ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.Б.05 Математический анализ

Направление подготовки 38.03.01 Экономика

Профиль образовательной программы Бухгалтерский учет, анализ и аудит

Форма обучения очная

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.1 Лекция №1 (2 часа).
Тема: «Числовые множества»

1.1.1 Вопросы лекции:
1. Определение и основные понятия.
2. Элементы алгебры множеств.
3. Окрестность точки. Ограниченные множества.

1.1.2 Краткое содержание вопросов:
1. Определение и основные понятия.
Понятие множества, подобно понятиям точки, числа и т.д., не сводится к другим понятиям математики и не определяется. Когда в математике говорят о множестве, то объединяют некоторые предметы или понятия в одно целое – множество, состоящее их этих предметов. Основатель теории множеств Георг Кантор (1845 –1918) выразил это следующими словами: «Множество есть многое, мыслимое, как единое». Предметы (объекты), составляющие некоторое множество, называются его **элементами**.
Множество иногда можно задать перечислением его элементов. Так, {1, 2, 3} обозначает множество, состоящее из чисел один, два, три и только из них.
Но не все же множества можно задать списком. Если множество содержит бесконечно много элементов, то такой список составить нельзя. Такое свойство называется **характеристическим свойством множества**.
Задание множества его характеристическим свойством применяется в геометрии. В геометрии множество точек, обладающих данным характеристическим свойством, часто называют **геометрическим местом точек с данным свойством**. Например, биссектриса угла есть геометрическое место точек плоскости, лежащих внутри этого угла и равноудаленных от его сторон.

Множество элементов, обладающих данным характеристическим свойством, обозначают так: пишут фигурные скобки, в них – обозначение элемента множества, после него – двоеточие, а потом – характеристическое свойство. Например, запись $A=\{x:-3\le x\le 4\}$ означает, что множество *A* состоит из все чисел *x*, удовлетворяющих неравенству $-3\le x\le 4$. А запись $A=\{M:F_1M+F_2M=10\}$ означает, что множество *A* состоит из всех точек *M* плоскости, таких, что сумма расстояний F_1M и F_2M равна 10.

Множество, не имеющее ни одного элемента, называют пустым множеством. Примером может служить: множество точек пересечения двух параллельных прямых.

2. Элементы алгебры множеств.
Если каждый элемент множества В является в то же время элементом множества А, то говорят, что В – **подмножество** в А, и пишут $B\subset A$. Каждое непустое множество имеет по крайней мере два подмножества: пустое множество Ø и само множество *A*. Таким образом, пустое множество является подмножеством любого множества.

Приведем примеры подмножеств:

а) числовой отрезок [–1, 3] есть подмножество числового отрезка [–4; 5];

б) множество всех квадратов есть подмножество множества всех прямоугольников;
Пересечение множеств
Пересечением множеств *A* и *B*называют новое множество *X*, содержащее те и только те элементы, которые входят и в множество *A* и в множество *B*.

Пересечение множеств A и B обозначают $A \bigcap B$ или AB. Например, если A – множество мальчиков, обучающихся в данной школе, а B – множество всех учеников из 8 класса, то $A \bigcap B$ – множество мальчиков, которые учатся в 8 классе.

С понятием пересечения множеств приходится иметь дело и в арифметике. Пусть A – множество натуральных делителей числа 72:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\},$$

а B – множество натуральных делителей числа 54:

$$B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54\}$$

Тогда множество $A \bigcap B$ состоит из чисел 1, 2, 3, 6, 9, 18:

$$A \bigcap B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}.$$

Эти числа являются общими делителями для 72 и 54. Наибольший элемент множества $A \bigcap B$ равен 18. Это – **наибольший общий делитель** чисел 54 и 72. Множество делителей числа 72 конечно. А множество кратных этого числа бесконечно:

$$C = \{72, 144, 216, \dots , 72n, \dots\}.$$

Бесконечно и множество кратных числа 54:

$$D = \{54, 108, 162, 216, \dots , 54m, \dots\}.$$

Пересечением этих множеств является множество общих кратных для чисел 72 и 54:

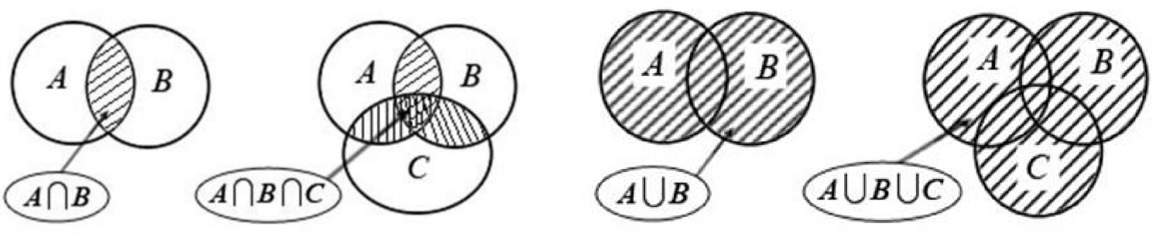
$$C \bigcap D = \{216, 432, \dots\}.$$

Наименьшее число в $C \bigcap D$, т.е. 216, называется **наименьшим общим кратным** для 72 и 54. Иногда приходится пересекать множества геометрических фигур. Например, множество всех квадратов является пересечением множества всех прямоугольников с множеством всех ромбов, т.к. квадрат – это фигура, являющаяся одновременно и прямоугольником, и ромбом. Пересечением множества всех треугольников с множеством всех правильных многоугольников является множество правильных треугольников.

Объединение множеств

Вообще, если задано несколько множеств A, B, … , N, … , то их **объединением называют множество X**, состоящее из тех и только тех элементов, которые входят хотя бы в одно из этих множеств. Объединение двух множеств A и B обозначают $A \bigcup B$.

Например, объединением числового отрезка [2: 6] и числового отрезка [4; 9] является числовой отрезок [2; 9]. При этом точки отрезка [4; 6] входят в оба отрезка, но в объединении их берут только один раз. Точно так же круг на рисунке 12 является объединением двух сегментов AMB и ANB. При этом точки хордыAB входят в оба сегмента.



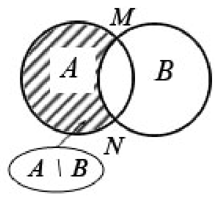
Вычитание множеств

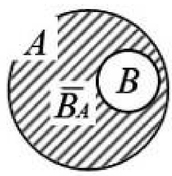
Разностью двух множеств A **и** B называют такое множество $X = A \setminus B$, в которое входят все элементы из A, не принадлежащие множеству B. При этом не предполагается, что множество *B* является частью множества *A*. Таким образом, при вычитании множества *B* из множества *A* из *A* удаляются пересечение *A* и *B*:

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B).$$

Например, если *A* – множество точек первого круга на рисунке 16, а *B* – множество точек второго круга, то и разностью является множество точек заштрихованной серповидной фигуры. При этом точки дуги *MN* удаляются из фигуры.

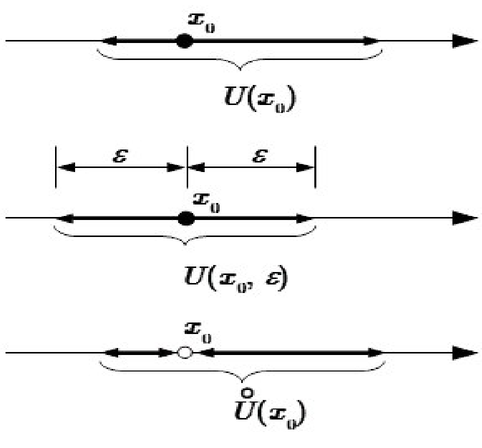
В случае, когда *B* – часть множества *A*, $A \setminus B$ **называют дополнением к *B* в множестве *A* и обозначают** $\overline{B'}_A$ (разумеется, одно и то же множество *B* может иметь разные дополнения в разных содержащих его множествах *A*) (рис. 17). Например, дополнением множества четных чисел в множестве всех целых чисел является множество нечетных чисел. Дополнением множества всех квадратов в множестве прямоугольников является множество всех прямоугольников с неравными сторонами. А дополнением того же множества квадратов в множестве всех ромбов является множество ромбов с неравными смежными углами.





3. Окрестность точки. Ограниченные множества.

Рассмотрено общее определение окрестности точки на числовой прямой. Определения эпсилон окрестности, левосторонней, правосторонней и проколотых окрестностей конечных и бесконечно удаленных точек. Свойство окрестности. Доказана теорема о равносильности использования эпсилон окрестности и произвольной окрестности в определении предела функции по Коши.



Определение Окрестностью действительной точки x_0 называется любой открытый интервал, содержащий эту точку:

$$U(x_0) = \{x : -\varepsilon_1 < x - x_0 < \varepsilon_2,\ \varepsilon_1 > 0,\ \varepsilon_2 > 0\}.$$

Здесь ε_1 и ε_2 – произвольные положительные числа

Эпсилон - окрестностью точки x_0 называется множество точек, расстояние от которых до точки x_0 меньше ε:

$$U(x_0, \varepsilon) = \{x : |x - x_0| < \varepsilon\}.$$

Проколотой окрестностью точки x_0 называется окрестность этой точки, из которой исключили саму точку x_0:

$$\overset{\circ}{U}(x_0) = U(x_0) \setminus \{x_0\}.$$

1.2 Лекция №2 (2 часа).
Тема: «Числовые функции»

1.2.1 Вопросы лекции:
1. Определение и основные понятия.
2. Графики основных элементарных функций.
3. Сложная функция. Обратная функция
4. Некоторые функциональные зависимости, используемые в экономике.
5. Кривые спроса и предложения. Равновесная цена.

1.2.2 Краткое содержание вопросов:
1. Определение и основные понятия.

ОПР: Пусть Х и У – некоторые множества. *Функцией* называется зависимость, по которой каждому $x \in X$ ставится в соответствие единственное значение $y \in Y$.

Обозначение: $y = f(x), \quad y = g(x), \quad y = F(x)$ и т.д.

у – значение функции в точке х.
у – зависимая переменная, х – независимая переменная (аргумент).
Х – область определения функции, У –область значений функции

ОПР: Множество значений х, при которых функция существует, называется *областью определения* функции.

Область определения находится по соблюдению законности выполнения математических операций, входящих в формулу $f(x)$. Именно: подкоренное выражение в корне четной степени не отрицательно, знаменатель дроби не равен 0, выражение под знаком логарифма – положительно и т.д.

Пример: 1) $y = \log_2(x^2 - 5x + 6)$

ОДЗ: $x^2 - 5x + 6 > 0$. Корни: х=2 и х=3

$x \in (-\infty;2) \cup (3;+\infty)$

2) $y = \arcsin \dfrac{1}{x+2}$

ОДЗ: $-1 \le \dfrac{1}{x+2} \le 1$ и $x \neq -2$ Ответ: $x \in (-\infty;-3] \cup [-1;+\infty)$

ОПР: Функция, все значения которой равны между собой, называется *постоянной* (обозначается: $f(x) = C$).

ОПР: Функция $f(x)$, определенная на некотором множестве Х, называется *ограниченной*, если существуют числа A и B такие, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $A \le f(x) \le \hat{A}$. В противном случае - *неограниченной*.

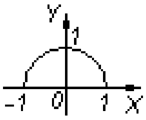
Пример: Функция $y = \sin x$ - ограничена на множестве R, т.к. $|\sin x| \le 1$ для $\forall x \in R$.

ОПР: Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если для любых значений аргумента из области её определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

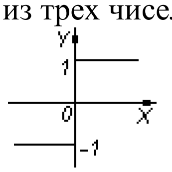
ОПР: Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если для любых значений аргумента из области её определения выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Существует три основных способа задания функции:
1) Табличный способ. В таблице по крайней мере одну из переменных принимают за независимую, другие величины являются функциями этого аргумента. Широко используется в бухгалтерской отчетности и банковской деятельности, статистических данных и т.д.
2) Аналитический способ. Состоит в задании связи между аргументом и функцией в виде формулы или набора формул.

Пример: 1) $y = \sqrt{1 - x^2}$. $[-1;1]$ - область определения функции, $[0;1]$ - область значений.



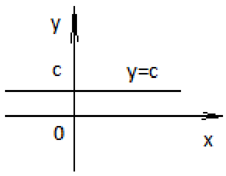
2) $y = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$ $(-\infty;+\infty)$ - область определения функции, -1,0,1 - область значений (состоит из трех чисел).



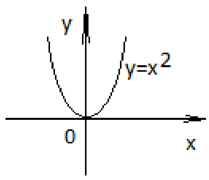
3) Графический способ. На плоскости функция изображается в виде *графика* – множество точек $(x;y)$, координаты которых связаны соотношением $y = f(x)$, называемым уравнением графика.

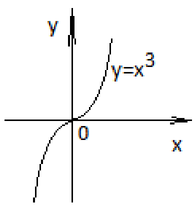
2. Графики основных элементарных функций.

Классификация функций:

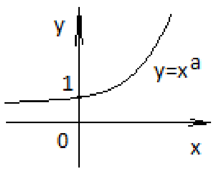


- $f(x) = C$ - постоянная функция $C = const$

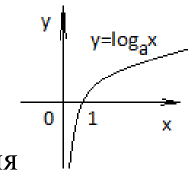




- x^{α}, $\alpha \in R$ - степенная функция



- a^x, $a > 0$ - показательная функция



- $\log_a x$, $a > 0, a \neq 1$ - логарифмическая функция
- $\sin x, \cos x, tgx, ctgx$ - тригонометрические функции
- $\arcsin x, \arccos x, arctgx, arcctgx$ - обратные тригонометрические функции

Данные функции являются *простейшими элементарными функциями*. Функции, полученные из простейших элементарных функций с помощью конечного числа арифметических действий, называются *элементарными функциями*.

3. Сложная функция. Обратная функция

ОПР: Если на некотором промежутке X определена функция $z = \varphi(x)$ с множеством значений Z и на множестве Z определена функция $y = f(z)$, то функция $y = f(\varphi(x))$ называется *сложной функцией* от x, а переменная z- промежуточной переменной сложной функции.

ОПР: Пусть X и У – некоторые множества и задана функция $y = f(x)$, т.е. множество пар чисел *(x;y)*, в которых каждое число x входит в одну и только одну пару. Если в каждой

паре поменять местами x и y, то получим множество пар чисел *(y;x)*, которое называется *обратной функцией* φ
к функции f $(x = \varphi(y).)$

4. Некоторые функциональные зависимости, используемые в экономике.
Функции находят широкое применение в экономической теории и практике. Спектр используемых в экономике функций весьма широк: от простейших линейных до функций, получаемых по определенному алгоритму с помощью так называемых рекуррентных соотношений, связывающих состояния изучаемых объектов в разные периоды времени.

Наиболее часто используются в экономике следующие функции:

1. *Функция полезности (функция предпочтений)* – в широком смысле зависимость полезности, т.е. результата, эффекта некоторого действия от уровня (интенсивности) этого действия.
2. *Производственная функция* – зависимость результата производственной деятельности от обусловивших его факторов.
3. *Функция выпуска* (частный вид производственной функции) – зависимость объёма производства от наличия или потребления ресурсов.
4. *Функция издержек* (частный вид производственной функции) – зависимость издержек производства от объема продукции.
5. *Функции спроса, потребления и предложения* – зависимость объёма спроса, потребления или предложения на отдельные товары или услуги от различных факторов (напр-р, цены, дохода и т.п.).

Уравнения СЛУЦКОГО [Slutsky equations] — уравнения, характеризующие количественные зависимости между изменением цен на отдельные товары и доходов потребителей, с одной стороны, и структурой покупательского спроса — с другой. Наиболее просто основное уравнение Слуцкого формулируется так:

Изменение спроса = Эффект изменения дохода + Эффект замещения

Левая часть представляет не что иное, как коэффициент эластичности спроса на товар $X \approx e_X$.

Первое слагаемое правой части можно представить как $k_X e_I$, где $k_X = XP_X/I \approx$ доля расходов на товар X в общих расходах покупателя I, а $e_I \approx$ коэффициент эластичности спроса на товар X по доходу.

Второе слагаемое правой части характеризует эластичность спроса на товар X при неизменном реальном доходе, обозначим ее коэффициент -

Таким образом, мы можем записать уравнение Слуцкого в коэффициентах эластичности:

$e_X = -kXeI + ex$

В то время как эффект замещения должен быть всегда отрицателен — противоположен направлению изменения цены, эффект дохода может действовать в обоих направлениях. Следовательно, общий эффект может быть положительным или отрицательным. Однако, в случае нормального товара эффект замещения и эффект дохода действуют в одном и том же направлении. Рост цены означает, что спрос сократится вследствие действия эффекта замещения. Поскольку мы рассматриваем ситуацию роста цены, это подразумевает снижение покупательной способности, что для нормального товара означает сокращение спроса.

С другой стороны, если мы рассматриваем товар низшей категории, может случиться так, что эффект дохода перевесит эффект замещения, так что общее изменение спроса, связанное с изменением цены, в действительности окажется положительным.

5. Кривые спроса и предложения. Равновесная цена.
Рассмотрим зависимость спроса D (demand) и предложения S (supply) от цены на товар P (price).

Чем меньше цена, тем больше спрос при постоянной покупательской способности населения. Обычно зависимость D от P имеет вид ниспадающей линии, например прямой:

$D=-aP+c,\quad a>0,\quad c>0\quad (1)$

В свою очередь, предложение растет с увеличением цены на товар, и поэтому зависимость S от P имеет следующий характерную форму:

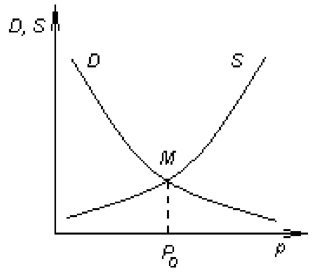
$S=bP+d,\quad b>0,\quad d>0\quad (2)$

В формулах (1) и (2) *a, b, c, d* – так называемые экзогенные величины; они зависят от ряда других причин (благосостояние общества, политическая обстановка и т.п.). Переменные, входящие в формулы (1) и (2), положительны, поэтому графики функций имеют смысл только в первой координатной четверти.

Для экономики представляет интерес условие равновесия, т.е. равенство спроса и предложения; это условие задается уравнением

$D(P)=S(P)$

и соответствует точке M пересечения кривых D и S – это так называемая точка равновесия. Цена P_0, при которой выполнено это условие, называется *равновесной*.



При увеличении благосостояния населения, что соответствует росту величины c в формуле (1), точка равновесия M смещается вправо, т.к. кривая D поднимается вверх; при этом цена товара растет при неизменной кривой предложения S.

Рассмотрим простейшую задачу поиска равновесной цены. Это одна из основных поблеем рынка, означающая торг между производителем и покупателем (рис. 1,2,3).

Пусть сначала цену P_1 называет производитель (в простейшей схеме он же и продавец). Цена P_1 на самом деле выше равновесной (естественно всякий производитель стремится получить максимум выгоды из своего производства). Покупатель оценивает спрос D_1 при этой цене и определяет свою цену P_2, при которой этот спрос D_1 равен предложению. Цена P_2 ниже равновесной (всякий покупатель стремится купить подешевле). В свою очередь, производитель оценивает спрос D_2, соответствующий цене P_2, и определяет свою цену P_3, при которой спрос равен предложению; эта цена выше равновесной. Процесс торга продолжается и при определенных условиях приводит к устойчивому приближению к равновесной цене, т.е. к «скручиванию» спирали. Если рассматривать последовательность чисел, состоящую из называемых в процессе торга цен, то она имеет своим пределом равновесную цену P_0 (рис. 1). Следует заметить, что в данной схеме спираль торга скручивается, если $b<a$. В противном случае имеет место либо циркулирование по замкнутому циклу $(b=a)$ - рис. 2, либо «раскручивание» спирали и уход от равновесной цены $(b<a)$ - рис.3.

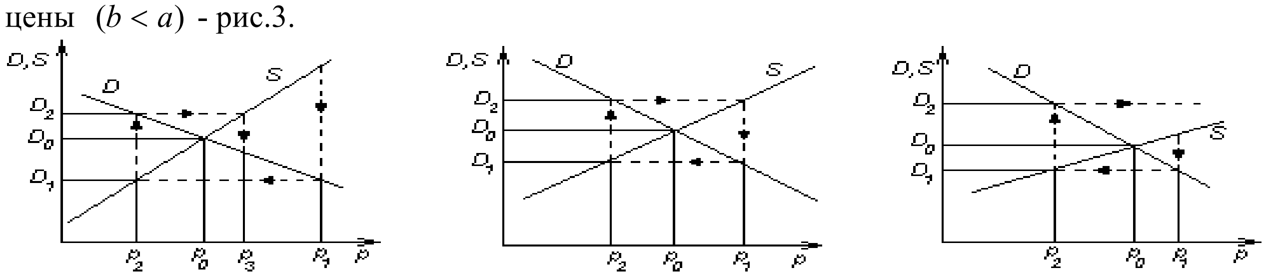


рис. 1 рис. 2 рис. 3

Поиск равновесной цены

1.3 Лекция №3 (2 часа).
Тема: «Предел последовательности»

1.3.1 Вопросы лекции:
1. Понятие числовой последовательности. Предел числовой последовательности.
2. Основные свойства сходящихся последовательностей.
3. Задача о непрерывном начислении процентов.

1.3.2 Краткое содержание вопросов:
1. Понятие числовой последовательности. Предел числовой последовательности
С числовыми последовательностями мы уже встречались в средней школе – элементы арифметической и геометрической прогрессий, множества чисел: N: 1, 2, 3,… - натуральные числа; Z: …, -2, -1, 0, 1, 2,… - целые числа и т.д. Уточним и расширим понятие числовой последовательности.

ОПР: Если каждому натуральному числу n ставится в соответствие единственное число x_n, то занумерованное множество действительных чисел $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ называется *числовой последовательностью*.
где $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ - элементы (члены) последовательности
x_n - общий элемент (член) последовательности
Обозначение: $\{x_n\}$ - последовательность.

Пример: 1) Последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; ...; \frac{1}{n}; ...$

2) $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; ...$ $\quad y_n = \frac{1}{2^n}$

ОПР: Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если существуют числа A и B, такие, что выполняется неравенство $A \le x_n \le B$.

ОПР *(по Коши)* : Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε существует такой номер N, что при всех $n>N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.
Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*.
Записывается: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$; $n \to \infty$.

Если предел последовательности не существует или равен ∞, то последовательность называется *расходящейся*.
Записывается: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Если при этом, начиная с некоторого номера, все члены последовательности положительны (отрицательны), то пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$).

ОПР: Последовательность, имеющая своим пределом 0 *(a=0)*, называется *бесконечно малой последовательностью*. (Обозначение: $\{\alpha_n\}$, α_n - элемент бесконечно малой последовательности)
$\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$
Пример: 1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; ...; \frac{1}{n}; ...$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ - бесконечно малая последовательность

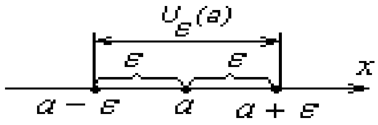
2) $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8};\frac{1}{16};...$

$y_n=\frac{1}{2^n}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$ - бесконечно малая последовательность

Приведем геометрическую интерпретацию этого определения:

<u>ОПР:</u> <u>*ε - окрестностью точки a*</u> называется множество чисел x_n, удовлетворяющих неравенству $|x_n-a|<\varepsilon$.

Раскроем модуль: $-\varepsilon<x_n-a<\varepsilon$; $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$ èëè $x_n\in(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$.



<u>Обозначение:</u> $U_\varepsilon(a)$

<u>ОПР:</u> Число a называется <u>*пределом последовательности*</u> $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε существует такой номер N, начиная с которого все элементы последовательности x_n с номерами $n>N$, попадут в ε - окрестность точки а.

<u>Пример:</u> Показать, используя определение предела последовательности, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

Решение: Возьмем $\forall\varepsilon>0$. Т.к. $|x_n-1|=\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}$, то чтобы выполнялось $|x_n-1|<\varepsilon$, достаточно решить неравенство $\frac{1}{n+1}<\varepsilon$, откуда получаем $n>\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$. Примем $N=\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right]$ (символ $[a]$ означает целую часть числа a, т.е. наибольшее число, не превосходящее a), получим:

$\forall\varepsilon>0$ $\exists$ номер $N=\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right]$, что при всех $n>N$ выполняется неравенство $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

<u>Пример:</u> Показать, что последовательность $\{x_n\}=(-1)^n$ или -1, 1, -1, 1,… не имеет предела.

Решение: Какое бы число мы ни предложили в качестве предела, 1 или -1, при $\varepsilon<0{,}5$ неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$ не выполняется. Вне ε - окрестности этих чисел остается бесконечно большое число элементов x_n, т.к. все элементы с нечетными номерами равны -1, а элементы с четными номерами равны 1.

2. Основные свойства сходящихся последовательностей

<u>ТЕОРЕМА 1:</u> Если все элементы бесконечно малой последовательности $\{x_n\}$ равны одному и тому же числу c, то $c=0$.

<u>ТЕОРЕМА 2 *(Теорема о единственности предела)*:</u> Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

<u>ТЕОРЕМА 3:</u> Сходящаяся последовательность ограничена.

ТЕОРЕМА 4: Сумма (разность) сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен сумме (разности) пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

ТЕОРЕМА 5: Произведение сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен произведению пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

ТЕОРЕМА 6: Частное двух сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен частному пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, при условии, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

ТЕОРЕМА 7: Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, причем начиная с некоторого номера выполняется неравенство $x_n \geq b$ $(x_n \leq b)$, то $a \geq b$ $(a \leq b)$.

ТЕОРЕМА 8: Произведение бесконечно малой последовательности и ограниченной последовательности или числа есть бесконечно малая последовательностью

ТЕОРЕМА 9: Произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

ТЕОРЕМА: Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то последовательность $\{\alpha_n\}=\{x_n - a\}$ есть бесконечно малая, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) = 0$.

Доказательство:

1) необходимость: дано: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$; доказать: $\{\alpha_n\}=\{x_n - a\}$ есть бесконечно малая.

Рассмотрим разность $x_n - a = \alpha_n$

Рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n - \lim\limits_{n\to\infty} a = a - a = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0 \Rightarrow \{\alpha_n\}$ -бесконечно малая.

2) достаточность: дано: $\{\alpha_n\}=\{x_n - a\}$ есть бесконечно малая, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$. доказать: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

Рассмотрим разность $\alpha_n = x_n - a \Rightarrow \quad x_n = \alpha_n + a$

Рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n + a) = \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n + \lim\limits_{n\to\infty} a = 0 + a = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Рассмотрим применение этих свойств на примерах.

Пример 1: Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+2n+4}{4n^2+n-3}$.

Решение: При $n\to\infty$ числитель и знаменатель дроби $\to\infty$, т.е. применять сразу теорему о пределе частного нельзя. Вынесем за скобку n^2 в числителе и знаменателе дроби и сократим.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+2n+4}{4n^2+n-3} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(2+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2})}{n^2(4+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2})} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}4+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}} = \frac{2+0+0}{4+0-0} = \frac{1}{2}$$

Пример 2: Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}\cos n}{n+1}$.

Решение: При $n\to\infty$ числитель и знаменатель дроби $\to\infty$. Вынесем за скобку n в числителе и знаменателе дроби и сократим.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cos n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\frac{1}{\sqrt{n}}\cos n}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}}\cos n)}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

Пример 3: Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

Решение: При $n\to\infty$ оба слагаемых $\to\infty$. Поэтому применять сразу теорему о пределе суммы (разности) нельзя. Умножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное выражение $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\lim\limits_{n\to\infty}1}=\frac{0}{1+1}=0$$

Число *e*

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, общий член которой выражается формулой $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

В курсе математического анализа доказывается, что эта последовательность *монотонно возрастает*, ограничена $(x_n<3)$ и имеет предел. Этот предел называют числом e.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e}$$

Число e является иррациональным; его приближенное значение: $e=2{,}7182818...$

Пример: Найти предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{5n}\right)^n$

3. Задача о непрерывном начислении процентов

Пусть Q_0 ден. ед. – первоначальный взнос в банк, $p\,\%$ - годовые проценты. Найти размер вклада Q_t через t лет.

При использовании *простых процентов* размер вклада ежегодно будет увеличиваться на одну и ту же величину $\frac{Q_0}{100}\cdot p$, т.е.

$Q_1=Q_0+\frac{Q_0}{100}p=Q_0(1+\frac{p}{100})$ - размер вклада чрез 1 год.

$Q_2=Q_0+\frac{Q_0}{100}p+\frac{Q_0}{100}p=Q_0(1+\frac{2p}{100})$ - размер вклада чрез 2 года. И т.д.

$\boxed{Q_t=Q_0(1+\frac{t\,p}{100})}$ - размер вклада через t лет (простые проценты)

На практике чаще мы имеем дело со *сложными процентами*. В этом случае размер вклада ежегодно будет увеличиваться в одно и то же число раз $\left(1+\frac{p}{100}\right)$.

$Q_1=Q_0(1+\frac{p}{100})$, $Q_2=Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$, … , $\boxed{Q_t=Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^t}$ - размер вклада через t лет (сложные проценты)

Если начислять проценты по вкладам не один раз в году, а n раз, то при том же ежегодном приросте $p\,\%$, процент начисления за $\frac{1}{n}$ - ую часть года составит $\frac{p}{n}\%$, а размер вклада за t

лет при $n \cdot t$ начислениях составит $\boxed{Q_t = Q_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt}}$ - размер вклада через t лет, если начисления производятся n раз в году.

Будем полагать, что проценты по вкладу начисляются каждое полугодие (*n=2*), ежеквартально (*n=4*), ежемесячно (*n=12*), каждый день (*n=365*), каждый час (*n=8760*) и т.д. непрерывно ($n \to \infty$). Тогда размер вклада за t лет составит

$$Q_t = \lim_{n\to\infty}\left(Q_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{n2}\right) = Q_0 \lim_{n\to\nabla\infty}\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt} = \left[\begin{array}{ll} \frac{p}{100n}=\frac{1}{x} & n\to\infty \Rightarrow x\to\infty \\ px = 100n \Rightarrow & n=\frac{px}{100}\end{array}\right] =$$

$$= Q_0 \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{px\,t}{100}} = Q_0\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{\frac{pt}{100}} = Q_0 e^{\frac{pt}{100}}$$

Итак, $\boxed{Q_t = Q_0 e^{\frac{pt}{100}}}$ - показательный закон роста (при *p>0*) или убывания (при *p<0*).

Эта формула используется при непрерывном начислении процентов.

<u>Пример:</u> Прирост населения страны составляет 3% в год. Через сколько лет население страны удвоится?

Решение: $2Q_0 = Q_0 e^{\frac{3t}{100}} \Rightarrow t = \frac{100\ln 2}{3} \approx 23$ года.

1.4 Лекция №4 (2 часа).
Тема: «Предел функции»

1.4.1 Вопросы лекции:

1. Предел функции в точке и на бесконечности. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.
2. Теоремы о пределах функций.
3. Раскрытие неопределенностей.
4. Два замечательных предела.
5. Эквивалентные бесконечно малые и их использование при вычислении пределов.
6. Левый и правый пределы функции.
7. Непрерывность функции в точке и на интервале. Свойства непрерывных функций.
8. Точки разрыва. Классификация точек разрыва.
9. Асимптоты графика функции: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

1.4.2 Краткое содержание вопросов:

1. Предел функции в точке и на бесконечности. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором множестве *X*. Пусть $a \in X$ - некоторый элемент множества *X*. Возьмем из *X* последовательность чисел, отличных от *a* и сходящихся к *a*.

(1) $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \to a$

Тогда значения функции $f(x)$ в этих точках тоже образуют последовательность

(2) $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots$

<u>ОПР:</u> Число *A* называется <u>*пределом функции*</u> $f(x)$ в точки *a* (или пределом функции при $x \to a$), если для любой сходящейся к *a* последовательности (1) значений аргумента, отличных от *a*, соответствующая последовательность значений функции (2) сходится к числу *A*.

$$A=\lim_{x\to a} f(x), \quad \textit{если} \quad \forall\{x_n\}, n\in N: \left.\begin{array}{l} 1)\ \{x_n\}\in X \\ 2)\ x_n\neq a \\ 3)\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n)=A$$

Пример: 1) $f(x)=C=const$ Найти: $\lim\limits_{x\to a} C$

$\{x_n\}\in R: \quad x_1,x_2,x_3,...,x_n,... \quad \to a$

$\{f(x_n)\}: \quad C,C,C,...\to C \qquad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to a} C = C$

2) $f(x)=x$ Найти: $\lim\limits_{x\to a} x$

$\{x_n\}\in R: \quad x_1,x_2,x_3,...,x_n,... \quad \to a$

$\{f(x_n)\}: \quad x_1,x_2,x_3,...,x_n,... \quad \to a$ Т.е. последовательности тождественны и $\Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to a} x = a$

3) $f(x)=\dfrac{x^2-4x+2}{2x-1}$ Найти: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Возьмём $\forall$ послед-ть аргумента, сходящуюся к 0: $\{x_n\}\in R: \ x_1,x_2,x_3,...,x_n,... \ \to 0$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2-4x_n+2}{2x_n-1}=\frac{(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)^2-4(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)+2}{2(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)-1}=\frac{0-0+2}{0-1}=-2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2-4x+2}{2x-1}=-2$$

Кроме понятия предела функции в точке, существует также и понятие предела функции при $x\to\infty$. Пусть $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Эта функция имеет предел при $x\to\infty$, равный нулю. Действительно:

$\{x_n\}\in R: \quad x_1,x_2,x_3,...,x_n,... \quad \to \infty$

$\{f(x_n)\}: \quad \dfrac{1}{x_1};\dfrac{1}{x_2};...;\dfrac{1}{x_n};... \quad \to 0$ Т.е. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$

Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

ОПР: Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой функцией* (или просто бесконечно малой) в точке $x=a$, если предел ее в этой точке равен нулю: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$

Аналогично определяются бесконечно малые функции при $x\to\infty$, $x\to\pm\infty$, $x\to a+$, $x\to a-$

ТЕОРЕМА: Алгебраическая сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций в точке a, как и произведение бесконечно малой и ограниченной функций, являются бесконечно малыми функциями в точке a.

