ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.Б.05 Оптимизация технологических процессов

Направление подготовки (специальность) 35.04.06 Агроинженерия
Профиль образовательной программы Электротехнологии и электрооборудование в сельском хозяйстве
Форма обучения очная

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.1. Лекция №1 (Л-1) (2 часа).

Тема: «Общие вопросы методологии оптимизации»

1.1.1 Вопросы лекции:

1. Задачи курса.
2. Значение оптимизации механико-технологических процессов.
3. Виды задач оптимизации технологических процессов.

1.1.2 Краткое содержание вопросов:

1. Задачи курса.

Оптимизация - целенаправленная деятельность, заключающаяся в получении наилучших результатов при соответствующих условиях.

При постановке задачи оптимизации необходимо:

1. Наличие объекта оптимизации и цели оптимизации.
2. Наличие ресурсов оптимизации
3. Возможность количественной оценки оптимизируемой величины
4. Учет ограничений.

Критерием оптимальности называется количественная оценка оптимизируемого качества объекта.

Для решения задачи оптимизации необходимо:

а) составить математическую модель объекта оптимизации,
б) выбрать критерий оптимальности и составить целевую функцию,
в) установить возможные ограничения, которые должны накладываться на переменные,
г) выбрать метод оптимизации, который позволит найти экстремальные значения искомых величин.

2. Значение оптимизации механико-технологических процессов.

Принято различать задачи **статической оптимизации** для процессов, протекающих в установившихся режимах, и задачи **динамической оптимизации**.

В зависимости от управляющих параметров различают следующие задачи :

- оптимизация при одной управляющей переменной- одномерная оптимизация,
- оптимизация при нескольких управляющих переменных – многомерная оптимизация,
- оптимизация при неопределённости данных,
- оптимизация с непрерывными ,дискретными и смешанным типом значений управляющих воздействий.

В зависимости от критерия оптимизации различают:

- с одним критерием оптимизации- критерий оптимальности единственный.
- со многими критериями. Для решения задач со многими критериями используются специальные методы оптимизации.

Информационные переменные (ИП)двух видов:

1) ИП, принимающие, согласно проектному заданию и технологическим условиям, дискретные значения (например, конструкционный тип аппаратов; стандартизированные или нормализованные геометрические размеры оборудования; допустимые типы катализатора или растворителя и т. д.);

2) ИП, которые по требованиям проектного задания и технологических условий или вследствие взаимодействия элементов системы между собой имеют узко ограниченный диапазон возможных значений.

3. Виды задач оптимизации технологических процессов.

ОДНОМЕРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

В данном разделе не делается упор на поиск именно минимума, тем более что практически все методы могут искать и минимум, и максимум при незначительных изменениях в алгоритмах. Действительно для того, чтобы найти максимум (минимум) функции нужно искать минимум (максимум) целевой функции с противоположным знаком.

Методы одномерной оптимизации:

1. Метод сканирования
2. Метод деления пополам
3. Метод золотого сечения
4. Метод параболической аппроксимации

МНОГОМЕРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ.

Методы одномерной оптимизации:

1. Многомерная безградиентная оптимизация
2. Многомерная градиентная оптимизация
3. Метод сопряжённых градиентов
4. Метод Ньютона.

1.2. Лекция №2 (Л-2) (2 часа).

Тема: «*Аналитические методы оптимизации***»**

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Область допустимых решений.

2. Аналитические методы безусловной оптимизации целевой функции одной переменной.

1.2.2 Краткое содержание вопросов:

1. Область допустимых решений.

Часто в математической модели требуется найти наибольшее или наименьшее значение некоторой функции на некотором множестве, то есть решить задачу оптимизации. Методов решения задач оптимизации достаточно много. Некоторые из них рассматривались при отыскании экстремальных значений функций одной и многих вещественных переменных. Кроме точных методов широко используются и приближенные, например, метод дихотомии и т.д.

Знание методов нахождения оптимального решения позволяет инженеру выбирать наиболее эффективные и самые экономичные способы эксплуатации и ремонта машин, находить оптимальные решения тактических задач.

В процессе применения одномерных методов поиска оптимума функции можно выделить два этапа:

1. Установления границ интервала;
2. Уменьшения интервала.

Поиск граничных точек проводится с помощью эвристических (не имеющих строгого обоснования, а опирающихся на опыт и интуицию) методов поиска.

Эффективность поиска граничных точек зависит от величины шага Δ. Если Δ велико, то получаем грубые оценки координат граничных точек, и построенный интервал весьма широк. Если Δ мало, то для определения граничных точек может понадобиться большой объем вычислений.

Если границы интервала не найдены при выполнении I этапа работы, мы определили, как минимум, знак Δ. Теперь можно приступить к определению границ интервала. Начальная точка x_0 задана, следующие пробные точки определяем по формуле Свенна. В расчетном блоке для их определения необходимо выделить отдельную графу для индекса x, так как этот индекс используется в формуле для расчета пробных точек. Сам расчет пробных точек и значений функции в этих точках очевиден и не требует подробного рассмотрения.

После определения границ интервала можно приступать к уменьшению интервала поиска для получения уточненных оценок координат оптимума. Величина подынтервала, исключаемого на каждом шаге, зависит от расположения пробных точек x_1 и x_2 внутри интервала поиска. К методам исключения интервалов относятся метод деления интервала пополам и метод золотого сечения. Рассмотрим первый из них.

2. Аналитические методы безусловной оптимизации целевой функции одной переменной.

Метод деления интервала пополам

Метод деления интервала пополам позволяет исключить половину интервала на каждой итерации.

Основные шаги поисковой процедуры нахождения точки минимума в интервале (a,b):

1. Принимаем $x_m=(a+b)/2$, $L=b-a$. Вычислить $f(x_m)$.
2. $x_1=a+L/4$; $x_2=b-L/4$. Вычислить $f(x_1)$ и $f(x_2)$.
3. Сравнить $f(x_1)$ и $f(x_m)$. Если $f(x_1) \le f(x_m)$, исключить интервал (x_m, b), положив $b=x_m$. Средней точкой нового интервала поиска становится точка x_1. $x_m=x_1$. Перейти к п.5. Если $f(x_1) \ge f(x_m)$, перейти к п.4.
4. Сравнить $f(x_2)$ и $f(x_m)$. Если $f(x_2) \le f(x_m)$, исключить интервал (a, x_m), положив $x_m=a$. x_2 становится точкой x_m. Средней точкой нового интервала становится точка x_2. Перейти к п.5. Если $f(x_2) \ge f(x_m)$, исключить интервалы (a, x_1) и (x_2, b), положив $a=x_1$, $b=x_2$. x_m остается средней точкой нового интервала. Перейти к п.5.
5. Вычислить $L=b-a$. Если величина $|L| \le \lambda$ (λ – некоторое заданное значение точности), закончить поиск. В противном случае вернуться к п. 2.

Метод золотого сечения

Этот метод также относится к методам исключения интервалов. Он отличается от метода деления интервала пополам тем, что единичный интервал делится двумя пробными точками на три части. Каждая пробная точка отстоит от конца интервала на одну и ту же величину $\tau = (-1\pm\sqrt{5})/2 \approx 0{,}61803$.

Алгоритм применения этого метода следующий:

1. Определяем величину $\tau = 0{,}61803\cdot(b-a)$.
2. Определим $x_1 = b-\tau$; $x_2 = a+\tau$.
3. Подсчитаем значения $f(x_1)$ и $f(x_2)$.
4. Сравним $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Если $f(x_1) < f(x_2)$, исключим интервал (x_2, b). Положим $b = x_2$. Определим $L = b-a$. Если $L > \lambda$, перейдем к п.1. Если $L \le \lambda$, решение найдено.
5. Если $f(x_1) > f(x_2)$, исключаем интервал (a, x_1). Положим $a = x_1$. Определим $L = b-a$. Если $L > \lambda$, перейдем к п.1. Если $L \le \lambda$, решение найдено.
6. Если $f(x_1) = f(x_2)$, исключаем интервалы (a, x_1) и (x_2, b). Положим $a=x_1$, $b = x_2$. Определим $L = b-a$. Если $L > \lambda$, перейдем к п.1. Если $L \le \lambda$, решение найдено.

Достоинством методов исключения интервалов является то, что они основаны лишь на вычислении значений функций. Не требуется, чтобы функции были дифференцируемыми, более того, допустимы случаи, когда функцию нельзя даже записать в аналитическом виде. Единственным требованием является возможность определения значений функции в заданных точках x с помощью прямых расчетов или имитационных экспериментов. Метод же золотого сечения выделяется среди методов исключения интервалов тем, что он требует наименьшего числа оцениваний значений функции для достижения одной и той же заданной точности.

