ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.Б.05 Математика

Направление подготовки: 36.03.01 «Ветеринарно-санитарная экспертиза»

Профиль образовательной программы: Ветеринарно-санитарная экспертиза

Форма обучения: очная

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.1 Лекция №1 (4 часа)

Тема: «Определители и их свойства. Матрицы. СЛУ».

1.1.1. Вопросы лекции:

1. Понятие СЛУ.
2. Понятие ранга СЛУ.
3. Матрицы.
4. Операции над матрицами.
5. Решение СЛУ методом Гаусса.
6. Определители.
7. Вычисление определителей.
8. Формулы Крамера для решения СЛУ.

1.1.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие СЛУ.

Определение. Линейными операциями над какими-либо объектами называются их сложение и умножение на число.

Определение. Линейной комбинацией переменных называется результат применения к ним линейных операций, т.е. $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$, где α_i – числа, x_i – переменные.

Определение. Линейным уравнением называется уравнение вида

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = b, \qquad (2.1)$$

где a_i и b – числа, x_i - неизвестные.

Таким образом, в левой части линейного уравнения стоит линейная комбинация неизвестных, а в правой – число.

Определение. Линейное уравнение называется однородным, если b = 0. В противном случае уравнение называется неоднородным.

Определение. Системой линейных уравнений (линейной системой) называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (2.2)$$

где a_{ij}, b_i - числа, x_j - неизвестные, n – число неизвестных, m – число уравнений.

Определение. Решением линейной системы (2.2) называется набор чисел $x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}$, которые при подстановке вместо неизвестных обращают каждое уравнение системы в верное равенство.

2. Понятие ранга СЛУ.

Если ранг матрицы порядка *p* на *n* равен *r*, то все элементы строк (и столбцов) матрицы, не образующие выбранный базисный минор, линейно выражаются через соответствующие элементы строк (и столбцов), образующих базисный минор.

Что нам дает теорема о ранге матрицы?

Если по теореме Кронекера – Капелли мы установили совместность системы, то выбираем любой базисный минор основной матрицы системы (его порядок равен *r*), и исключаем из системы все уравнения, которые не образуют выбранный базисный минор. Полученная таким образом СЛАУ будет эквивалентна исходной, так как отброшенные уравнения все равно излишни (они согласно теореме о ранге матрицы являются линейной комбинацией оставшихся уравнений).

В итоге, после отбрасывания излишних уравнений системы, возможны два случая.

1. Если число уравнений r в полученной системе будет равно числу неизвестных переменных, то она будет определенной и единственное решение можно будет найти методом Крамера, матричным методом или методом Гаусса.

2. Если число уравнений r в полученной СЛАУ меньше числа неизвестных переменных n, то в левых частях уравнений оставляем слагаемые, образующие базисный минор, остальные слагаемые переносим в правые части уравнений системы с противоположным знаком.

Неизвестные переменные (их r штук), оставшиеся в левых частях уравнений, называются основными.

еизвестные переменные (их n - r штук), которые оказались в правых частях, называются свободными.

Теперь считаем, что свободные неизвестные переменные могут принимать произвольные значения, при этом r основных неизвестных переменных будут выражаться через свободные неизвестные переменные единственным образом. Их выражение можно найти решая полученную СЛАУ методом Крамера, матричным методом или методом Гаусса.

3. Матрицы.

Определение. Матрицей называется прямоугольная таблица чисел.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Обозначения: А – матрица, a_{ij} - элемент матрицы, $i-$ номер строки, в которой стоит данный элемент, $j-$ номер соответствующего столбца; m – число строк матрицы, n – число ее столбцов.

Определение. Числа m и n называются размерностями матрицы.

Определение. Матрица называется квадратной, если m = n. Число n в этом случае называют порядком квадратной матрицы.

Каждой квадратной матрице можно поставить в соответствие число, определяемое единственным образом с использованием всех элементов матрицы. Это число называется определителем.

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Определение. Транспонированием матрицы называется замена ее строк столбцами с теми же номерами.

4. Операции над матрицами.

Суммой двух матриц одинакового порядка называют матрицу такого же порядка, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц.

Аналогично, разностью двух матриц одинакового порядка называют матрицу такого же порядка, элементы которой равны разности соответствующих элементов матриц.

Произведением матрицы на число есть матрица того же порядка, элементы которой получены умножением соответствующих элементов матриц на это же число.

5. Решение СЛУ методом Гаусса.

Замечание. Линейная система (2.2) может иметь единственное решение, бесконечно много решений или не иметь ни одного решения.

Условия существования и количества решений линейной системы будут изучены в дальнейшем, а пока рассмотрим способы нахождения единственного решения системы, в которой число уравнений равно числу неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2.3}$$

Пусть $a_{11} \neq 0$ (этого всегда можно добиться, поменяв уравнения местами). Разделим обе части первого уравнения на a_{11} и вычтем полученное уравнение из каждого из остальных уравнений системы, умножив его предварительно на a_{i1}, где i – номер очередного уравнения. Как известно, полученная при этом новая система будет равносильна исходной. Коэффициенты при x_1 во всех уравнениях этой системы, начиная со второго, будут равны 0, т.е. система выглядит так:

$$\begin{cases} x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1 \\ \quad \tilde{a}_{22}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \tilde{a}_{n2}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{nn}x_n = \tilde{b}_n \end{cases}.$$

Таким же образом можно исключить x_2 из третьего и последующих уравнений. Продолжая эту операцию для следующих неизвестных, приведем систему к так называемому треугольному виду:

$$\begin{cases} x_1 + \ddot{a}_{12}x_2 + \ldots + \ddot{a}_{1n}x_n = \ddot{b}_1 \\ \quad x_2 + \ldots + \ddot{a}_{2n}x_n = \ddot{b}_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad x_n = \ddot{b}_n \end{cases}. \tag{2.4}$$

Здесь символами $\tilde{a}_{ij}, \ddot{a}_{ij}, \tilde{b}_i$ и $\ddot{b}_i$ обозначены изменившиеся в результате преобразований числовые коэффициенты и свободные члены.

Из последнего уравнения системы (2.4) единственным образом определяется x_n, а затем последовательной подстановкой – остальные неизвестные.

Замечание. Иногда в результате преобразований в каком-либо из уравнений обращаются в 0 все коэффициенты и правая часть, то есть оно превращается в тождество 0=0. Исключив его из системы, мы уменьшим число уравнений по сравнению с числом неизвестных. Такая система не может иметь единственного решения.

Если же в процессе применения метода Гаусса какое-нибудь уравнение превратится в равенство вида 0=1 (коэффициенты при неизвестных обратились в 0, а правая часть приняла ненулевое значение), то исходная система не имеет решения, так как подобное равенство является неверным при любых значениях неизвестных.

6. Определители.

Определение. Определителем второго порядка называется число, полученное с помощью элементов квадратной матрицы 2-го порядка следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

При этом из произведения элементов, стоящих на так называемой главной диагонали матрицы (идущей из левого верхнего в правый нижний угол) вычитается произведение элементов, находящихся на второй, или побочной, диагонали.

Определение. Определителем третьего порядка называется число, определяемое с помощью элементов квадратной матрицы 3-го порядка следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Замечание. Для того чтобы легче запомнить эту формулу, можно использовать так называемое правило треугольников. Оно заключается в следующем: элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «+», располагаются так:

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, образуя два треугольника, симметричных относительно главной диагонали. Элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «-», располагаются аналогичным образом относительно побочной диагонали: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

7.Вычисление определителей.

Сформулируем и докажем основные свойства определителей 2-го и 3-го порядка (доказательство проведем для определителей 3-го порядка).

<u>Свойство 1.</u> Определитель не изменяется при транспонировании, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Замечание. Следующие свойства определителей будут формулироваться только для строк. При этом из свойства 1 следует, что теми же свойствами будут обладать и столбцы.

<u>Свойство 2</u>. При умножении элементов строки определителя на некоторое число весь определитель умножается на это число, т.е.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

<u>Свойство 3.</u> Определитель, имеющий нулевую строку, равен 0.

<u>Свойство 4.</u> Определитель, имеющий две равные строки, равен 0.

<u>Свойство 5</u>. Определитель, две строки которого пропорциональны, равен 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

<u>Свойство 6</u>. При перестановке двух строк определителя он умножается на –1.

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

<u>Свойство 7.</u>

$$\begin{vmatrix} b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

<u>Свойство 8.</u> Величина определителя не изменится, если к элементам одной строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Определение. Минором элемента определителя называется определитель, полученный из данного путем вычеркивания строки и столбца, в которых стоит выбранный элемент.
Обозначение: a_{ij} – выбранный элемент определителя, M_{ij} – его минор.

Определение. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента определителя называется его минор, если сумма индексов данного элемента i+j есть число четное, или число, противоположное минору, если i+j нечетно, т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

8. Формулы Крамера для решения СЛУ.

Пусть нам требуется решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

в которой число уравнений равно числу неизвестных переменных и определитель основной матрицы системы отличен от нуля, то есть, $|A| \neq 0$.

Пусть Δ - определитель основной матрицы системы, а $\Delta_{x_1}, \quad \Delta_{x_2}, \quad \ldots, \quad \Delta_{x_n}$ - определители матриц, которые получаются из *A* заменой *1-ого, 2-ого, …, n-ого*столбца соответственно на столбец свободных членов:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad \Delta_{x_1}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\ \ldots,\ \Delta_{x_n}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

При таких обозначениях неизвестные переменные вычисляются по формулам метода Крамера как $x_1=\dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta},\quad x_2=\dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta},\quad \ldots,\quad x_n=\dfrac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$. Так находится решение системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера.

1.2 Лекция №2 (4часа).

Тема: «Метод координат, прямая, взаимное расположение прямых, кривые второго порядка»

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Метод координат.
2. Прямая. Способы задания.
3. Взаимное расположение прямых на плоскости.
4. Определение кривой второго порядка.
5. Окружность.
6. Эллипс.
7. Гипербола.
8. Парабола.

1.2.2 Краткое содержание вопросов.

1. Метод координат.

Под *системой координат* на плоскости понимают способ, позволяющий численно описать положение точки плоскости. Одной из таких систем является *прямоугольная* (декартова) *система координат*.

Прямоугольная система координат задается двумя взаимно перпендикулярными прямыми — осями, на каждой из которых выбрано положительное направление и задан единичный (масштабный) отрезок. Единицу масштаба обычно берут одинаковой для обеих осей. Эти оси называют осями координат, точку их пересечения О - началом координат. Одну из осей называют осью абсцисс (осью Ох), другую — осью ординат (осью Оу) (рис. 1).

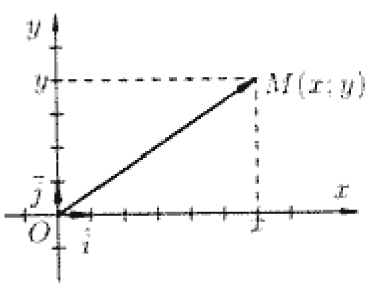


Рис. 23.

На рисунках ось абсцисс обычно располагают горизонтально и направленной слева направо, а ось ординат - вертикально и направленной снизу вверх. Оси координат делят
1 плоскость на четыре области — четверти (или квадранты).

Единичные векторы осей обозначают $\vec{i}$ и $\vec{j}$($|i|=|j|=1$, $\vec{i} \perp \vec{j}$). Систему координат обозначают Оху, а плоскость, в которой расположена система координат, называют координатной плоскостью.

Рассмотрим произвольную точку М плоскости Оху. Вектор ОМ называется радиусом-вектором точки М.

Координатами точки М в системе координат Оху называются координаты радиуса-вектора ОМ. Если ОМ=(x;y), то координаты точки М записывают так: М(x;y), число x называется *абсциссой* точки М, y — *ординатой* точки М.

Эти два числа x и y полностью определяют положение точки на плоскости, а именно: каждой паре чисел x и y соответствует единственная точка М плоскости, и наоборот.

2. Прямая. Способы задания.

Линия на плоскости рассматривается (задается) как множество точек, обладающих некоторым только им присущим геометрическим свойством. Например, окружность радиуса R есть множество всех точек плоскости, удаленных на расстояние - R от некоторой фиксированной точки О (центра окружности).

Введение на плоскости системы координат позволяет определять положение точки плоскости заданием двух чисел — ее координат, а положение линии на плоскости определять с помощью уравнения (т. е. равенства, связывающего координаты точек линии).

Уравнением линии (или кривой) на плоскости Оху называется такое уравнение F(x;y) = 0 с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Переменные x и y в уравнении линии называются текущими координатами точек линии.

Уравнение линии позволяет изучение геометрических свойств линии заменить исследованием его уравнения.

Определение. Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка Ax + By + C = 0, причем постоянные А, В не равны нулю одновременно. Это уравнение первого порядка называют общим уравнением прямой.

Уравнение прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

Уравнение прямой по точке и вектору нормали

Определение. В декартовой прямоугольной системе координат вектор с компонентами (А, В) перпендикулярен прямой , заданной уравнением Ах + Ву + С = 0.

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть в пространстве заданы две точки M $_1$ (x $_1$, y $_1$) и M$_2$ (x $_2$, y $_2$), тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Если какой- либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель.

Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту

Если общее уравнение прямой Ах + Ву + С = 0 привести к виду:

$$y = -\frac{A}{B}x$$

и обозначить $-\frac{A}{B} = k, -\frac{C}{B} = b$, то полученное уравнение $y = kx + b$ называет уравнением прямой с угловым коэффициентом k .

Уравнение прямой по точке и направляющему вектору

По аналогии с пунктом, рассматривающим уравнение прямой через вектор нормали можно ввести задание прямой через точку и направляющий вектор прямой.

Определение. Каждый ненулевой вектор (α_1 , α_2), компоненты которого удовлетворяют условию А α_1 + В α_2 = 0 называется направляющим вектором прямой Ах + Ву + С = 0.

Уравнение прямой в отрезках

Если в общем уравнении прямой Ах + Ву + С = 0 С≠0, то, разделив на –С, получим:

– –

или

– – , где

– –

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент *а* является координатой точки пересечения прямой с осью Ох, а *b* – координатой точки пересечения прямой с осью Оу.

Следует отметить, что не каждую прямую можно представить уравнением в отрезках, например, прямые, параллельные осям или проходящие через начало координат.

3. Взаимное расположение прямых на плоскости.

Определение. Если заданы две прямые $y = k_1 x + b_1$, $y = k_2 x + b_2$, то острый угол между этими прямыми будет определяться как

$$tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

Две прямые параллельны, если $k_1 = k_2$.

Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = -1/ k_2$.

Теорема. *Прямые Ах + Ву + С = 0 и* $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ *параллельны, когда пропорциональны коэффициенты* $A_1 = \lambda A$, $B_1 = \lambda B$. *Если еще и* $C_1 = \lambda C$, *то прямые совпадают.*

Координаты точки пересечения двух прямых находятся как решение системы уравнений этих прямых.

4. Определение кривой второго порядка.

Алгебраической кривой второго порядка называется кривая Г, уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

где не все коэффициенты А, В и С равны одновременно нулю.

Если кривая Г невырожденная, то для неё найдется такая декартова прямоугольная система координат, в которой уравнение этой кривой примет один из следующих трех видов (каноническое уравнение):

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - эллипс,

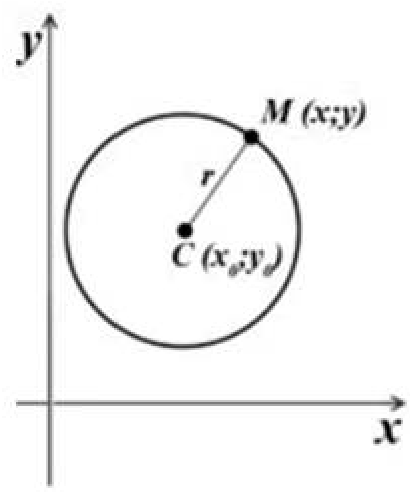
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - гипербола,

$y^2 = 2px$ - парабола.

