ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Физика»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Б2.Б.1 Математика

Направление подготовки (специальность) *36.03.01 Ветеринарно-санитарная экспертиза*
Профиль образовательной программы *Ветеринарно-санитарная экспертиза*

Форма обучения *заочная*

Оренбург 2016 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.1 Лекция №1 (2часа)

Тема: «Матрицы. Определители. Системы линейных уравнений. Прямая на плоскости. Способы задания».

1.1.1. Вопросы лекции:

1. Понятие СЛУ.
2. Матрицы. Определители.
3. Прямая. Способы задания.

1.1.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие СЛУ.

Определение. Линейными операциями над какими-либо объектами называются их сложение и умножение на число.

Определение. Линейной комбинацией переменных называется результат применения к ним линейных операций, т.е. $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$, где α_i – числа, x_i – переменные.

Определение. Линейным уравнением называется уравнение вида

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = b, \qquad (2.1)$$

где a_i и b – числа, x_i - неизвестные.

Таким образом, в левой части линейного уравнения стоит линейная комбинация неизвестных, а в правой – число.

Определение. Линейное уравнение называется однородным, если b = 0. В противном случае уравнение называется неоднородным.

Определение. Системой линейных уравнений (линейной системой) называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (2.2)$$

где a_{ij}, b_i - числа, x_j - неизвестные, n – число неизвестных, m – число уравнений.

Определение. Решением линейной системы (2.2) называется набор чисел $x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}$, которые при подстановке вместо неизвестных обращают каждое уравнение системы в верное равенство.

2. Матрицы. Определители.

Определение. Матрицей называется прямоугольная таблица чисел.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Обозначения: A – матрица, a_{ij} - элемент матрицы, i – номер строки, в которой стоит данный элемент, j – номер соответствующего столбца; m – число строк матрицы, n – число ее столбцов.

Определение. Числа m и n называются размерностями матрицы.

Определение. Матрица называется квадратной, если m = n. Число n в этом случае называют порядком квадратной матрицы.

Каждой квадратной матрице можно поставить в соответствие число, определяемое единственным образом с использованием всех элементов матрицы. Это число называется определителем.

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Определение. Транспонированием матрицы называется замена ее строк столбцами с теми же номерами.

Определение. Определителем второго порядка называется число, полученное с помощью элементов квадратной матрицы 2-го порядка следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

При этом из произведения элементов, стоящих на так называемой главной диагонали матрицы (идущей из левого верхнего в правый нижний угол) вычитается произведение элементов, находящихся на второй, или побочной, диагонали.

Определение. Определителем третьего порядка называется число, определяемое с помощью элементов квадратной матрицы 3-го порядка следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Замечание. Для того чтобы легче запомнить эту формулу, можно использовать так называемое правило треугольников. Оно заключается в следующем: элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «+», располагаются так:

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, образуя два треугольника, симметричных относительно главной диагонали. Элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «-», располагаются аналогичным образом относительно побочной диагонали: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Сформулируем и докажем основные свойства определителей 2-го и 3-го порядка (доказательство проведем для определителей 3-го порядка).

Свойство 1. Определитель не изменяется при транспонировании, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Замечание. Следующие свойства определителей будут формулироваться только для строк. При этом из свойства 1 следует, что теми же свойствами будут обладать и столбцы.

Свойство 2. При умножении элементов строки определителя на некоторое число весь определитель умножается на это число, т.е.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 3. Определитель, имеющий нулевую строку, равен 0.

Свойство 4. Определитель, имеющий две равные строки, равен 0.
Свойство 5. Определитель, две строки которого пропорциональны, равен 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 6. При перестановке двух строк определителя он умножается на –1.

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 7.

$$\begin{vmatrix} b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 8. Величина определителя не изменится, если к элементам одной строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Определение. Минором элемента определителя называется определитель, полученный из данного путем вычеркивания строки и столбца, в которых стоит выбранный элемент.
Обозначение: a_{ij} – выбранный элемент определителя, M_{ij} – его минор.

Определение. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента определителя называется его минор, если сумма индексов данного элемента i+j есть число четное, или число, противоположное минору, если i+j нечетно, т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

3. Прямая. Способы задания.

Линия на плоскости рассматривается (задается) как множество точек, обладающих некоторым только им присущим геометрическим свойством. Например, окружность радиуса R есть множество всех точек плоскости, удаленных на расстояние - R от некоторой фиксированной точки О (центра окружности).

Введение на плоскости системы координат позволяет определять положение точки плоскости заданием двух чисел — ее координат, а положение линии на плоскости определять с помощью уравнения (т. е. равенства, связывающего координаты точек линии).

Уравнением линии (или кривой) на плоскости Оху называется такое уравнение F(x;y) = 0 с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Переменные x и y в уравнении линии называются текущими координатами точек линии.

Уравнение линии позволяет изучение геометрических свойств линии заменить исследованием его уравнения.

Определение. Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка Ах + Ву + С = 0, причем постоянные А, В не равны нулю одновременно. Это уравнение первого порядка называют общим уравнением прямой.

Уравнение прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

Уравнение прямой по точке и вектору нормали

Определение. В декартовой прямоугольной системе координат вектор с компонентами (А, В) перпендикулярен прямой , заданной уравнением Ах + Ву + С = 0.

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть в пространстве заданы две точки M $_1$ (x $_1$, y $_1$) и M$_2$ (x $_2$, y $_2$), тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Если какой- либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель.

Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту

Если общее уравнение прямой Ах + Ву + С = 0 привести к виду:

$$y = -\frac{A}{B}x$$

и обозначить $-\frac{A}{B} = k, -\frac{C}{B} = b$, то полученное уравнение $y = kx + b$ называет уравнением прямой с угловым коэффициентом k .

Уравнение прямой по точке и направляющему вектору

По аналогии с пунктом, рассматривающим уравнение прямой через вектор нормали можно ввести задание прямой через точку и направляющий вектор прямой.

Определение. Каждый ненулевой вектор (α_1 , α_2), компоненты которого удовлетворяют условию А α_1 + В α_2 = 0 называется направляющим вектором прямой Ах + Ву + С = 0.

Уравнение прямой в отрезках

Если в общем уравнении прямой Ах + Ву + С = 0 С≠0, то, разделив на –С, получим:

$$-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$$

или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$, где

$$a = -\frac{C}{A}, b = -\frac{C}{B}$$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент *а* является координатой точки пересечения прямой с осью Ох, а *b* – координатой точки пересечения прямой с осью Оу.

Следует отметить, что не каждую прямую можно представить уравнением в отрезках, например, прямые, параллельные осям или проходящие через начало координат.

1.2 Лекция №2 (2часа).

Тема: «Функция. Предел и производная функции. Интегралы»

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Функция. Предел функции.
2. Производная.
3. Правила дифференцирования.
4. Исследование функции с помощью производной.
5. Первообразная. Неопределенный интеграл.
6. Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница.
7. Геометрический смысл определенного интеграла.

1.2.2 Краткое содержание вопросов.

1. Функция. Предел функции.

Функция- зависимость переменной **y** от переменной **x,** если каждому значению **x** соответствует единственное значение **y**.

Переменная x- независимая переменная или аргумент.

Переменная y- зависимая переменная.

Значение функции- значение y, соответствующее заданному значению x.

Область определения функции- все значения, которые принимает независимая переменная. Обозначается $D(f)$.

Область значений функции (множество значений)- все значения, которые принимает функция. Обозначается $E(f)$.

Функция является четной- если для любого x из области определения функции выполняется равенство f(x)=f(-x)

Функция является нечетной- если для любого x из области определения функции выполняется равенство f(-x)=-f(x)

Возрастающая функция- если для любых x_1 и x_2, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$

Убывающая функция- если для любых x_1 и x_2, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)>f(x_2)$

Функция называется периодической, если существует такое число T, что $(x \pm T) \in D(f)$ и $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$.

Способы задания функции.

Чтобы задать функцию, нужно указать способ, с помощью которого для каждого значения аргумента можно найти соответствующее значение функции. Наиболее употребительным является способ задания функции с помощью формулы **y=f(x)**, где **f(x)-** некоторое выражение с переменной **x**. В таком случае говорят, что функция задана формулой или что функция задана аналитически.

На практике часто используется табличный способ задания функции. При этом способе приводится таблица, указывающая значения функции для имеющихся в таблице значений аргумента. Примерами табличного задания функции являются таблица квадратов, таблица кубов.

Наиболее наглядным является графический способ задания функции. При данном способе функция задается графиком, по которому можно для каждого x определить единственное y.

Основными элементарными функциями являются:

1) степенная функция $y = x^n, n \in R$,
2) показательная функция $y = a^x, a > 0, a \neq 1$,
3) логарифмическая функция $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$,
4) тригонометрические функции $y = \sin x, y = \cos x, y = tg\ x, y = ctg\ x$,
5) обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = arctg\ x, y = arcctg\ x$.

