ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ

ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.Б.02

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Направление подготовки: 36.04.01 Ветеринарно-санитарная экспертиза
Профиль образовательной программы: «Ветеринарно-санитарная экспертиза»
Форма обучения: очная

СОДЕРЖАНИЕ

1. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

1.1 Лабораторная работа № 1 (2 часа).

Тема: «Понятие о математическом моделировании. Классификация математических моделей»

1.1.1 Цель работы: сформировать понятие о математическом моделировании, умения и навыки классификации математических моделей.

1.1.2 Задачи работы: изучить понятие о математическом моделировании, классификацию математических моделей.

1.1.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. ПК.
2. Windows.
3. Office.

1.1.4 Описание (ход) работы: пример выполнения задания работы 2.1

Основные теоретические сведения.

Понятие о математическом моделировании.

Модель - материальный объект, система математических зависимостей или программа, имитирующая структуру или функционирование исследуемого объекта.

Моделирование - представление различных характеристик поведения физической или абстрактной системы с помощью другой системы.

Математическое моделирование - метод исследования процессов и явлений на их математических моделях.

Изучение компьютерного математического моделирования открывает широкие возможности для осознания связи информатики с математикой и другими науками - естественными и социальными. Компьютерное математическое моделирование в разных своих проявлениях использует практически весь аппарат современной математики.

Математическое моделирование не всегда требует компьютерной поддержки. Каждый специалист, профессионально занимающийся математическим моделированием, делает все возможное для аналитического исследования модели. Аналитические решения (т.е. представленные формулами, выражающими результаты исследования через исходные данные) обычно удобнее и информативнее численных. Возможности аналитических методов решения сложных математических задач, однако, очень ограничены и, как правило, эти методы гораздо сложнее численных. В компьютерном моделировании доминируют численные методы, реализуемые на компьютерах. Однако понятия "аналитическое решение" и "компьютерное решение" отнюдь не противостоят друг другу, так как:

а) все чаще компьютеры при математическом моделировании используются не только для численных расчетов, но и для аналитических преобразований:

б) результат аналитического исследования математической модели часто выражен столь сложной формулой, что при взгляде на нее не складывается восприятия описываемого ей процесса. Эту формулу нужно представить графически, проиллюстрировать в динамике, иногда даже озвучить, т.е. проделать то, что называется "визуализацией абстракций". При этом компьютер - незаменимое техническое средство.

Классификация математических моделей

К классификации математических моделей можно подходить по-разному, положив в основу классификации различные принципы.

1) Классификация моделей по отраслям наук (математические модели в физике, биологии, социологии и т.д.);

2) Классификация моделей по применяемому математическому аппарату (модели, основанные на применении обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений в частных производных, стохастических методов, дискретных алгебраических преобразований и т.д.);

3) Классификация моделей с точки зрения целей моделирования.

- дескриптивные (описательные) модели;
- оптимизационные модели;
- многокритериальные модели;
- игровые модели;
- имитационные модели.

Имитационная модель - описание системы и ее поведения, которое может быть реализовано и исследовано в ходе операций на компьютере.

Имитационное моделирование - исследование поведения сложной системы на ее модели.

Можно сказать, что чаще всего имитационное моделирование применяется для того, чтобы описать свойства большой системы при условии, что поведение составляющих ее объектов очень просто и четко сформулировано. Математическое описание тогда сводится к уровню статистической обработки результатов моделирования при нахождении макроскопических характеристик системы. Такой компьютерный эксперимент фактически претендует на воспроизведение натурного эксперимента.

Имитационное моделирование позволяет осуществить проверку гипотез, исследовать влияние различных факторов и параметров.

Задание.

1. Формулировка проблемы (задачи). ***Задача о назначениях.*** Производится классификация 7 болезней животных (птицы) по 5 категориям. Результаты тестирования каждого заболевания (уровень опасности заболевания) по каждой категории выражены в баллах по 10-балльной шкале и представлены матрицей

$C =$

*	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
S_1	7	5	7	6	7
S_2	6	4	8	4	9
S_3	8	6	4	3	8
S_4	7	7	8	5	7
S_5	5	9	7	9	5
S_6	6	8	6	4	7
S_7	7	7	8	6	4

Определить самые опасные заболевания в каждой из 5 категорий так, чтобы сумма баллов выбранных заболеваний была наибольшей (суммарный уровень опасности выбранных заболеваний был наибольшим). Каждое заболевание может быть самым опасным только в одной категории и все категории должны быть заняты.

Ознакомиться с классификацией математической модели задачи, выбором метода решения, с основными этапами построения математической модели. Сформулировать математическую модель задачи. Указать компьютерные технологии решения задачи.

1. Классификация предполагаемой математической модели и выбор метода решения.

Оптимизационная модель, задача линейного программирования.

2. Ознакомление с основными этапами построения математической модели.

1). Выбор и обозначение переменных, констант, параметров.

Обозначим через x_{ij} переменные задачи:

$x_{ij}=1$, если заболевание S_i выбирается самым опасным в категории P_j;

$x_{ij}=0$, если заболевание S_i не является самым опасным в категории P_j;

c_{ij} - уровень опасности заболевания S_i (количество баллов по результатам тестирования) в категории P_j,

$i=1,2,3,4,5,6,7;\ j=1,2,3,4,5$.

2). Составление целевой функции.

Целевая функция: суммарный уровень опасности всех заболеваний в баллах вычисляется по формуле

$$
\begin{aligned}
Z=\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{5}c_{ij}\cdot x_{ij} &= 7\cdot x_{11}+5\cdot x_{12}+7\cdot x_{13}+6\cdot x_{14}+7\cdot x_{15}+\\
&+6\cdot x_{21}+4\cdot x_{22}+8\cdot x_{23}+4\cdot x_{24}+9\cdot x_{25}+\\
&+8\cdot x_{31}+6\cdot x_{32}+4\cdot x_{33}+3\cdot x_{34}+8\cdot x_{35}+\\
&+7\cdot x_{41}+7\cdot x_{42}+8\cdot x_{43}+5\cdot x_{44}+7\cdot x_{45}+\\
&+5\cdot x_{51}+9\cdot x_{52}+7\cdot x_{53}+9\cdot x_{54}+5\cdot x_{55}+\\
&+6\cdot x_{61}+8\cdot x_{62}+6\cdot x_{63}+4\cdot x_{64}+7\cdot x_{65}+\\
&+7\cdot x_{71}+7\cdot x_{72}+8\cdot x_{73}+6\cdot x_{74}+4\cdot x_{75}\to \max.
\end{aligned} \tag{1}
$$

3). Система ограничений задачи.

Ограничения на переменные задачи.

Ограничения на лидерство одного заболевания: каждое заболевание может быть самым опасным только в одной категории

$$
\begin{aligned}
&\text{для } S_1 \quad x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=1,\\
&\text{для } S_2 \quad x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=1,\\
&\text{для } S_3 \quad x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}=1,\\
&\text{для } S_4 \quad x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}=1,\\
&\text{для } S_5 \quad x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}+x_{55}=1,\\
&\text{для } S_6 \quad x_{61}+x_{62}+x_{63}+x_{64}+x_{65}=1,\\
&\text{для } S_7 \quad x_{71}+x_{72}+x_{73}+x_{74}+x_{75}=1.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Ограничения по занятости категорий: в каждой категории может быть только один лидер

для P_1 $x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}+x_{61}+x_{71}=1$,

для P_2 $x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}+x_{61}+x_{71}=1$,

для P_3 $x_{13}+x_{23}+x_{33}=15$, (3)

для P_4 $x_{14}+x_{24}+x_{34}=10$,

для P_2 $x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}+x_{61}+x_{71}=1$,

Ограничения на знаки (значения) переменных: $x_{ij} \geq 0$, x_{ij} - двоичные числа.

4). Тип задачи.

Задача открытого типа: вводятся две фиктивные категории с нулевыми столбцами баллов. Матрица C^* становится квадратной.

$C^* =$

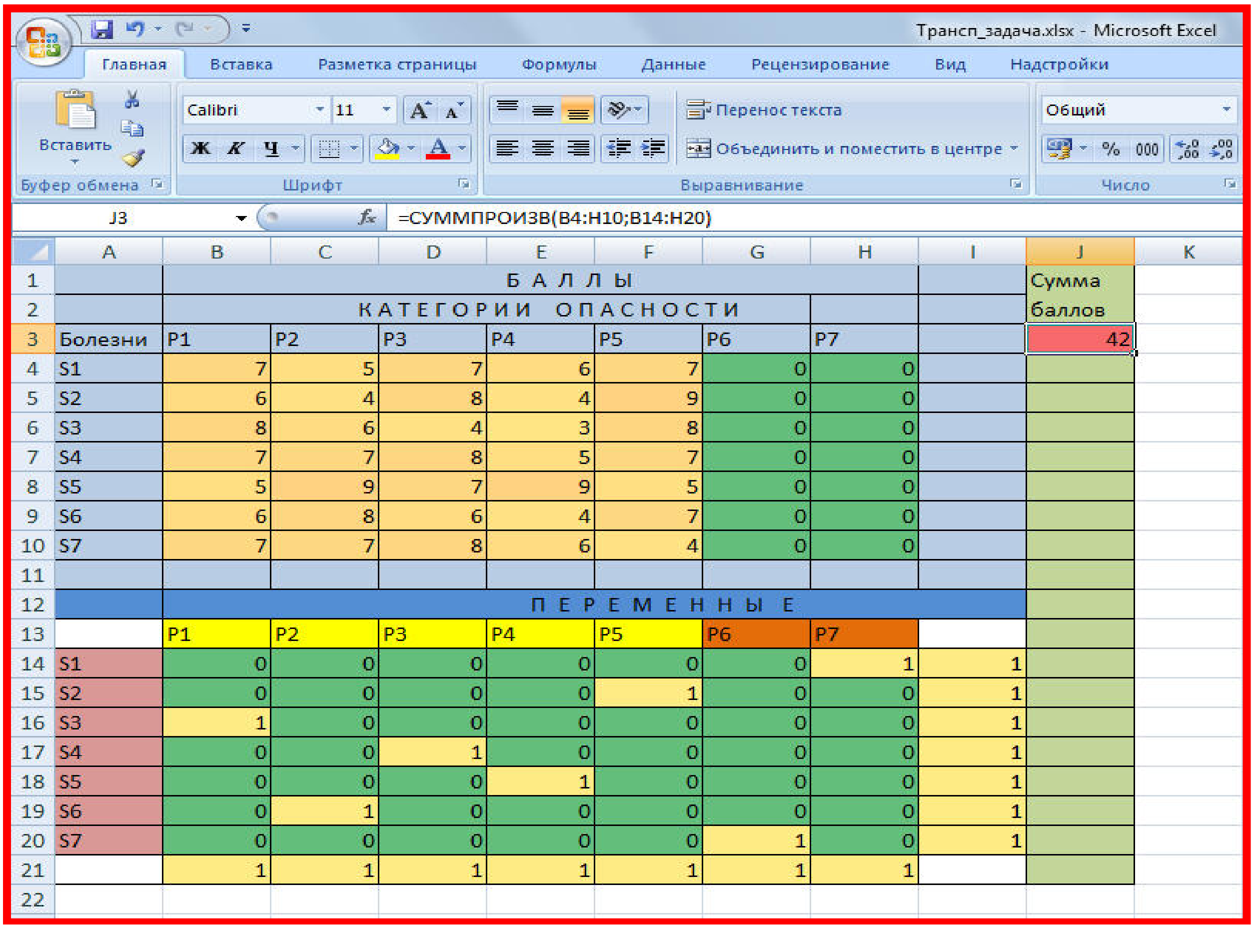
*	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
S_1	7	5	7	6	7	0	0
S_2	6	4	8	4	9	0	0
S_3	8	6	4	3	8	0	0
S_4	7	7	8	5	7	0	0
S_5	5	9	7	9	5	0	0
S_6	6	8	6	4	7	0	0
S_7	7	7	8	6	4	0	0

3. Формулировка математической модели задачи.

Найти значения двоичных переменных x_{ij}, $i=1,2,3,4,5,6,7; j=1,2,3,4,5$, удовлетворящих системе ограничений (2), (3) и условиям неотрицательности $x_{ij} \geq 0$ такие, чтобы *Целевая функция* (1) *(*суммарный уровень опасности всех заболеваний в баллах) принимала наибольшее значение.

4. Компьютерные технологии решения задачи.

Использование надстройки Excel «Поиск решения». Указан интерфейс задачи.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		Б А Л Л Ы								Сумма
2		К А Т Е Г О Р И И О П А С Н О С Т И								баллов
3	Болезни	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7		42
4	S1	7	5	7	6	7	0	0		
5	S2	6	4	8	4	9	0	0		
6	S3	8	6	4	3	8	0	0		
7	S4	7	7	8	5	7	0	0		
8	S5	5	9	7	9	5	0	0		
9	S6	6	8	6	4	7	0	0		
10	S7	7	7	8	6	4	0	0		
11										
12		П Е Р Е М Е Н Н Ы Е								
13		P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7		
14	S1	0	0	0	0	0	0	1	1	
15	S2	0	0	0	0	1	0	0	1	
16	S3	1	0	0	0	0	0	0	1	
17	S4	0	0	1	0	0	0	0	1	
18	S5	0	0	0	1	0	0	0	1	
19	S6	0	1	0	0	0	0	0	1	
20	S7	0	0	0	0	0	1	0	1	
21		1	1	1	1	1	1	1		
22										

1.2 Лабораторная работа № 2-4 (6 часов).

Тема: «Модели и методы алгебры, дифференциального и интегрального исчисления»

1.2.1 Цель работы: сформировать представление о моделях и методах алгебры, дифференциального и интегрального исчисления.

1.2.2 Задачи работы: ознакомление с моделями и методами алгебры, дифференциального и интегрального исчисления.

1.2.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. ПК.
2. Windows.
3. Office.

1.2.4 Описание (ход) работы: пример выполнения задания работы 2.2

1. Общее исследование и построение графика функции одной переменной в математическом моделировании. Задачи на экстремум

Общее исследование функции заключается в определении основных свойств функции, которые уточняются методами дифференциального исчисления. Общее исследование функций и построение их графиков удобно проводить последующей схеме.

1. Найти область определения функции, исследовать функцию на **непрерывность, найти точки разрыва и выяснить характер разрывов, определить четность, нечетность, периодичность функции, точки пересечения с осями координат.**

2.Найти нули функции и определить интервалы знакопостоянства.

3. Найти асимптоты графика функции и выяснить взаимное расположение графика функции с асимптотами.

4. Исследовать функцию на экстремум, и монотонность.

5. **Исследовать функцию на выпуклость, вогнутость, перегиб.**
6. **Используя результаты исследования, строится график функции.**

При необходимости уточнить отдельные участки кривой следует дополнительно вычислить координаты нескольких точек.

7*. Выполнить процедуру исследования и построить график с компьютерной математикой, например с MathCAD.

Указанную схему исследования можно считать примерной. В частности эскиз графика можно изобразить после нахождения асимптот.

Задача. Провести полное исследование и построить график функции

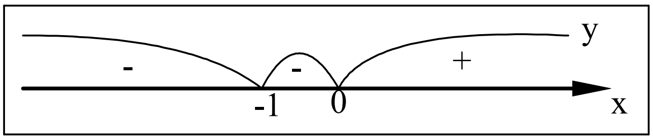
$$y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}.$$

1.Область определения функции находим из условия $x + 1 \neq 0$, т.е. $x \in (-\infty;-1) \cup (-1;+\infty)$. Функция непрерывна в области определения как частное двух непрерывных элементарных функций.

Точка x = –1 есть точка разрыва 2 рода так как $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty$.

$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$, $f(-x) = -\frac{x^3}{(-x+1)^2}$, $f(x) \neq f(-x)$, $f(x) \neq -f(-x)$, так что функция не является четной и не является нечетной: функция общего вида. Если x=0, то y=0 и наоборот, т.е. кривая пересекает оси координат только в точке (0;0).

2. Находим нули функции и интервалы знакопостоянства: $f(x) \equiv \frac{x^3}{2(x+1)^2} = 0$ при $x = 0; f(x) > 0$ при $x \in (0;+\infty), f(x) < 0$ при $x \in (-\infty;-1) \cup (-1;0)$.



3. Находим асимптоты графика функции.

a) x = –1 – вертикальная, т.к. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = \lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$.

Так как $\lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -1+0} f(x) = -\infty$, то ветви, кривой y=f(x) в окрестности x = –1 направлены вниз.

b) Находим наклонные асимптоты y=k·x+b.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{2(x+1)^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2}x\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x^2 - x}{2(x+1)^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2 - \frac{1}{x^2}}{2\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2} = -1.$$

Следовательно график функции имеет наклонную асимптоту $y=\frac{1}{2}x-1$. Выясним взаимное расположение графика функции и асимптоты:

$$У_ф - У_{ас} = -\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \left(\frac{1}{2}x-1\right) = \frac{3x+2}{2(x+1)^2}.$$

$У_ф - У_{ас} = 0$ при $x=-\frac{2}{3}$, т.е. графики асимптоты и кривой пересекаются при $x=-\frac{2}{3}$;

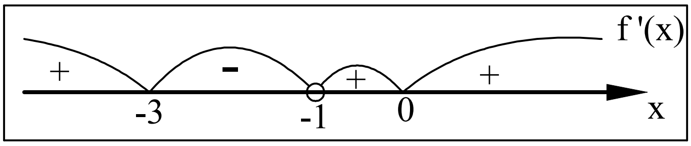
$У_ф - У_{ас} > 0$ при $x\in\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$, график функции расположен выше асимптоты;

$У_ф - У_{ас} < 0$ при $x\in(-\infty;-1)\cup\left(-1;-\frac{2}{3}\right)$, график функции расположен ниже асимптоты.

4. Исследуем функцию на монотонность и экстремум с помощью производной первого порядка.

$$y'=\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{(x+1)^2}\right]=\frac{1}{2}\frac{3x^2(x+1)^2-2x^3(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}.$$

Находим критические точки функции: y = 0 при x = 0, x = –3; y – не существует при x = –1, но x = –1 не входит в область определения функции. Так что исследуемая функция имеет только 2 критические точки: x = –3, x = 0. Область определения разделим критическими точками на интервалы и методом интервалов определим знак производной f'(x) в каждом из них.



В интервалах $(-\infty;-3),(-1;+\infty)$ функция $y=f(x)$ монотонно возрастает, так как $y\ge 0$; в интервале (–3; –1) функция монотонно убывает, так как $y<0$.