1.3. Лекция №3 (Л-3) (2 часа).

Тема: «*Аналитические методы безусловной оптимизации целевой функции многих переменных*»

1.3.1 Вопросы лекции:

1. Аналитические методы безусловной оптимизации целевой функции многих переменных.

2. Решение задач оптимизации аналитическими методами.

1.3.2 Краткое содержание вопросов:

1. Аналитические методы безусловной оптимизации целевой функции многих переменных.

Сначала рассмотрим *вопрос анализа* «в *статике»* с использованием положений линейной алгебры и дифференциального исчисления (приложение А), а также условия, которые (в достаточно общих возможных ситуациях) позволяют идентифицировать точки оптимума. Такие условия используются для проверки выбранных точек и дают возможность выяснить, являются ли эти точки точками минимума, максимума или седловыми точками. При этом задача выбора указанных точек остается вне рамок проводимого анализа; основное внимание уделяется решению вопроса о том, соответствуют ли исследуемые точки решениям многомерной задачи безусловной оптимизации, в которой требуется минимизировать f(x), при отсутствии ограничений на x, где *x*—вектор *управляемых переменных* размерности f — скалярная *целевая функция.* Обычно предполагается, что x* (для всех значений x=1, 2, 3, . . . , *N)* могут принимать любые значения, хотя в ряде практических приложений область значений *x* выбирается в виде дискретного множества. Кроме того, часто оказывается удобным предполагать, что функция f и ее производные существуют и непрерывны всюду, хотя известно, что оптимумы могут достигаться в точках разрыва или ее *градиента*

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \frac{\partial f}{\partial x_2},\ \frac{\partial f}{\partial x_3},\ \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial x_N}\right]^T.$$

Следует помнить, что функция f может принимать минимальное значение в точке x, в которой f или Vf претерпевают разрыв. Кроме того, в этой точке *f* может не существовать. Для того чтобы построить систему конструктивных критериев оптимальности, необходимо (по крайней мере на первой стадии исследования) исключить из рассмотрения подобные ситуации,'которые весьма усложняют анализ. Наконец, в ряде случаев приходится ограничиваться лишь идентификацией *локальных* оптимумов, поскольку нелинейная целевая функция f не всегда обладает свойством выпуклости и, следовательно, может оказаться мультимодальной.

2. Решение задач оптимизации аналитическими методами.

Исследуются методы и алгоритмы, позволяющие на итерационной основе получать оценки *x**— вектора управляемых переменных, которому соответствует минимальное значение функции *f (x).* Указанные методы применимы также к задачам максимизации, в которых целевую функцию следует заменить на — *f(x).* Методы, ориентированные на решение задач безусловной оптимизации, можно разделить на три широких класса в соответствии с типом используемой при реализации того или иного метода информации.

1. Методы прямого поиска, основанные на вычислении только значении целевой функции.
2. Градиентные методы, в которых используются точные значения первых производных /(*).
3. Методы второго порядка, в которых наряду с первыми производными используются также вторые производные функции *f (x).*

Ниже рассматриваются методы, относящиеся к каждому из перечисленных классов, поскольку ни один метод или класс методов не отличается высокой эффективностью при решении оптимизационных задач различных типов. В частности, возможны случаи, когда происходит переполнение памяти ЭВМ; в других ситуациях вычисление значений целевой функции требует чрезмерных затрат времени; в некоторых задачах требуется получить решение с очень высокой степенью точности. В ряде приложений либо невозможно, либо весьма затруднительно найти аналитические выражения для производных целевой функции. Поэтому если предполагается использовать градиентные методы, следует применить процедуру разностной аппроксимации производных. В свою очередь это приводит к необходимости экспериментального определения длины шагов, позволяющего установить надлежащее соответствие между ошибкой округления и ошибкой аппроксимации. Таким образом, инженер вынужден приспосабливать применяемый метод к конкретным характеристикам решаемой задачи.

Методы решения задач безусловной оптимизации отличаются относительно высоким уровнем развития по сравнению с другими методами нелинейного программирования. В специальной литературе представлены достаточно полные обзоры наиболее эффективных методов. Отличным примером такого обзора может служить книга Мюррея 11]. В данном разделе речь идет о *методах прямого поиска,* для реализации которых требуются только значения целе пои функции; в следующем разделе рассматриваются градиентные методы и методы второго порядка. Здесь предполагается, что *[(x)* непрерывна, а *Vf(x)* может как существовать, так и не существовать поскольку соответствующие числовые значения не используются Однако следует отметить, что методы прямого поиска можно применять для решения задач, в которых V/ существует, и они чаете используются в тех случаях, когда V/ представляет собой сложную векторную функцию управляемых переменных. Наконец, в этом г последующих разделах предполагается, что функция *f(x)* унимодальна в рассматриваемой области. Если же изучаемые методы применяются для анализа мультимодальных функций, то приходится ограничиваться идентификацией локальных минимумов.

Многомерные методы, реализующие процедуру поиска оптимума на основе вычисления значений функции, с общих позиций можно разделить на эвристические и теоретические. Эвристические методы, как это следует из названия, реализуют процедуры поиска с помощью интуитивных геометрических представлений и обеспечивают получение частных эмпирических результатов. С другой стороны, теоретические методы основаны на фундаментальных математических теоремах и обладают такими операционными свойствами, как сходимость (по крайней мере при выполнении некоторых определенных условий). Ниже подробно рассматриваются три метода прямого поиска:

1. поиск по симплексу, или S^-метод;
2. метод поиска Хука —■ Дживса;
3. метод сопряженных направлений Пауэлла.

Первые два из перечисленных методов относятся к категории эвристических и реализуют принципиально различающиеся стратегии поиска. В процессе поиска по S^2-методу последовательно оперируют регулярными симплексами в пространстве управляемых переменных, тогда как при реализации метода Хука — Дживса используется фиксированное множество (координатных) направлении, выбираемых рекурсивным способом. Метод Пауэлла основан на теоретических результатах и ориентирован на решение задач с квадратичными целевыми функциями; для таких задач метод сходится за конечное число итераций. К числу общих особенностей всех трех методов следует отнести относительную простоту соответствующих вычислительных процедур, которые легко реализуются и быстро корректируются. С другой стороны, реализация указанных методов может требовать (и часто требует) более значительных затрат времени по сравнению с методами с использованием производных. Здесь не рассматриваются методы, основанные на идее исключения интервалов (гл. 2), в частности методы, предложенные Боксом, Дэвисом и Свенном (21, а также Кролаком и Купером [31, поскольку такие методы в значительной степени уступают другим известным методам.

1.4. Лекция №4 (Л-4) (2 часа).

Тема: «*Линейное программирование***»**

1.4.1 Вопросы лекции:

1. Виды задач и формы задач линейного программирования.

2. Симплексный метод решения задач линейного программирования и его сущность.

1.4.2 Краткое содержание вопросов:

1. Виды задач и формы задач линейного программирования.

Задачами *линейного программирования* называются оптимизационные задачи, в которых ограничения представляются в виде равенств или неравенств и целевая функция линейна. Методы линейного программирования (ЛП) широко используются для решения различных военных, экономических, промышленных и организационных задач. Главными причинами столь широкого применения методов ЛП являются доступность математического обеспечения для решения задач ЛП большой размерности и возможность анализа решений задач ЛП при вариации исходных данных (анализа чувствительности).

Отмечается, что линейное программирование представляет собой наиболее часто используемый метод оптимизации (74% от общего числа применяемых оптимизационных методов). Около четверти машинного времени, затраченного за последние годы на проведение научных исследований, было отведено решению задач ЛП и их многочисленных модификаций .

Термин «*разработка*» означает построение моделей ЛГ1 практических задач. Построение моделей не следует рассматривать как науку, скорее это искусство, которое постигается с опытом. Разработка модели ЛП включает следующие основные этапы: определение переменных задачи, представление ее ограничений в виде линейных уравнений или неравенств; задание линейной целевой функции, подлежащей минимизации или максимизации..

2. Симплексный метод решения задач линейного программирования и его сущность.

Рассмотрим общую задачу ЛП с т ограничениями и п переменными, записанную в стандартной форме:

$$
\begin{aligned}
&\text{максимизировать} \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
&\text{при ограничениях} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
&\qquad\qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&\qquad\qquad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\
&\qquad\qquad x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Как правило, число уравнений задачи меньше числа переменных (т. с. m<n), поэтому множество се допустимых решений бесконечно. Следовательно, выбор наилучшего допустимого решения, максимизирующего Z. нетривиален.