5. Окружность.

Окружностью называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от одной точки – от центра.

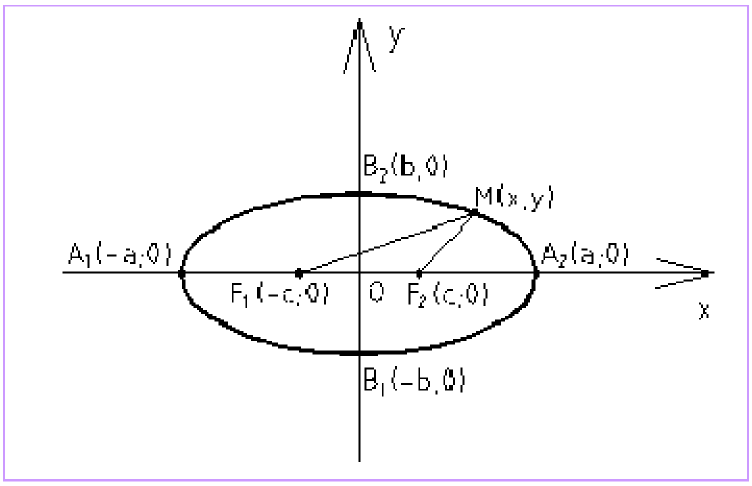
Таким образом, уравнение окружности с центром в точке $C(x_0;y_0)$ радиуса r имеет вид:
$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.



Частный случай уравнения окружности с центром в точке $O(0;0)$: $x^2+y^2=r^2$.

6. Эллипс.

Эллипс – геометрическое множество точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная 2а, большая, чем расстояние между фокусами 2с: $|F_1M| + |F_2M| = 2a$.



Эллипс, заданный каноническим уравнением: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,$

симметричен относительно осей координат. Параметры a и b называются полуосями эллипса (большой и малой соответственно), точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$ называются его вершинами.

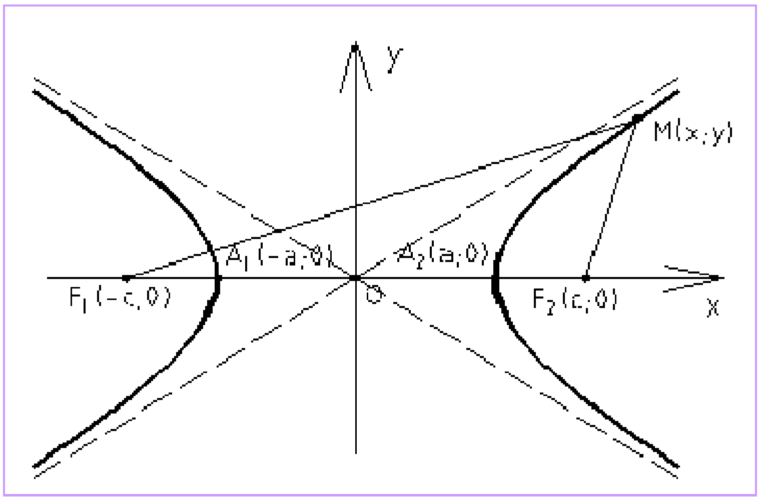
Если a>b, то фокусы находятся на оси OX на расстоянии $c=\sqrt{a^2-b^2}$ от центра эллипса O.

Число $\varepsilon = c/a = \sqrt{1-b^2/a^2}$ $(0 \le \varepsilon \le 1)$ называется эксцентриситетом эллипса и является мерой его «сплюснутости» (при $\varepsilon = 0$ эллипс является окружностью, а при $\varepsilon = 1$ он вырождается в отрезок длиною $2a$).

Если a<b, то фокусы находятся на оси OY и $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, $\varepsilon = c/b$.

7. Гипербола.

Гипербола – геометрическое множество точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная 2a, меньшая, чем расстояние между фокусами 2c: $|F_1M| - |F_2M| = \pm 2a$.



Гипербола, заданная каноническим уравнением: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, симметрична относительно осей координат. Она пересекает ось OX в точках $A_1(-a,0)$ и $A_2(-a,0)$ - вершинах гиперболы, и не пересекает оси OY.

Параметр a называется вещественной полуосью, b – мнимой полуосью.

Число $\varepsilon = c/a = \sqrt{1 + b^2/a^2}$, $(1 < \varepsilon < \infty)$ называется эксцентриситетом гиперболы.

Прямые $y = \pm \dfrac{b}{a}x$ называются асимптотами гиперболы.

Гипербола, заданная каноническим уравнением:

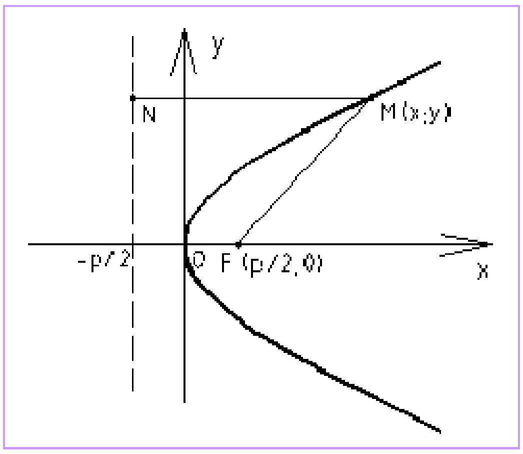
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1, \text{ (или } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1\text{)},$$

называется сопряжённой (имеет те же асимптоты). Её фокусы расположены на оси OY. Она пересекает ось OY в точках $B_1(0,-b)$ и $B_2(0,b)$ - вершинах гиперболы, и не пересекает оси OX.

В этом случае параметр b называется вещественной полуосью, a – мнимой полуосью. Эксцентриситет вычисляется по формуле: $\varepsilon = c/b = \sqrt{1 + a^2/b^2}$, $(1 < \varepsilon < \infty)$.

8. Парабола.

Парабола – множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки F, называемой



фокусом, и данной прямой, называемой директрисой: $|MN| = |FM|$.

Парабола, заданная указанным каноническим уравнением, симметрична относительно оси OX.

Уравнение $x^2 = 2p \cdot y$ задает параболу, симметричную относительно оси OY.

Парабола $y^2 = 2p \cdot x$ имеет фокус $F(p / 2; 0)$ и директрису $x = -p / 2$.

Парабола $x^2 = 2p \cdot y$ имеет фокус $F(0; p / 2)$ и директрису $y = -p / 2$.

Если p>0, то в обоих случаях ветви параболы обращены в положительную сторону соответствующей оси, а если p<0 – в отрицательную сторону.

1.3 Лекция №3 (4 часа).

Тема: «Функция и ее свойства. Предел функции. Производная»

1.3.1 Вопросы лекции:

1. Определение функции.
2. Определение предела функции.
3. Свойства предела функции.
4. Раскрытие основных неопределенностей.
5. Понятие производной.
6. Геометрический, механический смыслы производной.
7. Правила дифференцирования.
8. Исследование функции с помощью производной.
9. Дифференциал.

1.3.2 Краткое содержание вопросов.

1. Определение функции.

Функция- зависимость переменной **y** от переменной **x,** если каждому значению **x** соответствует единственное значение **y**.

Переменная x- независимая переменная или аргумент.

Переменная y- зависимая переменная.

Значение функции- значение y, соответствующее заданному значению x.

Область определения функции- все значения, которые принимает независимая переменная. Обозначается .

Область значений функции (множество значений)- все значения, которые принимает функция. Обозначается .

Функция является четной- если для любого x из области определения функции выполняется равенство f(x)=f(-x)

Функция является нечетной- если для любого x из области определения функции выполняется равенство f(-x)=-f(x)

Возрастающая функция- если для любых x_1 и x_2, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$

Убывающая функция- если для любых x_1 и x_2, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$

Функция называется периодической, если существует такое число T, что
и .

Способы задания функции.

Чтобы задать функцию, нужно указать способ, с помощью которого для каждого значения аргумента можно найти соответствующее значение функции. Наиболее употребительным является способ задания функции с помощью формулы **y=f(x)**, где **f(x)-** некоторое выражение с переменной **x**. В таком случае говорят, что функция задана формулой или что функция задана аналитически.

На практике часто используется табличный способ задания функции. При этом способе приводится таблица, указывающая значения функции для имеющихся в таблице значений аргумента. Примерами табличного задания функции являются таблица квадратов, таблица кубов.

Наиболее наглядным является графический способ задания функции. При данном способе функция задается графиком, по которому можно для каждого x определить единственное y.

Основными элементарными функциями являются:

1) степенная функция ,
2) показательная функция ,
3) логарифмическая функция ,
4) тригонометрические функции ,
5) обратные тригонометрические функции

.

2. Определение предела функции.

Определение предела по Коши. Число A называется пределом функции f (x) в точке a, если эта функция определена в некоторой окрестности точки a за исключением, быть может, самой точки a, и для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Определение предела по Гейне. Число A называется пределом функции f (x) в точке a, если эта функция определена в некоторой окрестности точки a за исключением, быть может, самой точки a, и для любой последовательности такой, что сходящейся к числу a, соответствующая последовательность значений функции сходится к числу A.

Если A – предел функции в точке a, то пишут, что

Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.

Если функция f (x) имеет предел в точке a, то этот предел единственный.

Число A_1 называется пределом функции f (x) слева в точке a, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех выполня- $x \in (a - \delta;\ a)$ ется неравенство $|f(x) - A_1| < \varepsilon$.

Число A_2 называется пределом функции f (x) справа в точке a, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех вы- $x \in (a;\ a + \delta)$ полняется неравенство $|f(x) - A_2| < \varepsilon$.

Предел слева обозначается предел справа – . Эти пределы характеризуют поведение функции слева и справа от точки a. Их часто называют односторонними пределами.

Если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая δ-окрестность точки a, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, выполняется неравенство $|f(x)| > \varepsilon$, то говорят, что функция f (x) имеет в точке a бесконечный предел:

Если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого $x > \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, то говорят, что предел функции f (x) при x, стремящемся к плюс бесконечности, равен A:

$$\lim_{x \to +\infty} f$$

Если функция f (x) имеет конечный предел в точке a, то существует окрестность точки a, в которой функция f ограничена (возможно, что в самой точке a функция не определена). При этом, если A ≠ 0, то найдется окрестность точки a, в которой (быть может, за исключением самой точки a) значения функции f имеют тот же знак, что и число A.

3. Свойства предела функции.

Если существует такое δ > 0, что для всех x, принадлежащих δ-окрестности точки a, выполняются неравенства

$$g(x) \le f(x) \le h(x),$$

и если

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = A,$$

то существует $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A.$

Если существует такое δ > 0, что для всех x, принадлежащих δ-окрестности точки a, справедливо неравенство

$$f(x) < g(x),$$

и если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A,\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = B,$ то A ≤ B.

Если функции f (x) и g (x) имеют конечные пределы в точке a, причем $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A,$ $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B,$ то

- $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) + g(x)\right) = A + B$,
- $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x)g(x)\right) = AB,$
- $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{A}{B},$ если B ≠ 0 и если g (x) ≠ 0 в δ-окрестности точки a.

4. Раскрытие основных неопределенностей.

Из существования пределов f (x) в точке a и g (y) в точке f (a) следует существование предела сложной функции g (f (x)) в точке a.

Для вычисления пределов часто используют так называемые замечательные пределы:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Функция α (x) называется бесконечно малой при x → a (здесь a – конечное число или ∞), если $\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0.$ Функция x = 0 является бесконечно малой функцией в каждой точке.

Сумма конечного числа бесконечно малых при x → a функций есть бесконечно малая функция.

- Произведение бесконечно малой при x → a функции на ограниченную в некоторой окрестности точки a функцию есть бесконечно малая при x → a функция.

Если в некоторой окрестности a определены функции f (x), g (x), h (x) такие, что f (x) = g (x) h (x), $\lim_{x \to a} h(x) = 1$, то функции f (x) и g (x) называются эквивалентными при x → a:

$$f(x) \sim g(x).$$

Так, функции $y_1 = x$ и $y_2 = \sin x$ эквивалентны при x → 0, так как $y_2 = x\frac{\sin x}{x},$ а второй множитель стремится к 1 при x → 0. Другие примеры эквивалентных функций при x → 0:

$\sin x \sim x$ $\operatorname{tg} x \sim x$ $\arcsin x \sim x$ $\operatorname{arctg} x \sim x$ $e^x - 1 \sim x$ $\ln(1 + x) \sim x$ $(1 + x)^\alpha -$ $1 \sim \alpha x.$

5. Понятие производной

Пусть функция y = f(x) определена в промежутке X. *Производной* функции y = f(x) в точке x_0 называется предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если этот предел *конечный,* то функция f(x) называется *дифференцируемой* в точке x_o; при этом она оказывается обязательно и непрерывной в этой точке.

Если же рассматриваемый предел равен ∞ (или -∞), то при условии, что функция в точке x_o непрерывна, будем говорить, что функция f(x) имеет в точке x_o *бесконечную производную*.

Производная обозначается символами

$$y', \quad f'(x_0), \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df(x_0)}{dx}.$$

Нахождение производной называется *дифференцированием* функции.

6. Геометрический, механический смыслы производной.

Геометрический смысл производной состоит в том, что производная есть угловой коэффициент касательной к кривой y=f(x) в данной точке x_o; *физический смысл* - в том, что производная от пути по времени есть мгновенная скорость движущейся точки при прямолинейном движении s = s(t) в момент t_0; *биологический смысл* – в том что производная от числа особей популяции микроорганизмов по времени есть скорость размножения популяции.

7.Правила дифференцирования.

Если *c* - постоянное число, и u = u(x), v = v(x) - некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие правила дифференцирования:

1) (c) ' = 0, (cu) ' = cu';
2) (u+v)' = u'+v';
3) (uv)' = u'v+v'u;
4) (u/v)' = (u'v-v'u)/v$^{2;}$
5) если y = f(u), u = j(x), т.е. y = f(j(x)) - *сложная функция,* или *суперпозиция*, составленная из дифференцируемых функций j и f, то $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx};$$

6) если для функции y = f(x) существует обратная дифференцируемая функция x = g(y), причем $\frac{dg}{dy} = x'_y$ ≠ 0, то $y'_x = \frac{1}{x'_y}$.

При нахождении производных пользуются таблицами производных основных элементарных функций ([2] с. 150).

8. Исследование функции с помощью производной.

Общая схема исследования функции и построения ее графика:

1. Найти область определения функции. Выделить особые точки (точки разрыва).
2. Проверить наличие вертикальных асимптот в точках разрыва и на границах области определения. Если .
3. Найти точки пересечения с осями координат
4. Установить, является ли функция чётной или нечётной.
5. Определить, является ли функция периодической или нет (только для тригонометрических функций, остальные непериодические, пункт пропускается).
6. Найти точки экстремума и интервалы монотонности (возрастания и убывания) функции.
7. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости-вогнутости.
8. Найти наклонные асимптоты функции.
9. $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ $\quad b = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - kx]$ и к минус бесконечности
10. Найти горизонтальные асимптоты функции.
11. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = c$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = c$
12. Построить график функции.

9. Дифференциал функции.