ОПР: Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой функцией* (или просто бесконечно большой), если для любой сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции является бесконечно большой.

В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ ($\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$) и говорят, что функция имеет в точке a бесконечный предел

ТЕОРЕМА: Произведение бесконечно большой на функцию, предел которой $\neq 0$, есть беск. больш.
Сумма беск. больш. и ограниченной функций есть функция бесконечно большая. Частное от деления беск. больш. на функцию, имеющую предел, есть функция беск. большая.

ТЕОРЕМА: Для того, чтобы функция $f(x)$ была бесконечно большой в точке a необходимо и достаточно, чтобы обратная функция $\frac{1}{f(x)}$ была бесконечно малой в этой точке a. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=0$

2. Теоремы о пределах функций

ТЕОРЕМА 1: Функция $f(x)$ имеет в точке a предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют левый и правый пределы, причем они равны. В таком случае предел функции равен односторонним пределам.

ТЕОРЕМА 2: Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке a пределы A и B. Тогда функции $f(x)\pm g(x),\ \ f(x)\cdot g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(B\neq 0)$ имеют в точке a пределы, равные, соответственно $A\pm B,\ AB$ и $\frac{A}{B}$.

Заметим, что теорема 2 справедлива и в тех случаях, когда a является ∞ ($+\infty$ или $-\infty$).

ТЕОРЕМА 3: Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ определены в некоторой окрестности точки a, причем $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=A$ и выполняется неравенство $f(x)\le g(x)\le h(x)$, тогда $\lim\limits_{x\to a} g(x)=A$.

ТЕОРЕМА 4: Постоянный множитель можно вынести за знак предела $\lim\limits_{x\to a} C\cdot f(x)=C\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

ТЕОРЕМА 5: Предел от элементарной функции равен значению функции от предела выражения, стоящего под знаком функции.

Другими словами, для непрерывной функции знак функции и знак предела можно поменять местами. В частности, предел степени для элементарной функции равен степени предела $\lim\limits_{x\to a} f^{\,m}(x)=(\lim\limits_{x\to a} f(x))^m$.

3. Раскрытие неопределенностей

Зачастую вычисление пределов связано с простыми приемами: разложением числителя и знаменателя на множители, делением числителя и знаменателя на степень x и т.д. Может оказаться, что при отыскании предела частного двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x\to a$, числитель и знаменатель стремятся к 0 или числитель и знаменатель стремятся к ∞. В таком случае говорят, что дробь при $x\to a$ представляет собой *неопределенность* вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, а нахождение предела дроби называют *раскрытием неопределенности*.

Пример 1: Найти предел

а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{x^2-3x+2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-4}{x-2}=3$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2+3x+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2(1+\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2})}=\frac{1+0}{1+0+0}=1$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\frac{2}{x}}{x^2(1+\frac{5}{x})}=\frac{0}{1+0}=0$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-2x+1}{x^2+5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3(5-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3})}{x^3(\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3})}=\frac{5}{0}=\infty$

Предел обратной дроби =0 $\Rightarrow$ предел данной дроби $=\infty$

<u>Правило:</u> При $x\to\infty$, если имеем:

1) степень числителя и знаменателя равны, то значение предела равно отношению коэффициентов при наибольших степенях.
2) степень числителя больше степени знаменателя, то предел равен ∞.
3) степень числителя меньше степени знаменателя, то предел равен 0.

Другие виды неопределенности: $(\infty-\infty)$, (1^{∞}) и т.д.

<u>Пример 2:</u> Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})$

Здесь следует умножить и разделить выражение под знаком предела на сопряжённое выражение – в данном случае на $(\sqrt{x+3}+\sqrt{x})$.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})=\lim_{x\to\infty}\frac{x+3-x}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=\frac{3}{\infty}=0$$

4. Два замечательных предела

Данные пределы наиболее широко используются в математике и её приложениях.

<u>ТЕОРЕМА:</u> Предел функции $\frac{\sin x}{x}$ в точке x=0 существует и равен единице

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$ - *<u>первый замечательный предел.</u>*

<u>Пример:</u> Найти предел

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{5x}\frac{5}{3}=\lim\limits_{5x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}=\lim\limits_{5x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2=\frac{1}{2}1^2=\frac{1}{2}$

<u>ТЕОРЕМА:</u> Предел функции $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при $x\to\infty$ существует и равен e, т.е.

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e}$$ - *<u>второй замечательный предел.</u>*

Обозначим $\frac{1}{x}=\alpha$ - является бесконечно малой при $x\to\infty$, т.е. $\alpha\to 0$. Тогда

$$\boxed{\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e}$$

Число e является одной из фундаментальных величин в математике. Показательная функция вида e^{ax} называется *<u>экспонентой.</u>*

<u>Пример:</u> Найти предел

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{x}=\left(1^{\infty}\right)=\begin{bmatrix} x=4y \\ x\to\infty\Rightarrow y\to\infty \end{bmatrix}=\lim\limits_{y\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^{y}\right)^{4}=e^{4}$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_3 1+x)}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\log_3(1+x)\right)=\lim\limits_{x\to 0}\log_3(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_3\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\log_3 e=\dfrac{1}{\ln 3}$

5. Эквивалентные бесконечно малые и их использование при вычислении пределов

ОПР: Если функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ определены в некоторой окрестности $U_\varepsilon(a)$, являются бесконечно малыми в точке a, причем $\beta(x)\neq 0$ для $\forall x\in U_\varepsilon(a)$ и выполняется неравенство $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными* между собой *бесконечно малыми* функциями в точке a.

Обозначение: $\alpha(x)\sim\beta(x)$

1) $\boxed{\sin x\sim x}$ при $x\to 0$, т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1 \Rightarrow \boxed{\ln(1+x)\sim x,\quad x\to 0}$

3)

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x\ln a}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{l} a^x-1=y \\ x\to 0\Rightarrow y\to 0 \\ x=\log_a(1+y) \end{array}\right|=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\frac{\ln(1+y)}{\ln a}\ln a}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}}=\frac{1}{\ln e}=1 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a^x-1\sim x\ln a,\quad x\to 0 \\ e^x-1\sim x,\ x\to 0 \end{array}}$$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{\alpha x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha\ln(1+x)}{\alpha x}=1 \Rightarrow \boxed{(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x,\quad x\to 0}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=1 \Rightarrow \boxed{1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\quad x\to 0}$

Пример:

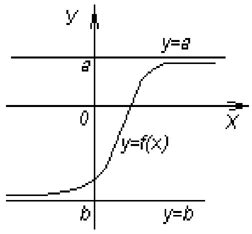
1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a^{\sin x}-1)x}{1-\cos x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{l} a^{\sin x}-1\sim\sin x\ln a, \\ m.k.\ \sin x\to 0,\ npu\ x\to 0 \end{array}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin x\ln a}{\frac{1}{2}x^2}=2\ln a\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=2\ln a$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{3}}-1}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}x}{x}=\dfrac{1}{3}$

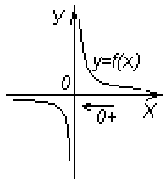
6. Левый и правый пределы функции

Введем понятие односторонних пределов функции, когда вся последовательность значений аргумента $\{x_n\}$: $x_n\to a$ расположена слева от точки a (*левый предел*), либо справа от неё (*правый предел*). Т.е. либо $x_n<a$, либо $x_n>a$ при всех n. Для правого (левого) предела функции используется символическая запись $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=A$ $\left(\lim\limits_{x\to a-}f(x)=A\right)$.

Геометрически:

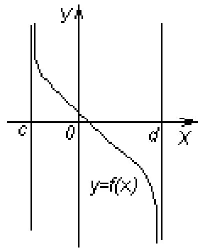


$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$

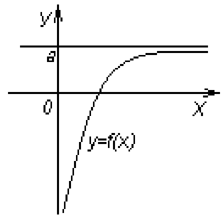


$\lim\limits_{x\to0+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to0-} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to d} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -\infty$

<u>Пример:</u>

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty;$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty;$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = e^{+\infty} = +\infty;$ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$

7. Непрерывность функции в точке и на интервале. Свойства непрерывных функций.

Понятие непрерывности функции является одним из основных понятий математического анализа.

<u>ОПР:</u> Функция $f(x)$ называется <u>*непрерывной в точке*</u> $\underline{x_0}$, если она удовлетворяет следующим трём условиям: 1) $f(x)$ определена в точке x_0 (т.е. существует $f(x_0)$)

2) существует конечный предел в точке x_0 ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$)

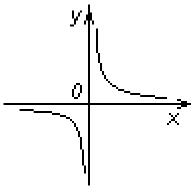
3) этот предел равен значению функции в точке x_0 ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$)

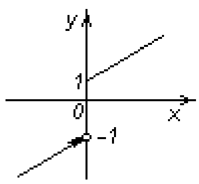
Наряду с данным определением непрерывности, рассматривают одностороннюю непрерывность.

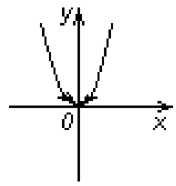
<u>ОПР:</u> Функция $f(x)$ называется <u>*непрерывной в точке*</u> $\underline{x_0}$, если существуют конечные пределы функции справа $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ и слева $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0)$.

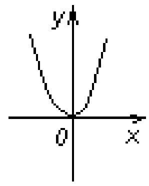
<u>Пример:</u> Исследовать непрерывность в точке $x = 0$ заданных функций

а) $y = \dfrac{1}{x}$; б) $y = \begin{cases} x+1, & x \ge 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$; в) $y = \begin{cases} x^2, & x \ne 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$; г) $y = x^2$









Решение:

а) Функция $f(x)$ в точке $x = 0$ не является непрерывной, т.к. нарушено первое условие – существование $f(0)$ (см. рис. а).

б) Первое условие непрерывности выполнено (существует $f(0)=1$). Второе условие нарушено, т.к. предел функции слева $\lim\limits_{x\to0-} f(x) = -1$ и справа $\lim\limits_{x\to0+} f(x) = 1$, а общего предела функции при $x \to 0$ не существует (см. рис. б). Значит, функция не является непрерывной в точке $x = 0$.

в) Существует $f(0)=1$ и конечный предел $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$, но нарушено третье условие $\lim\limits_{x\to0} f(x) \ne f(0)$.

г) Функция $f(x)$ в точке $x=0$ непрерывна, т.к. выполнены все условия непрерывности $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$ (см. рис. г).

Свойства функций непрерывных в точке: Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то их сумма $f(x)+g(x)$, произведение $f(x)\cdot g(x)$ и частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (при условии $g(x_0)\neq 0$) являются непрерывными в точке x_0.

ОПР: Функция $f(x)$ называется *непрерывной на интервале* $(a;b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a;b]$, если она непрерывна в интервале $(a;b)$ и непрерывна в точке a справа, а в точке b слева: $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a), \quad \lim\limits_{x\to b-} f(x) = f(b)$.

8. Точки разрыва. Классификация точек разрыва

Точка, в которой не выполняется условие непрерывности, называется *точкой разрыва.*
Пусть точка x_0 - точка разрыва

ОПР: Точка x_0 называется *точкой разрыва I рода*, если существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$.

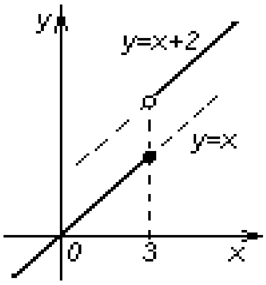
При этом: 1) если $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$, то точка x_0 называется *устранимым разрывом I рода*.

2) если $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$, то - *разрыв со скачком*. Длина скачка определяется модулем разности значений односторонних пределов в точке x_0.

ОПР: Точка x_0 называется *точкой разрыва II рода*, если по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен $\pm\infty$.

Пример: Построить график функции и исследовать данную функцию на непрерывность.

1) $f(x) = \begin{cases} x, & x\le 3 \\ x+2, & x>3 \end{cases}$



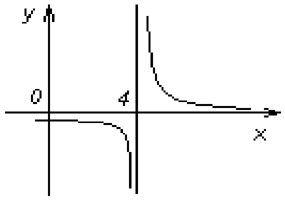
$\lim\limits_{x\to 3-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3-} x = 3$

$\lim\limits_{x\to 3+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3+} (x+2) = 3+2 = 5$

$3\neq 5 \Rightarrow$ *x=3 - разрыв 1 рода со скачком*
длина скачка |5-3|=2

2) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-4}$

$f(x)$ не определенна в точке x=4.



$\lim\limits_{x\to 4-} \dfrac{x+2}{x-4} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 4+} \dfrac{x+2}{x-4} = +\infty$

$\Rightarrow$ *x=4 - разрыв 2 рода*

9. Асимптоты графика функции: вертикальные, горизонтальные и наклонные

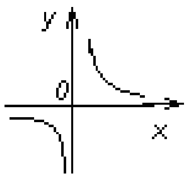
Пусть дана функция $f(x)$. При исследовании функции на бесконечности, т.е. при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$ или вблизи точек разрыва II рода, часто оказывается, что график функции сколь угодно близко приближается к той или иной прямой. Такие прямые называются *асимптотами*.

ОПР: Пряма линия называется *асимптотой* для кривой $y = f(x)$, если расстояние d от точки M, лежащей на кривой до прямой стремится к 0 при удалении точки M от начала координат в бесконечность.

Существует три вида асимптот: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

ОПР: Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

Пример: $y = \frac{1}{x}$



$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$\Rightarrow$ $x=0$ *вертикальная асимптота*

Сравним с определением точки разрыва II рода. Значит, если в точке a функция $y = f(x)$ терпит разрыв II рода, то прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой.

ОПР: Если $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} f(x) = A$, то прямая $y = A$ называется *горизонтальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$).

Пример: $y = \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{1}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$ - горизонтальная асимптота.

ОПР: Если существуют такие числа k и b, что $\boxed{k = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x}}$, $\boxed{b = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} (f(x) - kx)}$,

то прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$).

Практически целесообразно искать асимптоты в следующем порядке:
1) вертикальные асимптоты
2) горизонтальные асимптоты
3) наклонные асимптоты

Пример: Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x}$

1) Вертикальные асимптоты. Точка $x = 0$ - точка разрыва II рода

$\lim\limits_{x\to 0+} \frac{x^2 + 2x - 3}{x} = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{x^2 + 2x - 3}{x} = +\infty \quad \Rightarrow \quad x = 0$ - разрыв второго рода

$\Rightarrow \quad x = 0$ - вертикальная асимптота.

2) Горизонтальные асимптоты.

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \dfrac{x^2+2x-3}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} (x+2-\dfrac{3}{x}) = \dfrac{+\infty}{(-\infty)} \quad \Rightarrow$ горизонтальных асимптот нет.

3) Наклонные асимптоты. $y = kx + b$

$$k = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{x^2+2x-3}{x^2} = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} (1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}) = 1$$

$$b = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} (f(x)-kx) = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \left(\frac{x^2+2x-3}{x} - x\right) = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{2x-3}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} (2-\frac{3}{x}) = 2$$

$\Rightarrow \quad y = x + 2$ - наклонная асимптота

1.5 Лекция №5 (2 часа).

Тема: «Производная функции»

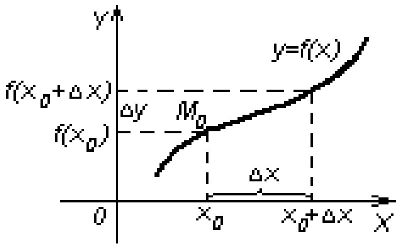
1.5.1 Вопросы лекции:

1. Геометрический, механический и экономический смысл производной.
2. Основные теоремы о дифференцируемых функциях и их приложения.
3. Дифференцирование сложной и обратной функций.
4. Дифференцирование показательно - степенной функции.
5. Производная неявной функции.
6. Производные высших порядков.

1.5.2 Краткое содержание вопросов:

1. Геометрический, механический и экономический смысл производной Коэффициент эластичности.

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором промежутке X и точка $x_0 \in X$.



Возьмем точку $M_0(x_0; f(x_0))$, принадлежащую графику функции $y = f(x)$. Зададим аргументу x в точке x_0 произвольное приращение Δx такое, что значение $x_0+\Delta x$ принадлежит X. Новому значению аргумента $x_0+\Delta x$ соответствует значение функции $f(x_0+\Delta x)$. Приращению аргумента Δx будет соответствовать приращение функции $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$.

<u>ОПР:</u> <u>*Производной*</u> функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, когда приращение аргумента $\Delta x \to 0$ (при условии, что этот предел существует).

<u>Обозначение:</u> $y', y'(x), f'(x)$ и т.д.

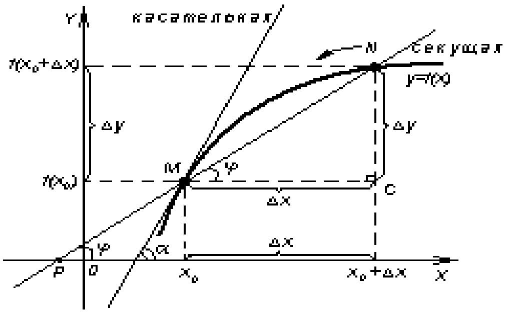
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

<u>Пример:</u> Найти производную функции $f(x) = x^3$ в точке $x=2$.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^{\ 3}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^3 + 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + (\Delta x)^2) =$$
$$= 3x_0^{\ 2} + 0 + 0 = 3x_0^2$$
$$y'(2) = 12$$

<u>1) Геометрический смысл производной</u>

Пусть задана функция $y = f(x)$, определенная на промежутке X.



Возьмем любую точку $M(x_0; f(x_0))$ принадлежащую графику функции. Зададим приращение аргумента Δx. Получим новую точку $N(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$.

Проведем секущую MN. Обозначим $\angle XPN = \varphi$.

Будем приближать точку N к точке M, двигаясь по кривой, тогда положение секущей будет меняться. Когда точки N и M совместятся, секущая превратится в касательную.

В этом случае: если $M \to N$, то $\Delta x \to 0$, $\angle\varphi \to \angle\alpha$, т.е. $\lim\limits_{N \to M} \varphi = \alpha$, где α - угол наклона касательной к оси Ox.

Найдем $tg\varphi$. Проведем дополнительные построения: $MC \parallel Ox$, ΔMCN - прямоугольный: $\angle CMN = \varphi$.

$$tg\varphi = \frac{NC}{MC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (*)$$

$\lim\limits_{\substack{N \to M \\ (\Delta x \to 0)}} \varphi = \alpha$. Рассмотрим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg(\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi) = tg\alpha$ (**)

Подставим в (**) вместо $tg\varphi$ значение из (*), то

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = tg\alpha = f'(x_0)$ - по определению производной.

$$\boxed{tg\alpha = f'(x_0)}$$

<u>Тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен значению производной функции в этой точке</u>.

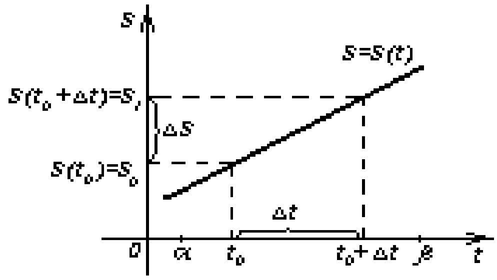
Вспомним $tg\alpha = k$ - угловой коэффициент касательной, т.е. $\boxed{k = f'(x_0)}$. Касательная проходит через точку $M(x_0; f(x_0))$ и имеет угловой коэффициент $k = f'(x_0)$

$y - y_1 = k(x - x_1)$ - уравнение прямой с начальной точкой и угловым коэффициентом. Значит:

$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$ - уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0; f(x_0))$

<u>2) Механический смысл производной</u>

Рассмотрим уравнение неравномерного движения точки по прямолинейной траектории $S = S(t)$, где $t -$ время, изменяется от α до β ($\alpha < t < \beta$), $S -$ расстояние.



Зафиксируем два момента времени t_0 и t_1, причем $t_0 \in (\alpha;\beta)$ и $t_1 \in (\alpha;\beta)$. В момент времени t_0 точка прошла расстояние S_0, а в момент времени t_1 - расстояние S_1
Тогда $t_1 - t_0 = \Delta t$ - изменение времени, $S_1 - S_0 = \Delta S$ - изменение расстояния.
$v_{cp} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ - средняя скорость движения – это отношение пути, пройденного за данный промежуток времени к этому промежутку времени.
Чтобы найти скорость движения в данный момент времени t_0, необходимо чтобы $t_1 - t_0 = \Delta t$ было как можно меньше. Т.е. чем меньше Δt, тем меньше v_{cp} отличается от v в данный момент времени ($v_{\text{ìãíîâåííé}}$).

$$\boxed{v_{\text{ìãí}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}}$$

<u>Мгновенная скорость есть предел отношения изменения пути ΔS к изменению времени Δt, когда $\Delta t \to 0$</u>

Итак: $v_{\text{ìãí}} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t} = S'(t_0)$

$$\boxed{v_{\text{ìãí}} = S'(t_0)}$$

<u>Производная от пути по времени равна скорости при неравномерном прямолинейном движении в данный момент времени t_0.</u>

<u>Примеры:</u>
1) Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^3$ в точке $x_0 = 2$
2) Движение определяется уравнением $S(t) = 2t^2 - t + 1$.
а) Найти скорость тела через 5 часов
б) Найти момент времени, в который тело полностью остановится.

<u>*3) Экономический смысл производной*</u>
<u>*Задача о производительности труда.*</u>
Пусть функция $u = u(t)$ выражает количество произведенной продукции u за время t. Необходимо найти производительность труда в момент времени t_0. За период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ количество произведенной продукции изменится от значения $u_0 = u(t_0)$ до $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$. Тогда средняя производительность труда за этот период времени $z_{cp} = \dfrac{\Delta u}{\Delta t}$. Очевидно, что <u>*производительность труда в момент времени t_0*</u> можно определить как предельное значение средней производительности за период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$, при $\Delta t \to 0$, т.е.

$$z=\lim_{\Delta t\to 0} z_{cp}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t}=u'(t_0)$$

Таблица производных.

Простейшие элементарные функции

1) $y=c,\ c=const,\quad (c)'=0$

2) $(x^n)'=n\cdot x^{n-1},\quad n\in R$

3) $(a^x)'=a^x\ln a,\quad a>0,\ a\neq 1$

$(e^x)'=e^x$

4) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

5) $(\sin x)'=\cos x$

6) $(\cos x)'=-\sin x$

7) $(tgx)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

8) $(ctgx)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

9) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

10) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11) $(arctgx)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

12) $(arcctgx)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

Сложные функции (u=$u(x)$- некоторая функция)

1) $y=c,\ c=const,\quad (c)'=0$

2) $(u^n)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u',\quad n\in R$

3) $(a^u)'=a^u\ln a\cdot u',\quad a>0,\ a\neq 1$

$(e^u)'=e^u\cdot u'$

4) $(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u\ln a}$

$(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$

5) $(\sin u)'=u'\cdot\cos u$

6) $(\cos u)'=-u'\cdot\sin u$

7) $(tgu)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$

8) $(ctgu)'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$

9) $(\arcsin u)'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

10) $(\arccos u)'=-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

11) $(arctgu)'=\dfrac{u'}{1+u^2}$

12) $(arcctgu)'=-\dfrac{u'}{1+u^2}$

Доказательство: докажем некоторые из приведенных формул.

3) $y=a^x$

$$(a^x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=\left|a^{\Delta x}-1\sim\Delta x\ln a,\ \Delta x\to 0\right|=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x\Delta x\ln a}{\Delta x}=a^x\ln a$$

5) $y=\sin x$

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x_0+\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}2}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\frac{2x_0+\Delta x}{2}=\cos x_0$$

2. Основные теоремы о дифференцируемых функциях и их приложения.

Если функция в точке x *имеет конечную производную, то функция называется дифференцируемой в этой точке.*

ТЕОРЕМА: Если $\exists f'(x)$ *и* $\exists g'(x)$, то $\exists\,(f(x)+g(x))'$ и при этом производная суммы равна сумме производных.

$$\boxed{(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)}$$

Доказательство: Обозначим $f(x)+g(x)=z(x)$.

Найдем

$$z'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{z(x+\Delta x)-z(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x))-(f(x)+g(x))}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f(x+\Delta x)-f(x))+(g(x+\Delta x)-g(x))}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)+\Delta g(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}=f'(x)+g'(x)\quad\Rightarrow\qquad (f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x).$$

<u>ТЕОРЕМА:</u> Если $\exists f'(x)$ *и* $\exists g'(x)$, то $\exists\,(f(x)\cdot g(x))'$ и при этом производная произведения равна сумме произведений производной первой функции на вторую и первой функции на производную второй.

$$\boxed{(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)}$$

<u>Доказательство:</u> Обозначим $f(x)\cdot g(x)=z(x)$.

$$\Delta z=z(x+\Delta x)-z(x)=f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)+f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)=g(x+\Delta x)(f(x+\Delta x)-f(x))+$$

$$+f(x)(g(x+\Delta x)-g(x))=g(x+\Delta x)\cdot\Delta f(x)+f(x)\cdot\Delta g(x)$$

$$z'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)\Delta f(x)+f(x)\Delta g(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}g(x+\underbrace{\Delta x}_{\to 0})+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}f(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

<u>ТЕОРЕМА:</u> Если $\exists f'(x)$ *и* $\exists g'(x)$, причем $g(x)\neq 0$, то $\exists\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$ и при этом имеет место формула:

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}}$$

<u>Замечание:</u> Производная постоянной функции равна нулю.

<u>Доказательство:</u> Пусть $C=const$, тогда $\tilde{N}'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=0$

<u>СЛЕДСТВИЯ:</u> 1) $(f(x)-g(x))'=f'(x)-g'(x)$

2) $(\tilde{N}\cdot f(x))'=\tilde{N}\cdot f'(x)$, где $C=const$

<u>Примеры:</u> 1) $y=2x^4+\frac{1}{x}-3\sqrt[4]{x^3}+\ln 10$; 2) $y=x^4\cdot\ln x$; 3) $y=\frac{5x+1}{\sin x}$; 4) $y=\frac{3^x}{1+x^2},\quad y'(0)=?$

3. Дифференцирование сложной и обратной функций

Пусть $y=f(t)$ - функция от переменной t. А $t=\varphi(x)$ - функция от независимой переменной *x*. Т.е. задана сложная функция $y=f(\varphi(x))$.

<u>ТЕОРЕМА:</u> Если $y=f(t)$ и $t=\varphi(x)$ - дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции существует и равна производной данной функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную промежуточного аргумента по независимой переменной x, т.е. $\boxed{y'(x)=f'(t)\cdot\varphi'(x)}$

Или: $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$

Используя правила дифференцирования и формулу дифференцирования сложной функции, заполним вторую часть таблицы.

Пусть $y = f(x)$ - дифференцируемая и строго монотонная функция на некотором промежутке X. Если переменную y рассматривать как аргумент, а переменную x как функцию, то новая функция $x = \varphi(y)$ является обратной к данной функции.

ТЕОРЕМА: Для дифференцируемой функции с производной, не равной 0, производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции, т.е.

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}}$$

Доказательство:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \left| \begin{array}{l} \Delta x \neq\Rightarrow \Delta y \neq 0 \\ \Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0 \end{array} \right| = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

Примеры: 1) $y = (3x - 4\sqrt[3]{x} + 2)^4$; 2) $y = \cos 3x \cdot e^{\sin 2x}$; 3) $y = \frac{4x + 7tgx}{\sqrt{1 + 9x^2}}$; 4) $y = \ln(arctg 2x)$

4. Дифференцирование показательно - степенной функции

$y = \left(U(x)\right)^{V(x)}$. Прологарифмируем: $\ln y = V(x)\ln U(x)$. Продифференцируем:

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = V'(x)\ln U(x) + V(x)\frac{U'(x)}{U(x)} \Rightarrow \quad y' = \left(U(x)\right)^{V(x)}\left(V'(x)\ln U(x) + V(x)\frac{U'(x)}{U(x)}\right)$$

Раскроем скобки, получим: $\boxed{\left(U^V\right)' = U^V \cdot \ln U \cdot V' + V \cdot U^{V-1} \cdot U'}$

Пример: $y = x^{x^2+1}$ $\quad y' = x^{x^2+1}\ln x \cdot 2x + (x^2+1)x^{x^2}$

5. Производная неявной функции

Рассмотрим дифференцирование неявной функции, заданной в виде $F(x, y) = 0$. Для нахождения производной функции y, заданной неявно, нужно продифференцировать обе части уравнения, рассматривая y как функцию от x, а затем из полученного уравнения найти производную y'.

Пример: Найти производную функции y, заданную уравнением $x^2 - xy + \ln y = 2$, и вычислить её значение в точке (2;1).

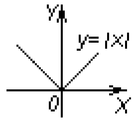
Решение: $2x - (y + xy') + \frac{y'}{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2xy - y^2}{xy - 1} \quad \Rightarrow \quad y'(2) = 3$

Связь между непрерывностью и дифференцируемостью.

ТЕОРЕМА: Если функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Заметим, что обратная теорема не верна.

Пример: Доказать, что функция $y = |x|$ не дифференцируема в точке $x = 0$.



Решение: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x}$. Очевидно, что при $x = 0$ производная не существует, т.к. отношение $\frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \Delta x > 0 \\ -1, & \Delta x < 0 \end{cases}$, т.е. не имеет предела при $\Delta x \to 0$. Данная функция непрерывна в точке $x = 0$, но не дифференцируема в точке $x = 0$. Заметим, что геометрически это означает отсутствие касательной к кривой в точке $x = 0$.

Таким образом непрерывность функции – необходимое, но не достаточное условие дифференцируемости функции.

1.6 Лекция №6 (2 часа).
Тема: «Предельные величины в экономике»

1.6.1 Вопросы лекции:
1. Предельные величины в экономике.
2. Эластичность функции.
3. Примеры.

1.6.2 Краткое содержание вопросов:
1. Предельные величины в экономике.
Пусть функция $y = y(x)$ задает зависимость издержек производства y от количества выпускаемой продукции x. Пусть Δx - прирост продукции, тогда Δy - приращение издержек производства и $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ - среднее приращение издержек производства на единицу продукции. Производная $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ выражает ***предельные издержки*** *производства и характеризует приближенно дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции.*

Аналогично определяются *предельная выручка, предельный доход, предельный продукт, предельная полезность, предельная производительность* и т.д.

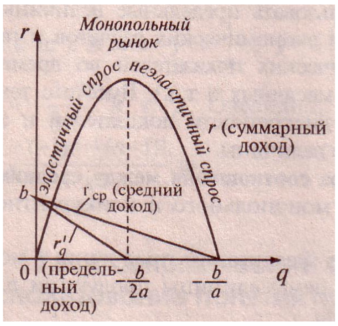
Предельные величины характеризуют *процесс, изменение экономического объекта*. Таким образом, *производная выступает как скорость изменения некоторого экономического объекта (процесса) по времени или относительного другого фактора*.

Рассмотрим **соотношения между средним и предельным доходом** в условиях монопольного и конкурентного рынков.

Замечание: В экономической литературе предельные величины называют также *маржинальными*. При их записи к обычному обозначению величин добавляется буква *M*. При записи средних величин добавляется буква *A*. Например: *MR* – предельный доход, *AR* – средний доход.

Пусть r – суммарный доход (выручка) от реализации продукции,
p – цена единицы продукции,
q – количество продукции Тогда $r=pq$

В **условиях монополии** одна или несколько фирм полностью контролируют предложение некоторой продукции, а значит и цены на неё. При этом с увеличением цены спрос на продукцию падает. Пусть это происходит по прямой $p=aq+b$, где $a<0$, $b>0$, т.е. линейная убывающая функция. Тогда $r=(aq+b)q=aq^2+bq$. И средний доход на единицу продукции $r_{cp} = \frac{r}{q} = aq + b$. Предельный доход составит $r_q' = 2aq + b$ (рис. 1)



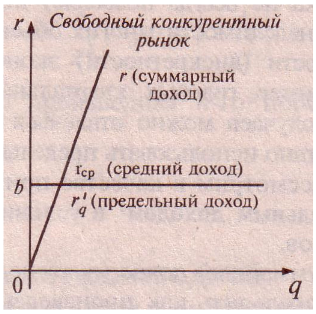


рис. 1 рис. 2

Следовательно, <u>*в условиях монопольного рынка с ростом количества реализованной продукции предельный доход снижается, что приводит к уменьшению среднего дохода*</u>.