Известен классический метод решения систем линейных уравнений, называемый методом Гаусса — Жордана. Основная идея этого метода состоит в сведении системы т уравнений с n неизвестными к каноническому или ступенчатому виду при помощи элементарных операций над строками. При использовании первых m переменных (x1, xm) каноническая система имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
x_1 + \bar{a}_{1,\,m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{1s}x_s + \ldots + \bar{a}_{1n}x_n &= \bar{b}_1, \\
x_r + \bar{a}_{r,\,m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{rs}x_s + \ldots + \bar{a}_{rn}x_n &= \bar{b}_r, \\
x_m + \bar{a}_{m,\,m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{ms}x_s + \ldots + \bar{a}_{mn}x_n &= \bar{b}_m.
\end{aligned}
$$

Переменные x1   xm, входящие с единичными коэффициентами только в одно уравнение системы и с нулевыми — в остальные, называются базисными или зависимыми. В канонической системе каждому уравнению соответствует ровно одна базисная переменная. Остальные переменные называются небазисными или независимыми переменными.
При записи системы в каноническом виде все ее решения можно получить, присваивая независимым переменным произвольные значения к решая затем получающуюся каноническую систему относительно зависимых переменных. Для приведения системы к каноническому виду можно использовать два типа элементарных операции над строками.
1. Умножение любого уравнения системы на положительное или отрицательное число.
2. Прибавление к любому уравнению другого уравнения системы. умноженного на положительное или отрицательное число.
Определение
Элементарное преобразование представляет собой последовательность элементарных операции над строками, в результате которой коэффициент при некоторой переменной становится равным единице в одном из уравнении системы и нулем в остальных уравнениях.
Определение
Базисным решением системы в каноническом виде называется решение, полученное при нулевых значениях небазисных переменных.

1.5. Лекция №5 (Л-5) (2 часа).

Тема: «*Нелинейное программирование*»

1.5.1 Вопросы лекции:

1. Задачи нелинейного программирования
2. Виды и формы записи задач нелинейного программирования

1.5.2 Краткое содержание вопросов:

1. Задачи нелинейного программирования

Необходимо написать программа для поиска экстремума функции. Задание состоит в следующем: 1) найти точку глобального экстремума функции *f(X)* методом поиска по координатной сетке с постоянным шагом; 2) найти точку глобального экстремума функции *f(X)* методом случайного поиска; 3)сравнить результаты вычислений.

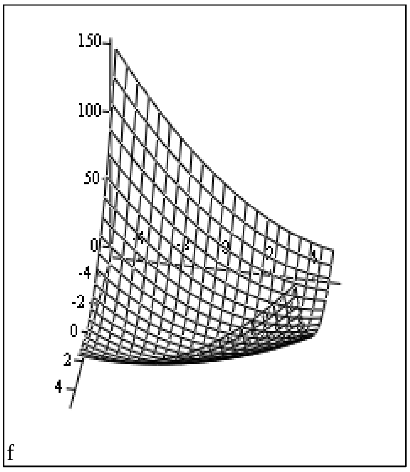
$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 - 3x_2$$

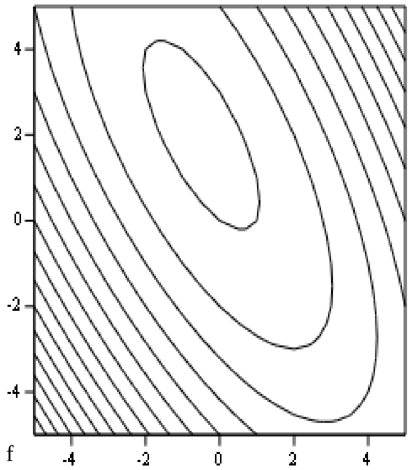
2. Виды и формы записи задач нелинейного программирования

Метод поиска глобального минимума, называемый методом поиска по координатной сетке, является надежным, но применим только для задач малой размерности (n<4). Неправильный выбор начального шага сетки может привести к тому, что в действительности один из локальных минимумов может быть принят как глобальный. Из всех значений целевой функции, вычисленных в узлах координатной сетки, выбирается минимальное. Результат: число испытаний 905, $f(X^*) = -2.500$, $X^*=(-0.500; 2.000)$

Метод случайного поиска характеризуется намеренным введением элемента случайности в алгоритм поиска. Этот метод предполагает наличие генератора случайных чисел, обращаясь к которому, в любой нужный момент времени можно получить реализацию случайного вектора с заданным законом распределения. Результат: число испытаний 299, $f(X^*) = -2.469$, $X^*=(-0.677; 2.173)$.

Расчет в системе MathCAD: $f(X^*) = -2.500$, $X^*=(-0.500; 2.000)$





Как видим, метод случайного поиска сократил число испытаний на 66%, при этом относительная погрешность составляет 1%. Т.е. мы достигли значительного сокращения вычислений с небольшой относительной погрешностью.

1.6. Лекция №6 (Л-6) (2 часа)..

Тема: «Динамическое программирование»

1.6.1 Вопросы лекции:

1. Постановка задачи динамического программирования.
2. Геометрический метод решения двухфакторных задач оптимизации.

1.6.2 Краткое содержание вопросов:

1. Постановка задачи динамического программирования.

Напомним формулировку задачи технического контроля из примера

минимизировать $Z=40x_1+36x_2$

при ограничениях $x_1\leqslant 8, \quad x_2\leqslant 10,$

$5x_1+3x_2\geqslant 45,$

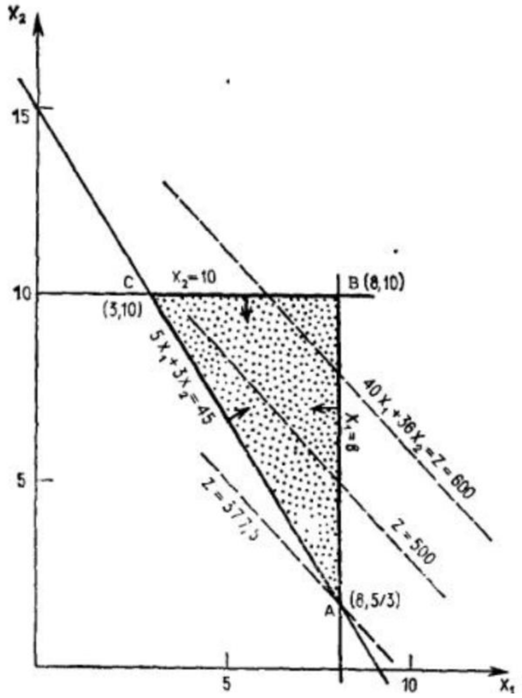
$x_1\geqslant 0, \quad x_2\geqslant 0.$

В этой задаче требуется найти значения переменных *x1* и х2, удовлетворяющие всем ограничениям и обеспечивающие минимальное значение целевой функции.

2. Геометрический метод решения двухфакторных задач оптимизации.

В качесгве первого шага решения следует определить все возможные неотрицательные значения переменных *x1* и х2, которые удовлетворяют ограничениям. Например, координаты точки х1=8, х2= 10 положительны и для этой точки выполняются все ограничения. Такая точка называется *допустимым решением.* Множество всех допустимых решений называется *допустимой областью.* Решение задачи ЛП состоит в отыскании паи- лучшего решения в допустимой области. Лучшее допустимое решение задачи ЛП называется *оптимальным.* В рассматриваемом примере оптимальное решение представляет собой допустимое решение, минимизирующее целевую функцию 40х,+36х$_г$. Значение целевой функции, соответствующее оптимальному решению, называется *оптимальным значением* задачи ЛП.

Для изображения допустимой области следует начертить графики всех ограничений. Все допустимые решения лежат в первом квадранте, поскольку значения переменных неотрицательны. В силу ограничения 5x1+3x2^45 все допустимые решения (x1 x_2) задачи располагаются по одну сторону от прямой, описываемой уравнением 5x1+3x2==45. Нужную полуплоскость можно найти, проверив, удовлетворяет ли начало координат рассматриваемому ограничению. Прямую удобно провести, соединяя пару подходящих точек.



Поскольку начало координат не удовлетворяет ограничению, нужная полуплоскость отмечена стрелкой, направленной перпендикулярно прямой. Аналогичным образом представлены ограничения *x₁^8* и x2^10. На рис. допустимая область *(ABC)* заштрихована. Ясно, что в допустимой области содержится бесконечное число допустимых точек. Нужно найти допустимую точку с наименьшим значением Z.