Итак, график дифференцируемой функции в окрестности каждой своей точки сколь угодно близко приближается к графику касательной в силу равенства:

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+(f'(x_0)+\alpha)\Delta x,$$

где α – бесконечно малая в окрестности x_0 функция. Для приближенного вычисления значения функции f в точке $x_0 + \Delta x$ эту бесконечно малую функцию можно отбросить:

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x.$$

Линейную функцию

$$y=f'(x_0)(x-x_0)$$

называют дифференциалом функции f в точке x_0 и обозначают df. Для функции x производная в каждой точке x_0 равна 1, то есть $dx=x-x_0$. Поэтому пишут:

$$\boxed{df=f'(x)dx.}$$

Приближенное значение функции вблизи точки x_0 равно сумме ее значения в этой точке и дифференциала в этой же точке. Это дает возможность записать производную следующим образом:

$$f'(x)=\frac{df}{dx}.$$

Часто эту запись используют, чтобы уточнить, по какой переменной дифференцируется функция.

Геометрически дифференциал функции df – это приращение ординаты касательной к графику функции в данной точке при изменении абсциссы точки на dx.

1.4 Лекция №4 (4 часа).

Тема: «Интегральное исчисление»

1.4.1 Вопросы лекции:

1. Понятие первообразной и ее свойства.
2. Понятие неопределенного интеграла и его свойства.
3. Основные методы интегрирования.
4. Понятие определенного интеграла.
5. Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.
6. Геометрический смысл определенного интеграла.

1.4.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие первообразной и ее свойства.

Определение. Функция $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ называется первообразной для функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ на интервале $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ (конечном или бесконечном), если в каждой точке этого интервала $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ является производной для $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, т.е. $F'(x)=f(x)$.

Из этого определения следует, что задача нахождения первообразной обратна задаче дифференцирования: по заданной функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ требуется найти функцию $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, производная которой равна $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Первообразная определена неоднозначно: для функции $\frac{1}{1+x^2}$ первообразными будут и функция arctg $\boldsymbol{x}$, и функция arctg $\boldsymbol{x}$-10:

$(\operatorname{arctg} x)' = (\operatorname{arctg} x - 10)' = \frac{1}{1+x^2}$. Для того, чтобы описать все множество первообразных функции $f(x)$, рассмотрим

Свойства первообразной.

1. Если функция $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$ на интервале X, то функция $f(x) + C$, где C - произвольная постоянная, тоже будет первообразной для $f(x)$ на этом интервале. (Док-во: $F'(x) = (F(x) + C)' = f(x)$).

2. Если функция $F(x)$ - некоторая первообразная для функции $f(x)$ на интервале $X=(a,b)$, то любая другая первообразная $F_1(x)$ может быть представлена в виде $F_1(x) = F(x) + C$, где C - постоянная на X функция.

3. Для любой первообразной $F(x)$ выполняется равенство $dF(x) = f(x)\,dx$.

Из этих свойств следует, что если $F(x)$ - некоторая первообразная функции $f(x)$ на интервале X, то всё множество первообразных функции $f(x)$ (т.е. функций, имеющих производную $f(x)$ и дифференциал $f(x)\,dx$) на этом интервале описывается выражением $F(x) + C$, где C - произвольная постоянная.

2. Понятие неопределенного интеграла и его свойства.

Определение. Множество первообразных функции $f(x)$ называется неопределённым интегралом от этой функции и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Как следует из изложенного выше, если $F(x)$ - некоторая первообразная функции $f(x)$, то $\int f(x)dx = F(x) + C$, где C - произвольная постоянная. Функцию $f(x)$ принято называть подынтегральной функцией, произведение $f(x)\,dx$ - подынтегральным выражением.

3. Основные методы интегрирования.

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \quad d\int f(x)dx = f(x)dx.$

2. $\int F'(x)dx = F(x)+C, \quad \int dF(x) = F(x)+C.$

3. Если $\int f(x)dx = F(x)+C,$ то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C, \quad a \neq 0.$$

4. $\int(\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx, \quad \alpha^2+\beta^2 \neq 0.$

Замена переменных в неопределенном интеграле:

1. $\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du = F(u)+C = F(u(x))+C.$

2. Если $x = \varphi(t), \ \varphi'(t) \neq 0, \ F$ - первообразная для $(g \circ \varphi)\varphi',$ то

$$\int g(x)dx = \int g(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t)+C = F\left(\varphi^{-1}(x)\right)+C.$$

Формула интегрирования по частям

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

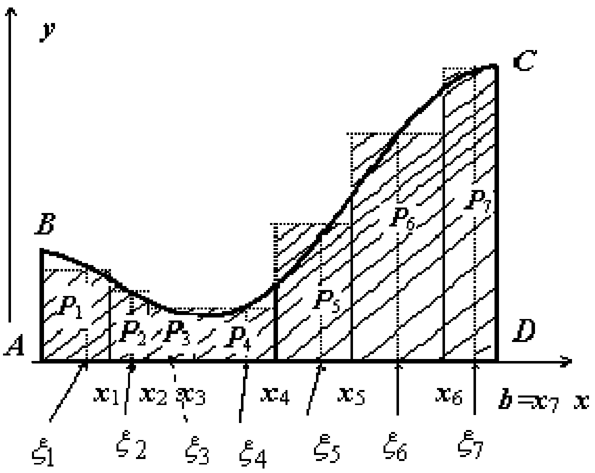
(u, v - дифференцируемые функции).

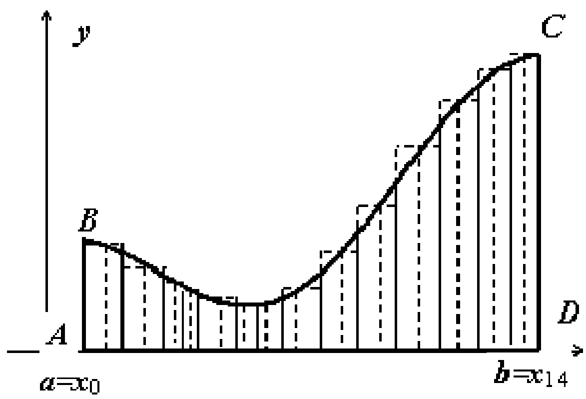
Для нахождения неопределенных интегралов пользуются таблицами интегралов основных элементарных функций.

4. Понятие определенного интеграла.

Вычисление площади криволинейной трапеции.

Пусть на отрезке [a,b] (b>a) задана непрерывная функция $y = f(x)$, принимающая на этом отрезке неотрицательные значения : $f(x) \geq 0$ при $x \in [a,b]$. Требуется определить площадь S криволинейной трапеции $ABCD$, ограниченной снизу отрезком [a,b], слева и справа - прямыми $x = a$ и $x = b$, сверху – функцией $y = f(x)$.





Для решения этой задачи разделим произвольным образом основание AD фигуры точками $x_0 = a$, x_1 , x_2 , …, x_n-1 = a, $x_n = b$ на n частей [x_0 ,x_1], [x_1 ,x_2], …, [x_i-1 ,x_i], …, [x_n-1 , x_n]; символом Δx_i будем обозначать длину i-го отрезка: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1};\ i = 1,2,\dots,n$. На каждом из отрезков [x_i-1 ,x_i] выберем произвольную точку ξ_i, найдём $f(\xi_i)$, вычислим произведение $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)\Delta x_i$ (это произведение равно площади прямоугольника P_i с основанием [x_i-1 ,x_i] и высотой ξ_i) и просуммируем эти произведения по всем прямоугольникам. Полученную сумму обозначим $S_{\text{ступ}}$:

$$S_{\text{ступ}} = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

$S_{\text{ступ}}$ равно площади ступенчатой фигуры, образованной прямоугольниками P_i, i = 1,2,…,n; на левом рисунке эта площадь заштрихована. $S_{\text{ступ}}$ не равна искомой площади S, она только даёт некоторое приближение к S. Для того, чтобы улучшить это приближение, будем увеличивать количество n отрезков таким образом, чтобы максимальная длина этих отрезков $\max\limits_{i=1,2,\dots,n} \Delta x_i$ стремилась к нулю (на рисунке ступенчатые фигуры изображены при n = 7 (слева) и при n = 14 (справа)). При $\max\limits_{i=1,2,\dots,n} \Delta x_i \to 0\ (n \to \infty)$ разница между $S_{\text{ступ}}$ и S будет тоже стремиться к нулю, т.е.

$$S = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ i=1,2,\dots,n}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Определение определённого интеграла.

Пусть на отрезке $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ задана функция $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Разобьём отрезок $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ произвольным образом на $\boldsymbol{n}$ частей точками $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, …, $[x_{i-1}, x_i]$, …, $[x_{n-1}, x_n]$; длину $\boldsymbol{i}$-го отрезка обозначим Δx_i: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; $i = 1,2,\ldots,n$; максимальную из длин отрезков обозначим λ: $\lambda = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \Delta x_i$. На каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i и составим сумму

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Сумма σ называется интегральной суммой. Если существует (конечный) предел последовательности интегральных сумм σ при $\lambda \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения отрезка $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ на части $[x_{i-1}, x_i]$, ни от выбора точек ξ_i, то функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ называется интегрируемой по отрезку $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$, а этот предел называется определённым интегралом от функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ по отрезку $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, как и в случае неопределённого интеграла, называется подынтегральной, числа $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ - соответственно, нижним и верхним пределами интегрирования.

Кратко определение иногда записывают так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ i=1,2,\ldots,n}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

В этом определении предполагается, что $\boldsymbol{b} > \boldsymbol{a}$. Для других случаев примем, тоже по определению:

Если $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$, то $\int_a^b f(x)dx = 0$; если $\boldsymbol{b}<\boldsymbol{a}$, то $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Теорема существования определённого интеграла.

Если функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ непрерывна на отрезке $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$, то она интегрируема по этому отрезку.

5. Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.

1. Линейность. Если функции $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ интегрируемы по отрезку $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$, то по этому отрезку интегрируема их линейная комбинация $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ = const),

$$\int_a^b [Af(x) + Bg(x)]dx = A\int_a^b f(x)dx + B\int_a^b g(x)dx.$$

2. Аддитивность. Если $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ интегрируема по отрезку $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ и точка $\boldsymbol{c}$ принадлежит этому отрезку, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

3. Интеграл от единичной функции ($f(x) = 1$). Если $f(x) = 1$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b dx = b - a.$$

4. Теорема об интегрировании неравенств. Если в любой точке $x \in [a,b]$ выполняется неравенство $f(x) \le g(x)$, и функции $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы по отрезку $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

Формула Ньютона-Лейбница.

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, и $F(x)$ - некоторая первообразная функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Формула интегрирования по частям для определённого интеграла. Если $u(x)$, $v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции, то

$$\int_a^b u \cdot dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du.$$

Замена переменной в определённом интеграле. Теорема. Пусть функция $x = \varphi(t)$

1. определена, непрерывно дифференцируема и монотонна на отрезке $[\alpha, \beta]$,
2. $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$,
3. функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

6. Геометрический смысл определенного интеграла.

Если $f(x) > 0$ на отрезке $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ равен площади криволинейной трапеции $ABCD$, ограниченной снизу отрезком $[a,b]$, слева и справа - прямыми $x = a$ и $x = b$, сверху – функцией $y = f(x)$.

1.5 Лекция №5 (4 часа).

Тема: «Дифференциальные уравнения. Ряды»

1.5.1 Вопросы лекции:

1. Основные понятия и определения.
2. Дифференциальные уравнения первого порядка.
3. Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.
4. Задача Коши.

1. Основные понятия и определения.

Обыкновенным *дифференциальным уравнением n –го порядка* называется уравнение вида

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ \dots\ , y^{(n)}(x)) = 0,$$

где F — известная функция ($n + 2$)-х переменных, x — независимая переменная из интервала (a,b), $y(x)$ — неизвестная функция. Число n называется порядком уравнения.

Функция $y(x)$ называется *решением* (или *интегралом*) дифференциального уравнения на промежутке (a, b), если она n раз дифференцируема на (a, b) и при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Обыкновенные дифференциальные уравнения, разрешенные относительно старшей производной, называют уравнениями в *нормальной форме*:

$y^{(n)} = f(x, y, y', \ y'', \ \dots\ , y^{(n-1)})$.

Дифференциальное уравнение обычно имеет бесконечно много решений. Чтобы выделить нужное решение, используют дополнительные условия.

Чтобы выделить единственное решение уравнения n–го порядка обычно задают n начальных условий $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, $y''(x_0) = y_2$, $\dots$, $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

Любое конкретное решение $y = \varphi(x)$ уравнения n –го порядка $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots , y^{(n)}(x)) = 0$, называется *частным решением*.

Общим решением дифференциального уравнения $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ \dots\ , y^{(n)}(x)) = 0$ называется функция $y = \Phi(x, \ C_1, C_2, \dots , C_n)$, содержащая некоторые постоянные (параметры) $C_1, C_2, \dots , C_n$, и обладающая следующими свойствами:

1. $\Phi(x, C_1, C_2, \ \dots\ , C_n)$ является решением уравнения при любых допустимых значениях $C_1, C_2, \dots , C_m$;
2. для любых начальных данных $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, $y''(x_0) = y_2$, $\dots$, $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$, для которых задача Коши имеет единственное решение,

существуют значения постоянных $C_1 = A_1$, $C_2 = A_2$, $\dots$, $C_n = A_n$, такие что решение $y = \Phi(x, A_1, A_2, \ \dots, A_n)$ удовлетворяет заданным начальным условиям.

Иногда частное или общее решение уравнения удается найти только в неявной форме: $f(x, y) = 0$ или $G(x, y, C_1, \ C_2, \ \dots, C_n) = 0$.

Такие неявно заданные решения называются *частным интегралом* или *общим интегралом* уравнения.

Если задачу об отыскании всех решений дифференциального уравнения удается свести к алгебраическим операциям и к вычислению конечного числа интегралов и производных от известных функций, то уравнение называется *интегрируемым в квадратурах*. Класс таких уравнений относительно узок.

Для решения уравнений, которые не интегрируются в квадратурах, применяются приближенные или численные методы.

2. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Задача теории обыкновенных дифференциальных уравнений — исследование общих свойств решений, развитие точных, асимптотических и численных методов интегрирования уравнений.

Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение $F(x, y, y') = 0$, где x - независимая переменная, $y(x)$ - неизвестная функция. В форме, разрешённой относительно производной, уравнение первого порядка записывается так: $y' = f(x, y)$

Если пользоваться другим обозначением производной, то можно записать как

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Общее решение (общий интеграл) уравнения при $n = 1$ имеет вид $\Phi(x, y, C) = 0$ или $y = \varphi(x, C)$.

Решение некоторых типов ОДУ первого порядка.

Уравнения с разделёнными переменными. Так называются уравнения вида удовлетворяющее начальному условию $f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0$.

Пусть $y(x)$ - решение этого уравнения, т.е. $f(x)dx + g(y(x))dy(x) = 0$. Интегрируя это тождество, получим $\int f(x)dx + \int g(y)dy = 0$ - общий интеграл (общее решение) этого уравнения.

Уравнения с разделяющимися переменными. Так называются уравнения вида $y' = f(x)\cdot g(y)$ или $f_1(x)\,g_1(y)\,dx + f_2(x)\,g_2(y)\,dy = 0$.

