ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ

ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.Б.02

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Направление подготовки: 36.04.01 Ветеринарно-санитарная экспертиза

Профиль подготовки: Ветеринарно-санитарная экспертиза

Квалификация: магистр

Форма обучения: заочная

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Лекции не предусмотрен РУП

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

2.1. Лабораторная работа № 1-3 (6 часов)**.** Понятие задачи математического программирования. Графическое решение задачи линейного программирования. Двойственные задачи линейного программирования. Симплекс- метод решения задачи линейного программирования. Модели (специальные задачи) линейного программирования: транспортная задача, задача о назначениях; задачи целочисленного программирования. Понятие о динамическом программировании.

2.1.1 Цель работы: сформировать представление о задачах математического и линейного программирования; графическом решении задачи линейного программирования; Двойственных задачах линейного программирования; симплекс- методе решения задачи линейного программирования; моделях (специальных задачах) линейного программирования: транспортных задачах, задачах о назначениях; задачах целочисленного программирования. Сформировать понятие о динамическом программировании.

2.1.2 Задачи работы: ознакомление с задачами математического и линейного программирования. Освоение графического метода задачи линейного программирования. Ознакомление с двойственными задачами линейного программирования; симплекс- методом решения задачи линейного программирования. Ознакомление с моделями (специальными задачами) линейного программирования: транспортными задачами, задачами о назначениях; задачами целочисленного программирования, с понятием о динамическом программировании.

2.1.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:
1. ПК.
2. Windows.
3.Office.

2.1.4 Описание (ход) работы: пример выполнения задания работы 2. 1.

1. Задача линейного программирования с двумя переменными. Задача о распределении ресурсов.

1) ***Задача.*** *С.\ х. предприятие производит и продаёт продукцию двух видов: «1 Продукт» и «2 Продукт». Для производства продукции используются ресурсы двух категорий: А и В. Расходы ресурсов А и В на производство единицы продукции каждого вида, запасы ресурсов и цены продукции приведены в таблице 1.*

Таблица 1

Ресурсы	*Расход ресурсов на ед. продукции*		*Запасы ресурсов*
	1 Продукт	*2 Продукт*	
А	*1*	*2*	*3*
В	*3*	*1*	*3*

Количество продукции	x_1	x_2	
Цены	*2(ден. ед.)*	*1(ден. ед.)*	

Выяснить, какое количество продукции каждого вида надо производить предприятию (составить план производства), чтобы получить максимум прибыли.

Задание.

1. *Составить математическую модель задачи.*

2. *Решить задачу в Excel.*

Решение. 1. Составить математическую модель задачи. Для составления математической модели задачи прежде всего ***введём переменные (неизвестные) задачи***: x_1 - количество продукции 1-го вида, а x_2 - количество продукции 2-го вида, производимые предприятием.

Ограниченность запасов ресурсов приводит ***к ограничениям на*** x_1 ***и*** x_2***:*** ограничения на расход ресурса А $x_1 + 2 \cdot x_2 \le 3$,

ограничения на расход ресурса В $3 \cdot x_1 + x_2 \le 3$.

Кроме того, $x_1, x_2 \ge 0$.

Качество решения задачи определяется с помощью ***целевой функции задачи*** $Z(x_1, x_2)$ - функции, определяющей доход предприятия от продажи продукции: $Z = 2 \cdot x_1 + x_2$.

Задача об определении плана производства продукции свелась к следующей математической задаче: *найти вектор* (x_1, x_2) *(план производства), координаты которого удовлетворяют системе ограничений*

$$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 \le 3 \\ 3 \cdot x_1 + x_2 \le 3 \end{cases}$$

и условиям неотрицательности $x_1, x_2 \ge 0$,

который доставляет максимум целевой функции $Z = 2 \cdot x_1 + x_2$.

Эту математическую задачу принято записывать в виде

$$Z = 2 \cdot x_1 + x_2 \to \max \qquad (1)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 \le 3 \\ 3 \cdot x_1 + x_2 \le 3 \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_1, x_2 \ge 0. \qquad (3)$$

и называть ***математической моделью*** данной производственной задачи.

Подобные задачи называются ***задачами линейного программирования***. Они изучаются в разделе математики, называемом ***математическим программированием***. Так как переменные x_1 и x_2 входят в систему ограничений (2) и целевую функцию Z (1) линейно, то эту задачу математического программирования называют ***задачей линейного программирования***.

Множество точек декартовой плоскости (x_1, x_2), координаты которых удовлетворяют системе ограничений (2) и условиям неотрицательности (3), называется областью допустимых решений задачи линейного программирования(областью допустимых планов). В данной задаче она представляет собой выпуклый четырёхугольник. Значения x_1^* и x_2^* из области допустимых планов, при которых Z принимает наибольшее значение в этой области, называются ***оптимальными(оптимальный план),*** а соответствующее наибольшее значение $Z^* = 2 \cdot x_1^* + x_2^*$ является **оптимальным значением прибыли**. Таким образом, задача о распределении ресурсов является задачей оптимизации и её математической моделью служит задача линейного программирования, заключающаяся в поиске оптимального плана и оптимального значения целевой функции.

Задачей оптимизации может быть поиск наименьшего значения.

2. Решение задачи в Excel.

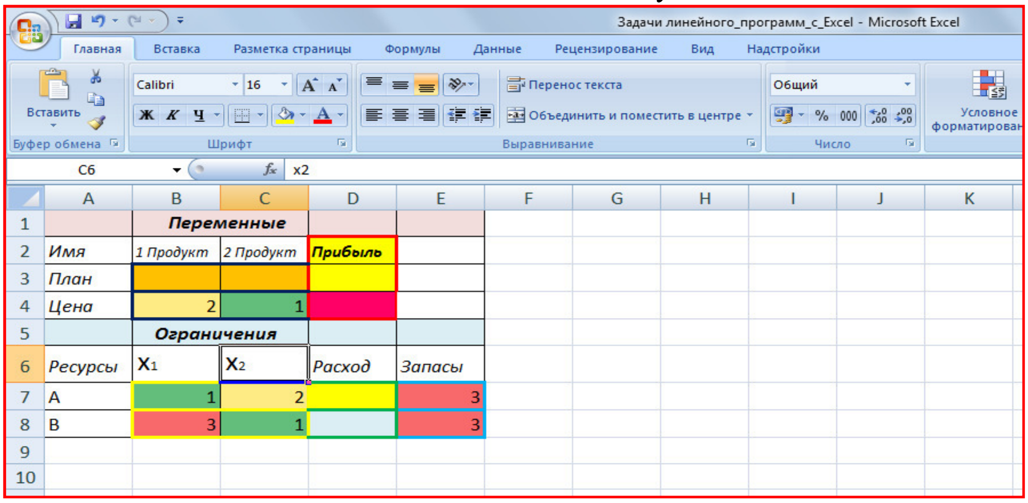
2.1. Ввод данных и формул в таблицу Excel. Открыть Книгу ***Excel,*** Лист1.

-Объединим ячейки B1 и C1. Для этого выделить ячейки, нажать правую кнопку мыши. В появившемся окне вызвать «Формат ячеек», затем «Выравнивание» и поставить галочку против опции «объединение ячеек», нажать ОК. В объединённые ячейки впишем заголовок «Переменные».

-В ячейку А2 вписать «Имя», в А3- «План», в ячейку А4 «Цена», в В2- «1 Продукт», в С2- «2 Продукт», в D2 « Прибыль».

-В ячейки В4 и С4 заносятся значения цен на продукцию.

-Для переменных x_1 и x_2 отводятся ячейки В3 и С3. Это изменяемые(рабочие) ячейки, В них исходные данные не заносятся и в результате решения задачи в эти ячейки будут вписаны оптимальные значения. Таблица данных будет иметь вид