В условиях **<u>совершенной конкуренции</u>** каждая фирма не способна контролировать уровень цен. Пусть преобладающая рыночная цена $p=b$. При этом суммарный доход составит $r=bq$ и соответственно средний доход $r_{cp} = \dfrac{r}{q} = b$ и предельный доход $r_q' = b$ (рис. 2).

Таким образом, <u>*в условиях свободного конкурентного рынка средний и предельный доходы совпадают.*</u>

2. Эластичность функции.

Для исследования экономических процессов и решения прикладных задач используется понятие <u>*эластичности функции.*</u>

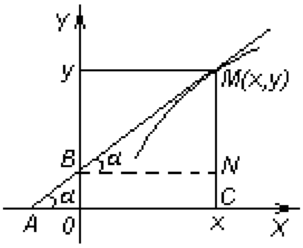
<u>ОПР:</u> <u>*Эластичностью функции*</u> $E_x(y)$ называется предел относительного приращения функции y к относительному приращению переменной x при $\Delta x \to 0$:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}\cdot y'$$

Эластичность функции показывает приближенно, на сколько процентов изменится функция $y = f(x)$ при изменении независимой переменной x на 1%.

<u>Геометрический смысл:</u>

$E_x(y) = \dfrac{x}{y}\cdot y' = \dfrac{x}{y} tg\alpha$, где $tg\alpha$ - тангенс угла наклона касательной в точке $M(x;y)$



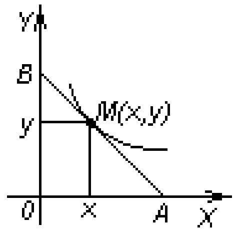


рис. 3 рис. 4

ΔMBN: $MN = x \cdot tg\alpha$, $MC = y$, $\Delta MBN \infty \Delta AMC \Rightarrow \dfrac{MN}{MC} = \dfrac{MB}{MA}$. Значит $E_x(y) = \dfrac{MB}{MA}$

Т.е. <u>*эластичность функции (по абсолютной величине) равна отношению расстояний по касательной от данной точки графика функции до точек её пересечения с осями Ох и Оу*</u>.

Если точки *A* и *B* находятся по одну сторону от точки *M*, то эластичность положительна (рис. 3), если по разные, то отрицательна (рис. 4).

Свойства эластичности функции:

1) Эластичность функции равна произведению независимой переменной x на темп изменения функции $T_y = (\ln y)' = \dfrac{y'}{y}$, т.е. $E_x(y) = x \cdot T_y$.

2) Эластичность произведения (частного) двух функций равна сумме (разности) эластичностей этих функций. $E_x(UV) = E_x(U) + E_x(V)$ и $E_x(\dfrac{U}{V}) = E_x(U) - E_x(V)$.

3) Эластичности взаимнообратных функций – взаимно обратные величины. $E_x(y) = \dfrac{1}{E_y(x)}$

Итак, эластичность спроса y относительно цены (или дохода) x показывает приближенно, на сколько процентов изменится спрос при изменении цены (дохода) x на 1%. Причем:

- если эластичность спроса $|E_x(y)| > 1$, то спрос считают *эластичным*;
- если эластичность спроса $|E_x(y)| < 1$, то спрос считают *неэластичным* относительно цены (дохода);
- если эластичность спроса $|E_x(y)| = 1$, то говорят о спросе *с единичной эластичностью*.

Выясним как влияет эластичность спроса относительно цены на суммарный доход *r=pq* при реализации продукции. Пусть *p=p(q)*- произвольная функция (не обязательно линейная). Найдем предельный доход.

$$r'_q = (pq)'_q = p'_q \cdot q + p \cdot 1 = p\left(1 + \frac{q}{p} p'_q\right) = p(1 + E_q(p))$$

По свойству 3: $E_q(p) = \dfrac{1}{E_p(q)}$ и $E_p(q) < 0$, получим при произвольной кривой спроса

$$r'_q = p\left(1 + \frac{1}{|E_p(q)|}\right)$$

- если спрос эластичен, то предельный доход r'_q - положителен при любой цене. Это означает, что *для продукции эластичного спроса с возрастанием цены суммарный доход от реализации продукции увеличивается*.
- если спрос неэластичен, то предельный доход r'_q - отрицателен при любой цене. Это означает, что *для продукции неэластичного спроса с возрастанием цены суммарный доход от реализации продукции уменьшается*.

3. Примеры.

Пример 1: Зависимость между издержками производства y и объёмом выпускаемой продукции x выражается функцией $y = 50x - 0{,}05x^3$ (ден. ед.). Определить средние и предельные издержки при объёме продукции 10 ед.

Решение: Функция средних издержек: $y_{cp} = \dfrac{y}{x} = 50 - 0.05x^2$ $\quad y_{cp}(10) = 45$ (ден. ед.).

Функция предельных издержек: $y'(x) = 50 - 0{,}15x^2$ $\quad y'(10) = 35$ (ден. ед.).

Итак, если средние издержки на производство единицы продукции =45 ден. ед., то предельные издержки (дополнительные затраты на производство ед. продукции), при объёме выпускаемой продукции 10 ед., =35 ден. ед.

Пример 2: Зависимость между себестоимостью единицы продукции y (тыс. руб.) и выпуском продукции x (млрд. руб.) выражается функцией $y = -0{,}5x + 80$. Найти эластичность себестоимости при выпуске продукции, =60 млн. руб.

Решение:

$E_x(y) = \dfrac{x}{y} \cdot y' \quad \Rightarrow \quad E_x(y) = \dfrac{-0{,}5x}{-0{,}5x + 80} = \dfrac{x}{x - 160} \Rightarrow \quad E_{x=60}(y) = -0{,}6$, т.е. при выпуске продукции, равном 60 млн. руб., увеличение его на 1% приведет к снижению себестоимости на 0,6%.

Пример 3: Объём продукции u, произведенный бригадой рабочих, может быть описан уравнением $u = -\dfrac{5}{6}t^3 + \dfrac{15}{2}t^2 + 100t + 50$ (ед.), $1 \le t \le 8$, где t – рабочее время в часах. Вычислить производительность труда, скорость и темп её изменения через час после начала работы и за час до её окончания.

Решение: Производительность труда: $z(t) = u'(t) = -\dfrac{5}{2}t^2 + 15t + 100$ (ед./ ч.)

Скорость производительности: $z'(t) = -5t + 15$ (ед./ ч^2)

Темп изменения производительности: $T_z(t) = (\ln z(t))' \quad \Rightarrow \quad T_z(t) = \dfrac{z'(t)}{z(t)} = \dfrac{2t - 6}{t^2 - 6t - 40}$ (ед./ч.)

Если $t_1 = 1$, то $z(1) = 112{,}5$ (ед./ ч.), $z'(1) = 10$ (ед./ ч^2), $T_z(1) = 0{,}09$ (ед./ч.)

Если $t_2 = 8 - 1 = 7$, то $z(7) = 82{,}5$ (ед./ ч.), $z'(7) = -20$ (ед./ ч^2), $T_z(7) = -0{,}24$ (ед./ч.)

Итак, к концу работы производительность труда снижается. Изменение знаков говорит о том, что увеличение производительности труда в первые часы рабочего дня сменяется её снижением в последние часы.

Пример 4: Опытным путем установлены функции спроса $q = \dfrac{p+8}{p+2}$ и предложения $s = p + 0{,}5$, где q и s – количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени, p – цена товара. Найти: а) равновесную цену; б) эластичность спроса и предложения для этой цены; в) изменение дохода при увеличении цены на 5% от равновесной.

Решение:

а) Равновесная цена определяется из условия q=s: $\dfrac{p+8}{p+2} = p + 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad p = 2$ (ден. ед.) - равновесная цена.

б) $E_x(y) = \dfrac{x}{y} \cdot y'$

$E_p(q) = -\dfrac{6p}{(p+2)(p+8)}$ - эластичность спроса и $E_p(s) = \dfrac{2p}{2p+1}$ - эластичность предложения.

Для равновесной цены $p=2$: $E_{p=2}(q) = -0{,}3$ и $E_{p=2}(s) = 0{,}8$.

$E_{p=2}(q) < 1$ и $E_{p=2}(s) < 1 \Rightarrow$ спрос и предложение при равновесной цене неэластичны. Т.е. при увеличении цены p на 1% спрос уменьшится на 0,3%, а предложение увеличится на 0,8%.

в) При увеличении цены на 5% от равновесной спрос уменьшится на $5 \cdot 0{,}3 = 1{,}5\%$, значит доход возрастет на 3,5%.

Пример 5: Как связаны предельные и средние полные затраты предприятия, если эластичность полных затрат равна 1?
Решение:
Пусть $y = f(x)$ - полные затраты предприятия, где x – объём выпускаемой продукции.

Средние затраты на производство ед. продукции $y_{cp} = \dfrac{y}{x}$

$E_x(y) = 1$ и $1 = \dfrac{x}{y} \cdot y' \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{y}{x}$ - предельные издержки предприятия.

Итак, $y_{cp} = y'$, т.е. предельные издержки = средним издержкам.

Заметим: полученное утверждение верно только для линейных функций издержек.

1.7 Лекция №7 (2 часа).
Тема: «Производные и дифференциалы высших порядков»

1.7.1 Вопросы лекции:
1. Определение дифференциала.
2. Геометрический смысл.
3. Приближенные вычисления с помощью дифференциала.
4. Производные высших порядков

1.7.2 Краткое содержание вопросов:
1. Определение дифференциала

ОПР: Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0, если ее приращение Δy в этой точке можно представить в виде $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, где A – некоторое число, не зависящее от Δx, $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Выясним связь между дифференцируемостью функции в точке и существованием производной в этой точке.

ТЕОРЕМА: Для того, чтобы функция $f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она имела в точке x_0 конечную производную.

Доказательство:
1) необходимость: $f(x)$- дифференцируемой в точке x_0
$\Rightarrow \quad \Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \quad \Big| : \Delta x \neq 0$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$. Перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$.

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (A + \underbrace{\alpha(\Delta x)}_{\to 0}) = A + 0 = A = f'(x_0)$. Т.е. производная в точке x_0 существует и равна числу A (т.е. конечная).

2) достаточность: Пусть $\exists\, f'(x_0) = A$, т.е. $\exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) = A \quad \Rightarrow$ по теореме о связи предела функции с б.м. величинами, имеем: $\alpha(\Delta x) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} - A$ - бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

$\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = \Delta y - A \cdot \Delta x \quad \Rightarrow \quad \Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \quad \Rightarrow \quad f(x)$ дифференцируемой в точке x_0.

Слагаемое $A \cdot \Delta x$ называется *главной частью приращения* функции.

ОПР: *Дифференциалом* функции $f(x)$ в точке x_0 называется главная, линейная относительно Δx часть полного приращения функции.

$dy = A \cdot \Delta x$

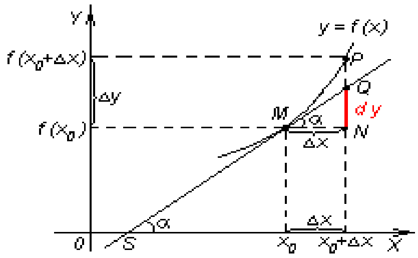
Учитывая, что $A = f'(x_0)$, имеем $\boxed{dy = f'(x_0) \cdot \Delta x}$

Пусть $f(x) = x$, т.е. $y=x$, тогда $dx = (x)' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, т.е. $dx = \Delta x$.
Дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной.

$\boxed{dy = f'(x_0) \cdot dx}$

2. Геометрический смысл

Геометрический смысл:



Рассмотрим $M(x_0; f(x_0))$ *и* $P(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$

MS – касательная к графику функции $y = f(x)$. Обозначим $\angle XSM = \alpha$

Построим $MN \parallel Ox$. Обозначим $MS \cap PN = Q$

$\Delta y = PN$

ΔMNQ - прямоугольный: $NQ = \Delta x \cdot tg\alpha = \Delta x \cdot f'(x_0) = dy$. Т.е. *дифференциал функции равен по величине отрезку* NQ*, когда аргумент* x *получил приращение* $\Delta x = MN$.

Из построения видно, что $PN \neq PQ$. Т.о. *дифференциал функции равен приращению ординаты касательной MS к графику этой функции в точке* x_0*. А приращение функции* $\Delta y = PN$ *есть приращение ординаты самой функции f(x) в точке* x_0

3. Приближенные вычисления с помощью дифференциала

Рассмотрим разность

$\Delta y - dy = (A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x) - f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x - f'(x_0) = \alpha(\Delta x)\Delta x$ - бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

$\Delta y - dy \approx 0$

$\boxed{\Delta y \approx dy}$

При этом абсолютная погрешность равна $|\Delta y - dy|$.

Пример 1: $y = x^2$. Найти приближенно изменение *y,* когда *x* меняется от 2 до 2,01.

Пример 2: Найти приближенное значение функции $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 + 8x - 16}$ при $x = 3{,}94$, исходя из ее точного значения при $x_0=4$.

4. Производные высших порядков

Рассмотрим некоторую функцию $f(x)$ и пусть $\exists f'(x)$ - производная первого порядка. Очевидно, что она сама представляет некоторую функцию, зависящую от *x.* Если существует $f''(x) = (f'(x))'$, то она называется производной второго порядка данной функции и т.д. Аналогично можно рассматривать $f'''(x),\ f^{(IV)}(x),\ f^{(V)}(x)...$
Производной *n*-го порядка называется производная от производной *(n-1)*-го порядка.

Пример: Найти производные третьего порядка: 1) $y = x^2 + \cos 2x$ 2) $y = 5x^3 + \ln x - 1$

Рассмотрим *механический смысл второй производной*

Выше было установлено, что если точка движется прямолинейно по закону $S = S(t)$, то $S'(t)$ представляет собой скорость изменения пути в момент времени t. Следовательно, *вторая производная пути по времени* $S''(t) = (S'(t))' = v'(t)$ *есть скорость изменения скорости или* ***ускорение*** *точки в момент времени t.*

$$\boxed{a(t) = v'(t) = S''(t)}$$

Пример: $S = \dfrac{gt^2}{2}$ $a(t) = g$ - ускорение свободного падения.

1.8 Лекция №8 (2 часа).

Тема: «Исследование функций с помощью первой производной»

1.8.1 Вопросы лекции:

1. Возрастание и убывание графика функции.
2. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

1.8.2 Краткое содержание вопросов:

1. Возрастание и убывание графика функции

Установим связь между свойствами функций и их производными. Изучим точные методы исследования функции и построения графиков с помощью первой и второй производных.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$ непрерывную и определенную на некотором промежутке X.

ОПР: Функция называется *возрастающей*, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т.е. $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ (рис. 1)

ОПР: Функция называется *убывающей*, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, т.е. $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$ (рис. 2)

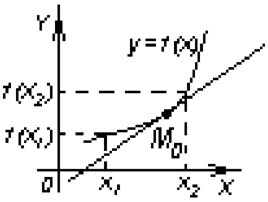


рис. 1

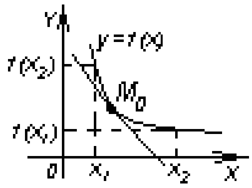


рис.2

Установим связь между возрастанием (убыванием) функции и ее производной.

Рассмотрим возрастающую функцию $y = f(x)$ непрерывную и определенную на некотором промежутке X.

Возьмем любую точку $M_0(x_0; y_0)$ на графике и проведем касательную к графику функции в этой точке.

Обозначим α_1 - угол наклона касательной к оси Ox.

Вспомним геометрический смысл производной: $f'(x) = k$, тогда

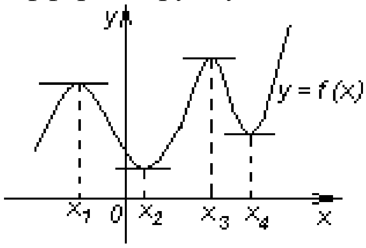
$f'(x_0) = k_{kac} = tg\alpha_1$, α_1 - острый угол, поэтому $tg\alpha_1 > 0 \Rightarrow f'(x_0) > 0$

Аналогично для убывающей функции. Угол α_2 наклона касательной к оси Ox тупой, поэтому $tg\alpha_2 < 0 \Rightarrow f'(x_0) < 0$

Обобщим сказанное в виде теоремы.

<u>ТЕОРЕМА (*признак монотонности*):</u> Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и внутри интервала $f'(x) > 0$ $[\, f'(x) < 0 \,]$, то график функции $y = f(x)$ возрастает [убывает] на интервале $(a;b)$.

Рассмотрим функцию, которая имеет несколько интервалов возрастания и убывания, дифференцируемую на всей области определения.



Точки x_1, x_2, x_3, x_4 отделяют интервалы возрастания от интебрвалов убывания.
Заметим, что значение функции в точке x_1 больше значений функции во всех «соседних» точках как слева, так и справа от x_1. Поэтому в точке x_1 функция имеет максимум. В точке x_3 функция тоже имеет максимум, хотя $f(x_1) < f(x_3)$. Аналогично для точек минимума x_2 и x_4.

<u>ОПР:</u> Функция $y = f(x)$ имеет <u>*максимум [минимум]*</u> в точке x_0, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех точек, отличных от x_0 и принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ $[\, f(x) > f(x_0) \,]$.
<u>*Замечание:*</u> Точка x_1 - локальный максимум, x_3 - глобальный максимум,
x_4 - локальный минимум, x_2 - глобальный минимум.
Точки максимума и минимума объединяют под общим названием точек <u>*экстремума*</u>.

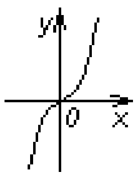
Установим связь между производной и точками экстремума.

<u>ТЕОРЕМА (*необходимое условие экстремума*):</u> Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то производная функции в этой точке равна нулю или не существует.

Теорема имеет следующий геометрический смысл:
Если x_1, x_2, x_3, x_4 - точки экстремума и функция дифференцируема в этих точках, то можно провести касательные в этих точках, причем $k_1 = f'(x_1) = tg\alpha_1 = 0 \;\Rightarrow\; \alpha_1 = 0$. Аналогично $\alpha_2 = 0,\;\; \alpha_3 = 0$ и $\alpha_4 = 0$. Это означает, что касательные параллельны оси Ox.

Заметим, что обратная теорема не верна. Из того, что $f'(x_0) = 0$ или $\nexists\, f'(x_0)$ не следует, что точка x_0 является точкой экстремума.

<u>Пример:</u> $y = x^3$



$y' = 3x^2 \qquad y' = 0 \quad при \quad x = 0$

Тем не менее, в точке $(0,0)$ нет экстремума, поэтому точки в которых производная равна нулю или не существует называют точками возможного экстремума (*критическими точками*), а условие $f'(x_0) = 0$ или $\nexists\ f'(x_0)$ является лишь *необходимым.*

Чем же отличаются, например, точка x_3 от точки $x=0$?
В точке x_3 функция меняет характер монотонности (с возрастания на убывание), т.е. производная слева от точки x_3 положительна, а справа отрицательна. В точке $x=0$ функция $y = x^3$ характер монотонности не меняет. Слева и справа от критической точки функция возрастает и её производная сохраняет положительный знак. Сформулируем достаточный признак экстремума.

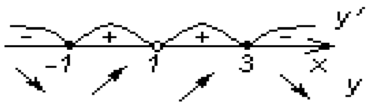
ТЕОРЕМА (*достаточное условие экстремума*): Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема во всех точках своей области определения, и точка x_0 принадлежит области определения. Если производная $f'(x)$ при переходе аргумента слева направо через критическую точку x_0 меняет знак с «+» на «-», то x_0 - точка максимума, если с «-» на «+», то x_0 - точка минимума, а если производная знака не меняет, то в точке x_0 экстремума нет.

Пример: Найти экстремумы функции $y = \dfrac{(3-x)^2}{1-x}$

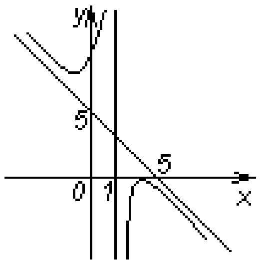
Решение: $D_y: \quad x \neq 1$

$y' = \dfrac{-x^2+2x+3}{(1-x)^2}$ $\qquad y' = 0$ при $-x^2+2x+3=0 \qquad x=-1$ *и* $x=3$ - критические точки.

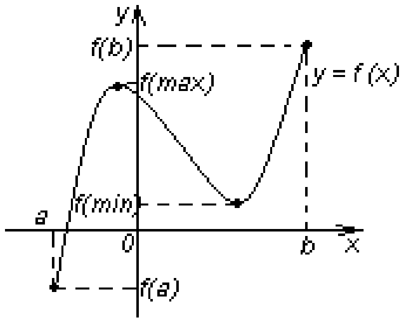
$$\nexists\ y' \quad \text{при} \quad x = 1 \notin D_y$$



$x \in (-\infty;-1) \cup (3:+\infty)$ - график функции убывает
$x \in (-1;1) \cup (1:3)$ - график функции возрастает
$x = -1$ - точка минимума
$x = 3$ - точка максимума
$y_{\min}(-1) = 8$ - минимальное значение функции
$y_{\max}(3) = 0$ - максимальное значение функции.



2. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке
Рассмотрим функцию $y = f(x)$ непрерывную на отрезке $[a;b]$.



Может случиться так, что значения функции на концах отрезка больше максимума или меньше минимума. $f(a) < f(\min)$, $f(b) > f(\max)$. Поэтому находить наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ нужно находить следующим образом.

План нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$

1) Находим область определения функции. Проверяем, принадлежит ли отрезок $[a;b]$ области определения.
2) Находим точки экстремума функции и выбираем те из них, которые принадлежат отрезку $[a;b]$.
3) Находим значения функции на концах отрезка ($f(a)$ *и* $f(b)$) и значения функции в точках экстремума.
4) Выбираем из всех полученных значений наибольшее и наименьшее.

Пример: Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \dfrac{(3-x)^2}{1-x}$ на отрезке $[-4;0]$

Ответ: $y\ (-4) = 9\dfrac{4}{5}$ - наибольшее значение, $y(-1) = 8$ - наименьшее значение.

Пример: Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2\sin x + \cos 2x$ на отрезке $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

Решение: $D_y:\ x \in R \quad \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right] \in D_y$

$y' = 2\cos x - 2\sin 2x$

$y' = 0 \quad \textit{при} \quad 2\cos x(1 - 2\sin x) = 0$

$\cos x = 0 \qquad\qquad \sin x = \dfrac{1}{2}$

$x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z \qquad\qquad x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$

$x = \dfrac{\pi}{2} \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right] \qquad\qquad x = \dfrac{\pi}{6} \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

$y(0) = 0 + 1 = 1$ - наименьшее

$y(\dfrac{\pi}{2}) = 2 - 1 = 1$ - наименьшее

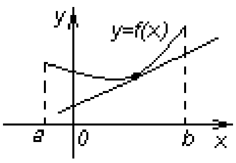
$y(\dfrac{\pi}{6}) = 1{,}5$ - наибольшее

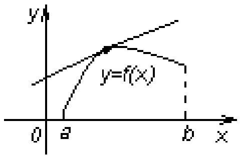
1.9 Лекция №9 (2 часа).
Тема: «Исследование функций с помощью второй производной»

1.8.1 Вопросы лекции:
1. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точка перегиба.
2. Полное исследование функции.

1. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точка перегиба
Еще одной важной характеристикой функции является характер её выпуклости.

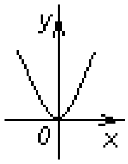
ОПР: График дифференцируемой функции называется *выпуклым [вогнутым]* в интервале $(a;b)$, если он расположен ниже [выше] любой своей касательной в этом интервале.

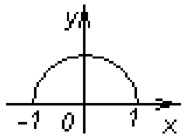




Пример: Функция $y = x^2$ имеет вогнутый график на всей оси R.

Полуокружность $y = \sqrt{1 - x^2}$ имеет выпуклый график на $[-1;1]$





За выпуклость и вогнутость графика функции «отвечает» вторая производная.

ТЕОРЕМА: Если функция $y = f(x)$ имеет вторую производную во всех точках интервала $(a;b)$ и если во всех точках этого интервала $f''(x) > 0$, то график функции вогнутый в интервале $(a;b)$, если же $f''(x) < 0$, то график функции выпуклый в интервале $(a;b)$.

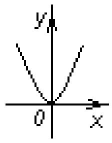
ОПР: Точка $M_0(x_0; f(x_0))$ называется точкой перегиба графика функции $y = f(x)$, если проходя через эту точку функция меняет характер выпуклости / вогнутости.

ТЕОРЕМА (*необходимое условие точки перегиба):* Пусть график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M_0(x_0; f(x_0))$, то вторая производная в этой точке равна нулю или не существует.

Доказательство: Метод от противного. Пусть $f''(x_0) \neq 0 \Rightarrow f''(x) < 0$ или $f''(x) > 0$. Значит в точке $M_0(x_0; f(x_0))$ функция имеет определенное направление выпуклости / вогнутости, а это противоречит наличию перегиба в точке $M_0(x_0; f(x_0))$.

Замечание: Обратное утверждение не верно. Не всякая точка, в которой $f''(x) = 0$ или $\nexists\, f''(x)$ является точкой перегиба.

Пример: $y = x^4$



$$y' = 4x^3 \qquad y' = 0 \quad при \quad x = 0$$

Тем не менее, в точке (0,0) нет перегиба, поэтому точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует, называют точками возможного перегиба (*стационарными точками*), а условие $f''(x) = 0$ или $\nexists\, f''(x)$ является лишь *необходимым.* Сформулируем достаточный признак точки перегиба.

ТЕОРЕМА (*достаточное условие точки перегиба*): Пусть x_0 - стационарная точка. Если проходя через стационарную точку вторая производная меняет знак, то график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M_0(x_0; f(x_0))$.

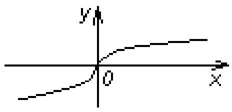
Пример: $y = \dfrac{(3-x)^2}{1-x}$

Ответ: $x \in (-\infty;1)$ - график функции вогнутый

$x \in (1;+\infty)$ - график функции выпуклый

точек перегиба нет.

Пример: $y = \sqrt[3]{x}$



$D_y: \quad x \in R \qquad y'' = -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^5}} \qquad y'' \neq 0 \qquad \nexists\, y''$ при $x=0$ – стационарная точка

$x \in (-\infty;0)$ - график функции вогнутый

$x \in (0;+\infty)$ - график функции выпуклый

(0,0) - точка перегиба.

2. Полное исследование функции.

Исследование функций и построение графиков следует проводить по следующей схеме:

1) Найти область определения функции D_y.

2) Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва функции, определить их род.

3) Найти асимптоты графика функции.

4) Если возможно, найти пересечение графика функции с осями координат. Если отыскание точек пересечения затруднительно, то посмотреть координаты по графику (приблизительно).

5) Исследовать функцию на четность / нечетность.

6) Определить интервалы монотонности и точки экстремума функции.

7) Определить интервалы выпуклости и вогнутости, найти точки перегиба графика функции.

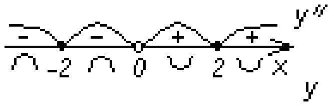
8) Построение по пунктам исследования (построение графика принято начинать с построения асимптот).

9) Определить множество значений функции E_y.

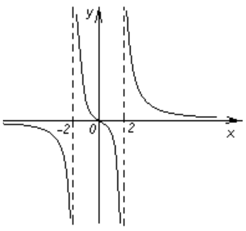
Пример: Исследовать функцию и построить график $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

$x = \pm 2$ - вертикальные асимптоты, $y = 0$ - наклонная асимптота

Функция монотонно убывает на D_y, точек экстремума нет.

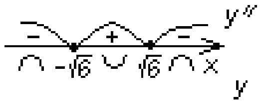


(0,0) – точка перегиба.

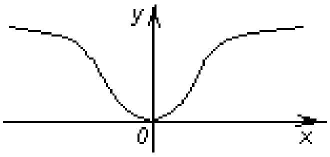


x	-4	-3	$-\frac{5}{2}$	-1	1
y	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{10}{9}$	3	-3

Пример: $y = \ln(x^2 + 1)$
Асимптот нет
(0,0) – точка минимума



$(\sqrt{6}; \ln 7)$ и $(-\sqrt{6}; \ln 7)$ - точки перегиба.



x	1	3	5
y	ln2 ≈0,7	ln10 ≈2,3	ln26 ≈3,3

1.10 Лекция №10 (2 часа).
Тема: «Неопределенный интеграл»

1.10.1 Вопросы лекции:
1. Первообразная функции и ее свойства.
2. Понятие неопределенного интеграла, основные свойства.
3. Таблица интегралов.
4. Методы интегрирования: непосредственное интегрирование, замена переменной, интегрирование по частям.

1.10.2 Краткое содержание вопросов:
1. Первообразная функция и ее свойства

Одной из основных задач дифференциального исчисления является отыскание производной заданной функции. Обратной задачей является нахождение по данной функции $f(x)$ такой функции $F(x)$, производная которой была бы равна функции $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$.

Восстановление функции по известной производной этой функции составляет одну из основных задач интегрального исчисления.

ОПР: Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на некотором промежутке X,
если для всех значений x из этого промежутка выполняется равенство

$$F'(x) = f(x)$$

Примеры: 1) $F(x) = \sin x$ - первообразная для функции $f(x) = \cos x$ на множестве R, т. к. $(\sin x)' = \cos x, \forall x \in R$

2) $F(x) = x^3$ - первообразная для функции $f(x) = 3x^2$ на множестве R, т. к. $(x^3)' = 3x^2$

Зам: $F(x) = x^3 + C$, где C=const тоже является первообразной для функции $f(x) = 3x^2$, т. к. $(x^3 + C)' = 3x^2$

ТЕОРЕМА: Если $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, то любая другая первообразная для функции $f(x)$ на этом промежутке X, может быть представлена в виде $F(x)+C$, где С- некоторая постоянная.

Доказательство: Пусть $\hat{O}(x)$- другая первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, т. е. $\hat{O}'(\tilde{o}) = f(x)$

Рассм. $(\hat{O}(\tilde{o}) - F(x))' = \hat{O}'(\tilde{o}) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \Rightarrow$

$\hat{O}(\tilde{o}) - F(x) = C \quad \Rightarrow \quad \hat{O}(x) = F(x) + C$ ч. т. д.

2. Понятие неопределенного интеграла, основные свойства

ОПР: Если функция $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$, то множество функций $F(x)+C$, где C=const, называется *неопределённым интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается символом

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

f(x)- подынтегральная функция, f(x)dx-подынтегральное выражение, x- переменная интегрирования.

Пример: Проверить, что $\int 4x^3 dx = x^4 + C$

Продифференцируем: $(x^4 + C)' = 4x^3$, получим подынтегральную функцию $\Rightarrow$ интегрирование выполнено верно.

Основные свойства неопределённого интеграла:

1) $(\int f(x)dx)' = f(x) \quad и \quad d(\int f(x)dx) = f(x)dx$

Доказательство: 1) $(\int f(x)dx)' = (F(x)+C)' = F'(x) + 0 = f(x)$

2) $d(\int f(x)dx) = (\int f(x)dx)'dx = f(x)dx$

2) $\int dF(x) = F(x) + C$

Доказательство: $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$

3) $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$

4) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

3. Таблица интегралов

1) $\int U^n dU = \dfrac{U^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$

2) $\int \dfrac{dU}{\sqrt{U}} = 2\sqrt{U} + C$

3) $\int \dfrac{dU}{U^2} = -\dfrac{1}{U} + C$

4) $\int \dfrac{dU}{U} = \ln|U| + C$

5) $\int \sqrt{U} dU = \dfrac{2}{3} U^{\frac{3}{2}} + C$

6) $\int dU = U + C$

14) $\int \dfrac{dU}{\cos U} = \ln\left|tg\left(\dfrac{U}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$

15) $\int \dfrac{dU}{\cos^2 U} = tgU + C$

16) $\int \dfrac{dU}{\sin^2 U} = -ctgU + C$

17) $\int \dfrac{dU}{a^2 + U^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{U}{a} + C$

18) $\int \dfrac{dU}{1+U^2} = arctgU + C$

19) $\int \dfrac{dU}{\sqrt{a^2 - U^2}} = \arcsin \dfrac{U}{a} + C$

7) $\int a^U dU = \dfrac{a^U}{\ln a} + C$

8) $\int e^U dU = e^U + C$

9) $\int \sin U dU = -\cos U + C$

10) $\int \cos U dU = \sin U + C$

11) $\int tgU dU = -\ln|\cos U| + C$

12) $\int ctgU dU = \ln|\sin U| + C$

13) $\int \dfrac{dU}{\sin U} = \ln\left|tg\dfrac{U}{2}\right| + C$

20) $\int \dfrac{dU}{\sqrt{1-U^2}} = \arcsin U + C$

21) $\int \dfrac{dU}{a^2 - U^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+U}{a-U}\right| + C$

22) $\int \dfrac{dU}{U^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{U-a}{U+a}\right| + C$

23) $\int \dfrac{dU}{\sqrt{U^2 \pm a^2}} = \ln\left|U + \sqrt{U^2 \pm a^2}\right| + C$

24) $\int \dfrac{dU}{\sqrt{U^2 \pm a}} = \ln\left|U + \sqrt{U^2 \pm a}\right| + C$

25) $\int \dfrac{dU}{U \pm a} = \ln|U \pm a| + C$

4. Методы интегрирования: непосредственное интегрирование, замена переменной, интегрирование по частям.

