

$W = W_0 *e^{\mu*t}$, при $0 < = t <= t_f$; (2.35)

$W = W_f$, при $t > t_f$.

Когда $W = W_f$, а $S = 0$, то из уравнения (2.31) следует

$W_f = W_0 + S_0$ (2.36)

и рост внезапно прекращается, когда исчезнет ресурс питательной среды S

$t_f = \{\ln[W_0 + S_0 /W_0]\}/ \mu$. (2.37)

Простой экспоненциальный рост $W = W_0*e^{\mu*t}$, без ограничений ресурсом питательной среды S, приведен на рис.2.8.- зависимость WP=(t).

Уравнение роста Ричардса. Рассмотренная выше модель экспоненциального роста является наиболее простой в смысле математического описания процесса. В действительности происходят процессы, описываемые более сложными функция-ми. Одной из таких функций является функция Ричардса, рис.2.8.

$dW/dt = k*W*(W_f^n - W^n)/ n*W_f^n$ (2.38)

или после интегрирования

$W = [W_0*W_f] / [W_0^n + (W_f^n - W_0^n)* e^{-kt}]^{1/n}$ (2.39)

где k, n, W_f - постоянные величины; k, W_f - положительны, а $n >= -1$.

При $n < -1$ уравнение теряет физический смысл, демонстрируя при $W \rightarrow \infty$

бесконечный рост. При определенных значениях дополнительного параметра n оно обращается в одно из наиболее известных уравнений роста, рис.2.8: WM(t)- моно-молекулярное ($n = -1$), WL(t)-логистическое ($n = 1$) и WG(t)- Гомпертца ($n = 0$).

Мономолекулярное уравнение. Это уравнение описывает, например, ход простой необратимой химической реакции первого порядка, рис.2.8..

Принятые допущения:

- количество энергии роста неизменно и не зависит от количества сухой массы W;
- механизм роста работает» со скоростью, пропорциональной ресурсу питательной среды S;
- рост необратим.

В данном случае вместо уравнений (2.38, 2.39) имеем

$dW/dt = k *(W_f - W)$, (2.40)

или после интегрирования

$W = W_f - W_0 *e^{-k*t}$. (2.41)