Эти уравнения легко сводятся к уравнению с разделёнными переменными:

Записываем уравнение в форме $\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y)$, затем делим на $g(y)$ и умножаем на dx: $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$.		Уравнение делим на $f_2(x)\ g_1(y)$: $\frac{f_1(x)dx}{f_2(x)} + \frac{g_2(y)dy}{g_1(y)} = 0$.
Эти уравнения - с разделёнными переменными. Интегрируя, получим общие интегралы:		
$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$.		$\int \frac{f_1(x)dx}{f_2(x)} + \int \frac{g_2(y)dy}{g_1(y)} = C$.
В обоих случаях возможна потеря решений: деление на функцию может привести к уравнению, которое неэквивалентно данному.		
Если функция $g(y)$ имеет действительные корни $y_1, y_2, y_3, \ldots$, то функции $y = y_1$, $y = y_2$, $y = y_3, \ldots$, очевидно, являются решениями исходного уравнения.		Если функция $f_2(x)$ имеет действительные корни $x_1, x_2, x_3, \ldots$, функция $g_1(y)$ имеет действительные корни $y_1, y_2, y_3, \ldots$, то функции $x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_3$, …, $y = y_1$, $y = y_2$, $y = y_3$, … являются решениями исходного уравнения.
В обоих случаях эти решения могут содержаться в общем решении, но могут и не содержаться в нём; последнее может случиться, если на этих решениях нарушаются условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши.		

3. Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Характеристические числа

$$\lambda_1 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}, \quad \lambda_2 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Общее решение

1. В случае $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Если $\lambda_1 = \alpha - i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha + i\beta,$ то общее решение можно записать и в форме

$$y(x) = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)e^{\alpha x}.$$

2. В случае $\lambda_1 = \lambda_2$

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda_1 x}.$$

4. Задача Коши.

Задачей Коши (или начальной задачей) называется задача отыскания решения $y = y(x)$ уравнения

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ \dots \ , y^{(n)}(x)) = 0, \quad x > x_0,$$

удовлетворяющего условиям

$$y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_1, \ y''(x_0) = y_2, \ \dots \ , y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Условия $y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_1, \ y''(x_0) = y_2, \ \dots \ , y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ называются начальными данными, начальными условиями или данными Коши.

1.6 Лекция №6 (4 часа).

Тема: «Элементы теории вероятностей»

1.6.1 Вопросы лекции:

1. Основные определения. Классическое определение вероятности события.
2. Классификация событий и их свойства.
3. Теоремы о сумме и произведении вероятностей.
4. Формула полной вероятности.
5. Основные понятия.
6. Формула Бернулли.
7. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.
8. Наиболее вероятное число появления события в испытании.
9. Дискретные и непрерывные случайные величины.
10. Числовые характеристики ДСВ.
11. Числовые характеристики НСВ.

1.6.2 Краткое содержание вопросов:

1. Основные определения. Классическое определение вероятности события.

Классическое определение вероятности

$$P(A) = m/n$$

(m - число благоприятных исходов опыта; n - число всех его исходов).

2. Классификация событий и их свойства.

Два события называются несовместными, если появление одного из них исключает появление другого события в одном и том же испытании. В противном случае события называются совместными.

Два события называются независимыми, если появление одного из них не влияет на вероятность появления другого события в одном и том же испытании. В противном случае события называются зависимыми.

3. Теоремы о сумме и произведении вероятностей.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Теорема умножения вероятностей независимых событий

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B),$$

где $P(B/A)$ - вероятность события *B* при условии, что произошло событие *A*.

4. Формула полной вероятности.

Формула полной вероятности

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(B_k)P(A/B_k),$$

где $B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_n$ - полная группа гипотез, т. е.

$$B_iB_j=\varnothing,\ i\neq j,\quad \bigcup_{i=1}^{n}B_i=\Omega$$

(Ω - достоверное событие).

Формула Бейеса

$$P(B_m/A)=\frac{P(B_m)P(A/B_m)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)P(A/B_k)},\quad m=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

где $B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_n$ - полная группа гипотез.

5. Основные понятия.

Если производится несколько испытаний, причем вероятность события А в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют независимыми относительно события А.

6. Формула Бернулли.

Вероятность события, состоящего в том, что при n повторениях испытания событие A, которое имеет одну и ту же вероятность появления в каждом испытании, произойдет ровно k раз, вычисляется по формуле

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}p^k q^{n-k},$$

где n – число повторений независимых испытаний; k – число испытаний, в которых происходит событие A; p – вероятность появления события A в одном испытании; q – вероятность непоявления события A в одном испытании $(q = 1 - p)$.

7. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.

Локальная теорема Муавра-Лапласа. Если вероятность наступления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна p, $(0 < p < 1)$, то вероятность того, что при этом событие A появится ровно k раз, вычисляется по формуле

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

где $q = 1 - p$ – вероятность ненаступления события A, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, а $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Если вероятность наступления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна p, $(0 < p < 1)$, то вероятность того, что при этом событие A произойдет не менее k_1 и не более k_2 раз, вычисляется по формуле

$$P(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – функция Лапласа, $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

8. Наиболее вероятное число появления события в испытании.

Пусть k_0 – число появлений события A, имеющего наибольшую вероятность при n испытаниях, p – вероятность появления события A, $q = 1 - p$ – вероятность непоявления события A. Тогда верно следующее неравенство:

$$np - q \le k_0 \le np + p.$$

9. Дискретные и непрерывные случайные величины.

Случайной называется величина, которая в результате испытания может принять то или иное числовое значение, причем заранее неизвестно, какое именно.

Дискретной (прерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

Непрерывной называют случайную величину, все возможные значения которой заполняют некоторый конечный или бесконечный интервал.

10. Числовые характеристики ДСВ.

Математическим ожиданием $M(X)$ дискретной случайной величины X называется сумма произведений каждого возможного значения этой величины на соответствующую вероятность:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + ... + x_s p_s.$$

Дисперсией $D(X)$ дискретной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата разности между случайной величиной X и ее математическим ожиданием:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Теорема. Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Средним квадратическим отклонением $\sigma(X)$ дискретной случайной величины X

называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\,.$$

11. Числовые характеристики НСВ.

Математическим ожиданием $M(X)$ непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a;b]$, называют определенный интеграл $\int_a^b x\,f(x)dx$, т.е.

$$M(X)=\int_a^b x\,f(x)dx\,.$$

Если возможные значения X принадлежат всей оси Ox, то

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)dx\,.$$

Дисперсией $D(X)$ непрерывной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата ее отклонения.

Если возможные значения X принадлежат отрезку $[a;b]$, то

$$D(X)=\int_a^b (x-M(X))^2 f(x)dx\,.$$

Если возможные значения X принадлежат всей оси Ox, то

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} (x-M(X))^2 f(x)dx\,.$$

Средним квадратическим отклонением $\sigma(X)$ непрерывной случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\,.$$

1.7 Лекция №7 (4 часа)

Тема: «Математическая статистика»

1.7.1 Вопросы лекции:

1. Генеральная совокупность. Выборка. Случайные величины.
2. Дискретный и интервальный ряды распределения.
3. Графическое представление данных.
4. Выборочные числовые характеристики.
5. Определения доверительных интервалов и доверительных вероятностей.
6. Доверительные интервалы для математического ожидания.
7. Доверительные интервалы для среднеквадратического отклонения.
8. Статистический метод контроля качества продукции.

1.7.2 Краткое содержание вопросов:

1. Генеральная совокупность. Выборка. Случайные величины.

Выборочной совокупностью (выборкой) называют совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральной (основной) совокупностью называют совокупность, объектов из которых производится выборка.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности. Например, если из *1000* деталей отобрано для обследования *100* деталей, то объем генеральной совокупности $N = 1000$, а объем выборки $n = 100$. Число объектов генеральной совокупности N значительно превосходит объем выборки n .

При составлении выборки можно поступать двумя способами: после того как объект отобран и над ним произведено наблюдение, он может быть возвращен либо не возвращен в генеральную совокупность. В соответствии со сказанным выборки подразделяют на повторные и бесповторные.

Повторной называют выборку, при которой отобранный объект (перед отбором следующего) возвращается в генеральную совокупность.

Бесповторной называют выборку, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

На практике обычно пользуются бесповторным случайным отбором.

2. Дискретный и интервальный ряды распределения.

Способы группировки статистических данных:

1. Дискретный вариационный ряд
2. Интервальный вариационный ряд

Обычно полученные наблюдаемые данные представляют собой множество расположенных в беспорядке чисел. Просматривая это множество чисел, трудно выявить какую-либо закономерность их варьирования (изменения). Для изучения закономерностей варьирования значений случайной величины опытные данные подвергают обработке.

Расположив данные в порядке не убывания и сгруппировав их так, что в каждой отдельной группе значения случайной величины будут одинаковы, получают ранжированный ряд данных наблюдения.

Значение случайной величины, соответствующее отдельной группе сгруппированного ряда наблюдаемых данных, называют вариантом, а изменение этого значения варьированием.

Варианты обозначают малыми буквами латинского алфавита с соответствующими порядковому номеру группы индексами - $\boldsymbol{x_i}$. Число, которое показывает, сколько раз встречается соответствующий вариант в ряде наблюдений называют частотой варианта и обозначают соответственно - $\boldsymbol{n_i}$.

Сумма всех частот ряда $\sum n_i$- объем выборки. Отношение частоты варианта к объему выборки $\boldsymbol{n_i / n = w_i}$ называют относительной частотой.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариантов и соответствующих им частот или относительных частот.

Статистическое распределение можно задать также в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот (в качестве частоты, соответствующей интервалу, принимают сумму частот, попавших в этот интервал).

Дискретным вариационным рядом распределения называют ранжированную совокупность вариантов $\boldsymbol{x_i}$ с соответствующими им частотами $\boldsymbol{n_i}$ или относительными частотами $\boldsymbol{w_i}$.

Если изучаемая случайная величина является непрерывной, то ранжирование и группировка наблюдаемых значений зачастую не позволяют выделить характерные черты варьирования ее значений. Это объясняется тем, что отдельные значения случайной величины могут как угодно мало отличаться друг от друга и поэтому в совокупности наблюдаемых данных одинаковые значения величины могут встречаться редко, а частоты вариантов мало отличаются друг от друга.

Нецелесообразно также построение дискретного ряда для дискретной случайной величины, число возможных значений которой велико. В подобных случаях следует строить интервальный вариационный ряд распределения.

Для построения такого ряда весь интервал варьирования наблюдаемых значений случайной величины разбивают на ряд частичных интервалов и подсчитывают частоту попадания значений величины в каждый частичный интервал.

Интервальным вариационным рядом называют упорядоченную совокупность интервалов варьирования значений случайной величины с соответствующими частотами или относительными частотами попаданий в каждый из них значений величины.

3. Графическое представление данных.

Для наглядности строят различные графики статистического распределения.

По данным дискретного вариационного ряда строят полигон частот или относительных частот.

Полигоном частот называют ломанную, отрезки которой соединяют точки (x_1; n_1), (x_2; n_2), ..., (x_k; n_k). Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат - соответствующие им частоты n_i. Точки (x_i; n_i) соединяют отрезками прямых и получают полигон частот (Рис. 1).

Полигоном относительных частот называют ломанную, отрезки которой соединяют точки (x_1; W_1), (x_2; W_2), ..., (x_k; W_k). Для построения полигона относительных частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат - соответствующие им относительные частоты W_i. Точки (x_i; W_i) соединяют отрезками прямых и получают полигон относительных частот.

В случае непрерывного признака целесообразно строить гистограмму.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной h, а высоты равны отношению n_i / h (плотность частоты).

Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии n_i / h.

Площадь i - го частичного прямоугольника равна $hn_i / h = n_i$ - сумме частот вариант i - го интервала; следовательно, площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т.е. объему выборки.

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной h, а высоты равны отношению W_i / h (плотность относительной частоты).

Для построения гистограммы относительных частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии W_i / h (Рис. 2).

Площадь i - го частичного прямоугольника равна $hW_i / h = W_i$ - относительной частоте вариант попавших в i - й интервал. Следовательно, площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, т.е. единице.

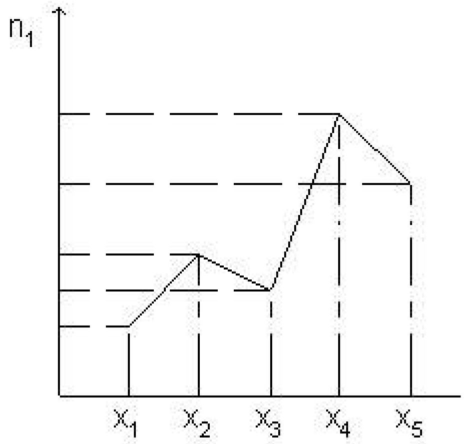


Рис. 1. Полигон частот

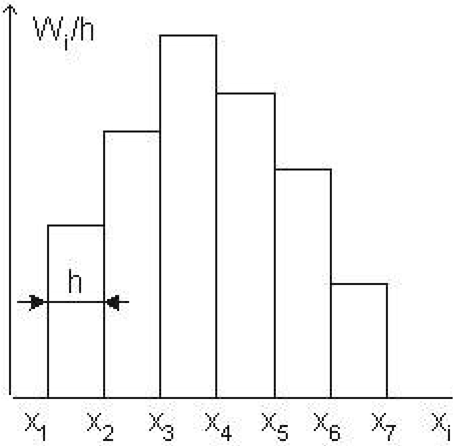


Рис. 2. Гистограмма относительных частот

4. Выборочные числовые характеристики.

Пусть статистическое распределение выборки объема n имеет вид:

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_k
n_i	n_1	n_2	n_3	…	n_k

1) Выборочной средней $\bar{x}$ называется среднее арифметическое всех значений выборки:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

или, если заданы частоты n_i вариант:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i ,$$

где k – число различных значений вариант.

2) Выборочной дисперсией D_B называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений выборки от выборочной средней $\bar{x}$:

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

или, если заданы частоты n_i вариант:

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i ,$$

где k - число различных значений вариант.

3) Исправленная дисперсия:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

или, если заданы частоты n_i вариант:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i ,$$

где k – число различных значений вариант.

4) Связь между выборочной и исправленной дисперсиями:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_B .$$

5) Исправленное среднее квадратическое отклонение:

$$s = \sqrt{s^2} .$$

6) Ошибка средней:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} .$$

7) Коэффициент вариации:

$$V = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\% .$$

Мода M_0 – варианта, которая имеет наибольшую частоту.

Медиана m_e – варианта, которая делит вариационный ряд на две части, равные по числу вариант.

5. Определения доверительных интервалов и доверительных вероятностей.

Нахождение минимального объема выборочной совокупности

$$n = \frac{t^2 \cdot s^2}{\delta^2} ,$$

где

t – аргумент функции Лапласа, при котором $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$;
n – объем выборки;
s – исправленное среднее квадратическое отклонение;
γ – надежность (доверительная вероятность);
δ – точность оценки.

6. Доверительные интервалы для математического ожидания.

Доверительный интервал для оценки генеральной средней имеет вид:

$$I_\gamma = \begin{cases} \left(\bar{x} - t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right), & при\ n < 30 \\ \left(\bar{x} - t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right), & при\ n \geq 30 \end{cases} ,$$

где
n – объем выборки;
γ – надежность (доверительная вероятность);
$\bar{x}$ – выборочная средняя;
s – исправленное среднее квадратическое отклонение;
$t_\gamma = t(n; \gamma)$ – число, определяемое по таблице приложений;

t – аргумент функции Лапласа, при котором $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$.

7. Доверительные интервалы для среднеквадратического отклонения.

Доверительный интервал для оценки генерального среднего квадратического отклонения имеет вид:

$$I_\gamma = \begin{cases} (s \cdot (1-q);\, s \cdot (1+q)), & при\ q < 1 \\ (0;\, s \cdot (1+q)), & при\ q > 1 \end{cases},$$

где

s – исправленное среднее квадратическое отклонение;

$q = q(n;\gamma)$ – число, определяемое по таблице приложений;

n – объем выборки;

γ – надежность (доверительная вероятность).

8. Статистический метод контроля качества продукции.

1. Для математического ожидания при известной дисперсии σ^2

$$\left]\bar{x} - t_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + t_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[,$$

где t_p - корень уравнения $\Phi(t) = p/2$; Φ - функция Лапласа.