Определение предела по Коши. Число A называется пределом функции f (x) в точке a, если эта функция определена в некоторой окрестности точки a за исключением, быть может, самой точки a, и для каждого ε > 0 существует δ > 0 такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Определение предела по Гейне. Число A называется пределом функции f (x) в точке a, если эта функция определена в некоторой окрестности точки a за исключением, быть может, самой точки a, и для любой последовательности $\{x_n\}$такой, что $x_n \neq a, \forall n \in N$ сходящейся к числу a, соответствующая последовательность значений функции $f(\{x_n\})$сходится к числу A.

Если A – предел функции в точке a, то пишут, что

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.

Если функция f (x) имеет предел в точке a, то этот предел единственный.

Число A_1 называется пределом функции f (x) слева в точке a, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in (a - \delta;\ a)$ выполняется неравенство $\left|f(x) - A_1\right| < \varepsilon$

Число A_2 называется пределом функции f (x) справа в точке a, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in (a;\ a + \delta)$ выполняется неравенство $\left|f(x) - A_2\right| < \varepsilon$

Предел слева обозначается $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$предел справа $-\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$. Эти пределы характеризуют поведение функции слева и справа от точки a. Их часто называют односторонними пределами.

Если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая δ-окрестность точки a, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, выполняется неравенство $|f(x)| > \varepsilon$, то говорят, что функция f (x) имеет в точке a бесконечный предел:

Если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого $x > \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, то говорят, что предел функции f (x) при x, стремящемся к плюс бесконечности, равен A:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A.$$

Если функция f (x) имеет конечный предел в точке a, то существует окрестность точки a, в которой функция f ограничена (возможно, что в самой точке a функция не определена). При этом, если $A \neq 0$, то найдется окрестность точки a, в которой (быть может, за исключением самой точки a) значения функции f имеют тот же знак, что и число A.

2. Производная.

Пусть функция y = f(x) определена в промежутке X. *Производной* функции y = f(x) в точке x_o называется предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если этот предел *конечный,* то функция f(x) называется *дифференцируемой* в точке x_o; при этом она оказывается обязательно и непрерывной в этой точке.

Если же рассматриваемый предел равен ∞ (или -∞), то при условии, что функция в точке x_o непрерывна, будем говорить, что функция f(x) имеет в точке x_o *бесконечную производную*.

Производная обозначается символами

$$y', \quad f'(x_o), \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df(x_0)}{dx}.$$

Нахождение производной называется *дифференцированием* функции.

3.Правила дифференцирования.

Если c - постоянное число, и u = u(x), v = v(x) - некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие правила дифференцирования:

1) (c) ' = 0, (cu) ' = cu';

2) (u+v)' = u'+v';

3) (uv)' = u'v+v'u;

4) (u/v)' = (u'v-v'u)/v$^{2;}$

5) если y = f(u), u = j(x), т.е. y = f(j(x)) - *сложная функция,* или *суперпозиция*, составленная из дифференцируемых функций j и f, то $y'_x = y'_u \; u'_x$, или

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$;

6) если для функции y = f(x) существует обратная дифференцируемая функция x = g(y), причем $\frac{dg}{dy} = x'_y$ $\neq 0$, то $y'_x = \frac{1}{x'_y}$.

При нахождении производных пользуются таблицами производных основных элементарных функций ([2] с. 150).

4. Исследование функции с помощью производной.

Общая схема исследования функции и построения ее графика:

1. Найти область определения функции. Выделить особые точки (точки разрыва).
2. Проверить наличие вертикальных асимптот в точках разрыва и на границах области определения. Если $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.
3. Найти точки пересечения с осями координат
4. Установить, является ли функция чётной или нечётной.
5. Определить, является ли функция периодической или нет (только для тригонометрических функций, остальные непериодические, пункт пропускается).
6. Найти точки экстремума и интервалы монотонности (возрастания и убывания) функции.
7. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости-вогнутости.
8. Найти наклонные асимптоты функции.
9. $k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ $\quad b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx]$ и к минус бесконечности
10. Найти горизонтальные асимптоты функции.
11. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = c \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = c$
12. Построить график функции.

5. Первообразная. Неопределенный интеграл.

Определение. Функция $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ называется первообразной для функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ на интервале $\boldsymbol{X}$=($\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$) (конечном или бесконечном), если в каждой точке этого интервала $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ является производной для $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, т.е. $F'(x) = f(x)$.

Из этого определения следует, что задача нахождения первообразной обратна задаче дифференцирования: по заданной функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}$) требуется найти функцию $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, производная которой равна $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Первообразная определена неоднозначно: для функции $\frac{1}{1+x^2}$ первообразными будут и функция arctg $\boldsymbol{x}$, и функция arctg $\boldsymbol{x}$-10:

$(\mathrm{arctg}\,x)' = (\mathrm{arctg}\,x - 10)' = \frac{1}{1+x^2}$. Для того, чтобы описать все множество первообразных функции $f(x)$, рассмотрим

Свойства первообразной.

1. Если функция $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$ на интервале X, то функция $f(x) + C$, где C - произвольная постоянная, тоже будет первообразной для $f(x)$ на этом интервале. (Док-во: $F'(x) = (F(x) + C)' = f(x)$).

2. Если функция $F(x)$ - некоторая первообразная для функции $f(x)$ на интервале $X=(a,b)$, то любая другая первообразная $F_1(x)$ может быть представлена в виде $F_1(x) = F(x) + C$, где C - постоянная на X функция.

3. Для любой первообразной $F(x)$ выполняется равенство $dF(x) = f(x)\,dx$.

Из этих свойств следует, что если $F(x)$ - некоторая первообразная функции $f(x)$ на интервале X, то всё множество первообразных функции $f(x)$ (т.е. функций, имеющих производную $f(x)$ и дифференциал $f(x)\,dx$) на этом интервале описывается выражением $F(x) + C$, где C - произвольная постоянная.

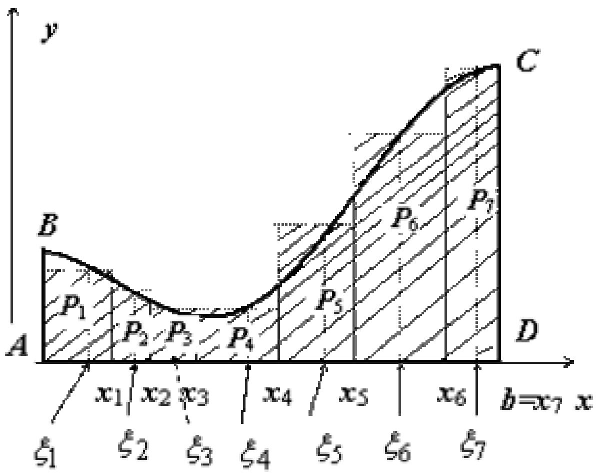
Определение. Множество первообразных функции $f(x)$ называется неопределённым интегралом от этой функции и обозначается символом $\int f(x)dx$.

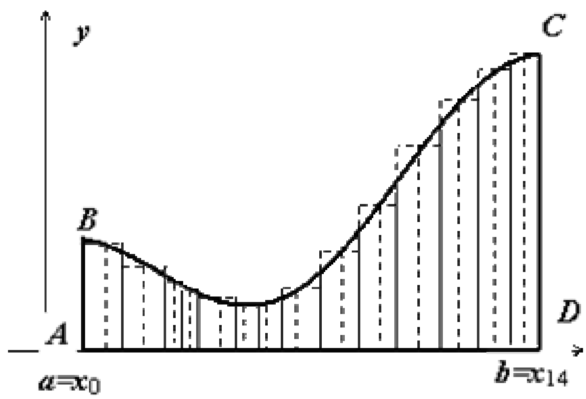
Как следует из изложенного выше, если $F(x)$ - некоторая первообразная функции $f(x)$, то $\int f(x)dx = F(x) + C$, где C - произвольная постоянная. Функцию $f(x)$ принято называть подынтегральной функцией, произведение $f(x)\,dx$ - подынтегральным выражением.

6. Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница.

Вычисление площади криволинейной трапеции.

Пусть на отрезке $[a,b]$ ($b>a$) задана непрерывная функция $y = f(x)$, принимающая на этом отрезке неотрицательные значения : $f(x) \geq 0$ при $x \in [a,b]$. Требуется определить площадь S криволинейной трапеции $ABCD$, ограниченной снизу отрезком $[a,b]$, слева и справа - прямыми $x = a$ и $x = b$, сверху – функцией $y = f(x)$.





Для решения этой задачи разделим произвольным образом основание AD фигуры точками $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} = a, x_n = b$ на n частей $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, …, $[x_{i-1}, x_i]$, …, $[x_{n-1}, x_n]$; символом Δx_i будем обозначать длину i-го отрезка: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; $i = 1,2,\ldots,n$. На каждом из отрезков [x_i-1 , x_i] выберем произвольную точку ξ_i, найдём $f(\xi_i)$, вычислим произведение $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)\Delta x_i$ (это произведение равно площади прямоугольника P_i с основанием [x_i-1 , x_i] и высотой ξ_i) и просуммируем эти произведения по всем прямоугольникам. Полученную сумму обозначим $S_{\text{ступ}}$:

$$S_{\text{ступ}} = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$.