Если заранее зафиксировать значение целевой функции, то соответствующие ему точки будут лежать на некоторой прямой. При изменении величины 2 эта прямая подвергается параллельному переносу. Рассмотрим прямые, соответст вующие различным значениям Z, имеющие с допустимой областью хотя бы одну общую точку. Начальное значение Z положим равным 600. При приближении прямой к началу координат значение 2 уменьшается. Если прямая имеет хотя бы одну общую точку с допустимой областью *ABC*, ее можно смещать в направлении начала координат. Ясно, что для прямой, проходящей через угловую точку *A* с координатами x_t~8, x_2=1,6, дальнейшее движение невозможно. Точка *A* представляет собой наилучшую допустимую точку, соответствующую наименьшему значению Z, равному 377,6. Следовательно, *1=8, x»=1,6 — *оптимальное решение* и Z=377,6 — оп*тимальное значение* рассматриваемой задачи ЛП.

Таким образом, при оптимальном режиме работы ОТК необходимо использовать восемь контролеров разряда 1 и 1,6 контролерор разряда 2. Дробное значение 1,6 соответствует использованию одного из контролеров разряда 2 в течение неполного рабочего дня. При недопустимости неполной загрузки контролеров дробное значение обычно округляют, получая приближенное оптимальное целочисленное решение X1=8, x_a=2.

1.7. Лекция №7 (Л-7) (2 часа).

Тема: «*Многокритериальные задачи оптимизации*»

1.7.1 Вопросы лекции:

1. Виды и формы записи многокритериальных задач оптимизации.
2. Решение многокритериальных задач оптимизации

1.7.2 Краткое содержание вопросов:

1. Виды и формы записи многокритериальных задач оптимизации.

Компромиссные решения

Решения, соответствующие множеству компромиссов, принято называть эффективными.

Для решения задач многоцелевой оптимизации должны быть обеспечены определенные условия. В частности, должна быть предоставлена возможность изменять в определенных пределах независимые переменные , влияющие на критерии качества .

Любая независимая переменная величина , которую можно изменять в некоторых пределах и которая оказывает определенное влияние на все критерии качества или только на некоторые из них, принято называть управляемой переменной (или управлением). Эта терминология в определенном смысле созвучна терминологии из теории управления. Она подчеркивает, что процесс многоцелевой оптимизации имеет некоторое сходство с процессом управления системой.

Совокупность всех управляемых переменных можно рассматривать как вектор управления. Ему ставится в соответствие точка n-мерного пространства управлений.

Множество допустимых значений управляемых переменных называется областью управления. Она характеризует ту часть пространства управлений, где находятся все реализуемые управления. Эта область может быть как связной, так и несвязной. В частном случае она может состоять из отдельных изолированных точек.

Пространство целей (или целевое пространство)—это пространство, координатами которого являются значения всех рассматриваемых критериев качества .

Областью целей (или целевой областью) называется множество точек в пространстве целей, где лежат все возможные значения векторов цели .

Зависимость критериев качества от управляемых переменных представляет собой некоторое отображение пространства управлений на пространство целей. При этом каждой точке области целей соответствует одна или несколько точек пространства управлений. Это значит, что один и тот же результат (одна и та же целевая точка) может быть достигнут с помощью различных комбинаций значений управляющих величин.

Эффективным множеством компромиссов называется множество всех целевых точек, которые нельзя далее равномерно (т. е. одновременно по всем критериям) улучшить в рамках имеющихся возможностей управления. Таким образом, к этому множеству относятся все точки, несравнимые друг с другом в смысле улучшения или ухудшения эффекта управления.

Как известно, скалярные величины можно легко упорядочить путем попарного сравнения их значений. Проблема сравнения векторных величин гораздо сложнее.

Если для этой цели воспользоваться «длиной» вектора (нормой), то по существу задача сведется к сравнению скалярных величин.

Если же при сравнении, как это требуется в многоцелевой оптимизации, нужно сопоставлять отдельные компоненты векторов, то сделать однозначное заключение возможно лишь тогда, когда все без исключения компоненты одного вектора больше (или меньше) соответствующих компонент другого вектора.

Когда некоторые компоненты одного вектора меньше, а остальные — больше соответствующих компонент другого вектора, эти векторы считаются несравнимыми между собой. Эта ситуация имеет место в множестве компромиссов.

2. Решение многокритериальных задач оптимизации

Возможной реализацией многопараметрической оптимизации является обобщенная целевая функция, которая записывается следующим образом:

Для решения задачи можно воспользоваться следующими обобщёнными критериями оптимизации :

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^{m} W_i * \left[\frac{R_i^* - R_i}{R_i^*} \right]^2$$

Здесь R_i^* -наилучшее значение целевой функции, найденное при решение задачи без компромиссной оптимизации.

$W_i -$ весовой коэффициент, учитывающий важность i-го критерия.

При этом $\sum_{i=1}^{m} W_i = 1$.

Существует и другая возможность:

$$\Phi(X) = \sqrt[m]{\eta_1^{\alpha_1} * \eta_2^{\alpha_2} * ...... * \eta_{m1}^{\alpha_m}}$$

Здесь

$$\eta_i = \frac{K_i * (R_i - R_i^*)}{R_{\max,j} - R_{\min,j}}$$

$$K_i = \begin{cases} +1 & \text{для поиска минимума} \\ -1 & \text{для поиска максимума} \end{cases}$$

$\alpha_i = \dfrac{1}{W_i}$. При этом $\sum_{i=1}^{m} W_i = 1$.

1.8. Лекция №8 (Л-8) (2 часа).

Тема: «*Специальные виды программирования.*»

1.8.1 Вопросы лекции:

1. Специальные виды программирования
2. Области применения специальных видов программирования

1.8.2 Краткое содержание вопросов:

1. Специальные виды программирования

Определение коэффициентов веса параметров

Важным элементом при такой оптимизации является назначение коэффициентов веса каждого оптимизируемого параметра. Распространенный метод — определение коэффициентов веса с помощью экспертов, который представляет собой, по существу, обычное обсуждение, с той лишь разницей, что свое мнение эксперты выражают не словами, а цифрами.

Для определения влияния коэффициентов веса на результат решения задачи можно решать ее при различных значениях этих коэффициентов.

Методы экспертных оценок широко распространены в спорте, например, в фигурном катании, гимнастике. Нет основания считать неприемлемым коллективное мнение специалистов и при принятии оптимальных решений. Предложено достаточно много методов определения экспертных оценок.

Назначение коэффициентов веса.

При непосредственном назначении коэффициентов веса i-тый эксперт оценивает сравнительную важность рассматриваемых параметров, которые будут входить в целевую функцию. В этом методе каждый i-ый эксперт для каждого k-го параметра должен назначить коэффициент веса α_{ik} таким образом, чтобы сумма всех коэффициентов веса, назначенных одним экспертом для различных параметров, равнялась единице. Это требование можно записать так:

$\sum_{i=1}^{k} W_{ik} = 1$ $\quad i = \overline{1,n}$, где n — число экспертов.

1. Определить число параметров К, которые будут включены в целевую функцию.

2. Сделать таблицу по форме, которую мы будем называть базовой.

При $v < 0,2$ оценки экспертов можно считать согласованными.

В случае $v > 0,2$ целесообразно провести с экспертами содержательное обсуждение важности оцениваемых параметров, после чего повторить экспертизу. При сохранении величины разброса целесообразно учитывать вероятностный характер экспертных оценок по методам, приведенным ниже.

Как показывает опыт, удовлетворение экспертами требования

$\sum_{i=1}^{k} W_{ik} = 1 \qquad i = \overline{1, n}$, где n — число экспертов при К > 3, вызывает затруднение. Для того чтобы избежать выполнения этого требования, можно коэффициенты веса определять и другими методами, рассмотренными ниже.

Оценка важности параметров в баллах

При оценке важности параметров в баллах каждый эксперт оценивает параметры по десятибалльной системе. При этом оценка, назначаемая каждым экспертом каждому параметру не связана с оценками, которые он же назначает другим параметрам. Например, всем параметрам можно назначать одинаковую оценку. Определение экспертных оценок в баллах производится по следующему алгоритму.

1. Сформировать таблицу по форме, в которую вносятся оценки всех параметров в баллах, сделанные каждым экспертом.

Перейти от оценок параметров в баллах к значениям коэффициентов веса, сумма которых для всех параметров равна единице у каждого эксперта.

Метод парных сравнений.

Если при $k > 3$ одновременная оценка всех параметров вызывает затруднения, их можно оценивать еще одним методом, который называется методом парных сравнений. Этот метод реализуется с помощью следующего алгоритма.