2. Для математического ожидания при неизвестной дисперсии

$$\left]\bar{x} - t_p \frac{s}{\sqrt{n-1}};\ \bar{x} + t_p \frac{s}{\sqrt{n-1}}\right[,$$

s^2 - выборочная дисперсия; t_p удовлетворяет условию $P(|t_{n-1}| < t_p) = p$; t_{n-1} - случайная величина, распределенная по закону Стьюдента с n - 1 степенями свободы.

3. Для дисперсии

$$\left]ns^2/t_1^2;\ ns^2/t_2^2\right[,$$

где t_1^2, t_2^2 находятся из условий:

$$P\left(\chi^2_{n-1} < t_1^2\right) = \frac{1+p}{2},\ P\left(\chi^2_{n-1} < t_2^2\right) = \frac{1-p}{2},$$

χ^2_{n-1} - случайная величина, распределенная по закону χ^2 с n - 1 степенями свободы.

1.8Лекция № 8 (2 часа).

Тема: «Теория корреляции»

1.8.1 Вопросы лекции:

1. Понятие корреляции. Две основные задачи теории корреляции.
2. Корреляционная таблица.
3. Линейная и нелинейная корреляция.

4. Корреляционный момент и коэффициент корреляции.

1.8.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие корреляции. Две основные задачи теории корреляции.

Корреляционной зависимостью (корреляцией) называют зависимость, при которой изменение одной из величин влечет за собой изменение среднего значения другой величины.

2. Корреляционная таблица.

Корреляционной таблицей называется таблица, в которой результаты наблюдений записаны в возрастающем порядке с указанием частот n_{ij} появления пары $(x_i\,;\,y_j)$.

3. Линейная и нелинейная корреляция.

Условным средним $\overline{y}_x$ называют среднее арифметическое значение величины Y, вычисленное при условии, что X принимает фиксированное значение.

Эмпирической линией регрессии Y на X называется ломанная, соединяющая точки $M(x_i\,;\,\overline{y}_{x_i})$.

Теоретической линией регрессии Y на X называется «сглаживающая» кривая, около которой группируются точки $M(x_i\,;\,\overline{y}_{x_i})$, а соответствующее уравнение $y = f(x)$ – уравнением регрессии Y на X.

4. Корреляционный момент и коэффициент корреляции.

Для установления между двумя признаками линейной корреляции служит выборочный коэффициент корреляции, который вычисляется по формуле:

$$r = \frac{\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \overline{x})^2} \cdot \sqrt{\sum (y_i - \overline{y})^2}}.$$

Свойства выборочного коэффициента корреляции:

1) $-1 \le r \le 1$;

2) чем больше $|r|$, тем теснее линейная корреляция между двумя признаками;

3) если $|r| = 1$, то корреляционная зависимость становится функциональной;

4) если $r = 0$, то между изучаемыми признаками нет линейной корреляции, но возможно существование какого-либо другого вида корреляционной зависимости (параболической, гиперболической и т.д.).

Если в результате опыта линейная зависимость между величинами Y и X выражена в виде таблицы

X	x_1	x_2	. . .	x_i	. . .	x_n
Y	y_1	y_2	. . .	y_i	. . .	y_n

то параметры a и b уравнения прямой регрессии $y = ax + b$ находятся из нормированной системы

$$\begin{cases} \grave{a}\sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{o}_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

по методу наименьших квадратов.

В случае малой выборки уравнение прямой регрессии вычисляют по формуле:

$$y - \overline{y} = b_{Y/X}\,(x - \overline{x}),$$

где $b_{Y/X}$ – коэффициент регрессии, вычисляемый следующим образом:

$$b_{Y/X} = \frac{\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum (x_i - \overline{x})^2},$$

где

$\overline{x}$ – выборочная средняя признака X;

$\overline{y}$ – выборочная средняя признака Y.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

2.1 Практическое занятие №1 (4 часа).

Тема: «Определители и их свойства. Матрицы. СЛУ»

2.1.1 Задание для работы:

1. Вычисление определителей 2-го и 3-го порядков.
2. Матрицы. Операции над матрицами.
3. Нахождение обратной матрицы.
4. Вычисление ранга СЛУ.
5.Решение СЛУ матричным методом.
6.Решение СЛУ методом Гаусса.

2.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. Тогда $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 13,$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} A_{1k}.$$

Утверждение. Разложение определителя по произвольной строке.

Для определителя матрицы A справедлива формула $|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}.$

Пример. Вычислите $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0.7 & -5 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение. Воспользуемся разложением по третьей строке, так выгоднее, поскольку в третьей строке два числа из трех - нули. Получим

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0.7 & -5 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0.7 & -5 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0.7 \end{vmatrix} = -3(-10-4) = 42.$$

Пример. Найдите обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. $|A| = 11 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad A^{-1}$ - существует.

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 5 = 5, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-2) = 2,$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1.$

Ответ: $A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 2 \\ x - y + 2x = -1 \\ 3x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

Решая системы линейных уравнений школьными способами, мы почленно умножали одно из уравнений на некоторое число, так, чтобы коэффициенты при первой переменной в двух уравнениях были противоположными числами. При сложении уравнений происходит исключение этой переменной. Аналогично действует и метод Гаусса.

Для упрощения внешнего вида решения составим расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

В этой матрице слева до вертикальной черты расположены коэффициенты при неизвестных, а справа после вертикальной черты - свободные члены.

Для удобства деления коэффициентов при переменных (чтобы получить деление на единицу) переставим местами первую и вторую строки матрицы системы. Получим систему, эквивалентную данной, так как в системе линейных уравнений можно переставлять местами уравнения:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

С помощью нового первого уравнения исключим переменную x из второго и всех последующих уравнений. Для этого ко второй строке матрицы прибавим первую, умноженную на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ (в нашем случае на $-\frac{3}{1}$), к третьей – первую строку, умноженную на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ (в нашем случае на $-\frac{2}{1}$).

Это возможно, так как $a_{11} \neq 0$.

Если бы в нашей системе уравнений было больше трёх, то следовало бы прибавлять и ко всем последующим уравнениям первую строку, умноженную на отношение соответствующих коэффициентов, взятых со знаком минус.

В результате получим матрицу эквивалентную данной системе новой системы уравнений, в которой все уравнения, начиная со второго не содержат переменнную *x*:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

Для упрощения второй строки полученной системы умножим её на $\frac{1}{5}$ и получим вновь матрицу системы уравнений, эквивалентной данной системе:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

Теперь, сохраняя первое уравнение полученной системы без изменений, с помощью второго уравнения исключаем переменную *y* из всех последующих уравнений. Для этого к третьей строке матрицы системы прибавим вторую, умноженную на $-\frac{a'_{32}}{a'_{22}}$ (в нашем случае на $-\frac{4}{1}$).

Если бы в нашей системе уравнений было больше трёх, то следовало бы прибавлять и ко всем последующим уравнениям вторую строку, умноженную на отношение соответствующих коэффициентов, взятых со знаком минус.

В результате вновь получим матрицу системы, эквивалентной данной системе линейных уравнений:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Мы получили эквивалентную данной трапециевидную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ \quad y - z \quad = 1 \\ \qquad z \quad = 1 \end{cases}$$

Если число уравнений и переменных больше, чем в нашем примере, то процесс последовательного исключения переменных продолжается до тех пор, пока матрица системы не станет трапециевидной, как в нашем демо-примере.

Решение найдём "с конца" - это называется "обратный ход метода Гаусса". Для этого из последнего уравнения определим *z*:

$z = 1$.

Подставив это значение в предшествующее уравнение, найдём *y*:

$y = 1 + z$

$y = 1 + 1 = 2.$

Из первого уравнения найдём *x*:

$x = -1 + y - 2z$

$x = -1 + 2 - 2 = -1.$

Итак, решение данной системы - $(x=-1;\ \ y=2;\ \ z=2)$.

2.1.3 Результаты и выводы: В результате проделанной работы научились вычислять определители, выполнять действия с матрицами. Научились решать системы линейных уравнений.

2.2 Практическое занятие №2(2 часа).

Тема: «Метод координат, прямая, взаимное расположение прямых, кривые второго порядка»

2.2.1 Задание для работы:

1. Различные способы задания прямой.
2. Проверка параллельности прямых.
3. Проверка перпендикулярности прямых.
4. Составление уравнения и построение окружности.
5. Составление уравнения и построение эллипса.
6. Составление уравнения и построение гиперболы.
7. Составление уравнения и построение параболы.

2.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

Даны вершины треугольника АВС: А(-2;5), В(10;- 4), С(8;10). Требуется:

1) Найти длину стороны АВ;
2) Составить уравнения сторон АВ и АС в общем виде и найти их угловые коэффициенты;
3) Вычислить угол А в радианах;
4) Составить уравнение медианы АД;
5) Составить уравнение высоты СЕ и найти ее длину.

Решение:

1) Расстояние d между точками А (x_1; y_1) и В (x_2; y_2) вычисляется по формуле:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (1)$$

Применяя (1), находим длину стороны АВ:

$$d_{AB}=\sqrt{(10-(-2))^2+(-4-5)^2}=\sqrt{144+81}=15$$

2) уравнение прямой, проходящей через точки А (x_1; y_1) и В (x_2; y_2), имеет вид:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \qquad (5)$$

Подставив в (5) соответствующие координаты точек А и В, находим уравнение прямой АВ.

$$\frac{y-5}{-4-5}=\frac{x-(-2)}{10-(-2)}$$

$$\frac{y-5}{-9}=\frac{x+2}{12}$$

$$\frac{y-5}{-3}=\frac{x+2}{4}$$

$$4y-20=-3x-6$$

$$3x+4y-14=0$$

Чтобы найти угловой коэффициент прямой АВ ($к_{AB}$), решим полученное уравнение прямой относительно *у*:

$$4y=-3x+14$$

$$y=-\frac{3}{4}x+\frac{14}{4};$$

откуда $к_{AB}=-\frac{3}{4}$.

Подставляя в (5) координаты точек А и С, находим уравнение прямой АС.

$$\frac{y-5}{10-5}=\frac{x+2}{8+2}$$

$$\frac{y-5}{5}=\frac{x+2}{10}$$

$$\frac{y-5}{1}=\frac{x+2}{2}$$

$$x+2=2y-10$$

$x-2y+12=0$ - уравнение стороны АС, откуда $к_{AC}=\frac{1}{2}$

3) Если даны две прямые, угловые коэффициенты которых соответственно $к_1$ и $к_2$, то угол γ между этими прямыми определяется по формуле:

$$tg\gamma=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right| \qquad (7)$$

Искомый угол А образован прямыми АВ и АС, угловые коэффициенты которых найдены ранее в пункте 2). Для определения угла А положим $k_1=k_{AB}=-\frac{3}{4}$ и $k_2=k_{AC}=\frac{1}{2}$. Применяя (7), получим:

$$tgA=\frac{\frac{1}{2}-(-\frac{3}{4})}{1+(-\frac{3}{4})\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{8}}=2;$$ откуда $A=arctg\,2=63^0 26'$.

Используя таблицу перевода градусной меры в радианную, получим А=1.107 рад.

4). Если АD есть медиана, то точка D является серединой стороны ВС. Для вычисления координат точки D применяем формулы деления отрезка на две равные части:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\ y=\frac{y_1+y_2}{2} \qquad (10)$$

Подставив в (10) координаты точек В и С, находим координаты точки D:

$x_D=\frac{10+8}{2}=9$; $y_D=\frac{-4+10}{2}=3$; D (9;3).

Подставив в (5) координаты точек A (-2;5) и D (9;3), находим искомое уравнение медианы AD:

$$2x + 11y - 51 = 0$$

5). Высота CE перпендикулярна стороне AB. известно, что если две прямые взаимно перпендикулярны, то их угловые коэффициенты обратные по величине и противоположны по знаку. Следовательно, $\kappa_{CE} = -\frac{1}{\kappa_{AB}}$. Так как $\kappa_{AB} = -\frac{3}{4}$, то $\kappa_{CE} = \frac{4}{3}$.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом, имеет вид:

$$y - y_1 = \kappa(x - x_1) \qquad (4)$$

Подставив в (4) координаты точки C и найденный угловой коэффициент $\kappa_{CE} = \frac{4}{3}$, получим искомое уравнение высоты CE:

$$y - 10 = \frac{4}{3}(x - 8)$$

$$3y - 30 = 4x - 32$$

$4x - 3y - 2 = 0$ - уравнение CE.

Чтобы найти длину CE, определим сперва координаты точки E – точки пересечения высоты CE и прямой AB. Для этого решаем совместно систему уравнений AB и CE:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 14 = 0 \\ 4x - 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 3, а второе на 4, получим:

$$\begin{cases} 9x + 12y - 42 = 0 \\ 16x - 12y - 8 = 0 \end{cases}$$

Сложим оба уравнения и припишем в систему первое уравнение исходной системы:

$$\begin{cases} 25x - 50 = 0 \\ 3x + 4y - 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 3x + 4y - 14 = 0 \end{cases}$$

Подставив во второе уравнение системы значение $x = 2$, найдем значение y:

$$\begin{cases} x = 2 \\ 3 \cdot 2 + 4y - 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 4y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Следовательно, E (2;2). Длину высоты CE определяем как расстояние между двумя точками C и E по формуле (1).

$$d_{CE} = \sqrt{(2-8)^2 + (2-10)^2} = \sqrt{100} = 10$$

Пусть требуется построить эллипс с заданными параметрами a =4 и b =2.

<u>Решение</u>:

а) строим окружность радиуса R =4 с центром в начале прямоугольной системы координат Oxy ;

б) принимаем коэффициент сжатия окружности $k = \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$;

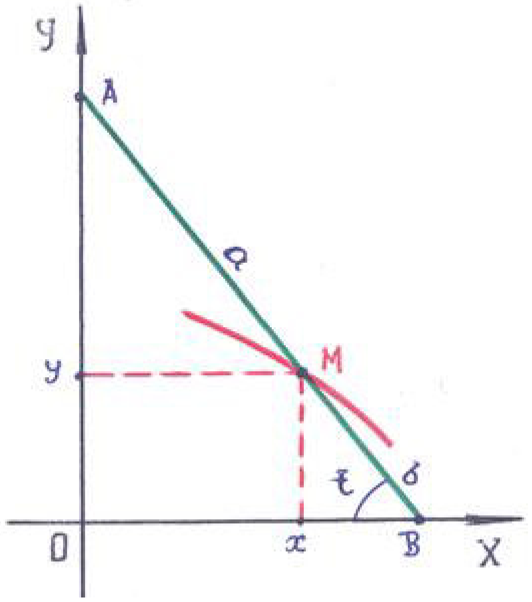
в) далее применяем линейку и прямоугольный треугольник: двигаем треугольник вдоль линейки так, чтобы деление [4] всё время оставалось на оси Ox ;

г) используем ординаты: 1; 2; 3; 4 точек окружности и, двигая треугольник вдоль линейки, отмечаем на плоскости Oxy точки с ординатами: $\pm\frac{1}{2}$; $\pm$ 1; $\pm\frac{3}{2}$; $\pm$ 2;
д) в результате выполнения построений по пункту г) для каждой четверти эллипса получаем по пять точек, которые легко соединить при помощи ***лекала***: эллипс (симпатичный!) построен.

Замечание: значения параметров a =4 и b =2 и ординат: 1; 2; 3; 4 выбраны так, чтобы каждый раз ***легко видеть середины*** выделяемых отрезков.

Ответ: эллипс: $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$ – построен.