$S_{\text{ступ}}$ равно площади ступенчатой фигуры, образованной прямоугольниками P_i, i = 1,2,…,n; на левом рисунке эта площадь заштрихована. $S_{\text{ступ}}$ не равна искомой площади S, она только даёт некоторое приближение к S. Для того, чтобы улучшить это приближение, будем увеличивать количество n отрезков таким образом, чтобы максимальная длина этих отрезков $\max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \Delta x_i$ стремилась к нулю (на рисунке ступенчатые фигуры изображены при n = 7 (слева) и при n = 14 (справа)). При $\max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \Delta x_i \to 0 \ (n \to \infty)$ разница между $S_{\text{ступ}}$ и S будет тоже стремиться к нулю, т.е.

$$S = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ i=1,2,\ldots,n}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$.

Определение определённого интеграла.

Пусть на отрезке [a,b] задана функция $y = f(x)$. Разобьём отрезок [a,b] произвольным образом на n частей точками [x_0 , x_1], [x_1 , x_2], …, [x_i-1 , x_i], …, [x_n-1 , x_n]; длину i-го отрезка обозначим Δx_i: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; $i = 1,2,\ldots,n$; максимальную из длин отрезков обозначим λ: $\lambda = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \Delta x_i$. На каждом из отрезков [x_i-1 , x_i] выберем произвольную точку ξ_i и составим сумму

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$.

Сумма σ называется интегральной суммой. Если существует (конечный) предел последовательности интегральных сумм σ при $\lambda \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения отрезка [a,b] на части [x_i-1 , x_i], ни от выбора точек ξ_i, то функция $f(x)$ называется интегрируемой по отрезку [a,b], а этот предел называется определённым интегралом от функции $f(x)$ по отрезку [a,b] и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx$$.

Функция $f(x)$, как и в случае неопределённого интеграла, называется подынтегральной, числа a и b - соответственно, нижним и верхним пределами интегрирования.

Кратко определение иногда записывают так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ i=1,2,\ldots,n}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$.

В этом определении предполагается, что $b > a$. Для других случаев примем, тоже по определению:

Если $b=a$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$; если $b<a$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

Теорема существования определённого интеграла.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема по этому отрезку.

Формула Ньютона-Лейбница.

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, и $F(x)$ - некоторая первообразная функции $f(x)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

7. Геометрический смысл определенного интеграла.

Если $f(x) > 0$ на отрезке $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ равен площади криволинейной трапеции $ABCD$, ограниченной снизу отрезком $[a,b]$, слева и справа - прямыми $x = a$ и $x = b$, сверху – функцией $y = f(x)$.

1.3 Лекция №3 (2 часа).
Тема: «Дифференциальные уравнения»

1.3.1 Вопросы лекции:

1. Основные понятия и определения дифференциальных уравнений первого порядка.
2. Дифференциальные уравнения высших порядков.
3. Общее и частное решения дифференциальных уравнений.

1.3.2 Краткое содержание вопросов:

1. Основные понятия и определения дифференциальных уравнений первого порядка.

Обыкновенным *дифференциальным уравнением n –го порядка* называется уравнение вида

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0,$$

где F — известная функция $(n + 2)$-х переменных, x — независимая переменная из интервала (a,b), $y(x)$ — неизвестная функция. Число n называется порядком уравнения.

Функция $y(x)$ называется *решением* (или *интегралом*) дифференциального уравнения на промежутке (a, b), если она n раз дифференцируема на (a, b) и при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Обыкновенные дифференциальные уравнения, разрешенные относительно старшей производной, называют уравнениями в *нормальной форме*:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Дифференциальное уравнение обычно имеет бесконечно много решений. Чтобы выделить нужное решение, используют дополнительные условия.

Чтобы выделить единственное решение уравнения n–го порядка обычно задают n начальных условий $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, $y''(x_0) = y_2$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

Любое конкретное решение $y = \varphi(x)$ уравнения n –го порядка $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$, называется *частным решением*.

Общим решением дифференциального уравнения $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$ называется функция $y = \Phi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, содержащая некоторые постоянные (параметры) $C_1, C_2, \dots, C_n$, и обладающая следующими свойствами:

1. $\Phi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ является решением уравнения при любых допустимых значениях $C_1, C_2, \dots, C_m$;
2. для любых начальных данных $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, $y''(x_0) = y_2$, $\dots$, $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$, для которых задача Коши имеет единственное решение,

существуют значения постоянных $C_1 = A_1, C_2 = A_2, \dots, C_n = A_n$, такие что решение $y = \Phi(x, A_1, A_2, \dots, A_n)$ удовлетворяет заданным начальным условиям.

Иногда частное или общее решение уравнения удается найти только в неявной форме: $f(x, y) = 0$ или $G(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$.

Такие неявно заданные решения называются *частным интегралом* или *общим интегралом* уравнения.

Если задачу об отыскании всех решений дифференциального уравнения удается свести к алгебраическим операциям и к вычислению конечного числа интегралов и производных от известных функций, то уравнение называется *интегрируемым в квадратурах*. Класс таких уравнений относительно узок.

Для решения уравнений, которые не интегрируются в квадратурах, применяются приближенные или численные методы.

Задача теории обыкновенных дифференциальных уравнений — исследование общих свойств решений, развитие точных, асимптотических и численных методов интегрирования уравнений.

Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение $F(x, y, y') = 0$, где x - независимая переменная, $y(x)$ - неизвестная функция. В форме, разрешённой относительно производной, уравнение первого порядка записывается так: $y' = f(x, y)$

Если пользоваться другим обозначением производной, то можно записать как

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Общее решение (общий интеграл) уравнения при $n = 1$ имеет вид $\Phi(x, y, C) = 0$ или $y = \varphi(x, C)$.

Решение некоторых типов ОДУ первого порядка.

Уравнения с разделёнными переменными. Так называются уравнения вида удовлетворяющее начальному условию $f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0$.

Пусть $y(x)$ - решение этого уравнения, т.е. $f(x)dx + g(y(x))dy(x) = 0$. Интегрируя это тождество, получим $\int f(x)dx + \int g(y)dy = 0$ - общий интеграл (общее решение) этого уравнения.

Уравнения с разделяющимися переменными. Так называются уравнения вида $y' = f(x) \cdot g(y)$ или $f_1(x)\, g_1(y)\, dx + f_2(x)\, g_2(y)\, dy = 0$.

Эти уравнения легко сводятся к уравнению с разделёнными переменными:

Записываем уравнение в форме $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$, затем делим на $g(y)$ и умножаем на dx: $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$.		Уравнение делим на $f_2(x)$ $g_1(y)$: $\frac{f_1(x)dx}{f_2(x)} + \frac{g_2(y)dy}{g_1(y)} = 0$.

<table>
<tr><td colspan="3">Эти уравнения - с разделёнными переменными. Интегрируя, получим общие интегралы:</td></tr>
<tr><td>$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$.</td><td></td><td>$\int \frac{f_1(x)dx}{f_2(x)} + \int \frac{g_2(y)dy}{g_1(y)} = C$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">В обоих случаях возможна потеря решений: деление на функцию может привести к уравнению, которое неэквивалентно данному.</td></tr>
<tr><td>Если функция $g(y)$ имеет действительные корни $y_1, y_2, y_3, \ldots$, то функции $y = y_1$, $y = y_2$,
$y = y_3, \ldots$, очевидно, являются решениями исходного уравнения.</td><td></td><td>Если функция $f_2(x)$ имеет действительные корни $x_1, x_2, x_3, \ldots$, функция $g_1(y)$ имеет действительные корни $y_1, y_2, y_3, \ldots$, то функции $x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_3, \ldots$, $y = y_1$, $y = y_2$, $y = y_3, \ldots$ являются решениями исходного уравнения.</td></tr>
<tr><td colspan="3">В обоих случаях эти решения могут содержаться в общем решении, но могут и не содержаться в нём; последнее может случиться, если на этих решениях нарушаются условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши.</td></tr>
</table>

2. Дифференциальные уравнения высших порядков.

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Характеристические числа

$$\lambda_1 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}, \quad \lambda_2 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Общее решение

1. В случае $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Если $\lambda_1 = \alpha - i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha + i\beta,$ то общее решение можно записать и в форме

$$y(x) = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)e^{\alpha x}.$$

2. В случае $\lambda_1 = \lambda_2$

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda_1 x}.$$

3. Общее и частное решения дифференциальных уравнений.

Задачей Коши (или начальной задачей) называется задача отыскания решения $y = y(x)$ уравнения

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ \ldots \ , y^{(n)}(x)) = 0, \quad x > x_0,$$

удовлетворяющего условиям

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ y''(x_0) = y_2,\ \dots\ ,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Условия $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, $y''(x_0) = y_2$, $\dots$, $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ называются начальными данными, начальными условиями или данными Коши.

1.4 Лекция №4 (2 часа).
Тема: «Основные понятия теории вероятностей».