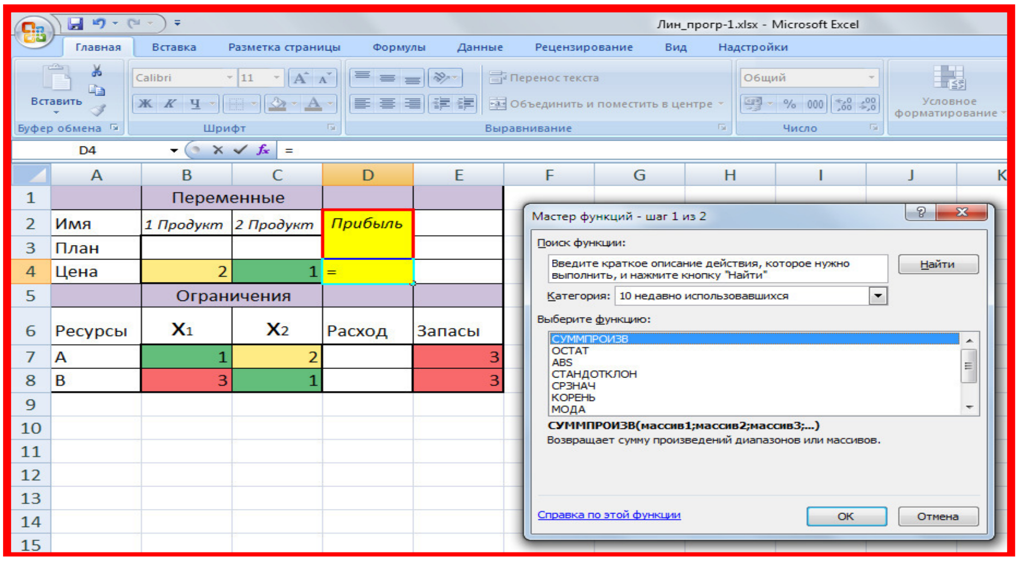


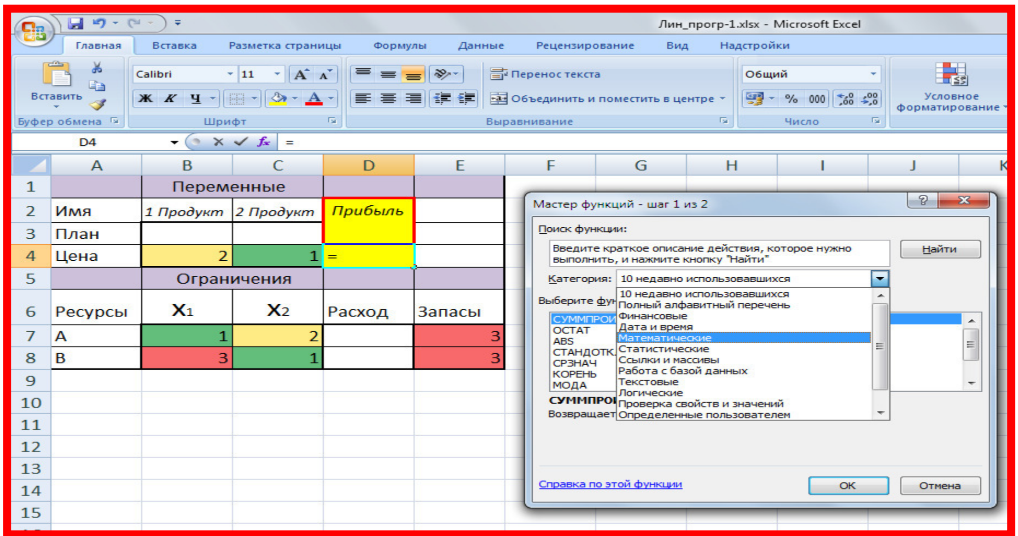
	A	B	C	D	E
1		Переменные			
2	Имя	1 Продукт	2 Продукт	Прибыль	
3	План				
4	Цена	2	1		
5		Ограничения			
6	Ресурсы	X1	X2	Расход	Запасы
7	A	1	2		3
8	B	3	1		3

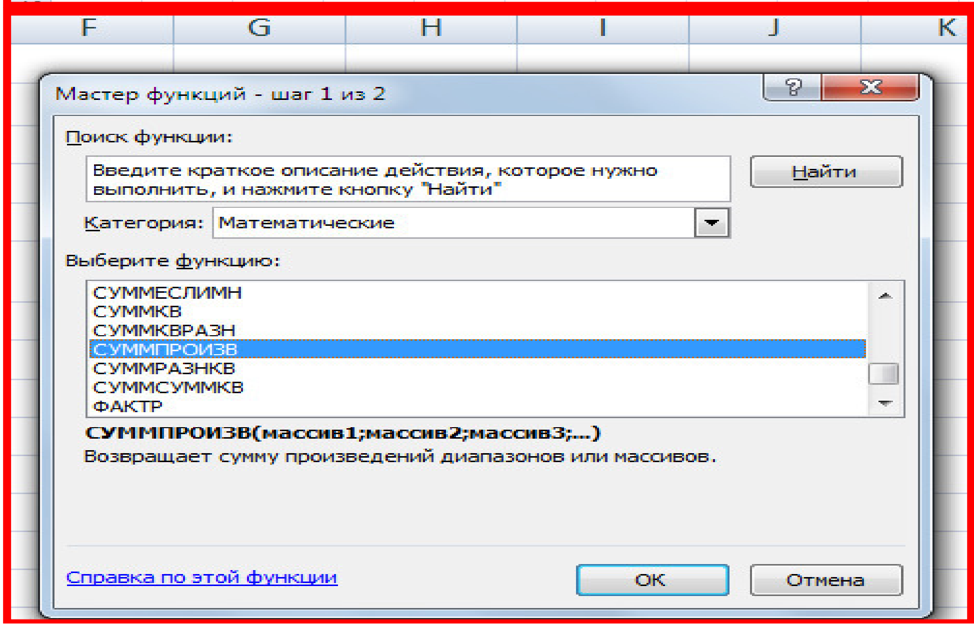
-В ячейке D4 после окончания решения задачи будет указана оптимальное значение прибыли(целевая ячейка). С этой целью в ячейку D4 вводится формула для вычисления значений целевой функции $Z = 2 \cdot x_1 + x_2$. Для этого надо выполнить следующие операции:

1) курсор в D4, выделить эту ячейку,

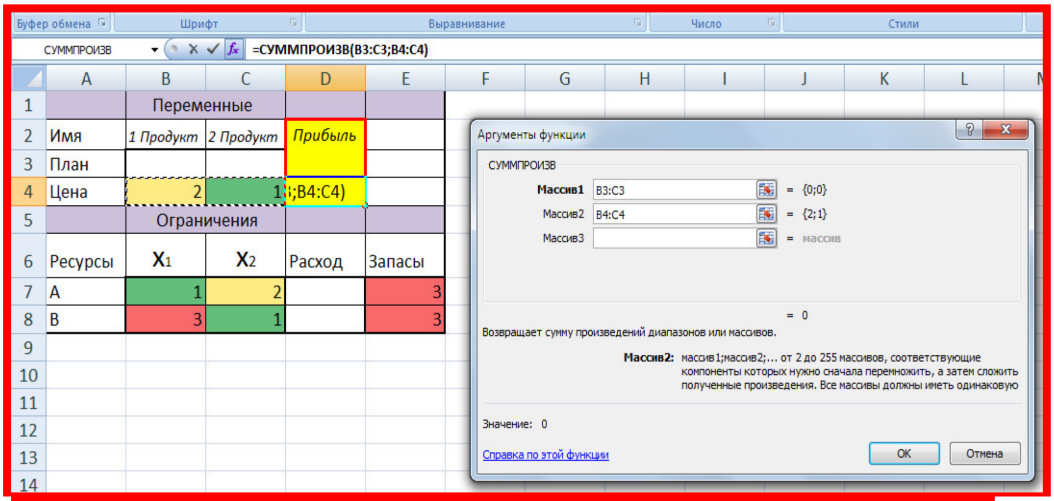
2) щёлкнув по кнопке f_x вызвать Мастера функций, в открывшемся окне в категории «10 недавно использовавшихся» выбрать «Математические», а затем «СУММПРОИЗВ», ОК.

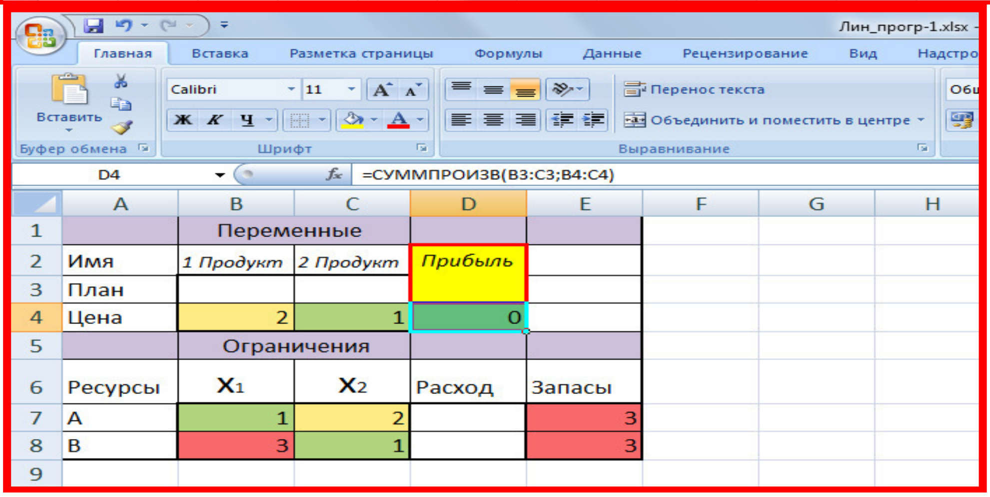






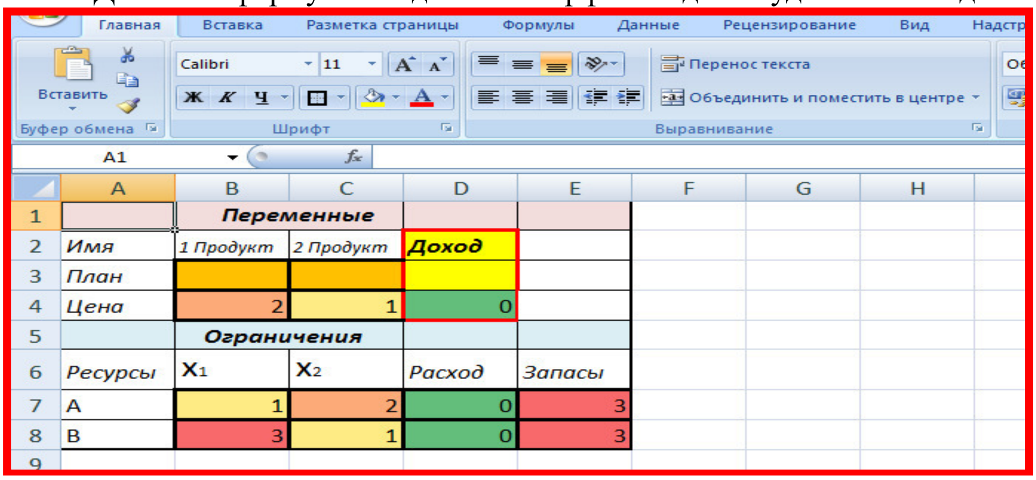
В появившемся окне «Аргументы функции» в поле «Массив 1» ввести адреса изменяемых ячеек B3:C3(протаскивая курсор мыши по ячейкам), в поле «Массив 2» вводятся адреса ячеек с ценами на продукцию B4:C4, «Массив 3» игнорируется. Нажать ОК. В ячейке D4 появится число 0.





-Объединить ячейки B5 и C5 и вписать «Ограничения», в A6- «Ресурсы», в B6 и C6 x_1 и x_2, в D6 «Расход», в E6 «Запасы», A7 и A8 значки ресурсов,
в поле B7:C8- нормы расхода ресурсов.
-В ячейку D7 вводится формула вычисления израсходованного ресурса А $x_1 + 2 \cdot x_2$, в ячейку D8- формула израсходованного ресурса В $3 \cdot x_1 + x_2$
(также, как и формула целевой функции).
- В ячейки E7 и E8 вносим размеры запасов ресурсов.