1.Определить число оцениваемых параметров k и число экспертов n.

Пусть $k = 5$; $n = 4$.

2. Для каждого эксперта составить отдельную таблицу .

В этой таблице эксперт должен ввести оценку парных сравнений, которая заключается в следующем.

Если k-ый параметр важнее j-го, то в ячейке, принадлежащей k-ой строке и j-му столбцу, указывается 1, иначе — 0.

Схемы компромиссов.

Принцип равномерности.

Этот принцип имеет несколько разновидностей:

а. Принцип равенства нормированных критериев.

б. Принцип квазиравенства.

в. Принцип «справедливой уступки».

2. Принцип последовательной «уступки».

При таком способе нахождения компромиссного решения сразу видно, ценой какой «уступки» в одном частном критерии приобретается выигрыш в другом.

На практике используются и некоторые другие схемы компромиссов.

2. Области применения специальных видов программирования

Использование множителей Лагранжа

При решении задач векторной оптимизации обычно вначале ищется множество эффективных неулучшаемых решений (множество Парето). Затем для принятия окончательного решения используется та или иная схема компромисса.

Сложность решения задачи во многом зависит от того, известна ли аналитическая зависимость обобщенного критерия оптимальности от частных критериев или она должна быть найдена с помощью численного эксперимента на ЭВМ.

Если функциональная зависимость обобщенного критерия от частных критериев установлена, то для решения задачи можно использовать метод неопределенных множителей Лагранжа

Метод e-ограничений [21] предполагает видоизменение постановки этой задачи: f1opt=min f1(x),с учетом ограничений на остальные критерии оптимальности: ei≥fi(x), где ei — максимальные допустимые (пороговые) значения критериев оптимальности, кроме первого.

Для решения задачи составляется функция Лагранжа

$$L = f_1(x) + \sum_{i=2}^{k} \lambda_i * (f_i(x) - e_i)$$

где λ_i — неопределенные множители Лагранжа.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

2.1 Практическое занятие №1 (2 часа).

Тема: «Решения задач оптимизации, виды задач оптимизации технологических процессов»

2.1.1 Задание для работы:

1. Определить знак Δ.
2. Определить интервал поиска минимума функции по заданным исходным данным (*табл. 1* и *2*).

Исходные данные

Таблица 1

Вариант	Вид функции	x_0
1	x^2+5	22
2	x^2+2x+1	-20
3	$(1-x)^4$	25
4	$(x^2+1)/x$	-20
5	$3x(x-1)$	10

Таблица 2

Вариант	|Δ|	λ
1	1	0,01
2	2	0,02
3	3	0,03
4	4	0,02
5	5	0,01

2.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

В процессе применения одномерных методов поиска оптимума функции можно выделить два этапа:

3. Установления границ интервала;
4. Уменьшения интервала.

Пусть функция f(x) унимодальна на замкнутом интервале $a \le x \le b$, а ее минимум достигается в точке x* (*рис. 1*).

Рассмотрим точки x_1 и x_2, для которых $a < x_1 < x_2 < b$.

1. Если $f(x_1) > f(x_2)$, то $x^* \in (x_1, b)$;
2. Если $f(x_1) < f(x_2)$, то $x^* \in (a, x_2)$;
3. Если $f(x_1) = f(x_2)$, то $x^* \in (x_1, x_2)$.

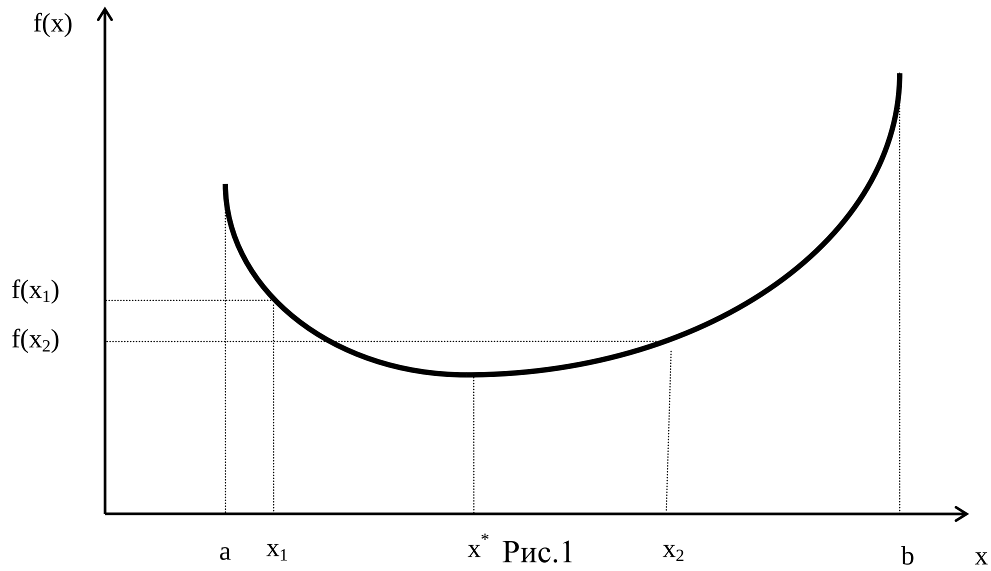


Рис.1

Поиск граничных точек проводится с помощью эвристических (не имеющих строгого обоснования, а опирающихся на опыт и интуицию) методов поиска. В соответствии с одним из методов, предложенным Свенном, (k+1)-я пробная точка определяется по рекуррентной (выражающей каждый член последовательности через ее предыдущий член) формуле

$$x_k+1=x_k+2^k\,\Delta,\ k=0,\ 1,\ 2,\ ..., \qquad (1)$$

где x_0 – произвольно выбранная начальная точка,

Δ – подбираемая некоторым способом величина шага.

Знак Δ подбирается путем сравнения значений $f(x_0)$, $f(x_0+|\Delta|)$ и $f(x_0-\text{-}|\Delta|)$.

Если $f(x_0-|\Delta|) \geq f(x_0) \geq f(x_0+|\Delta|)$, то, согласно предположению об унимодальности, точка минимума должна располагаться правее точки x0 и величина Δ выбирается положительной.

Если $f(x_0-|\Delta|) \leq f(x_0) \leq f(x_0+|\Delta|)$, то Δ выбирается отрицательной.

Если $f(x_0-|\Delta|) \geq f(x_0) \leq f(x_0+|\Delta|)$, то точка минимума лежит между $x_0-\text{-}|\Delta|$ и $x_0+|\Delta|$ и поиск граничных точек завершен.

Эффективность поиска граничных точек зависит от величины шага Δ. Если Δ велико, то получаем грубые оценки координат граничных точек, и построенный интервал весьма широк. Если Δ мало, то для определения граничных точек может понадобиться большой объем вычислений.

Как обычно, работа начинается с формирования блока исходных данных. В данном случае исходными данными являются вид минимизируемой функции, начальная точка поиска x_0 и величина шага Δ.

Определение знака Δ. Для этого необходимо подсчитать значения функции в точках x_0, $x_0+|\Delta|$, x_0 - $|\Delta|$, затем сравнить эти значения. Для сравнения значений функции и выбора в зависимости от этого знака Δ используем логическую функцию Excel ЕСЛИ(). Аргумент этой функции имеет следующую размерность: ЕСЛИ (логическое выражение; значение, если истина; значение, если ложь). Для записи условий сравнения значений функции в этих точках используется также логическая функция И(), имеющая размерность И (логическое выражение 1; логическое выражение 2). Данная функция возвращает значение ИСТИНА, если хотя бы одно логическое выражение ИСТИНА, или ЛОЖЬ, если оба логических выражения ЛОЖЬ. Любая функция EXCEL может быть использована в качестве аргумента другой функции. В этом случае она называется вложенной. В EXCEL может быть использовано до 9 уровней вложения функций.