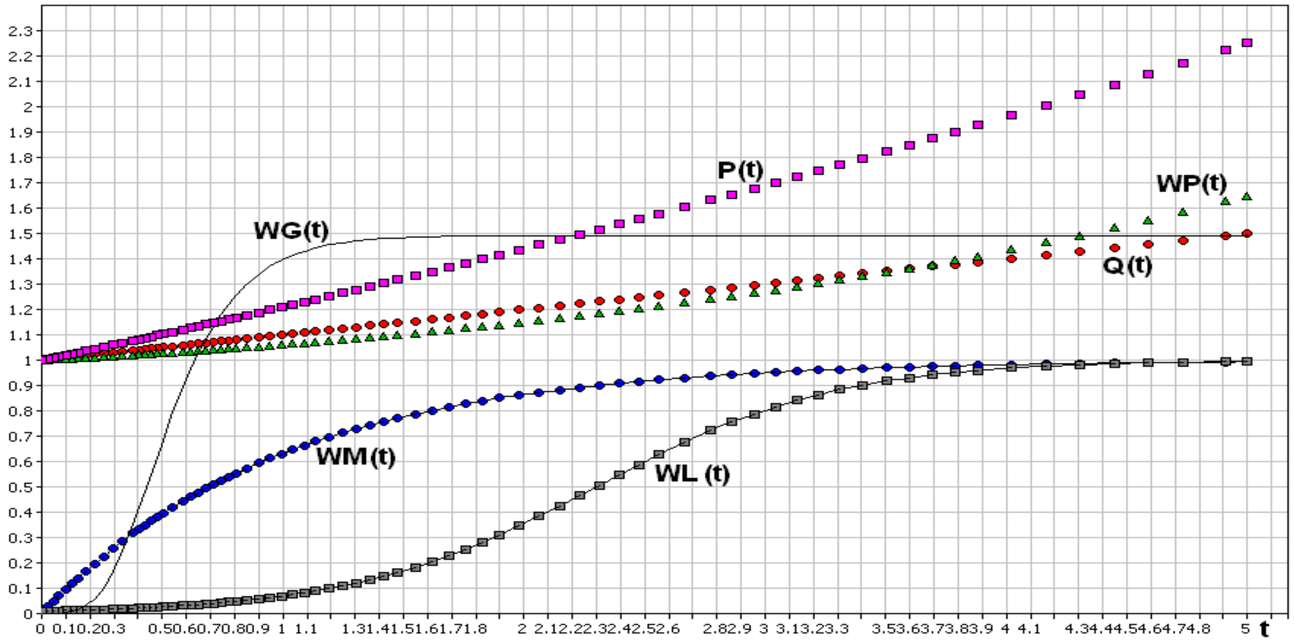

Рис.2.8. Функции роста:

1- WP- экспоненциальная; 2. WM- мономолекулярное (n = -1); 3. WL- логистическое (n = 1); 4. G- Гомпертца (n = 0); 5. Q- аллометрическая 1; 6. P- аллометрическая 2.

Темп роста непрерывно падает, кривая не имеет точки перегиба.

Уравнение логистического роста. При выводе уравнения логистического роста делается двоякое допущение:

- энергия роста пропорциональна сухой массе W;
- механизм роста «работает» со скоростью, пропорциональной ресурсу питательной среды S;
- процесс роста необратим.

Уравнение логистического роста имеет вид, рис.2.8.

$dW/dt = k*W*S$, (2.42)

или после интегрирования

$W = [W_0W_f]/[W_0 + (W_f - W_0)* e^{-k*t}]$. (2.43)

Анализ любого из двух последних выражений показывает, что при $W_0 << W_f$ для малых значений t (подстановка $W_0 = 0$ в знаменатель) справедливо приближенное равенство

$W= W_0 * e^{-k*t}$. (2.44)

Функция роста Гомпертца. Уравнение Гомпертца выводят, исходя из следующих допущений, рис.2.8.:

- ресурс питательной среды не ограничен, так что с этой стороны энергия роста влияния не испытывает;

- энергия роста пропорциональна сухой массе W, причем коэффициент про-порциональности есть величина постоянная: эффективность энергии роста падает со времёнём, причем спад этот представляет собой динамику первого порядка и соответственно носит экспоненциальный характер. Причиной спада может служить деградация (в частности, расщепление ферментов), старение либо развитие и усложнение организма. К уравнению Гомпертца приводят различные комбинации допущений. Формализация перечисленных выше условий приводит к выражению

$dW/dt= \mu * W$, (2.45)

где параметр μ , то есть удельный темп роста, уже не является постоянной величиной, а изменяется по закону

$d\mu =-D *\mu$, (2.46)

где D — дополнительный параметр, характеризующий уменьшение μ .

Путем преобразований можно получить уравнение Гомпертца в его классической форме

$dW/dt = \mu_0 * W [1 – D/ \mu_0]* \ln[W/W_0]$, (2.47)

где индекс 0 относится к величинам в момент времени t = 0.

2.1.3 Результаты и выводы:

Изучить математические модели надежности систем обслуживания сельского хозяйства

2.1 Практическое занятие №5,6,7 (6 часов).

Тема: «Принципы построения математических моделей»

2.1.1 Задание для работы:

1. Принципы выбора структуры модели
2. Процедура построения математической модели и ее исследования
3. Обследование объекта, построение сценария его функционирования и концептуальной модели

2.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

Первейшим из принципов выбора структуры модели является принцип простоты: из различных вариантов структуры модели сначала следует попробовать *простейший*. Например, если исследуется сложная динамическая (инерционная) система, то сначала нужно проверить, нельзя ли ограничиться статической моделью, не учитывающей динамику.