Данные и формулы введены. Интерфейс задачи будет иметь вид

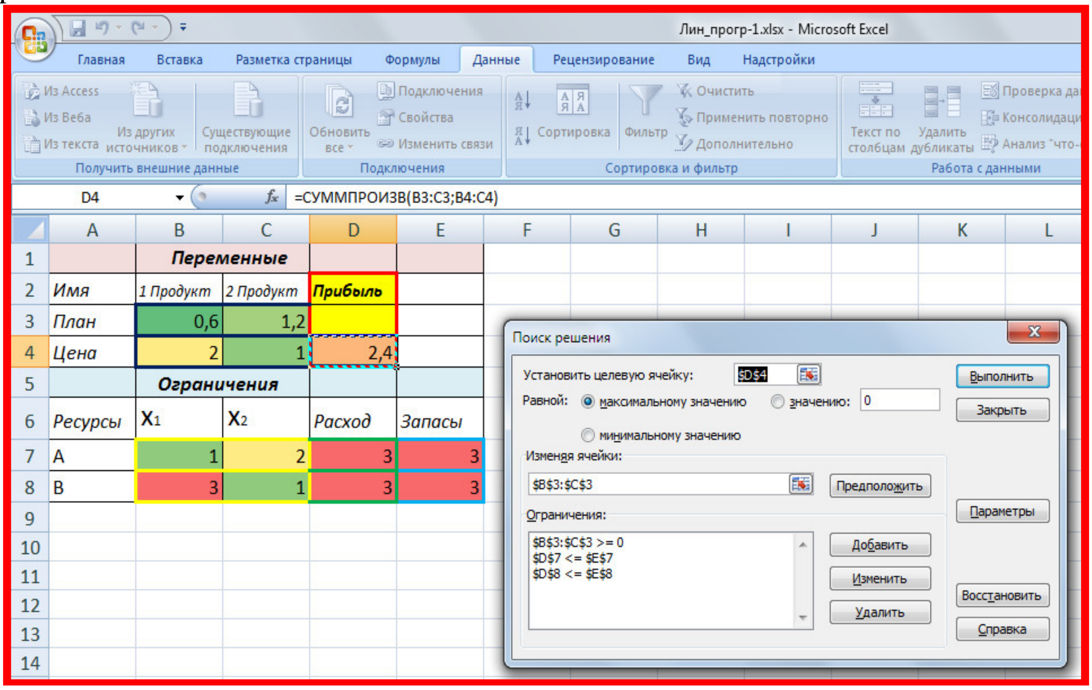


2.2. Использование надстройки Excel «Поиск решения».

Надстройка Excel *«Поиск решения»* при первом использовании должна быть предварительно активирована. Открыв Excel, нажать кнопки «Office» → «Параметры Excel»

→ «Надстройки» → «Неактивные надстройки приложений» → выделить строку *«Поиск решения»* → «Управление: надстройки Excel» → «перейти» → ОК.

Щёлкнув на ленте кнопку «Данные», затем «Поиск решений» откроем окно «Поиск решений».



-В поле «Установить целевую ячейку» ввести адрес целевой ячейки D4, щёлкнув по ней курсором мыши.

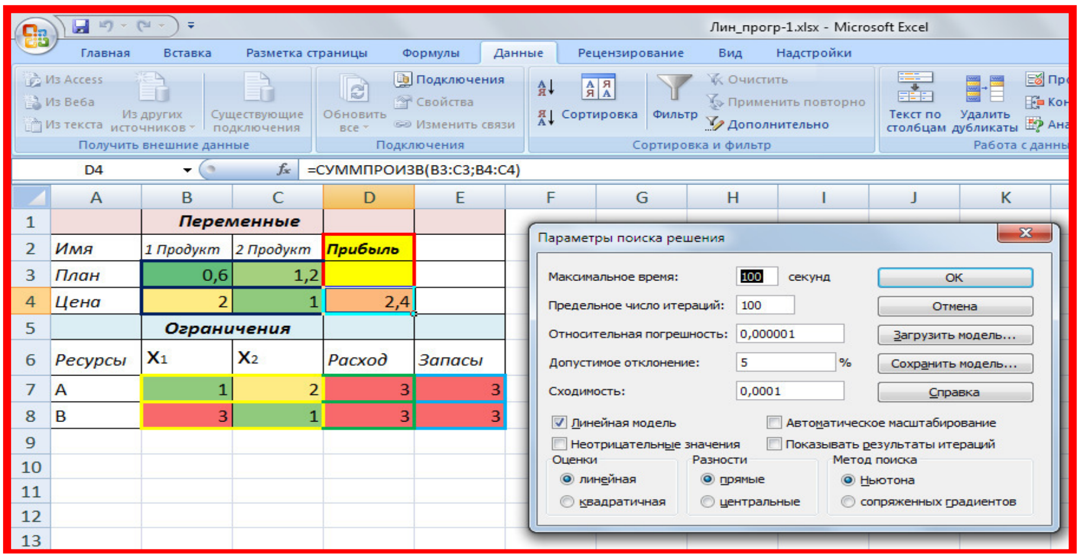
-Выбрать «равной максимальному значению».

-В поле «изменяя ячейки» указать адреса B3:C3.

-В поле «Ограничения» щёлкнуть «Добавить». После появления поля «Добавление ограничения» в поле «Ссылка на ячейку:» сделать ссылку на ячейку D7, выбрать знак <=, в поле «Ограничение:» ввести адрес ячейки с запасом ресурса А- Е7. Вновь выбрать «Добавить» провести ввод ограничения по ресурсу В, затем по ограничению $x_1, x_2 \geq 0$. После этого нажать ОК.

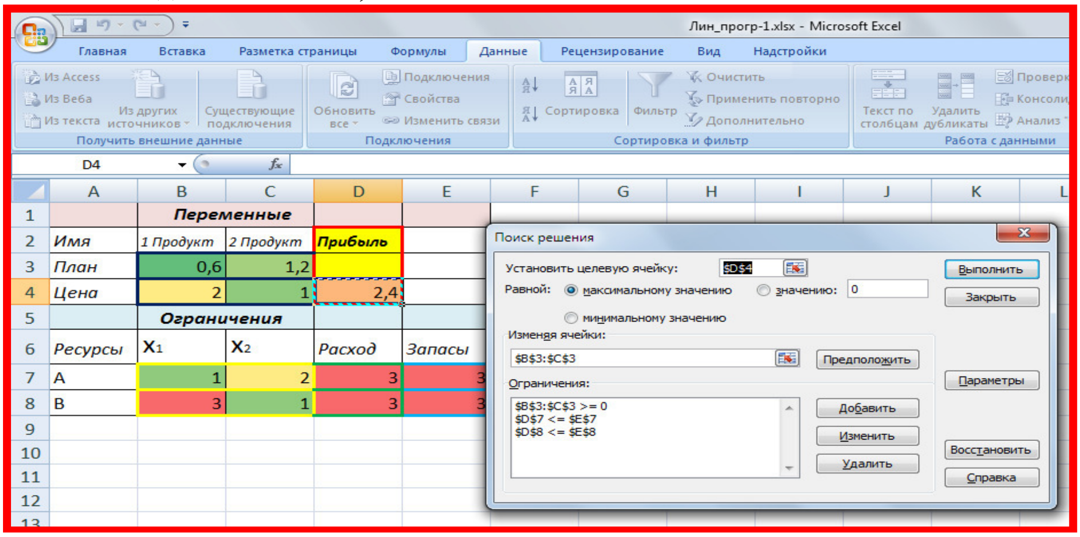
2.3. Настройка параметров решения задачи.

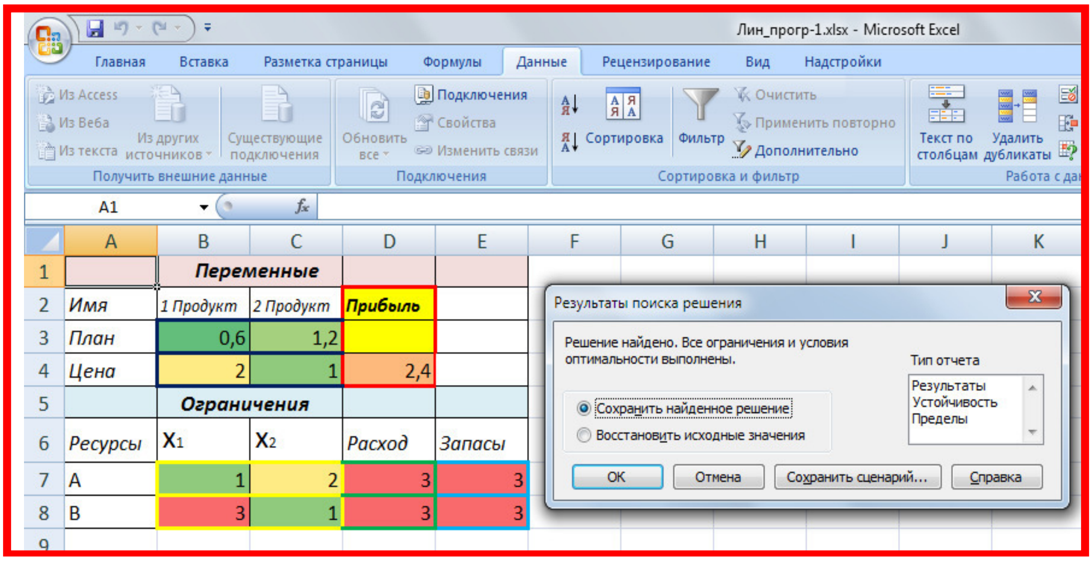
Выбрав в окне «Поиск решений» опцию «Параметры» в появившемся окне «Параметры поиска решения»установить флажок в поле «Линейная модель». При таком выборе при решении задачи будет использоваться симплекс-метод. Остальные значения можно оставить без изменения. Нажать ОК.