Непосредственное интегрирование

Заключается в вычислении интегралов путём непосредственного использования табдицы простейших интегралов и основных свойств интегралов.

Примеры: 1) $\int (5\cos x + 2 - 3x^2 + \dfrac{4}{x} - \dfrac{7}{x^2+1})dx$

2) $\int (\sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2})^2 dx$ 3) $\int tg^2 x dx = \int \dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx$

Замена переменной

Часто введение новой переменной позволяет свести нахождение интеграла к нахождению табличного, т. е. перейти к непосредственному интегрированию.

Рассм $\int f(x)dx$

Обозначим

$$x = \varphi(t)$$

тогда $dx = d(\varphi(t)) \Rightarrow dx = \varphi'(t)dt$ подставим в исходный интеграл:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

Зам: На практике обычно обозначают некоторую функцию от x через t $\underline{\psi'(x) = t}$

Примеры:

1)

$$\int \frac{x^3 dx}{(x-1)^2} = \left|\begin{array}{c} x-1 = t \Rightarrow d(x-1) = dt \\ dx = dt \end{array}\right| = \int \frac{(t+1)^3 dt}{t^2} = \int \frac{t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{t^2} dt = \frac{t^2}{2} + 3t + 3\ln|t| - \frac{1}{t} + C =$$

$$\frac{(x-1)^2}{2} + 3x - 3 + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

$$2)\ \int \frac{x^4 dx}{x^5 + 7} = \left|\begin{array}{c} x^5 + 7 = t \\ d(x^5+7) = dt \\ (x^5+7)'dx = dt \\ 5x^4 dx = dt \end{array}\right| = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{5}\ln|t| + C = \frac{1}{5}\ln|x^5 + 7| + C$$

$$3)\ \int \sin^2 x \cos x dx = \left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ d(\sin x) = dt \\ (\sin x)' dx = dt \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

Интегрирование простейших иррациональных выражений

<u>Пример:</u> $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}dx}{2+\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{r} \sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{array} \right| = \int \frac{t \cdot 2tdt}{2+t} = 2\int \frac{t^2 dt}{2+t} =$

$\dfrac{t^2}{2+t}$ - неправильная дробь (степень числителя ≥ степени знаменателя)

$$\begin{array}{l|l} t^2 & t+2 \\ \cline{2-2} \underline{t^2+2t} & t-2 \quad \text{-целая часть} \\ \quad -2t & \\ \quad \underline{-2t-4} & \\ \qquad\quad 4 & \end{array}$$

остаток

<u>Зам:</u> деление ведём до тех пор, пока степень остатка не станет меньше степени делителя

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{t^2}{t+2} = t - 2 + \frac{4}{t+2}$$

$$= 2\int (t - 2 + \frac{4}{t+2})dt = t^2 - 4t + 8\ln\left|t+2\right| + C = x - 4\sqrt{x} + 8\ln\left|\sqrt{x}+2\right| + C$$

Интегрирование выражений, содержащих квадратный трёхчлен в знаменателе

А) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}} = I_1$ Б) $\displaystyle\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{x^2+px+q}} = I_2$

Решаются методом подстановки. Нужно выделить полный квадрат под знаком корня.
Рассм.

$$I_2 = \int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{x^2+px+q}} = \left| \begin{array}{c} x^2+px+q = (x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4}) - \frac{p^2}{4} + q = \\ = (x+\frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4}) = t^2 \pm a^2 \\ \boxed{x + \frac{p}{2} = t} \quad \Rightarrow \quad x = t - \frac{p}{2} \quad и \quad q - \frac{p^2}{4} = \pm a^2 \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{(A(t-\frac{p}{2})+B)dt}{\sqrt{t^2 \pm a^2}} = A\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2 \pm a^2}}$$

$$+ (B - \frac{Ap}{2})\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm a^2}} = A\sqrt{t^2 \pm a^2} + (B - \frac{Ap}{2})\ln\left|x + \frac{p}{2} + \sqrt{x^2+px+q}\right| + C$$

А) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+px+q} = I_3$ Б) $\displaystyle\int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q} = I_4$

Решаются аналогичной подстановкой

<u>Зам:</u> Выражение ax^2+bx+c всегда можно свести к x^2+px+q. Такой подстановкой решаем в том случае, если многочлен, стоящий в знаменателе имеет D<0 или представляет собой неточный квадрат.

Примеры:

1) $$\int\frac{(3x-5)dx}{x^2-2x+4}=\left|\begin{array}{c}?\ (x^2-2x+4)'=2x-2\ ?\ \textit{íå}\quad \textit{òàáëè÷íûé}\quad \int\frac{dU}{U}\\ D=4-16\prec 0\quad\Rightarrow\\ \Rightarrow \textit{âûäåëÿåì}\quad \textit{ïîëíûé}\quad \textit{êâàäðàò}\ \textit{â}\ \textit{çíàìåíàòåëå}\quad \textit{å}\end{array}\right|=...$$

2) $$\int\frac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2-2x-2}}=\left|\begin{array}{l}?\int\frac{dU}{\sqrt{U}}=2\sqrt{U}\ ?\\ x^2-2x-2=U\\ (2x-2)dx=dU\\ 2(x-1)dx=dU\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{2(x-1)dx}{\sqrt{x^2-2x-2}}=\sqrt{x^2-2x-2}+C$$

3) $$\int\frac{(x-1)dx}{\sqrt{2x^2+3x-2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2+\frac{3}{2}x-1}}=...$$

Интегрирование по частям

Рассмотрим непрерывные функции $u(x)$ и $v(x)$. Пусть существуют их производные $u'(x)$ и $v'(x)$.

Рассм. $(u\cdot v)'=u'v+uv'$

Рассм. $d(u\cdot v)=(uv)'dx=u'(x)v(x)dx+u(x)v'(x)dx=vdu+udv$

Рассм. $\int d(uv)=\int(vdu+udv)$

$uv=\int vdu+\int udv$ получим *формулу интегрирования по частям*

$$\int udv=uv-\int vdu$$

Выпишем классы интегралов, решаемых этим методом:

I класс: $\left.\begin{array}{l}\int P(x)e^{ax}dx\\ \int P(x)\sin axdx\\ \int P(x)\cos axdx\end{array}\right\}$ $\quad \begin{array}{c}a\in R\\ u=P(x)\\ dv=\begin{cases}e^{ax}dx\\ \sin axdx\\ \cos axdx\end{cases}\end{array}$

II класс: $\left.\begin{array}{l}\int P(x)\ln axdx\\ \int P(x)\arcsin axdx\\ \int P(x)\arccos axdx\\ \int P(x)arctgaxdx\\ \int P(x)arcctgaxdx\end{array}\right\}$ $\quad \begin{array}{c}a\in R\\ u=\begin{cases}\ln ax\\ \arcsin ax,\arccos ax\\ arctgax,arcctgax\end{cases}\\ dv=P(x)dx\end{array}$

Примеры:

1)

$$\int x^2e^{-2x}dx=\left|\begin{array}{c}u=x^2\\ dv=e^{-2x}dx\\ du=d(x^2)\\ u=2xdx\\ v=\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}\end{array}\right|=-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}+\int e^{-2x}xdx=\left|\begin{array}{c}u=x\\ dv=e^{-2x}dx\\ du=dx\\ v=\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}\end{array}\right|=-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}+$$

$$+(-\frac{1}{2}xe^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}dx)=-\frac{1}{2}e^{-2x}(x^2+x+\frac{1}{2})+C$$

$$2)\ \int \ln(2x-5)dx = \left| \begin{matrix} u=\ln(2x-5) \\ dv=dx \\ du=d(\ln(2x-5)) \\ du=\dfrac{2}{2x-5}dx \\ v=\int dx = x \end{matrix} \right| = x\ln(2x-5) - \int \frac{2xdx}{2x-5} = x\ln(2x-5) - x - \frac{5}{2}\ln|2x-5| + C$$

III класс: Под знаком интеграла обе функции не алгебраические

$\int e^{ax}\sin bxdx$ $\quad \int \sqrt{a^2-x^2}dx$

$\int e^{ax}\cos bxdx$ $\quad \int \sqrt{x^2-a^2}dx$ Без разницы, что обозначать через u и dv. Метод применяется два раза, главное сохранить обозначение.

Примеры:

1)

$$\int e^x \sin 5xdx = \left| \begin{matrix} u=e^x \\ dv=\sin 5xdx \\ du=e^x dx \\ v=\int \sin 5xdx = -\dfrac{1}{5}\cos 5x \end{matrix} \right| = -\frac{1}{5}e^x\cos 5x + \frac{1}{5}\int e^x \cos 5xdx = \left| \begin{matrix} u=e^x - \textit{подстановка} \\ \textit{такая же, как и в первый раз} \\ dv=\cos 5xdx \\ du=e^x dx \\ v=\int \cos 5xdx = \dfrac{1}{5}\sin 5x \end{matrix} \right|$$

$= -\dfrac{1}{5}e^x\cos 5x + \dfrac{1}{25}e^x\sin 5x - \dfrac{1}{25}\int e^x\sin 5xdx$ Интеграл повторился. Обозначим его через I, получим:

$$I = = -\frac{1}{5}e^x\cos 5x + \frac{1}{25}e^x\sin 5x - \frac{1}{25}I$$

$$I = \frac{5}{26}e^x(-\cos 5x + \frac{1}{5}\sin 5x) + C$$

$$2)\ \int \sqrt{x^2-4}dx = \int \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2-4}}dx = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-4}} - 4\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} =$$

Рассм. $\int \dfrac{x^2dx}{\sqrt{x^2-4}} = \left| \begin{matrix} u=x \\ dv=\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2-4}} \\ du=dx \\ v=\int \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2-4}} = \left| \begin{matrix} x^2-4=t \\ 2xdx=dt \end{matrix} \right| = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{x^2-4} \end{matrix} \right| = x\sqrt{x^2-4} - \int \sqrt{x^2-4}dx$

$$= x\sqrt{x^2-4} - \int \sqrt{x^2-4}dx - 4\ln\left|x-\sqrt{x^2-4}\right| \quad \Rightarrow$$

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} - 2\ln\left|x-\sqrt{x^2-4}\right| + C$$

1.11 Лекция №11 (2 часа).

Тема: «Интегрирование рациональных функций»

1.11.1 Вопросы лекции:

1. Понятие рациональной функции.
2. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование.
3. Интегрирование рациональных функций.

1.11.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие рациональной функции

Обозначим многочлен n-ой степени через $P_n(x)$

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n$$

$$P_0(x) = A - мн\,0-ой\,степ, \quad P_1(x) = Ax + B - мн\,1-ой\,степ, \quad P_2(x) = Ax^2 + Bx + C - мн\,2-ой\,степ...$$

Вспомним: 1) Два многочлена одинаковой степени называются *равными*, если равны их коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях неизвестных.

2) Значение переменной x, обращающее многочлен в 0, называется *корнем* многочлена

3) Целые корни многочлена, если они существуют, находятся среди делителей свободного члена

4) Каждый многочлен делится нацело на разность мехду x и его корнем.

Пример: Разложить на множителе многочлены:

1) $P_2(x) = 2x^2 - 10x + 12 = 2(x-2)(x-3)$

2) $P_3(x) = x^3 + 2x^2 + 2x = x(x^2 + 2x + 2)$

3) $P_4(x) = (x-1)(x^3-1) = (x-1)(x-1)(x^2+x+1) = (x-1)^2(x^2+x+1)$

4) $P_3(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4 = x^2(2x-1) - 4(2x-1) = (2x-1)(x^2-4) = 2(x-\frac{1}{2})(x-2)(x+2)$

5) $P_4(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x = x(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$

Найдём корни $x_1=0$ и $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

$$-6 \div \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

Проверим: 1: 1-6+11-6=0-верно, значит $x_2=1$ – корень

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{x^3 - x^2} & x^2 - 5x + 6 \\ \quad -5x^2 + 11x - 6 & \\ \quad \underline{-5x^2 + 5x} & \\ \qquad\quad 6x - 6 & \\ \qquad\quad \underline{6x - 6} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6) = $$
$$= (x-1)(x-2)(x-3)$$
$$P_4(x) = (x-1)(x-2)(x-3) - мнгочлен \quad 4ой \quad степени$$

6) $P_6(x) = x^6 - 16x^2 = x^2(x^4 - 16) = x^2(x-2)(x+2)(x^2+4)$

Рациональные дроби

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} - рациональная\ дробь \Rightarrow \begin{cases} m > n - правильная\ дробь \\ m \le n - неправильная\ дробь \end{cases}$$

2. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование

Существует 4 типа простейших правильных дробей:

I тип: $\frac{A}{x-k}$, $k \in R$, $k - корень\ знаменателя$

II тип: $\frac{A}{(x-k)^\alpha}, \alpha \ge 2$, $k - корень\ кратности\ \alpha$

III тип: $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $D<0$

IV тип: $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^\alpha}, \alpha \ge 2$, $D<0$

Рассм.: I: $\int \frac{Adx}{x-k} = A\ln|x-k| + C$

II: $\int \frac{Adx}{(x-k)^\alpha} = A\int (x-k)^{-\alpha}dx = \frac{A}{(1-\alpha)(x-k)^{1-\alpha}} + C$

III: $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx - \textit{интеграл от дроби с квадрвтным трёхчленом в знаменателе}$

$D<0$

IV: $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^{\alpha}}dx - \textit{рекурентная формула}$

$D<0$

Основана на выделении полного квадрата в знаменателе. Метод применяют несколько раз, каждый раз степень в знаменателе понижается на 1

3. Интегрирование рациональных функций

Разложение рациональных дробей на простейшие

Любую <u>*правильную*</u> дробь можно единственным образом представить (разложить) в виде суммы простейших дробей. Это разложение зависит от корней многочлена, стоящего в знаменателе.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)},\quad n<m - \underline{\textit{правильная дробь}}.\ (\textit{Если дробь неправильная, то сначала выделим целую часть})$$

Разложим многочлен, стоящий в знаменателе на произведение элементарных множителей.

$$Q_m(x)=(x-k)^t(x^2+px+q)^s$$

$$\frac{P_n(x)}{\underbrace{(x-k)^t}_{\substack{t\ \textit{дробей}\\ \textit{разложении}\\ \textit{I и II типа}}}\underbrace{(x^2+px+q)^s}_{\substack{s\ \textit{дробей}\\ \textit{разложении}\\ \textit{III и IV типа}}}}=\underbrace{\frac{A}{x-k}+\frac{B}{(x-k)^2}+\frac{C}{(x-k)^3}+\ldots+\frac{D}{(x-k)^t}}_{t\ \textit{дробей}}+\underbrace{\frac{Ex+F}{x^2+px+q}+\frac{Gx+K}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^s}}_{s\ \textit{дробей}}$$

где A,B,C,D,E,F…M,N-некоторые числа, которые вычисляются <u>*методом неопределённых коэффициентов.*</u>

Чтобы найти коэффициенты, нужно привести сумму дробей к общему знаменателю. Получим две равные дроби, причём у них одинаковые знаменатели $\Rightarrow$ приравниваем числители. Учитывая, что два многочлена равны, если равны коэффициенты при соответствующих степенях неизвестных, находим коэффициенты A,B,C,D…M,N.

<u>Примеры:</u> 1) $\int \frac{(x^3+4)dx}{x^3+2x^2}$ 2) $\int \frac{(x^2-1)dx}{x^3-27}$

1.12 Лекция №12 (2 часа).

Тема: «Определенный интеграл»

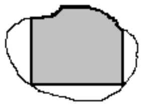
1.12.1 Вопросы лекции:

1. Понятие определенного интеграла, его основные свойства.
2. Геометрический и экономический смысл определенного интеграла.
3. Формула Ньютона – Лейбница.
4. Методы интегрирования в определенном интеграле.

1.12.2 Краткое содержание вопросов:

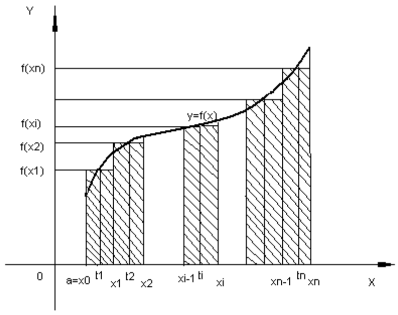
1. Понятие определенного интеграла, его основные свойства

Исторически возникла потребность вычислять площадь произвольной фигуры, в частности - криволинейной трапеции. Любую фигуру можно представить в виде нескольких криволинейных трапеций. Таким образом, если мы научимся вычислять площадь произвольной криволинейной трапеции, то мы сможем вычислять площади различных фигур.



Перенесём криволинейную трапецию в ПДСК т. о., что её основание совпадёт с отрезком $[a;b]$ оси ОХ, слева и справа трапеция будет ограничена прямыми $x = a \; и \; x = b$, а сверху – графиком функции $y = f(x)$,определённой и непрерывной на этом отрезке.

Разобьём отрезок $[a;b]$ на n сколь угодно малых частей (т. е. $n \to \infty$) произвольным образом, причём: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b$.



Точки $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ - <u>*точки разбиения.*</u>

В каждом из полученных отрезков возьмём точку: $t_1 \in [x_0; x_1], t_2 \in [x_1; x_2], ..., t_i \in [x_{i-1}; x_i], ..., t_n \in [x_{n-1}; x_n]$

Обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ - длина элементарного отрезка разбиения $[x_{i-1}; x_i]$.

Каждой точке t_i соответствует значение функции $f(t_i)$. Построим прямоугольники с основаниями Δx_i и высотами $f(t_i)$. Сумма площадей всех полученных прямоугольников будет приблизительно равна площади данной криволинейной трапеции.

Составим сумму $\sigma = f(t_1)\Delta x_1 + f(t_2)\Delta x_2 + ... + f(t_i)\Delta x_i + ... + f(t_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$

σ (сигма)- <u>*интегральная сумма.*</u>

<u>Геометрический смысл:</u> σ- это сумма площадей прямоугольников с основаниями $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ и высотами $f(t_1), f(t_2), ..., f(t_n)$, если $f(x) \ge 0$. σ приблизительно равна площади данной криволинейной трапеции.

Обозначим через λ (лямбда) длину наибольшего отрезка разбиения $\lambda = \max\limits_{i=1,,,n}(\Delta x_i)$

Очевидно, что чем больше n, тем меньше λ (т. е. если $n \to \infty$, то $\lambda \to 0$) $\Rightarrow$ площадь криволинейной трапеции будет тем ближе к значению σ, чем больше n (или, чем меньше λ).

<u>ОПР:</u> Если существует конечный предел I интегральной суммы σ при $\lambda \to 0$, то этот предел называется <u>*определённым интегралом*</u> от функции $f(x)$ по отрезку $[a;b]$ и обозначается

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda \to 0} \sigma,$$

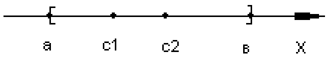
Функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a;b]$, a-нижний, b-верхний пределы интегрирования

<u>*Основные свойства определённого интеграла:*</u>

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$

2) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$

3)



$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^{c1} f(x)dx + \int\limits_{c1}^{c2} f(x)dx + \int\limits_{c2}^{b} f(x)dx$$

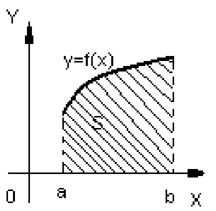
4) $\int\limits_a^b k \cdot f(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$

5) $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$

2. Геометрический и экономический смысл определенного интеграла

Пусть в ПДСК задана криволинейная трапеция, ограниченная отрезком $[a;b]$ на оси OX, прямыми x=a и x=в и сверху графиком функции $y = f(x)$ непрерывной на этом отрезке , её площадь вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx$$

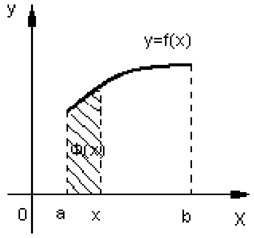


Определённый интеграл от неотрицательной непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ численно равен площади криволинейной трапеции с основанием $[a;b]$, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$.

Пусть функция $z = f(t)$ задает изменение производительности некоторого производства с течением времени. Тогда объем продукции u, произведенной за промежуток времени $[0, T]$, равен значению определенного интеграла от функции производительности от 0 до T.

$$u = \int\limits_0^T f(t)dt$$

3. Формула Ньютона – Лейбница



Если a зафиксировать, а значение b менять не выходя из отрезка $[a;b]$, получим <u>*интеграл с переменным верхним пределом*</u> $\int\limits_a^x f(x)dx,\ \text{ãäå}\ a \le x \le b$

Очевидно, если x меняется, то и значение интеграла меняется, т. е. интеграл с переменным верхним пределом будет представлять собой функцию от верхнего предела x, т. о.

$$\int_a^x f(x)dx = \hat{O}(\tilde{o}),\ \tilde{a}\ddot{a}\mathring{a}\ a \le x \le b$$

Геометрически функция Ф(x) представляет собой площадь заштрихованной криволинейной трапеции.

Вычисление определённого интеграла с помощью $\lim\sigma$ затруднительно, поэтому существует другой метод, основанный на теореме.

<u>ТЕОРЕМА</u> <u>*(Ньютона-Лейбница):*</u> Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и F(x)- некоторая её первообразная на этом отрезке, то справедлива формула: <u>формула Ньютона- Лейбница</u>

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

<u>Доказательство:</u> $\int_a^x f(x)dx = \Phi(x)$ - поопределению.

$\int_a^b f(x)dx = F(x) + C$ - по условию теоремы.

Т. к. разность двух первообразных есть const , то Ф(x)-F(x)=C

Ф(x)=F(x)+C $\Rightarrow \int_a^x f(x)dx = F(x) + C$

Пусть x=a: $\int_a^a f(x)dx = F(a) + C \Rightarrow 0 = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a) \Rightarrow \int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a)$

Пусть x=b: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

<u>Пример:</u> $\int_1^3 x^2 dx = 8\frac{2}{3}$

4. Методы интегрирования в определенном интеграле

1) <u>*Замена переменной*</u> $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$

$x = \varphi(t)$ x a в φ(t)=a $\Rightarrow$ t= α

$dx = \varphi'(t)dt$ t α β φ(t)=b $\Rightarrow$ t= β

2) <u>*Интегрирование по частям*</u> $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

1.13 Лекция №13 (2 часа).

Тема: «Приложения определенного интеграла»

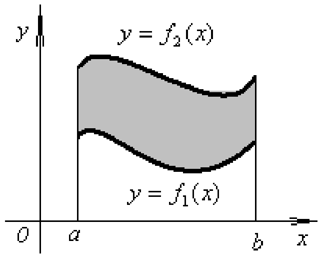
1.13.1 Вопросы лекции:

1. Площадь фигур на плоскости.
2. Нахождение объема тела вращения.
3. Несобственные интегралы

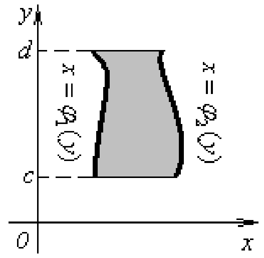
1.13.2 Краткое содержание вопросов:

1. Площадь фигур на плоскости

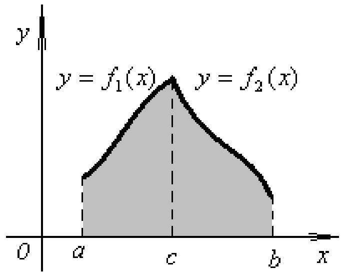
Возможные случаи расположения линий:



$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$$



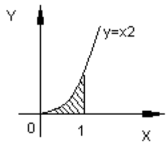
$$S = \int_c^d (\varphi_1(y) - \varphi_2(y))dy$$



$$S = \int_a^c f_1(x)dx + \int_c^b f_2(x)dx$$

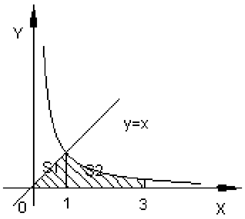
Примеры: Найти площадь фигуры, ограниченной

1) $y = x^2, x = 1$ и осью ОХ.



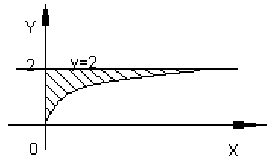
$$S = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

2) $y = x, y = \dfrac{1}{x^2}, y = o, x = 3$



$$S = S1 + S2 = \int_0^1 xdx + \int_1^3 \frac{1}{x^2}dx = 1\frac{1}{6}$$

3) $y = \sqrt{x}, y = 2, x = 0$

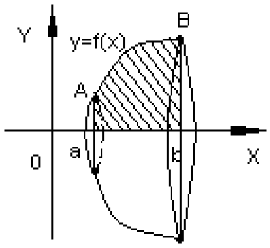


$$S = \int_0^4 (2 - \sqrt{x})dx = 2\frac{2}{3}$$

2. Нахождение объема тела вращения

Объём и площадь поверхности тела вращения

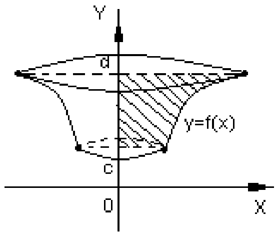
Пусть имеем функцию $y = f(x), a \le x \le b, f(x) > 0$ и непрерывна.



Будем вращать дугу АВ вокруг оси ОХ, получим тело вращения, площадь поверхности которого вычисляется по формуле $S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$

И объём вычисляется по формуле $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$

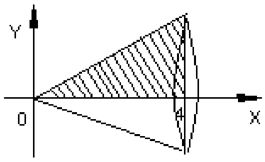
Заметим, если дугу вращать вокруг оси ОУ, то выразим x через y



$x=\varphi(y), c \le y \le d$, тогда площадь поверхности тела вращения вокруг оси ОУ вычисляется по формуле $S = 2\pi\int\limits_c^d \varphi(y)\sqrt{1+(\varphi'(y))^2}\,dy$

И объём тела вращения вокруг оси ОУ вычисляется по формуле $V = \pi\int\limits_c^d (\varphi(y))^2\,dy$

Пример: Фигура, ограниченная прямыми $y = \frac{3}{4}x, x = 4$ и осью ОХ, вращается вокруг оси ОХ. Вычислить площадь поверхности и объём полученного тела вращения.



$1) S = 2\pi\int\limits_0^4 \frac{3}{4}x\sqrt{1+\frac{9}{16}}dx = 15\pi \qquad 2) V = \pi\int\limits_0^4 \frac{9}{16}x^2 dx = 12\pi$

3. Несобственные интегралы

Рассмотрим $\int\limits_a^b f(x)dx$: 1) $[a;b]$-конечный

2) $f(x) - непрерывн в \forall x \in [a;b]$

При выполнении этих условий, получаем собственный интеграл. Если хотя бы одно из этих условий нарушается, то получаем *несобственный интеграл.*

Обозначим $I(x) = \int\limits_a^x f(x)dx$ -функция от x

ОПР: $\lim\limits_{x\to\infty} I(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx,\ где\ f(x) \in [a;+\infty)$ называется *несобственным интегралом*

1) если $\exists \lim\limits_{x\to\infty} I(x)$, причём конечный, то интеграл сходится;

2) если $не \exists \lim\limits_{x\to\infty} I(x)\ или = \infty$, то интеграл расходится.

Примеры:

1) $\int\limits_0^\infty e^{-x}dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^b e^{-x}dx = \lim\limits_{b\to\infty}(-\frac{1}{e^x})\Big|_0^b = \lim(-\frac{1}{e^x})\Big|_0^\infty = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{1} = 1$ -сходится

2) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^b \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to\infty}(\ln b - \ln 1) = \infty$ -расходится

Несобственные интегралы первого рода

Пусть функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ определена на полуоси $[\boldsymbol{a}, +\infty)$ и интегрируема по любому отрезку $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$, принадлежащему этой полуоси. Предел интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ при $b \to +\infty$ называется несобственным интегралом функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ от $\boldsymbol{a}$ до $+\infty$ и обозначается $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Итак, по определению, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$. Если этот предел существует и конечен, интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся; если предел не существует или бесконечен, интеграл называется расходящимся.

Примеры: 1. $\int\limits_0^{+\infty}\cos x dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^b \cos x dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \sin x\Big|_0^b = \lim\limits_{b\to+\infty}(\sin b - \sin 0) = \lim\limits_{b\to+\infty}\sin b$; этот предел не существует; следовательно, исследуемый интеграл расходится.

Аналогично интегралу с бесконечным верхним пределом интегрирования определяется интеграл в пределах от $-\infty$ до b: $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx \overset{\text{опр.}}{=} \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ и в пределах от $-\infty$ до $+\infty$: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \overset{\text{опр.}}{=} \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)dx + \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_c^b f(x)dx$. В последнем случае $f(x)$ определена на всей числовой оси, интегрируема по любому отрезку; c - произвольная (собственная) точка числовой оси; интеграл называется сходящимся, если существуют и конечны оба входящих в определение предела. Пользуясь свойством аддитивности определённого интеграла, можно показать, что существование конечных пределов и их сумма не зависят от выбора точки c.

Примеры: 3. $\int\limits_{-\infty}^0 e^x dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\left(\int\limits_a^0 e^x dx\right) = \lim\limits_{a\to-\infty}\left(e^x\Big|_a^0\right) = \left(e^0 - \lim\limits_{a\to-\infty} e^a\right) = e^0 = 1$. Интеграл сходится.

Формула Ньютона-Лейбница для несобственного интеграла. В приведённых примерах мы сначала вычисляли с помощью первообразной функции определённый интеграл по конечному промежутку, а затем выполняли предельный переход. Объединим два этих действия в одной формуле. Символом $F(+\infty)$ будем обозначать $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$; символом $F(-\infty)$ - соответственно, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$; тогда можно записать

$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty}$, $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^b$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$,

подразумевая в каждом из этих случаев существование и конечность соответствующих пределов. Теперь решения примеров выглядят более просто: $\int\limits_5^{+\infty}\frac{dx}{x^3} = \frac{-1}{2x^2}\Big|_5^{+\infty} = \frac{1}{50}$ - интеграл сходится; $\int\limits_5^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_5^{+\infty} = +\infty$ - интеграл расходится.

Несобственные интегралы второго рода

Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $(a, b]$, интегрируема по любому отрезку $[a+\varepsilon, b]\ (0 < \varepsilon < b-a)$, и имеет бесконечный предел при $x\to a+0: \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$.

Несобственным интегралом от $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ называется предел $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$. Если этот предел конечен, говорят, что интеграл сходится; если предел не существует или бесконечен, говорят, что интеграл расходится.

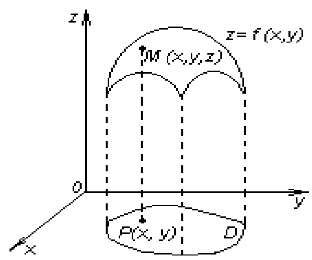
Примеры: $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\varepsilon}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} -\frac{2}{\sqrt{x}}\Big|_{\varepsilon}^2 = \infty$ - интеграл расходится.

1.14 Лекция №14 (2 часа).
Тема: «Функции нескольких переменных»

1.14.1 Вопросы лекции:
1. Область определения функции двух переменных.
2. Дифференциальное исчисление функции многих переменных, их непрерывность.

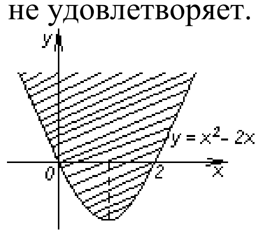
1.14.2 Краткое содержание вопросов:
1. Область определения функции двух переменных
ОПР: *Функцией f двух переменных* $z = f(x, y)$ называется зависимость (закон), по которой каждой паре значений (x, y) из некоторой области $D(x, y)$ соответствует единственное значение $z \in E$.
Тогда x и y – независимые переменные (аргументы),
D – область определения (или существования) функции,
E – область значений функции.

Рассмотрим ПДСК. Если каждой точке на плоскости с координатами (x, y) поставить в соответствие аппликату $z = f(x, y)$, то получим некоторую поверхность в пространстве. Т.о. под *графиком функции двух переменных* будем понимать поверхность, образованную множеством точек $M(x, y, z)$.



Область определения функции D геометрически представляет собой некоторую часть плоскости Oxy, ограниченную линиями, которые могут принадлежать или не принадлежать этой области. В первом случае область D называется *замкнутой* и обозначается $\overline{D}$, во втором – *открытой*.

Пример: Найти область определения D и область значений E функции $z = \ln(y - x^2 + 2x)$.
D_Z: $y - x^2 + 2x > 0$
Построим границу области D: $y = x^2 - 2x$. Данное уравнение задает параболу, т.к. парабола не принадлежит области D, то она изображается пунктиром. Легко убедиться в том, что любая точка внутри параболы удовлетворяет данному неравенству, в то время, как любая точка, расположенная за параболой - не удовлетворяет. Заштрихуем область D.