При уточнении структуры статической модели руководствуются тем же принципом простоты . Например, если зависимость выхода от входа монотонна, то сна-чала пробуют *линейную*. Если зависимость выхода от входа носит экстремальный характер, то берут *квадратичную* функцию, а если есть основания думать, что зависимость выхода от входа имеет *перегиб*, то начинают с *кубической* функции.

Если построение модели выполняется с целью *оптимизации*, то вдали от экстремума можно ограничиться *линейной моделью*, а при приближении к *экстремуму* переходить на квадратичную. В любом случае предпочтительнее модели, в которые постоянные коэффициенты входят линейно.

Если точность моделей с постоянными коэффициентами недостаточна, то в модель вводят зависимость коэффициентов от времени (дрейф). Дрейф может быть монотонным или периодическим, причем в большинстве случаев достаточно ограничиться простейшими моделями дрейфа - линейными или гармоническими.

Если возникает дилемма: выбрать модель детерминированную или стохастическую, то предпочтение следует отдать *детерминированной.* И только если не удается обойтись без случайности, то вводят ее, причем сначала в наиболее простой форме.

В соответствии с принципом простоты при выборе модели следует начинать с наименьших значений порядка, учитывая, что многие классы динамических процессов описываются моделями первого-второго порядков.

Чем больше модель (размер ее определяется числом описываемых подсистем), тем пристрастнее к ней следует относиться. Модель, которая была бы просто большой и сложной, построить легче. Однако при весьма высокой стоимости ценность ее может оказаться сомнительной как для ученых (если не возникает новых углов зрения на проблему), так и для практиков (если не удается получить точные прогнозы, используемые для принятия решений).

Перечисленные правила следует принимать не как законы, а как рекомендации. В мире моделей царствует плюрализм, и для достижения успеха нужно испытать несколько вариантов моделей. При этом самая полная модель не обязательно самая точная, а самая точная не обязательно самая хорошая.

Процедура построения математической модели и ее исследования

Процедуру построения модели можно представить состоящей из ряда этапов, хотя в конкретных случаях некоторые этапы могут опускаться, а ряд работ по построению модели вестись параллельно.

Этап 1. Разработка *концептуальной модели*, являющейся содержательной основой для построения математической модели объекта.

Под *концептуальной моделью объекта* понимается совокупность качественных зависимостей критериев оптимальности и различного рода ограничений от факторов, существенных для отражения функционирования объекта. Концептуальная модель отражает следующие основные моменты:

- условия функционирования объекта, определяемые характером взаимодействий между объектом и его окружением, между элементами объекта;
- цели исследования объекта и направления улучшения его функционирования;
- возможности управления объектом, определяющие состав управляемых переменных объекта.

Этап 2. Построение *математической модели*. Формируется на основе концептуальной модели. Главная проблема этого этапа - определение количественных, математических соотношений, формализующих качественные зависимости концептуальной модели.

Этап 3. Трансляция модели – это ее запись на языке программирования, как правило, на одном из языков высокого уровня, в наибольшей степени приспособленном для программирования моделирующих алгоритмов: Paskal, Java, Fortran и др.

Этап 4. Численное представление математической модели. Для реализации математической модели на компьютере она должна быть представлена численно, т.е. заданы числовые значения констант, диапазоны изменения неопределенных факторов и управляемых переменных, законы распределения случайных величин.

При этом зачастую возникают проблемы эффективного представления чисел, например сжатия табличной информации методами интерполяции, аппроксимации и экстраполяции, обработки статистических данных для получения формы и характеристик законов распределения случайных величин.

Этап 5. Оценка адекватности модели по отношению к концептуальной модели.

Этап 6. Оценка точности полученного на модели результата.

Этап 7. Исследование математической модели. Начинается с ее анализа и выбора соответствующего метода ее решения. Важным этапом исследования модели является *экспериментирование* - собственно процесс исследования модели по заданному плану. Ввод данных осуществляется или по определенному сценарию, осуществляемому планом эксперимента, или вручную после каждого частного эксперимента.