1.4.1 Вопросы лекции:

1. Классическое определение вероятности события. Теоремы о сумме и произведении вероятностей.
2. Нормальное распределение.
3. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал. Правило трех сигм.
4. Случайные величины и их числовые характеристики.

1.4.2 Краткое содержание вопросов:

1. Классическое определение вероятности события. Теоремы о сумме и произведении вероятностей.

Классическое определение вероятности

$$P(A) = m/n$$

(m - число благоприятных исходов опыта; n - число всех его исходов).

Два события называются несовместными, если появление одного из них исключает появление другого события в одном и том же испытании. В противном случае события называются совместными.

Два события называются независимыми, если появление одного из них не влияет на вероятность появления другого события в одном и том же испытании. В противном случае события называются зависимыми.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Теорема умножения вероятностей независимых событий

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B),$$

где $P(B/A)$ - вероятность события B при условии, что произошло событие A.

2. Нормальное распределение.

Определение. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения, если ее функция плотности вероятности имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a – математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение.

График функции $f(x)$ называется кривой нормального распределения. Методами дифференциального исчисления можно установить, что:

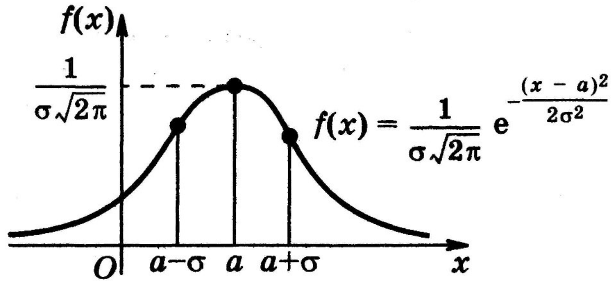
1) кривая симметрична относительно прямой $x=a$;

2) функция имеет максимум в точке $\left(a,\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$, при $x=a$ $f(a)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$;

3) по мере удаления x от точки a функция убывает и при $x\to\pm\infty$ кривая приближается к оси Ox;

4) кривая выпукла при $x\in(a-\sigma,a+\sigma)$ и вогнута при $x\in(-\infty,a-\sigma)$ и $x\in(a+\sigma,+\infty)$.

График функции $f(x)$ имеет вид:



3. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал. Правило трех сигм.

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал

Вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α,β),

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ – функция Лапласа.

Вероятность отклонения нормально распределенной случайной величины от математического ожидания

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения нормально распределенной случайной величины от математического ожидания меньше положительного числа δ,

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Правило трех сигм. Практически достоверно, что при однократном испытании отклонение нормально распределенной случайной величины от ее математического ожидания не превышает утроенного среднего квадратического отклонения.

Определение. Интервал $(a-3\sigma;a+3\sigma)$ называется диапазоном изменения нормально распределенной случайной величины.

4. Случайные величины и их числовые характеристики.

Случайной называется величина, которая в результате испытания может принять то или иное числовое значение, причем заранее неизвестно, какое именно.

Дискретной (прерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

Непрерывной называют случайную величину, все возможные значения которой заполняют некоторый конечный или бесконечный интервал.

Математическим ожиданием $M(X)$ дискретной случайной величины X называется сумма произведений каждого возможного значения этой величины на соответствующую вероятность:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \ldots + x_s p_s .$$

Дисперсией $D(X)$ дискретной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата разности между случайной величиной X и ее математическим ожиданием:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 .$$

Теорема. Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 .$$

Средним квадратическим отклонением $\sigma(X)$ дискретной случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} .$$

Математическим ожиданием $M(X)$ непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a;b]$, называют определенный интеграл $\int_a^b x f(x)dx$, т.е.

$$M(X) = \int_a^b x f(x)dx .$$

Если возможные значения X принадлежат всей оси Ox, то

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx .$$

Дисперсией $D(X)$ непрерывной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата ее отклонения.

Если возможные значения X принадлежат отрезку $[a;b]$, то

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 f(x)dx .$$

Если возможные значения X принадлежат всей оси Ox, то

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx .$$

Средним квадратическим отклонением $\sigma(X)$ непрерывной случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} .$$

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

2.1 Лабораторная работа № 1 (2 часа).

Тема: «Элементы математической статистики. Теория корреляции»

2.1.1 Цель работы: Научиться применять математическую статистику и теорию корреляции в задачах сельского хозяйства.

2.1.2 Задачи работы:

1. Построение полигона и гистограммы.
2. Нахождение доверительного интервала для математического ожидания.
3. Построение корреляционной таблицы.
4. Вычисление условных средних и построение линий регрессии.
5. Вычисление корреляционного момента и коэффициента корреляции.

2.1.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Персональный компьютер.
2. Калькулятор.
3. Линейка.

2.1.4 Описание (ход) работы:

Из крупного стада коров произведена случайная выборка, получено 20 вариант удоя коров за 300 дней лактации (в ц): 35,9; 35,3; 42,7; 45,2; 25,9; 35,3; 33,4; 27,0; 35,9; 38,8; 33,7; 38,6; 40,9; 35,5; 44,1; 37,4; 34,2; 30,8; 38,4; 31,3. Получить вариационный ряд и построить гистограмму относительных частот.

Решение. Запишем исходные данные в виде ранжированного ряда, т.е. располагая их в порядке возрастания: 25,9; 27,0; 30,8; 31,3; 33,4; 33,7; 34,2; 35,3; 35,3; 35,5; 35,9; 35,9; 37,4; 38,4; 38,6; 38,8; 40,9; 42,7; 44,1; 46,2.

Максимальное значение признака составляет $46{,}2$ ц, а минимальное – $25{,}9$ ц. Разница между ними составляет $20{,}3$ ц. Этот интервал надо разбить на определенное количество классов. При малом объеме выборки (20 – 40 вариант) намечают 5 – 6 классов. Возьмем длину классового интервала $h=5$. Получаем пять интервалов: первый 25 – 30, второй 30 – 35, третий 35 – 40, четвертый 40 – 45, пятый 45 –50 (начало первого класса не обязательно должно совпадать со значением минимальной варианты).

С помощью ранжированного ряда определим частоту попадания вариант выборки в каждый интервал. В первый интервал попадет два значения ($25{,}9$ и $27{,}0$), поэтому $n_1 = 2$. Во второй интервал попадают пять значений, поэтому $n_2 = 5$. Аналогично $n_3 = 9$, $n_4 = 3$, $n_5 = 1$.

Теперь найдем относительные частоты попадания вариант выборки в каждый интервал:

$$W_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{2}{20} = 0{,}1 \qquad \text{(в первый интервал);}$$

$$W_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{5}{20} = 0{,}25 \qquad \text{(во второй интервал);}$$

$$W_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{9}{20} = 0{,}45 \qquad \text{(в третий интервал);}$$

$$W_4 = \frac{n_4}{n} = \frac{3}{20} = 0{,}15 \qquad \text{(в четвертый интервал);}$$

$$W_5 = \frac{n_5}{n} = \frac{1}{20} = 0{,}05 \qquad \text{(в пятый интервал).}$$

Для проверки вычисляем сумму относительных частот:

$$W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 = 0{,}1 + 0{,}25 + 0{,}45 + 0{,}15 + 0{,}05 = 1 .$$

Тот факт, что в сумме получили единицу, подтверждает правильность вычислений.

По формуле $P_i' = \frac{W_i}{h}$ вычислим плотности P_i' относительных частот вариант. Получаем:

$$P_1' = \frac{W_1}{h} = \frac{0{,}1}{5} = 0{,}02 \qquad \text{(для первого интервала);}$$

$$P_2' = \frac{W_2}{h} = \frac{0{,}25}{5} = 0{,}05 \qquad \text{(для второго интервала);}$$

$$P_3' = \frac{W_3}{h} = \frac{0{,}45}{5} = 0{,}09 \qquad \text{(для третьего интервала);}$$

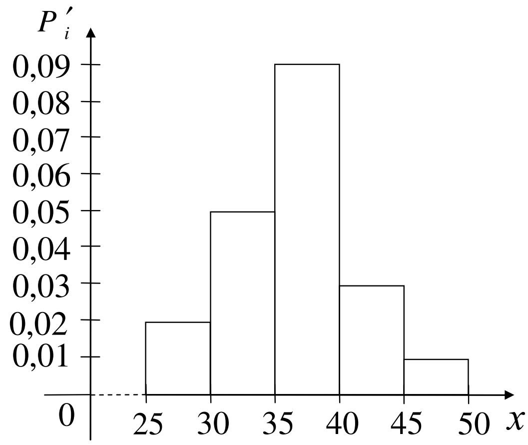
$$P_4' = \frac{W_4}{h} = \frac{0{,}15}{5} = 0{,}03 \qquad \text{(для четвертого интервала);}$$

$$P_5' = \frac{W_5}{h} = \frac{0{,}05}{5} = 0{,}01 \qquad \text{(для пятого интервала).}$$

Полученные результаты сведем в таблицу:

Интервал значений удоя (ц)	25 – 30	30 – 35	35 – 40	40 – 45	45 – 50
Частоты вариант n_i	2	5	9	3	1
Относительные частоты W_i	0,1	0,25	0,45	0,15	0,05
Плотность относительных частот P_i'	0,02	0,05	0,09	0,03	0,01

Для построения гистограммы относительных частот частичные интервалы изображают на оси абсцисс, а значения плотностей относительных частот откладывают на оси ординат.