Т.к. выражение под знаком логарифма может принимать сколь угодно малые и сколь угодно большие положительные значения, то область значений функции $E: z \in (-\infty; +\infty)$

Обобщим сказанное выше.

<u>ОПР:</u> Функцией n- переменных $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется зависимость (закон), по которой каждой совокупности $(x_1, x_2, ..., x_n)$ из некоторой области n – мерного пространства, ставится в соответствие единственное значение u.

Линии уровня

Пусть дана функция $z = f(x, y)$. Будем придавать переменной z некоторые значения $c_1, c_2, ..., c_n$ из области значений функции. Получим функции одной переменной $f(x, y) = c_1$, $f(x, y) = c_2, \ldots,$ $f(x, y) = c_n$, графиками которых будут являться некоторые линии на плоскости, называемые <u>*линиями уровня*</u>. Графически это означает, что поверхность $z = f(x, y)$, пересекается плоскостями $z = c_1$, $z = c_2, ...,$ $z = c_n$ параллельными друг другу и плоскости Oxy.

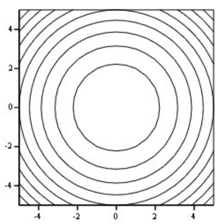
<u>Пример:</u> Построить линии уровня и изображение поверхности $z = x^2 + y^2$

$z = 0:$ $x^2 + y^2 = 0$ - точка (0,0)

$z = 1:$ $x^2 + y^2 = 1$ - окружность

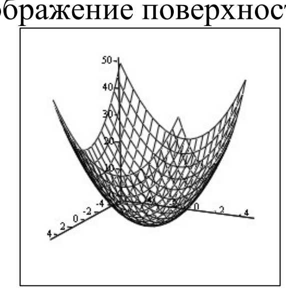
$z = 4:$ $x^2 + y^2 = 4$ и т. д.

Линии уровня



z

Изображение поверхности



z

<u>ОПР:</u> Число A называется <u>*пределом функции*</u> $z = f(x, y)$ <u>*в точке*</u> $M_0(x_0, y_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что при всех *x, y*, удовлетворяющих условиям $|x - x_0| < \delta$ и $|y - y_0| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

<u>Обозначение:</u> $A = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = \lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$

<u>Пример:</u> Вычислить предел $A = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$

$$A = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{(x^2 + y^2)(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1)}{(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1)} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1) = 2$$

<u>ОПР:</u> Функция $z = f(x, y)$ называется <u>*непрерывной в точке*</u> $M_0(x_0, y_0)$, если справедливо равенство $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

<u>Пример:</u> Функция $z = \dfrac{1}{2x^2 + y^2}$ непрерывна в любой точке плоскости, кроме точки (0,0), в которой функция терпит бесконечный разрыв.

<u>ОПР:</u> Функция, непрерывная во всех точках некоторой области D, называется <u>*непрерывной в данной области.*</u>

1.15 Лекция №15 (2 часа).
Тема: «Частные производные»

1.15.1 Вопросы лекции:
1. Дифференциальное исчисление функции многих переменных, их непрерывность
2. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных.

1.15.2 Краткое содержание вопросов:
1. Дифференциальное исчисление функции многих переменных, их непрерывность.
Если переменной x дать некоторое приращение Δx, y оставить постоянной, то функция $z = f(x, y)$ получит приращение $\Delta_x z$, называемое *частным приращением функции z по переменной x.*
$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$.
Аналогично, если переменная y получает приращение Δy, а x остается постоянной, то *частным приращением функции z по переменной y:*
$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

ОПР: Если существуют пределы
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = f'_x(x, y)$$
$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = f'_y(x, y),$$
то они называются *частными производными функции* $z = f(x, y)$ по переменным x и y соответственно.
Аналогично определяются частные производные функций любого числа независимых переменных.

Т.к. частная производная по любой переменной является производной по этой переменной, найденной при условии, что остальные переменные – постоянны, то все правила и формулы дифференцирования одной переменной применимы для нахождения частных производных функций любого числа переменных.

Пример: Найти частные производные функции $z = arctg\frac{y}{x}$.

Пример: Найти частные производные функции $u = \ln^2(x^2 + y^2 + z^2)$.

2. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных.
ОПР: Дифференциал функции $z = f(x, y)$, найденный при условии, что одна из независимых переменных изменяется, а вторая остается постоянной, называется *частным дифференциалом*
$d_x z = f'_x(x, y)dx$ и $d_y z = f'_y(x, y)dy$
где $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$ - произвольные приращения независимых переменных, называемых их дифференциалами.

Аналогично для функций нескольких переменных.

Пример: Найти частные дифференциалы функции $u = (xy^2)^{z^3}$

Пример: Вычислить значения частных производных функции $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^3} - xyz$ в точке $M(2, -2, 1)$

ОПР: *Полным приращением функции* $z = f(x, y)$ называется разность
$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$
ОПР: *Полным дифференциалом функции* $z = f(x, y)$ называется главная, линейно зависящая от приращений независимых переменных Δx и Δy, часть полного приращения функции и обозначается dz.

Если функция имеет непрерывные частные производные, то полный дифференциал существует и равен $dz = f'_x\,(x, y)dx + f'_y\,(x, y)dy$ или

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Для функции n переменных $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ полный дифференциал определяется выражением

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n$$

Пример: Найти полное приращение и полный дифференциал функции $z = x^2 - xy + y^2$

$$\Delta z = (x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x)(y + \Delta y) + (y + \Delta y)^2 - x^2 + xy - y^2 = (2x - y)\Delta x + (2y - x)\Delta y + \Delta x^2 - \Delta x\Delta y + \Delta y^2$$

Выражение $(2x - y)\Delta x + (2y - x)\Delta y$, линейное относительно Δx и Δy, есть дифференциал dz, а величина $\alpha = \Delta x^2 - \Delta x\Delta y + \Delta y^2$ - бесконечно малая. Т.о. $\Delta z = dz + \alpha$

Пример: Найти полный дифференциал функции $z = \ln^2(x^2 + y^2 - z^2)$

Полный дифференциал часто используется для приближенных вычислений значений функции.
Рассмотрим разность $\Delta z - dz = \alpha$, т.е. $\Delta z - dz \approx 0 \Rightarrow \Delta z \approx dz$, т.е.

$$\underline{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f'_x\,(x_0, y_0)dx + f'_y\,(x_0, y_0)dy + f(x_0, y_0)}$$

Пример: Вычислить приближенно $(1{,}02)^{3{,}01}$
Дано:
$z = x^y$
$x = 1{,}02$
$x_0 = 1 \quad \Delta x = 0{,}02$
$y = 3{,}01$
$y_0 = 3 \quad \Delta y = 0{,}01$

Найти: $(1{,}02)^{3{,}01} \approx$

ОПР: Функция $z = f(u, v)$, где $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$, называется *сложной функцией* переменных x и y.
Для нахождения частных производных сложных функций используются следующие формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Пример: Найти частные производные функции $z = \sin(xy(2x + 3y))$

Решение: $z = \sin(uv), \quad u = 2x + 3y, \quad v = xy$

Если уравнение $F(x, y, z) = 0$ задает функцию двух переменных $z(x, y)$ в неявном виде и $F'_z(x, y, z) \neq 0$, то справедливы формулы

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}$$

<u>Пример:</u> Найти частные производные функции z, заданной неявно уравнением $xyz + x^3 - y^3 - z^3 + 5 = 0$

Решение: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz + 3x^2}{xy - 3z^2} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz - 3y^2}{xy - 3z^2}$

Частные производные высших порядков

<u>ОПР:</u> <u>*Частными производными второго порядка*</u> называют частные производные, взятые от частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xx}(x, y) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yy}(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xy}(x, y) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yx}(x, y)$$

Частные производные $f''_{xy}(x, y)$ и $f''_{yx}(x, y)$ называются <u>*смешанными*</u>. Значения смешанных производных равны в тех точках, в которых эти производные непрерывны.

1.16 Лекция №16 (2 часа).

Тема: «Производная по направлению, градиент»

1.16.1 Вопросы лекции:

1. Производная по направлению.
2. Градиент.

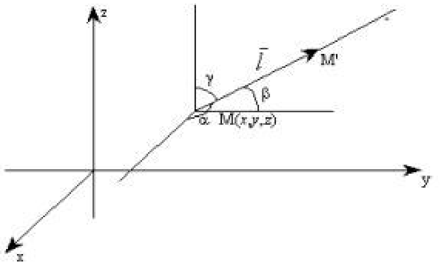
1.16.2 Краткое содержание вопросов:

1. Производная по направлению.

Пусть дана функция u = $f(x, y, z)$, определенная в некоторой области пространства Oxyz.

Определение. Вектор с координатами $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ называется градиентом функции z = $f(x, y)$ в точке M(x, y) и обозначается grad u = $\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j}$.

Под производной функции z = $f(x, y)$ в данном направлении $\bar{l}$ понимается выражение $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos a + \frac{\partial u}{\partial y}\cos b$, где cos$a$, cos$b$ – направляющие косинусы вектора $\bar{l}$.



Производная $\frac{\partial u}{\partial l}$ представляет собой скорость изменения функции в данном направлении.

Теорема. Производная функции по направлению равна проекции градиента этой функции на данное направление (в соответствующей точке).

Как известно, проекция вектора на другой вектор имеет максимальное значение, если оба вектора совпадают по направлению.

Градиент функции в данной точке указывает напрвление наиболее быстрого возрастания функции.

Величина градиента, т.е. | grad z | = $\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$ и определяет крутизну наибольшего ската или подъема поверхности z = $f(x, y)$.

Пример. Найти производную функции $z = x^2+y^2-xy+2x+3y$ в точке M(–9,–1) в направлении, идущем от этой точки к точке N(4,5).

Решение. Вычислим z'_x и z'_y.

$z'_x = 2x-y+2$, $z'_y = 2y-x+3$. Найдем значения этих производных в точке M.

$z'_x|_M = -18+1+2=-15$, $z'_y|_M = -2+9+3=10$.

2. Градиент

Найдем вектор $\overline{MN}$: $\overline{MN}$= (4+9, 5+1)=(13,6). Так как этот вектор лежит в плоскости, то его направление определяется углом между этим вектором и осью Ox, а производная по направлению определяется по формуле $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos a + \frac{\partial u}{\partial y}\sin a$.

Вычислим cos*a* и sin*a*: $\cos a = \frac{13}{\sqrt{13^2+6^2}} = \frac{13}{\sqrt{205}}$, $\sin a = \frac{6}{\sqrt{205}}$.

1.17 Лекция №17 (2 часа).

Тема: «Экстремум функции нескольких переменных»

1.17.1 Вопросы лекции:

1. Экстремум функции нескольких переменных.
2. Функция Кобба-Дугласса.

1.17.2 Краткое содержание вопросов:

1. Экстремум функции нескольких переменных.

О п р е д е л е н и е . Функция f(M) имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ локальный минимум, если $f(M) > f(M_0)$ для любых точек $M \in O_\varepsilon(M_0)$, $M \neq M_0$.

О п р е д е л е н и е . Функция f(M) имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ локальный максимум, если $f(M) < f(M_0)$ для любых точек $M \in O_\varepsilon(M_0)$, $M \neq M_0$.

Локальный максимум и локальный минимум называются экстремумами функции многих переменных.

Эти определения можно перефразировать в терминах приращений. Если $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, то, как известно, полным приращением функции многих переменных является

$$\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Если $\Delta f < 0$ для всех малых приращений независимых переменных, то $f(x, y)$ достигает локального максимума в точке $M_0(x_0, y_0)$. Если $\Delta f > 0$ для всех малых приращений независимых переменных, то $f(x, y)$ достигает локального минимум в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Необходимое и достаточное условия экстремума

Функция $z = f(x, y)$ может иметь экстремум лишь в тех точках, в которых обе частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ обращаются в ноль или перестают существовать.

Действительно, фиксируя попеременно $x = x_0$ или $y = y_0$, получим попеременно функцию одного аргумента, для которой воспользуемся необходимым условием экстремума функции одного переменного.

Эта теорема не является достаточной, но позволяет находить точки, «подозрительные на экстремум».

Пусть в некоторой области, содержащей точку $M_0(x_0, y_0)$, функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка в точке $M_0(x_0, y_0)$ и некоторой её окрестности. Пусть, кроме того, пусть в этой точке $M_0(x_0, y_0)$ выполняются необходимые условия экстремума функции $f(x, y)$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = 0, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = 0. \qquad (1)$$

Тогда функция $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет максимум, если

$$B^2 - A\cdot C < 0,\ A < 0;$$

функция $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет минимум, если

$$B^2 - A\cdot C < 0,\ A > 0;$$

функция $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ не имеет ни максимума, ни минимума, если

$$B^2 - A\cdot C > 0;$$

функция $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ может иметь, и может не иметь экстремум (в этом случае требуются дополнительные исследования), если

$$B^2 - A\cdot C = 0;$$

где

$$A = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\ B = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\ C = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}.$$

2. Функция Кобба-Дугласса.

[Cobb—Douglas production function] — *производственная функция*, примененная американскими исследователями Ч. Коббом и *П. Дугласом* при анализе развития экономики США в 20—30-х гг. XX века. Имеет простую алгебраическую форму:

$N = A \cdot L^{\alpha} K^{\beta}$,

где N — *национальный доход*; A — коэффициент размерности; L и K — соответственно объемы приложенного труда и капитала; α и β — константы (*коэффициенты эластичности производства* по труду L и капиталу K).

Функция — однородная степени α+β; следовательно, увеличение L и K в одинаковое число раз m увеличивает доход в $m^{\alpha+\beta}$ раз. Если сумма α+β равна единице — функция линейно однородная; если больше или меньше единицы, имеет место *эффект масштаба* (соответственно положительный или отрицательный).

К.—Д. ф. основывается на предположениях о понижающейся предельной отдаче ресурсов (см. *Закон убывающей отдачи*, *Предельный эффект затрат*), постоянстве коэффициентов эластичности производства по затратам ресурсов. *Эластичность замещения ресурсов* в любой точке кривой К.—Д. ф. равна единице.

Хотя К.—Д. ф. нельзя отнести к линейным, значения *параметров* A, α, β можно оценить с помощью линейного *регрессионного анализа* по *методу наименьших квадратов*. Для этого ее приводят к линейному виду, прологарифмировав обе части уравнения (обычно здесь берутся натуральные логарифмы):

$$\ln N = \ln A + \alpha \ln L + \beta \ln K .$$

Модификация функции, учитывающая технический прогресс, достигается введением дополнительного сомножителя e^{π}, где π — темп технического прогресса (константа).

1.18 Лекция №18 (2 часа).

Тема: «Условный экстремум функции нескольких переменных»

1.18.1 Вопросы лекции:

1. Условный экстремум функции нескольких переменных.
2. Метод исключения переменных. Метод множителей Лагранжа.
3. Нахождение глобальных экстремумов дифференцируемой функции на замкнутом ограниченном множестве.

1.18.2 Краткое содержание вопросов:

1. Условный экстремум функции нескольких переменных.

Рассмотрим задачу, специфическую для функций нескольких переменных, когда ее экстремум ищется не на всей области определения, а на множестве, удовлетворяющем некоторому условию.

Пусть имеется функция $z = f(x,y)$, аргументы x и y которой удовлетворяют условию $g(x,y) = C$, называемому ***уравнением связи.***

Определение 1. Точка (x_0, y_0) называется ***точкой условного максимума или минимума***, если существует такая ее окрестность, что для всех точек (x,y) из этой окрестности, удовлетворяющих условию $g(x,y) = C$, выполняется неравенство $f(x_0,y_0) \ge f(x,y)$ или $f(x_0,y_0) \le f(x,y)$.

Наиболее простым способом нахождения условного экстремума функции двух переменных является сведение задачи к отысканию экстремума функции одной переменной. Допустим, уравнение связи $g(x,y) = C$ удалось разрешить относительно одной из переменных, например выразить y через x, т.е $y = \varphi(x)$. Подставив полученное выражение в функцию двух переменных, получим $z = f(x,y) = f(x,\varphi(x))$, т.е. функцию одной переменной. Ее экстремум и будет условным экстремумом функции $z = f(x,y)$.

Для отыскания условного экстремума в общем случае используется ***метод множителей Лагранжа.***

2. Метод исключения переменных. Метод множителей Лагранжа.

Рассмотрим функцию трех переменных

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\left[g(x,y) - C\right]$$

Эта функция называется *функцией Лагранжа*, а λ - *множителем (коэффициентом) Лагранжа.* Доказывается следующая теорема:

Теорема 1. Если точка (x_0, y_0) является точкой условного экстремума функции $z = f(x,y)$ при условии $g(x,y) = C$, то существует значение λ_0 такое, что точка (x_0, y_0, λ_0) является точкой экстремума функции $F(x,y,\lambda)$

Таким образом, для нахождения условного экстремума функции $z = f(x,y)$ при условии $g(x,y) = C$ требуется найти решение следующей системы:

$$\begin{cases} F'_x = f'_x(x,y) + \lambda g'_x(x,y) = 0, \\ F'_y = f'_y(x,y) + \lambda g'_y(x,y) = 0, \\ F'_\lambda = g(x,y) - C = 0. \end{cases}$$

Последнее из этих уравнений совпадает с уравнением связи. Данная система выражает *необходимые условия Лагранжа условного экстремума.*

Из этой системы уравнений находят критические точки условного экстремума.

Определение 2. Точка (x_0, y_0, λ_0) называется *критической точкой* функции Лагранжа, если $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$ (или не существуют).

Для исследования критических точек на экстремум вычисляем в полученных точках значения $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ и составляем определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & F''_{xx} & F''_{xy} \\ g'_y & F''_{xy} & F''_{yy} \end{vmatrix}.$$

Тогда *достаточные условия условного экстремума* запишутся в следующем виде:

1. Если $\Delta < 0$, то функция $z = f(x,y)$ имеет в точке (x_0, y_0) условный минимум;
2. если $\Delta > 0$ - то условный максимум.

Исследование функции на условный экстремум с помощью метода множителей Лагранжа проводится по следующему *алгоритму:*

1. Составить функцию Лагранжа
$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda[g(x,y) - C].$$
2. Найти частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$ и приравнять их к нулю, т.е. составить необходимые условия экстремума функции Лагранжа.
3. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} F'_x = 0, \\ F'_y = 0, \\ F'_\lambda = 0 \end{cases}$$
и найти критические точки.
4. Найти частные производные:
$\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

5. Вычислить значения найденных частных производных в каждой критической точке.
6. Из найденных значений составить определитель Δ .
7. С помощью достаточных условий сделать вывод о характере экстремальной точки.
8. Найти значения функции в точках условного экстремума.

3. Нахождение глобальных экстремумов дифференцируемой функции на замкнутом ограниченном множестве.

Рассмотрим функцию $f(M)$, которая задана на замкнутом множестве X . Точка M_0 называется точкой ***глобального максимума*** или ***наибольшим значением*** функции на множестве X , если $f(M) \le f(M_0)\ \forall M \in X$.

Если же $f(M) \ge f(M_0)\ \forall M \in X$, то точка M_0 называется точкой ***глобального минимума*** или ***наименьшим значением*** функции на множестве X .

Точка M_0 называется точкой ***глобального экстремума*** функции $f(M)$ на множестве X , если точка M_0 является глобальным минимумом или глобальным максимумом функции $f(M)$ на множестве X .

Если функция непрерывна на замкнутом и ограниченном множестве X , то из теоремы Вейерштрасса следует, что во множестве X найдутся точки глобального максимума и минимума функции.

Точки глобального экстремума функции могут быть внутренними точками множества X или принадлежать границе множества X . Если точка глобального экстремума является внутренней, то она является локальным экстремумом функции. Отсюда вытекает алгоритм отыскания глобальных экстремумов функции на множестве X :

1. Во множестве X найти все критические точки функции, а также точки, в которых функция не дифференцируема.
2. Найти все точки, в которых функция может принимать наибольшее и наименьшее значения на границе множества X .
3. Вычислить значения функции в точках, найденных в пунктах 1 и 2.
4. Среди значений, найденных в пункте 3, выбрать наибольшее и наименьшее значения.

1.19 Лекция №19 (2 часа).

Тема: «Кратные интегралы**»**

1.19.1 Вопросы лекции:

1. Определение и свойства двойных интегралов
2. Свойства двойного интеграла
3. Повторные интегралы. Связь между двойными и повторными интегралами

1.19.2 Краткое содержание вопросов:

1. Определение и свойства двойных интегралов

Понятие интеграла может быть расширено на функции двух и большего числа переменных. Рассмотрим, например, функцию двух переменных $z = f(x, y)$. Двойной интеграл от функции $f(x, y)$ обозначается как

$$\iint_R f(x,y)dA,$$

где R - область интегрирования в плоскости Oxy.

Если определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ от функции одной переменной $f(x) > 0$ выражает площадь под кривой $f(x)$ в интервале от $x = a$ до $x = b$, то двойной интеграл выражает объем под поверхностью $z = f(x, y)$ выше плоскости Oxy в области интегрирования R (рис. 1).

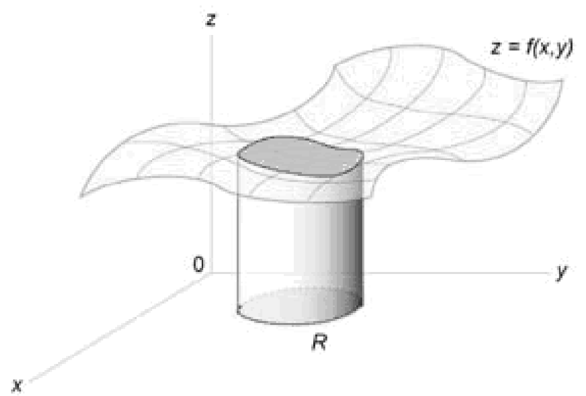


Рис. 1.

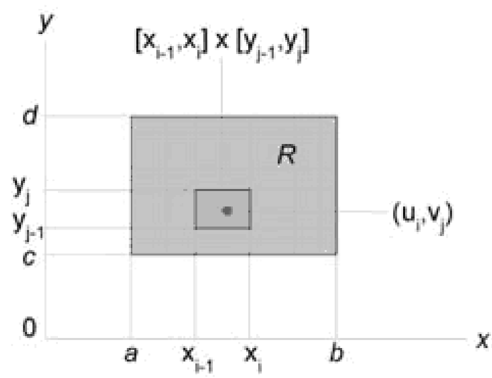


Рис. 2.

Формально двойной интеграл можно ввести как предел ***суммы Римана.*** Пусть, для простоты, область интегрирования R представляет собой прямоугольник [a,b]×[c,d] (рис. 2). Используя ряд чисел $\{x_0, x_1, ..., x_m\}$, разобьем отрезок [a,b] на малые интервалы таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < ... < x_{m-1} < x_m = b$.

Аналогично, пусть множество чисел $\{y_0, y_1, ..., y_n\}$ является разбиением отрезка [c,d] вдоль оси Oy, при котором справедливы неравенства

$c = y_0 < y_1 < y_2 < ... < y_j < ... < y_{n-1} < y_n = d$.

Суммой Римана функции $f(x, y)$ над разбиением [a,b]×[c,d] называется выражение

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(u_i, \upsilon_j)\Delta x_i \Delta y_j,$$

где (u_i, υ_j) - некоторая точка в прямоугольнике $(x_{i-1}, x_i)\times(y_{j-1}, y_j)$ и $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$.

Двойной интеграл от функции $f(x, y)$ в прямоугольной области [a,b]×[c,d] определяется как предел суммы Римана, при котором максимальные значения Δx_i и Δy_j стремятся к нулю:

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)dA = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_j \to 0}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(u_i, \upsilon_j)\Delta x_i \Delta y_j.$$

Чтобы определить двойной интеграл в произвольной области R, отличной от прямоугольной, выберем прямоугольник [a,b]×[c,d], покрывающий область R (рис. 3), и введем функцию $g(x, y)$, такую,

$$\begin{cases} g(x, y) = f(x, y), & при \quad f(x, y) \in R \\ g(x, y) = 0, & при \quad f(x, y) \notin R \end{cases}.$$

Тогда двойной интеграл от функции *f(x,y)* в произвольной области R определяется как

$$\iint\limits_{R} f(x, y)dA = \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} g(x, y)dA.$$

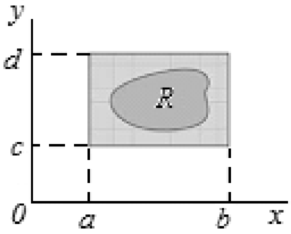


Рис. 3.

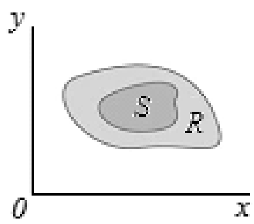


Рис. 4.

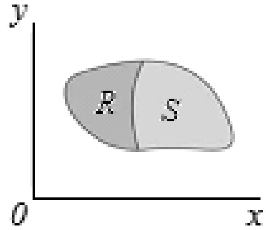


Рис. 5.

2. Свойства двойного интеграла

Двойной интеграл обладает следующими свойствами:

1. $\iint\limits_R (f(x,y) \pm g(x,y))dA = \iint\limits_R f(x,y)dA \pm \iint\limits_R g(x,y)dA$.
2. $\iint\limits_R k \cdot f(x,y)dA = k\iint\limits_R f(x,y)dA$, где k – постоянная.
3. Если $f(x,y) \le g(x,y)$ в области R, то $\iint\limits_R f(x,y)dA \le \iint\limits_R g(x,y)dA$
4. Если $f(x,y) \ge 0$ в области R и $S \subset R$, то $\iint\limits_S f(x,y)dA \le \iint\limits_R f(x,y)dA$
5. Если $f(x,y) \ge 0$ на R и области R и S являются непересекающимися (рис. 5), то $\iint\limits_{R\cup S} f(x,y)dA \le \iint\limits_R f(x,y)dA + \iint\limits_S f(x,y)dA$, где $R \cup S$ – объединение этих областей.

3. Повторные интегралы. Связь между двойными и повторными интегралами

Области интегрирования* I *и* II *типа

Двойные интегралы вычисляются, как правило, с помощью повторных интегралов. Однако переход от двойных к повторным интегралам возможен не для произвольной области интегрирования *R*, а для областей определенного типа. Введем понятия областей интегрирования типа I и II.

Говорят, что область *R* на плоскости относится к типу I или является элементарной относительно оси *Oy*, если она лежит между графиками двух непрерывных функций, зависящих от *x* (рис.6), и описывается множеством:

$R = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ p(x) \le y \le q(x)\}$.

Говорят, что область *R* на плоскости относится к типу II или является элементарной относительно оси *Ox*, если она лежит между графиками двух непрерывных функций, зависящих от *y* (рис. 7), и описывается множеством:

$R = \{(x,y) \mid u(y) \le x \le \upsilon(y), c \le y \le d\}$

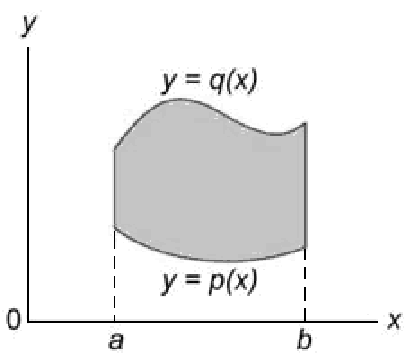


Рис. 6.

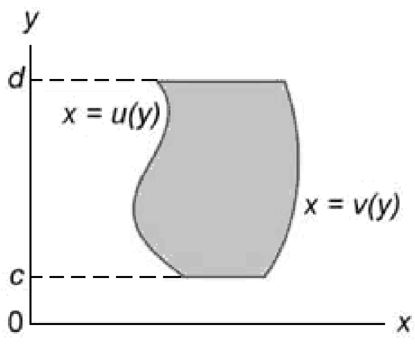


Рис. 7.

Связь между двойными и повторными интегралами

Пусть $f(x,y)$ является непрерывной функцией в области *R* типа I. Тогда двойной интеграл от функции $f(x,y)$ в данной области выражается через повторный интеграл в виде

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)dydx.$$

Если $f(x,y)$ является непрерывной функцией в области R типа II, то справедливо соотношение

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_{u(y)}^{\upsilon(y)} f(x,y)dxdy.$$

Приведенные формулы (в англоязычной литературе они известны как *теорема Фубини*) позволяют вычислять двойные интегралы через повторные. В повторных интегралах сначала находится внутренний интеграл, а затем - внешний.

Пример. Найти интеграл $\int_0^1 \int_1^2 xydydx$.

Решение.

Сначала вычислим внутренний интеграл и затем внешний.

$$\int_0^1 \int_1^2 xydydx = \int_0^1 \left[\int_1^2 xydy\right]dx = \int_0^1 \left[x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_1^2\right]dx = \int_0^1 \frac{3}{2}xdx = \frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

1.20 Лекция №20 (2 часа).

Тема: «Числовые ряды»

1.20.1 Вопросы лекции:

1. Понятие числового ряда.
2. Примеры сходящихся и расходящихся рядов.
3. Свойства рядов.
4. Признаки сходимости знакоположительных рядов.
5. Эталонные ряды.

1.20.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие числового ряда

Пусть задана последовательность действительных чисел (a_n): $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

Опр; Символ $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ называется *числовым рядом* , а числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ его *членами,* a_n ($n \in N$) называется *.общим членом.*

Обозначим: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ (1)

Опр: Суммы

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

называются *частичными суммами* ряда (1).

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. Примеры сходящихся и расходящихся рядов

Опр: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *сходящимся,* если последовательность его частичных сумм сходится к какому-нибудь числу S (т е $\exists$ конечный предел $\lim_{n\to\infty} S_n = S$), при этом S- *сумма ряда.*

В этом случае $S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ или $S=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\boxed{S = \lim_{n\to\infty} S_n}$ -сумма ряда

<u>Опр:</u> Если не существует $\lim_{n\to\infty} S_n$ или $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$, то ряд (1) называется <u>*расходящимся.*</u>

<u>Пример:</u> Выяснить, сходится ли данный ряд, если сходится, найти его сумму. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \quad \Rightarrow S = 1$$

Ряд сходится и его сумма равна 1.

<u>**ТЕОРЕМА** (*Необходимое условие сходимости ряда):*</u> Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его общий член стремится к 0 (т е $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$)

<u>**Замечание**: Обратная теорема не верн</u>а.

<u>**СЛЕДСТВИЕ**</u>: Если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

<u>Пример:</u> Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{3n+2}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{3n+2} = \frac{4}{3} \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{3n+2} \quad \text{расходится}$$

3. Свойства рядов

1) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится (расходится), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{N} a_n$, где $\tilde{N} \in R$ тоже сходится (расходится). Обратное верно при $C \neq 0$

2) Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, который называется суммой данных рядов, тоже сходится.

4. Признаки сходимости знакоположительных рядов

<u>ОПР</u>: Ряд, все члены которого положительны, называется <u>*знакоположительным.*</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0 \quad (n \in N) \qquad (2)$$

Достаточные условия сходимости ряда:

1) ТЕОРЕМА (<u>*Признак сравнения*</u>): Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0$ (A) и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n, b_n > 0$ (B), $(n \in N)$.и выполняется неравенство $a_n \leq b_n, \forall n \in N$,

тогда из сходимости ряда (B) $\Rightarrow$ сходимость ряда (A),
а из расходимости ряда (A) $\Rightarrow$ расходимость ряда (B).

ТЕОРЕМА (<u>*Предельный признак сравнения):*</u> Пусть даны два знакоположительных ряда (А) и (В). Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=k$, где $k>0$, то оба знакоположительных ряда (А) и (В) в плане сходимости ведут себя одинаково (т. е. либо оба сходятся, либо оба расходятся).

<u>Пример:</u> Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^3+1}$ (А)

Сравним с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ (В)-ряд сходится, т к p=2>1

$K=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot n^2}{n^3+1}=1,\ K>0\Rightarrow$ ряды (А) и (В) в плане сходимости ведут себя одинаково,

$\Rightarrow$ ряд (А) -сходятся.

2) ТЕОРЕМА (<u>*Признак Даламбера)*</u>: Пусть дан знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\ a_n>0$ (2).

Если начиная с некоторого значения n члены ряда (2) удовлетворяют неравенству $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\le 1$, то ряд (2) сходится, а если начиная с некоторого значения n выполняется неравенство $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1$, то ряд (2) расходится

ТЕОРЕМА (<u>*Предельная форма признака Даламбера):*</u> Пусть дан знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\ a_n>0$ Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=D$, то $D<1$ ряд сходится, $D>1$ ряд расходится, $D=1$ признак не подходит, вопрос о сходимости ряда не решен.

<u>Пример:</u> Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{9^n}{n^2}$

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n};\quad a_n=\frac{9^n}{n^2};\quad a_{n+1}=\frac{9^{n+1}}{(n+1)^2}=\frac{9\cdot 9^n}{(n+1)^2}$$

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{9\cdot 9^n\cdot n^2}{(n+1)^2\cdot 9^n}=9>1\Rightarrow$$

ряд расходится.