По первому достаточному признаку определим характер экстремума в критических точках:

x = –3 – точка максимума (y меняет знак с «+» на «–» при переходе через точку слева направо), $Y_{max}=y(-3)=-\frac{27}{8}$.

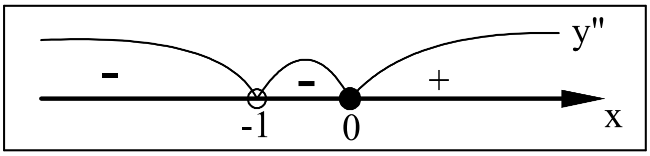
В точке x = 0 экстремума нет (y меняет знак при переходе через точку x=0).

5. Исследуем функцию на выпуклость, вогнутость, перегиб с помощью производной второго порядка.

$$y''=(y')'=\left[\frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}\right]=\frac{\left(3x^2+6x\right)\left(x+1\right)^3-\left(x^3+3x^2\right)\cdot 3\left(x+1\right)^2}{2\left(x+1\right)^6}=\frac{3x}{\left(x+1\right)^4}.$$

Найдем критические точки второго рода: y = 0 при x = 0; y не существует при x = –1, но эта точка не входит в область определения. Так что функция имеет только одну критическую точку второго рода x = 0.

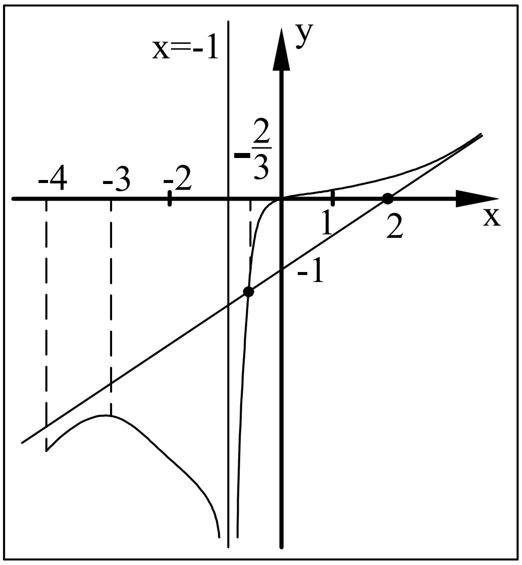
Область определения функции разделим на интервалы критической точкой x = 0 и в каждом из них определим знак y" (методом интервалов).



В интервалах $\left(-\infty;-1\right),\left(-1;0\right)$ кривая $y=\frac{x^3}{\left(x+1\right)^2}$ выпукла вверх (y<0), в интервал $\left(0;+\infty\right)$ кривая $y=f(x)$ выпукла вниз (y>0).

x = 0 – точка перегиба функции (y меняет знак при переходе через точку x = 0). Так как y'(0) = 0, y(0) = 0, то в точке перегиба кривая касается оси OX.

Дополнительно находим $y(-20)=-4,\ \ y(-4)=-\frac{32}{9},\ \ y(4)=\frac{32}{25}$. С использованием полученных данных строим график данной функции.



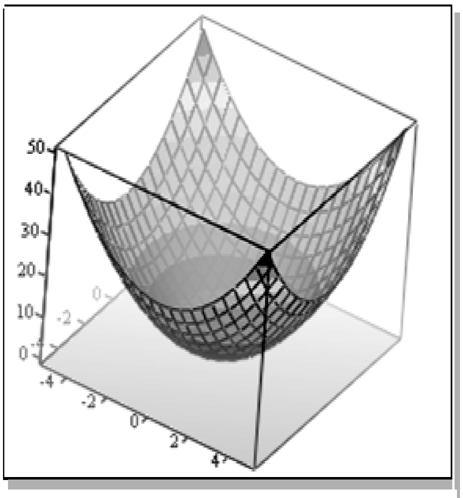
1. Экстремум функции нескольких переменных в математическом моделировании.

Определение: Переменная z называется функцией переменных x и y,если каждой паре значений x и y из некоторой области их изменения поставлено в соответствие определенное значение z. Функциональная зависимость *z* от x и *y* записывается в виде:

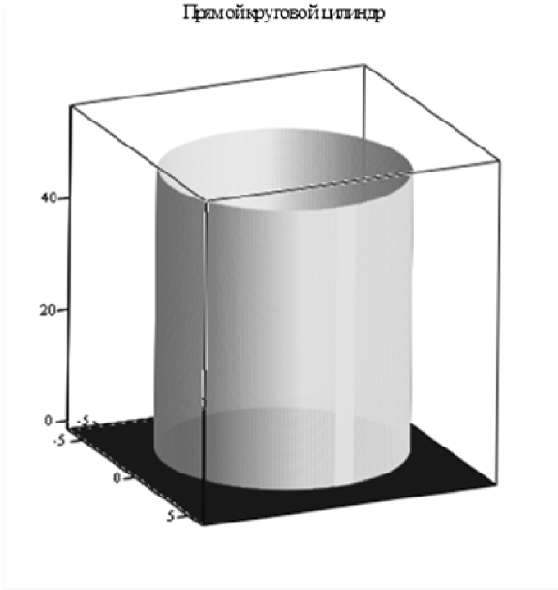
$$z=f(x,y).$$

Аналогичным образом определяются функции трех и более переменных. В этой работе используются только функции двух переменных, поэтому все определения и задачи будут проиллюстрированы только такими функциями.

Функции двух переменных допускают геометрическую интерпретацию. Графиком функции z=f(x, y), определенной в области G, называется множество точек (x, y, z) пространства, у которых (x, y) принадлежат G и z=f(x, y). В наиболее простых случаях такой график представляет некоторую поверхность. Поверхности удобно изображать с MathCAD. Например, параболоид $z=x^2+y^2$ и цилиндр имеют вид



F



(x, y, z)

Точка $M_0(x_0;y_0)$ называется точкой локального максимума (минимума) функции z=f(x,y), если для всех точек M(x;y), отличных от $M_0(x_0;y_0)$ и принадлежащих достаточно малой её окрестности, выполняется неравенство $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$, $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$. Максимум или минимум функции называется экстремумом. Точка, в которой достигается экстремум функции, называется точкой экстремума функции.

Необходимые условия экстремума: если точка $M_o(x_0,y_0)$ является точкой экстремума функции f(x,y), то $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = 0$,или хотя бы одна из этих производных не существует.

Точки, для которых эти условия выполнены, называются критическими.

Точки экстремума всегда являются критическими, но критическая точка может и не быть точкой экстремума. Чтобы стационарная точка была точкой экстремума, должны выполняться достаточные условия экстремума.

Введём обозначения: $A = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)}$, $B = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$, $C = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)}$, $\Delta = AC - B^2$.

Достаточные условия экстремума: пусть функция z=f(x,y) имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно в некоторой области, содержащей стационарную точку $M_0(x_0;y_0)$. Тогда

а) если Δ>0, то точка $M_0(x_0;y_0)$ является точкой экстремума для данной функции причем точка M_o будет точкой максимума при A<0 (C<0) и точкой минимума при A>0 (C>0);

б) если Δ<0, то в точке $M_0(x_0;y_0)$ экстремума нет.

в) если Δ=0, то этот признак экстремума не применим. В этом случае необходимо дополнительное исследование.

Дифференцируемая функция в ограниченной замкнутой области G достигает своего наибольшего (наименьшего) значения либо на границе этой области, либо в стационарной точке, лежащей внутри области G.

Задача. Найти экстремумы функции $z = x^2 - 2y^2 + 6x + 4y - 5$.

Решение.

Найдём стационарные точки функции

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2x + 6 = 0 \\ -4y + 4 = 0 \end{cases}.$$

Решая систему получаем x=1, y = 1. Точка M(-3,1) стационарная и z_1 =z(-3;1)=-12.

$z_{xx} = 2$, $z_{xy} = 0$, $z_{yy} = -4$

В точке М $\Delta = -8 < 0$,.В точке М экстремума нет. Других точек экстремума нет.

3. Метод наименьших квадратов

В различных практических исследованиях приходится находить эмпирические функции по отдельным значениям этих функций, полученным на основании опытных данных (измерений). Один из способов получения таких функций–метод наименьших квадратов. Пусть, например, на основании эксперимента необходимо установить функциональную зависимость между температурой x и урожайностью y. По результатам измерений составляем таблицу:

x	x_1	…	x_i	…	x_n
y	y_1	…	y_i	…	y_n

Предположим, что эти точки на координатной плоскости находятся приблизительно на одной прямой. В данном случае естественно предположить, что между x и y существует линейная зависимость, выражающаяся уравнением

$$y = a \cdot x + b$$

Так как точки (x_i, y_i), i=1… n лишь приблизительно лежат на одной прямой, то равенства $y_i - (ax_i + b) = 0$ будут выполняться приближенно и величины $\delta_i = y_i - (ax_i + b)$ будут отличны от нуля.

Составим сумму $S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \left(ax_i + b\right)\right]^2$ и подберем параметры a и b так, чтобы функция S(a,b) принимала наименьшее значение, т.е. чтобы сумма квадратов погрешностей $S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2$ была наименьшей. Из необходимых условий экстремума следует:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = \left(\sum_{i=1}^{n} 2\left[y_i - (ax_i + b)\right] \cdot (-x_i) \right) = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = \left(\sum_{i=1}^{n} 2\left[y_i - (ax_i + b)\right] \cdot (-1) \right) = 0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - n\sum_{i=1}^{n} x = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - bn = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем a и b и подставив их в уравнение

$$y = a \cdot x + b$$

получим эмпирическую функцию исследуемой зависимости.

Задача № 5. Экспериментально получены пять значений искомой функции y=f(x) при пяти значениях аргумента, которые записаны в таблице. Методом наименьших квадратов найти функцию y=f(x) в виде $y = a \cdot x + b$.

x	1	2	3	4	5
y	0.5	1	1.5	2	3

Решение. Предварительно вычислим суммы:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15,$$

$$\sum_{i=1}^{5} y_i = 0,5 + 1 + 1,5 + 2 + 3 = 8,$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55,$$

$$\sum_{i=1}^{5} y_i = 1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1,5 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 30.$$

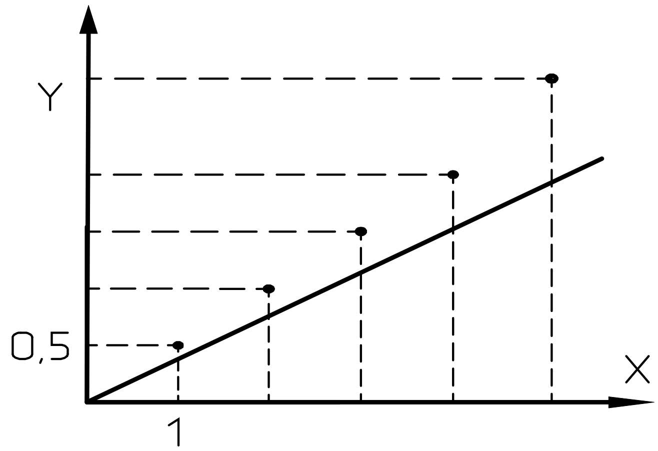
Составим систему уравнений

$$\begin{cases} 30 - a \cdot 55 - b \cdot 15 = 0, \\ 8 - a \cdot 15 - b \cdot 5 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 15b + 55a = 30, \\ 5b + 15a = 8. \end{cases}$$

Решив систему уравнений найдём a=0,6, b= –0,2.Следовательно, эмпирическая функция определяется формулой

$$y = 0,6x - 0,2.$$

Построим график этой зависимости и нанесем на него экспериментальные точки (облако точек).



Ответ: y = 0,6x – 0,2.

1.3 Лабораторная работа № 5-6 (4 часа).

Тема: «Модели и методы дифференциальных уравнений**»**

1.3.1 Цель работы: сформировать представления о моделях и методах дифференциальных уравнений.

1.3.2 Задачи работы: ознакомление с моделями и методами дифференциальных уравнений.

1.3.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. ПК.
2. Windows.
3. Office.

1.3.4 Описание (ход) работы: пример выполнения задания работы 2.3

Задача. Скорость роста популяции пропорциональна мере популяции. Составить математическую модель и найти закон роста популяции.

Пусть $m(t)$ - мера популяции в момент времени t.Математической моделью является задача Коши

$$m'(t) = k \cdot m(t),$$

$$m(0) = m_0.$$

Решением задачи Коши является функция

$$m(t) = m_0 \cdot e^{-kt}.$$

1.4. Лабораторная работа № 7-10 (8 часов).

Тема: Понятие задачи математического программирования. Графическое решение задачи линейного программирования. Двойственные задачи линейного программирования. Симплекс- метод решения задачи линейного программирования. Модели (специальные задачи) линейного программирования: транспортная задача, задача о назначениях; задачи целочисленного программирования. Понятие о динамическом программировании.

1.4.1 Цель работы: сформировать представление о задачах математического и линейного программирования; графическом решении задачи линейного программирования; Двойственных задачах линейного программирования; симплекс- методе решения задачи линейного программирования; моделях (специальных задачах) линейного программирования: транспортных задачах, задачах о назначениях; задачах целочисленного программирования. Сформировать понятие о динамическом программировании.

1.4.2 Задачи работы: ознакомление с задачами математического и линейного программирования. Освоение графического метода задачи линейного программирования. Ознакомление с двойственными задачами линейного программирования; симплекс- методом решения задачи линейного программирования. Ознакомление с моделями (специальными задачами) линейного программирования: транспортными задачами, задачами о назначениях; задачами целочисленного программирования, с понятием о динамическом программировании.

1.4.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. ПК.
2. Windows.
3. Office.

1.4.4 Описание (ход) работы: пример выполнения задания работы 2. 4.

1. Задача линейного программирования с двумя переменными. Задача о распределении ресурсов.

1) ***Задача.*** *С.\ х. предприятие производит и продаёт продукцию двух видов: «1 Продукт» и «2 Продукт». Для производства продукции используются ресурсы двух категорий: А и В. Расходы ресурсов А и В на производство единицы продукции каждого вида, запасы ресурсов и цены продукции приведены в таблице 1.*

Таблица 1

Ресурсы	*Расход ресурсов на ед. продукции*		*Запасы ресурсов*
	1 Продукт	*2 Продукт*	
А	*1*	*2*	*3*
В	*3*	*1*	*3*
Количество продукции	x_1	x_2	
Цены	*2(ден. ед.)*	*1(ден. ед.)*	

Выяснить, какое количество продукции каждого вида надо производить предприятию (составить план производства), чтобы получить максимум прибыли.

Задание.

1. *Составить математическую модель задачи.*

2. *Решить задачу в Excel.*

Решение. 1. Составить математическую модель задачи. Для составления математической модели задачи прежде всего ***введём переменные (неизвестные) задачи***: x_1 - количество продукции 1-го вида, а x_2 - количество продукции 2-го вида, производимые предприятием.

Ограниченность запасов ресурсов приводит ***к ограничениям на*** x_1 ***и*** x_2***:*** ограничения на расход ресурса А $x_1 + 2 \cdot x_2 \le 3$,

ограничения на расход ресурса В $3 \cdot x_1 + x_2 \le 3$.

Кроме того, $x_1, x_2 \ge 0$.

Качество решения задачи определяется с помощью ***целевой функции задачи*** $Z(x_1, x_2)$- функции, определяющей доход предприятия от продажи продукции: $Z = 2 \cdot x_1 + x_2$.

Задача об определении плана производства продукции свелась к следующей математической задаче: *найти вектор* (x_1, x_2) *(план производства), координаты которого удовлетворяют системе ограничений*

$$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 \le 3 \\ 3 \cdot x_1 + x_2 \le 3 \end{cases}$$

и условиям неотрицательности $x_1, x_2 \ge 0$,

который доставляет максимум целевой функции $Z = 2 \cdot x_1 + x_2$.

Эту математическую задачу принято записывать в виде

$$Z = 2 \cdot x_1 + x_2 \to \max \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 \le 3 \\ 3 \cdot x_1 + x_2 \le 3 \end{cases} \quad (2)$$

$$x_1, x_2 \ge 0. \quad (3)$$

и называть ***математической моделью*** данной производственной задачи.

Подобные задачи называются ***задачами линейного программирования***. Они изучаются в разделе математики, называемом ***математическим программированием***. Так как переменные x_1 и x_2 входят в систему ограничений (2) и целевую функцию Z (1) линейно, то эту задачу математического программирования называют ***задачей линейного программирования***.

Множество точек декартовой плоскости (x_1, x_2), координаты которых удовлетворяют системе ограничений (2) и условиям неотрицательности (3), называется областью допустимых решений задачи линейного программирования(областью допустимых планов). В данной задаче она представляет собой выпуклый четырёхугольник. Значения x_1^* и x_2^* из области допустимых планов, при которых Z принимает наибольшее значение в этой области, называются ***оптимальными(оптимальный план),*** а соответствующее наибольшее значение $Z^* = 2 \cdot x_1^* + x_2^*$ является **оптимальным значением прибыли**. Таким образом, задача о распределении ресурсов является задачей оптимизации и её математической моделью служит задача линейного программирования, заключающаяся в поиске оптимального плана и оптимального значения целевой функции.

Задачей оптимизации может быть поиск наименьшего значения.

2. Решение задачи в Excel.

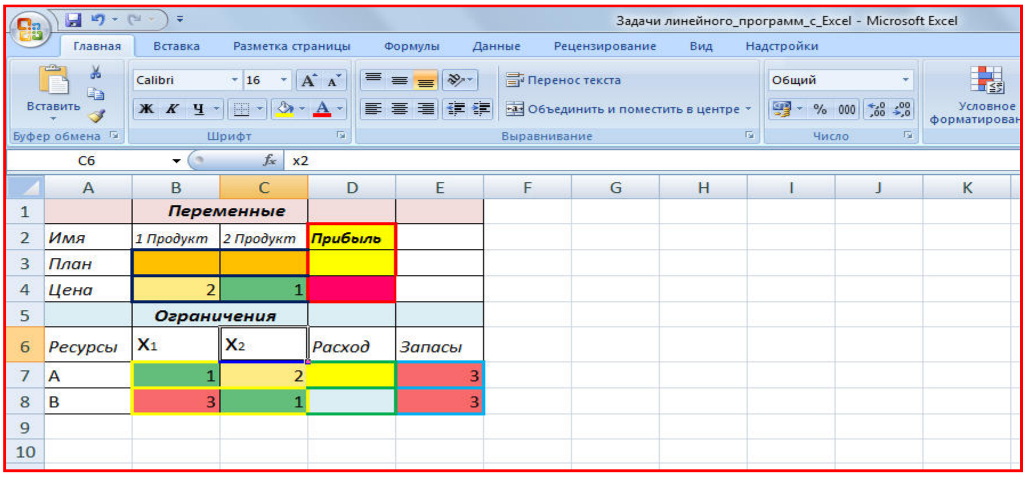
2.1. Ввод данных и формул в таблицу Excel. Открыть Книгу ***Excel,*** Лист1.