5). Эллипс – результат ***сжатия*** окружности: $X^2+Y^2=a^2$. Наблюдение результата ортогонального параллельного проектирования подсказывает практический способ построения эллипса с заданными параметрами a и b, то есть с заданными осями:



6). Параметрические уравнения эллипса. Имея опыт построения параметрических уравнений прямой, напрашивается вопрос: не будет ли это связано с некоторым движением точки на плоскости в системе координат OXY ?
Наиболее удобной моделью для получения параметрических уравнений эллипса считают отрезок AB, который скользит своими концами A и B по осям OY и OX, соответственно. При движении отрезка AB точка M (на отрезке закреплена), принадлежащая отрезку, описывает некоторую линию. Найдём её уравнение, введя параметр t – угол отрезка AB с осью координат OX. Для этого достаточно записать значения координат точки M :

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases} \quad (11)$$

Утверждать, что уравнения (11) есть эллипс, можно только после того, как убедимся, что точка принадлежит уже известному нам уравнению эллипса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
Подставим координаты точки M в каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{(a\cos t)^2}{a^2}+\frac{(b\sin t)^2}{b^2}=1 \rightarrow \cos^2 t+\sin^2 t=1$$ – тождество!

2.2.3 Результаты и выводы: Научились составлять уравнения прямых.

Научились строить кривые второго порядка.

2.3 Практическое занятие №3 (4 часа).

Тема: «Функция и ее свойства. Предел функции. Производная»

2.3.1 Задание для работы:

1. Нахождение предела функции по свойствам.
2. Первый и второй замечательные пределы.
3. Раскрытие основных неопределенностей.
4. Понятие производной.
5. Нахождение производной функции по правилам дифференцирования и таблице производных.
6. Нахождение производной сложной функции.
7. Исследование функции с помощью производной.
8. Дифференциал функции.

2.3.2 Краткое описание проводимого занятия:

Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+1}{2x^2+x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+4x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+7}{x^2+x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}$; д) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^2-3x+1}{2x^2+x-5}$;

Решение: а) Под знаком предела имеется дробная рациональная функция, знаменатель которой при $x=3$ (предельное значение аргумента) отличен от нуля. Так как данная функция является непрерывной, то, чтобы найти ее предел при $x\to 3$, достаточно аргумент x заменить его предельным значением

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+1}{2x^2+x-6}=\frac{3^2-5\cdot 3+1}{2\cdot 3^2+3-6}=-\frac{1}{3}$$

б) При $x=1$ знаменатель дроби отличен от нуля, а числитель равен нулю. Числитель и знаменатель суть непрерывные функции. Следовательно, при $x\to 1$ числитель есть величина бесконечно малая, а знаменатель – переменная величина, имеющая конечный предел. Так как частное от деления бесконечно малой величины на переменную величину, имеющую конечный предел, есть также величина бесконечно малая, то пределом данной дроби будет нуль.

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+4x-2}=\dfrac{2\cdot 1^2-3\cdot 1+1}{3\cdot 1^2+4\cdot 1-2}=\dfrac{0}{5}=0$

в) при $x=-2$ знаменатель дроби равен нулю, а числитель отличен от нуля. Числитель и знаменатель суть непрерывные функции. Следовательно, при $x\to -2$ знаменатель есть величина бесконечно малая, а числитель – ограниченная величина. Данная дробь является бесконечно большой, она не имеет предела; условно это обозначают символом ∞.

Таким образом, $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+7}{x^2+x-2}=\infty$

г) При $x=2$ числитель и знаменатель данной дроби равны нулю. Следовательно, непосредственная подстановка предельного значения аргумента $x=2$ приводит к неопределенному выражению $\dfrac{0}{0}$. При $x\to 2$ числитель и знаменатель суть бесконечно малые величины. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$ (отношение двух бесконечно малых величин), необходимо предварительно дробь преобразовать. Разложив на множители числитель и знаменатель и сократив дробь на (x – 2), получим:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+5)}{(x-2)(x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+3}=\frac{2\cdot 2+5}{2+3}=\frac{9}{5}$$

Заметим, что аргумент x только стремится к своему предельному значению 2 , но не совпадает с ним. По этой причине множитель (x – 2) отличен от нуля при $x \to 2$.

д) При $x \to \infty$ получаем неопределенное выражение вида $\frac{\infty}{\infty}$. Чтобы найти предел дробной рациональной функции при $x \to \infty$, необходимо предварительно числитель и знаменатель дроби разделить на x^n, где n – наивысшая степень многочленов, стоящих в числителе и знаменателе. Деля числитель и знаменатель данной дроби на x^2, применяя основные теоремы о пределах и свойствах бесконечно малых величин, будем иметь:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+1}{2x^2+x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}}=2$$

Найти производные указанных функций:

а) $y=x^3-\frac{1}{x^4}+6\sqrt[3]{x^2}$; б) $y=(x^3+2)\cdot\sin x$; в) $y=\frac{\arcsin x}{x^2+e^x}$; г) $y=(x^2-arctgx)^4$; д) $y=e^{\sin 4x}$; е) $y=e^{tgx}\cdot\cos^2 x$; ж) $y=\ln\sin(2x+1)$.

Решение.

а) Перепишем данную функцию, введя дробные и отрицательные показатели: $y=x^3-x^{-4}+6x^{\frac{2}{3}}$.

Применяя правило дифференцирования алгебраической суммы 3) и формулу дифференцирования степенной функции 7), учитывая, что $x'_x = 1$, имеем:

$$y'=3x^2-(-4)x^{-5}+6\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=3x^2+\frac{4}{x^5}+\frac{4}{\sqrt[3]{x}}.$$

б) Применяя правило производной произведения двух функций 4), а также формулы 7) и 13), имеем:

$$y'=(x^3+2)'\cdot\sin x+(x^3+2)\cdot(\sin x)'=3x^2\cdot\sin x+(x^3+2)\cdot\cos x$$

в) Применяем правило дифференцирования частного двух функций 6), а также формулы 17), 7) и 11).

$$y'=\frac{(\arcsin x)'\cdot(x^2+e^x)-\arcsin x\cdot(x^2+e^x)'}{(x^2+e^x)^2}=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(x^2+e^x)-\arcsin x\cdot(2x+e^x)}{(x^2+e^x)^2}$$

$$=\frac{x^2+e^x-\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x\cdot(2x+e^x)}{\sqrt{1-x^2}\cdot(x^2+e^x)^2}.$$

г) Данная функция является сложной; она может быть представлена так: $y=u^4$, где $u=x^2-arctgx$. Применяем формулу 7):

$$y' = 4u^3 \cdot u' = 4(x^2 - arctgx)^3 \cdot (x^2 - arctgx)' = 4(x^2 - arctgx)^3 \cdot (2x - \frac{1}{1+x^2}) \cdot$$

д) Применяем формулу 13) дифференцирования сложной функции.

$$y' = (e^{\sin 4x})' = e^{\sin 4x} \cdot (\sin 4x)' = e^{\sin 4x} \cdot \cos 4x \cdot (4x)' = 4e^{\sin 4x} \cos 4x$$

е)

$$y' = (e^{tgx} \cdot \cos^2 x)' = (e^{tgx})' \cdot \cos^2 x + e^{tgx} \cdot (\cos^2 x)' = e^{tgx} \cdot (tgx)' \cdot \cos^2 x + e^{tgx}((\cos x)^2)' =$$

$$= e^{tgx} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x + e^{tgx} \cdot 2\cos x \cdot (\cos x)' = e^{tgx} + e^{tgx} \cdot 2\cos x \cdot (-\sin x) =$$

$$= e^{tgx} - e^{tgx} \cdot \sin 2x = e^{tgx}(1 - \sin 2x)$$

ж) Применяем формулу 12) дифференцирования сложной функции:

$$y' = (\ln \sin(2x+1))' = \frac{1}{\sin(2x+1)} \cdot (\sin(2x+1))' = \frac{1}{\sin(2x+1)} \cdot \cos(2x+1) \cdot (2x+1)' =$$

$$= 2ctg(2x+1).$$

Найти точку экстремума функции и определить интервалы возрастания и убывания функции

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

Решение. Функция $y = f(x)$ называется возрастающей в промежутке $(a;b)$, если в этом промежутке большему значению аргумента соответствует большее значение функции, то есть для любой пары значений x_1 и x_2, принадлежащих промежутку $(a;b)$ и удовлетворяющих неравенству $x_2 > x_1$ имеет место неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

Функция $y = f(x)$ называется убывающей в промежутке $(a; b)$, если в этом промежутке большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, то есть для любой пары значений x_1 и x_2, принадлежащих промежутку $(a;b)$ и удовлетворяющих неравенству $x_2 > x_1$ имеет место неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Если функция $y = f(x)$ в каждой точке промежутка $(a;b)$ имеет положительную производную $y'(x)$, то сама функция в этом промежутке возрастает. Если функция $y = f(x)$ в каждой точке промежутка $(a;b)$ имеет отрицательную производную $y'(x)$, то сама функция в этом промежутке убывает.

Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет максимум в точке x_0, если значение функции в этой точке больше, чем ее значение во всех точках некоторого промежутка, содержащего эту точку. Аналогично говорят, что функция $y = f(x)$ имеет минимум в точке x_0, если значение функции в этой точке меньше, чем ее значение во всех точках некоторого промежутка, содержащего эту точку.

Экстремум – это максимум или минимум функции. Точки, в которых имеется экстремум, называются экстремальными.

Необходимое условие существования экстремума дифференцируемой функции: если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная первого порядка равна нулю или не существует.

Достаточное условие существования экстремума дифференцируемой функции: для того, чтобы функция в критической точке x_0 имела минимум, достаточно, чтобы производная первого порядка слева от этой точки была отрицательна, справа - положительна; для того, чтобы функция в критической точке x_0 имела максимум, достаточно, чтобы производная первого порядка слева от этой точки была положительна, справа – отрицательна.

Если производная первого порядка слева и справа от критической точки x_0 имеет одинаковый знак, то в этой точке функция не имеет экстремума.

Находим первую производную $y'(x)$ и те значения аргумента x, при которых эта производная обращается в нуль:

$$y'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

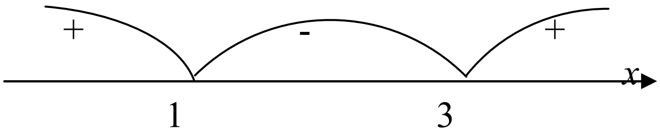
$3x^2 - 12x + 9 = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

Полученное уравнение имеет два корня: $x = 1$ и $x = 3$. Производную $y'(x)$ можно представить так:

$y'(x) = 3(x-1)(x-3)$

Мы получили две критические точки, которые разбивают всю числовую ось (область существования данной функции) на три промежутка: (- ∞;1); (1;3); (3; +∞).



Производная $y'(x)$ в первом и третьем промежутках положительна, а во втором - отрицательна. Следовательно, в первом и третьем промежутках функция возрастает, а во втором – убывает. При переходе через точку $x_1 = 1$ производная меняет свой знак с плюса на минус. Следовательно, в этой точке функция имеет максимум. При переходе через точку $x_2 = 3$ производная меняет свой знак с минуса на плюс. Следовательно, в этой точке функция имеет минимум.

Найдем значения функции в точках экстремума:

$y(1) = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$

$y(3) = 27 - 54 + 27 + 1 = 1$

Итак, мы получили две точки экстремума: A(1;5) – точка максимума, B(3;1) – точка минимума.

2.3.3 Результаты и выводы: научились вычислять пределы. Научились вычислять производные.

2.4 Практическое занятие № 4 (4 часа).

Тема: «Интегральное исчисление»

2.4.1 Задание для работы:

1. Понятие первообразной и ее свойства. Вычисление первообразной для функции.
2. Понятие неопределенного интеграла и его свойства.
3. Основные методы интегрирования: метод непосредственного интегрирования; метод подстановки; метод интегрирования по частям.
4. Понятие определенного интеграла.
5. Вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница
6. Геометрический смысл определенного интеграла.

2.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

Найти интегралы:

а) $\int (4x^3 - \sqrt{x} + \frac{6}{x^2})dx$; б) $\int (5\cos x - 3e^x)dx$; в) $\int \left[\frac{2}{9+x^2} - \frac{1}{\sqrt{25-x^2}} + \frac{3}{x}\right]dx$.

Решение. а) Предварительно преобразуем подынтегральную функцию и затем применим свойства неопределенного интеграла и табличный интеграл 2).

$$\int(4x^3-\sqrt{x}+\frac{6}{x^2})dx=\int(4x^3-x^{\frac{1}{2}}+6\cdot x^{-2})dx=4\int x^3dx-\int x^{\frac{1}{2}}dx+6\int x^{-2}dx=$$

$$=4\cdot\frac{x^4}{4}-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+6\cdot\frac{x^{-1}}{-1}+C=x^4-\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{6}{x}+C.$$

б) Применяя свойства неопределенного интеграла и табличные интегралы, будем иметь:

$$\int(5cosx-3e^x)dx=5\int\cos x dx-3\int e^x dx=5\sin x-3e^x+C$$

в) Применяем свойства 3 и 4 и табличные интегралы 12), 11) и 5).

$$\int\left[\frac{2}{9+x^2}-\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}+\frac{3}{x}\right]dx=2\cdot\frac{1}{3}arctg\frac{x}{3}-\arcsin\frac{x}{5}+3\ln|x|+C=$$

$$=\frac{2}{3}arctg\frac{x}{3}-\arcsin\frac{x}{5}+3\ln|x|+C.$$

Найти интегралы:

а) $\int\frac{(x+2)(x^2-3)}{x^3}dx$; б) $\int\frac{(1+x)^2}{x\cdot(1+x^2)}dx$; в) $\int e^x(1+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x})dx$; г) $\int\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx$.

Решение. а) Раскроем скобки в числителе и полученное произведение почленно разделим на x^3.

$$\int\frac{(x+2)(x^2-3)}{x^3}dx=\int\frac{x^3-3x+2x^2-6}{x^3}dx=\int\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^3}\right)dx=$$

$$=\int dx-3\int x^{-2}dx+2\int\frac{dx}{x}-6\int x^{-3}dx=x+\frac{3}{x}+2\ln|x|+\frac{3}{x^2}+C.$$

б) Преобразуем подынтегральную функцию и представим заданный интеграл в виде суммы двух других, каждый из которых табличный.

$$\int\frac{(1+x)^2}{x\cdot(1+x^2)}dx=\int\frac{1+2x+x^2}{x\cdot(1+x^2)}dx=\int\frac{1+x^2}{x\cdot(1+x^2)}dx+\int\frac{2x}{x\cdot(1+x^2)}dx=\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=\ln|x|+2arctgx+C.$$

в) $\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx=\int\left(e^x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=e^x+tgx+C.$

г) Чтобы привести данный интеграл к табличным, выразим стоящую в числителе 1 суммой $\sin^2 x+\cos^2 x$ и разделим почленно на знаменатель.

$$\int\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=tgx-ctgx+C.$$

Интегрирование заменой переменной (метод подстановки).

Применяя соответствующие подстановки $u=\varphi(x)$, найти указанные интегралы:

а) $\int\frac{dx}{5x+1}$; б) $\int e^{x^2+1}xdx$; в) $\int\frac{x^2dx}{1+x^6}$; г) $\int\frac{2xdx}{x^4-9}$.

Решение. а) Если воспользоваться подстановкой $u=5x+1$, то интеграл приводиться к табличному интегралу 5).

Пусть $u=5x+1$, тогда $du=5dx$ и $dx=\frac{du}{5}$.