Вычислим основные выборочные характеристики.

Решение. Расчеты удобно проводить с помощью таблицы:

№ опыта	Результат обследования x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	35,9	– 0,1	0,01
2	35,3	– 0,7	0,49
3	42,7	6,7	44,89
4	45,2	9,2	84,64
5	25,9	– 10,1	102,01
6	35,3	– 0,7	0,40
7	33,4	– 2,6	6,76
8	27,0	– 9,0	81,00
9	35,9	– 0,1	0,01
10	38,8	2,8	7,84
11	33,7	– 2,3	5,29
12	38,6	2,6	6,76
13	40,9	4,9	24,01
14	35,5	– 0,5	0,25
15	44,1	8,1	65,61
16	37,4	1,4	1,96
17	34,2	– 1,8	3,24
18	30,8	– 5,2	27,04
19	38,4	2,4	5,76
20	31,3	– 4,7	22,09
$\sum$	720,3	0	490,15

Просуммировав варианты x_i, занесем сумму $\sum x_i$ в нижнюю строку таблицы под соответствующим столбцом. Разделив эту сумму на 20, получим:

$$\bar{x} = 36{,}015 \approx 36{,}0 .$$

Теперь заполняем следующий столбец таблицы, в который записываем разность $x_i - \bar{x}$. Для контроля можно вычислить сумму всех таких разностей. Если разности вычислены правильно, то их сумма равна нулю.

Затем возводим эти разности в квадрат и заполняем последний столбец таблицы. Вычислив сумму $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 490{,}15$ и разделив ее на $n-1 = 20-1 = 19$. Получим значение дисперсии

$$s^2 = \frac{490{,}15}{19} \approx 25{,}8\,.$$

Извлекая квадратный корень из величины s^2, находим:

$$s \approx 5{,}08\,,$$

затем ошибку средней:

$$s_{\bar{x}} = \frac{5{,}08}{\sqrt{20}} \approx \frac{5{,}08}{4{,}47} \approx 1{,}34\,.$$

Вычисляем коэффициент вариации:

$$V = \frac{5{,}08}{36} \cdot 100\% \approx 14\%\,.$$

Поскольку $10\% < V < 20\%$, то изменчивость удоев за 300 дней следует считать средней.

Таким образом, $\bar{x} \approx 36$, $s^2 \approx 25{,}8$, $s \approx 5{,}08$, $s_{\bar{x}} \approx 1{,}34$, $V \approx 14\%$.

Для 10 петушков леггорнов 15-дневного возраста были получены следующие данные о массе их тела X (г) и массе гребня Y (мг):

x_i	83	72	69	90	90	95	95	91	75	70
y_i	56	42	18	84	56	107	90	68	31	48

Требуется:

1) найти коэффициент корреляции и сделать вывод о тесноте и направлении линейной корреляционной связи между признаками;

2) составить уравнение прямой регрессии Y на X.

Решение. 1) Сначала сделаем промежуточные вычисления, которые удобно располагать в виде таблицы:

№	x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	83	56	0	0	– 4	16	0
2	72	42	–11	121	– 18	324	198
3	69	18	–14	196	– 42	1764	588
4	90	84	7	49	24	576	168
5	90	56	7	49	– 4	16	-28
6	95	107	12	144	47	2209	564
7	95	90	12	144	30	900	360
8	91	68	8	64	8	64	64
9	75	31	– 8	64	– 29	841	232
10	70	48	– 13	169	–12	144	156
$\sum$	830	600	0	1000	0	6854	2302

Вычисляем средние:

$$\bar{x} = \frac{830}{10} = 83\,; \quad \bar{y} = \frac{600}{10} = 60\,.$$

Теперь заполняем последние пять столбцов таблицы. Суммируя элементы в соответствующих столбцах, находим:

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 1000\,,$$

$$\sum (y_i - \bar{y})^2 = 6854\,,$$

$$\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 2302 .$$

Подставляя вычисленные значения в формулу (83), получаем:

$$r = \frac{2302}{\sqrt{1000} \cdot \sqrt{6854}} \approx 0{,}88 .$$

Вывод: между массой тела X и массой гребня Y у 15-дневных петушков существует тесная положительная линейная корреляционная связь.

2) Используя данные из таблицы, по формуле находим коэффициент регрессии $b_{Y/X}$:

$$b_{Y/X} = \frac{2302}{1000} \approx 2{,}3 .$$

Подставляя теперь в формулу найденные значения $\bar{x} = 83,\ \bar{y} = 60,\ b_{Y/X} = 2{,}3$, имеем:

$$y - 60 = 2{,}3(x - 83) .$$

Последнее уравнение преобразуем к виду

$$y = 2{,}3x - 130{,}9 .$$

Отметим, что полученная математическая модель (уравнение прямой регрессии) обладает прогнозирующими свойствами лишь при изменении x от 69 до 95. Так, например, можно с достаточной степенью достоверности считать, что при массе петушка 80 г масса его гребня составит:

$$y = 2{,}32 \cdot 80 - 132{,}56 \approx 53 \text{ мг.}$$

Таким образом, $r \approx 0{,}88$, $y = 2{,}3x - 130{,}9$.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

3.1 Практическое занятие №1 (2 часа).

Тема: «Матрицы. Определители Системы линейных уравнений»

3.1.1 Задание для работы:

1. Вычисление определителей 2-го и 3-го порядков.
2. Матрицы. Операции над матрицами.
3. Решение СЛУ матричным методом.

3.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. То-

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 13,\ A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

гда

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} A_{1k}.$$

Утверждение. Разложение определителя по произвольной строке.

Для определителя матрицы A справедлива формула

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}.$$

Пример. Вычислите $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0.7 & -5 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение. Воспользуемся разложением по третьей строке, так выгоднее, поскольку в третьей строке два числа из трех - нули. Получим

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0.7 & -5 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0.7 & -5 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0.7 \end{vmatrix} = -3(-10-4) = 42.$$

Пример. Найдите обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. $|A| = 11 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad A^{-1}$ - существует.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 5 = 5, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-2) = 2,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1.$$

Ответ: $A^{-1} = \dfrac{1}{11} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 2 \\ x - y + 2x = -1 \\ 3x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

Решая системы линейных уравнений школьными способами, мы почленно умножали одно из уравнений на некоторое число, так, чтобы коэффициенты при первой переменной в двух уравнениях были противоположными числами. При сложении уравнений происходит исключение этой переменной. Аналогично действует и метод Гаусса.

Для упрощения внешнего вида решения составим расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

В этой матрице слева до вертикальной черты расположены коэффициенты при неизвестных, а справа после вертикальной черты - свободные члены.

Для удобства деления коэффициентов при переменных (чтобы получить деление на единицу) переставим местами первую и вторую строки матрицы системы. Получим систему, эквивалентную данной, так как в системе линейных уравнений можно переставлять местами уравнения:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

С помощью нового первого уравнения исключим переменную x из второго и всех последующих уравнений. Для этого ко второй строке матрицы прибавим первую, умноженную на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ (в нашем случае на $-\frac{3}{1}$), к третьей – первую строку, умноженную на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ (в нашем случае на $-\frac{2}{1}$).

Это возможно, так как $a_{11} \neq 0$.

Если бы в нашей системе уравнений было больше трёх, то следовало бы прибавлять и ко всем последующим уравнениям первую строку, умноженную на отношение соответствующих коэффициентов, взятых со знаком минус.

В результате получим матрицу эквивалентную данной системе новой системы уравнений, в которой все уравнения, начиная со второго не содержат переменнную x:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

Для упрощения второй строки полученной системы умножим её на $\frac{1}{5}$ и получим вновь матрицу системы уравнений, эквивалентной данной системе:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

Теперь, сохраняя первое уравнение полученной системы без изменений, с помощью второго уравнения исключаем переменную y из всех последующих уравнений. Для этого к третьей строке матрицы системы прибавим вторую, умноженную на $-\frac{a'_{32}}{a'_{22}}$ (в нашем случае на $-\frac{4}{1}$).

Если бы в нашей системе уравнений было больше трёх, то следовало бы прибавлять и ко всем последующим уравнениям вторую строку, умноженную на отношение соответствующих коэффициентов, взятых со знаком минус.

В результате вновь получим матрицу системы, эквивалентной данной системе линейных уравнений:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Мы получили эквивалентную данной трапециевидную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ \quad y - z \quad = 1 \\ \qquad z \quad = 1 \end{cases}$$

Если число уравнений и переменных больше, чем в нашем примере, то процесс последовательного исключения переменных продолжается до тех пор, пока матрица системы не станет трапециевидной, как в нашем демо-примере.