-Объединим ячейки B1 и C1. Для этого выделить ячейки, нажать правую кнопку мыши. В появившемся окне вызвать «Формат ячеек», затем «Выравнивание» и поставить галочку против опции «объединение ячеек», нажать ОК. В объединённые ячейки впишем заголовок «Переменные».

-В ячейку A2 вписать «Имя», в A3- «План», в ячейку A4 «Цена», в B2- «1 Продукт», в C2- «2 Продукт», в D2 « Прибыль».

-В ячейки B4 и C4 заносятся значения цен на продукцию.

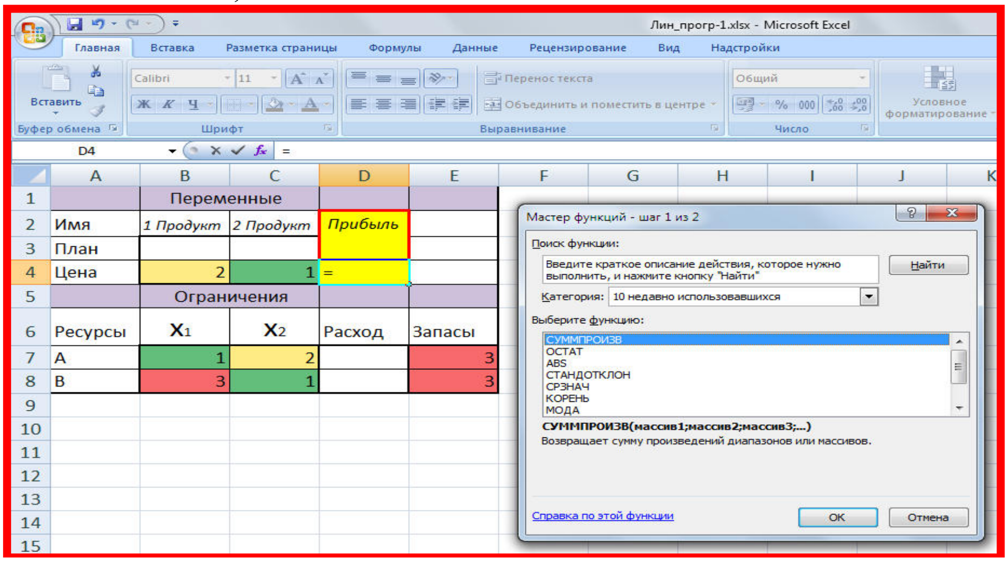
-Для переменных x_1 и x_2 отводятся ячейки B3 и C3. Это изменяемые(рабочие) ячейки, В них исходные данные не заносятся и в результате решения задачи в эти ячейки будут вписаны оптимальные значения. Таблица данных будет иметь вид

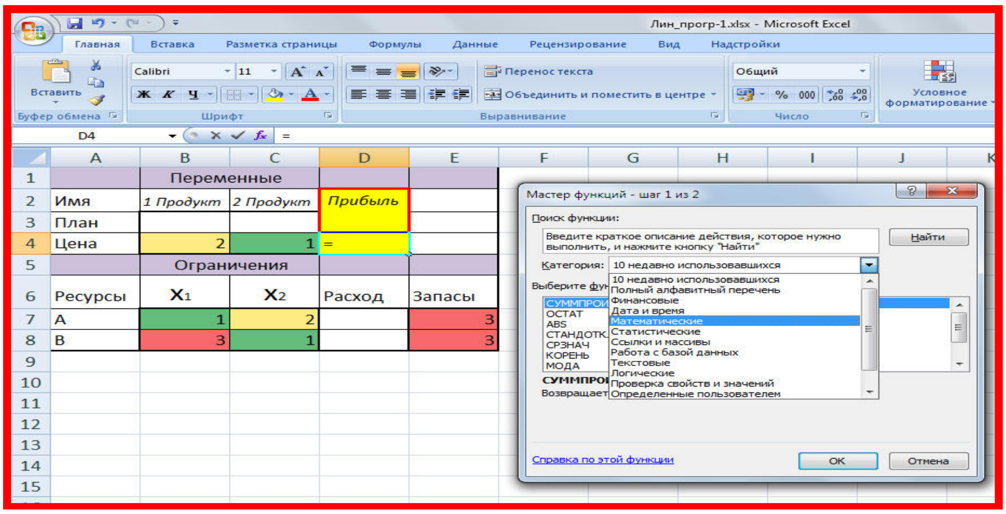


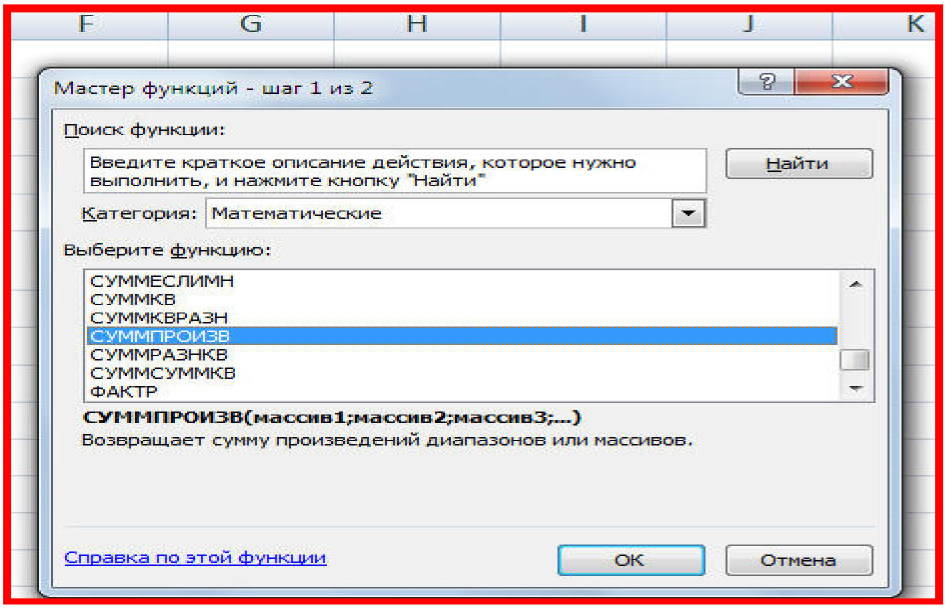
-В ячейке D4 после окончания решения задачи будет указана оптимальное значение прибыли(целевая ячейка). С этой целью в ячейку D4 вводится формула для вычисления значений целевой функции $Z = 2 \cdot x_1 + x_2$. Для этого надо выполнить следующие операции:

1) курсор в D4, выделить эту ячейку,

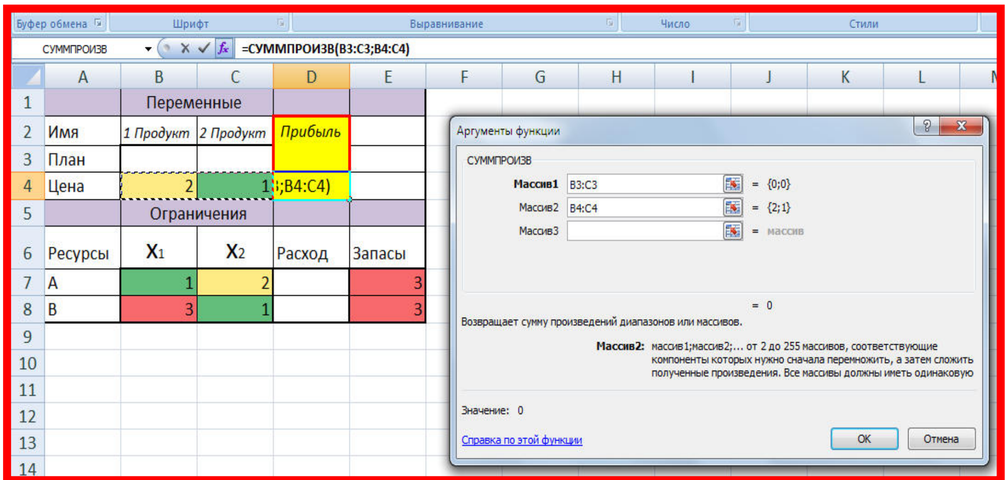
2) щёлкнув по кнопке f_x вызвать Мастера функций, в открывшемся окне в категории «10 недавно использовавшихся» выбрать «Математические», а затем «СУММПРОИЗВ», ОК.

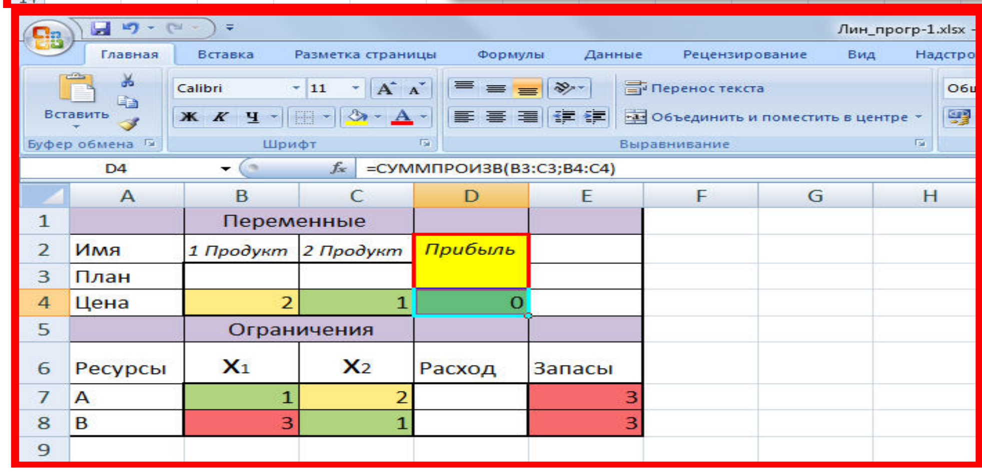






В появившемся окне «Аргументы функции» в поле «Массив 1» ввести адреса изменяемых ячеек В3:С3(протаскивая курсор мыши по ячейкам), в поле «Массив 2» вводятся адреса ячеек с ценами на продукцию В4:С4, «Массив 3» игнорируется. Нажать ОК. В ячейке D4 появится число 0.

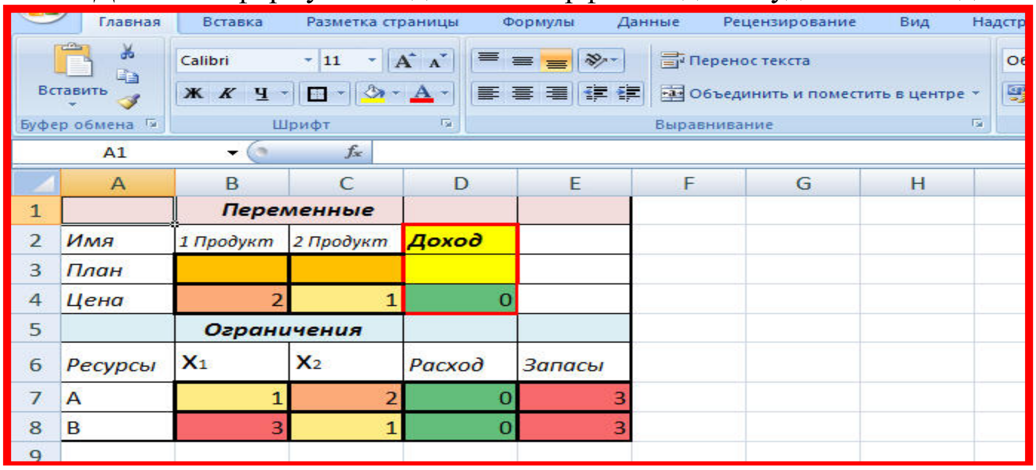




-Объединить ячейки В5 и С5 и вписать «Ограничения», в А6- «Ресурсы», в В6 и С6 x_1 и x_2, в D6 «Расход», в Е6 «Запасы», А7 и А8 значки ресурсов,
в поле В7:С8- нормы расхода ресурсов.
-В ячейку D7 вводится формула вычисления израсходованного ресурса А $x_1 + 2 \cdot x_2$, в ячейку D8- формула израсходованного ресурса В $3 \cdot x_1 + x_2$

(также, как и формула целевой функции).
- В ячейки E7 и E8 вносим размеры запасов ресурсов.

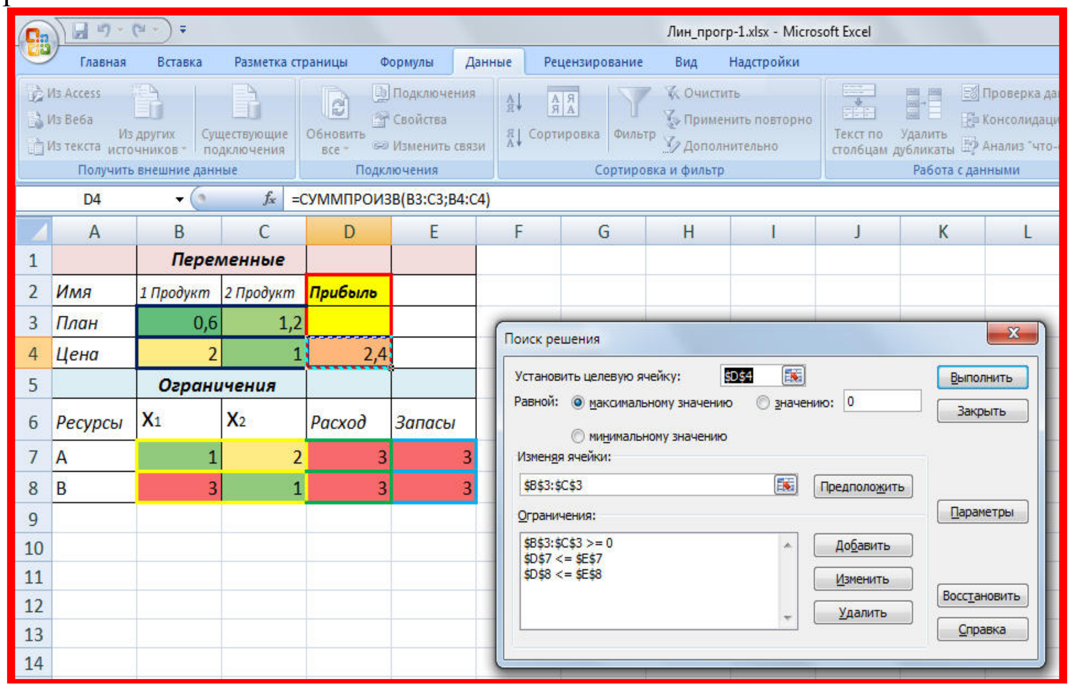
Данные и формулы введены. Интерфейс задачи будет иметь вид



2.2. Использование надстройки Excel «Поиск решения».

Надстройка Excel *«Поиск решения»* при первом использовании должна быть предварительно активирована. Открыв Excel, нажать кнопки «Office» → «Параметры Excel» → «Надстройки» → «Неактивные надстройки приложений» → выделить строку *«Поиск решения»* → «Управление: надстройки Excel» → «перейти» → OK.

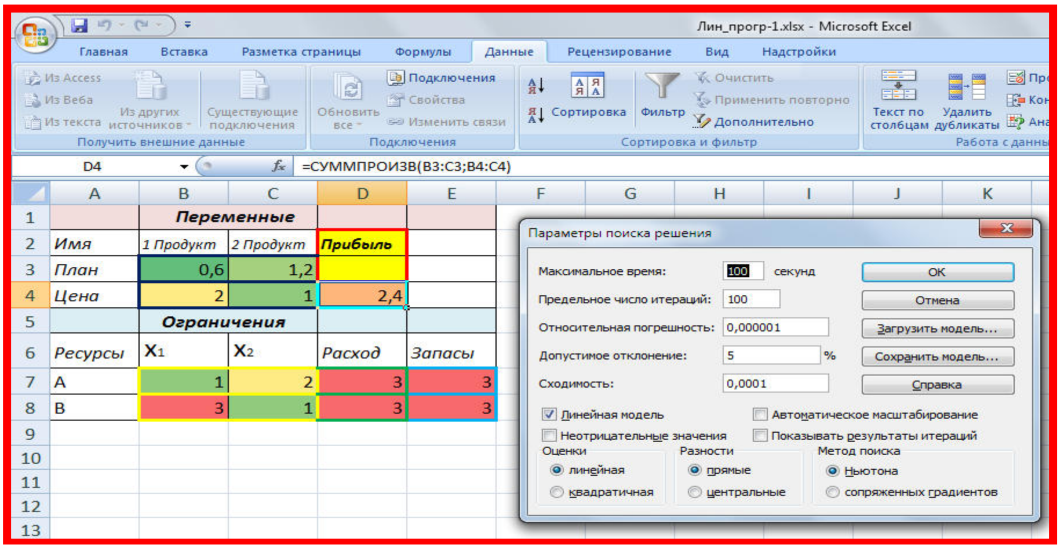
Щёлкнув на ленте кнопку «Данные», затем «Поиск решений» откроем окно «Поиск решений».



-В поле «Установить целевую ячейку» ввести адрес целевой ячейки D4, щёлкнув по ней курсором мыши.
-Выбрать «равной максимальному значению».
-В поле «изменяя ячейки» указать адреса B3:C3.
-В поле «Ограничения» щёлкнуть «Добавить». После появления поля «Добавление ограничения» в поле «Ссылка на ячейку:» сделать ссылку на ячейку D7, выбрать знак <=, в поле «Ограничение:» ввести адрес ячейки с запасом ресурса A- E7. Вновь выбрать «Добавить» провести ввод ограничения по ресурсу B, затем по ограничению $x_1, x_2 \geq 0$. После этого нажать OK.