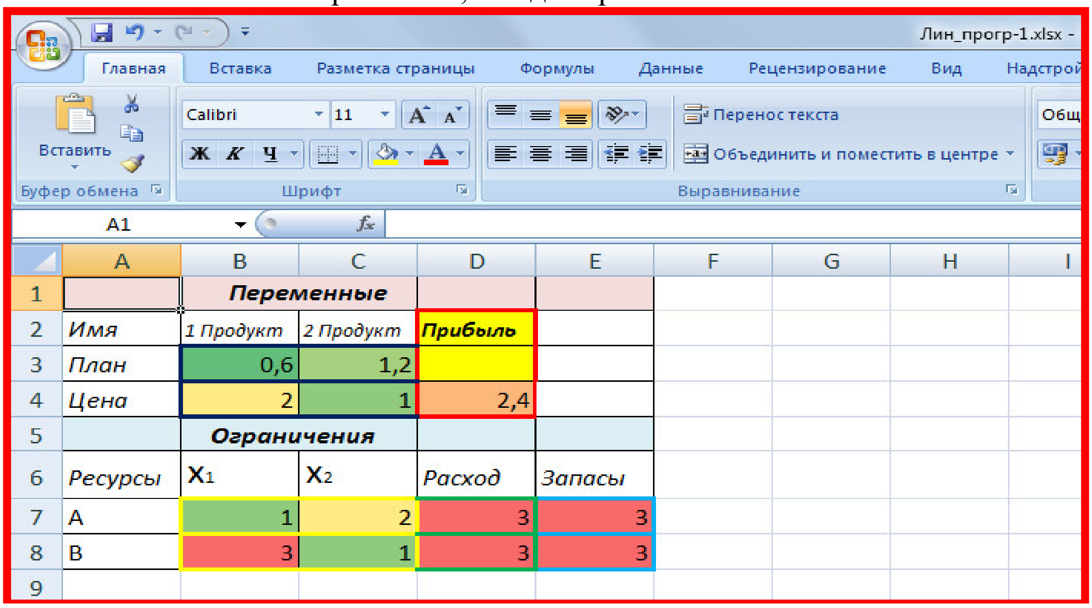
2.3. Завершение решения задачи и просмотр результатов.

В окне «Поиск решений» нажимаем кнопку «Выполнить». Появляется окно «Результаты поиска решения». Можно выбрать тип отчёта, сохранить найденное решение или восстановить исходные значения, ОК.





В ячейках B3 и C3 появятся оптимальные значения плана 0,6 и 1,2, а в ячейке D4 оптимальное значение прибыли 2,4. Задача решена.



2. Задача линейного программирования с тремя переменными. Задача о распределении ресурсов. ***Решения типовой задачи линейного программирования с помощью симплекс- метода в Excel: задача о выборе оптимального рациона кормления животных.***

Задача. Составляется комбинированный корм из трёх злаков: кукурузы, овса и ржи. Калорийность и содержание витамина С в одном килограмме каждого злака, а также цена одного кг каждого злака указаны в таблице:

	Кукуруза	Овёс	Рожь
Калорийность(ккал)	200	175	100
Содержание С (в Гр)	5	1	3
Цена (руб.)	6	4	1

Составить наиболее дешёвый комбинированный корм, 1кг которого содержал бы не менее 125 ккал и не менее 2г витамина С.

Решение.

1. Составление математической модели задачи. Обозначим содержание кукурузы, овса и ржи в 1кг комбикорма через x_1, x_2, x_3 соответственно, а стоимость злаков в комбикорме Z. Тогда математическая модель задачи об оптимизации производства комбикорма формулируется следующим образом: найти вектор $x=\left(x_1;x_2;x_3\right)$(называемый планом), доставляющий минимум целевой функции задачи (функции затрат)

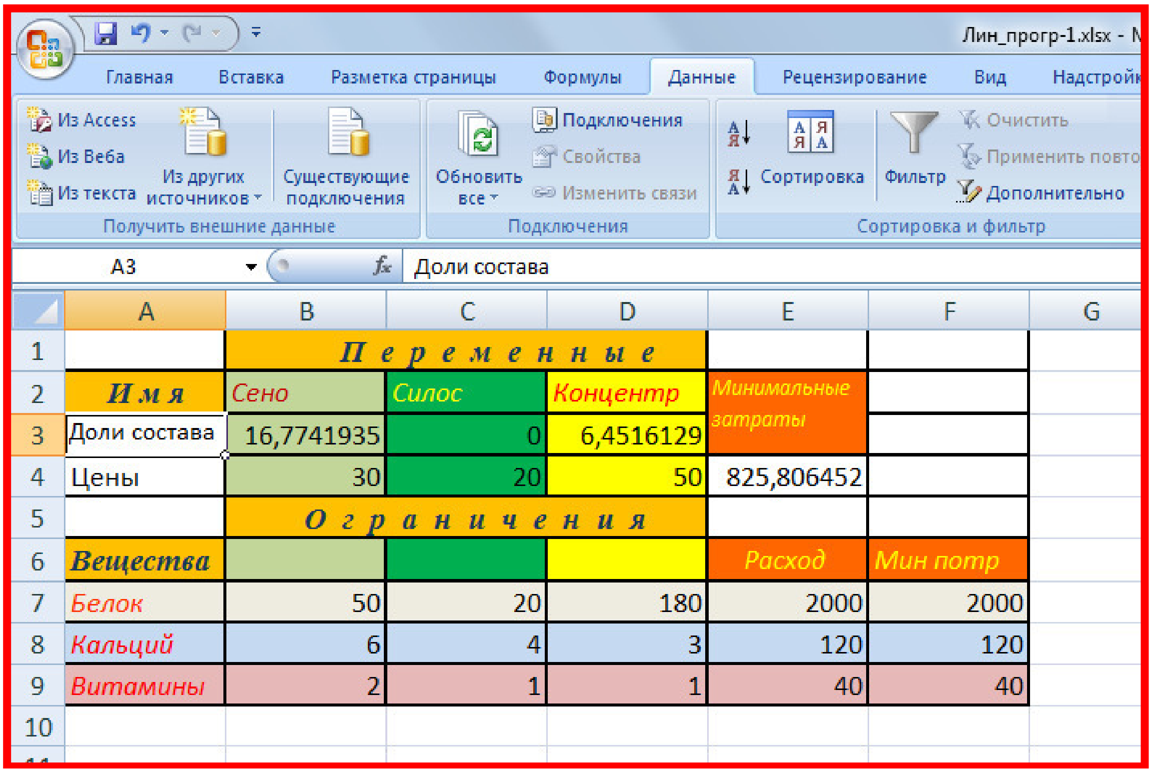
$$Z=6\cdot x_1+4\cdot x_2+x_3\to \min,$$

координаты которого x_1, x_2, x_3 удовлетворяют системе ограничений

$$\begin{cases} 200\cdot x_1+175\cdot x_2+100\cdot x_3\geq 125, \\ 5\cdot x_1+x_2+3\cdot x_3\geq 2, \\ x_1+x_2+x_3=1, \end{cases}$$

$$x_1\geq 0.\ x_2\geq 0.\ x_3\geq 0.$$

2. Решение задачи в Excel.



	A	B	C	D	E	F
1		П е р е м е н н ы е				
2	И м я	Сено	Силос	Концентр	Минимальные затраты	
3	Доли состава	16,7741935	0	6,4516129		
4	Цены	30	20	50	825,806452	
5		О г р а н и ч е н и я				
6	Вещества				Расход	Мин потр
7	Белок	50	20	180	2000	2000
8	Кальций	6	4	3	120	120
9	Витамины	2	1	1	40	40

3. Специальные задачи линейного программирования: транспортные задачи. *Решение транспортных задач с Excel.*

Задача об оптимизации перевозок. Четыре отделения сельхозпредприятия B_1, B_2, B_3, B_4 закупают корма у трёх поставщиков A_1, A_2, A_3. Запасы кормов у поставщиков, потребности сельхозпредприятия в кормах и стоимость перевозки единицы продукта от поставщика к потребителю даны в таблице.

Потребители / *Поставщики*	*Потребители*				*Запасы кормов у поставщиков*
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	10 x_{11}	0 x_{12}	20 x_{13}	11 x_{14}	$a_1 =$ ***15***
A_2	12 x_{21}	7 x_{22}	9 x_{23}	20 x_{24}	$a_2 =$ ***25***
A_3	0 x_{31}	14 x_{32}	16 x_{33}	18 x_{34}	$a_3 =$ ***5***
	$b_1 =$ ***5***	$b_2 =$ ***15***	$b_3 =$ ***15***	$b_4 =$ ***10***	***45***
	Потребность в кормах				

Значительную часть расходов с /х предприятия составляют именно транспортные расходы. Минимизировать расходы предприятия: составить такой план перевозок, при котором суммарные транспортные расходы будут минимальными, все запасы поставщиков будут вывезены, все потребности отделений с.\ х. предприятия будут удовлетворены.

1. Математическая модель задачи. Обозначим через x_{ij} количество кормов, перевозимое от поставщика A_i к потребителю B_j, c_{ij} - стоимость перевозок по этому маршруту, $i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3, 4$.

Целевая функция: транспортные расходы на перевозку кормов вычисляются по формуле

$$Z=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}\cdot x_{ij}=10\cdot x_{11}+0\cdot x_{12}+20\cdot x_{13}+11\cdot x_{14}+$$

$$+12\cdot x_{21}+7\cdot x_{22}+9\cdot x_{23}+20\cdot x_{24}+$$

$$+0\cdot x_{31}+14\cdot x_{32}+16\cdot x_{33}+18\cdot x_{34}\ \rightarrow \min.$$

Ограничения на переменные задачи.

Ограничения вывоза: из A_1 $x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=15$,

из A_2 $x_{21}+x_{22}+x_{13}+x_{14}=25$,

из A_3 $x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=5$.