Применяя формулу (1), будем иметь:

$$\int \frac{dx}{5x+1} = \int \frac{du}{5u} = \frac{1}{5}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{5}\ln|u| + C = \frac{1}{5}\ln|5x+1| + C .$$

б) Чтобы привести данный интеграл к табличному интегралу 6), положим $u = x^2 + 1$, тогда $du = 2xdx$ и $xdx = \dfrac{du}{2}$. Применяя формулу (1), получим:

$$\int e^{x^2=1} xdx = \int e^u \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2+1} + C .$$

в) Чтобы привести данный интеграл к табличному интегралу 12), положим $u = x^3$, тогда $du = 3x^2 dx$ и $x^2 dx = \dfrac{du}{3}$. Следовательно,

$$\int \frac{x^2 dx}{1+x^6} = \int \frac{du}{3(1+u^2)} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{3} arctgu + C = arctgx^3 + C$$

г) Чтобы привести данный интеграл к табличному интегралу 13), положим $u = x^2$, тогда $du = 2xdx$. Применяя (1), получим:

$$\int \frac{2xdx}{x^4-9} = \int \frac{du}{u^2-9} = \int \frac{du}{u^2-3^2} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{u-3}{u+3}\right| + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^2-3}{x^2+3}\right| + C .$$

Найти интегралы:

а) $\displaystyle\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$; б) $\displaystyle\int \frac{e^{3x} dx}{\sqrt{e^{6x}-7}}$; в) $\displaystyle\int \frac{\sin 2xdx}{3+\sin^2 x}$; г) $\displaystyle\int \frac{\cos x \cdot dx}{25+\sin^2 x}$.

Решение. а) Положим $t = \arcsin x$, тогда $dt = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Следовательно,

$$\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \arcsin^2 x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3}\arcsin^3 x + C .$$

В тех случаях, когда становится ясным, какая подстановка приводит данный интеграл к табличному, можно не вводить явным образом новую переменную. Например, при решении примера а) видно, что $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ является дифференциалом функции $\arcsin x$.

Поэтому решение можно записать так:

$$\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \arcsin^2 x \cdot d(\arcsin x) = \frac{\arcsin^3 x}{3} + C .$$

б) Положим $u = e^{3x}$, тогда $du = 3e^{3x} dx$ и $e^{3x} dx = \dfrac{du}{3}$. Следовательно,

$$\int \frac{e^{3x} dx}{\sqrt{e^{6x}-7}} = \int \frac{du}{3\sqrt{u^2-7}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-7}} = \frac{1}{3}\ln(u + \sqrt{u^2-7}) + C =$$

$$= \frac{1}{3}\ln(e^{3x} + \sqrt{e^{6x}-7}) + C .$$

в) Положим $u = 3 + \sin^2 x$, тогда $du = 2\sin x \cos x dx = \sin 2x dx$. Следовательно,

$$\int \frac{\sin 2xdx}{3+\sin^2 x} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|3+\sin^2 x| + C .$$

При решении данного примера можно было бы явным образом не вводить новой переменной и интегрировать следующим образом:

$$\int \frac{\sin 2xdx}{3+\sin^2 x} = \int \frac{d(3+\sin^2 x)}{3+\sin^2 x} = \ln|3+\sin^2 x| + C .$$

г) Так как $\cos x \cdot dx$ есть дифференциал функции $\sin x$, то данный интеграл приводится к табличному интегралу 12).

$$\int \frac{\cos x \cdot dx}{25+\sin^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{5^2+\sin^2 x} = \frac{1}{5} arctg \frac{\sin x}{5} + C$$

Интегрирование по частям.

Пользуясь формулой интегрирования по частям, найти интегралы:

а) $\int x \cdot e^x dx$; б) $\int x \cos x dx$.

Решение. а) Положим $u = x$ и $dv = e^x dx$, тогда $du = dx$, $v = \int e^x dx = e^x$.

Применяя (2), получим:

$$\int x \cdot e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

б) Положим $u = x$ и $dv = \cos x dx$, тогда $du = dx$, $v = \int \cos x dx = \sin x$.

Следовательно,

$$\int x \cos x dx = x \cdot \sin x - \int \sin x dx = x \cdot \sin x + \cos x + C.$$

Пользуясь формулой (2), весьма важно правильно выбрать множители u и dv. Для разложения подынтегрального выражения на множители нет общих правил. Вместе с тем можно руководствоваться некоторыми частными указаниями.

Указание 1. Если подынтегральное выражение содержит произведение показательной или тригонометрической функции на многочлен, то за множитель u следует принять многочлен.

Указание 2. Если подынтегральное выражение содержит произведение логарифмической или обратной тригонометрической функции на многочлен, то за множитель u следует принять логарифмическую функцию или обратную тригонометрическую функцию.

Вычислить интегралы:

а) $\int_2^3 3x^2 dx$; б) $\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$; в) $\int_0^5 \frac{3dx}{\sqrt[4]{3x+1}}$; г) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\, dx$.

Решение. Для вычисления определенного интеграла применяем формулу Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

а) $\int_2^3 3x^2 dx = x^3\Big|_2^3 = 27 - 8 = 19$.

б) $\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2} arctg \frac{x}{2}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}(arctg1 - arctg0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$.

в) Сделаем замену переменной. Пусть $\sqrt[4]{3x+1} = z$, тогда $3x+1 = z^4$ и $3dx = 4z^3 dz$.

Определим пределы интегрирования для новой переменной z.

При $x = 0$ переменная $z_H = 1$ (нижний предел).

При $x = 5$ переменная $z_B = 2$ (верхний предел).

Следовательно,

$$\int_0^5 \frac{3dx}{\sqrt[4]{3x+1}} = \int_1^2 \frac{4z^3 dz}{z} = \int_1^2 4z^2 dz = 4\frac{z^3}{3}\Big|_1^2 = 4\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}.$$

г) Сделаем подстановку. Пусть $x=2\sin t$; тогда $dx=2\cos tdt$. Если $x=0$, то $0=2\sin t$, откуда $t_1=0$ (нижний предел). Если $x=2$, то $2=2\sin t$, откуда $t_2=\frac{\pi}{2}$ (верхний предел).

Следовательно, $\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos tdt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=(2t+\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi .$$

2.4.3 Результаты и выводы: Научились находить неопределенные интегралы разными методами. Научились вычислять определенные интегралы.

2.5 Практическое занятие № 5 (4 часа).

Тема: «Дифференциальные уравнения. Ряды»

2.5.1 Задание для работы:

1. Основные понятия и определения.
2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение с разделенными переменными. Уравнение с разделяющимися переменными.
3. Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами
4. Решение задачи Коши.

2.5.2 Краткое описание проводимого занятия:

Найти частное решение уравнения $y'=(y+1)ctgx$, удовлетворяющее условию $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$.

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Умножив обе части уравнения на dx и разделив на множитель $(y+1)$, получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{dy}{y+1}=ctgxdx \text{ или } \frac{dy}{y+1}=\frac{\cos xdx}{\sin x}.$$

Интегрируя, имеем: $\int\frac{dy}{y+1}=\int\frac{\cos xdx}{\sin x}$.

$$\ln|y+1|=\ln\sin x+\ln C$$

$$y+1=C\sin x$$

$y=C\sin x-1$ - общее решение заданного уравнения. Используя начальные условия, находим значение произвольной постоянной *C*.

$$2 = C\sin\frac{\pi}{2} - 1$$

$$2 = C - 1$$

$$C = 3$$

Следовательно, $y = 3\sin x - 1$ есть частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Скорость размножения некоторых бактерий пропорциональна количеству бактерий, имеющихся в наличии в рассматриваемый момент времени. Известно, что количество бактерий за один час утроилось. Как измениться количество бактерий через 5 часов, если первоначальное количество равно *a*?

Решение. Пусть *x* – количество бактерий в момент времени t. Переменная величина *x* является функцией переменной величины t. Скорость изменения величины *x* выражается производной $\frac{dx}{dt}$. По условию задачи дифференциальное уравнение, описывающее рассматриваемый процесс, имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot x,$$

где *к* – некоторый коэффициент пропорциональности.

Разделим переменные и решим составленное уравнение.

$$\frac{dx}{x} = kdt$$

$$\int\frac{dx}{x} = \int kdt$$

$$\ln x = kt + \ln C$$

$$\ln\frac{x}{C} = kt$$

откуда $\frac{x}{C} = e^{kt}$ или $x = C \cdot e^{kt}$ - общее решение уравнения.

Значения произвольной постоянной *C* определяем из начальных условий: при $t = 0, x = a$.

Следовательно, $a = C \cdot e^{\kappa \cdot 0}; C = a$.

Таким образом, $x = ae^{\kappa t}$ или $x = a(e^k)^t$ - есть частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Чтобы определить коэффициент пропорциональности *к*, воспользуемся теми дополнительными условиями, которые указаны в задаче: при $t = 1$ (за один час) количество бактерий утроилось, то есть $x=3a$.

Следовательно, $3a = a(e^k)^1$ откуда $e^k = 3$ и мы получаем зависимость между переменными: $x = a \cdot 3^t$.

Чтобы ответить на вопрос задачи, находим количество *x* при $t = 5$, $x = a \cdot 3^5$, $x = 243a$.

Как видно, через 5 часов количество бактерий увеличится в 243 раза.

Найти значение биомассы в момент Т = 12, если в начальный момент ($t = 0$) значение биомассы $m_0 = 10$ и $k(t) = \frac{1}{1 + 2t}$.

Решение. Составим дифференциальное уравнение, описывающее динамику развития популяции. Состояние популяции (в простейшем понимании – стада) можно охарактеризовать массой *m* этой популяции (т.е. весом всего стада), причем масса *m* является функцией времени $m = m(t)$. Считаем, что скорость прироста биомассы пропорциональна биомассе популяции с коэффициентом $k = k(t)$.

Скорость изменения биомассы характеризуется производной $m'(t)$ (при $m' > 0$ - это скорость развития, при $m' < 0$ - скорость вымирания). По условию задачи $m' = km$ или

$$m' = \frac{1}{1+2t} m \qquad (1)$$

Уравнение (1) является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Разделим переменные m и t:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{1}{1+2t} m$$

$$\frac{dm}{m} = \frac{dt}{1+2t}$$

Отсюда после почленного интегрирования получаем:

$\int \frac{dm}{m} = \int \frac{dt}{1+2t}$, т.е. $\ln m = \frac{1}{2} \ln(1+2t) + \ln C$

В данном случае произвольную постоянную удобно взять в виде $\ln C$. Из последнего равенства следует формула для общего решения дифференциального уравнения

$$m = C(1+2t)^{\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

Для определения значения произвольной постоянной C полагаем в равенстве (2) $t = 0, m = m_0 = 10$. В результате получаем

$$10 = C(1 + 2 \cdot 0)^{\frac{1}{2}}, C = 10$$

Таким образом, из общего решения дифференциального уравнения приходим к выражению

$$m(t) = 10\sqrt{1+2t} \qquad (3)$$

Положим теперь в равенстве (3) $t = T = 12$. Тогда

$$m(12) = 10\sqrt{1 + 2 \cdot 12} = 50.$$

Следовательно, в момент времени T = 12(ед.) значение биомассы будет составлять 50 (ед.).

2.5.3 Результаты и выводы: научились применять дифференциальные уравнения в практических задачах.

2.6 Практическое занятие № 6 (4 часа).

Тема: «Элементы теории вероятностей»

2.6.1 Задание для работы:

1. Основные определения. Классическое определение вероятности события.
2. Классификация событий и их свойства.
3. Теоремы о сумме и произведении вероятностей.
4. Формула Бернулли.
5. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.
6. Наиболее вероятное число появления события в испытании.
7. Дискретные и непрерывные случайные величины.
8. Числовые характеристики ДСВ.

9. Числовые характеристики НСВ.

2.6.2 Краткое описание проводимого занятия:

Брошена игральная кость. Найти вероятность события, состоящего в том, что выпало четное число очков.

Решение. Обозначим событие A = {выпало четное число очков}. Имеется 6 элементарных событий, т.е. $n = 6$. Элементарными событиями, благоприятными для A, являются события: A_1 = {выпадение 2 очков}, A_2 = {выпадение 4 очков}, A_3 = {выпадение 6 очков}. Всего таких событий три, следовательно,

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Итак, вероятность того, что выпадет четное число очков, равна $0{,}5$.

Пример 6. В ящике 4 белых, 5 красных, 8 зеленых и 3 голубых шара. Шары перемешивают и наудачу извлекают 1 шар. Какова вероятность события, состоящего в том, что шар окажется цветным?

Решение. Всевозможными элементарными исходами являются события:

A = {извлечение белого шара},

B = {извлечение красного шара},

C = {извлечение зеленого шара},

D = {извлечение голубого шара}.

Необходимо найти событие, состоящее в появлении события B или C, или D, т.е. события $B + C + D$. Так как события B, C, D – несовместны, то

$$P(B + C + D) = P(B) + P(C) + P(D) = \frac{5}{20} + \frac{8}{20} + \frac{3}{20} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

Таким образом, вероятность извлечения цветного шара равна $0{,}8$.

В ящике 60 груш сорта A и 40 груш сорта B. Отбирают две груши. Определить вероятности следующих событий:

а) обе груши сорта A;

б) обе груши сорта B;

в) одна груша сорта A, а другая груша сорта B.

Решение. Обозначим:

A_1 = {при первом извлечении взята груша сорта A},

A_2 = {при втором извлечении взята груша сорта A},

B_1 = {при первом извлечении взята груша сорта B},

B_2 = {при втором извлечении взята груша сорта B}.

Таким образом, нужно найти:

а) $P(A_1 \text{ и } A_2)$;

б) $P(B_1 \text{ и } B_2)$;

в) $P((A_1 \text{ и } B_2) \text{ или } (B_1 \text{ и } A_2))$.

Находим:

а) $P(A_1\,A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) = \frac{60}{100} \cdot \frac{59}{99} = 0{,}36$; т.е. вероятность того, что обе груши сорта

A, равна $0{,}36$.

б) $P(B_1\,B_2) = P(B_1)\cdot P(B_2/B_1) = \dfrac{40}{100}\cdot\dfrac{39}{99} = 0{,}16$.

Следовательно, вероятность того, что обе груши сорта B, равна $0{,}16$.

в) $P(A_1\,B_2 + B_1\,A_2) = P(A_1)\cdot P(B_2/A_1) + P(B_1)\cdot P(A_2/B_1) = \dfrac{60}{100}\cdot\dfrac{40}{99} + \dfrac{40}{100}\cdot\dfrac{60}{99} = 0{,}48$.

Таким образом, вероятность того, что одна груша сорта A, а другая груша сорта B, равна $0{,}48$.

Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятность того, что студент даст правильный ответ на первый вопрос, равна 0,9, вероятность правильного ответа на второй вопрос равна 0,8 и, наконец, вероятность правильного ответа на третий вопрос равна 0,7. Найти вероятность того, что студент на все три вопроса ответит правильно.

Решение. Обозначим: A = {правильный ответ на первый вопрос}, B = {правильный ответ на второй вопрос}, C = {правильный ответ на третий вопрос}.

События A, B и C являются независимыми. Применяя теорему умножения вероятностей для независимых событий, получим:

$$P(ABC) = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C) = 0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7 = 0{,}504.$$

Итак, вероятность того, что студент на все три вопроса ответит правильно, равна $0{,}504$.

На опытной делянке посеяно 15 семян. Всхожесть всех семян одинакова и равна $80\,\%$.

Найти вероятность того, что из 15 посеянных семян взойдет ровно 12.

Решение. Обозначим событие A = {из 15 посеянных семян взойдет 12}. Число посеянных семян равно числу независимых испытаний, т. е. $n = 15$. Событие A осуществится 12 раз, поэтому $k = 12$. По условию $p = 80\% = 0{,}8$, тогда $q = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. По формуле Бернулли имеем:

$$P_{15}(12) = \frac{15\,!}{12\,!\,(15-12)!}\cdot 0{,}8^{12}\cdot 0{,}2^{15-12} =$$

$$= \frac{12!\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{12!\cdot 1\cdot 2\cdot 3}\cdot 0{,}8^{12}\cdot 0{,}2^{3} = 455\cdot 0{,}8^{12}\cdot 0{,}008 \approx 0{,}2551.$$

Итак, вероятность того, что из 15 посеянных семян взойдет ровно 12, равна $0{,}26$.