Этап 8. Интерпретация осуществляется после получения очередного прогона или полного окончания эксперимента. На этом этапе возвращаются к оценке адекватности модели и, в случае ее удовлетворительного решения, делают общие выводы по всему эксперименту. Интерпретация производится на языке, понятном специалисту, заказчику, в терминах, учитывающих специфику исследуемой проблемы.

Этап 9. Реализация предполагает практическое использование модели и (или) результатов моделирования для будущего исследования, управления объектом или его проектирования.

Документирование осуществляется в процессе всей разработки модели и ее использования. Для конечного пользователя необходимо предусмотреть удобные шаблоны для ввода и вывода информации в виде таблиц, графиков и рекомендаций по тем или иным ситуациям протекания процесса моделирования и интерпретации результатов моделирования. Для накопления данных и результатов моделирования следует предусмотреть архив по каждому эксперименту и его вариантам.

Обследование объекта, построение сценария его функционирования и концептуальной модели

При формулировке концептуальной модели объекта следует:

- составить упрощенный и в то же время адекватно поставленной цели описания исследуемой ситуации - сценария функционирования объекта;
- сформулировать и уточнить цели, стоящие перед объектом при его функционировании;
- формализовать цели в критерии оптимальности;
- формализовать внешние и внутренние ограничения;
- выбрать факторы, описывающие объект и его окружение, которые учтены в исследовании и соответственно включены в математическую модель;
- классифицировать факторы и выделить из них в первую очередь управляемые переменные.

Заключительным шагом построения концептуальной модели является оценка ее адекватности исследуемой ситуации.

Обычно исследование объекта начинается с описания проблемной ситуации в весьма нечетких формулировках. Он описывается некоторыми характеристиками, ситуациями, поведением в виде перечня "симптомов", на основании которых исследователь должен поставить "диагноз" - определить задачу исследования.

Цель исследования определяет цель построения модели. Модели могут строиться для следующих целей:

1. *Выявление функциональных соотношений* — определение количественных зависимостей между входными факторами модели, выходными характеристиками исследуемого объекта. Подобного рода модели по своему характеру являются описательными. Задача выявления функциональных соотношений присутствует при построении математических моделей любых типов.

2. *Анализ чувствительности* - установление из большого числа факторов тех, которые в большей степени влияют на интересующие исследователя выходные характеристики. При анализе чувствительности должна обязательно предусматриваться возможность варьирования интересующих исследователя факторов:

- характеристиками внешней среды;
- начальных условий;
- переменных управления.

3. *Прогноз* — оценка поведения объекта при некотором предполагаемом сочетании внешних условий. Обычно задачи прогноза являются динамическими относительно входов, и в качестве независимой (неуправляемой) переменной в них выступает время. Модели прогноза являются описательными.

4. *Оценка* - определение, насколько хорошо исследуемый объект будет соответствовать некоторым критериям. Модели оценки включают расчеты интересующих исследователя интегральных характеристик - критериев, формализующих цели исследования.

4. Оптимизация - точное определение такого сочетания переменных управления, при котором обеспечивается экстремальное (максимальное или минимальное, в зависимости от смысла критерия оптимальности) значение целевой функции. Для этого используют специальный блок оптимизации, позволяющий целенаправленно выбирать каждый из множества альтернативных вариантов.

Любое исследование должно начинаться с *плана*, показывающего как оно будет проводиться, какие методы и в какой последовательности будут выполняться работы. При этом обязательно выполнение двух этапов: выявления фактического положения и анализа.

Первый этап- выявление *фактического положения* тесно связан со сбором информации по определению природы и целевого назначения объекта.

Второй этап- *анализ* - связан с осмыслением совокупности факторов с целью выявления структуры объекта и взаимодействия его элементов в процессе функционирования. Именно в результате анализа строится сценарий функционирования объекта и определяется концепция будущей математической модели.

Исходная информация, вручаемая исследователю при получении задания, как правило, недостаточна для точной формулировки задачи и построения модели.