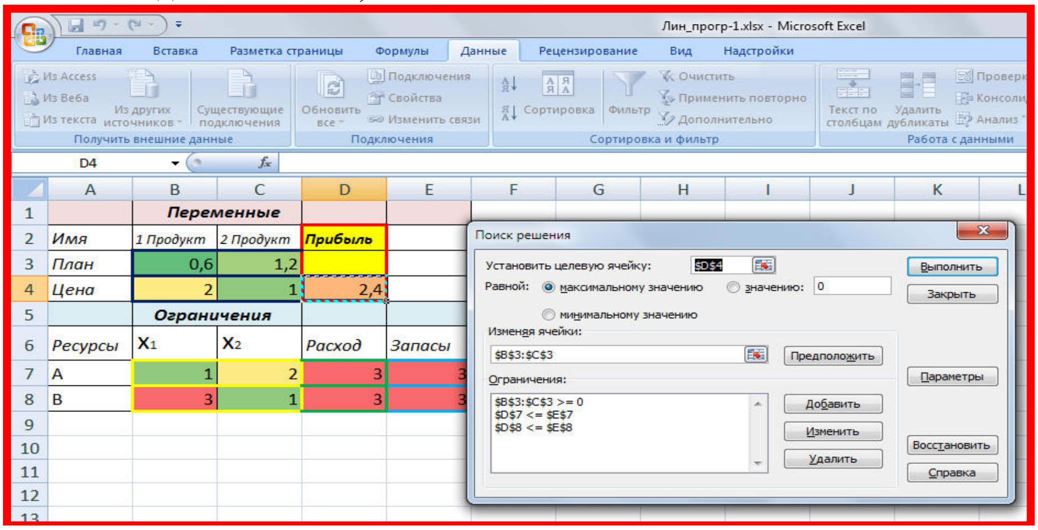
2.3. Настройка параметров решения задачи.

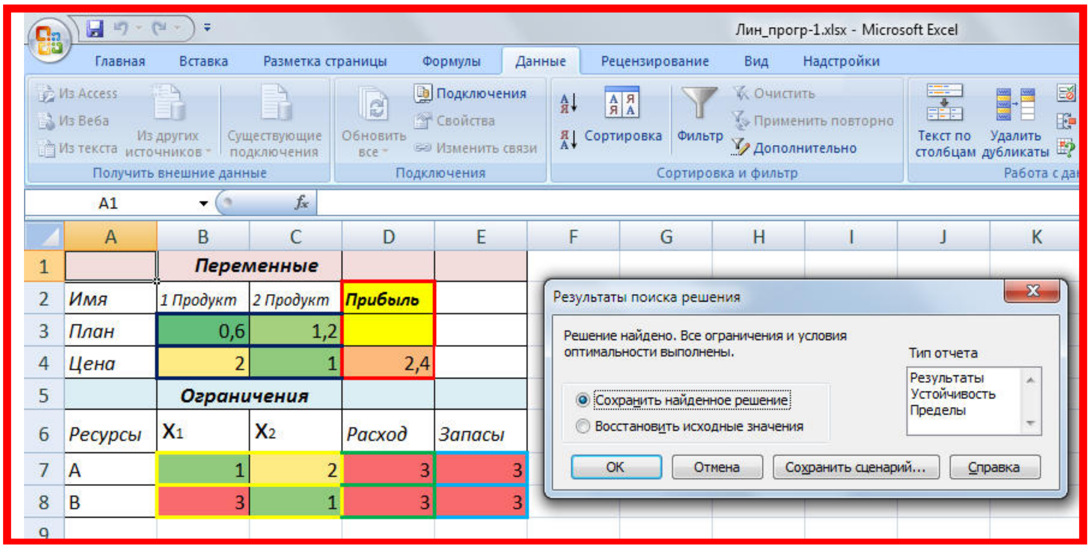
Выбрав в окне «Поиск решений» опцию «Параметры» в появившемся окне «Параметры поиска решения»установить флажок в поле «Линейная модель». При таком выборе при решении задачи будет использоваться симплекс-метод. Остальные значения можно оставить без изменения. Нажать ОК.



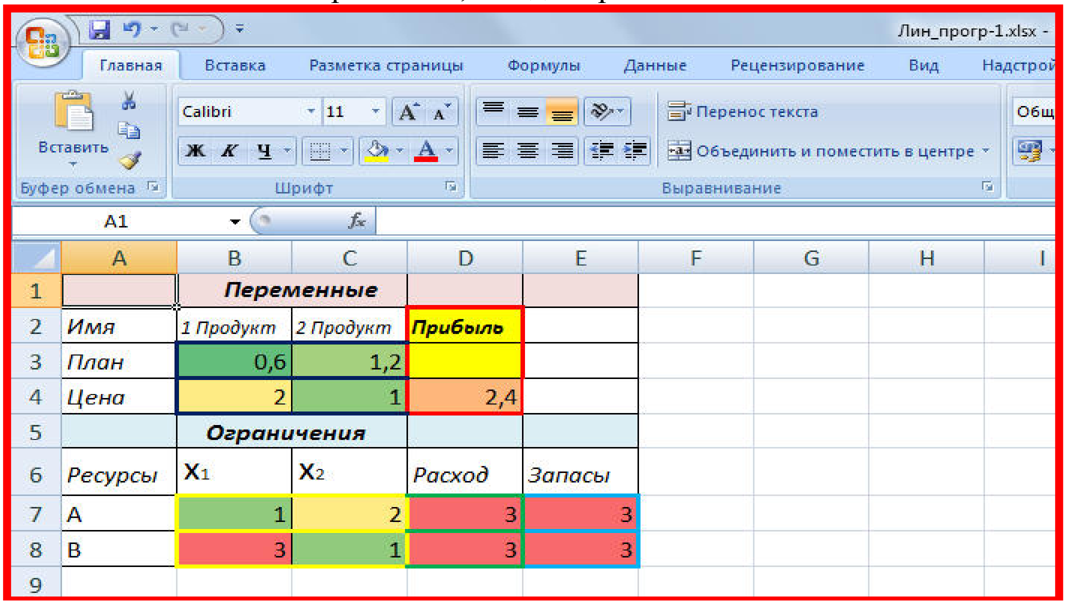
2.3. Завершение решения задачи и просмотр результатов.

В окне «Поиск решений» нажимаем кнопку «Выполнить». Появляется окно «Результаты поиска решения». Можно выбрать тип отчёта, сохранить найденное решение или восстановить исходные значения, ОК.





В ячейках В3 и С3 появятся оптимальные значения плана 0,6 и 1,2, а в ячейке D4 оптимальное значение прибыли 2,4. Задача решена.



	A	B	C	D	E
1		Переменные			
2	Имя	1 Продукт	2 Продукт	Прибыль	
3	План	0,6	1,2		
4	Цена	2	1	2,4	
5		Ограничения			
6	Ресурсы	X1	X2	Расход	Запасы
7	A	1	2	3	3
8	B	3	1	3	3

2. Задача линейного программирования с тремя переменными. Задача о распределении ресурсов. ***Решения типовой задачи линейного программирования с помощью симплекс- метода в Excel: задача о выборе оптимального рациона кормления животных.***

Задача. Составляется комбинированный корм из трёх злаков: кукурузы, овса и ржи. Калорийность и содержание витамина С в одном килограмме каждого злака, а также цена одного кг каждого злака указаны в таблице:

	Кукуруза	Овёс	Рожь
Калорийность(ккал)	200	175	100
Содержание С (в Гр)	5	1	3
Цена (руб.)	6	4	1

Составить наиболее дешёвый комбинированный корм, 1кг которого содержал бы не менее 125 ккал и не менее 2г витамина С.

Решение.

1. Составление математической модели задачи. Обозначим содержание кукурузы, овса и ржи в 1кг комбикорма через x_1, x_2, x_3 соответственно, а стоимость злаков в комбикорме Z. Тогда математическая модель задачи об оптимизации производства комбикорма формулируется следующим образом: найти вектор $x=(x_1;x_2;x_3)$ (называемый планом), доставляющий минимум целевой функции задачи (функции затрат)

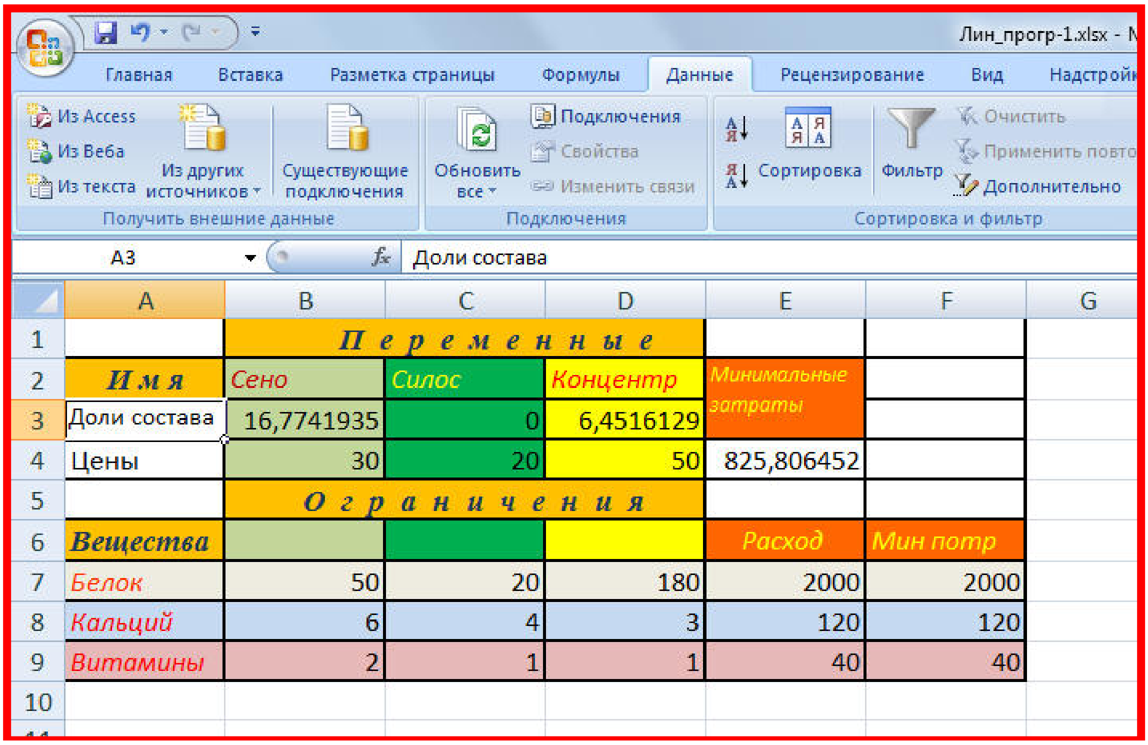
$$Z = 6\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + x_3 \to \min,$$

координаты которого x_1, x_2, x_3 удовлетворяют системе ограничений

$$\begin{cases} 200\cdot x_1 + 175\cdot x_2 + 100\cdot x_3 \ge 125, \\ 5\cdot x_1 + x_2 + 3\cdot x_3 \ge 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0.\ x_2 \ge 0.\ x_3 \ge 0.$$

2. Решение задачи в Excel.



	A	B	C	D	E	F
1		Переменные				
2	Имя	Сено	Силос	Концентр	Минимальные затраты	
3	Доли состава	16,7741935	0	6,4516129		
4	Цены	30	20	50	825,806452	
5		Ограничения				
6	Вещества				Расход	Мин потр
7	Белок	50	20	180	2000	2000
8	Кальций	6	4	3	120	120
9	Витамины	2	1	1	40	40
10						

3. Специальные задачи линейного программирования: транспортные задачи. ***Решение транспортных задач с Excel.***

Задача об оптимизации перевозок. Четыре отделения сельхозпредприятия B_1, B_2, B_3, B_4 закупают корма у трёх поставщиков A_1, A_2, A_3. Запасы кормов у поставщиков, потребности сельхозпредприятия в кормах и стоимость перевозки единицы продукта от поставщика к потребителю даны в таблице.

Потребители / *Поставщики*	*Потребители*				*Запасы кормов у поставщиков*
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	10 x_{11}	0 x_{12}	20 x_{13}	11 x_{14}	$a_1 =$ ***15***
A_2	12 x_{21}	7 x_{22}	9 x_{23}	20 x_{24}	$a_2 =$ ***25***
A_3	0 x_{31}	14 x_{32}	16 x_{33}	18 x_{34}	$a_3 =$ ***5***
	$b_1 =$ ***5***	$b_2 =$ ***15***	$b_3 =$ ***15***	$b_4 =$ ***10***	***45***
	Потребность в кормах				

Значительную часть расходов с /х предприятия составляют именно транспортные расходы. Минимизировать расходы предприятия: составить такой план перевозок, при котором суммарные транспортные расходы будут минимальными, все запасы поставщиков будут вывезены, все потребности отделений с.\ х. предприятия будут удовлетворены.

1. Математическая модель задачи. Обозначим через x_{ij} количество кормов, перевозимое от поставщика A_i к потребителю B_j, c_{ij} - стоимость перевозок по этому маршруту, $i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3, 4$.

Целевая функция: транспортные расходы на перевозку кормов вычисляются по формуле

$$Z=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}\cdot x_{ij}=10\cdot x_{11}+0\cdot x_{12}+20\cdot x_{13}+11\cdot x_{14}+$$

$$+12\cdot x_{21}+7\cdot x_{22}+9\cdot x_{23}+20\cdot x_{24}+$$

$$+0\cdot x_{31}+14\cdot x_{32}+16\cdot x_{33}+18\cdot x_{34}\ \to \min.$$

Ограничения на переменные задачи.

Ограничения вывоза: из A_1 $x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=15$,

из A_2 $x_{21}+x_{22}+x_{13}+x_{14}=25$,

из A_3 $x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=5$.

Ограничения ввоза: *ввоз в* B_1 $x_{11}+x_{21}+x_{31}=5$,

ввоз в B_2 $x_{12}+x_{22}+x_{32}=15$,

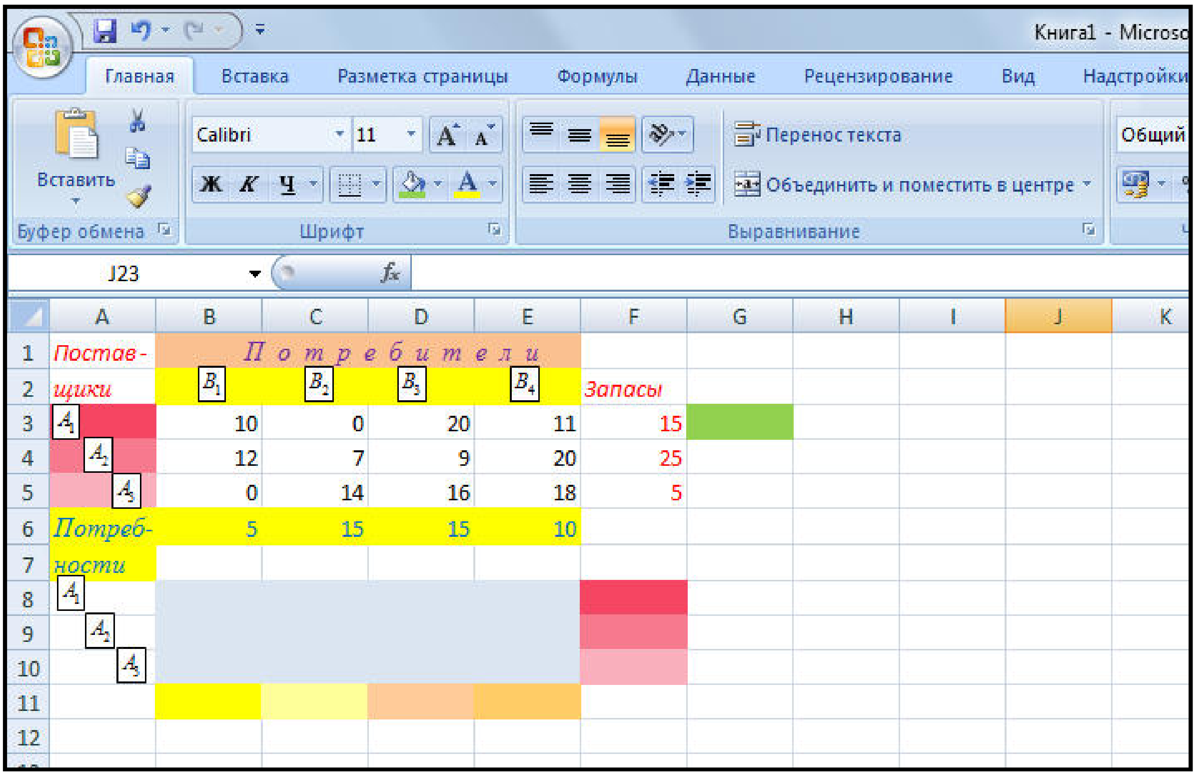
ввоз в B_3 $x_{13}+x_{23}+x_{33}=15$,

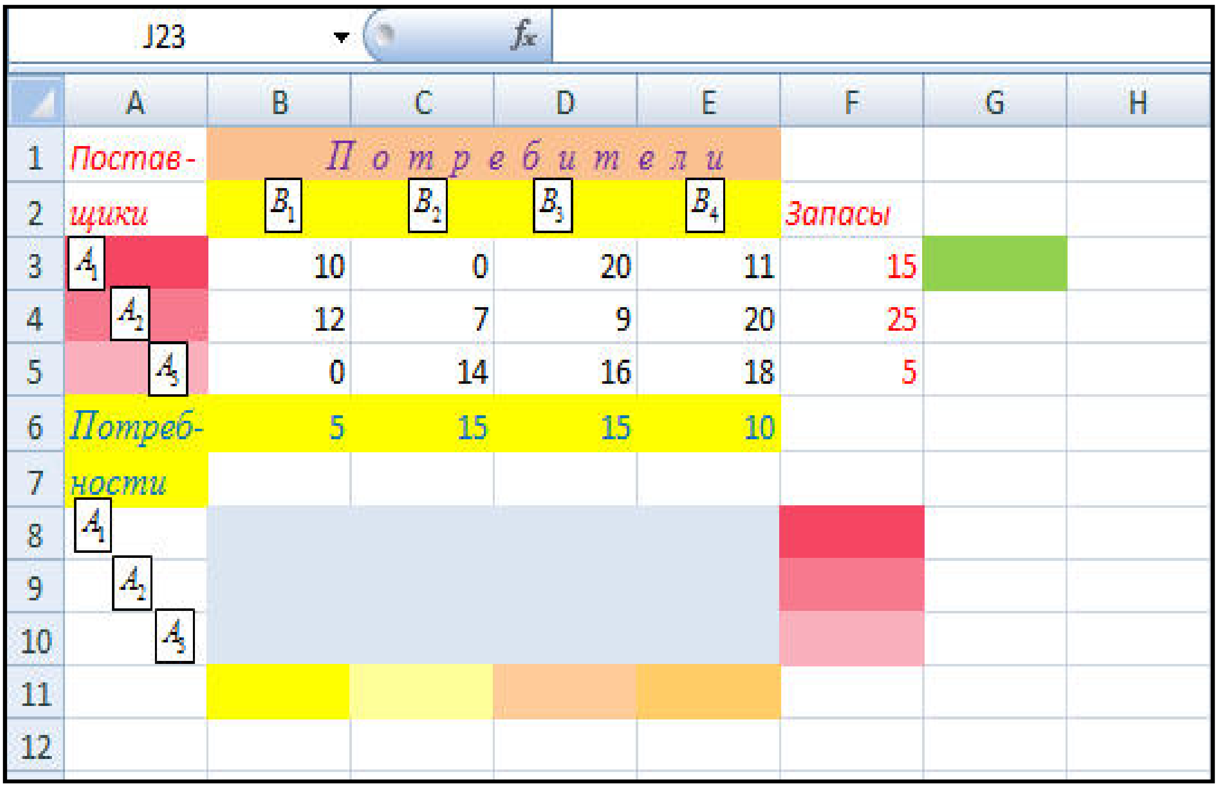
ввоз в B_4 $x_{14}+x_{24}+x_{34}=10$.