Решение найдём "с конца" - это называется "обратный ход метода Гаусса". Для этого из последнего уравнения определим z:

$z = 1$.

Подставив это значение в предшествующее уравнение, найдём y:

$y = 1 + z$

$y = 1 + 1 = 2.$

Из первого уравнения найдём x:

$x = -1 + y - 2z$

$x = -1 + 2 - 2 = -1.$

Итак, решение данной системы - $(x = -1;\ \ y = 2;\ \ z = 2)$.

3.1.3 Результаты и выводы: В результате проделанной работы научились вычислять определители, выполнять действия с матрицами, решать системы линейных уравнений.

3.2 Практическое занятие №2 (2 часа).

Тема: «Предел функции. Производная. Интеграл»

3.2.1 Задание для работы:

1. Нахождение предела функции.

2. Нахождение производной функции по правилам дифференцирования и таблице производных.
3. Нахождение производной сложной функции.
4. Исследование функции с помощью производной.
5. Основные методы интегрирования: метод непосредственного интегрирования; метод подстановки.
6. Вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница.

3.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+1}{2x^2+x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+4x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+7}{x^2+x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}$; д) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^2-3x+1}{2x^2+x-5}$;

Решение: а) Под знаком предела имеется дробная рациональная функция, знаменатель которой при $x=3$ (предельное значение аргумента) отличен от нуля. Так как данная функция является непрерывной, то, чтобы найти ее предел при $x \to 3$, достаточно аргумент x заменить его предельным значением

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+1}{2x^2+x-6}=\frac{3^2-5\cdot 3+1}{2\cdot 3^2+3-6}=-\frac{1}{3}$$

б) При x=1 знаменатель дроби отличен от нуля, а числитель равен нулю. Числитель и знаменатель суть непрерывные функции. Следовательно, при $x \to 1$ числитель есть величина бесконечно малая, а знаменатель – переменная величина, имеющая конечный предел. Так как частное от деления бесконечно малой величины на переменную величину, имеющую конечный предел, есть также величина бесконечно малая, то пределом данной дроби будет нуль.

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+4x-2}=\dfrac{2\cdot 1^2-3\cdot 1+1}{3\cdot 1^2+4\cdot 1-2}=\dfrac{0}{5}=0$

в) при $x=-2$ знаменатель дроби равен нулю, а числитель отличен от нуля. Числитель и знаменатель суть непрерывные функции. Следовательно, при $x \to -2$ знаменатель есть величина бесконечно малая, а числитель – ограниченная величина. Данная дробь является бесконечно большой, она не имеет предела; условно это обозначают символом ∞.

Таким образом, $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+7}{x^2+x-2}=\infty$

г) При $x=2$ числитель и знаменатель данной дроби равны нулю. Следовательно, непосредственная подстановка предельного значения аргумента $x=2$ приводит к неопределенному выражению $\dfrac{0}{0}$. При $x \to 2$ числитель и знаменатель суть бесконечно малые величины. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ (отношение двух бесконечно малых величин), необходимо предварительно дробь преобразовать. Разложив на множители числитель и знаменатель и сократив дробь на (x – 2), получим:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+5)}{(x-2)(x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+3}=\frac{2\cdot 2+5}{2+3}=\frac{9}{5}$$

Заметим, что аргумент x только стремится к своему предельному значению 2 , но не совпадает с ним. По этой причине множитель (x – 2) отличен от нуля при $x \to 2$.

д) При $x \to \infty$ получаем неопределенное выражение вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Чтобы найти предел дробной рациональной функции при $x \to \infty$, необходимо предварительно числитель и знаменатель дроби разделить на x^n, где n – наивысшая степень многочленов, стоящих в числителе и знаменателе. Деля числитель и знаменатель данной дроби на x^2, применяя основные теоремы о пределах и свойствах бесконечно малых величин, будем иметь:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+1}{2x^2+x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}}=2$$

Найти производные указанных функций:

а) $y = x^3 - \frac{1}{x^4} + 6\sqrt[3]{x^2}$; б) $y = (x^3 + 2) \cdot \sin x$; в) $y = \frac{\arcsin x}{x^2 + e^x}$; г) $y = (x^2 - arctgx)^4$; д) $y = e^{\sin 4x}$; е) $y = e^{tgx} \cdot \cos^2 x$; ж) $y = \ln \sin(2x+1)$.

Решение.

а) Перепишем данную функцию, введя дробные и отрицательные показатели: $y = x^3 - x^{-4} + 6x^{\frac{2}{3}}$.

Применяя правило дифференцирования алгебраической суммы 3) и формулу дифференцирования степенной функции 7), учитывая, что $x'_x = 1$, имеем:

$$y' = 3x^2 - (-4)x^{-5} + 6 \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = 3x^2 + \frac{4}{x^5} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}} .$$

б) Применяя правило производной произведения двух функций 4), а также формулы 7) и 13), имеем:

$$y' = (x^3 + 2)' \cdot \sin x + (x^3 + 2) \cdot (\sin x)' = 3x^2 \cdot \sin x + (x^3 + 2) \cdot \cos x$$

в) Применяем правило дифференцирования частного двух функций 6), а также формулы 17), 7) и 11).

$$y' = \frac{(\arcsin x)' \cdot (x^2 + e^x) - \arcsin x \cdot (x^2 + e^x)'}{(x^2 + e^x)^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (x^2 + e^x) - \arcsin x \cdot (2x + e^x)}{(x^2 + e^x)^2}$$

$$= \frac{x^2 + e^x - \sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x \cdot (2x + e^x)}{\sqrt{1-x^2} \cdot (x^2 + e^x)^2} .$$

г) Данная функция является сложной; она может быть представлена так: $y = u^4$, где $u = x^2 - arctgx$. Применяем формулу 7):

$$y' = 4u^3 \cdot u' = 4(x^2 - arctgx)^3 \cdot (x^2 - arctgx)' = 4(x^2 - arctgx)^3 \cdot (2x - \frac{1}{1+x^2}) .$$

д) Применяем формулу 13) дифференцирования сложной функции.

$$y' = (e^{\sin 4x})' = e^{\sin 4x} \cdot (\sin 4x)' = e^{\sin 4x} \cdot \cos 4x \cdot (4x)' = 4e^{\sin 4x} \cos 4x$$

е)

$$y' = (e^{tgx} \cdot \cos^2 x)' = (e^{tgx})' \cdot \cos^2 x + e^{tgx} \cdot (\cos^2 x)' = e^{tgx} \cdot (tgx)' \cdot \cos^2 x + e^{tgx}((\cos x)^2)' =$$

$$= e^{tgx} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x + e^{tgx} \cdot 2\cos x \cdot (\cos x)' = e^{tgx} + e^{tgx} \cdot 2\cos x \cdot (-\sin x) =$$

$$= e^{tgx} - e^{tgx} \cdot \sin 2x = e^{tgx}(1 - \sin 2x)$$

ж) Применяем формулу 12) дифференцирования сложной функции:

$$y' = (\ln \sin(2x+1))' = \frac{1}{\sin(2x+1)} \cdot (\sin(2x+1))' = \frac{1}{\sin(2x+1)} \cdot \cos(2x+1) \cdot (2x+1)' =$$

$$= 2ctg(2x+1) .$$

Найти точку экстремума функции и определить интервалы возрастания и убывания функции

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

Решение. Функция $y = f(x)$ называется возрастающей в промежутке $(a;b)$, если в этом промежутке большему значению аргумента соответствует большее значение функции, то есть для любой пары значений x_1 и x_2, принадлежащих промежутку $(a;b)$ и удовлетворяющих неравенству $x_2 > x_1$ имеет место неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

Функция $y = f(x)$ называется убывающей в промежутке $(a; b)$, если в этом промежутке большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, то есть для любой пары значений x_1 и x_2, принадлежащих промежутку $(a;b)$ и удовлетворяющих неравенству $x_2 > x_1$ имеет место неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Если функция $y = f(x)$ в каждой точке промежутка $(a;b)$ имеет положительную производную $y'(x)$, то сама функция в этом промежутке возрастает. Если функция $y = f(x)$ в каждой точке промежутка $(a;b)$ имеет отрицательную производную $y'(x)$, то сама функция в этом промежутке убывает.

Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет максимум в точке x_0, если значение функции в этой точке больше, чем ее значение во всех точках некоторого промежутка, содержащего эту точку. Аналогично говорят, что функция $y = f(x)$ имеет минимум в точке x_0, если значение функции в этой точке меньше, чем ее значение во всех точках некоторого промежутка, содержащего эту точку.

Экстремум – это максимум или минимум функции. Точки, в которых имеется экстремум, называются экстремальными.

Необходимое условие существования экстремума дифференцируемой функции: если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная первого порядка равна нулю или не существует.

Достаточное условие существования экстремума дифференцируемой функции: для того, чтобы функция в критической точке x_0 имела минимум, достаточно, чтобы производная первого порядка слева от этой точки была отрицательна, справа - положительна; для того, чтобы функция в критической точке x_0 имела максимум, достаточно, чтобы производная первого порядка слева от этой точки была положительна, справа – отрицательна.