Источниками дополнительного получения информации являются:

- документы, в том числе управленческая, научная и техническая документация, должностные инструкции и положения, приказы и т.д.;

- управленческо - административный персонал, путем бесед и анкетирования с которым устанавливаются и уточняются необходимые функции и организационные связи в системе;

- производственный персонал в цехах и подразделениях;

- непосредственные измерения и наблюдения за процессом функционирования и фиксация количественных характеристик при проведении натурного эксперимента на реально существующей аппаратуре и оборудовании.

В случае вновь проектируемых объектов для представления процесса их функционирования используют накопленный опыт и результаты наблюдения над процессами функционирования аналогичных систем с учетом особенностей объекта.

Результаты обследования объекта и окружения оформляются в виде описания процесса функционирования объекта - *сценария*. Содержательное описание в словесном выражении даёт картину функционирования объекта в целом и его отдельных частей во времени при различных воздействиях окружения, содержит исходную информацию для дальнейшей математической формализации задачи.

Рекомендуемые этапы построения сценария процесса функционирования объекта приведены ниже.

Этап 1.

При анализе собранной информации и построения сценария функционирования объекта в первую очередь строят его концептуальную модель. Для этого прежде всего выявляют границы между объектом и внешней средой и между внешней средой и окружением. Для исследуемой системы (процесса) окружение есть множество всех объектов вне системы, изменение характеристик которых влияет на систему или (и) характеристики которых изменяются вследствие поведения системы. Таким образом, окружение есть учитываемая при исследовании часть внешней среды. Объект взаимодействует с окружением посредством входов и выходов.

Как показано на рис 3.1, основными типами входов являются:

x_1 – информационный вход, управляющий работой объекта или подлежащий переработке объектом;

x_2 - энергетический вход, обеспечивающий развитие объекта или его поддержание на заданном уровне производительности;

x_3 - материальный вход, представляющий собой поток материальных средств, подлежащих переработке объектом либо потребляемых в процессе его функционирования;

x_4 - вход, обеспечивающий объект кадрами.

Возможны другие входы, определяемые объектом. Указанные входы представляют собой организованные входы, их наличие обеспечивается целеустремленной деятельностью людей. Помимо организованных входов есть неорганизованные, как правило затрудняющие деятельность системы входы - возмущения $x_в$, поступающие из окружения (срывы сроков поставки материалов, несоответствие марки материала и т.п.), которые также могут быть классифицированы по этим четырем типам.

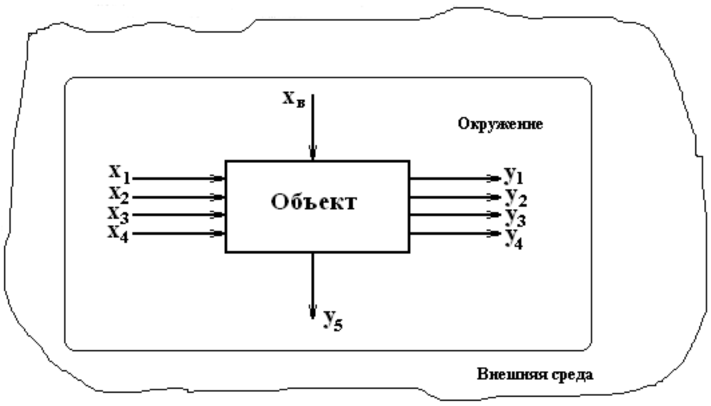

Рис 3.1. Концептуальная модель объекта исследования.

Таким образом, вход исследуемого объекта представляет собой вектор:

$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_в]$. (3.1)

Каждый вход может иметь несколько составляющих, так что

$x_i = (x_{ij})$, $i = 1,n$, $j =1, m$, $x_{ij} = (x_{ijg})$, $g = 1, k$.;

где i — тип входа; j — номенклатура входа; g — источник входа.

Результат деятельности системы - вектор выхода у может быть охарактеризу-ем аналогичными составляющими:

$\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3, y_4, y_в]$; (3.2)

где:

y_1 - информационный выход, характеризующий результат информационной деятельности системы;

y_2 - энергетический выход, характеризующий передачу энергии от системы в окружающую среду;

y_3 - материальный выход, характеризующий материальный результат действия системы, а также отходы сырья и материалов;

y_4 - кадровый выход, характеризующий движение кадров;

$y_в$- возмущение, характеризующее побочные действия объекта на окружение (в свою очередь также может быть подразделен на информационный, энергетический, материальный и кадровый).