Ограничения на знаки(значения) переменных: $x_{ij}\geq 0$.

Задача закрытого типа : $a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3+b_4=45$.

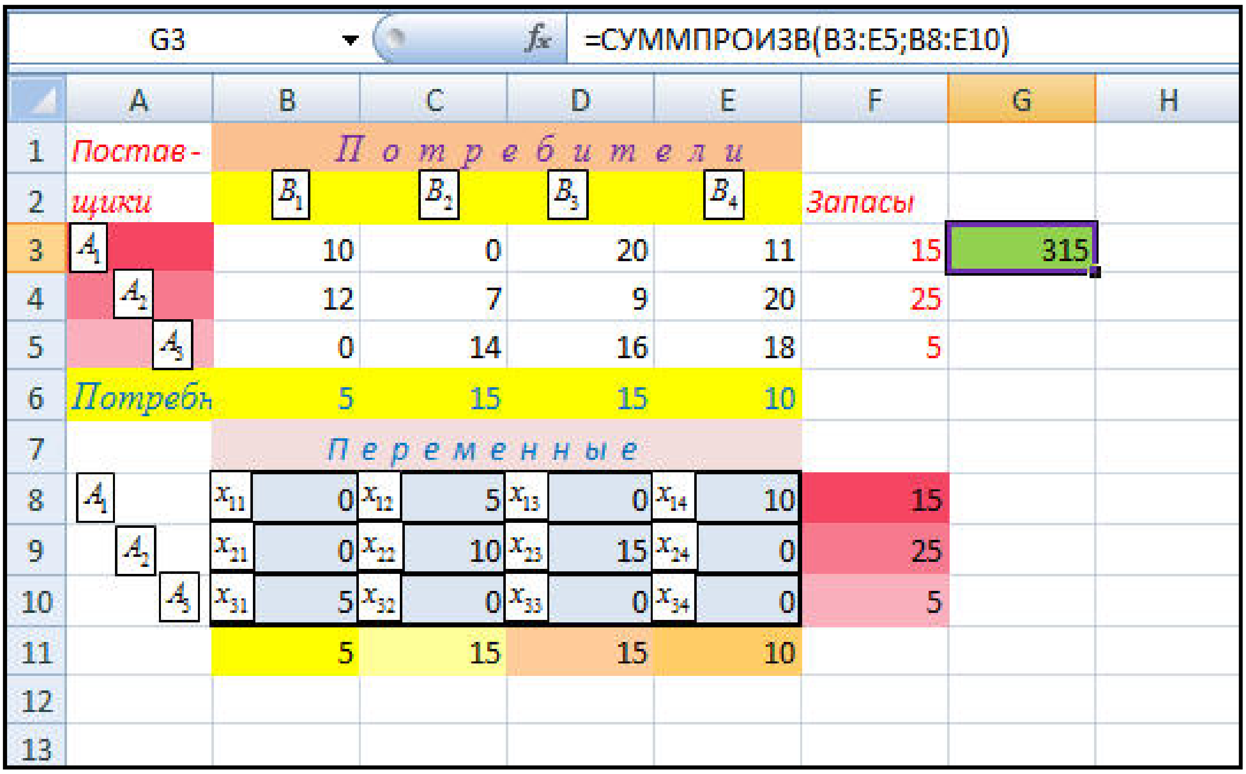
2. Решение задачи в Excel.





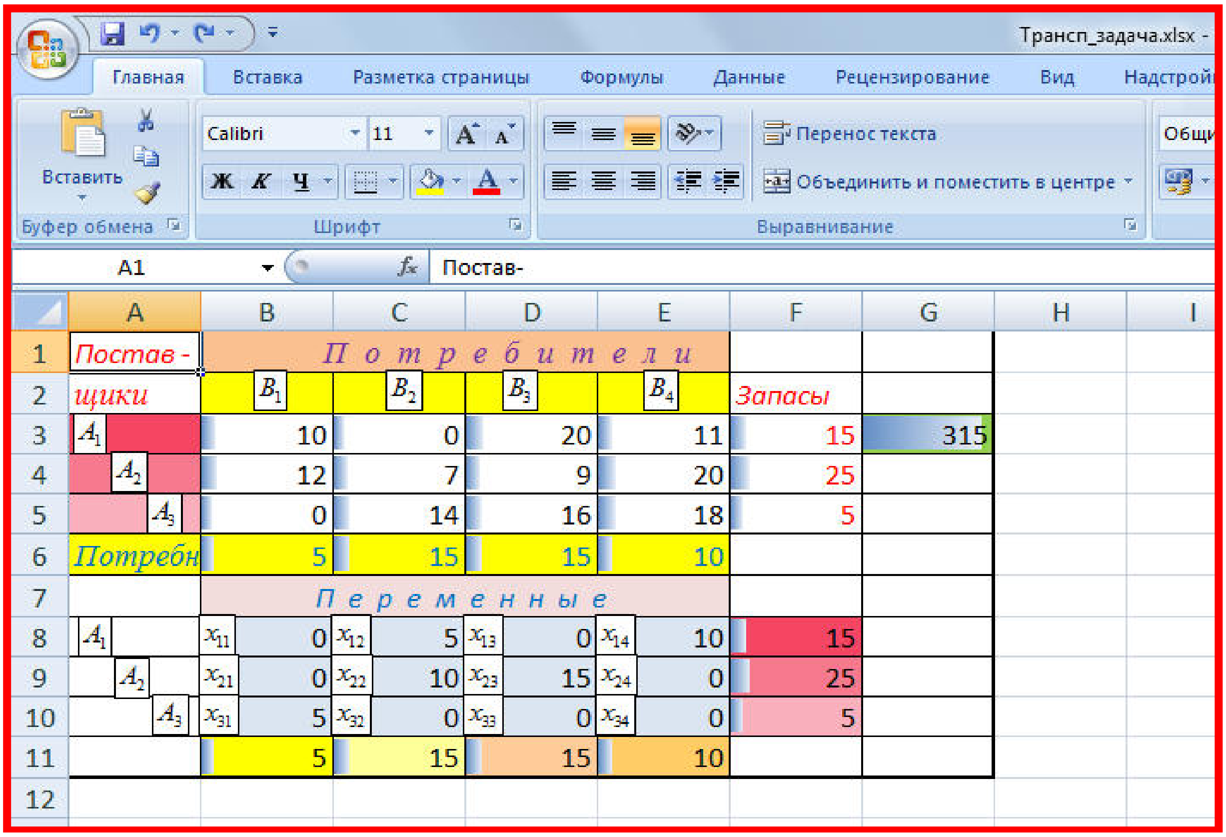
J23 f_x

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Постав-	Потребители						
2	щики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы		
3	A_1	10	0	20	11	15		
4	A_2	12	7	9	20	25		
5	A_3	0	14	16	18	5		
6	Потреб-	5	15	15	10			
7	ности							
8	A_1							
9	A_2							
10	A_3							
11								
12								



G3 f_x =СУММПРОИЗВ(B3:E5;B8:E10)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Постав-	Потребители						
2	щики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы		
3	A_1	10	0	20	11	15	315	
4	A_2	12	7	9	20	25		
5	A_3	0	14	16	18	5		
6	Потребн	5	15	15	10			
7		Переменные						
8	A_1	x_{11} 0	x_{12} 5	x_{13} 0	x_{14} 10	15		
9	A_2	x_{21} 0	x_{22} 10	x_{23} 15	x_{24} 0	25		
10	A_3	x_{31} 5	x_{32} 0	x_{33} 0	x_{34} 0	5		
11		5	15	15	10			
12								
13								



	A	B	C	D	E	F	G
1	Постав -	Потребители					
2	щики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы	
3	A_1	10	0	20	11	15	315
4	A_2	12	7	9	20	25	
5	A_3	0	14	16	18	5	
6	Потребн	5	15	15	10		
7		Переменные					
8	A_1	x_{11} 0	x_{12} 5	x_{13} 0	x_{14} 10	15	
9	A_2	x_{21} 0	x_{22} 10	x_{23} 15	x_{24} 0	25	
10	A_3	x_{31} 5	x_{32} 0	x_{33} 0	x_{34} 0	5	
11		5	15	15	10		
12							

4. Специальные задачи линейного программирования: задачи о назначениях. ***Решение задач о назначениях с Excel.***

Задача о назначениях. Производится классификация 7 болезней животных (птицы) по 5 категориям. Результаты тестирования каждого заболевания уровень опасности заболевания) по каждой категории выражены в баллах по 10-балльной шкале и представлены матрицей

$C =$

*	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
S_1	7	5	7	6	7
S_2	6	4	8	4	9
S_3	8	6	4	3	8
S_4	7	7	8	5	7
S_5	5	9	7	9	5
S_6	6	8	6	4	7
S_7	7	7	8	6	4

Определить самые опасные заболевания в каждой из 5 категорий так, чтобы сумма баллов выбранных заболеваний была наибольшей (суммарный уровень опасности выбранных заболеваний был наибольшим). Каждое заболевание может быть самым опасным только в одной категории и все категории должны быть заняты.

Решение.

1. Математическая модель задачи. Обозначим через x_{ij} переменные задачи:

$x_{ij} = 1$, если заболевание S_i выбирается самым опасным в категории P_j;

$x_{ij} = 0$, если заболевание S_i не является самым опасным в категории P_j;

c_{ij} - уровень опасности заболевания S_i (количество баллов по результатам тестирования) в категории P_j,
$i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;\ j = 1, 2, 3, 4, 5$.

Целевая функция: суммарный уровень опасности всех заболеваний в баллах вычисляется по формуле

$$Z = \sum_{i=1}^{7} \sum_{j=1}^{5} c_{ij} \cdot x_{ij} = 7 \cdot x_{11} + 5 \cdot x_{12} + 7 \cdot x_{13} + 6 \cdot x_{14} + 7 \cdot x_{15} +$$
$$+ 6 \cdot x_{21} + 4 \cdot x_{22} + 8 \cdot x_{23} + 4 \cdot x_{24} + 9 \cdot x_{25} +$$
$$+ 8 \cdot x_{31} + 6 \cdot x_{32} + 4 \cdot x_{33} + 3 \cdot x_{34} + 8 \cdot x_{35} +$$
$$+ 7 \cdot x_{41} + 7 \cdot x_{42} + 8 \cdot x_{43} + 5 \cdot x_{44} + 7 \cdot x_{45} +$$
$$+ 5 \cdot x_{51} + 9 \cdot x_{52} + 7 \cdot x_{53} + 9 \cdot x_{54} + 5 \cdot x_{55} +$$
$$+ 6 \cdot x_{61} + 8 \cdot x_{62} + 6 \cdot x_{63} + 4 \cdot x_{64} + 7 \cdot x_{65} +$$
$$+ 7 \cdot x_{71} + 7 \cdot x_{72} + 8 \cdot x_{73} + 6 \cdot x_{74} + 4 \cdot x_{75} \to \max.$$

Ограничения на переменные задачи.

Ограничения на лидерство одного заболевания: каждое заболевание может быть самым опасным только в одной категории

для S_1 $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1$,
для S_2 $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1$,
для S_3 $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 1$,
для S_4 $x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 1$,
для S_5 $x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} = 1$,
для S_6 $x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} + x_{65} = 1$,
для S_7 $x_{71} + x_{72} + x_{73} + x_{74} + x_{75} = 1$.

Ограничения по занятости категорий: в каждой категории может быть только один лидер

для P_1 $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} + x_{71} = 1$,
для P_2 $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} + x_{71} = 1$,
для P_3 $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 15$,
для P_4 $x_{14} + x_{24} + x_{34} = 10$,
для P_2 $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} + x_{71} = 1$,

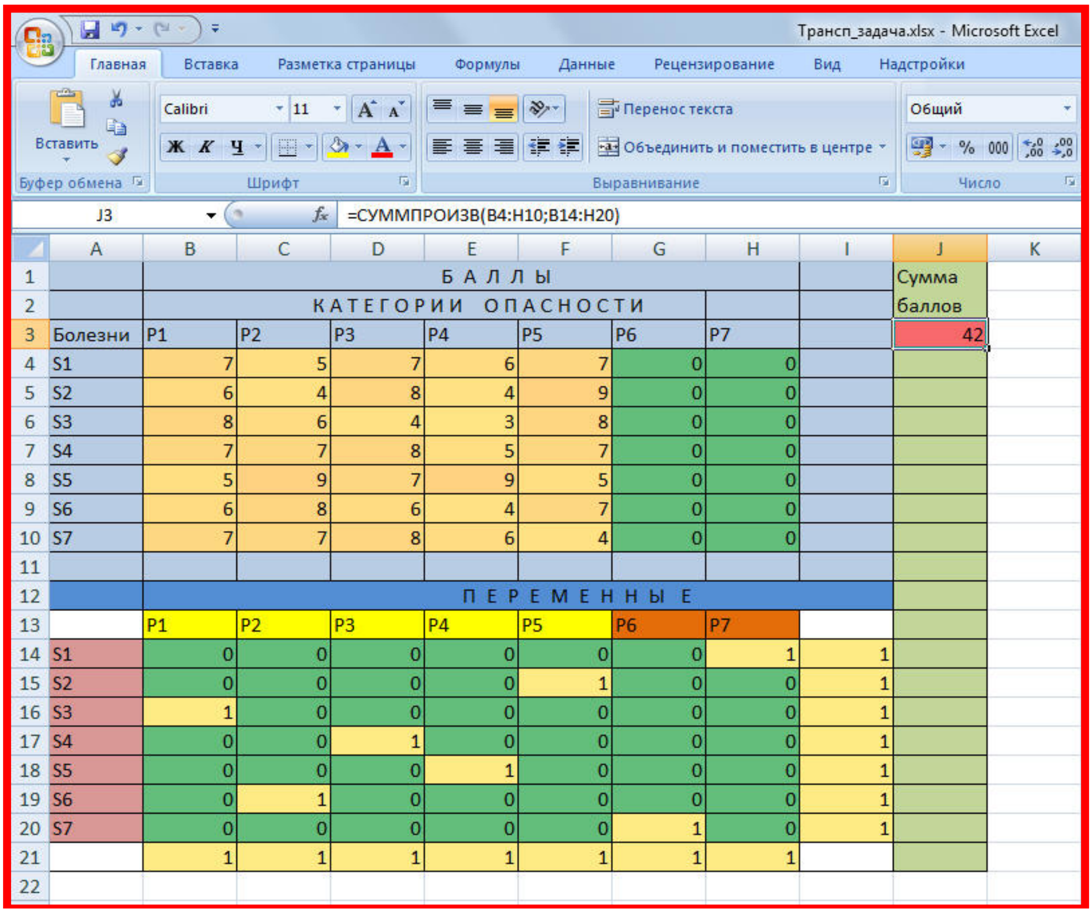
Ограничения на знаки (значения) переменных: $x_{ij} \geq 0$, x_{ij} - двоичные числа.

Задача открытого типа: вводятся две фиктивные категории с нулевыми столбцами баллов.

Матрица C^* становится квадратной.

$$
C^{*} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c||c|c|}
\hline
* & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 \\
\hline
S_1 & 7 & 5 & 7 & 6 & 7 & 0 & 0 \\
\hline
S_2 & 6 & 4 & 8 & 4 & 9 & 0 & 0 \\
\hline
S_3 & 8 & 6 & 4 & 3 & 8 & 0 & 0 \\
\hline
S_4 & 7 & 7 & 8 & 5 & 7 & 0 & 0 \\
\hline
S_5 & 5 & 9 & 7 & 9 & 5 & 0 & 0 \\
\hline
S_6 & 6 & 8 & 6 & 4 & 7 & 0 & 0 \\
\hline
S_7 & 7 & 7 & 8 & 6 & 4 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

2. Решение задачи в Excel.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		Б А Л Л Ы								Сумма	
2		К А Т Е Г О Р И И О П А С Н О С Т И								баллов	
3	Болезни	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7		42	
4	S1	7	5	7	6	7	0	0			
5	S2	6	4	8	4	9	0	0			
6	S3	8	6	4	3	8	0	0			
7	S4	7	7	8	5	7	0	0			
8	S5	5	9	7	9	5	0	0			
9	S6	6	8	6	4	7	0	0			
10	S7	7	7	8	6	4	0	0			
11											
12		П Е Р Е М Е Н Н Ы Е									
13		P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7			
14	S1	0	0	0	0	0	0	1	1		
15	S2	0	0	0	0	1	0	0	1		
16	S3	1	0	0	0	0	0	0	1		
17	S4	0	0	1	0	0	0	0	1		
18	S5	0	0	0	1	0	0	0	1		
19	S6	0	1	0	0	0	0	0	1		
20	S7	0	0	0	0	0	1	0	1		
21		1	1	1	1	1	1	1			
22											

1.5 Лабораторная работа № 11-13 (6 часов).

Тема: Задачи (модели) оптимизации на графах и сетях, алгоритмы их решения.

1.5.1 Цель работы: сформировать представление о задачах (моделях) оптимизации на графах и сетях, алгоритмах их решения.

1.5.2 Задачи работы: ознакомление с задачами (моделями) оптимизации на графах и сетях, алгоритмами их решения.

1.5.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. ПК.
2. Windows.
3. Office.

1.5.4 Описание (ход) работы: пример выполнения задания работы 2.5.

1. Отыскание кратчайших путей в сети. Алгоритм Дейкстры.