Ограничения ввоза: *ввоз в* B_1 $x_{11}+x_{21}+x_{31}=5$,

ввоз в B_2 $x_{12}+x_{22}+x_{32}=15$,

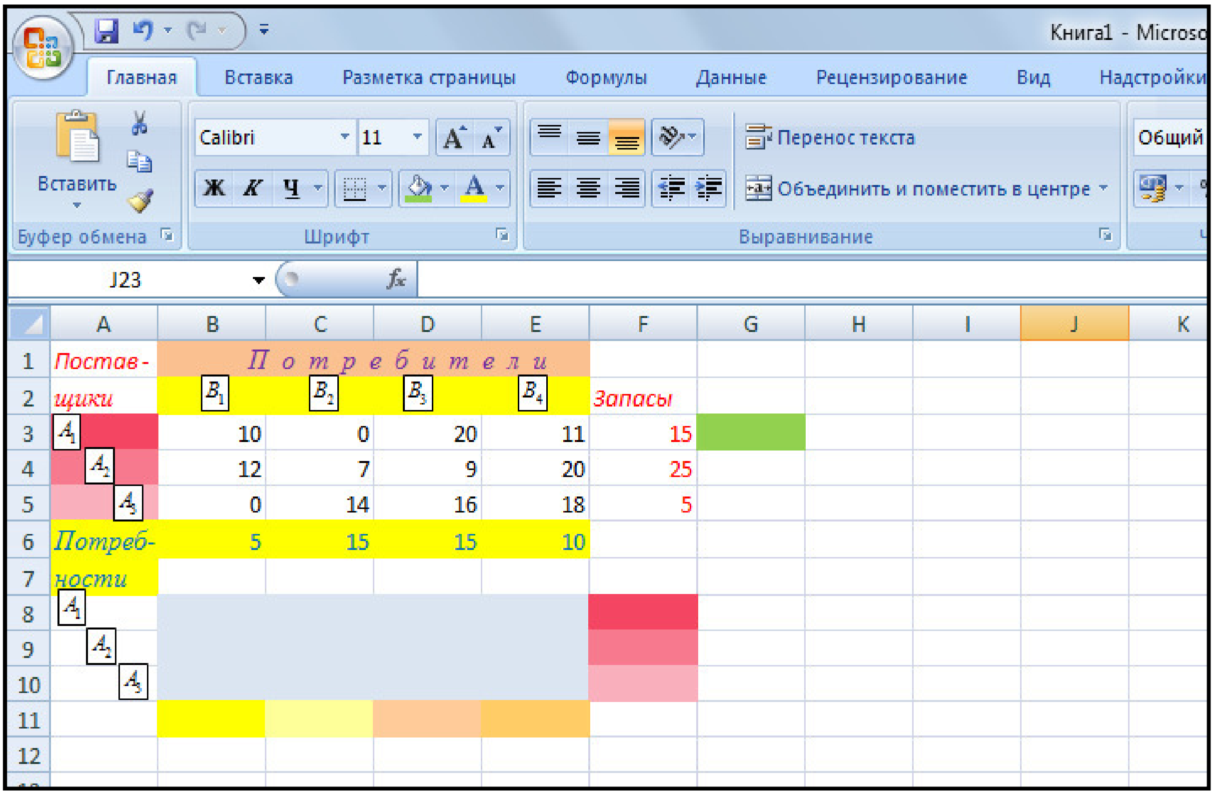
ввоз в B_3 $x_{13}+x_{23}+x_{33}=15$,

ввоз в B_4 $x_{14}+x_{24}+x_{34}=10$.

Ограничения на знаки(значения) переменных: $x_{ij}\geq 0$.

Задача закрытого типа : $a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3+b_4=45$.

2. Решение задачи в Excel.



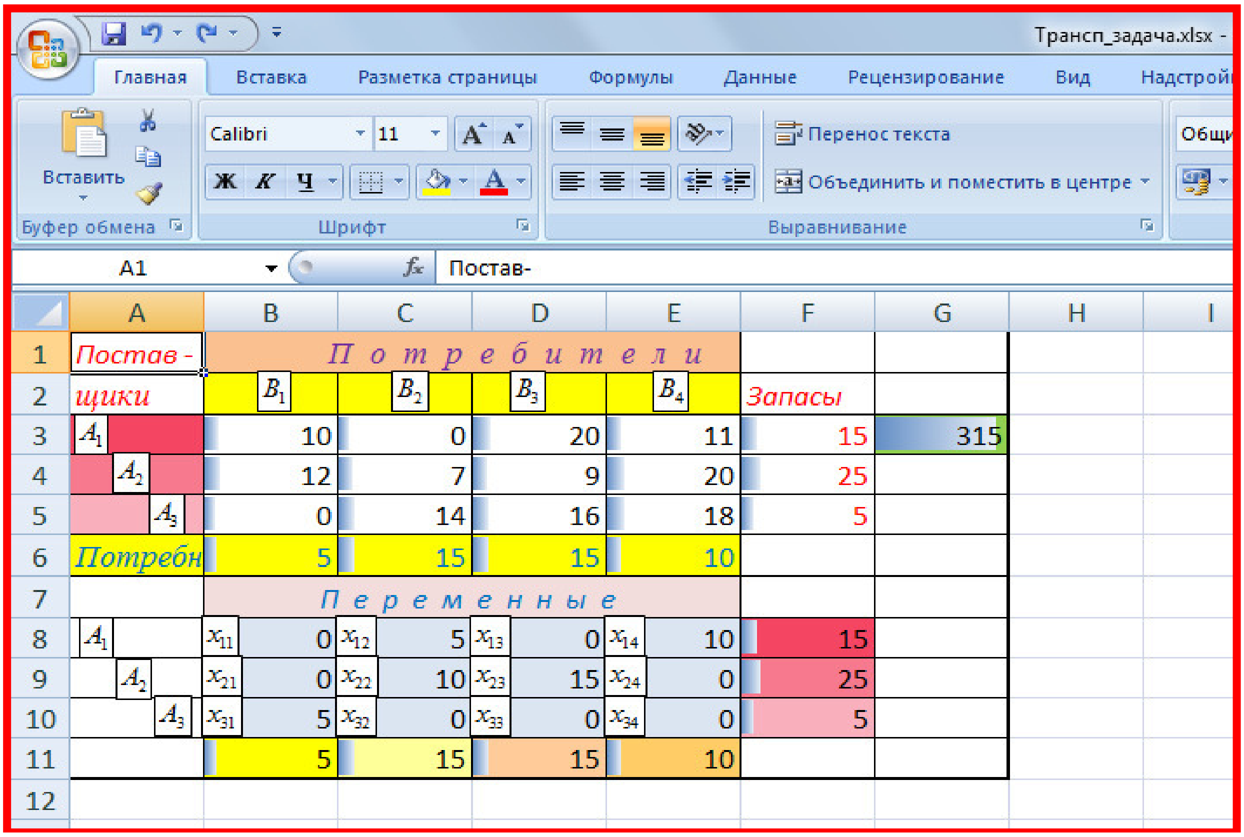
	A	B	C	D	E	F	G
1	*Постав-*	*Потребители*					
2	*щики*	B_1	B_2	B_3	B_4	*Запасы*	
3	A_1	10	0	20	11	15	
4	A_2	12	7	9	20	25	
5	A_3	0	14	16	18	5	
6	*Потреб-*	5	15	15	10		
7	*ности*						
8	A_1						
9	A_2						
10	A_3						
11							
12							

J23 | f_x

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Постав-	*П о т р е б и т е л и*						
2	щики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы		
3	A_1	10	0	20	11	15		
4	A_2	12	7	9	20	25		
5	A_3	0	14	16	18	5		
6	*Потреб-*	5	15	15	10			
7	*ности*							
8	A_1							
9	A_2							
10	A_3							
11								
12								

G3 | f_x | =СУММПРОИЗВ(B3:E5;B8:E10)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Постав-	*П о т р е б и т е л и*						
2	щики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы		
3	A_1	10	0	20	11	15	315	
4	A_2	12	7	9	20	25		
5	A_3	0	14	16	18	5		
6	*Потребн*	5	15	15	10			
7		П е р е м е н н ы е						
8	A_1	x_{11} 0	x_{12} 5	x_{13} 0	x_{14} 10	15		
9	A_2	x_{21} 0	x_{22} 10	x_{23} 15	x_{24} 0	25		
10	A_3	x_{31} 5	x_{32} 0	x_{33} 0	x_{34} 0	5		
11		5	15	15	10			
12								
13								



4. Специальные задачи линейного программирования: задачи о назначениях. ***Решение задач о назначениях с Excel.***

Задача о назначениях. Производится классификация 7 болезней животных (птицы) по 5 категориям. Результаты тестирования каждого заболевания уровень опасности заболевания) по каждой категории выражены в баллах по 10-балльной шкале и представлены матрицей

$C =$

*	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
S_1	7	5	7	6	7
S_2	6	4	8	4	9
S_3	8	6	4	3	8
S_4	7	7	8	5	7
S_5	5	9	7	9	5
S_6	6	8	6	4	7
S_7	7	7	8	6	4

Определить самые опасные заболевания в каждой из 5 категорий так, чтобы сумма баллов выбранных заболеваний была наибольшей (суммарный уровень опасности выбранных заболеваний был наибольшим). Каждое заболевание может быть самым опасным только в одной категории и все категории должны быть заняты.

Решение.

1. Математическая модель задачи. Обозначим через x_{ij} переменные задачи:

$x_{ij} = 1$, если заболевание S_i выбирается самым опасным в категории P_j;

$x_{ij} = 0$, если заболевание S_i не является самым опасным в категории P_j;

c_{ij} - уровень опасности заболевания S_i (количество баллов по результатам тестирования) в категории P_j,

$i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;\ j = 1, 2, 3, 4, 5$.