Как и для входов, составляющие вектора выхода могут быть представлены в виде:

$y_i = (x_{ij})$; $i = 1; h$, $j =1,r$; $x_{ij} = (x_{ijg})$; $g = 1, s$; (3.3)

где i — тип входа; j — номенклатура входа; g — источник входа.

Определение необходимого состава факторов, включаемых в исследование, подразумевает перечисление всех факторов, влияющих как положительно, так и отрицательно на результаты работы объекта.

Этап 2.

Одновременно с анализом входных и выходных факторов изучается внутренняя структура объекта, принимаются решения о включении тех или иных элементов изучаемого объекта в состав его будущей модели. При этом физически границы объекта вовсе не обязаны совпадать с границами модели объекта.

Этап 3.

На этом этапе проводится детализация выявленных в структуре модели связей. На основе решений о включении тех или иных элементов в состав модели объекта уточняются и конкретизируются назначение каждого элемента, функции, которые он выполняет в процессе работы всей системы, его входы и выходы - промежуточные параметры, переменные состояния объекта. При этом целесообразно повторить процесс построения концептуальных моделей для каждого из элементов модели внутренней структуры. Тем самым в модели внутренней структуры происходит как бы замещение элемента системы функциями, которые этот элемент выполняет, замещение связей между элементами связями между функци-ями, конкретизированными в виде переменных состояния. Затем требуется согла-совать входы и выходы элементарных моделей между собой и со входами и выходами модели объекта в целом. Таким образом, этап 3 является повторением этапа 1 для каждого из элементов модели внутренней структуры с обязательным согласованием всего полученного множества входов и выходов.

Этап 4.

Изучение места и роли каждого элемента модели внутренней структуры в процессе функционирования объекта позволяет определить перечень элементарных процессов, происходящих в исследуемом объекте, перечни функций как объекта в целом, так и каждого отдельного элемента.

При выполнении этого этапа пытаются ответить на следующие вопросы:

- для чего предназначен данный элемент, какие функции (элементарные процессы) он выполняет, какого рода потоки (информационные, материальные, и т.п.) он перерабатывает или преобразует?

- для какой функции элементов устанавливается, автономно или совместно с другими элементами реализуется данная функция, а если совместно, то каков порядок взаимодействия элементов?

- взаимосвязаны ли функции элементов между собой по получению того или иного выхода концептуальной модели?

- все ли выходы канонической модели обеспечиваются наборами взаимосвязанных функций?

- совпадают ли функции объекта, вытекающие из ранее построенной концептуальной модели, с функциями, вытекающими из модели внутренней структуры?

В процессе ответов на эти вопросы проводится уточнение и увязка функций элементов объекта.

Этап 5.

Элементарные процессы в единую модель функционирования могут быть увязаны с помощью различных приемов и вызывать необходимость построения системы вспомогательных моделей различного вида (функциональных, информационных, процедурных) и способа представления выходной информации (блок-схемы, диаграммы, временные графики, графы и т.д.). Описание объекта строится последовательно: сначала статическое, а затем, если это необходимо, динамическое представление его функционирования. При этом для компактного и наглядного представления информации чаще всего используются технологические карты и диаграммы.

2.1.3 Результаты и выводы:

Изучить принципы построения математических моделей

2.1 Практическое занятие №8 (2 часа).

Тема: «Обработка результатов спланированного эксперимента»

2.1.1 Задание для работы:

1. Метод регрессионного анализа
2. Метод дисперсионного анализа

2.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

Термин «регрессия» ввел английский психолог и антрополог Ф.Гальтон.

Для точного описания уравнения регрессии необходимо знать чакон распределения результативного показателя у.