Если производная первого порядка слева и справа от критической точки x_0 имеет одинаковый знак, то в этой точке функция не имеет экстремума.

Находим первую производную $y'(x)$ и те значения аргумента x, при которых эта производная обращается в нуль:

$$y'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

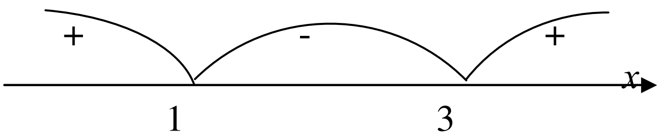
$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Полученное уравнение имеет два корня: $x = 1$ и $x = 3$. Производную $y'(x)$ можно представить так:

$$y'(x) = 3(x-1)(x-3)$$

Мы получили две критические точки, которые разбивают всю числовую ось (область существования данной функции) на три промежутка: (- ∞;1); (1;3); (3; +∞).



Производная $y'(x)$ в первом и третьем промежутках положительна, а во втором - отрицательна. Следовательно, в первом и третьем промежутках функция возрастает, а во втором – убывает. При переходе через точку $x_1 = 1$ производная меняет свой знак с плюса на минус. Следовательно, в этой точке функция имеет максимум. При переходе через точку $x_2 = 3$ производная меняет свой знак с минуса на плюс. Следовательно, в этой точке функция имеет минимум.

Найдем значения функции в точках экстремума:

$$y(1) = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$$

$$y(3) = 27 - 54 + 27 + 1 = 1$$

Итак, мы получили две точки экстремума: A(1;5) – точка максимума, B(3;1) – точка минимума.

Найти интегралы:

а) $\int (4x^3 - \sqrt{x} + \frac{6}{x^2})dx$; б) $\int (5\cos x - 3e^x)dx$; в) $\int \left[\frac{2}{9+x^2} - \frac{1}{\sqrt{25-x^2}} + \frac{3}{x}\right]dx$.

Решение. а) Предварительно преобразуем подынтегральную функцию и затем применим свойства неопределенного интеграла и табличный интеграл 2).

$$\int (4x^3 - \sqrt{x} + \frac{6}{x^2})dx = \int (4x^3 - x^{\frac{1}{2}} + 6 \cdot x^{-2})dx = 4\int x^3 dx - \int x^{\frac{1}{2}} dx + 6\int x^{-2} dx =$$

$$= 4 \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 6 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C = x^4 - \frac{2}{3} x\sqrt{x} - \frac{6}{x} + C.$$

б) Применяя свойства неопределенного интеграла и табличные интегралы, будем иметь:

$$\int (5cosx - 3e^x)dx = 5\int \cos x dx - 3\int e^x dx = 5\sin x - 3e^x + C$$

в) Применяем свойства 3 и 4 и табличные интегралы 12), 11) и 5).

$$\int \left[\frac{2}{9+x^2} - \frac{1}{\sqrt{25-x^2}} + \frac{3}{x}\right]dx = 2 \cdot \frac{1}{3} arctg \frac{x}{3} - \arcsin\frac{x}{5} + 3\ln|x| + C =$$

$$= \frac{2}{3} arctg \frac{x}{3} - \arcsin\frac{x}{5} + 3\ln|x| + C.$$

Найти интегралы:

а) $\int \frac{(x+2)(x^2-3)}{x^3} dx$; б) $\int \frac{(1+x)^2}{x \cdot (1+x^2)} dx$; в) $\int e^x (1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x})dx$; г) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$.

Решение. а) Раскроем скобки в числителе и полученное произведение почленно разделим на x^3.

$$\int \frac{(x+2)(x^2-3)}{x^3} dx = \int \frac{x^3 - 3x + 2x^2 - 6}{x^3} dx = \int \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^3}\right)dx =$$

$$= \int dx - 3\int x^{-2} dx + 2\int \frac{dx}{x} - 6\int x^{-3} dx = x + \frac{3}{x} + 2\ln|x| + \frac{3}{x^2} + C.$$

б) Преобразуем подынтегральную функцию и представим заданный интеграл в виде суммы двух других, каждый из которых табличный.

$$\int \frac{(1+x)^2}{x \cdot (1+x^2)} dx = \int \frac{1 + 2x + x^2}{x \cdot (1+x^2)} dx = \int \frac{1+x^2}{x \cdot (1+x^2)} dx + \int \frac{2x}{x \cdot (1+x^2)} dx = \int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \ln|x| + 2arctgx + C.$$

в) $\int e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx = \int \left(e^x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = e^x + tgx + C$.

г) Чтобы привести данный интеграл к табличным, выразим стоящую в числителе 1 суммой $\sin^2 x + \cos^2 x$ и разделим почленно на знаменатель.

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = tgx - ctgx + C.$$

Интегрирование заменой переменной (метод подстановки).

Применяя соответствующие подстановки $u = \varphi(x)$, найти указанные интегралы:

а) $\int \frac{dx}{5x+1}$; б) $\int e^{x^2+1} x dx$; в) $\int \frac{x^2 dx}{1+x^6}$; г) $\int \frac{2x dx}{x^4 - 9}$.

Решение. а) Если воспользоваться подстановкой $u = 5x + 1$, то интеграл приводиться к табличному интегралу 5).

Пусть $u = 5x + 1$, тогда $du = 5dx$ и $dx = \dfrac{du}{5}$.

Применяя формулу (1), будем иметь:

$$\int \frac{dx}{5x+1} = \int \frac{du}{5u} = \frac{1}{5}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{5}\ln|u| + C = \frac{1}{5}\ln|5x+1| + C.$$

б) Чтобы привести данный интеграл к табличному интегралу 6), положим $u = x^2 + 1$, тогда $du = 2xdx$ и $xdx = \dfrac{du}{2}$. Применяя формулу (1), получим:

$$\int e^{x^2=1} xdx = \int e^u \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2+1} + C.$$

в) Чтобы привести данный интеграл к табличному интегралу 12), положим $u = x^3$, тогда $du = 3x^2dx$ и $x^2dx = \dfrac{du}{3}$. Следовательно,

$$\int \frac{x^2dx}{1+x^6} = \int \frac{du}{3(1+u^2)} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{3}arctgu + C = arctgx^3 + C$$

г) Чтобы привести данный интеграл к табличному интегралу 13), положим $u = x^2$, тогда $du = 2xdx$. Применяя (1), получим:

$$\int \frac{2xdx}{x^4-9} = \int \frac{du}{u^2-9} = \int \frac{du}{u^2-3^2} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{u-3}{u+3}\right| + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^2-3}{x^2+3}\right| + C.$$

Интегрирование по частям.

Пользуясь формулой интегрирования по частям, найти интегралы:

а) $\int x \cdot e^x dx$; б) $\int x\cos xdx$.

Решение. а) Положим $u = x$ и $dv = e^x dx$, тогда $du = dx$, $v = \int e^x dx = e^x$.

Применяя (2), получим:

$$\int x \cdot e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

б) Положим $u = x$ и $dv = \cos xdx$, тогда $du = dx$, $v = \int \cos xdx = \sin x$.

Следовательно,

$$\int x\cos xdx = x \cdot \sin x - \int \sin xdx = x \cdot \sin x + \cos x + C.$$

Пользуясь формулой (2), весьма важно правильно выбрать множители u и dv. Для разложения подынтегрального выражения на множители нет общих правил. Вместе с тем можно руководствоваться некоторыми частными указаниями.

Указание 1. Если подынтегральное выражение содержит произведение показательной или тригонометрической функции на многочлен, то за множитель u следует принять многочлен.

Указание 2. Если подынтегральное выражение содержит произведение логарифмической или обратной тригонометрической функции на многочлен, то за множитель u следует принять логарифмическую функцию или обратную тригонометрическую функцию.

Вычислить интегралы:

а) $\int_2^3 3x^2dx$; б) $\int_0^2 \dfrac{dx}{4+x^2}$; в) $\int_0^5 \dfrac{3dx}{\sqrt[4]{3x+1}}$; г) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$.

Решение. Для вычисления определенного интеграла применяем формулу Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

а) $\int_2^3 3x^2 dx = x^3\Big|_2^3 = 27 - 8 = 19.$

б) $\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2} arctg\, \frac{x}{2}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}(arctg1 - arctg0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}.$

в) Сделаем замену переменной. Пусть $\sqrt[4]{3x+1} = z$, тогда $3x+1 = z^4$ и $3dx = 4z^3dz$.
Определим пределы интегрирования для новой переменной z.
При $x=0$ переменная $z_H = 1$ (нижний предел).
При $x=5$ переменная $z_B = 2$ (верхний предел).
Следовательно,

$$\int_0^5 \frac{3dx}{\sqrt[4]{3x+1}} = \int_1^2 \frac{4z^3dz}{z} = \int_1^2 4z^2dz = 4\frac{z^3}{3}\Big|_1^2 = 4\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}.$$

г) Сделаем подстановку. Пусть $x = 2\sin t$; тогда $dx = 2\cos t dt$. Если $x=0$, то $0 = 2\sin t$, откуда $t_1 = 0$ (нижний предел). Если $x=2$, то $2 = 2\sin t$, откуда $t_2 = \frac{\pi}{2}$ (верхний предел).