Целевая функция: суммарный уровень опасности всех заболеваний в баллах вычисляется по формуле

$$Z = \sum_{i=1}^{7} \sum_{j=1}^{5} c_{ij} \cdot x_{ij} = 7 \cdot x_{11} + 5 \cdot x_{12} + 7 \cdot x_{13} + 6 \cdot x_{14} + 7 \cdot x_{15} +$$

$$+ 6 \cdot x_{21} + 4 \cdot x_{22} + 8 \cdot x_{23} + 4 \cdot x_{24} + 9 \cdot x_{25} +$$

$$+ 8 \cdot x_{31} + 6 \cdot x_{32} + 4 \cdot x_{33} + 3 \cdot x_{34} + 8 \cdot x_{35} +$$

$$+ 7 \cdot x_{41} + 7 \cdot x_{42} + 8 \cdot x_{43} + 5 \cdot x_{44} + 7 \cdot x_{45} +$$

$$+ 5 \cdot x_{51} + 9 \cdot x_{52} + 7 \cdot x_{53} + 9 \cdot x_{54} + 5 \cdot x_{55} +$$

$$+ 6 \cdot x_{61} + 8 \cdot x_{62} + 6 \cdot x_{63} + 4 \cdot x_{64} + 7 \cdot x_{65} +$$

$$+ 7 \cdot x_{71} + 7 \cdot x_{72} + 8 \cdot x_{73} + 6 \cdot x_{74} + 4 \cdot x_{75} \to \max.$$

Ограничения на переменные задачи.

Ограничения на лидерство одного заболевания: каждое заболевание может быть самым опасным только в одной категории

для S_1 $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1$,

для S_2 $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1$,

для S_3 $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 1$,

для S_4 $x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 1$,

для S_5 $x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} = 1$,

для S_6 $x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} + x_{65} = 1$,

для S_7 $x_{71} + x_{72} + x_{73} + x_{74} + x_{75} = 1$.

Ограничения по занятости категорий: в каждой категории может быть только один лидер

для P_1 $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} + x_{71} = 1$,

для P_2 $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} + x_{71} = 1$,

для P_3 $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 15$,

для P_4 $x_{14} + x_{24} + x_{34} = 10$,

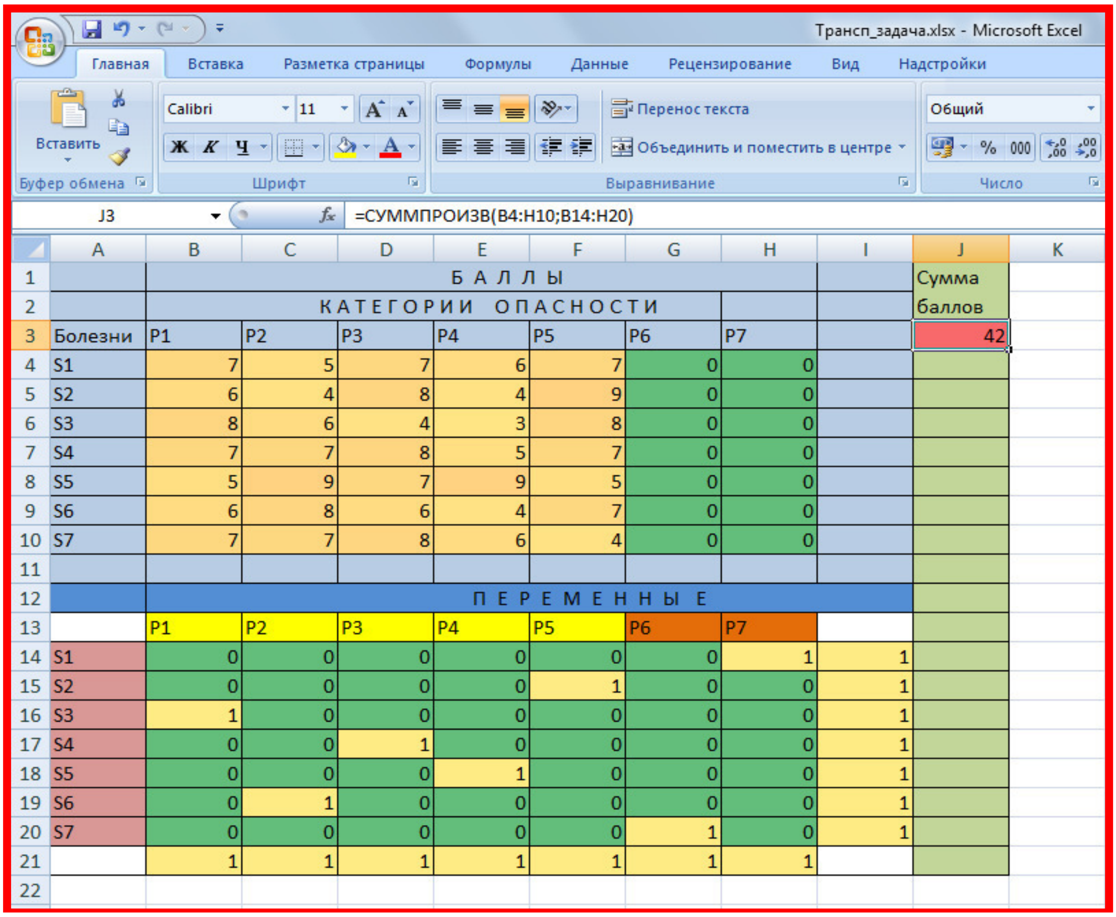
для P_2 $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} + x_{71} = 1$,

Ограничения на знаки (значения) переменных: $x_{ij} \geq 0$, x_{ij} - двоичные числа.

Задача открытого типа: вводятся две фиктивные категории с нулевыми столбцами баллов. Матрица C^* становится квадратной.

$$C^* = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c||c|c|}
\hline
* & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 \\ \hline
S_1 & 7 & 5 & 7 & 6 & 7 & 0 & 0 \\ \hline
S_2 & 6 & 4 & 8 & 4 & 9 & 0 & 0 \\ \hline
S_3 & 8 & 6 & 4 & 3 & 8 & 0 & 0 \\ \hline
S_4 & 7 & 7 & 8 & 5 & 7 & 0 & 0 \\ \hline
S_5 & 5 & 9 & 7 & 9 & 5 & 0 & 0 \\ \hline
S_6 & 6 & 8 & 6 & 4 & 7 & 0 & 0 \\ \hline
S_7 & 7 & 7 & 8 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ \hline
\end{array}$$

2. Решение задачи в Excel.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		Б А Л Л Ы								Сумма
2		К А Т Е Г О Р И И О П А С Н О С Т И								баллов
3	Болезни	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7		42
4	S1	7	5	7	6	7	0	0		
5	S2	6	4	8	4	9	0	0		
6	S3	8	6	4	3	8	0	0		
7	S4	7	7	8	5	7	0	0		
8	S5	5	9	7	9	5	0	0		
9	S6	6	8	6	4	7	0	0		
10	S7	7	7	8	6	4	0	0		
11										
12		П Е Р Е М Е Н Н Ы Е								
13		P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7		
14	S1	0	0	0	0	0	0	1	1	
15	S2	0	0	0	0	1	0	0	1	
16	S3	1	0	0	0	0	0	0	1	
17	S4	0	0	1	0	0	0	0	1	
18	S5	0	0	0	1	0	0	0	1	
19	S6	0	1	0	0	0	0	0	1	
20	S7	0	0	0	0	0	1	0	1	
21		1	1	1	1	1	1	1		
22										

2.2 Лабораторная работа № 4 (2 часов).

Тема: Задачи (модели) оптимизации на графах и сетях, алгоритмы их решения.

2.2.1 Цель работы: сформировать представление о задачах (моделях) оптимизации на графах и сетях, алгоритмах их решения.

2.2.2 Задачи работы: ознакомление с задачами (моделями) оптимизации на графах и сетях, алгоритмами их решения.

2.2.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. ПК.
2. Windows.
3. Office.

2.2.4 Описание (ход) работы: пример выполнения задания работы 2.5.

1. Отыскание кратчайших путей в сети. Алгоритм Дейкстры.

Кратчайшие пути. *Задача поиска кратчайшего пути (наиболее дешевого? короткого?) «от пункта А до пункта В имеет массу практических приложений и различные алгоритмы решения. Математическая модель задачи имеет следующий вид.*

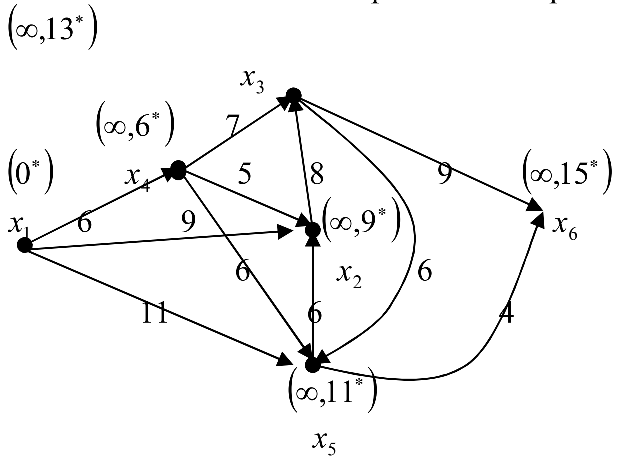
Рассматривается взвешенный граф (орграф) $G(V,E)$, ребрам (дугам) которого сопоставлены веса, обозначающие длину (или стоимость) пути из одного конца ребра в другой. Если из вершины v_i нет ребра (дуги) в вершину v_j, то вес ребра (v_i,v_j) считается равным ∞. Для ребер, являющихся петлями (диагональ матрицы смежности), их веса считаются равными 0. Все компоненты матрицы – веса ребер, соединяющих соответствующие вершины. Требуется определить кратчайший путь из одной вершины в другую.

Наиболее широко известны два алгоритма поиска кратчайших путей. Алгоритм Дейкстры находит кратчайшее расстояние от одной фиксированной вершины до другой и указывает сам путь, длина которого равна этому расстоянию. Алгоритм Флойда-Уоршалла позволяет найти кратчайшие расстояния между всеми парами вершин графа.