Для нашего случая функция должна быть записана таким образом:

$$=\text{ЕСЛИ}(\text{И}(f(x_0)<=f(x_0-|\Delta|);f(x_0)>=f(x_0+|\Delta|));\Delta;$$
$$(\text{ЕСЛИ}(\text{И}(f(x_0)>=f(x_0-|\Delta|);f(x_0)<=f(x_0+|\Delta|));-\Delta;$$
$$\text{"Поиск границ завершен"})).$$

Данная функция возвращает значение Δ или $-\Delta$ в зависимости от значений функции в точках x_0, $x_0+|\Delta|$, $x_0 - |\Delta|$, либо признает точки $x_0+|\Delta|$, $x_0 - |\Delta|$ границами интервала. В последнем случае кроме того, что границы интервала найдены, необходимо вывести их в виде $a=x_0 - |\Delta|$, $b=x_0+|\Delta|$. Для этого необходимо составить новую функцию, которая не возвращает ничего, если

$$f(x_0 - |\Delta|)>=f(x_0)>=f(x_0+|\Delta|,\ f(x_0-|\Delta|)<=f(x_0)<=f(x_0+|\Delta|,$$

и возвращает в одной ячейке значение "a=", в смежной с ней – значение $x_0-|\Delta|$, еще в одной ячейке – "b=" и в смежной с ней - $x_0+|\Delta|$, если

$$f(x_0-|\Delta|)>=f(x_0)<=f(x_0+|\Delta|.$$

Данная функция составляется аналогично предыдущей с использованием функций ЕСЛИ() и И().

Таким образом, если границы интервала не найдены при выполнении I этапа работы, мы определили, как минимум, знак Δ. Теперь можно приступить к определению границ интервала. Начальная точка x_0 задана, следующие пробные точки определяем по формуле Свенна (*1*). В расчетном блоке для их определения необходимо выделить отдельную графу для индекса x, так как этот индекс используется в формуле для расчета пробных точек. Сам расчет пробных точек и значений функции в этих точках очевиден и не требует подробного рассмотрения.

Интересна организация вывода на экран результатов сравнения значений функции в пробных точках. Предлагается выводить эти результаты в двух графах. В левой графе выводится текст "x>" или "x<" в зависимости от значения функции в пробной точке и знака Δ, а в правой графе выводятся значение x в пробной точке. Если $f(x_{k+1})<f(x_k)$, то выводится "x>", если $f(x_{k+1})>f(x_k)$ - "x<" для Δ положительной. Для Δ отрицательной наоборот - "x<", если $f(x_{k+1})<f(x_k)$ и "x>", если $f(x_{k+1})>f(x_k)$. Для этого в левой графе составляется следующее выражение: =ЕСЛИ($f(x_{k+1})<f(x_k)$;ЕСЛИ(Δ>0; "x>";"x<");ЕСЛИ(Δ>0; "x<";"x>")). Для копирования выражения во все ячейки левой графы следует не забыть присвоить ячейке, содержащей Δ, абсолютный адрес.

Для вывода необходимых значений x в правой графе также составляются логические функции. Границами интервала поиска будут значения x, соответствующие последнему "x>" – a, и первому "x<" – b для $\Delta>0$, и наоборот, последнему "x<" – a и первому "x>" – b для $\Delta<0$.

2.1.3 Результаты и выводы:

- Составить отчет и сделать выводы

2.2 Практическое занятие №2 (2 часа).

Тема: «Решение задач оптимизации аналитическим методом целевой функции одной переменной»

2.2.1 Задание для работы:

По результатам экспериментальных исследований приведенных в задачах требуется:

- определить входные и выходные параметры и стратегию поиска максимума или минимума функции;
- определить подходящий вид регрессионной однофакторной модели РОФМ;
- рассчитать коэффициенты регрессии;

- определить адекватность полученного уравнения, значимость коэффициентов регрессии и их доверительные интервалы;
- произвести аппроксимацию результатов эксперимента на ЭВМ и получить РОФМ искомой зависимости;
- аналитическим методом рассчитать оптимальное значение функции;
- произвести оптимизацию функции на ЭВМ методами дихотомии, золотого сечения и Фибоначчи;

Задача:

Задача 1. На наклонном очистителе ОН-6-4М проведено исследование влияния частоты вращения ножевого барабана n (мин$^{-1}$) на эффективность очистки Y1(%) и степень рыхления Y2(масса 500 клочков на 1 г).

Таблица 1.1

	Частота вращения ножевых барабанов n , мин$^{-1}$						
	400	500	600	700	800	900	1000
Эффективность очистки (%)	36,5 36,8 36,4	40,8 41,2 41,6	44,5 45,0 44,7	48,5 46,8 47,7	51,6 51,2 51,8	55,8 55,0 55,4	59,0 58,4 59,3

Таблица 1.2

X Y	Частота вращения ножевых барабанов n, мин$^{-1}$						
	400	500	600	700	800	900	1000
Огепень рыхления	1,12 1,10 1,16	1,10 1,08 1,12	1,00 1,07 1,04	1,05 1,02 0,99	1,00 1,02 0,96	0,92 0,94 0,90	0,85 0,86 0,80

2.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

1.Записать название лабораторной работы и формулировку задания.

2. Переписать полученную задачу и ее содержание.
3. Данные параметров эксперимента (x, y) записать в табл. 1.

Таблица 1

	Записать параметры X и Y				
X					
У					

4. Произвести аппроксимацию результатов эксперимента на Э В М методом наименьших квадратов.
5. Определить число точек в эксперименте, т.е. количество пар X и Y.
6. Данные из табл.1 ввести в ЭВМ и произвести аппроксимацию результатов эксперимента.
7. После расчета на ЭВМ данные коэффициентов полинома с экрана записать в табл. 2.

Таблица 2

Наименование коэф.	Степень полинома **2**	Степень полинома **5**
1	2	3
B (0)		
B (1) * X		
B (2) * X^2		
B (3) * X^3		
B (4) * X^4		
B (5) * X^5		
Коэф. Корреляции R		

2.2.3 Результаты и выводы:

- сравнить полученные значения оптимума функции, рассчитанные различными методами;
- оценить точность этих методов
- Составить отчет и сделать выводы

2.3 Практическое занятие №3 (2 часа).

Тема: «Решение задач оптимизации аналитическим методом целевой функции многих переменных»

2.3.1 Задание для работы:

По результатам активного факторного эксперимента, приведенным в задачах, требуется :

- провести проверку гипотезы об однородности дисперсий в опытах матрицы с помощью критерия Кочрена ;
- определить коэффициенты регрессии в регрессионной многофакторной модели (РМФМ) и их значимость;
- провести проверку адекватности полученной математической модели зависимости;
- аналитическим методом рассчитать экстремумы функции;
- произвести оптимизацию функции на ЭВМ численными методами;
- рассчитать оптимум функции диссоциативно- шаговым методом.

Пример: Задача 1. На кипном рыхлителе АПК-4 проведен эксперимент при переработке 6 кип хлопка 5 типа 1 и 2 сортов (75% первого и 25% второго сорта) с засоренностью 3,5% с целью выявления зависимостей :

Y_1- времени срабатывания ставки кип , мин$^{-1}$;

Y_2- массы хлопка за один цикл , кг;

Y_3- производительности АПК-4 , кг/ч ;

Y_4- средней массы 100 клочков (рыхление), г.

В качестве входных переменных выбраны следующие скоростные параметры:

Таблица 1.1

Факторы	Уровни варьирования			Интервал
	-1	0	+1	
X_1- скорость перемещения контейнера с кипами V , м/мин	0,3	0,8	1,3	0,5
X_2- высота срабатывания ставки кип H , мм	200	500	800	300

В эксперименте применялся D- оптимальный план Коно (K_2). Матрица планирования и результаты исследований приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

№ п/п	Факторы				Параметры оптимизации			
	X1	V	X2	H	Y1	Y_2	Y3	Y4
1	0	0,8	0	500	4,4	25,0	356,8	38,8
2	+	1,3	+	800	2,7	33,5	663	41,0
3	-	0,3	+	800	11,7	25,5	153	21,6
4	-	0,3	-	200	11,8	17,5	100	23,6
5	+	1,3	-	200	2,7	21,5	433,3	36,5
6	+	1,3	0	500	2,7	26,0	581,5	37,0
7	0	0,8	+	800	4,4	33,5	406,8	34,5
8	-	0,3	0	500	11,7	24,8	134,2	28,9
9	0	0,8	-	200	4,4	21,5	256,9	30,4
10	0	0,8	0	500	4,3	24,8	350,8	39,2
11	0	0,8	0	500	4,5	25,2	358,7	38,6

2.3.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Записать название лабораторной работы и формулировку задания.
2. Записать номер своей задачи и ее содержание, факторы и уровни варьирования, матрицу планирования и параметры оптимизации эксперимента .
3. Для ЭВМ подготовить:

количество экспериментов ______________________

количество факторов ________________

количество повторных опытов __________________

относительная точность данных. Е = 0,001.

4. Ввод коэффициента кодирования факторов в ЭВМ.

Таблица 1

Для 2-факторного		Для 3- (шкторного	
Z_0	Zi	Zo	Zi
0	1	0	1
0	1	0	1
-	-	0	1

5. Ввод маски линейных членов в ЭВМ.