Кратчайшие пути. *Задача поиска кратчайшего пути (наиболее дешевого? короткого?) «от пункта А до пункта В имеет массу практических приложений и различные алгоритмы решения. Математическая модель задачи имеет следующий вид.*

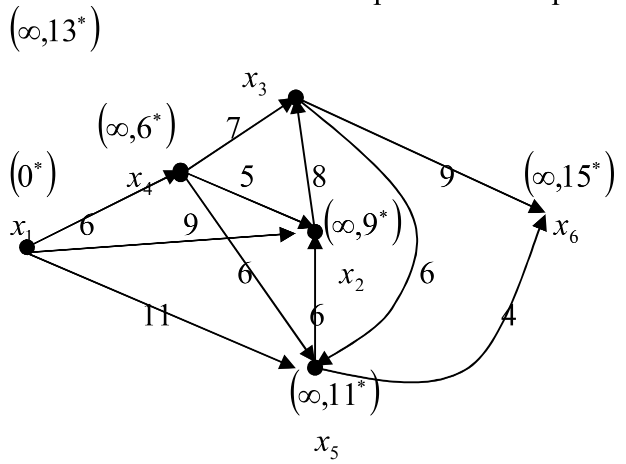
Рассматривается взвешенный граф (орграф) $G(V,E)$, ребрам (дугам) которого сопоставлены веса, обозначающие длину (или стоимость) пути из одного конца ребра в другой. Если из вершины v_i нет ребра (дуги) в вершину v_j, то вес ребра (v_i,v_j) считается равным ∞. Для ребер, являющихся петлями (диагональ матрицы смежности), их веса считаются равными 0. Все компоненты матрицы – веса ребер, соединяющих соответствующие вершины. Требуется определить кратчайший путь из одной вершины в другую.

Наиболее широко известны два алгоритма поиска кратчайших путей. Алгоритм Дейкстры находит кратчайшее расстояние от одной фиксированной вершины до другой и указывает сам путь, длина которого равна этому расстоянию. Алгоритм Флойда-Уоршалла позволяет найти кратчайшие расстояния между всеми парами вершин графа.

Задание. Задана весовая матрица сети G. Найти минимальный путь из вершины x_1 в вершину x_6 по алгоритму Дейкстры.

$$P = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 9 & \infty & 6 & 11 & \infty \\ \infty & - & 8 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & 6 & 9 \\ \infty & 5 & 7 & - & 6 & \infty \\ \infty & 6 & \infty & \infty & - & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}.$$

Решение. Изобразим теперь сам граф по данной матрице весов.



Поскольку в данном графе есть цикл между вершинами x_2, x_3 и x_5, то вершины графа нельзя упорядочить по алгоритму Фалкерсона. На рисунке графа временные и постоянные метки указаны над соответствующей вершиной. Итак, распишем подробно работу алгоритма Дейкстры по шагам.

Этап 1. Шаг1. Полагаем $d(x_1) = 0^*, \tilde{x} = x_1$, $d(x_2) = d(x_3) = d(x_4) = d(x_5) = d(x_6) = \infty.$

1-я итерация. Шаг 2. Множество вершин, непосредственно следующих за $\tilde{x} = x_1$ с временными метками $\tilde{S} = \{x_2, x_4, x_5\}.$ Пересчитываем временные метки этих вершин $d(x_2) = \min\{\infty, 0^* + 9\} = 9,\ d(x_4) = \min\{\infty, 0^* + 6\} = 6,\ d(x_5) = \min\{\infty, 0^* + 11\} = 11.$

Шаг 3. Одна из временных меток превращается в постоянную $\min\{9, \infty, 6, 11, \infty\} = 6^* = d(x_4),\ \tilde{x} = x_4.$

Шаг 4. $\tilde{x} = x_4 \neq t = x_6$, происходит возвращение на второй шаг.

2-я итерация. Шаг 2. $\tilde{S} = \{x_2, x_3, x_5\},\ d(x_2) = \min\{9, 6^* + 5\} = 9$, $d(x_3) = \min\{\infty, 6^* + 7\} = 13$, $d(x_5) = \min\{11, 6^* + 6\} = 11$.

Шаг 3. $\min\{d(x_2), d(x_3), d(x_5), d(x_6)\} = \min\{9, 13, 11, \infty\} = 9^* = d(x_2),\ \tilde{x} = x_2.$

Шаг 4. $x_2 \neq x_6$, возвращение на второй шаг.

3-я итерация. Шаг 2. $\widetilde{S} = \{x_3\}, \ d(x_3) = \min\{13, 9^* + 8\} = 13.$

Шаг 3. $\min\{d(x_3), d(x_5), d(x_6)\} = \min\{13, 11, \infty\} = 11^* = d(x_5), \ \widetilde{x} = x_5.$

Шаг 4. $x_5 \neq x_6$, возвращение на второй шаг.

4-я итерация. Шаг 2. $\widetilde{S} = \{x_6\}, \ d(x_6) = \min\{\infty, 11^* + 4\} = 15.$

Шаг 3. . $\min\{d(x_3), d(x_6)\} = \min\{13, 15\} = 13^* = d(x_3), \ \widetilde{x} = x_3.$

Шаг 4. $x_3 \neq x_6$, возвращение на второй шаг.

5-я итерация. Шаг 2. $\widetilde{S} = \{x_6\}, \ d(x_6) = \min\{15, 13^* + 9\} = 15$.

Шаг 3. $\min\{d(x_6)\} = \min\{15\} = 15^*, \ \widetilde{x} = x_6.$

Шаг 4. $x_6 = t = x_6$, конец первого этапа.

Этап 2. Шаг5. Составим множество вершин, непосредственно предшествующих $\widetilde{x} = x_6$ с постоянными метками $\widetilde{S} = \{x_3, x_5\}$. Проверим для этих двух вершин выполнение равенства (4.7.3).

$d(\widetilde{x}) = 15 = 11^* + 4 = d(x_5) + \omega(x_5, x_6), \ d(\widetilde{x}) = 15 \neq 13^* + 9 = d(x_3) + \omega(x_3, x_6).$ Включаем дугу (x_5, x_6) в кратчайший путь. $\widetilde{x} = x_5$.

Шаг 6. $\widetilde{x} \neq s = x_1$, возвращение на пятый шаг.

2-я итерация. Шаг 5. $\widetilde{S} = \{x_1, x_4\}.$

$d(\widetilde{x}) = 11 = 0^* + 11 = d(x_1) + \omega(x_1, x_5), \ d(\widetilde{x}) = 11 \neq 6^* + 6 = d(x_4) + \omega(x_4, x_5).$ Включаем дугу (x_1, x_5) в кратчайший путь. $\widetilde{x} = x_1$.

Шаг 6. $\widetilde{x} = s = x_1$, завершение второго этапа.

Итак, кратчайший путь от вершины x_1 до вершины x_6 построен. Его длина (вес) равна 15, сам путь образует следующая последовательность дуг $\mu = (x_1, x_5) - (x_5, x_6).$

Задания лабораторной работы № 1

Задания. Задана весовая матрица сети G. Найти минимальный путь из вершины $s = x_1$ в вершину $t = x_6$ по алгоритму Дейкстры.

1) $$P = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 5 & 10 & 13 & \infty & \infty \\ \infty & - & 8 & 9 & 13 & \infty \\ \infty & \infty & - & 5 & 3 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & - & 8 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}.$$

2) $$P = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 9 & \infty & 6 & 11 & \infty \\ \infty & - & 8 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & 6 & 9 \\ \infty & 5 & 7 & - & 6 & \infty \\ \infty & 6 & \infty & \infty & - & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}.$$

3)
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ P = \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 9 & \infty & 6 & 11 & \infty \\ \infty & - & 8 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & 6 & 9 \\ \infty & 5 & 7 & - & 6 & \infty \\ \infty & 6 & \infty & \infty & - & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}.$$

4)
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ P = \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 9 & \infty & 6 & 11 & \infty \\ \infty & - & 8 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & 6 & 9 \\ \infty & 5 & 7 & - & 6 & \infty \\ \infty & 6 & \infty & \infty & - & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}.$$

2. Построение остовного дерева (леса) графа: алгоритмы Краскала и Прима; задача об остове экстремального веса.

Задания. Для графа (сети), заданного матрицей весов,

а) построить по этой матрице сеть (исходный граф),

б) построить остов наименьшего веса,

в) найти его вес.

г) изобразить остовный граф:

$$1)\begin{pmatrix} - & 10 & \infty & 5 & \infty & \infty & 14 \\ 10 & - & 6 & 2 & 4 & 8 & \infty \\ \infty & 6 & - & 3 & 1 & 1 & \infty \\ 5 & 2 & 3 & - & 6 & \infty & 3 \\ \infty & 4 & 1 & 6 & - & 5 & \infty \\ \infty & 8 & 1 & \infty & 5 & - & 2 \\ 14 & \infty & \infty & 3 & \infty & 2 & - \end{pmatrix}, \qquad 2)\begin{pmatrix} - & 7 & 15 & 12 & \infty & 10 & \infty \\ 7 & - & 13 & 9 & \infty & \infty & 8 \\ 15 & 13 & - & 7 & 15 & 7 & \infty \\ 12 & 9 & 7 & - & 9 & \infty & 11 \\ \infty & \infty & 15 & 9 & - & 10 & \infty \\ 10 & \infty & 7 & \infty & 10 & - & 12 \\ \infty & 8 & \infty & 11 & \infty & 12 & - \end{pmatrix}.$$

Пример выполнения типового задания. Для графа, заданного матрицей весов,

а) построить по этой матрице сеть (исходный граф),

б) построить остов наименьшего веса,

в) найти его вес.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ .W = \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 5 & 10 & 14 & \infty & \infty \\ 5 & - & 5 & 6 & \infty & \infty \\ 10 & 5 & - & 7 & 8 & 9 \\ 14 & 6 & 7 & - & 4 & \infty \\ \infty & \infty & 8 & 4 & - & 12 \\ \infty & \infty & 9 & \infty & 12 & - \end{pmatrix} \end{array}.$$

Шаг1. $S' = \{x_1\},\ S'' = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\},\ U' = \varnothing.$

<u>Первая итерация.</u> Шаг 2.

$d(S', S'') = \omega(x_1, x_2) = 5,\ S' = \{x_1, x_2\},\ S'' = \{x_3, x_4, x_5, x_6\},$

$U' = \{(x_1, x_2)\}.$

Шаг 3. $S' \neq S$, переход на начало второго шага.

<u>Вторая итерация.</u> Шаг 2.

$d(S', S'') = \omega(x_2, x_3) = 5,\ S' = \{x_1, x_2, x_3\},\ S'' = \{x_4, x_5, x_6\},$

$U' = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3)\}.$

Шаг 3. $S' \neq S$, переход на начало второго шага.

<u>Третья итерация.</u> Шаг 2.

$d(S', S'') = \omega(x_2, x_4) = 6,\ S' = \{x_1, x_2, x_3, x_4\},\ S'' = \{x_5, x_6\},$

$U' = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_4)\}.$

Шаг 3. $S' \neq S$, переход на начало второго шага.

<u>Четвертая итерация.</u> Шаг 2. $d(S', S'') = \omega(x_4, x_5) = 4,\ S' = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\},\ S'' = \{x_6\},$

$U' = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_4, x_5)\}.$

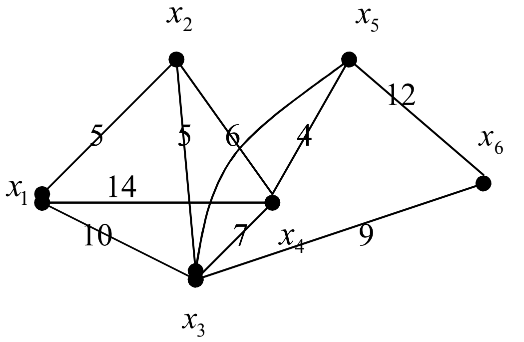
Шаг 3. $S' \neq S$, переход на начало второго шага.

<u>Пятая итерация.</u> Шаг 2. $d(S', S'') = \omega(x_3, x_6) = 9,\ S' = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\},\ S'' = \varnothing,$

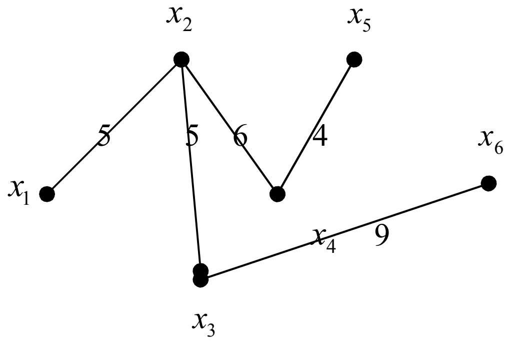
$U' = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_4, x_5), (x_3, x_6)\}.$

Шаг 3. $S' = S$. Итак, получен остовный граф. $G' = (S', U')$ изображен на рисунке справа, его вес $\omega(G') = 5 + 5 + 6 + 4 + 9 = 29.$

Исходный граф



Остовный граф



Краткая теоретическая справка

Деревья являются простейшим классом графов. Для них выполняются многие свойства, которые не всегда выполняются для обычных графов. Кроме того, деревья широко применяются в программировании при различного рода обработке данных, в частности, в алгоритмах сортировки, кодирования и т.п. *Дерево* – это связный граф без циклов. Несколько деревьев (или несвязный граф без циклов) составляют *лес*. Таким образом, дерево является компонентой связности.

1.6 Лабораторная работа № 14 (2 часа).

Тема: «Модели и методы теории вероятностей**»**

1.6.1 Цель работы: сформировать представление о моделях и методах теории вероятностей.

1.6.2 Задачи работы: ознакомиться с моделями и методами теории вероятностей.

1.6.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. ПК.
2. Windows.

3. Office.

1.6.4 Описание (ход) работы: пример выполнения задания работы 2.6.

1. Случайные дискретные величины. Функция распределения и ее свойства.
2. Математическое ожидание и дисперсия случайной дискретной величины.

Задание. Вероятностная модель проверки качества продуктов.

Из коробки, содержащей 25 тестируемых образцов продуктов, среди которых 6 недоброкачественных, наудачу выбраны три образца. Случайная величина X – число шонедоброкачественных образцов среди отобранных. Записать ряд распределения СВ X, найти функцию распределения F(x) (и построить ее график), математическое ожидание, дисперсию. Построить многоугольник распределения.

Решение. 1. Случайная величина X – дискретная и принимает значения: 0, 1, 2, 3. Найдем вероятность каждого значения по формуле классической вероятности.

P (X = 0) = P (все три конфеты не шоколадные) = $= \frac{C_{19}^3}{C_{25}^3} = \frac{969}{2300} \approx 0{,}42;$

P (X = 1) = P (одна из трех конфет шоколадная) = $= \frac{C_6^1 C_{19}^2}{C_{25}^3} = \frac{1026}{2300} \approx 0{,}45;$

P(X = 2) = P (две конфеты из трех шоколадные) = $= \frac{C_6^2 C_{19}^1}{C_{25}^3} = \frac{285}{2300} \approx 0{,}12;$

P(X = 3) = P (все три конфеты шоколадные) = $= \frac{C_6^3}{C_{25}^3} = \frac{20}{2300} \approx 0{,}01.$

Ряд распределения СВ X имеет следующий вид:

X	0	1	2	3
P	0,42	0,45	0,12	0,01

Проверка: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 0{,}42 + 0{,}45 + 0{,}12 + 0{,}01 = 1.$

Функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0{,}42, & 0 < x \le 1, \\ 0{,}87, & 1 < x \le 2, \\ 0{,}99, & 2 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

График функции распределения F(x) представлен на рис. 2.

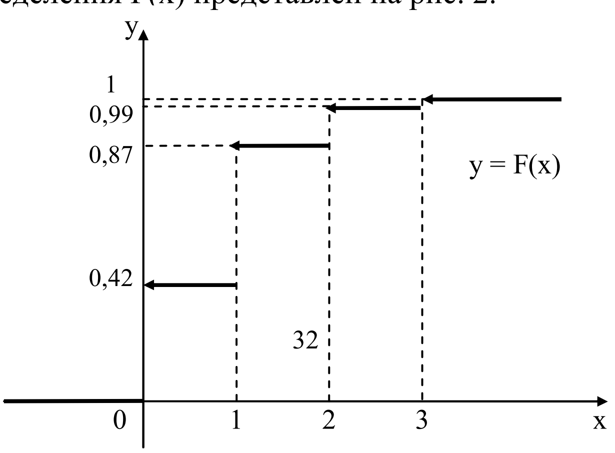


Рис. 2

Многоугольник распределения СВ X представлен на рис. 3.

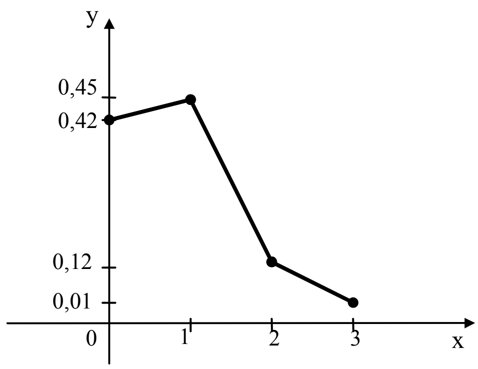


Рис. 3

2. Математическое ожидание и дисперсия случайной дискретной величины.
Математическое ожидание СВ X:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 0 \cdot 0,42 + 1 \cdot 0,45 + 2 \cdot 0,12 + 3 \cdot 0,01 = 0,72.$$

Дисперсия СВ X:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{4} (x_i - 0,72)^2 p_i = (0 - 0,72)^2 \cdot 0,42 + (1 - 0,72)^2 \cdot 0,45 +$$
$$+(2 - 0,72)^2 \cdot 0,12 + (3 - 0,72)^2 \cdot 0,01 = 0,5.$$

Задачи для самостоятельной работы
Задание. Для заданной СВ X записать ее ряд распределения, найти функцию распределения (и построить ее график), математическое ожидание, дисперсию. Построить многоугольник распределения.
В урне 3 черных и 7 белых шаров. Из урны пять раз наудачу извлекают шар (с возвращением перед каждым извлечением). Случайная величина X – число вынутых белых шаров.

1.7 Лабораторная работа № 15 (2 часа).
Тема: Модели и методы математической статистики
1.7.1 Цель работы: сформировать представление о моделях и методах математической статистики
1.7.2 Задачи работы: ознакомление с моделями и методами математической статистики.
1.7.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:
1. ПК.
2. Windows.
3. Office.

1.7.4 Описание (ход) работы: пример выполнения задания работы 2.7.

1. Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд.

Задание 1. ВСЭ 20 образцов продуктов выявила следующие данные об уровне опасности продуктов по 10-балльной шкале: 1,5,2,4,3,4,6,4,5,1,2,2,3,4,5,3,4,5,2,1.