Задание. Задана весовая матрица сети G. Найти минимальный путь из вершины x_1 в вершину x_6 по алгоритму Дейкстры.

$$P = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 9 & \infty & 6 & 11 & \infty \\ \infty & - & 8 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & 6 & 9 \\ \infty & 5 & 7 & - & 6 & \infty \\ \infty & 6 & \infty & \infty & - & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}.$$

Решение. Изобразим теперь сам граф по данной матрице весов.



Поскольку в данном графе есть цикл между вершинами x_2, x_3 и x_5, то вершины графа нельзя упорядочить по алгоритму Фалкерсона. На рисунке графа временные и постоянные метки указаны над соответствующей вершиной. Итак, распишем подробно работу алгоритма Дейкстры по шагам.

Этап 1. Шаг1. Полагаем $d(x_1)=0^*, \tilde{x}=x_1$, $d(x_2)=d(x_3)=d(x_4)=d(x_5)=d(x_6)=\infty$.

1-я итерация. Шаг 2. Множество вершин, непосредственно следующих за $\tilde{x}=x_1$ с временными метками $\tilde{S}=\{x_2,x_4,x_5\}$. Пересчитываем временные метки этих вершин $d(x_2)=\min\{\infty,0^*+9\}=9$, $d(x_4)=\min\{\infty,0^*+6\}=6$, $d(x_5)=\min\{\infty,0^*+11\}=11$.

Шаг 3. Одна из временных меток превращается в постоянную $\min\{9,\infty,6,11,\infty\}=6^*=d(x_4)$, $\tilde{x}=x_4$.

Шаг 4. $\tilde{x}=x_4\neq t=x_6$, происходит возвращение на второй шаг.

2-я итерация. Шаг 2. $\tilde{S}=\{x_2,x_3,x_5\}$, $d(x_2)=\min\{9,6^*+5\}=9$, $d(x_3)=\min\{\infty,6^*+7\}=13$, $d(x_5)=\min\{11,6^*+6\}=11$.

Шаг 3. $\min\{d(x_2),d(x_3),d(x_5),d(x_6)\}=\min\{9,13,11,\infty\}=9^*=d(x_2)$, $\tilde{x}=x_2$.

Шаг 4. $x_2\neq x_6$, возвращение на второй шаг.

3-я итерация. Шаг 2. $\widetilde{S} = \{x_3\},\ d(x_3) = \min\{13, 9^* + 8\} = 13.$

Шаг 3. $\min\{d(x_3), d(x_5), d(x_6)\} = \min\{13, 11, \infty\} = 11^* = d(x_5),\ \widetilde{x} = x_5.$

Шаг 4. $x_5 \neq x_6$, возвращение на второй шаг.

4-я итерация. Шаг 2. $\widetilde{S} = \{x_6\},\ d(x_6) = \min\{\infty, 11^* + 4\} = 15.$

Шаг 3. . $\min\{d(x_3), d(x_6)\} = \min\{13, 15\} = 13^* = d(x_3),\ \widetilde{x} = x_3.$

Шаг 4. $x_3 \neq x_6$, возвращение на второй шаг.

5-я итерация. Шаг 2. $\widetilde{S} = \{x_6\},\ d(x_6) = \min\{15, 13^* + 9\} = 15$.

Шаг 3. $\min\{d(x_6)\} = \min\{15\} = 15^*,\ \widetilde{x} = x_6.$

Шаг 4. $x_6 = t = x_6$, конец первого этапа.

Этап 2. Шаг5. Составим множество вершин, непосредственно предшествующих $\widetilde{x} = x_6$ с постоянными метками $\widetilde{S} = \{x_3, x_5\}$. Проверим для этих двух вершин выполнение равенства (4.7.3).

$d(\widetilde{x}) = 15 = 11^* + 4 = d(x_5) + \omega(x_5, x_6),\ d(\widetilde{x}) = 15 \neq 13^* + 9 = d(x_3) + \omega(x_3, x_6).$ Включаем дугу (x_5, x_6) в кратчайший путь. $\widetilde{x} = x_5$.

Шаг 6. $\widetilde{x} \neq s = x_1$, возвращение на пятый шаг.

2-я итерация. Шаг 5. $\widetilde{S} = \{x_1, x_4\}.$

$d(\widetilde{x}) = 11 = 0^* + 11 = d(x_1) + \omega(x_1, x_5),\ d(\widetilde{x}) = 11 \neq 6^* + 6 = d(x_4) + \omega(x_4, x_5).$ Включаем дугу (x_1, x_5) в кратчайший путь. $\widetilde{x} = x_1$.

Шаг 6. $\widetilde{x} = s = x_1$, завершение второго этапа.

Итак, кратчайший путь от вершины x_1 до вершины x_6 построен. Его длина (вес) равна 15, сам путь образует следующая последовательность дуг $\mu = (x_1, x_5) - (x_5, x_6).$

Задания лабораторной работы № 1

Задания. Задана весовая матрица сети G . Найти минимальный путь из вершины $s = x_1$ в вершину $t = x_6$ по алгоритму Дейкстры.

1)
$$P = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 5 & 10 & 13 & \infty & \infty \\ \infty & - & 8 & 9 & 13 & \infty \\ \infty & \infty & - & 5 & 3 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & - & 8 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}.$$

2)
$$P = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 9 & \infty & 6 & 11 & \infty \\ \infty & - & 8 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & 6 & 9 \\ \infty & 5 & 7 & - & 6 & \infty \\ \infty & 6 & \infty & \infty & - & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}.$$

3) $$P = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 9 & \infty & 6 & 11 & \infty \\ \infty & - & 8 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & 6 & 9 \\ \infty & 5 & 7 & - & 6 & \infty \\ \infty & 6 & \infty & \infty & - & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}.$$

4) $$P = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 9 & \infty & 6 & 11 & \infty \\ \infty & - & 8 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & 6 & 9 \\ \infty & 5 & 7 & - & 6 & \infty \\ \infty & 6 & \infty & \infty & - & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}.$$

2. Построение остовного дерева (леса) графа: алгоритмы Краскала и Прима; задача об остове экстремального веса.

Задания. Для графа (сети), заданного матрицей весов,

а) построить по этой матрице сеть (исходный граф),

б) построить остов наименьшего веса,

в) найти его вес.

г) изобразить остовный граф:

1) $$\begin{pmatrix} - & 10 & \infty & 5 & \infty & \infty & 14 \\ 10 & - & 6 & 2 & 4 & 8 & \infty \\ \infty & 6 & - & 3 & 1 & 1 & \infty \\ 5 & 2 & 3 & - & 6 & \infty & 3 \\ \infty & 4 & 1 & 6 & - & 5 & \infty \\ \infty & 8 & 1 & \infty & 5 & - & 2 \\ 14 & \infty & \infty & 3 & \infty & 2 & - \end{pmatrix},$$

2) $$\begin{pmatrix} - & 7 & 15 & 12 & \infty & 10 & \infty \\ 7 & - & 13 & 9 & \infty & \infty & 8 \\ 15 & 13 & - & 7 & 15 & 7 & \infty \\ 12 & 9 & 7 & - & 9 & \infty & 11 \\ \infty & \infty & 15 & 9 & - & 10 & \infty \\ 10 & \infty & 7 & \infty & 10 & - & 12 \\ \infty & 8 & \infty & 11 & \infty & 12 & - \end{pmatrix}.$$

Пример выполнения типового задания. Для графа, заданного матрицей весов,

а) построить по этой матрице сеть (исходный граф),

б) построить остов наименьшего веса,

в) найти его вес.

$$.W = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 5 & 10 & 14 & \infty & \infty \\ 5 & - & 5 & 6 & \infty & \infty \\ 10 & 5 & - & 7 & 8 & 9 \\ 14 & 6 & 7 & - & 4 & \infty \\ \infty & \infty & 8 & 4 & - & 12 \\ \infty & \infty & 9 & \infty & 12 & - \end{pmatrix} \end{array}.$$

Шаг1. $S^{/} = \{x_1\},\ S^{//} = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\},\ U^{/} = \varnothing.$

<u>Первая итерация.</u> Шаг 2.

$$d\left(S^{/}, S^{//}\right) = \omega\left(x_1, x_2\right) = 5,\ S^{/} = \{x_1, x_2\},\ S^{//} = \{x_3, x_4, x_5, x_6\},$$

$$U^{/} = \{(x_1, x_2)\}.$$

Шаг 3. $S^{/} \neq S$, переход на начало второго шага.

<u>Вторая итерация.</u> Шаг 2.

$$d\left(S^{/}, S^{//}\right) = \omega\left(x_2, x_3\right) = 5,\ S^{/} = \{x_1, x_2, x_3\},\ S^{//} = \{x_4, x_5, x_6\},$$

$$U^{/} = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3)\}.$$

Шаг 3. $S' \neq S$, переход на начало второго шага.

Третья итерация. Шаг 2.
$d(S', S'') = \omega(x_2, x_4) = 6,\ S' = \{x_1, x_2, x_3, x_4\},\ S'' = \{x_5, x_6\},$

$U' = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_4)\}.$

Шаг 3. $S' \neq S$, переход на начало второго шага.

Четвертая итерация. Шаг 2. $d(S', S'') = \omega(x_4, x_5) = 4,\ S' = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\},\ S'' = \{x_6\},$

$U' = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_4, x_5)\}.$

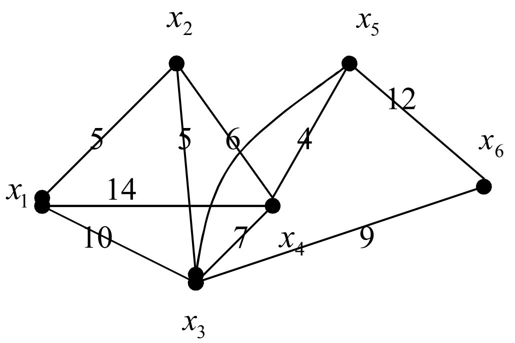
Шаг 3. $S' \neq S$, переход на начало второго шага.