Таблица 2

Свободный член= 1	Свободный член= 1
X1 = 1	X1 = 1
X2 = 1	X2 = 1
-	X3 =1

6. Ввод маски квадратических членов в ЭВМ

Таблица 3

	X1	X2		X1	X2	X3
X1	1	*	X1	1	*	*
X2	1	1	X2	1	1	*
-	-	-	X3	1	1	1

7. Ввести матрицу в ЭВМ. Ввод построчный.

(+) вводить 1 , (-) вводить -1 , (0) вводить 0.

8. После ввода матрицы ввести параметры оптимизации опыта в Э В М (Y1, Y2, и т.д.).

9. Начертить таблицы для 2- факторного или для 3- факторного эксперимента и заполнить их после расчета на ЭВМ.

Таблица 4

Наименование	Коэффициенты	Стандартная ошибка
Своб.член ($В_о$)		
Х , (В,)		
Х2 (В2)		
Х,*Х, (В,,)		
Х,*Х2 (В,2)		
Х2*Х2 (В22)		

Сумма квадратов отклонений

Среднее квадратическое отклонение =

Таблица 5

Тип	Степень свободы	F (расчетное)	Критерий Фишера
1.			

Таблица 6

Наименование	Коэффициенты	Стандартная ошибка
1	2	3
Своб.член ($В_о$)		
Х1 (В1)		
Х2 (В2)		
Х3 (Вз)		
Х1*Х1 (В11)		
Х1*Х2 (В12)		
Х2*Х2 (В22)		
Х1*Х3 (В1з)		
Х2*Х3 (В23)		
Х3*Х3 (В33)		

Сумма квадратов отклонений =

Среднее квадратическое отклонение =

Таблица 7

Тип	Степень свободы	F (расчетное)	Критерий Фишера
1.			

2.3.3 Результаты и выводы:

- сравнить полученные значения оптимума функции, рассчитанные различными методами, и оценить точность этих методов
- Составить отчет и сделать выводы

2.4 Практическое занятие №4 (2 часа).

Тема: «Решения задач линейного программирования симплексным методом»

2.4.1 Задание для работы:

По результатам экспериментальных исследований приведенных в задачах требуется:

- определить входные и выходные параметры и стратегию поиска максимума или минимума функции;
- определить подходящий вид регрессионной однофакторной модели РОФМ;
- рассчитать коэффициенты регрессии;
- определить адекватность полученного уравнения, значимость коэффициентов регрессии и их доверительные интервалы;
- произвести аппроксимацию результатов эксперимента на ЭВМ и получить РОФМ искомой зависимости;
- произвести оптимизацию функции на ЭВМ симплексным методом.

Например: Задача 1. На наклонном очистителе ОН-6-4М проведено исследование влияния частоты вращения ножевого барабана n (мин$^{-1}$) на эффективность очистки Y1(%) и степень рыхления Y2(масса 500 клочков на 1 г).

Таблица 1.1

	Частота вращения ножевых барабанов n , мин$^{-1}$						
	400	500	600	700	800	900	1000
Эффективность очистки (%)	36,5 36,8 36,4	40,8 41,2 41,6	44,5 45,0 44,7	48,5 46,8 47,7	51,6 51,2 51,8	55,8 55,0 55,4	59,0 58,4 59,3

Таблица 1.2

X Y	Частота вращения ножевых барабанов n, -т						
	400	500	600	700	800	900	1000
Огепень рыхления	1,12 1,10 1,16	1,10 1,08 1,12	1,00 1,07 1,04	1,05 1,02 0,99	1,00 1,02 0,96	0,92 0,94 0,90	0,85 0,86 0,80

2.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Определить стратегию поиска максимума или минимума функции в выданной задаче.

2. По результатам экспериментальных исследований (по данным из табл.1) построить график зависимости входных и выходных параметров (рис.1).

A (X лев.) B (X прав.)

Рис.1. График зависимости

3. По графику определить оптимальное значение функции F (У).
4. Подготовить данные для ЭВМ.

Поиск минимума или максимума ________________

Степень полинома (от 1 до 7) ________

Степень 2 Степень 5

В(0) =____________ ______________________

В (1) = ____________ ______________________

в (2) =____________ ______________________

В (3) = ____________ ______________________

В (4) = ____________ ______________________

В (5) = ____________ ______________________

А (нижняя граница отрезка Х лев) = ______________

В (верхняя граница отрезка Х прав.) = ____________

Точность Е = 0,001.

5. Подготовленные данные ввести в ЭВМ , а полученные результаты с экрана ЭВМ записать в табл. 3.

Таблица 3

№ п/п	Метод оптимизации	X	Y
1.	Аналитический		
2.	Графический		
3.	Дихотомии		
4.	“Золотого сечения ”		
6.	Фибоначчи		
7.	Дихотомии (калькулятор)		

2.4.3 Результаты и выводы:

- Составить отчет и сделать выводы

2.5 Практическое занятие №5 (2 часа).

Тема: «Решение задач нелинейного программирования»

2.5.1 Задание для работы:

По результатам активного факторного эксперимента, приведенным в задачах , требуется :

- провести проверку гипотезы об однородности дисперсий в опытах матрицы с помощью критерия Кочрена ;
- определить коэффициенты регрессии в регрессионной многофакторной модели (РМФМ) и их значимость;
- провести проверку адекватности полученной математической модели зависимости;
- аналитическими методами рассчитать экстремумы функции;
- произвести оптимизацию функции на ЭВМ численными методами;
- рассчитать оптимум функции диссоциативно- шаговым методом.

Пример: Задача 1. На кипном рыхлителе АПК-4 проведен эксперимент при переработке 6 кип хлопка 5 типа 1 и 2 сортов (75% первого и 25% второго сорта) с засоренностью 3,5% с целью выявления зависимостей :

Y_1- времени срабатывания ставки кип , мин$^{-1}$;

Y_2- массы хлопка за один цикл , кг;

Y_3- производительности АПК-4 , кг/ч ;

Y_4- средней массы 100 клочков (рыхление), г.
В качестве входных переменных выбраны следующие скоростные параметры:

Таблица 1.1

Факторы	Уровни варьирования			Интервал
	-1	0	+1	
X_1- скорость перемещения контейнера с кипами V , м/мин	0,3	0,8	1,3	0,5
X_2- высота срабатывания ставки кип H , мм	200	500	800	300

В эксперименте применялся D- оптимальный план Коно (K_2). Матрица планирования и результаты исследований приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

№ п/п	Факторы				Параметры оптимизации			
	X1	V	X2	H	Y1	Y_2	Y3	Y4
1	0	0,8	0	500	4,4	25,0	356,8	38,8
2	+	1,3	+	800	2,7	33,5	663	41,0
3	-	0,3	+	800	11,7	25,5	153	21,6
4	-	0,3	-	200	11,8	17,5	100	23,6
5	+	1,3	-	200	2,7	21,5	433,3	36,5
6	+	1,3	0	500	2,7	26,0	581,5	37,0
7	0	0,8	+	800	4,4	33,5	406,8	34,5
8	-	0,3	0	500	11,7	24,8	134,2	28,9
9	0	0,8	-	200	4,4	21,5	256,9	30,4
10	0	0,8	0	500	4,3	24,8	350,8	39,2
11	0	0,8	0	500	4,5	25,2	358,7	38,6

2.5.2 Краткое описание проводимого занятия:

1.Подготовить данные для ЭВМ.

Поиск минимума или максимума ? __________ .

Число переменных (факторы - X) ? ________________ .

Диапазоны для переменных:

Факторы	**Левый**	**Правый**
X,		
X2		
X3		

Точность E = 0,001 .

Коэффициенты: B_0 = ______________

B_1 = _______________

B_2 = _______________

B_3 = ________________

B_{12} = ________________

B_{13} = ________________

B_{23} = ________________

B_{11} = ________________

B_{22} = ________________

$^{B}33$ = ______________

(При двух переменных у B_3, B_{13}, B_{23}, B_{33} ставить 0.)

2. Подготовленные данные ввести в ЭВМ, а полученные на экране результаты записать в табл. 8.

Таблица 8

№ п/п	Метод оптимизации	**X₁**	**X₂**	**X₃**	**Y**
1.	Аналитический				
2.	Графический				
3.	Диссоциативно- шаговый				
4.	Дихотамии				
5.	Случайный поиск				
6.	Симплексный поиск				
7.	Симплексный (калькулятор)				

2.5.3 Результаты и выводы:

- сравнить полученные значения оптимума функции, рассчитанные различными методами, и оценить точность этих методов
- Составить отчет и сделать выводы

2.6 Практическое занятие №6,7 (4 часа).