3) ТЕОРЕМА (<u>*Признак Коши*</u>): Пусть дан знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\ a_n>0$ (2). Если начиная с некоторого
значения n выполняется неравенство $\sqrt[n]{a_n}\le 1$, то ряд (2) сходится, а если $\sqrt[n]{a_n}>1$, то ряд (2) расходится

ТЕОРЕМА 2 (<u>*Предельная форма признака Коши):*</u> Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=K$, то $K<1$ ряд сходится, $K>1$ ряд расходится, $K=1$ признак не подходит, вопрос о сходимости ряда не решен.

<u>Примеры:</u> Исследовать на сходимость ряды

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

$4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24; \quad n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n; \quad (2n)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2n$

$$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}; \quad a_{n+1} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}$$

Применим предельный признак Даламбера:

$$D = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot(n+1)!\cdot(2n)!}{(2n+2)!\cdot n!\, n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} = \frac{1}{4}, \quad D = \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится.}$$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}$

Применим предельный признак Коши:

$$K = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt[n]{n}} = \frac{2}{1} = 2, \quad K = 2 > 1 \Rightarrow \text{ряд расходится.}$$

5. Эталонные ряды

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - гармонический ряд, расходится.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, $p\in R$ если p>1, то ряд сходится, если $p\le 1$, то ряд расходится

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a\cdot q^n$, $a\in R$ если $|q|\ge 1$, то ряд расходится, если $|q|<1$, то ряд сходится

1.21 Лекция №21 (2 часа).

Тема: «Знакочередующиеся ряды»

1.21.1 Вопросы лекции:

1. Понятие знакочередующегося ряда.
2. Признак Лейбница.
3. Абсолютная и условная сходимость.

1.21.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие знакочередующегося ряда

<u>ОПР:</u> Ряд $a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots$, где $a_n>0$ (3) называется <u>*знакочередующимся рядом*</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ (3)

(3”) $-a_1+a_2-a_3+a_4-\ldots$, где $a_n>0$ тоже знакочередующийся ряд

Обозначим $u_n = (-1)^n a_n \quad то \quad |u_n| = a_n$

2. Признак Лейбница

ТЕОРЕМА (<u>*Признак Лейбница):*</u> Если общий член знакочередующегося ряда удовлетворяет условиям: $\left.\begin{matrix} 1)\ |u_{n+1}| < |u_n| \\ 2)\ \lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = 0 \end{matrix}\right\}\ то\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ сходится

Если хотя бы одно из этих условий нарушается, то ряд расходится.

<u>Пример:</u> Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{7}{n^2}$

$= -7 + \frac{7}{4} - \frac{7}{9} + \frac{7}{16} - ... + (-1)^n \frac{7}{n^2} + ...$

1) $|u_n| = \frac{7}{n^2}$; $|u_{n+1}| = \frac{7}{(n+1)^2}$ $\Rightarrow$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{7}{n^2}$ сходится по признаку Лейбница.

$|u_{n+1}| < |u_n|$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n^2} = 0$

3. Абсолютная и условная сходимость

ОПР: Если ряд сходится вместе с рядом, составленным из модулей его членов, то такой ряд называется *абсолютно сходящимся.*

ОПР: Если знакочередующийся ряд сходится, а ряд, составленный из модулей его членов расходится, то такой ряд называется *условно сходящимся.*

Пример: (продолжим предыдущий пример)

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{7}{n^2}$ -сходится $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{n^2} = 7\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $p = 2 > 1 \Rightarrow$ обобщенный гармонический ряд, сходится, тогда данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{7}{n^2}$ -сходится абсолютно.

1.22 Лекция №22 (2 часа).

Тема: «Степенные ряды»

1.22.1 Вопросы лекции:

1. Понятие степенного ряда.
2. Радиус и интервал сходимости степенного ряда.

1.22.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие степенного ряда

ОПР: Ряд вида $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + ...$, где $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, x_0 \in R$ - заданные действительные числа, x-переменная, называется *степенным рядом.*

Обозначение $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ (4)

ТЕОРЕМА (*Признак Даламбера для рядов с произвольными членами):* Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = D$, то $D < 1$ ряд сходится, $D > 1$ ряд расходится, $D = 1$ признак не подходит, вопрос о сходимости ряда не решен.

2. Радиус и интервал сходимости степенного ряда

Найем интервал и радиус сходимости степенного ряда, воспользовавшись признаком Даламбера

$D = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x - x_0)^{n+1}}{a^n(x - x_0)^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x - x_0)}{a_n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}(x - x_0)\right|$ Пусть D<1, то степенной ряд абсолютно сходится.

$\Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}(x - x_0)\right| < 1 \ \Rightarrow |x - x_0| < \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x - x_0 < \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \Rightarrow x < \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| + x_0 \\ x - x_0 > -\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \Rightarrow x > x_0 - \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \end{array}\right.$. Т.е. $x_0 - \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| < x < x_0 + \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

$c_1 < x < c_2$

Значит, на интервале $(c_1; c_2)$ ряд абсолютно сходится.

$R = \left| \frac{c_1 - c_2}{2} \right|$-<u>*радиус сходимости ряда.*</u>

Также нужно выяснить вопрос о сходимости ряда на концах интервала, т е при x= c_1 и x=c_2.
Таким образом, получим <u>*область сходимости.*</u>

<u>Пример:</u> Найти область и радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+2} \cdot x^n$

$u_n = \frac{3^n}{n+2} x^n; \quad a_n = \frac{3^n}{n+2}; \quad x_0 = 0$

$D = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3x(n+2)}{n+3} \right| = |3x|$ Ряд абсолютно сходится, если D<1, т е $|3x| < 1$, $|x| < \frac{1}{3}$

$x \in (-\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$-**интервал сходимости ряда.**

R=1\3-**радиус сходимости**.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости:

1) $x = \frac{1}{3} \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+2} \cdot \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$

Сравним с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – гармонический ряд, расходится

Применим предельный признак сравнения $K = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1 > 0 \Rightarrow$ оба ряда в плане сходимости ведут себя одинаково $\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$- расходится. $\Rightarrow$ $x = -\frac{1}{3}$ не входит в область сходимости ряда.

2) $x = -\frac{1}{3} \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+2} (-\frac{1}{3})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$

$D = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{-n-2}{n+3} \right| = 1 \Rightarrow$ признак Даламбера не подходит

Рассмотрим признак Лейбница:

$\left. \begin{aligned} &1)\ |u_{n+1}| < |u_n| \\ &2)\ \lim_{n\to\infty} |u_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \textit{ряд} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$ ряд сходится условно, т.к. ряд, составленный из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ -расходится

$x \in [\ -\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ **- область сходимости ряда**

1.23 Лекция №23 (2 часа).
Тема: «Ряды Маклорена и Тейлора»

1.23.1 Вопросы лекции:
1. Ряд Тейлора и Маклорена.
2. Применение рядов в приближенных вычислениях.

1.23.2 Краткое содержание вопросов:
1. Ряд Тейлора и Маклорена
Если функция $f(x)$ имеет непрерывные производные вплоть до $(n+1)$-го порядка, то ее можно разложить в степенной ряд по *формуле Тейлора*:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)(x-a)^2}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}+R_n,$$

где R_n − *остаточный член* в форме Лагранжа определяется выражением

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!},\quad a<\xi<x.$$

Если приведенное разложение сходится в некотором интервале x, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=0$, то оно называется *рядом Тейлора*, представляющим разложение функции $f(x)$ в точке a.

Если $a = 0$, то такое разложение называется *рядом Маклорена*:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}+R_n.$$

Разложение некоторых функций в ряд Маклорена

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$$

2. Применение рядов в приближенных вычислениях

С помощью рядов можно вычислить значения тригономегричеких функций, логарифмов чисел, корней, определенных интегралов.

Значения тригонометрических функций (синуса и косинуса) можно вычислить с помощью их разложений в степенные ряды.

Для вычисления натуральных логарифмов чисел применяется формула

$$\ln\frac{N+1}{N}=\ln(N+1)-\ln N=2\left(\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{(2N+1)^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2N+1)^5}+\ldots\right),$$

Которая получается из формулы $\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2k-1}}{2k-1}+\ldots\right)\ (|x|<1)$ при $x=1/(2N+1)$.

Погрешность при замене суммы ряда суммой его и первых членов определяется формулой

$$\alpha_n=2\left(\frac{1}{2n+1}\frac{1}{(2N+1)^{2n+1}}+\frac{1}{2n+3}\frac{1}{(2N+1)^{2n+3}}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{1}{2n+5}\frac{1}{(2N+1)^{2n+5}}+\ldots\right).$$

Очевидно, $\alpha_n<\beta_n=\frac{2}{2n+1}\frac{1}{(2N+1)^{2n+1}}\left(1+\frac{1}{(2N+1)^2}+\frac{1}{(2N+1)^4}+\ldots\right),$

Или $\alpha_n<\frac{1}{2(2n+1)}\frac{1}{(2N+1)^{2n-1}}\frac{1}{N(N+1)}.$

Для вычисления корней применяют биномиальный ряд, т. е. степенной ряд для функции $f(x)=(1+x)^{\alpha}$. Предположим, что нужно вычислить $\sqrt[m]{A}$, причем уже

Известно приближенное значение a Этого корня, но требуется улучшить его. Если $A/a^m=1+x$, где x - небольшая правильная дробь, то можно преобразовать корень следующим образом:

$$\sqrt[m]{A} = a\sqrt[m]{\frac{A}{a^m}} = a\,(1+x)^{1/m}$$

И применить биномиальный ряд при $\alpha = 1/m$.

Если подынтегральная функция разлагается в степенной ряд, а пределы интегрирования принадлежат области сходимости этого ряда, соответствующий определенный интеграл можно вычислить приближенно.

Пример. Вычислить $\sqrt{17}$ С точностью до 0,0001.

Преобразование (23.24) в данном случае принимает вид

$$\sqrt{17} = \sqrt{16+1} = \sqrt{16\,(1+1/16)} = 4\,(1+1/16)^{1/2}.$$

Воспользуемся биномиальным рядом. Полагая в нем $x = 1/16,\ \ \alpha = 1/2,$ Получаем

$$\left(1+\frac{1}{16}\right)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}\,\frac{1}{16}+\frac{1/2\,(1/2-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{16}\right)^2+\frac{1/2\,(1/2-1)(1/2-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{16}\right)^3+$$
$$+\frac{1/2\,(1/2-1)\,(1/2-2)\,(1/2-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{1}{16}\right)^4+\ldots,$$

Т. е.

$$\left(1+\frac{1}{16}\right)^{1/2} = 1+\frac{1}{2\cdot 16}-\frac{1}{2^3\cdot 16^2}+\frac{1}{2^4\cdot 16^3}-\frac{5}{2^7\cdot 16^4}+\ldots$$

Полученный ряд (если не принимать во внимание первый член) является знакочередующимся рядом, удовлетворяющим условиям признака Лейбница. Погрешность при вычислении его суммы не превышает первого отброшенного члена. Так как

$$\frac{1}{2^4\cdot 16^3} = \frac{1}{66536} < \frac{1}{10000} = 0{,}0001,$$

То достаточно взять сумму первых трех членов ряда, чтобы получить искомое значение корня с заданной точностью: $\sqrt{17} \approx 4\left(1+\frac{1}{2\cdot 16}-\frac{1}{2^3\cdot 16^2}\right) \approx 4{,}1230.$

1.24 Лекция №24 (2 часа).
Тема: «Дифференциальные уравнения»

1.24.1 Вопросы лекции:
1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
2. Частные и общие решения. Задача Коши.
3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

1.24.2 Краткое содержание вопросов:
1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям
Раньше мы встречались с такими зависимостями:
Дано: $v(x) = t^2 + 5t - 3$
Найти: закон движения S(t)
$S'(t) = v(t) = t^2 + 5t - 3 \Rightarrow \ \dfrac{dS}{dt} = t^2 + 5t - 3$ - находим S интегрированием.

Т е мы получаем уравнение, содержащее производную, а производная есть отношение дифференциалов. Такое уравнение называется <u>*дифференциальным.*</u> Решением таких уравнений является искомая функция.

ОПР: *Дифференциальным уравнением* называется равенство, выражающее зависимость между

аргументом, искомой функцией и её производными.

$F(x; y; y'; y''; ...; y^{(n)}) = 0 \quad (1)$

Запишем это уравнение в виде: $y^{(n)} = F_1(x; y; y'; y''; ...; y^{(n-1)}) \quad (2)$

ОПР: *Порядком* ДУ называется наивысший порядок входящей в него производной.
Уравнения (1) и (2) называются *ДУ n-го порядка.*

Рассмотрим ДУ I порядка:

$F(x; y; y') = 0 \quad т.е. \quad y' = f(x; y)$

ОПР: *Решением ДУ* называется функция, обращающая его в верное равенство, т е в тождество.

Пример: Проверить является ли функция $y = e^{-x}$ решением ДУ $y'' + 2y' + y = 0$

$y' = -e^{-x} \qquad y'' = e^{x}$

$e^{-x} - 2e^{-x} + e^{-x} = 0$

$0 \equiv 0 \Rightarrow \quad y = e^{-x}$

Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = f(x)$

$\frac{dy}{dx} = f(x) \Rightarrow dy = f(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int dy = \int f(x)dx \Rightarrow \quad y = \int f(x)dx + C$ - о*бщее решение* дифференциального

уравнения представляет собой множество функций.

ОПР: *Общим решением ДУ* n-го порядка называется функция, зависящая от аргумента и n произвольных постоянных. $y = \varphi(x; C_1; C_2 : ... : C_n)$

2. Частные и общие решения. Задача Коши

ОПР: *Частным решением ДУ* называется решение, полученное из общего при определенных значениях постоянных

ТЕОРЕМА (*о существовании и единственности частного решения ДУ I порядка):* Если в уравнении $y' = f(x; y)$, функции $f(x; y)$ и $f'_y(x; y)$ непрерывны в любой точке $(x_0; y_0)$, то $\exists!$ частное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$

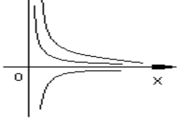
Задача нахождения частных решений по начальным условиям называется *решением задачи Коши.*

Пример: $y' = -\frac{y}{2x}$ - ДУ 1 порядка

1) Проверить, является ли функция $y = \frac{C}{\sqrt{x}}$ решением ДУ

$y' = -\frac{C}{2x\sqrt{x}} \qquad \frac{C}{2x\sqrt{x}} = \frac{C/\sqrt{x}}{2x}$ - верно $\Rightarrow y = \frac{C}{\sqrt{x}}$ -общее решение ДУ

2) Придавая различные значения С, получим множество решений, которые называются



частными.

При С=0: y=0 При С=1: $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ При С=-2 $y = \frac{-2}{\sqrt{x}}$ и т д

3) График общего решения ДУ называется *интегральными кривыми.*

Нужно выбрать из множества $y = \frac{C}{\sqrt{x}}$ решений интегральную кривую, которая проходила бы через точку $\begin{cases} x_0 = 4 \\ y_0 = 1 \end{cases}$, т е решить задачу Коши с начальными условиями.

Подставим в общее решение $y = \frac{C}{\sqrt{x}}$ начальные условия: $1 = \frac{\tilde{N}}{\sqrt{4}} \Rightarrow \tilde{N} = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{x}}$ -частное решение, удовлетворяющее начальным условиям.

3. Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными

$\boxed{M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0}$ (4) –уравнение с разделяющимися переменными.

Разделим переменные, т е приведем уравнение к такому виду, чтобы в левой части равенства были функции, зависящие только от y, а в правой- только от x.

$$M_2(y)N_2(y)dy = -M_1(x)N_1(y)dx \quad \Big|: M_2(x)N_1(y) \neq 0$$

$$\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = -\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx$$

Получим уравнение с разделенными переменными.

Проинтегрируем обе части равенства

$$\int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = -\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx$$

Решив интегралы, найдем решение ДУ

<u>Пример:</u> Решить ДУ 1-го порядка

$$(xy - x)y' - (xy + 2y) = 0 - \text{ДУ 1 пор.}$$

$$(xy - x)\frac{dy}{dx} - (xy + 2y) = 0 \quad \Big| \cdot dx$$

$$\underbrace{x}_{M_2(x)}\underbrace{(y-1)}_{N_2(y)}dy - \underbrace{y}_{N_1(y)}\underbrace{(x+2)}_{M_1(x)}dx = 0 - \text{ДУ} \quad \Big|: xy$$

$$\int \frac{y-1}{y}dy = \int \frac{x+2}{x}dx$$

$$y = x + \ln\left|x^2 y\right| + C$$

Решим задачу Коши при начальном условии $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{cases}$

1=1+ln1+C

C=0 $\Rightarrow y = x + \ln\left|x^2 y\right|$ - частное решение, удовлетворяющее начальным условиям.

1.25 Лекция №25 (2 часа).

Тема: «Некоторые типы дифференциальных уравнений первого порядка»

1.25.1 Вопросы лекции:

1. Линейные дифференциальные уравнения. Уравнения Бернулли. Метод Бернулли.
2. Однородные дифференциальные уравнения.
3. Разностные уравнения.

1.25.2 Краткое содержание вопросов:

1. Линейные дифференциальные уравнения. Уравнения Бернулли. Метод Бернулли

<u>ОПР:</u> <u>*Линейным ДУ 1 порядка*</u> называется уравнение вида $\boxed{y' + p(x)y = q(x)}$ (6) , где $p(x)$ *и* $q(x)$ - некоторые функции от x.

Одним из методов решения таких уравнений является <u>*метод Бернулли.*</u>

Решение ДУ ищут в виде $y = u(x) \cdot v(x)$, *ãäå*$u(x)$ *и* $v(x)$ -неизвестные функции от x.

$$\begin{aligned} &y = uv \\ &y' = u'v + uv' \end{aligned}$$ подставим в (6)

$u'v + \underline{\underline{uv'}} + \underline{\underline{p(x)uv}} = q(x)$ вынесем u за скобку

$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$

Подберём v(x) так, чтобы $v' + p(x)v = 0$, получим систему

$\begin{cases} v' + p(x)v = 0 \\ u'v = q(x) \end{cases}$ -это уравнения с разделяющимися переменными

Из первого уравнения найдём v(x), подставим его во второе уравнение и найдём u(x). Т.о. найдём $y = u(x) \cdot v(x)$-общее решение ДУ.

Пример: $xy' - 5y - (x+1) = 0$ Разделить переменные нельзя. Это не однородное ДУ

Приведём к линейному ДУ:

$xy' - 5y = x + 1 \quad |: x$

$y' - \frac{5}{x}y = \frac{x+1}{x}$

$y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$

$u'v + \underline{\underline{uv'}} - \underline{\underline{\frac{5}{x}}}uv = \frac{x+1}{x}$

$u'v + u(v' - \frac{5}{x}v) = \frac{x+1}{x}$

$\begin{cases} v' - \frac{5}{x}v = 0 \\ u'v = \frac{x+1}{x} \end{cases} \Rightarrow v = x^5, u = -\frac{1}{4x^4} - \frac{1}{5x^5} + C$

$y = uv \Rightarrow y = -\frac{x}{4} - \frac{1}{5} + Cx^5 - \textit{общее решение ДУ}$

При решении методом Бернулли, промежуточное значение const берём =0

2. Однородные дифференциальные уравнения

ОПР: ДУ $y' = f(x;y)$ называется *однородным ДУ 1 порядка* , если функция $f(x;y)$ удовлетворяет

условию: $\boxed{f(tx;ty) = f(x;y)}$ (5) , где t-произвольный параметр.

Рассмотрим однородное ДУ $y' = f(x;y)$

Обозначим $\boxed{z = \frac{y}{x}}$ $\Rightarrow y = xz$, z-функция от x

$$y' = z'x + zx' = z'x + z$$

Подставим в исходное уравнение:

$$\begin{aligned} &z'x + z = f(x;zx) \\ &z'x = f(x;zx) - z \end{aligned}$$ - можно свести к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример: Решить ДУ 1-го порядка

$$xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2 dx} \quad |: dx$$

$$(*)\ y' = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} - \text{однородное ДУ}, \text{тк}$$

$$f(tx;ty) = \frac{ty + \sqrt{(tx)^2 + (ty)^2}}{tx} = f(x;y)$$

$$\text{обозначим}: z = \frac{y}{x} \quad y = zx \quad y' = z'x + z \quad \text{подставим в } (*)$$

$$z'x = \sqrt{1 + z^2}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln\left|z + \sqrt{1+z^2}\right| = \ln|x| + \ln|C|$$

$$z + \sqrt{1+z^2} = Cx$$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = Cx$$

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2 - \text{общий интеграл}$$

Выбираем в какой части равенства записываем const и в какой форме. Если нет других функций, кроме ln, то записываем const в виде ln/C/.

Дополнительно: Решить задачу Коши с начальными условиями $x_0=1$ и $y_0=3$

$C=3+\sqrt{10}$

$y + \sqrt{x^2 + y^2} = (3 + \sqrt{10})x^2$ - частное решение.

3. Разностные уравнения

На практике простейшие разностные уравнения возникают при исследовании, например величины банковского вклада. Эта величина является переменной Y_x, представляющей сумму, которая накапливается по установленному закону при целочисленных значениях аргумента *x*. Пусть сумма Y_0 положена в банк при условии начисления 100 r сложных процентов в год. Пусть начисление процентов производится один раз в год и *x* обозначает число лет с момента помещения вклада (x = 0, 1, 2,...). Обозначим величину вклада по истечении *x*лет через Y_x. Мы получаем

$$Y_x = (1+r)Y_{x-1}.$$

Если начальная сумма составляет Y_0, мы приходим к задаче отыскания решения полученного разностного уравнения, подчиненного начальному условию $Y_x = Y_0$ при x = 0. Полученное разностное уравнение содержит Y_x и значение этой переменной на один год раньше, т.е. Y_{x-1}; в данном случае аргумент *x* явно не входит в разностное уравнение.

Вообще говоря, *обыкновенное разностное уравнение* устанавливает связь между значениями функции Y=Y(x), рассматриваемой для ряда *равноотстоящих значений аргумента x*, но можно без ограничения общности считать, что искомая функция определена для равноотстоящих значений аргумента с шагом, равным единице. Таким образом, если начальное значение аргумента есть *x*, то ряд его равноотстоящих значений будет x, x+1, x+2,... и в обратном направлении: x, x-1, x-2,.... Соответствующие значения функции будем обозначать $Y_x, Y_{x+1}, Y_{x+2}, \ldots$ или $Y_x, Y_{x-1}, Y_{x-2}, \ldots$. Определим так называемые *разности* различных порядков функции Y_x с помощью следующих формул:

Разности первого порядка

$$D\,Y_x = Y_{x+1} - Y_x,$$
$$D\,Y_{x+1} = Y_{x+2} - Y_{x+1},$$
$$DY_{x+2} = Y_{x+3} - Y_{x+2},$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

Разности второго порядка

$$D^2Y_x = DY_{x+1} - D\,Y_x,$$
$$D^2Y_{x+1} = D\,Y_{x+2} - DY_{x+1},$$
$$D^2Y_{x+2} = D\,Y_{x+3} - DY_{x+2},$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

Разности третьего порядка

$D^3Y_x = D^2Y_{x+1} - D^2Y_x$,

$D^3Y_{x+1} = D^2Y_{x+2} - D^2Y_{x+1}$,

... ...

Обыкновенным разностным уравнением называется уравнение, связывающее значения одного независимого аргумента *x*, егофункцииY_x и разностей различных порядков этой функции DY_x, D^2Y_x, D^3Y_x,.... Такое уравнение можно записать в общем виде следующим образом:

$$j(x, Y_x, DY_x, D^2Y_x\ D^3Y_x, D^nY_x) = 0,$$

которое по форме аналогично дифференциальному уравнению.

Порядком разностного уравнения называется порядок наивысшей разности, входящей в это уравнение. Разностное уравнение (1) часто удобнее записать, пользуясь не разностями неизвестной функции, а ее значениями при последовательных значениях аргумента, то есть выразить DY_x, D^2Y_x, D^3Y_x,... через Y_x, Y_{x+1}, Y_{x+2},.... Уравнение (1) можно привести к одной из двух форм:

$$y(x, Y_x, Y_{x+1},...,Y_{x+n}) = 0,$$

$$x(x, Y_x, Y_{x-1},...,Y_{x-n}) = 0.$$

Общее дискретное решение Y_x обыкновенного разностного уравнения *n*-го порядка представляет функцию x (x = 0, 1. 2,...), содержащую ровно *n* произвольных постоянных:

$$Y_x = Y(x, C_1, C_2,..., C_n).$$

Примером служит паутинообразная модель рынка.

1.26 Лекция №26 (2 часа).

Тема: «Линейные дифференциальные уравнения *n* -го порядка»

1.26.1 Вопросы лекции:

1. ЛОДУ второго порядка.
2. ЛНДУ второго порядка.

1.26.2 Краткое содержание вопросов:

1. ЛОДУ второго порядка

ОПР: *ЛОДУ 2 пор. с постоянными коэф-ми* называется уравнение вида $\left|\overline{y'' + py' + qy = 0}\right|$ (7) , где

p и q- действительные числа.

Обозначим $y''k^2, y' = k, y = k^0 = 1$. Получим квадратное уравнение вида:

$\left|\overline{k^2 + pk + q = 0}\right|$ -*характеристическое уравнение.*

Найдём корни этого уравнения k_1 *и* k_2 - некоторые действительные числа.

Общее решение ЛОДУ будет зависеть от корней характ-го уравнения следующим образом:

1)если $k_1 \neq k_2$ *,то* $y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$, C_1 *и* C_2 -постоянные, является общим решением данного

ЛОДУ

2) если $k_1 = k_2$,òî $y = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_1x}$

3) если характ-кое уравнение не имеет действительных корней (т.е. D<0), то

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x), \quad \alpha = -\frac{p}{2}, \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

Примеры:

1) $y'' - 10y' + 25y = 0 \quad y = C_1e^{5x} + C_2xe^{5x}$

2) $y'' + 5y' + 6y = 0 \quad y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} \quad y(0) = 2, y'(0) = 4$

3) $y'' + 2y' + 10y = 0 \quad y = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$

2. ЛНДУ второго порядка

<u>ОПР:</u> <u>*ЛНДУ 2 пор. с постоянными коэф-ми*</u> называется уравнение вида: (8)
$y'' + py' + qy = P_n(x)e^{\gamma x}$, $ãäå\, P_n(x)$ -многочлен, степени n

p и q – действит. числа.

Общее решение данного ЛНДУ ищут в виде: $\boxed{y = y_0 + y_ч}$, y_0 – общее решение соотв-го ЛОДУ

$y_ч$ - частное решение исходного ЛНДУ.

Для отыскания $y_{\div}$ пользуются следующим правилом:

1)если $\gamma \neq k_1\ и\ \gamma \neq k_2$ (т.е. не является корнем характеристич. уравнения), то $y_{\div} = Q_n(x)e^{\gamma x}$, где $Q_n(x)$ - многочлен степени n с неопределёнными коэффициентами.

2) если $\gamma = k_1\ и\ \gamma \neq k_2$ (т.е. совпадает с одним из корней характеристич. уравнения), то $y_{\div} = x \cdot Q_n(x)e^{\gamma x}$

3) если $\gamma = k_1\ и\ \gamma = k_2$ (т.е. корни равны и равны γ), то $y_{\div} = x^2 \cdot Q_n(x)e^{\gamma x}$

<u>Примеры:</u>

$1)y'' + y' - 12y = (2x-3)e^{2x} \quad y = C_1e^{3x} + C_2e^{-4x} + e^{2x}(-\frac{1}{3}x - \frac{7}{9}),\ y(0) = -\frac{7}{9}, y'(0) = \frac{109}{9}$

$2)y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x} \quad y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + \frac{3}{2}x^2e^{-2x}$

1.27 Лекция №27 (2 часа).

Тема: «Однородные системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами»

1.27.1 Вопросы лекции:

1. Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами
2. Решение линейной системы дифференциальных уравнений методом исключения
3. Решение линейной системы дифференциальных уравнений методом неопределенных коэффициентов

1.27.2 Краткое содержание вопросов:

1. Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Нормальная линейная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами n-го порядка записывается в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t) + f_i(t), \quad i = 1,2,...,n,$$

где $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ − неизвестные функции переменной t, которая часто имеет смысл времени, a_{ij} − заданные постоянные коэффициенты, которые могут быть как действительными, так и комплексными, $f_i(t)$ − заданные (в общем случае комплексные) функции переменной t.

Будем считать, что все указанные функции являются непрерывными на некотором интервале $[a, b]$ действительной числовой оси t.

Полагая

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ ... \\ x_n(t) \end{pmatrix},\ X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ ... \\ x_n'(t) \end{pmatrix},\ f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ ... \\ f_n(t) \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix},$$

систему дифференциальных уравнений можно переписать в матричной форме:
$X'(t) = A \cdot X(t) + f(t)$.

Если вектор $f(t)$ тождественно равен нулю: $f(t) == 0$, то система называется *однородной*:
$X'(t) = A \cdot X(t)$.

Если вектор $f(t)$ отличен от нуля: $f(t) \neq 0$, то система называется *неоднородной*.

Для линейных неоднородных систем, также как и в случае одного линейного неоднородного уравнения, справедлива следующая важная теорема:

Теорема. Общее решение $X(t)$ неоднородной системы представляет собой сумму общего решения $X_0(t)$ соответствующей однородной системы и частного решения $X_1(t)$ неоднородной системы:

$$X(t) = X_0(t) + X_1(t).$$

Еще одним важным свойством линейных неоднородных систем является *принцип суперпозиции*, который формулируется следующим образом:

Если $X_1(t)$ − решение системы с неоднородной частью $f_1(t)$, а $X_2(t)$ − решение такой же системы с неоднородной частью $f_2(t)$, то векторная функция

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t)$$

будет являться решением системы с неоднородной частью

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t).$$

Рассмотрим наиболее распространенными способами решения подробно.

2. Решение линейной системы дифференциальных уравнений методом исключения

Используя метод исключения, нормальную линейную систему n уравнений можно привести к одному линейному уравнению n-го порядка. Этот метод удобно использовать для решения простых систем − прежде всего, для систем 2-го порядка.

Рассмотрим однородную систему двух уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases},$$

где функции x, y зависят от переменной t.

Продифференцируем первое уравнение и подставим производную y' из второго уравнения:

$$x'' = a_{11}x' + a_{12}y', \quad \Rightarrow x'' = a_{11}x + a_{12}(a_{21}x + a_{22}y), \quad \Rightarrow x'' = a_{11}x' + a_{12}a_{21}x + a_{22}(a_{12}y).$$

Из первого уравнения системы выразим $a_{12}y$ и подставим в полученное уравнение. Получаем линейное однородное уравнение 2-го порядка:

$$x'' = a_{11}x' + a_{12}a_{21}x + a_{22}(x' - a_{11}x), \quad \Rightarrow \quad x'' = a_{11}x' + a_{12}a_{21}x + a_{22}x' - a_{11}a_{22}x, \quad \Rightarrow$$

$$x'' - (a_{11} + a_{22})x' + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = 0.$$

Его решение легко построить, если известны корни характеристического уравнения:

$$k^2 - (a_{11} + a_{22})k + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0,$$

$$D = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

$$k_{1/2} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{D}}{2}.$$

В случае действительных коэффициентов a_{ij} корни могут быть как действительными (различными или кратными), так и комплексными. В частности, если коэффициенты a_{12} и a_{21} одного знака, то дискриминант характеристического уравнения всегда будет положительным и, соответственно, корни будут действительными и различными.

После определения функции $x(t)$ другую функцию $y(t)$ можно найти из первого уравнения системы.
Метод исключения можно применять не только к однородным линейным системам. Его можно использовать также для решения неоднородных систем дифференциальных уравнений или систем уравнений с переменными коэффициентами.

Пример. Решить систему дифференциальных уравнений методом исключения:

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 4x - 2y \end{cases}.$$

Решение.
Продифференцируем первое уравнение, затем подставим производную y' из второго уравнения:

$$x'' = 2x' + 3y', \quad \Rightarrow x'' = 2x' + 3(4x - 2y), \quad \Rightarrow x'' = 2x' + 12x - 6y.$$

Из первого уравнения системы выразим $3y$:

$$3y = x' - 2x.$$

Подставляя это в последнее уравнение, получаем:

$$x'' = 2x' + 12x - 2(x' - 2x), \quad \Rightarrow x'' = 2x' + 12x - 2x' + 4x, \quad \Rightarrow x'' - 16x = 0.$$

Найдем корни соответствующего характеристического уравнения:

$$k^2 - 16 = 0, \quad \Rightarrow k_{1/2} = \pm 4.$$

Следовательно, общее решение уравнения 2-го порядка для переменной x имеет вид:

$$x(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-4t},$$

где C_1, C_2 − произвольные постоянные.