Пятая итерация. Шаг 2. $d(S', S'') = \omega(x_3, x_6) = 9,\ S' = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\},\ S'' = \varnothing,$

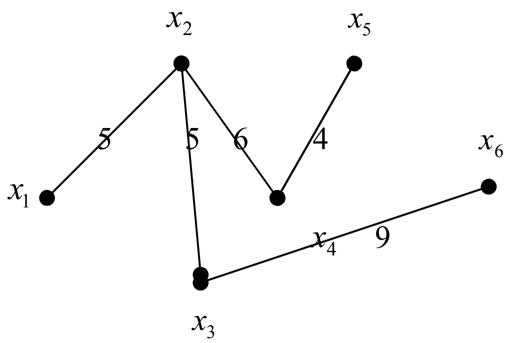
$U' = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_4, x_5), (x_3, x_6)\}.$

Шаг 3. $S' = S$. Итак, получен остовный граф. $G' = (S', U')$ изображен на рисунке справа, его вес $\omega(G') = 5 + 5 + 6 + 4 + 9 = 29.$

Исходный граф



Остовный граф



Краткая теоретическая справка

Деревья являются простейшим классом графов. Для них выполняются многие свойства, которые не всегда выполняются для обычных графов. Кроме того, деревья широко применяются в программировании при различного рода обработке данных, в частности, в алгоритмах сортировки, кодирования и т.п. *Дерево* – это связный граф без циклов. Несколько деревьев (или несвязный граф без циклов) составляют *лес*. Таким образом, дерево является компонентой связности.

2.3 Лабораторная работа № 5 (2 часа).
Тема: Модели и методы математической статистики

2.3.1 Цель работы: сформировать представление о моделях и методах математической статистики

2.3.2 Задачи работы: ознакомление с моделями и методами математической статистики.

2.3.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:
1. ПК.

2. Windows.
3. Office.

2.3.4 Описание (ход) работы: пример выполнения задания работы 2.7.

1. Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд.

Задание 1. ВСЭ 20 образцов продуктов выявила следующие данные об уровне опасности продуктов по 10-балльной шкале: 1,5,2,4,3,4,6,4,5,1,2,2,3,4,5,3,4,5,2,1.
Составьте сгруппированный ряд распределения опасных продуктов по баллам. Определите средний балл опасности продуктов, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение.
Решение**.** Построение сгруппированного ряда для дискретного признака: составим таблицу, в которой перечислим варианты и их частоты.

x_i^*	1	2	3	4	5	6
n_i	3	4	3	5	4	1

Для определения выборочных характеристик воспользуемся формулами приведёнными в § 9.5.

$$\bar{x} = \frac{1}{20}(1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 3 + 4\cdot 5 + 5\cdot 4 + 6\cdot 1) = 3{,}3.$$

$$D_B = \frac{1}{20}(1^2\cdot 3 + 2^2\cdot 4 + 3^2\cdot 3 + 4^2\cdot 5 + 5^2\cdot 4 + 6^2\cdot 1) - 3{,}3^2 = 2{,}21.$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{2{,}21} = 1{,}49.$$

Ответ: средний балл опасности продуктов равен 3,3 при среднем квадратическом отклонении 1,49.

2. Гистограмма, эмпирическая функция распределения, выборочная средняя и дисперсия.

Задание 2. Задана выборка: 2, 0, 2, 0, 3, 2, 1, 4, 3, 5, 3, 1, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 2, 1.
По заданной выборке:
а) составить вариационный ряд и статистический закон распределения;
б) построить полигон;
в) составить эмпирическую функцию распределения и построить ее график;
г) вычислить несмещенные оценки среднего значения m, дисперсии σ^2 и среднего квадратичного отклонения σ: $\bar{x}$, S^2, S;
д) найти доверительный интервал для среднего значения m с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}8$.
Решение: а) вариационный ряд: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Объем выборки n = 20.
Статистический закон распределения:

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	2	5	7	4	1	1
μ_i	$\frac{2}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$

где n_i – частота; μ_i – относительная частота; i = 1, 2, …, 6;
б) полигон частот выборки приведен на рис. 4.

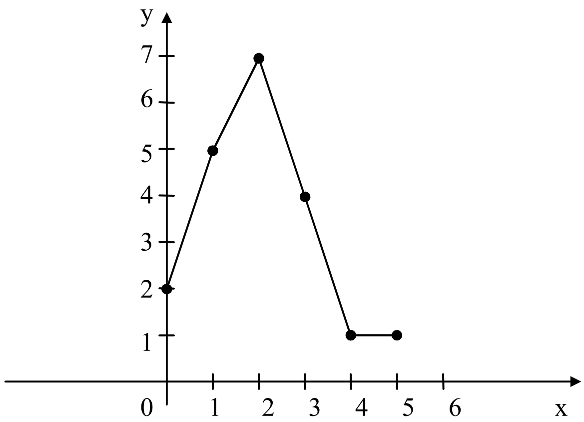


Рис. 4

Изображаем точки с координатами (x_i, n_i) и соединяем их отрезками;
в) эмпирическая функция распределения $F^*(x)$:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0{,}1, & 0 < x \le 1, \\ 0{,}35, & 1 < x \le 2, \\ 0{,}70, & 2 < x \le 3, \\ 0{,}9, & 3 < x \le 4, \\ 0{,}95, & 4 < x \le 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

При построении графика функции $F^*(x)$ откладываем значения в (0;1) (рис. 5);

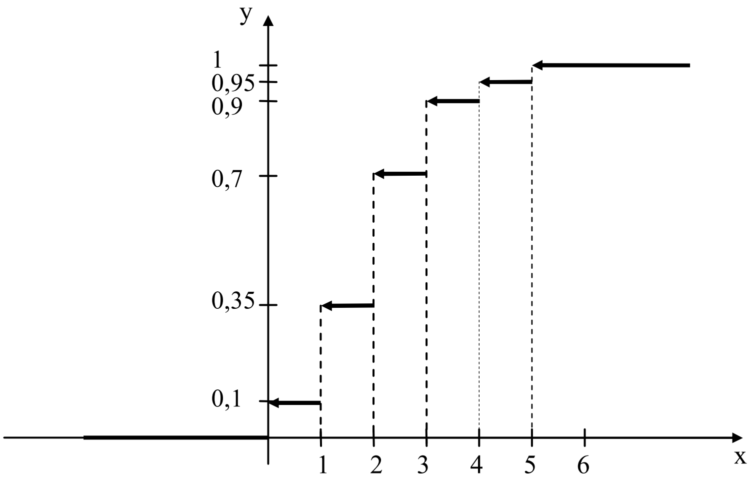


Рис. 5

г) выборочное среднее $\bar{x}$ вычисляем как среднее арифметическое всех выборочных значений

$$\bar{x} = \frac{1}{20}(0 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1) = 2.$$

Несмещенная выборочная дисперсия S^2 равна

$$S^2 = \frac{1}{20-1}((0-2)^2 \cdot 2 + (1-2)^2 \cdot 5 + (2-2)^2 \cdot 7 + (3-2)^2 \cdot 4 +$$

$$+ (4-2)^2 \cdot 1 + (5-2)^2 \cdot 1) = \frac{1}{19}(8 + 5 + 4 + 4 + 9) = 1{,}58.$$

Стандартное отклонение S равно $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{1{,}58} = 1{,}26$;

д) так как объем выборки n = 20, по таблице распределения Стьюдента найдем t_α, для $\alpha = 1 - \gamma = 0{,}2$ и $k = n - 1 = 19$, $t_\alpha = 1{,}33$.
Доверительный интервал для среднего m вычислим по формуле

$$\bar{x} - t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{x} + t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}};$$

$$2 - 1{,}33\frac{1{,}26}{\sqrt{20}} \le m \le 2 + 1{,}33\frac{1{,}26}{\sqrt{20}};$$

$1{,}63 \le m \le 2{,}37.$

Задачи для самостоятельной работы

Задание. По заданной выборке
а) составить вариационный ряд и статистический закон распределения;
б) построить полигон;
в) составить эмпирическую функцию распределения и построить ее график;
г) вычислить несмещенные оценки среднего значения m, дисперсии σ^2 и среднего квадратичного отклонения σ: $\bar{x}$, S^2, S;
д) найти доверительный интервал для среднего значения m с доверительной вероятностью γ.

52, 34, 49, 44, 45, 45, 37, 36, 46, 36; $\gamma = 0{,}8$.

3. Нахождение выборочного уравнения прямой линии регрессии Y на X по данным наблюдений:

Задача. Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X по данным n = 5 наблюдений:
x 1,00 1,50 3,00 4,50 5,00
y 1,25 1,40 1,50 1,75 2,25
Решение. Составим расчетную табл. 11. Найдем искомые параметры, для чего подставим вычисленные по таблице суммы в соотношения (***):
$\rho_{xy} = (5\cdot 26{,}975 — 15\cdot 8{,}15)/(5\cdot 57{,}5 — 15^2) ==0{,}202;$
Ь= (57,5·8,15—15·26,975)/62,5= 1,024.
(Для простоты записи вместо условимся писать.
Таблица 11

x_i	y_i	x^2_i	x_iy_i
1,00	1,25	1,00	1,250
1,50	1,40	2,25	2,100
3,00	1,50	9,00	4,500
4,50	1,75	20,25	7,875
5,00	2.25	25,00	11,250
$\sum x_i = 15$	$\sum y_i = 8{,}15$	$\sum x_i^2 = 57{,}50$	$\sum x_i y_i = 26{,}975$

Напишем искомое уравнение регрессии:

Y = 0,202x + 1,024.

Для того чтобы получить представление, насколько хорошо вычисленные по этому уравнению значения Y_i согласуются с наблюдаемыми значениями y_i найдем отклонения Y_i— y_i. Результаты вычислений приведены в табл. 12.

Таблица 12

x_i	Y_i	y_i	$Y_i - y_i$
1,00	1,226	1,25	—0,024
1,50	1,327	1,40	—0,073
3,00	1,630	1,50	0,130
4,50	1,933	1,75	0,183
5,00	2,034	2,25	- 0,216

Как видно из таблицы, не все отклонения достаточно малы. Это объясняется малым числом наблюдений.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Практические занятия не предусмотрены РУП