Тема: «Геометрический метод решения двухфакторных задач оптимизации»

2.6.1 Задание для работы:

С целью экономии электроэнергии определить оптимальное число станков, работающих в 1-ю (дневную) и 2-ю (вечернюю) смены, учитывая, что часть ткачих (молодые матери, студенты-вечерники) могут работать только в 1-ю смену. При этом должна быть выполнена дневная норма выработки продукции, не должно быть перерасхода дневного фонда заработной платы.

Исходные данные:

S – количество работающих станков в ткацком цехе, ст.;

N – число ткачих, работающих в цехе, чел.;

D – дневная выработка продукции ткацким цехом, тыс. м;

Z – дневной фонд оплаты труда ткачих, тыс. р.;

z_1 – тариф оплаты труда ткачихи за выработку 1 м ткани в 1-ю смену, р./м;

z_2 – тариф оплаты труда ткачихи за выработку 1 м ткани во 2-ю смену, р./м;

a – число ткачих, работающих только в 1-ю смену;

c_1 – норма обслуживания ткачихи при работе в 1-ю смену, ст.;

c_2 – норма обслуживания ткачихи при работе во 2-ю смену, ст.;

v_1 – норма выработки ткани на один станок в 1-ю смену, м/ч;

v_2 – норма выработки ткани на один станок во 2-ю смену, м/ч;

e – мощность электродвигателя станка, кВт;

k – коэффициент сменности;

E_1 – лимит расхода электроэнергии в 1-ю смену, кВт ч;

E_2 – лимит расхода электроэнергии во 2-ю смену, кВт ч;

Вариант	S	N	D	Z	z_1	z_2	a	c_1	c_2	v_1	v_2	e	k	$E_1 \cdot 10^3$	$E_2 \cdot 10^3$
61	150	35	20	4,85	18	20	5	11	10	9,2	8,9	1,8	1,7	3,0	5,0
62	200	45	25	6,00	15	17	15	10	8	8,3	7,5	1,9	1,8	3,5	4,0

63	250	45	19	7,50	15	20	12	11	9	6,0	5,0	2,0	1,5	3,6	6,0
64	300	50	40	8,00	19	21	10	14	12	12,0	10,0	1,7	1,8	3,5	5,0
65	350	55	30	8,00	15	17	15	11	10	10,0	8,0	1,9	1,5	3,0	5,5
66	400	70	40	8,50	15	18	15	9	11	10,0	8,0	1,8	1,4	3,0	6,0

Решить задачу геометрическим методом и с использованием электронных таблиц Excel. Определить, как изменится решение задачи при изменении следующих исходных данных:

- при снижении дневного фонда оплаты труда на 8 %;
- при сокращении числа ткачих в цехе на 12 %;
- при увеличении плана по выпуску тканей на 35 %;

при снижении лимита электроэнергии в 1-ю смену на 20 %.

2.6.2 Краткое описание проводимого занятия:

Составим математическую модель задачи.

Управляемые переменные:

X_1 – количество станков, работающих в 1-ю смену;

X_2 - количество станков, работающих во 2-ю смену.

Критерием оптимальности в данной задаче будет расход электроэнергии за сутки.

Целевая функция:

$F(X_1, X_2) = 8\ e\ (X_1 + X_2)$. $F(X_1, X_2) = 8 \cdot 1{,}8\ (X_1 + X_2)$.

Ограничения задачи:

- по количеству станков

$X_1 \le S$; $X_1 \le 150$;

$X_2 \le S$; $X_2 \le 150$;

- по количеству ткачих, работающих в 1-ю смену

$X_1/c_1 \ge a$; $X_1/11 \ge 5$;

- по количеству ткачих, работающих в обе смены

$X_1/c_1 + X_2/c_2 \le N$; $X_1/11 + X_2/10 \le 35$;

- по количеству вырабатываемой за сутки продукции

$8\ (v_1 X_1 + v_2 X_2) \ge D$; $8\ (9{,}2\ X_1 + 8{,}9\ X_2) \ge 20\ 000$;

- по использованию дневного фонда оплаты труда ткачих

$8\ (z_1 X_1/c_1 + z_2 X_2/c_2) \le Z$; $8\ (18\ X_1/11 + 20\ X_2/10) \le 4\ 850$;

- по расходу электроэнергии

$8\ e\ X_1 \le E_1$; $8\ e\ X_2 \le E_2$; $8 \cdot 1{,}8 \cdot X_1 \le 3\ 000$; $8 \cdot 1{,}8 X_2 \le 5\ 000$;

- по коэффициенту сменности

$(X_1 + X_2)/S \ge k$; $(X_1 + X_2)/150 \ge 1{,}7$;

- по физическому смыслу

$X_1 \ge 0,\ X_2 \ge 0$; X_1, X_2 – целые.

Решим задачу геометрически. Для этого на плоскости (X_1, X_2) (*рис. 1*) построим прямые, соответствующие неравенствам ограничений, и линии уровня целевой функции. Определим на графике область допустимых решений (ОДР) и оптимальную точку.

Оптимальная точка является точкой пересечения линий:

$$\begin{cases} X_1 \le S, \\ 8\ (v_1 X_1 + v_2 X_2) \ge D \end{cases}$$

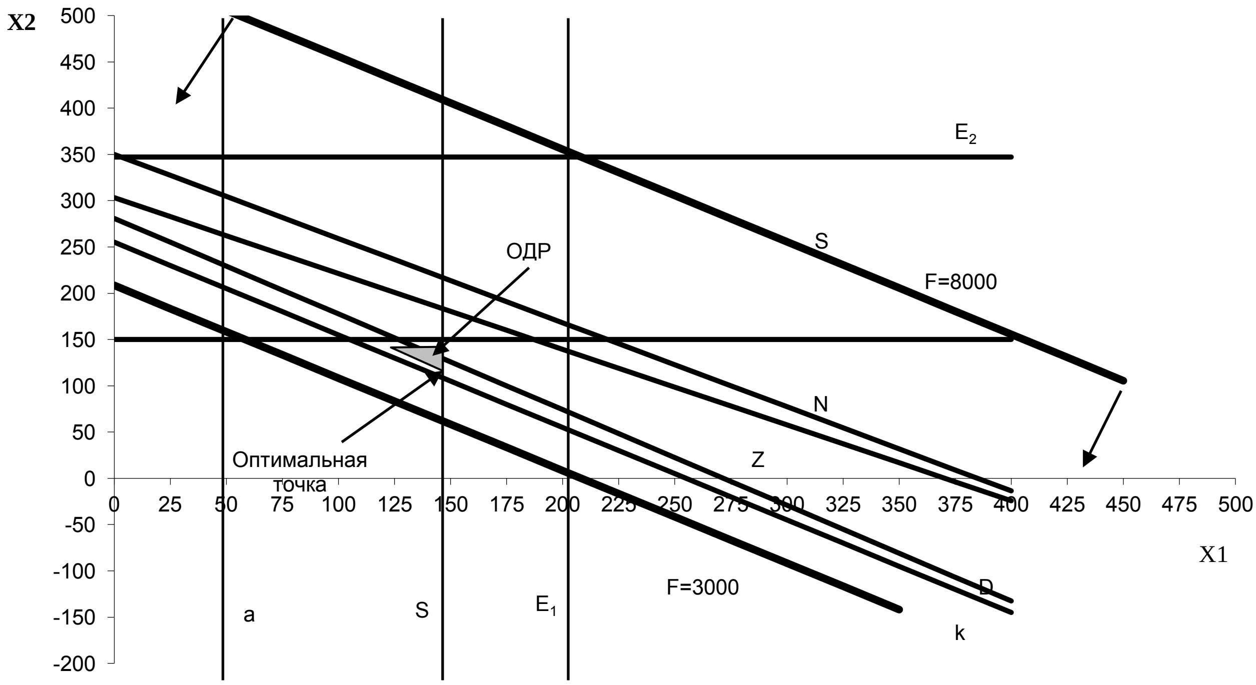


Рис. 1.

Решив систему двух уравнений, найдем координаты оптимальной точки:

$X_1 = 150$; $X_2 = 126$.

Подставив координаты оптимальной точки в уравнение целевой функции, получим ее минимальное значение: F = 3 974,4.

Таким образом, для минимизации расхода электроэнергии необходимо использовать при работе в первую смену все 150 станков, а при работе во вторую смену – 126 станков. При этом будут выполнены все ограничения и расход электроэнергии составит 3 974,4 кВт.

2.6.3 Результаты и выводы:

Составить отчет и сделать выводы