Составьте сгруппированный ряд распределения опасных продуктов по баллам. Определите средний балл опасности продуктов, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение.

Решение**.** Построение сгруппированного ряда для дискретного признака: составим таблицу, в которой перечислим варианты и их частоты.

x_i^*	1	2	3	4	5	6
n_i	3	4	3	5	4	1

Для определения выборочных характеристик воспользуемся формулами приведёнными в § 9.5.

$$\bar{x} = \frac{1}{20}(1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 1) = 3{,}3.$$

$$D_B = \frac{1}{20}(1^2 \cdot 3 + 2^2 \cdot 4 + 3^2 \cdot 3 + 4^2 \cdot 5 + 5^2 \cdot 4 + 6^2 \cdot 1) - 3{,}3^2 = 2{,}21.$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{2{,}21} = 1{,}49.$$

Ответ: средний балл опасности продуктов равен 3,3 при среднем квадратическом отклонении 1,49.

2. Гистограмма, эмпирическая функция распределения, выборочная средняя и дисперсия.

Задание 2. Задана выборка: 2, 0, 2, 0, 3, 2, 1, 4, 3, 5, 3, 1, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 2, 1.

По заданной выборке:

а) составить вариационный ряд и статистический закон распределения;

б) построить полигон;

в) составить эмпирическую функцию распределения и построить ее график;

г) вычислить несмещенные оценки среднего значения m, дисперсии σ^2 и среднего квадратичного отклонения σ: $\bar{x}$, S^2, S;

д) найти доверительный интервал для среднего значения m с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}8$.

Решение: а) вариационный ряд: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Объем выборки n = 20.

Статистический закон распределения:

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	2	5	7	4	1	1
μ_i	$\frac{2}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$

где n_i – частота; μ_i – относительная частота; i = 1, 2, …, 6;

б) полигон частот выборки приведен на рис. 4.

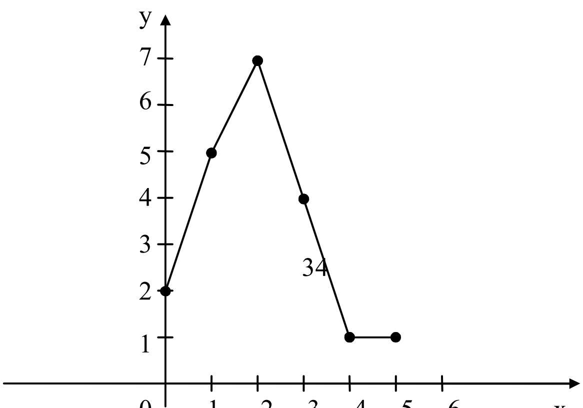


Рис. 4

Изображаем точки с координатами (x_i, n_i) и соединяем их отрезками;
в) эмпирическая функция распределения $F^*(x)$:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0{,}1, & 0 < x \le 1, \\ 0{,}35, & 1 < x \le 2, \\ 0{,}70, & 2 < x \le 3, \\ 0{,}9, & 3 < x \le 4, \\ 0{,}95, & 4 < x \le 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

При построении графика функции $F^*(x)$ откладываем значения в (0;1) (рис. 5);

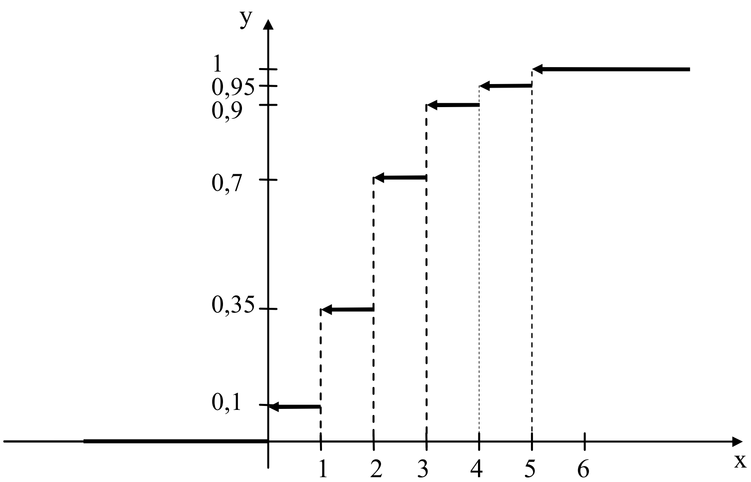


Рис. 5

г) выборочное среднее $\bar{x}$ вычисляем как среднее арифметическое всех выборочных значений

$$\bar{x} = \frac{1}{20}(0 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1) = 2.$$

Несмещенная выборочная дисперсия S^2 равна

$$S^2 = \frac{1}{20-1}((0-2)^2 \cdot 2 + (1-2)^2 \cdot 5 + (2-2)^2 \cdot 7 + (3-2)^2 \cdot 4 +$$

$$+ (4-2)^2 \cdot 1 + (5-2)^2 \cdot 1) = \frac{1}{19}(8 + 5 + 4 + 4 + 9) = 1{,}58.$$

Стандартное отклонение S равно $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{1{,}58} = 1{,}26$;

д) так как объем выборки n = 20, по таблице распределения Стьюдента найдем t_α, для $\alpha = 1 - \gamma = 0{,}2$ и $k = n - 1 = 19$, $t_\alpha = 1{,}33$.
Доверительный интервал для среднего m вычислим по формуле

$$\bar{x} - t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{x} + t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}};$$

$$2 - 1{,}33\frac{1{,}26}{\sqrt{20}} \le m \le 2 + 1{,}33\frac{1{,}26}{\sqrt{20}};$$

$1{,}63 \le m \le 2{,}37$.

Задачи для самостоятельной работы

Задание. По заданной выборке

а) составить вариационный ряд и статистический закон распределения;

б) построить полигон;

в) составить эмпирическую функцию распределения и построить ее график;

г) вычислить несмещенные оценки среднего значения m, дисперсии σ^2 и среднего квадратичного отклонения σ: $\bar{x}$, S^2, S;

д) найти доверительный интервал для среднего значения m с доверительной вероятностью γ.

52, 34, 49, 44, 45, 45, 37, 36, 46, 36; γ = 0,8.

3. Нахождение выборочного уравнения прямой линии регрессии Y на X по данным наблюдений:

Задача. Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X по данным n = 5 наблюдений:

x 1,00 1,50 3,00 4,50 5,00

y 1,25 1,40 1,50 1,75 2,25

Решение. Составим расчетную табл. 11. Найдем искомые параметры, для чего подставим вычисленные по таблице суммы в соотношения (***):

ρ_{xy} = (5·26,975— 15·8,15)/(5·57,5—15^2) ==0,202;

Ь= (57,5·8,15—15·26,975)/62,5= 1,024.

(Для простоты записи вместо условимся писать.

Таблица 11

x_i	y_i	x^2_i	x_iy_i
1,00	1,25	1,00	1,250
1,50	1,40	2,25	2,100
3,00	1,50	9,00	4,500
4,50	1,75	20,25	7,875
5,00	2.25	25,00	11,250
$\sum x_i = 15$	$\sum y_i = 8{,}15$	$\sum x_i^2 = 57{,}50$	$\sum x_i y_i = 26{,}975$

Напишем искомое уравнение регрессии:

Y = 0,202x + 1,024.

Для того чтобы получить представление, насколько хорошо вычисленные по этому уравнению значения Y_i согласуются с наблюдаемыми значениями y_i найдем отклонения Y_i—y_i. Результаты вычислений приведены в табл. 12.

Таблица 12

x_i	Y_i	y_i	$Y_i - y_i$
1,00	1,226	1,25	—0,024
1,50	1,327	1,40	—0,073

3,00	1,630	1,50	0,130
4,50	1,933	1,75	0,183
5,00	2,034	2,25	- 0,216

Как видно из таблицы, не все отклонения достаточно малы. Это объясняется малым числом наблюдений.

1.8 Лабораторная работа № 16 (2 часа).

Тема: «Компьютерные технологии в моделировании и математических методах»

1.8.1 Цель работы: сформировать представления о компьютерных технологиях в моделировании и математических методах.

1.8.2 Задачи работы: познакомиться с компьютерными технологиями в моделировании и математических методах.

1.8.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

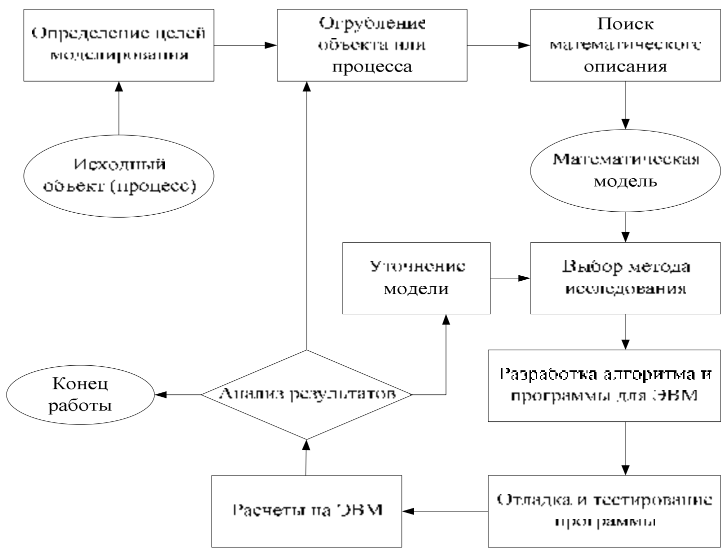
1. ПК.
2. Windows.
3. Office.

1.8.4 Описание (ход) работы: пример выполнения задания работы 2.8.

Основные теоретические сведения

1)Этапы, цели и средства компьютерного математического моделирования

Здесь мы рассмотрим процесс компьютерного математического моделирования, включающий численный эксперимент с моделью (рис. 6.1).



Общая схема процесса компьютерного математического моделирования

Первый этап - определение целей моделирования.

Основные из них таковы:

1) модель нужна для того, чтобы понять, как устроен конкретный объект, какова его структура, основные свойства, законы развития и взаимодействия с окружающим миром (понимание);

2) модель нужна для того, чтобы научиться управлять объектом (или процессом) и определить наилучшие способы управления при заданных целях и критериях (управление);

3) модель нужна для того, чтобы прогнозировать прямые и косвенные последствия реализации заданных способов и форм воздействия на объект (прогнозирование).

Выработка концепции управления объектом - другая возможная цель моделирования. Какой режим полета самолета выбрать для того, чтобы полет был вполне безопасным и экономически наиболее выгодным? Как составить график выполнения сотен видов работ на строительстве большого объекта, чтобы оно закончилось в максимально короткий срок? Множество таких проблем систематически возникает перед экономистами, конструкторами, учеными.

Наконец, *прогнозирование последствий* тех или иных воздействий на объект может быть как относительно простым делом в несложных физических системах, так и чрезвычайно сложным - на грани выполнимости - в системах биолого-экономических, социальных. Если относительно легко ответить на вопрос об изменении режима распространения тепла в тонком стержне при изменениях в составляющем его сплаве, то несравненно труднее проследить (предсказать) экологические и климатические последствия строительства крупной ГЭС или социальные последствия изменений налогового законодательства. Возможно, и здесь методы математического моделирования будут оказывать в будущем более значительную помощь.

Составим список величин, от которых зависит поведение объекта или ход процесса, а также тех величин, которые желательно получить в результате моделирования. Обозначим первые (входные) величины через $x_1, x_2, \ldots, x_n$; вторые (выходные) через $y_1, y_2, \ldots, y_k$.

Символически поведение объекта или процесса можно представить в виде: $y_j = Fj(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (j = 1, 2, \ldots, k)$,

где F - те действия, которые следует произвести над входными параметрами, чтобы получить результаты.

Входные параметры, могут быть известны "точно", т.е. поддаваться (в принципе) измерению однозначно и с любой степенью точности - тогда они являются детерминированными величинами. Так, в классической механике, сколь сложной ни была бы моделируемая система, входные параметры детерминированы - соответственно, детерминирован, однозначно развивается во времени процесс эволюции такой системы.

Однако в природе и обществе гораздо чаще встречаются процессы иного рода, когда значения входных параметров известны лишь с определенной степенью вероятности, т.е. эти параметры, являются вероятностными (стохастическими), и, соответственно, таким же является процесс эволюции системы (случайный процесс).

"Случайный" - не значит "непредсказуемый"; просто характер исследования, задаваемых вопросов резко меняется (они приобретают вид "С какой вероятностью...", "С каким математическим ожиданием..."и т.п.). Примеров случайных процессов не счесть как в науке, так и в обыденной жизни (силы, действующие на летящий самолет в ветреную погоду, переход улицы при большом потоке транспорта и т.д.).

Для стохастической модели выходные параметры могут быть как величинами вероятностными, так и однозначно определяемыми.

Важнейшим этапом моделирования является разделение входных параметров по степени важности влияния их изменений на выходные. Такой процесс называется ***ранжированием*** (разделением по рангам). Чаще всего невозможно (да и не нужно) учитывать все факторы, которые могут повлиять на значения интересующих нас величин y.

От того, насколько умело выделены важнейшие факторы, зависит успех моделирования, быстрота и эффективность достижения цели. Выделить более важные (или, как говорят, значимые) факторы и отсеять менее важные может лишь специалист в той предметной области, к которой относится модель.

Отбрасывание (по крайней мере при первом подходе) менее значимых факторов огрубляет объект моделирования и способствует пониманию его главных свойств и закономерностей. Умело ранжированная модель должна быть адекватна исходному объекту или процессу в отношении целей моделирования. Обычно определить, адекватна ли модель, можно только в процессе экспериментов с ней, анализа результатов.

Следующий этап - поиск математического описания. На этом этапе необходимо перейти от абстрактной формулировки модели к формулировке, имеющей конкретное математическое наполнение. В этот момент модель предстает перед нами в виде уравнения, системы уравнений, системы неравенств, дифференциального уравнения или системы таких уравнений и т.д.

Когда математическая модель сформулирована, выбирается ***метод ее исследования.*** Как правило, для решения одной и той же задачи есть несколько конкретных методов, различающихся эффективностью, устойчивостью и т.д. От верного выбора метода часто зависит успех всего процесса.

Разработка алгоритма и составление программы для ЭВМ - это творческий и трудноформализуемый процесс. В настоящее время при компьютерном математическом моделировании часто используются приемы процедурно-ориентированного (структурного) программирования.

При создании имитационной модели можно также воспользоваться возможностями одного из пакетов математической поддержки (MATHEMATICA, MathCad, MathLab и др).

В настоящее время существуют проблемно-ориентированные имитационные языки, в которых объединяются различные альтернативные подходы, и которые самой своей структурой определяют возможную схему действий разработчика модели. Характерным примером такого рода является имитационный язык СЛАМ II (SLAM - Simulating Language for Alternative Modeling имитационный язык для альтернативного моделирования).

После составления программы решаем с ее помощью простейшую *тестовую задачу* (желательно, с заранее известным ответом) с целью устранения грубых ошибок. Это - лишь начало процедуры тестирования, которую трудно описать формально исчерпывающим образом. По существу, тестирование может продолжаться долго и закончиться тогда, когда пользователь по своим профессиональным признакам сочтет программу верной.

Затем следует собственно численный эксперимент, и выясняется, соответствует ли модель реальному объекту (процессу). Модель адекватна реальному процессу, если некоторые характеристики процесса, полученные на ЭВМ, совпадают с экспериментальными с заданной степенью точности. В случае несоответствия модели реальному процессу возвращаемся к одному из предыдущих этапов.

2) Моделирования случайных процессов

Моделирование случайных процессов - мощнейшее направление в современном математическом моделировании.

Событие называется случайным, если оно достоверно непредсказуемо. Случайность окружает наш мир и чаще всего играет отрицательную роль в нашей жизни. Однако есть обстоятельства, в которых случайность может оказаться полезной. В сложных вычислениях, когда искомый результат зависит от результатов многих факторов, моделей и измерений, можно сократить объем вычислений за счет случайных значений значащих цифр.

При вероятностном моделировании используют различные методы, которые позволяют решать задачи из различных областей. Ниже перечислены сферы применения вероятностных методов.

Метод статистического моделирования: решение краевых задач математической физики, решение систем линейных алгебраических уравнений, обращение матриц и сводящиеся к ним сеточные методы решения систем дифференциальных уравнений, вычисление кратных интегралов, решение интегральных уравнений, задач ядерной физики, газовой динамики, фильтрации, теплотехники.

Метод имитационного моделирования: моделирование систем массового обслуживания, задачи АСУ, АСУП и АСУТП, задачи защиты информации, моделирование сложных игровых ситуаций и динамических систем.

Метод стохастической аппроксимации: рекуррентные алгоритмы решения задач статистического оценивания.

Метод случайного поиска: решение задач оптимизации систем, зависящих от большого числа параметров, нахождение экстремумов функции большого числа переменных.

Другие методы: вероятностные методы распознавания образов, модели адаптации, обучения и самообучения.

При компьютерном математическом моделировании случайных процессов нельзя обойтись без наборов так называемых случайных чисел, удовлетворяющих заданному закону распределения. На самом деле эти числа генерирует компьютер по определенному алгоритму, т.е. они не являются вполне случайными хотя бы потому, что при повторном запуске программы с теми же параметрами последовательность повторится; такие числа называют "псевдослучайными".

Для не слишком требовательного пользователя обычно достаточны возможности датчика (генератора) случайных чисел, встроенного в большинство языков программирования. Так, в языке Паскаль есть функция random, значения которой - случайные числа из диапазона [0, 1]. Ее использованию обычно предшествует использование процедуры randomize, служащей для начальной 'настройки" датчика, т.е. получения при каждом из обращений к датчику разных последовательностей случайных чисел. Для задач, Решение которых требует очень длинных некоррелированных последовательностей, вопрос осложняется и требует нестандартных

3) Особенности имитационного моделирования производственных систем

Для анализа производственных систем, которые очень сложны, разноплановы, не имеют исчерпывающего математического описания, а также проходят ряд этапов проектирования, реализации и развития, адекватные математические модели, будь то логические или числовые, построить не представляется возможным. Естественным здесь является использование методов имитационного моделирования.

Система может быть однозначно описана набором значений производственных параметров, характерных для каждого конкретного ее состояния. Если эти значения внести в компьютер, то изменения их в ходе вычислительного процесса можно интерпретировать как имитацию перехода системы из одного состояния в другое. При таких предположениях имитационное моделирование можно рассматривать как динамическое представление системы путем продвижения ее одного состояния к другому по характерным для нее операционным правилам.