Теперь вычислим производную x' и подставим выражения для x, x' в первое уравнение исходной системы:

$$x'(t) = 4C_1 e^{4t} - 4C_2 e^{-4t},$$

$$\Rightarrow 4C_1 e^{4t} - 4C_2 e^{-4t} = 2C_1 e^{4t} + 2C_2 e^{-4t} + 3y, \Rightarrow 3y = 2C_1 e^{4t} - 6C_2 e^{-4t},$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{3} C_1 e^{4t} - 2C_2 e^{-4t},$$

Ответ: $\begin{cases} x(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-4t} \\ y(t) = \dfrac{2}{3} C_1 e^{4t} - 2C_2 e^{-4t} \end{cases}.$

3. Решение линейной системы дифференциальных уравнений методом неопределенных коэффициентов

Метод неопределенных коэффициентов хорошо подходит для решения систем уравнений, неоднородная часть которых представляет собой *квазимногочлен*.
Действительным *векторным квазимногочленом* называется вектор-функция вида

$$f(t) = e^{\alpha t} (P_m(t) \cos \beta t + Q_m(t) \sin \beta t),$$

где α, β − заданные действительные числа, а $P_m(t)$, $Q_m(t)$ − векторные многочлены степени m.
Например, векторный многочлен $P_m(t)$ записывается как

$$P_m(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots + A_m t^m,$$

где A_0, A_1, ..., A_m − n-мерные векторы (n − число уравнений в системе).
В случае, когда неоднородная часть $f(t)$ является векторным квазимногочленом, то частное решение также будет представляться некоторым векторным квазимногочленом, похожим по структуре на $f(t)$.
Так, например, если неоднородная функция равна

$f(t) = e^{\alpha t} P_m(t)$,

то частное решение системы следует искать в виде

$X_1(t) = e^{\alpha t} P_{m+k}(t)$,

где k =0 в *нерезонансном случае*, т.е. когда показатель α в экспоненциальной функции не совпадает ни с одним из собственных значений λ_i. Если же показатель α совпадает с каким-либо собственным значением λ_i, т.е. в так называемом *резонансном случае*, то значение k полагается равным длине *жордановой цепочки* для данного собственного числа λ_i. На практике в качестве k можно брать *алгебраическую кратность* собственного значения λ_i.

Аналогичные правила определения степени многочленов применяются и для квазимногочленов вида

$e^{\alpha t}\cos\beta t$, $\quad e^{\alpha t}\sin\beta t$.

Здесь *резонансный случай* возникает, если число $\alpha+\beta i$ совпадает с комплексным собственным значением λ_i матрицы A.

После выбора структуры частного решения $X_1(t)$ неизвестные векторные коэффициенты A_0, A_1, ..., A_m, ..., A_{m+k} устанавливаются путем подстановки выражения для $X_1(t)$ в исходную систему и приравнивания коэффициентов при членах с одинаковыми степенями t в левой и правой части каждого уравнения.

Пример. Решить систему уравнений методом неопределенных коэффициентов:

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3y + te^t \end{cases}.$$

Решение.

Запишем данную систему в матричной форме:

$$X'(t) = AX(t) + f(t), \quad \text{где} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ te^t \end{pmatrix}.$$

Найдем сначала решение однородной системы. Вычислим собственные значения матрицы A:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \Rightarrow (2-\lambda)(3-\lambda) = 0, \quad \Rightarrow \lambda_1 = 2, \;\; \lambda_2 = 3.$$

Определим собственный вектор $V_1 = (V_{11}, V_{21})^T$ для числа $\lambda_1 = 2$:

$$(A - \lambda_1 E)V_1 = 0, \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 2-2 & 1 \\ 0 & 3-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix} = 0, \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix} = 0, \quad \Rightarrow 0 \cdot V_{11} + 0 \cdot V_{21} = 0.$$

Видно, что V_{21}=0, а координата V_{11} может быть произвольной. Для простоты выбираем V_{11}=1. Следовательно, $V_1=(1,0)^T$.

Аналогично найдем собственный вектор $V_2=(V_{12}, V_{22})^T$, соответствующий числу λ_2=3:

$$(A - \lambda_2 E)V_2 = 0, \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ 0 & 3-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{pmatrix} = 0, \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{pmatrix} = 0, \quad \Rightarrow -V_{12} + V_{22} = 0.$$

Полагая $V_{22} = t$, имеем: $V_{12}=V_{22}= t$. Тогда

$$V_2 = \begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}.$$ При t=1, получаем $V_2=(1,1)^T$.

Таким образом, общее решение однородной системы выражается формулой

$$X_0(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} V_2 = C_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем частное решение $X_1(t)$. Правая часть имеет вид квазимногочлена $P_1(t)e^t$. Степень показательной функции равна α=1. Поскольку она не совпадает ни с одним из собственных значений $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$, то частное решение будем искать в виде, аналогичном $f(t)$, т.е. полагаем

$$X_1(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}=P_1(t)e^t, \text{ где } \quad P_1(t)=A_0+A_1t\,.$$

Неизвестные векторы A_0, A_1 найдем методом неопределенных коэффициентов. Пусть

$$A_0=\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}, \quad A_1=\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, частное решение можно записать как

$$X_1(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (a_0+a_1t)e^t \\ (b_0+b_1t)e^t \end{pmatrix}.$$

Подставляем $X_1(t)$ в исходное неоднородное уравнение:

$$X'(t)=AX(t)+f(t), \quad \begin{pmatrix} a_1e^t+(a_0+a_1t)e^t \\ b_1e^t+(b_0+b_1t)e^t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (a_0+a_1t)e^t \\ (b_0+b_1t)e^t \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ te^t \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a_1+a_0+a_1t)e^t=(2a_0+2a_1t)e^t+(b_0+b_1t)e^t \\ (b_1+b_0+b_1t)e^t=(3b_0+3b_1t)e^t+te^t \end{cases}.$$

В каждом уравнении обе части сокращаем на e^t:

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1+a_0+a_1t=2a_0+2a_1t+b_0+b_1t \\ b_1+b_0+b_1t=3b_0+3b_1t+t \end{cases}.$$

Приравнивая коэффициенты при членах с одинаковыми степенями t, получаем следующую систему уравнений:

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1+a_0=2a_0+b_0 \\ a_1+b_1=0 \\ b_1=2b_0 \\ 2b_1+1=0 \end{cases}.$$

Решаем эту систему и находим неизвестные коэффициенты a_0, a_1, b_0, b_1:

$$b=-0{,}5, \quad b_0=\frac{b_1}{2}=-0{,}25, \quad a_1=-b_1=0{,}5, \quad a_0=a_1-b_0=0{,}5-(-0{,}25)=0{,}75.$$

Таким образом, частное решение $X_1(t)$ записывается в виде:

$$X_1(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}=P_1(t)e^t=\begin{pmatrix} a_0+a_1t \\ b_0+b_1t \end{pmatrix}e^t=\begin{pmatrix} 0{,}75+0{,}5t \\ -0{,}25-0{,}5t \end{pmatrix}e^t=0{,}25e^t\begin{pmatrix} 3+2t \\ -1-2t \end{pmatrix}.$$

Тогда общее решение исходной неоднородной системы выражается следующей формулой:

$$X(t)=X_0(t)+X_1(t)=C_1e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+C_2e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+0{,}25e^t\begin{pmatrix} 3+2t \\ -1-2t \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X(t)=C_1e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+C_2e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+0{,}25e^t\begin{pmatrix} 3+2t \\ -1-2t \end{pmatrix}$.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

2.1 Практическое занятие №1 (2 часа)

Тема: «Числовые множества»

2.1.1 Задание для работы:

1. Входной контроль.
2. Действительные числа, их свойства.
3. Элементы алгебры множеств.

2.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Входной контроль.

Примерный вариант входного контроля

1. Решить уравнение: $\sqrt{2-x}\cdot(3x-7)=0$
2. Решить неравенства: $a)\ \frac{1}{x}>2;$ $\quad$ $б)\ \frac{1}{2}x^2-2x\le 0.$
3. Вычислить: $(0{,}027)^{-\frac{1}{3}}-\left(-\frac{1}{6}\right)^{-2}+256^{0{,}75}-3^{-1}+(5{,}5)^0$
4. Что больше: $\sin 1^0$ или $\sin 1$?
5. Найти сумму первых пятидесяти натуральных чисел.

2. Действительные числа, их свойства.

Провести устный опрос теоретического материала.

Изобразить пары множеств на числовой прямой и записать, какое из них является подмножеством другого:

1) A={3; 4; 5; ...}, B={5; 6; 7 ...};
2) A=(-∞; 3], B=(-∞;6];
3) A=(-2; 5], B=[0; 4);
4) A=[2; 6), B={2; 3; 4; 5};
5) A=(-∞;4), B=[0; 1];
6) A=[2; ∞), B=[3; 6).

3. Элементы алгебры множеств.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Пусть даны множества A, B, C. Найдите A∩B, A∩C, B∩C, A∪B, A∪C, B∪C, если: 1) A={2; 3; 8; 9}, B={16; 18; 20}, C=N;
   2) A=N, B={-2; -1; 0; 1; 2}, C={3; 5; 7};
   3) A={3; 4; 5; ...}, B=N, C={-1; 0; 1; 2};
   4) A={21; 22; ...; 26}, B={3; 5}, C=N;
2. Постройте круги Эйлера для множеств A, B, C и укажите характеристическое свойство элементов множества A∩B∩C, если:
1) A - множество правильных многоугольников, B - множество треугольников, C - множество четырехугольников;
2) A - множество параллелограммов, B - множество прямоугольников, C - множество четырехугольников;
3. Туристическая фирма продала путевок в санатории в три раза меньше, чем в пансионаты, но на 88 путевок больше, чем на турбазы. Сколько всего продала фирма путевок, если в пансионаты продано на 312 путевок больше, чем в санаторий.
4. Найдите для каждой тройки множеств A, B, C результаты операции:
1) A∩(B∪C);
2)A∪(B∩C);

3) $(A \cup B) \cap C$;
4) $(A \cap C) \cup (A \cap B)$;
5) $(A \cup C) \cap B$;
6) $(A \cap B) \cup C$, если:
а) $A=\{2; 3; 4\}$, $B=\{3; 6\}$, $C=N$;
б) $A=N$, $B=Z$, $C=\{-1; 0; 1\}$;
в) $A=\{1; 3; 5; ...\}$, $B=\{2; 4; 6; ...\}$, $C=N$; г) $A=Z$, $B=N$, $C=\{3; 6; 9; ...\}$;

2.1.3 Результаты и выводы:
На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Числовые множества», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Числовые множества», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

2.2 Практическое занятие №2 (2 часа)
Тема: «Числовые множества**»**

2.2.1 Задание для работы:
1. Элементы алгебры множеств.
2. Окрестность точки. Ограниченные множества. Обозначения для сумм и произведений.
3. Декартовы координаты на плоскости.

2.2.2 Краткое описание проводимого занятия:
1. Элементы алгебры множеств.
Провести устный опрос теоретического материала.
1. Изобразить с помощью кругов Эйлера следующие множества, если $A \subset U$, $B \subset U$, $C \subset U$, $A \cap B \cap C \neq \varnothing$: 1) $A \cap B \cap C$; 4) $A \cup B \cup C$;
2) $(A \cap B) \cap C$; 5) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$;
3) $(A \cup B) \cap C$; 6) $A \cup (B \cap C)$;
2. Магазин продал 4 650 пар кожаной, текстильной обуви; кожаной на 2 550 пар больше, чем текстильной. Проданная кожаная обувь содержала туфель в три раза больше, чем ботинок, а босоножек на 100 пар меньше, чем ботинок. Сколько пар туфель продано?
3. Найдите результаты операций для каждой тройки множеств A, B, C: 1) $A \cup (B \cap C)$; 2) $(A \cap B) \cap C$; 3) $A \cap (B \cup C)$; 4) $(A \cap B) \cup C$, если
а) $A=(0;2]$, $B=[-1; 3]$, $C=(-3; 6)$;
б) $A=(-3; 6)$, $B=[0; 4)$, $C=[2; 7]$;
в) $A=[0; 3)$, $B=[-2; 4]$; $C=(-1; 1)$;
г) $A=[2; \infty)$, $B=(-3; 4]$, $C=(0; 6)$.
2. Окрестность точки. Ограниченные множества. Обозначения для сумм и произведений.
Провести устный опрос теоретического материала.
3. Декартовы координаты на плоскости.
Провести устный опрос теоретического материала.
1. Постройте на координатной прямой точки: А(-2), В(0), С(4,5), Д(5), М(-3).
2. Постройте на координатной прямой точки, симметричные точкам А, В, С, Д, М (см. задание 1).
3. Найти расстояние между точками на прямой: 1) А(3), В(4); 3) А(-1), В(5); 5) А(3), В(-6); 2) А(0), В(6); 4) А(-3), В(-8); 6) А(-3), В(8).
4. Построить на координатной плоскости точки: А(2; 3), В(3; -4), С(-2; -3), Д(-1; 2), М(3; 0), N(0; 4), P(-2; 0), Q(0; -1).
5. Построить точки, симметричные заданным точкам (см. задание 4) относительно:
1) оси Ox;
2) оси Oy;

3) начала O(0; 0);
4) биссектрисы первого - третьего координатных углов;
5) биссектрисы второго - четвертого координатных углов.

2.2.3 Результаты и выводы:
На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Числовые множества», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Числовые множества», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала и применять математические методы для решения экономических задач.

2.3 Практическое занятие №3 (2 часа)
Тема: «Числовые функции»

2.3.1 Задание для работы:
1. Область определения и область значений функции.
2. Элементарные функции, их графики.
3. Исследование на четность, нечетность функции.

2.3.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Определение функции одной переменной.
2. Определение области определения и области значений функции.
3. Элементарные функции.
4. Определение четной и нечетной функции.

Решение задач:
1. Найти область определения следующих функций:
1) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$;
2) $y = \sqrt{x} + \ln(2x - 5)$;
2. Найти область значений следующих функций:
1) $y = \sin x + \cos x$; 2) $y = \dfrac{6x}{1 + x^2}$.
3. Построить графики функций:
1) $y = \begin{cases} -x, & x < 1 \\ x^2 - 2, & x \ge 1 \end{cases}$; 2) $y = \begin{cases} 1 + x, & x < 0 \\ 2\sin x, & 0 \le x < \pi \\ x - \pi, & x \ge \pi \end{cases}$.
4. Исследовать на четность (нечетность) функции:
1) $y = x^3 \sin x$; 2) $y = \ln\dfrac{1 + x}{1 - x}$; 3) $y = x\dfrac{2^x + 1}{2^x - 1}$.
5. При каких значениях b графики функций $y = 2bx^2 + 2x + 1$ и $y = 5x^2 + 2bx - 2$ пересекаются в одной точке?
6. Найдите область определения функций:
1) $y = \sqrt{4 - x|x|}$; 3) $y = \sqrt{|x|(x - 1)}$;
2) $y = \sqrt{(x - 2)\sqrt{x}}$; 4) $y = \sqrt{(1 - x)\sqrt{x - 2}}$.
7. При каких значениях a нули функции $f(x) = x^2 + 2(a - 2)x + 2a - 5$ расположены между числами -2 и 4?

2.3.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

2.4 Практическое занятие №4 (2 часа)

Тема: «Числовые функции»

2.4.1 Задание для работы:

1. Степенная, показательная и логарифмическая функции.
2. Тригонометрические функции и обратные к ним.
3. Свойства основных элементарных функций.

2.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Определение степенной, показательной и логарифмической функций.
2. Определение тригонометрических функций и обратных к ним.
3. Свойства основных элементарных функций.

Решение задач:

1. Найти область определения следующих функций:

1) $y = \arcsin(2x^2 + x)$;

2) $y = \dfrac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt[3]{x+2}$.

2. Найти область значений следующих функций:

1) $y = \sin x + \cos x$; 2) $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$.

3. Найдите значение функции $y = \begin{cases} \sin 2x, \; x > \dfrac{\pi}{4} \\ 5 + \cos x, \; x \le \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$ при $x = \pi$; при $x = 0$.

4. Постройте график функции $y = \left|x^2 + 4x + 3\right|$ и найдите координаты точек пересечения этого графика с прямой $y = -2x - 5$.

5. При каких значениях b областью определения функции является множество всех чисел, если:

1) $y = \dfrac{2}{x^2 + 2x + b}$; 2) $y = \dfrac{2x}{|x-1| - b}$.

2.4.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

2.5 Практическое занятие №5 (2 часа)

Тема: «Предел последовательности»

2.5.1 Задание для работы:

1. Понятие числовой последовательности.

2. Предел числовой последовательности.
3. Основные свойства сходящихся последовательностей.

2.5.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Основные числовой последовательности.
2. Определение предела числовой последовательности.
3. Свойства сходящихся последовательностей.

Решение задач:
1. Доказать, пользуясь определением предела, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{n+2}=3$.
2. Найти пределы последовательностей:
1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+3+4+...+(n+1)}{n^2+1}$;
4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+5+...+(2n-1)}{2n^2-3}$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^2}+...+\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}\right)$;
5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}\right)$.
3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+4+7+...+(3n-2)}{3n^2}$;
3. Устранить неопределенность
1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x^4+x^2+x}{7x^4+3x-2}$;
3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^5+3x-1}{3x+x^2-2x^8}$;
2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x+2x^3-1}{2x^2-x+4}$;
4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[6]{x^2+1}}{3+x}$.

2.5.3 Результаты и выводы:
На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

2.6 Практическое занятие №6 (2 часа)
Тема: «Предел последовательности»

2.6.1 Задание для работы:
1. Понятие числовой последовательности.
2. Предел числовой последовательности.
3. Основные свойства сходящихся последовательностей.

2.6.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Определение предела числовой последовательности.
2. Свойства сходящихся последовательностей.
3. Задача о непрерывном начислении процентов

Решение задач:
1. Найти пределы функций, используя формулу второго замечательного предела:
1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{7x}\right)^x$;
3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+2}$;
5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{2x}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{1+2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{4x}\right)^{x+1}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-3}\right)^{x-5}$.

2. Прирост населения страны составляет 3% в год. Через сколько лет население страны удвоится?
3. Первоначальный вклад, положенный в банк под 10% годовых составил 6 млн. руб. Найти размер вклада через 5 лет при начислении процентов: а) ежегодном; б) поквартальном; в) непрерывном.
4. Первоначальная сумма 7000 руб., период начисления 2 года, сложная процентная ставка 12% годовых. Начисление процентов происходит непрерывно. Найти наращенную сумму.
5. Вкладчик положил в банк, выплачивающий 10% сложных годовых, 2000 тыс.д.е. Какая сумма будет на счете вкладчика через 3 года? Какая сумма будет на счете вкладчика, если банк выплачивает 10% простых годовых?
6. Вкладчик положил в банк 2000 тыс.д.е. Какая сумма будет на счете вкладчика через 3 года, если банк производит начисление процентов по сложной номинальной ставке $j_4 = 10\%$, т.е. производится ежеквартальное начисление процентов? Определить наращенную сумму при условии непрерывного начисления процентов.
7. Через 4 года и 6 месяцев вкладчик желает иметь на счете 5000 тыс.д.е. Какую сумму он должен положить в банк, если учетная ставка банка 10% сложных годовых с ежемесячным начислением дохода?
8. Через сколько лет 1 тыс.д.е., вложенная в банк, превратится в 1000 тыс.д.е., если ставка банка 10% годовых с непрерывным начислением процентов?

2.6.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

2.7 Практическое занятие №7 (2 часа)
Тема: «Предел функции»

2.7.1 Задание для работы:
1. Предел функции в точке и на бесконечности. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Теоремы о пределах функций.
2. Раскрытие неопределенностей.
3. Два замечательных предела.
4. Эквивалентные бесконечно малые и их использование при вычислении пределов.
5. Левый и правый пределы функции.

2.7.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Предел функции в точке и на бесконечности.
2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.
3. Теоремы о пределах функций.
4. Раскрытие неопределенностей.
5. Первый замечательный предел.
6. Второй замечательный предел.
7. Определение эквивалентных бесконечно малых.
8. Определение односторонних пределов.
Решение задач:
1. Устранить неопределенность:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}(x(\sqrt{x^2+4}-x))$;

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$; 4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}(x(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2+1}))$.

2. Найти пределы функций, используя формулу первого замечательного предела:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x\cdot\sin 4x}{x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 3x+\sin 7x}{2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x\cdot\cos 8x}{2x}$.

3. Найти пределы функций, используя формулу второго замечательного предела:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{7x}\right)^x$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{2x}$.

4. Вычислить пределы, используя эквивалентные бесконечно малые функции:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{arctg2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{4x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{2x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-5x+6}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{\sin 2x}-1}{1-\cos 7x}$.

2.7.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа, основных математических моделей принятия решений; приобрели умения решать типовые математические задачи, используемые при принятии управленческих решений, использовать математический язык и математическую символику при построении организационно-управленческих моделей.

2.8 Практическое занятие №8 (2 часа)

Тема: «Непрерывность функции»

2.8.1 Задание для работы:

1. Непрерывность функции в точке и на интервале.
2. Точки разрыва. Классификация точек разрыва.
3. Асимптоты графика функции: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

2.8.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Определение непрерывной функции в точке и на интервале.
2. Определение точки разрыва.
3. Классификация точек разрыва.
4. Определение асимптоты графика.
5. Определение вертикальной асимптоты.
6. Определение горизонтальной асимптоты.
7. Определение наклонной асимптоты.

Решение задач:

1. Исследовать функции на непрерывность в указанных точках:

а) $f(x)=2^{\frac{1}{x-5}}+1$; $x_1=4,\ x_2=5$;

б) $f(x)=\dfrac{x-3}{x+4}$; $x_1=-4,\ x_2=-3$.

2. Исследовать функцию $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{x}, & x<0 \\ x^2, & 0\le x<1 \\ -x+4, & x\ge 1 \end{cases}$ на непрерывность, определить род точек разрыва и построить график.

3. Исследовать функцию $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ \sin x, & 0\le x<\pi \\ 3, & x\ge \pi \end{cases}$ на непрерывность, определить род точек разрыва и построить график.

4. Найти асимптоты функций:

1) $y=\dfrac{3-4x}{2+5x}$; 2) $y=\dfrac{3x-1}{x+1}$; 3) $y=\dfrac{2x^2}{x+1}$.

5. При каких значениях параметров A и B функция $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le -1 \\ A(x^2+1), & -1<x\le 1 \\ Bx+3, & x>1 \end{cases}$ будет непрерывной?

6. При каком значении параметра A функция $y=\begin{cases} -x^2+5, & x\le 1 \\ A\cos \pi x, & x>1 \end{cases}$ будет непрерывной?

2.8.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

2.9 Практическое занятие №9 (2 часа)

Тема: «Производная функции»

2.9.1 Задание для работы:

1. Геометрический, механический и экономический смысл производной.
2. Правила дифференцирования.
3. Дифференцирование сложной и обратной функций.
4. Дифференцирование показательно - степенной функции.
5. Производная неявной функции.
6. Производные высших порядков.

2.9.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Определение производной функции.
2. Геометрический, механический и экономический смысл производной.
3. Правила дифференцирования.
4. Дифференцирование сложной функции.

Решение задач:

1. Найти производные функций:

1) $y=\sqrt[4]{x^3}+\dfrac{3}{x^3}-\dfrac{2}{x^4}-\ln 2$; 2) $y=\sqrt[6]{x^5}-4x^6+2\ln x-ctgx$.

2. Найти производные функций:

1) $y = x^2 tgx$;

2) $y = \sqrt[7]{x^2}\ln x$;

3) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$;

4) $y = x^2\log_3 x - e^x tgx$;

5) $y = x \cdot \arccos x$;

6) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$.

3. Найти производные функций:

1) $y = \sqrt[4]{1+e^{4x}} + \sqrt{5}$;

2) $y = arcctg\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\ln(x^2+4)$;

3) $y = \dfrac{\ln\cos x}{\cos x}$;

4) $y = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$;

5) $y = \dfrac{1+\cos 2x}{\sin x}$;

6) $y = (xe^{2x}+3)^5$.

2.9.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

2.10 Практическое занятие №10 (2 часа)

Тема: «Производная функции»

2.9.1 Задание для работы:

1. Производная неявной функции.
2. Производные высших порядков.

2.9.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Определение производной функции.
2. Геометрический, механический и экономический смысл производной.
3. Правила дифференцирования.
4. Дифференцирование сложной функции.
5. Производная неявной функции.
6. Определение производной высших порядков.

Решение задач:

1. Найти производные функций, заданных неявно, в указанных точках:

1) $x^2 + xy + y^2 = 6, \quad x_0 = 5, y_0 = -2$;

2) $e^x \sin y - e^{-y}\cos x = 0, \quad x_0 = 0, y_0 = 0$;

3) $2y = 1 + xy^3, \quad x_0 = 1, y_0 = 1$.

2. Найти производные показательно-степенных функций:

1) $y = (ctg(7x+4))^{\sqrt{x+3}}$; 2) $y = (\sqrt{x+5})^{\arccos 3x}$.

3. Найти производные второго порядка от функций:

1) $y = tgx$; 2) $y = e^{-x^2}$.

4. В каких точках кривой $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5x^2}{2} + 7x + 4$ касательная составляет с осью Ox угол $\dfrac{\pi}{4}$?

5. По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $x = 3t^2 - 8$ и $x = 2t^2 + 5t + 6$, где x – расстояние (м), t – время (с). С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи?

6. Функции спроса q и предложения s от цены p выражаются соответственно уравнениями $q = 7 - p$ и $s = p + 1$. Найти: а) равновесную цену; б) Эластичность спроса и предложения для этой цены; в) изменение дохода (в %) при увеличении цены на 5% от равновесной.

2.10.3 Результаты и выводы:
На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

2.11 Практическое занятие №11 (2 часа)
Тема: «Геометрический смысл производной и дифференциала функции»

2.11.1 Задание для работы:
1. Определение дифференциала.
2. Геометрический смысл.
3. Приближенные вычисления с помощью дифференциала.

2.11.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Определение дифференциала.
2. Геометрический смысл дифференциала.
3. Формула приближенных вычислений с помощью дифференциала.

Решение задач:
1. Найти дифференциал функций:
1) $y = x^3 \cos x$; 3) $y = \ln(x^2 + 5x - 2)$;
2) $y = \sqrt{\sin(5x^3 - 3)}$; 4) $y = \arccos\sqrt{x}$.
2. Найти дифференциал функций до второго порядка:
1) $y = \cos 2x^3$; 2) $y = \ln(\cos 3x)$.
3. С помощью дифференциала найти приближенные значения:
1) $\sqrt{101}$; 3) $\sqrt[3]{9}$;
2) $\sqrt{1{,}04}$; 4) $\sqrt[5]{33}$.
4. Найти приращение функции $y = 2x^2 + 3$ при изменении абсциссы от 2 до 2,001.
5. Шар радиуса 20 см был нагрет, отчего его радиус увеличился на 0,01 см. На сколько увеличится объём шара?
6. Найти первоначальное значение радиуса круга, если радиус увеличился на 0,1 см, при этом площадь круга увеличилась на 10π см^2.
7. Найти дифференциал функции $y = \ln(1 + e^{10x}) + \sqrt{x^2 + 1}$. Вычислить dy при $x = 0$, $dx = 0{,}1$.
8. Какой путь пройдет тело при свободном падении на Луне за 10,04 с от начала падения. Уравнение свободного падения тела $H = \frac{g_L \cdot t^2}{2}$, $g_L = 1{,}6$ м/с^2.

2.11.3 Результаты и выводы:
На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

2.12 Практическое занятие №12 (2 часа)
Тема: «Предельные величины в экономике»

2.12.1 Задание для работы:
1. Экономический смысл производной.
2. Предельные величины в экономике.
3. Эластичность функции.

2.12.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Сформулировать экономический смысл производной.
2. Перечислить предельные величины в экономике.
3. Определение эластичности функции, темп функции.

Решение задач:
1. Объем продукции u (у.е.) цеха в течение рабочего дня представляет функцию $u = -t^3 - 5t^2 + 75t + 425$, где t– время (ч.). Найти производительность труда через 2 ч после начала работы.
2. Зависимость между издержками производства y (ден.ед.) и объемом выпускаемой продукции x (ед.) выражается функцией $y = 10x - 0{,}04x^3$. Определить средние и предельные издержки при объеме продукции, равном 5 ед.
3. Функции спроса q и предложения s от цены p выражаются соответственно уравнениями $q = 7 - p$ и $s = p + 1$. Найти: а) равновесную цену; б) Эластичность спроса и предложения для этой цены; в) изменение дохода (в %) при увеличении цены на 5% от равновесной.
4. Зависимость между издержками производства y и объемом выпускаемой продукции x выражается функцией $y = 50x - 0{,}05x^3$ (ден./ед.). Определить средние и предельные издержки при объеме продукции 10 ед.
5. Найдите равновесную цену, эластичность спроса и предложения в точке равновесия. Известно, что при цене 10 рублей спрос составляет 25 единиц, а предложение – 20 единиц; при увеличении цены до 40 рублей спрос снизился до 5 единиц, а предложение увеличилось до 30 единиц.

2.12.3 Результаты и выводы:
На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

2.13 Практическое занятие №13 (2 часа)
Тема: «Производные и дифференциалы высших порядков»

2.13.1 Задание для работы:
1. Производные и дифференциалы высших порядков.
2. Локальный экстремум функции, теорема Ферма.
3. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши.

2.13.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Определение производной высших порядков.
2. Определение дифференциала высших порядков.

3. Условие локального экстремума функции.
4. Теорема Ферма.
5. Теорема Ролля.
6. Теорема Лагранжа.
7. Теорема Коши.

Решение задач:
1. Найти производные второго порядка от функций:

1) $y = tgx$; 3) $y = e^{-x^2}$;

2) $y = \sin^2 x$; 4) $y = x \sin x$.

2. Найти производные n-го порядка от функций:

1) $y = \ln x$; 3) $y = 3^x$;

2) $y = \sin 2x$; 4) $y = x^2 \ln x$.

3. Из теоремы Лагранжа определите значение c для функции $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 2$ на отрезке $[0;2]$.

4. На кривой $y = x^3$ найти точку, в которой касательная параллельна хорде, соединяющей точки $A(-1;-1)$ и $B(2;8)$.

5. Можно ли к функции $f(x) = 2 - \sqrt[3]{x^2}$ применить на отрезке $[-1;1]$: а) теорему Роля, б) теорему Лагранжа?

6. Показать, что уравнение $x^3 + 3x - 6 = 0$ имеет только один вещественный корень.

2.13.3 Результаты и выводы:
На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Производные и дифференциалы высших порядков», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Производные и дифференциалы высших порядков», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

2.14 Практическое занятие №14 (2 часа)
Тема: «Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей»

2.14.1 Задание для работы:
1. Формула Тейлора (Маклорена) с остаточным членом в формах Лагранжа и Пеано. Разложение функций по формуле Маклорена.
2. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей

2.14.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Формула Тейлора (Маклорена) с остаточным членом в формах Лагранжа и Пеано.
2. Разложение функций по формуле Маклорена.
3. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей

Решение задач:
1. Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$; 5) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{x}$; 9) $\lim\limits_{x\to \pi/6} \dfrac{1 - 2\sin x}{\cos 3x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$; 6) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{x^2}$; 10) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{tg\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$; 7) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)}{ctg\pi x}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{\sin x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-arctgx}{x^3}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$.

2. Разложить в ряд Маклорена функции:

1) $y=\frac{e^x-1}{x}$; 4) $y=\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}$;

2) $y=x\cdot\ln(1+x^2)$; 5) $y=\frac{\sin\sqrt{x}}{x^2}$;

3) $y=\cos^2 x$; 6) $y=\sqrt[4]{1+x^3}$.

2.14.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала

2.15. Практическое занятие №15 (2 часа)

Тема: «Исследование функций с помощью первой производной»

2.15.1 Задание для работы:

1. Возрастание и убывание графика функции.
2. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

2.15.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

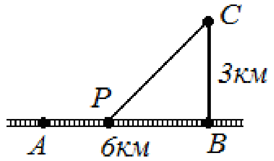
1. Определение возрастающего и убывающего графика функции.
2. Определение точек экстремума.

Решение задач:

1. Найти промежутки монотонности, точки экстремума функций, наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке, если он указан.

1) $y=\frac{x^4}{4}-2x^2$, $[1;3]$; 2) $y=\frac{x}{\ln x}$; 3) $y=\frac{x+2}{x-3}$.

2. Стоимость железнодорожной перевозки груза на 1 км равна 4 у.е., а автомобильной – 5 у.е. В каком месте надо начать строить шоссе, чтобы как можно дешевле доставлять груз из пункта A в пункт C. Какова наименьшая стоимость перевозки груза? Известно, что $|AB|=6$ км, $|BC|=3$ км.



3. Найти наименьшее значение функции $f(x)=3x+\frac{27}{x}$ на множестве решений системы неравенств $\begin{cases}\frac{9}{x+3}\ge 1\\ |x-4|\le 3\end{cases}$.

2.15.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа, основных математических моделей принятия решений; приобрели умения решать типовые математические задачи, используемые при принятии управленческих решений, использовать математический язык и математическую символику при построении организационно-управленческих моделей.

2.16. Практическое занятие №16 (2 часа)

Тема: «Исследование функций с помощью первой производной»

2.16.1 Задание для работы:

1. Возрастание и убывание графика функции.
2. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

2.16.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Определение возрастающего и убывающего графика функции.
2. Определение точек экстремума.

Решение задач:

1. Предприятие производит X единиц некоторой однородной продукции в месяц. Установлено, что зависимость финансовых накоплений предприятия от объема выпуска выражается формулой $f(x) = -0{,}02x^3 + 600x - 1000$ (ден. ед.). Исследовать потенциал предприятия.