Завод сортовых семян выпускает гибридные семена кукурузы. Известно, что семена первого сорта составляют $90\,\%$. Определить вероятность того, что из взятых наудачу для проверки 400 семян 354 будут семенами первого сорта.

Решение. Имеем $n = 400$, $p = \dfrac{90}{100} = 0{,}9$, $q = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$, $k = 354$. Тогда

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{354 - 400\cdot 0{,}9}{\sqrt{400\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}} = \frac{354 - 360}{6} = -1.$$

Так как функция $\varphi\,(x)$ – четная, то найдем по таблице значение функции $\varphi(x)$ при $x = 1$:

$$\varphi(-1) = \varphi(1) = 0{,}2420.$$

Найдем искомую вероятность:

$$P_{400}(354) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \cdot \varphi(1) \approx \frac{1}{\sqrt{36}} \cdot 0,2420 \approx 0,0403 .$$

Итак, вероятность того, что из взятых наудачу для проверки 400 семян 354 будут семенами первого сорта $\approx 4\%$.

Известно, что вероятность летального исхода при определенной болезни равна $0,01$. Какова вероятность того, что в группе из 90 больных животных погибнет 1 животное?

Решение. Имеем $n = 90$, $p = 0,01$. Найдем $\lambda = n \cdot p = 90 \cdot 0.01 = 0,9$, $k = 1$. Используя формулу, получим

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \approx \frac{0,9^1}{1!} \cdot e^{-0,9} .$$

Найдем по таблице значение функции $\frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$ при $\lambda = 0,9$ и $k = 1$, тогда

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \approx \frac{0,9^1}{1!} \cdot e^{-0,9} \approx 0,3659 .$$

Таким образом, вероятность того, что в группе из 90 больных животных погибнет 1 животное, составляет $37\,\%$.

В лаборатории из партии семян, имеющих всхожесть $90\,\%$, высеяно 600 семян. Найти вероятность того, что число семян, давших всходы, не менее 520 и не более 570, если принять, что каждое посеянное зерно взойдет с одной и той же вероятностью.

Решение. Имеем $n = 600$, $p = \frac{90}{100} = 0,9$, $q = 1 - 0,9 = 0,1$, $k_1 = 520$, $k_2 = 570$. Тогда по формуле имеем

$$P(520, 570) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) .$$

Найдем x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{520 - 600 \cdot 0,9}{600 \cdot 0,9 \cdot 0,1} = -\frac{20}{7,35} \approx -2,72 ,$$

$$x_2 = \frac{570 - 600 \cdot 0,9}{600 \cdot 0,9 \cdot 0,1} = \frac{30}{7,35} \approx 4,08 .$$

Найдем по таблице значения функции $\Phi(x)$ при $x_1 = 2,72$ и $x_2 = 4,08$.

Таким образом, вероятность того, что число семян, давших всходы не менее 520 и не более 570, приближенно равна

$$P(520, 570) \approx \Phi(4,08) - \Phi(-2,72) \approx \Phi(4,08) + \Phi(2,72) = 0,49996 + 0,4967 \approx 0,99 ,$$

т.е. событие практически достоверное.

Случайная величина X задана законом распределения:

X	2	3	10
p	0,1	0,4	0,5

Найти среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Решение. Найдем математическое ожидание случайной величины X:

$$M(X) = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}4 + 10 \cdot 0{,}5 = 6{,}4 .$$

Найдем математическое ожидание случайной величины X^2:

$$M(X^2) = 2^2 \cdot 0{,}1 + 3^2 \cdot 0{,}4 + 10^2 \cdot 0{,}5 = 54 .$$

Найдем дисперсию:

$$D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2 = 54 - 6{,}4^2 = 13{,}04 .$$

Искомое среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{13{,}04} \approx 3{,}6 .$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины X, заданной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ \textit{если} \ \ x \le 0, \\ x, \ \textit{если} \ \ 0 < x \le 1, \\ 1, \ \textit{если} \ \ x > 1. \end{cases}$$

Решение. Найдем плотность распределения:

$$f(x) = F^{/}(x) = \begin{cases} 0, \ \textit{если} \ \ x \le 0, \\ 1, \ \textit{если} \ \ 0 < x < 1, \\ 0, \ \textit{если} \ \ x > 1. \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание:

$$M(X) = \int_a^b x\, f(x) dx = \int_0^1 x \cdot 1 \cdot dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2} .$$

Найдем дисперсию по формуле:

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x) dx - (M(X))^2 = \int_0^1 x^2 \cdot 1 \cdot dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} .$$

По формуле найдем среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{1}{12}}\approx 0{,}29 .$$

2.6.3 Результаты и выводы: Научились вычислять вероятность событий.

Научились применять повторные независимые испытания в сельском хозяйстве.

Научились вычислять числовые характеристики случайных величин.

2.7 Практическое занятие № 7 (4 часа).

Тема: «Математическая статистика»

2.7.1 Задание для работы:

1. Генеральная совокупность. Выборка. Случайные величины.
2. Дискретный и интервальный ряды распределения.
3. Построение полигона и гистограммы.
4. Вычисление выборочных числовых характеристик.

2.7.2 Краткое описание проводимого занятия:

Из крупного стада коров произведена случайная выборка, получено 20 вариант удоя коров за 300 дней лактации (в ц): 35,9; 35,3; 42,7; 45,2; 25,9; 35,3; 33,4; 27,0; 35,9; 38,8; 33,7; 38,6; 40,9; 35,5; 44,1; 37,4; 34,2; 30,8; 38,4; 31,3. Получить вариационный ряд и построить гистограмму относительных частот.

Решение. Запишем исходные данные в виде ранжированного ряда, т.е. располагая их в порядке возрастания: 25,9; 27,0; 30,8; 31,3; 33,4; 33,7; 34,2; 35,3; 35,3; 35,5; 35,9; 35,9; 37,4; 38,4; 38,6; 38,8; 40,9; 42,7; 44,1; 46,2.

Максимальное значение признака составляет $46{,}2$ ц, а минимальное – $25{,}9$ ц. Разница между ними составляет $20{,}3$ ц. Этот интервал надо разбить на определенное количество классов. При малом объеме выборки ($20-40$ вариант) намечают $5-6$ классов. Возьмем длину классового интервала $h=5$. Получаем пять интервалов: первый $25-30$, второй $30-35$, третий $35-40$, четвертый $40-45$, пятый $45-50$ (начало первого класса не обязательно должно совпадать со значением минимальной варианты).

С помощью ранжированного ряда определим частоту попадания вариант выборки в каждый интервал. В первый интервал попадет два значения ($25{,}9$ и $27{,}0$), поэтому $n_1=2$. Во второй интервал попадают пять значений, поэтому $n_2=5$. Аналогично $n_3=9$, $n_4=3$, $n_5=1$.

Теперь найдем относительные частоты попадания вариант выборки в каждый интервал:

$$W_1=\frac{n_1}{n}=\frac{2}{20}=0{,}1 \qquad \text{(в первый интервал);}$$

$$W_2=\frac{n_2}{n}=\frac{5}{20}=0{,}25 \qquad \text{(во второй интервал);}$$

$$W_3=\frac{n_3}{n}=\frac{9}{20}=0{,}45 \qquad \text{(в третий интервал);}$$

$$W_4=\frac{n_4}{n}=\frac{3}{20}=0{,}15 \qquad \text{(в четвертый интервал);}$$

$$W_5 = \frac{n_5}{n} = \frac{1}{20} = 0{,}05 \quad \text{(в пятый интервал).}$$

Для проверки вычисляем сумму относительных частот:

$$W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 = 0{,}1 + 0{,}25 + 0{,}45 + 0{,}15 + 0{,}05 = 1\,.$$

Тот факт, что в сумме получили единицу, подтверждает правильность вычислений.

По формуле $P_i' = \frac{W_i}{h}$ вычислим плотности P_i' относительных частот вариант. Получаем:

$$P_1' = \frac{W_1}{h} = \frac{0{,}1}{5} = 0{,}02 \quad \text{(для первого интервала);}$$

$$P_2' = \frac{W_2}{h} = \frac{0{,}25}{5} = 0{,}05 \quad \text{(для второго интервала);}$$

$$P_3' = \frac{W_3}{h} = \frac{0{,}45}{5} = 0{,}09 \quad \text{(для третьего интервала);}$$

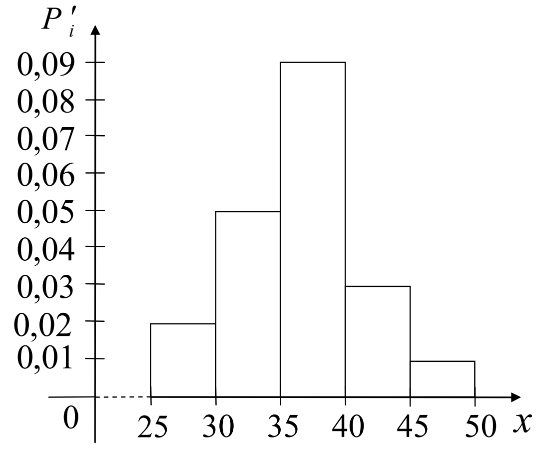
$$P_4' = \frac{W_4}{h} = \frac{0{,}15}{5} = 0{,}03 \quad \text{(для четвертого интервала);}$$

$$P_5' = \frac{W_5}{h} = \frac{0{,}05}{5} = 0{,}01 \quad \text{(для пятого интервала).}$$

Полученные результаты сведем в таблицу:

Интервал значений удоя (ц)	25 – 30	30 – 35	35 – 40	40 – 45	45 – 50
Частоты вариант n_i	2	5	9	3	1
Относительные частоты W_i	0,1	0,25	0,45	0,15	0,05
Плотность относительных частот P_i'	0,02	0,05	0,09	0,03	0,01

Для построения гистограммы относительных частот частичные интервалы изображают на оси абсцисс, а значения плотностей относительных частот откладывают на оси ординат.



Вычислим основные выборочные характеристики.

Решение. Расчеты удобно проводить с помощью таблицы:

№ опыта	Результат обследования x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	35,9	– 0,1	0,01
2	35,3	– 0,7	0,49
3	42,7	6,7	44,89
4	45,2	9,2	84,64
5	25,9	– 10,1	102,01
6	35,3	– 0,7	0,40
7	33,4	– 2,6	6,76
8	27,0	– 9,0	81,00
9	35,9	– 0,1	0,01
10	38,8	2,8	7,84
11	33,7	– 2,3	5,29
12	38,6	2,6	6,76
13	40,9	4,9	24,01
14	35,5	– 0,5	0,25
15	44,1	8,1	65,61
16	37,4	1,4	1,96
17	34,2	– 1,8	3,24
18	30,8	– 5,2	27,04
19	38,4	2,4	5,76
20	31,3	– 4,7	22,09
$\sum$	720,3	0	490,15

Просуммировав варианты x_i, занесем сумму $\sum x_i$ в нижнюю строку таблицы под соответствующим столбцом. Разделив эту сумму на 20, получим:

$$\bar{x} = 36{,}015 \approx 36{,}0 .$$

Теперь заполняем следующий столбец таблицы, в который записываем разность $x_i - \bar{x}$. Для контроля можно вычислить сумму всех таких разностей. Если разности вычислены правильно, то их сумма равна нулю.

Затем возводим эти разности в квадрат и заполняем последний столбец таблицы. Вычислив сумму $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 490{,}15$ и разделив ее на $n - 1 = 20 - 1 = 19$. Получим значение дисперсии

$$s^2 = \frac{490{,}15}{19} \approx 25{,}8 .$$

Извлекая квадратный корень из величины s^2, находим:

$$s \approx 5{,}08 ,$$

затем ошибку средней:

$$s_{\bar{x}} = \frac{5{,}08}{\sqrt{20}} \approx \frac{5{,}08}{4{,}47} \approx 1{,}34 .$$

Вычисляем коэффициент вариации:

$$V = \frac{5{,}08}{36} \cdot 100\% \approx 14\% .$$

Поскольку $10\% < V < 20\%$, то изменчивость удоев за 300 дней следует считать средней.

Таким образом, $\bar{x} \approx 36$, $s^2 \approx 25{,}8$, $s \approx 5{,}08$, $s_{\bar{x}} \approx 1{,}34$, $V \approx 14\%$.

2.7.3 Результаты и выводы: Научились строить гистограмму и вычислять выборочные характеристики.

2.8 Практическое занятие № 8 (2 часа).

Тема: «Теория корреляции»

2.8.1 Задание для работы:

1. Построение корреляционной таблицы.
2. Вычисление условных средних и построение линий регрессии.
3. Вычисление корреляционного момента и коэффициента корреляции.

2.8.2 Краткое описание проводимого занятия:

Для 10 петушков леггорнов 15-дневного возраста были получены следующие данные о массе их тела X (г) и массе гребня Y (мг):

x_i	83	72	69	90	90	95	95	91	75	70
y_i	56	42	18	84	56	107	90	68	31	48

Требуется:

1) найти коэффициент корреляции и сделать вывод о тесноте и направлении линейной корреляционной связи между признаками;

2) составить уравнение прямой регрессии Y на X.

Решение. 1) Сначала сделаем промежуточные вычисления, которые удобно располагать в виде таблицы:

№	x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	83	56	0	0	– 4	16	0
2	72	42	–11	121	– 18	324	198
3	69	18	–14	196	– 42	1764	588
4	90	84	7	49	24	576	168
5	90	56	7	49	– 4	16	-28
6	95	107	12	144	47	2209	564
7	95	90	12	144	30	900	360
8	91	68	8	64	8	64	64
9	75	31	– 8	64	– 29	841	232
10	70	48	– 13	169	–12	144	156
$\sum$	830	600	0	1000	0	6854	2302

Вычисляем средние:

$$\bar{x} = \frac{830}{10} = 83; \quad \bar{y} = \frac{600}{10} = 60.$$

Теперь заполняем последние пять столбцов таблицы. Суммируя элементы в соответствующих столбцах, находим:

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 1000,$$
$$\sum (y_i - \bar{y})^2 = 6854,$$
$$\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 2302.$$

Подставляя вычисленные значения в формулу (83), получаем:

$$r = \frac{2302}{\sqrt{1000} \cdot \sqrt{6854}} \approx 0{,}88.$$

Вывод: между массой тела X и массой гребня Y у 15-дневных петушков существует тесная положительная линейная корреляционная связь.

2) Используя данные из таблицы, по формуле находим коэффициент регрессии $b_{Y/X}$:

$$b_{Y/X} = \frac{2302}{1000} \approx 2{,}3.$$

Подставляя теперь в формулу найденные значения $\bar{x} = 83$, $\bar{y} = 60$, $b_{Y/X} = 2{,}3$, имеем:

$$y - 60 = 2{,}3(x - 83).$$

Последнее уравнение преобразуем к виду

$$y = 2{,}3x - 130{,}9.$$

Отметим, что полученная математическая модель (уравнение прямой регрессии) обладает прогнозирующими свойствами лишь при изменении x от 69 до 95. Так, например, можно с достаточной степенью достоверности считать, что при массе петушка 80 г масса его гребня составит:

$$y = 2{,}32 \cdot 80 - 132{,}56 \approx 53 \text{ мг}.$$

Таким образом, $r \approx 0{,}88$, $y = 2{,}3x - 130{,}9$.

2.8.3 Результаты и выводы: научились вычислять коэффициент корреляции.