При имитационном моделировании производственных систем изменения их состояния происходят в дискретные моменты времени. Основная концепция имитационного моделирования системы и в этом случае состоит в отображении изменений ее состояния с течением времени. Таким образом, здесь определяющим является выделение и однозначное описание состояний моделируемой системы.

Имитационные модели позволяют без использования каких-либо аналитических или других функциональных зависимостей отображать сложные объекты, состоящие из разнородных элементов, между которыми существуют разнообразные связи. В эти модели может быть включен также и человек.

Без принципиальных усложнений в такие модели могут быть включены как детерминированные, так и стохастические потоки (материальные и информационные). С помощью имитационного моделирования можно отображать взаимосвязи между рабочими местами, потоками материалов и изделий, транспортными средствами и персоналом.

Несмотря на такие очевидные преимущества, прежде всего заключающиеся в широте и универсальности применения, при этом методе из вида упускается существование логических связей, что исключает возможность полной оптимизации получаемых на этой модели решений. Гарантируется лишь возможность отбора лучшего из просмотренных вариантов.

Практически же имитационное моделирование во многих реальных случаях - единственно возможный способ исследования. После разработки имитационной модели с ней проводятся компьютерные эксперименты, которые позволяют сделать выводы о поведении производственной системы.

Появление и развитие методов компьютерного имитационного моделирования стало возможным также и в результате развития метода статистических испытаний, позволившего моделировать случайные события и процессы, занимающие большое место в реальных производствах

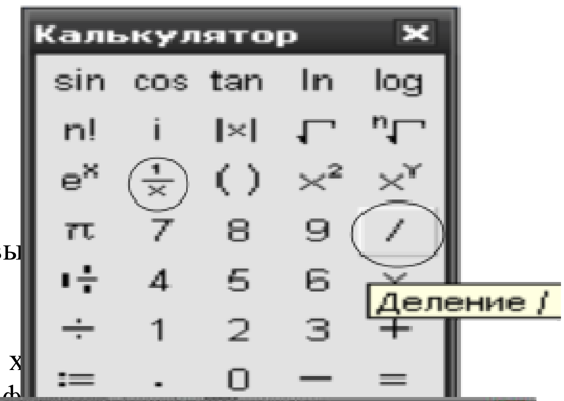
Моделирующие программы основаны на графических иллюстративных возможностях компьютера, с одной стороны, и вычислительных, с другой, и позволяют осуществлять *компьютерный* эксперимент. Такие программы предоставляют возможность наблюдать на экране дисплея некоторый процесс, влияя на его ход подачей команды с клавиатуры, меняющей значения параметров.

1.Исследование функций и построение графиков с MathCAD

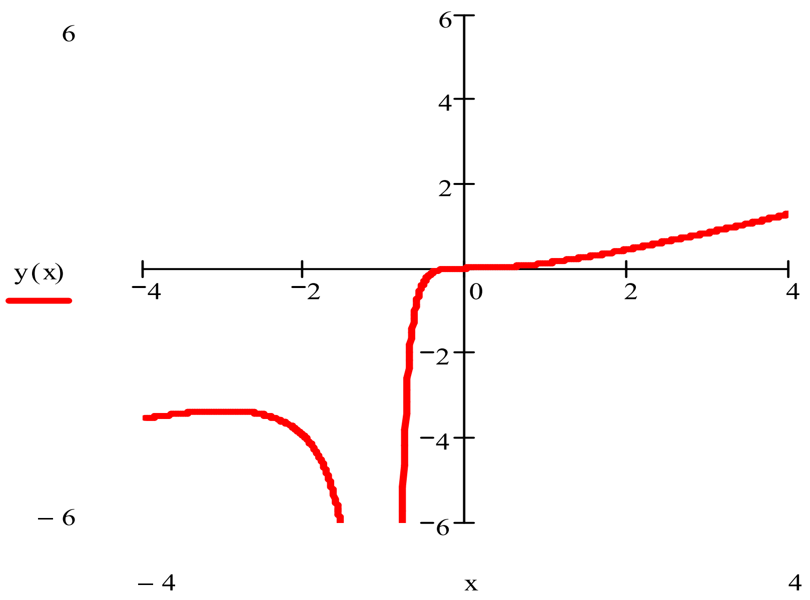
Задача. Исследовать функцию и построить её график: $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$

Решение. Область определения функции (-∞;-1)∩(-1;∞). Запишем функцию в стандартном для Mathcad виде, используя знак присваивания, который находится на панели инструментов «Калькулятор». Знак дроби и возведение аргумента в степень находятся на той же панели (можно пользоваться сочетаниями клавиш): $y(x) := \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$

У " Диаграмма" вы



В появившемся окне вводим значки аргумента х
мыши по чистому полю рабочего листа. Появится гра
вызовем окно с опцией форматирования графика (в

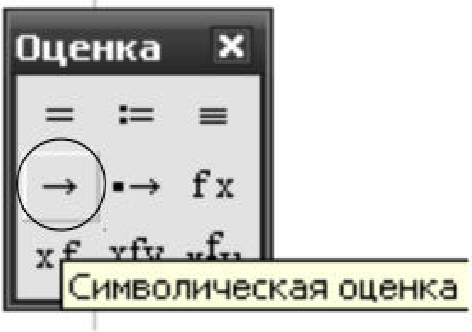


Вычислив односторонние пределы функции

$$\lim_{x \to -1^{+}} y(x) \to -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^{-}} y(x) \to -\infty$$

заключаем, что точка x=-1 является точкой разрыва второго рода, график функции имеет вертикальную асимптоту x=-1.



Операция вычисления предела с помощью шаблона завершается знаком символической оценки.

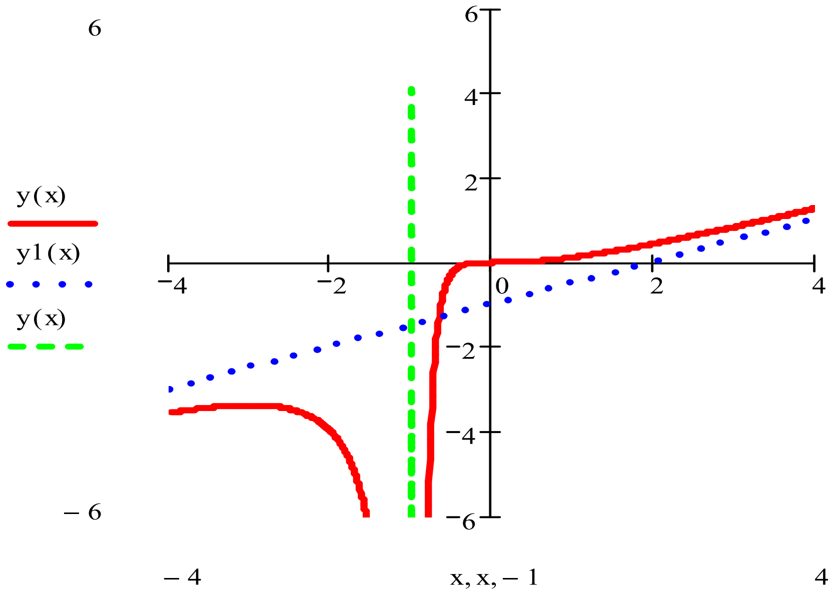
Наклонные асимптоты находится по формуле: **f(x)=k·x+b.** В Mathcad это будет выглядеть следующим образом: вычисляем двусторонние пределы с помощью шаблона «предел» и находим уравнение асимптоты

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{y(x)}{x} \to \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(y(x) - \frac{1}{2} \cdot x \right) \to -1$$

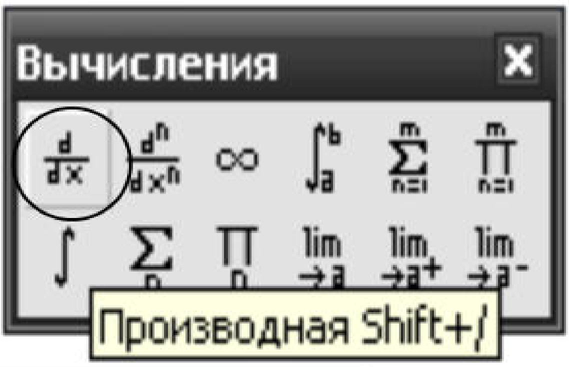
y=0. 5x-1

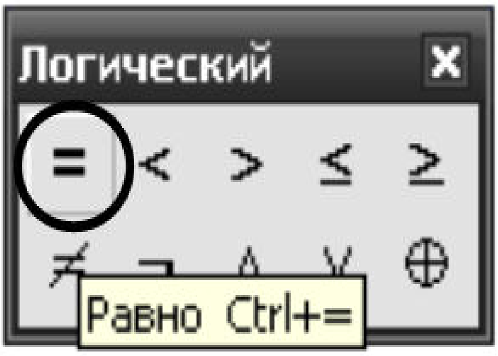
Для того чтобы на графике указать точку или еще одну линию нужно в окне графика в перечне функций указать знак новой функции через запятую после предыдущей . Если обозначение аргумента новой функции отличается от предыдущей, то такие операции повторить и с новым аргументом.



Чтобы найти критические точки функции найдем производную первого порядка. Знак шаблона производной находится на панели инструментов «вычисления»

$$\frac{d}{dx} y(x) \to \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{(x+1)^2} - \frac{x^3}{(x+1)^3}$$



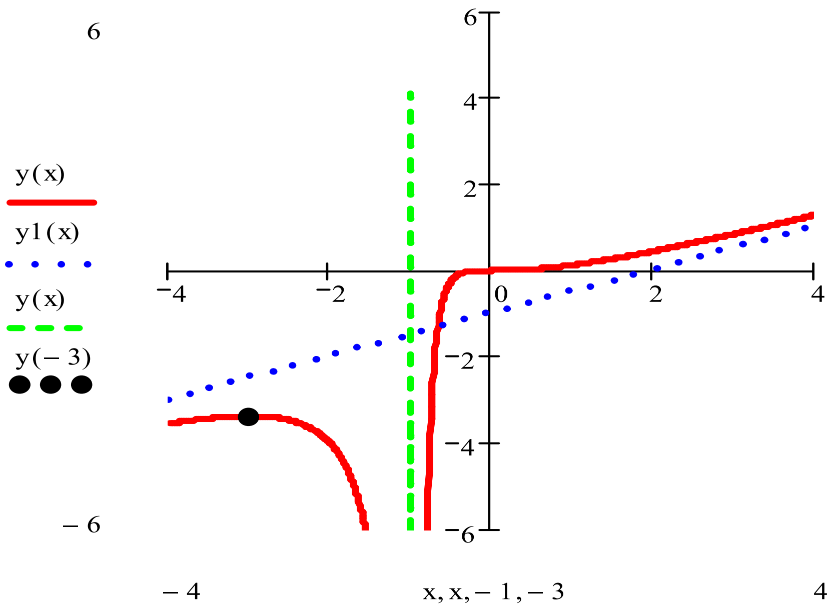


Далее приравниваем производную к нулю, чтобы найти критические точки. Вводим ключевое слово Given и производную нашей функции приравниваем к нулю с помощью логического знака равенства. Затем указываем функцию Mathcad Find(x) и знак символической оценки. Координаты полученных точек добавляем на график через запятую.

$$\textbf{Given}\ \frac{d}{dx}y(x) = 0 \qquad \textbf{Find}\,(x) \rightarrow (\,0 \quad 0 \quad -3\,)$$

$$y(-3) = -3.375$$

x=-3-точка максимума, $y(-3) = -3.375$ x=0 не является точкой экстремума.



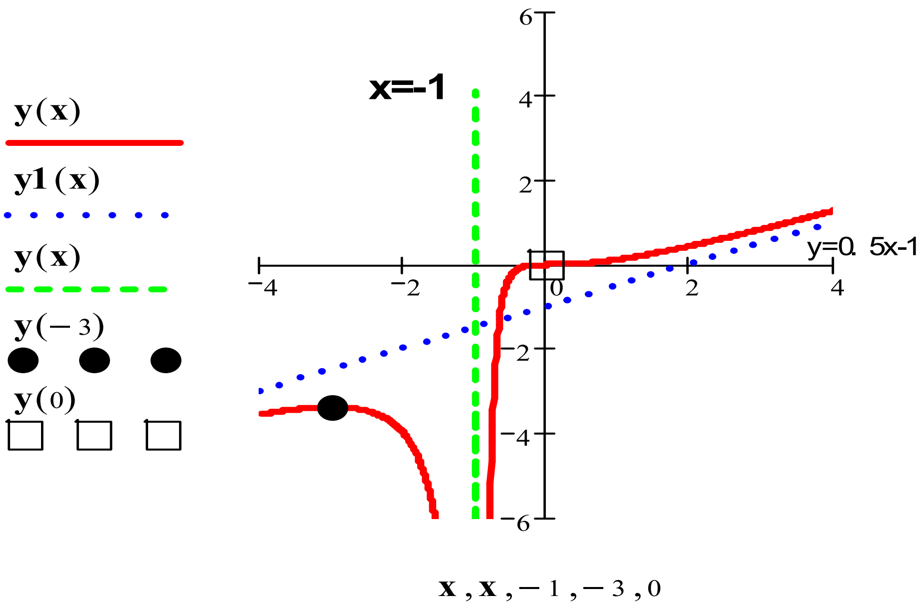
Находим производную второго порядка для определения промежутков выпуклости функции и точек перегиба, находим критические точки 2 рода.

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) \to 3\cdot\frac{x}{(x+1)^2} - 6\cdot\frac{x^2}{(x+1)^3} + 3\cdot\frac{x^3}{(x+1)^4}$$

$$\textbf{Given} \qquad \frac{d^2}{dx^2}y(x) = 0 \qquad \textbf{Find}\,(x) \to 0$$

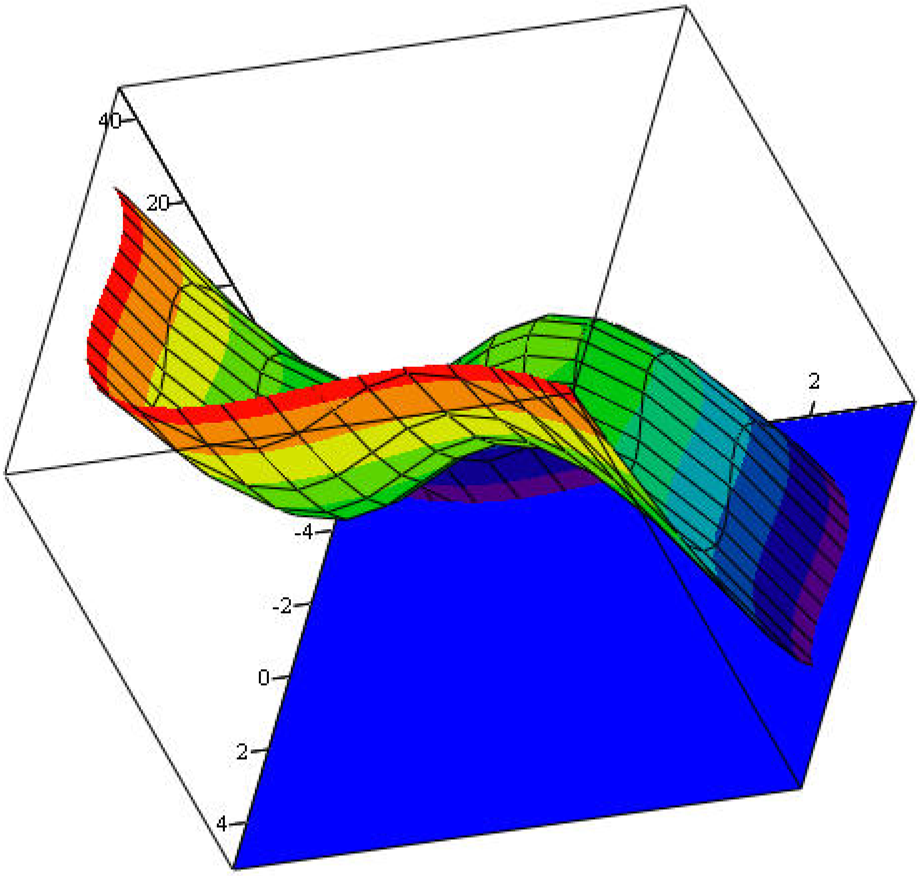
x=0-единственная точка перегиба, $y(0) = 0$ ■

В результате исследований получим следующий график.



Задача 2. Исследование функции двух переменных на экстремум с MathCAD/

$F(x,y) := x^3 - 3y^3 - 3x + 9y + 5$



F

Given

$$\frac{d}{dx}F(x,y) = 0$$

$$\frac{d}{dy}F(x,y) = 0$$

$$\text{Find}(x,y) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A(x,y) := \frac{d^2}{dx^2}F(x,y)$$

$$B(x,y) := \frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx}F(x,y)\right)$$

$$C(x,y) := \frac{d^2}{dy^2}F(x,y)$$

$$\Delta(x,y) := A(x,y)\cdot C(x,y) - B(x,y)^2$$

$$\Delta(1,1) = -108$$

В точке (1;1) экстремума нет

$$\Delta(-1,1) = 108$$

$$A(-1,1) = -6$$

$$F(-1,1) = 13$$

В точке (-1;1) max

$$\Delta(1,-1) = 108$$

$$A(1,-1) = 6$$

$$F(1,-1) = -3$$

В точке (1;-1) min

$\Delta(-1,-1) = -108$

В точке (-1;-1) экстремума нет

Задача 3. Нахождение эмпирической функции с MathCAD методом наименьших квадратов.

Пусть задана таблица экспериментальных значений из **задачи № 5**.

x	1	2	3	4	5
y	0.5	1	1.5	2	3

Процедура нахождения эмпирической функции в MathCAD методом наименьших квадратов предполагает использование функций MathCAD.

Нахождение эмпирической функции с MathCAD

Пусть задана таблица экспериментальных значений из **задачи № 5**.

x	1	2	3	4	5
y	0.5	1	1.5	2	3

Процедура нахождения эмпирической функции в MathCAD методом наименьших квадратов предполагает использование функций MathCAD.

$$m := \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1.5 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad m := \mathrm{csort}(m, 0)$$

$$X := m^{\langle 0 \rangle} \qquad Y := m^{\langle 1 \rangle}$$

$$n := 0 .. \mathrm{rows}(m) - 1$$

$$b := \mathrm{intercept}(X, Y) \qquad a := \mathrm{slope}(X, Y)$$

$$f(x) := b + a \cdot x \qquad b = -0.2 \qquad a = 0.6$$