В статистической практике обычно приходится ограничиваться поиском подходящих аппроксимаций для неизвестной истинной функции регрессии ffc), так как исследователь не располагает точным знанием условного закона распределения вероятностей анализируемого результатирующего показателя у при заданных значениях аргумента х.

Рассмотрим взаимоотношение между истинной f (х) = = М(у/х), модельной регрессией у и оценкой у регрессии.

Пусть результативный показатель у связан с аргументом х соотношением:

у=2х 1,5+о

где о – случайная величина, имеющая нормальный закон распределения.

Причем М о= 0 и d о– о 2.

Истинная функция регрессии в этом случае имеет вид:

f(х) = М(у/х) = 2х і 1,5+ о

Для наилучшего восстановления по исходным статистическим данным условного значения результативного показателя f(x) и неизвестной функции регрессии /(х) = М(у/х) наиболее часто используют следующие критерии адекватности (функции потерь).

Согласно методу наименьших квадратов минимизируется квадрат отклонения наблюдаемых значений результативного показателя у(і = 1, 2, ..., п)от модельных значений у і= f(х і),где х і– значение вектора аргументов в і-м наблюдении: о(у і– f(х і)2 – min

Получаемая регрессия называется среднеквадратической. Согласно методу наименьших модулей, минимизируется сумма абсолютных отклонений наблюдаемых значений результативного показателя от модульных значений: у і = f(х і)

И получаем среднеабсолютную медианную регрессию: y-f(xj)->min

Регрессионный анализ – это метод статистического анализа зависимости случайной величины уот переменных x j(j=1,2, ..., k), рассматриваемых в регрессионном анализе как неслучайные величины, независимо от истинного закона распределения x j.

Метод дисперсионного анализа

В практической деятельности врачей при проведении медико-биологических, социологических и экспериментальных исследований возникает необходимость установить влияние факторов на результаты изучения состояния здоровья населения, при оценке профессиональной деятельности, эффективности нововведений.

Существует ряд статистических методов, позволяющих определить силу, направление, закономерности влияния факторов на результат в генеральной или выборочной совокупностях (расчет критерия I, корреляционный анализ, регрессия, ?2 — (критерий согласия Пирсона и др.). Дисперсионный анализ был разработан и предложен английским ученым, математиком и генетиком Рональдом Фишером в 20-х годах XX века.

Дисперсионный анализ чаще используют в научно-практических исследованиях общественного здоровья и здравоохранения для изучения влияния одного или нескольких факторов на результативный признак. Он основан на принципе "отражения разнообразий значений факторного (ых) на разнообразии значений результативного признака" и устанавливает силу влияния фактора (ов) в выборочных совокупностях.

Сущность метода дисперсионного анализа заключается в измерении отдельных дисперсий (общая, факториальная, остаточная), и дальнейшем определении силы (доли) влияния изучаемых факторов (оценки роли каждого из факторов, либо их совместного влияния) на результативный (е) признак (и).

Дисперсионный анализ — это статистический метод оценки связи между факторными и результативным признаками в различных группах, отобранный случайным образом, основанный на определении различий (разнообразия) значений признаков.

В основе дисперсионного анализа лежит анализ отклонений всех единиц исследуемой совокупности от среднего арифметического. В качестве меры отклонений берется дисперсия (В)— средний квадрат отклонений. Отклонения, вызываемые воздействием факторного признака (фактора) сравниваются с величиной отклонений, вызываемых случайными обстоятельствами. Если отклонения, вызываемые факторным признаком, более существенны, чем случайные отклонения, то считается, что фактор оказывает существенное влияние на результативный признак.

Для того чтобы вычислить дисперсию значения отклонений каждой варианты (каждого зарегистрированного числового значения признака) от среднего арифметического возводят в квадрат. Тем самым избавляются от отрицательных знаков. Затем эти отклонения (разности) суммируют и делят на число наблюдений, т.е. усредняют отклонения. Таким образом, получают значения дисперсий.

Важным методическим значением для применения дисперсионного анализа является правильное формирование выборки. В зависимости от поставленной цели и задач выборочные группы могут формироваться случайным образом независимо друг от друга (контрольная и экспериментальная группы для изучения некоторого показателя, например, влияние высокого артериального давления на развитие инсульта). Такие выборки называются независимыми.