Следовательно, $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = (2t + \sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

3.2.3 Результаты и выводы: научились вычислять пределы, производные, находить неопределенные интегралы разными методами, научились вычислять определенные интегралы.

3.3 Практическое занятие № 3 (2 часа).

Тема: «Дифференциальные уравнения Элементы теории вероятностей»

3.3.1 Задание для работы:

1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение с разделенными переменными. Уравнение с разделяющимися переменными.
2. Решение задач с помощью дифференциальных уравнений.
3. Решение задач по классическому определению вероятности события.
4. Нормально распределенная случайная величина.

3.3.2 Краткое описание проводимого занятия:

Найти частное решение уравнения $y' = (y+1)ctgx$, удовлетворяющее условию $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Умножив обе части уравнения на dx и разделив на множитель $(y+1)$, получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{dy}{y+1} = ctgxdx \text{ или } \frac{dy}{y+1} = \frac{\cos xdx}{\sin x}.$$

Интегрируя, имеем: $\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{\cos xdx}{\sin x}$.

$$\ln|y+1| = \ln\sin x + \ln C$$

$$y + 1 = C\sin x$$

$y = C\sin x - 1$ - общее решение заданного уравнения. Используя начальные условия, находим значение произвольной постоянной *C*.

$$2 = C\sin\frac{\pi}{2} - 1$$

$$2 = C - 1$$

$$C = 3$$

Следовательно, $y = 3\sin x - 1$ есть частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Скорость размножения некоторых бактерий пропорциональна количеству бактерий, имеющихся в наличии в рассматриваемый момент времени. Известно, что количество бактерий за один час утроилось. Как измениться количество бактерий через 5 часов, если первоначальное количество равно *a*?

Решение. Пусть *x* – количество бактерий в момент времени t. Переменная величина *x* является функцией переменной величины t. Скорость изменения величины *x* выражается производной $\frac{dx}{dt}$. По условию задачи дифференциальное уравнение, описывающее рассматриваемый процесс, имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot x,$$

где *к* – некоторый коэффициент пропорциональности.

Разделим переменные и решим составленное уравнение.

$$\frac{dx}{x} = kdt$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int kdt$$

$$\ln x = kt + \ln C$$

$$\ln\frac{x}{C} = kt$$

откуда $\frac{x}{C} = e^{kt}$ или $x = C \cdot e^{kt}$ - общее решение уравнения.

Значения произвольной постоянной *C* определяем из начальных условий: при $t = 0, x = a$.

Следовательно, $a = C \cdot e^{\kappa \cdot 0}; C = a$.

Таким образом, $x = ae^{\kappa t}$ или $x = a(e^{k})^{t}$ - есть частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Чтобы определить коэффициент пропорциональности *к*, воспользуемся теми дополнительными условиями, которые указаны в задаче: при $t=1$ (за один час) количество бактерий утроилось, то есть $x=3a$.

Следовательно, $3a = a(e^k)^1$ откуда $e^k = 3$ и мы получаем зависимость между переменными: $x = a \cdot 3^t$.

Чтобы ответить на вопрос задачи, находим количество x при $t=5$, $x = a \cdot 3^5$, $x = 243a$.

Как видно, через 5 часов количество бактерий увеличится в 243 раза.

Найти значение биомассы в момент Т = 12, если в начальный момент ($t=0$) значение биомассы $m_0 = 10$ и $k(t) = \dfrac{1}{1+2t}$.

Решение. Составим дифференциальное уравнение, описывающее динамику развития популяции. Состояние популяции (в простейшем понимании – стада) можно охарактеризовать массой *m* этой популяции (т.е. весом всего стада), причем масса *m* является функцией времени $m = m(t)$. Считаем, что скорость прироста биомассы пропорциональна биомассе популяции с коэффициентом $k = k(t)$.

Скорость изменения биомассы характеризуется производной $m'(t)$ (при $m' > 0$ - это скорость развития, при $m' < 0$ - скорость вымирания). По условию задачи $m' = km$ или

$$m' = \frac{1}{1+2t} m \qquad (1)$$

Уравнение (1) является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Разделим переменные *m* и t:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{1}{1+2t} m$$

$$\frac{dm}{m} = \frac{dt}{1+2t}$$

Отсюда после почленного интегрирования получаем:

$\int \dfrac{dm}{m} = \int \dfrac{dt}{1+2t}$, т.е. $\ln m = \dfrac{1}{2}\ln(1+2t) + \ln C$

В данном случае произвольную постоянную удобно взять в виде $\ln C$. Из последнего равенства следует формула для общего решения дифференциального уравнения

$$m = C(1+2t)^{\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

Для определения значения произвольной постоянной *C* полагаем в равенстве (2) $t = 0, m = m_0 = 10$. В результате получаем

$$10 = C(1+2\cdot 0)^{\frac{1}{2}}, C = 10$$

Таким образом, из общего решения дифференциального уравнения приходим к выражению

$$m(t) = 10\sqrt{1+2t} \qquad (3)$$

Положим теперь в равенстве (3) $t = T = 12$. Тогда

$$m(12) = 10\sqrt{1+2\cdot 12} = 50.$$

Следовательно, в момент времени Т = 12(ед.) значение биомассы будет составлять 50 (ед.).

Брошена игральная кость. Найти вероятность события, состоящего в том, что выпало четное число очков.

Решение. Обозначим событие A = {выпало четное число очков}. Имеется 6 элементарных событий, т.е. $n = 6$. Элементарными событиями, благоприятными для A, являются события: A_1 = {выпадение 2 очков}, A_2 = {выпадение 4 очков}, A_3 = {выпадение 6 очков}. Всего таких событий три, следовательно,

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Итак, вероятность того, что выпадет четное число очков, равна $0{,}5$.

Пример 6. В ящике 4 белых, 5 красных, 8 зеленых и 3 голубых шара. Шары перемешивают и наудачу извлекают 1 шар. Какова вероятность события, состоящего в том, что шар окажется цветным?

Решение. Всевозможными элементарными исходами являются события:

A = {извлечение белого шара},

B = {извлечение красного шара},

C = {извлечение зеленого шара},

D = {извлечение голубого шара}.

Необходимо найти событие, состоящее в появлении события B или C, или D, т.е. события $B + C + D$. Так как события B, C, D – несовместны, то

$$P(B + C + D) = P(B) + P(C) + P(D) = \frac{5}{20} + \frac{8}{20} + \frac{3}{20} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

Таким образом, вероятность извлечения цветного шара равна $0{,}8$.

В ящике 60 груш сорта A и 40 груш сорта B. Отбирают две груши. Определить вероятности следующих событий:

а) обе груши сорта A;

б) обе груши сорта B;

в) одна груша сорта A, а другая груша сорта B.

Решение. Обозначим:

A_1 = {при первом извлечении взята груша сорта A},

A_2 = {при втором извлечении взята груша сорта A},

B_1 = {при первом извлечении взята груша сорта B},

B_2 = {при втором извлечении взята груша сорта B}.

Таким образом, нужно найти:

а) $P(A_1 \text{ и } A_2)$;

б) $P(B_1 \text{ и } B_2)$;

в) $P((A_1 \text{ и } B_2) \text{ или } (B_1 \text{ и } A_2))$.

Находим:

а) $P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) = \frac{60}{100} \cdot \frac{59}{99} = 0{,}36$; т.е. вероятность того, что обе груши сорта A, равна $0{,}36$.

б) $P(B_1 B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2/B_1) = \frac{40}{100} \cdot \frac{39}{99} = 0{,}16$.

Следовательно, вероятность того, что обе груши сорта B, равна $0{,}16$.

в) $P(A_1 B_2 + B_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(B_2/A_1) + P(B_1) \cdot P(A_2/B_1) = \frac{60}{100} \cdot \frac{40}{99} + \frac{40}{100} \cdot \frac{60}{99} = 0{,}48$.

Таким образом, вероятность того, что одна груша сорта A, а другая груша сорта B, равна

$0{,}48$.

Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятность того, что студент даст правильный ответ на первый вопрос, равна 0,9, вероятность правильного ответа на второй вопрос равна 0,8 и, наконец, вероятность правильного ответа на третий вопрос равна 0,7. Найти вероятность того, что студент на все три вопроса ответит правильно.

Решение. Обозначим: A = {правильный ответ на первый вопрос}, B = {правильный ответ на второй вопрос}, C = {правильный ответ на третий вопрос}.

События A, B и C являются независимыми. Применяя теорему умножения вероятностей для независимых событий, получим:

$$P(A\,B\,C) = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C) = 0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7 = 0{,}504\,.$$

Итак, вероятность того, что студент на все три вопроса ответит правильно, равна $0{,}504$.

3.3.3 Результаты и выводы: научились применять дифференциальные уравнения в практических задачах, вычислять вероятность событий.