Нередко результаты воздействия факторов исследуются у одной и той же выборочной группы (например, у одних и тех же пациентов) до и после воздействия (лечение, профилактика, реабилитационные мероприятия), такие выборки называются зависимыми.

Дисперсионный анализ, в котором проверяется влияние одного фактора, называется однофакторным (одномерный анализ). При изучении влияния более чем одного фактора используют многофакторный дисперсионный анализ (многомерный анализ).

Факторные признаки — это те признаки, которые влияют на изучаемое явление. Результативные признаки — это те признаки, которые изменяются под влиянием факторных признаков.

Для проведения дисперсионного анализа могут использоваться как качественные (пол, профессия), так и количественные признаки (число инъекций, больных в палате, число койко-дней).

Методы дисперсионного анализа:

1. Метод по Фишеру (Fisher) — критерий F (значения F см. в приложении N 1); Метод применяется в однофакторном дисперсионном анализе, когда совокупная дисперсия всех наблюдаемых значений раскладывается на дисперсию внутри отдельных групп и дисперсию между группами.

2. Метод "общей линейной модели". В его основе лежит корреляционный или регрессионный анализ, применяемый в многофакторном анализе.

Обычно в медико-биологических исследованиях используются только однофакторные, максимум двухфакторные дисперсионные комплексы. Многофакторные комплексы можно исследовать, последовательно анализируя одно- или двухфакторные комплексы, выделяемые из всей наблюдаемой совокупности.

Условия применения дисперсионного анализа:

1. Задачей исследования является определение силы влияния одного (до 3) факторов на результат или определение силы совместного влияния различных факторов (пол и возраст, физическая активность и питание и т.д.).

2. Изучаемые факторы должны быть независимые (несвязанные) между собой. Например, нельзя изучать совместное влияние стажа работы и возраста, роста и веса детей и т.д. на заболеваемость населения.

3. Подбор групп для исследования проводится рандомизированно (случайный отбор). Организация дисперсионного комплекса с выполнением принципа случайности отбора вариантов называется рандомизацией (перев. с англ. — random), т.е. выбранные наугад.

4. Можно применять как количественные, так и качественные (атрибутивные) признаки.

При проведении однофакторного дисперсионного анализа рекомендуется (необходимое условие применения):

1. Нормальность распределения анализируемых групп или соответствие выборочных групп генеральным совокупностям с нормальным распределением.

2. Независимость (не связанность) распределения наблюдений в группах.

3. Наличие частоты (повторность) наблюдений.

Нормальность распределения определяется кривой Гаусса (Де Мавура), которую можно описать функцией $y = f(x)$, так как она относится к числу законов распределения, используемых для приближенного описания явлений, которые носят случайный, вероятностный характер. Предмет медико-биологических исследований — явления вероятностного характера, нормальное распределение в таких исследованиях встречается весьма часто.

Принцип применения метода дисперсионного анализа

Сначала формулируется нулевая гипотеза, то есть предполагается, что исследуемые факторы не оказывают никакого влияния на значения результативного признака и полученные различия случайны.

Затем определяем, какова вероятность получить наблюдаемые (или более сильные) различия при условии справедливости нулевой гипотезы.

Если эта вероятность мала*, то мы отвергаем нулевую гипотезу и заключаем, что результаты исследования статистически значимы. Это еще не означает, что доказано действие именно изучаемых факторов (это вопрос, прежде всего, планирования исследования), но все же маловероятно, что результат обусловлен случайностью.

Классический дисперсионный анализ проводится по следующим этапам:

1. Построение дисперсионного комплекса.
2. Вычисление средних квадратов отклонений.
3. Вычисление дисперсии.
4. Сравнение факторной и остаточной дисперсий.
5. Оценка результатов с помощью теоретических значений распределения Фишера-Снедекора.

2.1.3 Результаты и выводы:

Изучить способ обработки результатов спланированного эксперимента