2. Суточные расходы при плавании судна вычисляются по формуле $f(v) = \dfrac{aS}{v} + kSv^2$, где S - расстояние между портами; v - скорость; a, k - постоянные параметры, причем $a > 0$, $k > 0$. При какой скорости плавание судна будет наиболее выгодным?

3. Цементный завод производит X т. цемента в день. По договору он должен ежедневно поставлять строительной фирме не менее 20 т. цемента. Производственные мощности завода таковы, что выпуск цемента не может превышать 90 т. в день. Определить, при каком объеме производства удельные затраты *K/x* будут наибольшими (наименьшими), если функция затрат имеет вид: $K = -x^3 + 98x^2 + 200x$.

4. Под посевы элитных культур выделили земельный участок прямоугольной формы площадью 3,24 га и вдоль всей границы окопали рвом. Найти размер участка, чтобы стоимость рва была наименьшей. Вычислить стоимость рва, если погонный метр его обходится в 50 руб.

5. Прямоугольный участок земли, примыкающий к стене заводскою здания, нужно оградить забором. Часть забора, параллельная стене, должна быть каменной, а остальная часть деревянной. Площадь участка 90 м^2. Стоимость 1 м каменного забора 10 руб., а деревянного - 8 руб. Найдите такие размеры участка, чтобы стоимость всей ограды была наименьшей? Какова эта стоимость?

2.16.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа, основных математических моделей принятия решений; приобрели умения решать типовые математические задачи, используемые при принятии управленческих решений, использовать математический язык и математическую символику при построении организационно-управленческих моделей.

2.17 Практическое занятие №17 (2 часа)
Тема: «Исследование функций с помощью второй производной»

2.17.1 Задание для работы:
1. Промежутки выпуклости, вогнутости функции.
2. Точки перегиба.
3. Алгоритм исследования функции.
4. Исследование функции. Построение графика.

2.17.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Определение выпуклого и вогнутого графика функции.
2. Определение точки перегиба а.
3. Алгоритм исследования функции.

Решение задач:
1. Найти промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба функций:

1) $y = x^3 - 6x^2 + 1$; 3) $y = (3 + x) \cdot e^{-x}$; 5) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$;

2) $y = x \cdot e^x$; 4) $y = 2x^2 + \ln x$; 6) $y = e^{\sqrt[3]{x^2}}$.

2. Исследовать функции, построить их графики.

а) $y = \dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}$; в) $y = \sqrt{1 - \ln^2 x}$;

б) $y = 2x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$; г) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$.

2.17.3 Результаты и выводы:
На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа, основных математических моделей принятия решений; приобрели умения решать типовые математические задачи, используемые при принятии управленческих решений, использовать математический язык и математическую символику при построении организационно-управленческих моделей.

2.18 Практическое занятие №18 (2 часа)
Тема: «Неопределенный интеграл»

2.18.1 Задание для работы:
1. Непосредственное интегрирование.
2. Замена переменной.
3. Интегрирование по частям.

2.18.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Определение первообразной.
2. Определение неопределенного интеграла.
3. Суть метода непосредственного интегрирования.
4. Суть метода подстановки.
5. Суть метода интегрирования по частям.

Решение задач:
1. Найти неопределенные интегралы непосредственным интегрированием:

1) $\left(\int x^4+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}-\frac{7}{x^2}\right)dx$;

4) $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x^2}\right)dx$;

2) $\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx$;

5) $\int\frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$;

3) $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$;

6) $\int\frac{dx}{(x+3)(x-5)}$.

2. Найти неопределенные интегралы подстановкой:

1) $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$;

4) $\int\frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{\cos 2x+1}}dx$;

2) $\int e^{\cos 2x}\sin 2x dx$;

5) $\int\frac{dx}{\sin^2 3x\sqrt{ctg\,3x}}$;

3) $\int\frac{\sqrt[4]{\ln(3x+2)}}{3x+2}dx$;

6) $\int\left(\frac{\arccos^3 6x}{\sqrt{1-36x^2}}\right)dx$.

3. Найти интегралы с квадратным трехчленом в знаменателе:

1) $\int\frac{dx}{x^2-2x+5}$;

3) $\int\frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$;

2) $\int\frac{(2x+1)dx}{x^2+6x+18}$;

4) $\int\frac{(3x-1)dx}{x^2+2x+2}$.

4. Найти интегралы методом интегрирования по частям:

1) $\int\ln(2x+1)dx$;

4) $\int(x^2-4)\sin 5x dx$;

2) $\int(2x-5)\sin 3x dx$;

5) $\int(x^2+x)e^{-x}dx$;

3) $\int arctg 2x dx$;

6) $\int(3x^2+1)\ln 4x dx$.

2.18.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

2.19 Практическое занятие №19 (2 часа)

Тема: «Интегрирование рациональных функций»

2.19.1 Задание для работы:

1. Разложение рациональной дроби на простейшие.
2. Интегрирование рациональных функций.

2.19.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Определение рациональной дроби.
2. Виды элементарных дробей.
3. Метод неопределенных коэффициентов.

Решение задач:

1. Разложить дробно-рациональные функции на сумму простейших дробей, не определяя коэффициентов разложения:

1) $\dfrac{x^3+3x-9}{(x^2-4)(x^3+8)}$;   2) $\dfrac{x^2-5}{(x^4-1)^2}$.

2. Найти интегралы (корни знаменателя действительные различные):

1) $\int\dfrac{xdx}{2x^2-3x-2}$;   2) $\int\dfrac{6x^2+15x-3dx}{6x^3-7x^2-3x}$.

3. Найти интегралы (корни знаменателя действительные совпадающие):

1) $\int\dfrac{x^5dx}{(x-1)^2(x^2-1)}$;   2) $\int\dfrac{x^5+x^4-8}{x^4-4x^2}dx$.

4. Найти интегралы (корни знаменателя комплексные различные):

1) $\int\dfrac{(3x^2+9x+10)dx}{x^3+2x^2+5x}$;   3) $\int\dfrac{x^3-1}{x^3+1}dx$;

2) $\int\dfrac{xdx}{x^3-1}$;   4) $\int\dfrac{2x^3+4x^2+2x-1}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}dx$.

2.19.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

2.20 Практическое занятие №20 (2 часа)

Тема: «Определенный интеграл»

2.20.1 Задание для работы:

1. Вычисление определенных интегралов. Формула Ньютона – Лейбница.
2. Геометрический и экономический смысл определенного интеграла.
3. Методы интегрирования в определенном интеграле.

2.20.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Определение определенного интеграла.
2. Формула Ньютона – Лейбница.
3. Геометрический и экономический смысл определенного интеграла.
4. Вычисление определенных интегралов подстановкой и по частям.

Решение задач:

1. Вычислить интегралы по формуле Ньютона-Лейбница:

1) $\int_1^2(3x^2-1)dx$;   3) $\int_1^2(x^2+\dfrac{1}{x^2})dx$;

2) $\int_0^1\dfrac{dx}{1+x^2}$;   4) $\int_0^{\pi/4}\sin 4xdx$.

2. Вычислить интегралы методом замены переменной:

1) $\int_0^2 x(2-x)^5dx$;   3) $\int_0^1\dfrac{e^xdx}{1+e^{2x}}$;

2) $\int_1^{e^3}\dfrac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;   4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos x+1}}$.

3. Вычислить интегралы методом интегрирования по частям:

1) $\int\limits_{2\pi}^{3\pi} x\sin xdx$;

2) $\int\limits_{0}^{1} xe^{-x}dx$;

3) $\int\limits_{1}^{2} x\log_2 xdx$;

4) $\int\limits_{4\pi}^{6\pi} x\cos 2x\,dx$.

4. Найти значение суммы $\alpha+\beta$, если $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{x^4+16}} = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{\sqrt{t^2+16}}$.

5. Найти значение разности $\alpha-\beta$, если $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin xdx}{\cos^2 x+1} = -\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{t^2+1}$.

2.20.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

2.21 Практическое занятие №21 (2 часа)

Тема: «Приложения определенного интеграла»

2.21.1 Задание для работы:

1. Площадь фигур на плоскости.
2. Нахождение объема тела вращения.
3. Несобственные интегралы первого рода.
4. Несобственные интегралы второго рода.

2.21.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Формулы нахождения площадей фигур на плоскости.
2. Формулы объемов тел вращения.
3. Экономический смысл определенного интеграла.
4. Определение несобственного интегралы первого рода.
5. Определение несобственного интегралы второго рода.

Решение задач:

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$ *и* $y=\sqrt{x}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2^x$, $y=x^2-4x+5$, $x=2$ и осями координат.

3. Вычислить объём и площадь поверхности тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной параболой $y^2=4x$, прямой $x=1$ и осью Ox.

4. Вычислить объём и площадь поверхности тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y^2=x+1$, $x=3$ и осью Ox.

5. Известно, что спрос на некоторый товар задается функцией $p=4-q^2$, где q - количество товара (шт.), p - цена единицы товара (руб.), а равновесие на рынке данного товара достигается при $p^*=q^*=1$. Определите величину потребительского излишка.

6. Известно, что спрос на некоторый товар задается функцией $q=\frac{8000}{p^3}$, предложение данного товара характеризуется функцией $q=500p$. Определите величину потребительского излишка при покупке товара.

7. Известно, что спрос на некоторый товар задается функцией $p = \frac{231}{q+1}$, предложение – функцией $p = q + 11$. Определите величину выигрыша потребителя при покупке товара.

8. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

1) $\int\limits_4^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$; 3) $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^{-x^2} dx$; 5) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$;

2) $\int\limits_0^{\infty} e^{-2x} dx$; 4) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}$; 6) $\int\limits_{-\infty}^{0} x^2 2^{x^3+1} dx$.

2. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$; 3) $\int\limits_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$; 5) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

2) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 4) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$; 6) $\int\limits_0^1 x \ln x dx$.

9. Определить, при каких значениях k интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^k}$, ($k > 0$, $k \neq 1$) сходится.

4. Найти площадь под кривой $y = \ln x$ в интервале от $x = 0$ до $x = 1$.

2.21.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа, основных математических моделей принятия решений; приобрели умения решать типовые математические задачи, используемые при принятии управленческих решений, использовать математический язык и математическую символику при построении организационно-управленческих моделей.

2.22. Практическое занятие №22 (2 часа)

Тема: «Функции нескольких переменных**»**

2.22.1 Задание для работы:

1. Область определения функции двух переменных.
2. Линии уровня функции двух переменных.
3. Построение поверхности, заданной функцией двух переменных.

2.22.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Определение области определения функции двух переменных.
2. Определение линии уровня функции двух переменных.
3. Принцип построения поверхности по линиям уровня.

Решение задач:

1. Найти и построить область определения функций:

1) $z = \arcsin(x-y)$; 2) $z = \sqrt{xy} + \frac{2x^2+y^3}{\sqrt{9x^2+16y^2-144}}$.

2. Построить линии уровней и примерное изображение поверхностей для функций двух переменных.

1) $z = \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16}$; 2) $z = x + y^2$.

3. Найти пределы, если они существуют:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \dfrac{x^2+4y}{2xy-1}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

2.22.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

2.23. Практическое занятие №23 (2 часа)

Тема: «Частные производные**»**

2.23.1 Задание для работы:

1. Частные производные первого порядка.
2. Частные производные второго порядка.
3. Полный дифференциал.

2.23.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Определение частных производных функции двух переменных.
2. Определение частных производных второго порядка функции двух переменных.
3. Понятие частных и полного дифференциала функции.

Решение задач:

1. Найти значения частных производных функций нескольких переменных в указанных точках:

1) $z = x^y$, $(e;1)$; 3) $z=\cos(x-\sqrt{xy^3})$, $\left(\dfrac{\pi}{2};0\right)$;

2) $z=e^{-2x^2+y^5}$, $(1;0)$; 4) $z=3x^2y^3-5x^4y^2+5xy-7x^2+6y^5$, $(1;1)$.

2. Найти частные и полный дифференциалы данных функций:

1) $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}$; 3) $z=\sqrt[3]{(x^2-y^3)^2}$;

2) $z=x^3+xy^2+x^2y$; 4) $f=\sin^2(xy^2z^3)$.

3. Вычислить приближённо значения выражений:

1) $(1{,}02)^3\cdot(0{,}97)^3$; 3) $\ln((0{,}95)^3+0{,}05)$;

2) $\sqrt{(4{,}25)^2+(2{,}75)^2}$; 4) $\sqrt{1{,}04^{1{,}99}+\ln 1{,}02}$.

4. Доказать, что функция $z=e^x(x\cos y-y\sin y)$ удовлетворяет уравнению $z''_{xx}+z''_{yy}=0$.

5. Доказать, что функция $z=e^{-\cos(x+3y)}$ удовлетворяет равенству $9z''_{xx}=z''_{yy}$.

6. Найти смешенные частные производные функции $z=\dfrac{y\sin 2y}{\sqrt[3]{x^2}}$. Проверить, что $z''_{xy}=z''_{yx}$.

7. Найти частные производные первого порядка функции $z=e^x(\cos y+x\sin y)$. Проверить, что $z''_{xy}=z''_{yx}$.

2.23.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

2.24. Практическое занятие №24 (2 часа)
Тема: «Производная по направлению, градиент»

2.24.1 Задание для работы:
1. Производная по направлению.
2. Градиент.
3. Функция Кобба-Дугласса.

2.24.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Определение производной по направлению.
2. Определение градиента.
3. Функция Кобба-Дугласса.

Решение задач:
1. Найти градиент функций и его модуль в указанных точках:

1) $z = x^2 + y^2, \quad (3,2)$;

2) $z = \sqrt{4 + x^2 + y^2}, \quad (2,1)$;

3) $z = arctg\,\dfrac{y}{x}, \quad (-1;1)$;

4) $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2 + 1}, \quad (0,3)$;

5) $z = \ln(\cos x + 3y^2), \quad (0;2)$;

6) $z = e^{\frac{x^2 + y^2}{2xy}}, \quad (1,1)$.

2. Вычислить значение производной по направлению $\vec{\alpha}$ в точке $M(2\sqrt{2};\sqrt{2})$ для функции $z = xy + \ln x$. Известно, что $\vec{\alpha}$ составляет угол $\dfrac{\pi}{4}$ с осью *OX*.

3. Вычислить значение производной функции $z = e^{3x^4 + 2xy}$ в точке $M(0;4)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $N(1;5)$.

4. Вычислить значение производной по направлению $\vec{\alpha}$ в точке $M(-1;-1)$ для функции $z = \ln(4xy + 3y^3)$. Известно, что $\vec{\alpha}$ составляет угол $\dfrac{\pi}{6}$ с осью *OX*.

5. Вычислить значение производной функции $u = xy^2z^3$ в точке $M(3;2;1)$ в направлении вектора MN, где $N(5;4;2)$.

6. Пусть производственная система характеризуется производственной функцией Кобба – Дугласа. За период времени системой было произведено 100 единиц продукции при затратах 20 единиц труда и 40 единиц капитала. Известно, что $\alpha = 0{,}75$, $\beta = 0{,}25$. Записать производственную функцию Кобба – Дугласа. Сколько единиц продукта будет произведено системой при затратах 25 единиц труда и 50 единиц капитала? Определить для данной производственной системы средние продукты труда и капитала. Определить предельные продукты труда и капитала.

2.24.3 Результаты и выводы:
На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

2.25. Практическое занятие №25 (2 часа)
Тема: «Экстремум функции нескольких переменных»

2.25.1 Задание для работы:
1. Необходимое условие экстремума.
2. Достаточное условия экстремума.
3. Алгоритм исследования функции двух переменных на экстремум.

2.23.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Сформулировать необходимое условие экстремума.
2. Сформулировать достаточное условия экстремума.
3. Алгоритм исследования функции двух переменных на экстремум.

Решение задач:
1. Исследовать на экстремум функции:
1) $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$; 3) $z = x^3 + 4x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y$;
2) $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$; 4) $z = x^3 - y^3 - 3xy$;
2. Предприятие производит два вида товаров. Товара первого вида производится в количестве X ед. по цене 8 у.е. Товара второго вида – в количестве Y ед. по цене 10 у.е. Функция затрат имеет вид: $C = x^2 + xy + y^2$. Найти функцию прибыли для данного предприятия и ее максимальное значение.
3. Функция прибыли задана формулой $\Pi(K;L) = PF(K;L) - WL - RK$, где $F(K;L)$ - производственная функция, P – цена продукции, W и R – соответственно факторные цены на труд и капитальные затраты, K и L – соответственно затраты трудовых ресурсов и капитала. Найти оптимальный план и максимум функции прибыли, если $F(K;L) = 2\sqrt[3]{KL}$.

2.25.3 Результаты и выводы:
На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

2.26 Практическое занятие №26 (2 часа)
Тема: «Условный экстремум функции нескольких переменных»

2.26.1 Задание для работы:
1. Условный экстремум функции нескольких переменных.
2. Метод исключения переменных. Метод множителей Лагранжа.
3. Нахождение глобальных экстремумов дифференцируемой функции на замкнутом ограниченном множестве.

2.26.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Определение комплексных чисел в алгебраической форме.
2. Определение комплексных чисел в тригонометрической форме.
3. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Решение задач:
1. Найти условный экстремум функции $z(x,y)=x+3y$ при условии $x^2+y^2=10$.
2. Найти условный экстремум функции $z(x,y)=3y^3+4x^2-xy$ при условии $x+y=0$.
3. Найти условный экстремум функции $z(x,y)=3y^3+4x^2-xy$ при условии $x+y=0$ (методом множителей Лагранжа).

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции z=5xy−4, если переменные x и y положительны и удовлетворяют уравнению связи $x^2/8+y^2/2-1=0$. (методом множителей Лагранжа).

5. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = -2y - 6x + x^2 + xy + 2$ в прямоугольнике $1 \le x \le 3$, $1 \le y \le 4$.

6. Найти наименьшее и наибольшее значения функции:

а) $z = 4xy + x^2 - y^2 - 5$ в треугольнике, ограниченном Ox, Oy, $y = 2 - x$.

б) $z = -2xy + x^2 + 4x - 4y + 7$ в области, ограниченной $y = -x^2 - 4x$ и Ox

2.26.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Условный экстремум функции нескольких переменных», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Условный экстремум функции нескольких переменных», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

2.27 Практическое занятие №27 (2 часа)

Тема: «Кратные интегралы»

2.27.1 Задание для работы:

1. Определение двойного интеграла
2. Свойства двойного интеграла
3. Повторные интегралы.
4. Связь между двойными и повторными интегралами

2.27.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Определение двойного интеграла
2. Свойства двойного интеграла
3. Определение повторные интегралы.
4. Связь между двойными и повторными интегралами

Решение задач:

1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_R f(x,y)dxdy$ в виде повторного интеграла с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y, если область R задана указанными линиями.

1) $R: \quad y = \sqrt{4 - x^2},\ y = \sqrt{3x},\ x \ge 0$.

2) $R: \quad x^2 = 2y,\ 5x - 2y - 6 = 0$.

3) $R: \quad x = \sqrt{8 - y^2},\ y \ge 0,\ y = x$.

4) $R: \quad x \ge 0,\ y \ge 0,\ y \le 1,\ y = \ln x$.

2. Вычислить двойной интеграл по области R, ограниченной указанными линиями.

1) $\iint\limits_R (x^2 + y)dxdy, \quad R: y = x^2, x = y^2$.

2) $\iint\limits_R xy^2 dxdy, \quad R: y = x^2, y = 2x$.

3) $\iint\limits_R (x + y)dxdy, \quad R: y^2 = x, y = x$.

4) $\iint\limits_R x^2 y dxdy, \quad R: y = 2 - x, y = x, x = 0$.

5) $\iint\limits_R (x^3 - 2y)dxdy, \quad R: y = x^2 - 1, x \ge 0, y \le 0$.

3. Неоднородная пластина R, ограниченная заданными линиями, имеет поверхностную плотность в каждой ее точке $\rho = \rho(x, y)$.

Вычислить:

а) массу пластины;

б) статические моменты пластины относительно осей Ox и Oy;

в) координаты центра масс пластины, построить его на графике;

г) моменты инерции пластины относительно осей Ox и Oy.

1) $R: y^2 = x, \ x = 4, \ \rho = \rho(x, y) = x$.

2) $R: x = 0, \ y = 0, \ x + y = 1, \quad \rho = \rho(x, y) = x^2$.

3) $R: x = 0, \ y = 0, \ 2x + 3y = 6, \quad \rho = \rho(x, y) = \dfrac{y^2}{2}$.

4) $R: y = x^2, \ x = y^2, \quad \rho = \rho(x, y) = 3x + 2y + 6$.

5) $R: x = 0, \ y = 1, \ y = x, \quad \rho = \rho(x, y) = x^2 + 2y^2$.

2.27.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Кратные интегралы», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Кратные интегралы», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала

2.28 Практическое занятие №28 (2 часа)

Тема: «Числовые ряды»

2.28.1 Задание для работы:

1. Исследование числовых рядов на сходимость.
2. Признаки сходимости знакоположительных рядов.
3. Эталонные ряды.

2.28.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Определение знакоположительного ряда.
2. Признак сравнения.
3. Предельный признак сравнения.
4. Признак Даламбера.
5. Признак Коши.

Решение задач:

1. Найти сумму ряда, доказав, что он сходится:

1) $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+2)} + \ldots$

2) $\dfrac{1}{1 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 7} + \dfrac{1}{7 \cdot 10} + \ldots + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \ldots$

2. Найти сумму ряда, если известна его n-ая частичная сумма:

1) $S_n = \dfrac{6n^4 - 5n + 4}{3n^4 + 7n^2 - 8}$; 2) $S_n = \dfrac{\sqrt{n^3} - n}{\sqrt{4n^3 - n^2 + 5}}$.

3. Исследовать на сходимость ряды с помощью необходимого условия сходимости:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2n + 5)$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[4]{n^3} - 25}{\sqrt{n} + 50}$.

4. Исследовать на сходимость ряды с помощью признака сравнения:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{6n^4-5n+3}$;

2) $\frac{1}{3^3-1}+\frac{1}{5^3-1}+\frac{1}{7^3-1}+...$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n(1+n^2)}}$.

5. Исследовать на сходимость ряды с помощью предельной формы признака сравнения:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n^5-2n^2}{7n^6+5n-1}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{n^3}}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6n^7-3n+4}{7n^8+4n^2+1}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

6. Исследовать на сходимость ряды с помощью предельной формы признака Даламбера:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{(n+1)!}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+1)!}{10^n}$.

7. Исследовать на сходимость ряды с помощью предельной формы признака Коши:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{10n}{10n+5}\right)^{n^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$.

2.28.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

2.29 Практическое занятие №29 (2 часа)

Тема: «Знакочередующиеся ряды»

2.29.1 Задание для работы:

1. Понятие знакочередующегося ряда.
2. Признак Лейбница.
3. Абсолютная и условная сходимость.

2.29.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Определение знакочередующегося ряда.
2. Признак Лейбница.
3. Определение абсолютной и условной сходимости.

Решение задач:

1. Исследовать на сходимость ряды с помощью признака Лейбница. В случае сходимости, установить абсолютно или условно сходится ряд:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n^3-2}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n^3+2}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{9^n\cdot n^2}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(4n+1)^n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin\frac{\pi n}{3}}{2\sqrt{n^3+1}}$.

2.29.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

2.30 Практическое занятие №30 (2 часа)
Тема: «Степенные ряды»

2.30.1 Задание для работы:
1. Признак Даламбера для рядов с произвольными членами.
2. Радиус и интервал сходимости степенного ряда.
3. Область сходимости степенного ряда.

2.30.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Признак Даламбера для рядов с произвольными членами.
2. Определение радиуса и интервала сходимости степенного ряда.
3. Определение области сходимости степенного ряда.

Решение задач:
1. Найти радиус и область сходимости степенных рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n\cdot x^{2n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{3n^5+4}\cdot(x-2)^n$.

2.30.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

2.31 Практическое занятие №31 (2 часа)
Тема: «Ряды Маклорена и Тейлора»

2.31.1 Задание для работы:
1. Ряд Тейлора
2. Ряд Маклорена.
3. Применение рядов в приближенных вычислениях.

2.31.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Определение степенного ряда.
2. Формулы разложения функций в ряд Тейлора.
3. Формулы разложения функций в ряд Маклорена.

4. Применение рядов в приближенных вычислениях.

Решение задач:
1. Разложить в ряд Маклорена функции:

1) $y = \dfrac{e^x - 1}{x}$; 3) $y = \dfrac{x + \ln(1-x)}{x^2}$;

2) $y = x \cdot \ln(1+x^2)$; 4) $y = \dfrac{\sin\sqrt{x}}{x^2}$.

2. Вычислить приближенно с точностью до 0,001:

1) $\sqrt[5]{1,7}$; 3) $\ln\sqrt[3]{130}$;

2) $\ln(1,04)$; 4) $\int_0^{0,5} e^{-x^2}dx$.

2.31.3 Результаты и выводы:
На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

2.32 Практическое занятие №32 (2 часа)
Тема: «Дифференциальные уравнения»

2.32.1 Задание для работы:
1. Интегральные кривые.
2. Решение задачи Коши.
3. Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными.

2.32.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Определение дифференциального уравнения.
2. Определение общего решения дифференциального уравнения.
3. Определение частного решения дифференциального уравнения.
1. Определение интегральных кривых.
2. Принцип решения задачи Коши.
3. Определение и принцип решения дифференциальных уравнений с разделенными и разделяющимися переменными.

Решение задач:
1. Найти общее решение (интеграл) дифференциального уравнения, построить интегральные кривые, решить задачу Коши:

1) $3y - xy' = 0;\ \left(1;\dfrac{1}{3}\right),\ (1;1)$;

2) $xy' - y = 0,\quad y(4) = 2$.

2. Найти общее решение (интеграл) дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, решить задачу Коши:

1) $xyy' = 1 - x^2,\quad y(1) = 2$; 4) $\sqrt{y^2+1}dx = xydy,\quad y(1) = \sqrt{3}$;

2) $xydx + (x+1)dy = 0,\quad y(0) = 1$; 5) $(1+x^2)yy' = x(1+y^2),\quad y(2) = 5$;

3) $xyy' = x + 1,\quad y(1) = 2$; 6) $y' = 10^{x+y},\quad y(0) = 0$.

2.32.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

2.33 Практическое занятие №33 (2 часа)

Тема: «Некоторые типы дифференциальных уравнений первого порядка**»**

2.33.1 Задание для работы:

1. Линейные дифференциальные уравнения.
2. Уравнения Бернулли. Метод Бернулли.
3. Однородные дифференциальные уравнения.
4. Разностные уравнения.

2.33.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Определение линейного дифференциального уравнения.
2. Определение уравнения Бернулли.
3. Определение однородного дифференциального уравнения.
4. Определение разностного уравнения.

Решение задач:

1. Найти общее решение (интеграл) линейных дифференциальных уравнений:

1) $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=x$; 4) $xy'-\frac{y}{x+1}=x$;

2) $y'+\frac{2y}{x}=x^3$; 5) $y'+y=2xe^{-2x}$;

3) $y'+2xy=xe^{-x^2}$; 6) $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$.

2. Найти общее решение (интеграл) уравнений Бернулли:

1) $y'-\frac{y}{x}=x^2y^2$; 3) $y'+y=xy^3$;

2) $y'+\frac{y}{x}=xy^3$; 4) $xy'+2y=x^5y^2$.

3. Найти общее решение (интеграл) однородных дифференциальных уравнений, решить задачу Коши:

1) $y'=\frac{y}{x}-1$; 6) $2xy'=x+3y$;

2) $(x^2+y^2)dx-2xydy=0$; 7) $(x+2y)dx-xdy=0$;

3) $ydx+(2\sqrt{xy}-x)dy=0$; 8) $(y+\sqrt{xy})dx=xdy$;

4) $y'=\frac{x+y}{x-y}$; 9) $x^2y'=y(x+y)$;

5) $y^2+x^2y'=xyy'$; 10) $(xy'-y)arctg\frac{y}{x}=x$.

2.33.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

2.34 Практическое занятие №34 (2 часа)
Тема: «Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка**»**

2.34.1 Задание для работы:
1. ЛОДУ второго порядка.
2. ЛНДУ второго порядка.

2.34.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Определение дифференциального уравнения второго порядка.
2. Определение общего решения дифференциального уравнения второго порядка.
3. Определение частного решения дифференциального уравнения второго порядка.
4. Определение ЛОДУ второго порядка.
5. Определение ЛНДУ второго порядка.

Решение задач:
1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:
1) $y''' = e^{2x}$;
2) $y^{(4)} = \sin x$;
3) $y'' = \dfrac{1}{x}$;
4) $y''(x+2)^5 = 1$.
2. Найти общее решение дифференциальных уравнений:
1) $x(y''+1) + y' = 0$;
2) $y'' = y' + x$;
3) $xy'' = y'$;
4) $y''(e^x+1) + y' = 0$.
3. Решить дифференциальные уравнения:
1) $(y')^2 + 2y \cdot y'' = 0$;
2) $y^3 y'' = -1$;
3) $2y \cdot y'' = (y')^2 + 1$;
4) $y \cdot y'' = -(y')^2$.
4. Найти общее решение линейных однородных дифференциальных уравнений:
1) $y'' - 4y' + 4y = 0$;
2) $y'' - 8y' + 25y = 0$.
5. Решить задачу Коши:
1) $y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$;
2) $y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$;
6. Найти общее решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений:
1) $y'' - 2y' + y = e^x$;
2) $y'' + 2y' - 8y = (12x+14)e^{2x}$.
7. Решить задачу Коши:
1) $y'' - 2y' = (x^2 + x - 3)e^x$, $y(0) = 2, y'(0) = 5$;
2) $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 8$, $y(0) = 2, y'(0) = 9$;
8. Найти выражение объема реализованной продукции $y = y(t)$ и его значение при $t = 2$, если известно, что кривая спроса имеет вид $p(y) = 3 - 2y$, норма акселерации $\dfrac{1}{l} = 1{,}5$, норма инвестиций $m = 0{,}6$, $y(0) = 1$.
9. Для некоторой фирмы функция маржинальной выручки от продажи своей продукции имеет вид $MR = 10 - 0{,}2q$, где R - общая выручка, MR - маржинальная выручка ($MR = R'$), q - объем продукции. Нужно найти общую выручку фирмы R (указание: учесть, что при нулевом уровне продаж $R(0) = 0$).

10. Найти функцию дохода $Y(t) = I(t) + C(t)$, если известно, что величина потребления задается функцией $C(t) = 2t$, коэффициент капиталоемкости прироста дохода $b = 0{,}5$, сумма инвестиций $I(t) = bY'(t)$ и $Y(0) = 2$.

2.34.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа, основных математических моделей принятия решений; приобрели умения решать типовые математические задачи, используемые при принятии управленческих решений, использовать математический язык и математическую символику при построении организационно-управленческих моделей.

2.35 Практическое занятие №35 (2 часа)

Тема: «Однородные системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами»

2.35.1 Задание для работы:

1. Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами
2. Решение линейной системы дифференциальных уравнений методом исключения
3. Решение линейной системы дифференциальных уравнений методом неопределенных коэффициентов

2.35.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Определение линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
2. Суть решения линейных систем дифференциальных уравнений методом исключения.
3. Суть решения линейных систем дифференциальных уравнений методом неопределенных коэффициентов

Решение задач:

1. **15.** Решить систему дифференциальных уравнений методом исключения

1) $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$

2) $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + y \end{cases}$

3) $\begin{cases} x' = -x + 8y \\ y' = x + y \end{cases}$

4) $\begin{cases} x' = -2x - 3y \\ y' = -x \end{cases}$

5) $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - y \end{cases}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2$

2. Решить систему уравнений методом исключения

1) $\begin{cases} x' + 5x + y = e^t \\ y' - x - 3y = e^{2t} \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x' - y' = \sin t - 3x \\ x' = \cos t - y \end{cases}$

3) $\begin{cases} x' = y \\ y' = x + e^t + e^{-t} \end{cases}$

4) $\begin{cases} x' + y' - y = e^t \\ 2x' + y' + 2y = \cos t \end{cases}$, $x(0) = -\dfrac{3}{17}, y(0) = \dfrac{4}{17}$

5) $\begin{cases} x' = 2x + y - 2z - t + 2 \\ y' = 1 - x \\ z' = x + y - z - t + 1 \end{cases}$

3. Решить систему уравнений методом неопределенных коэффициентов

1) $\begin{cases} x' + x - y = 2 \\ y' + x + y = 2t \end{cases}$, $x(0) = 0, y(0) = -1$

2) $\begin{cases} x' = x + y + 3e^t \\ y' = 2x - y \end{cases}$

3) $\begin{cases} x' = -2x + 3y + 10\sin t \\ y' = x \end{cases}$

4) $\begin{cases} x' + y = 2e^t \\ y' + x = 2e^t \end{cases}$, $x(0) = y(0) = 1$

5) $\begin{cases} x' + y = t \\ y' + z = t^2 + 1 \\ z' + x = 2t + 1 \end{cases}$

2.35.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа, основных математических моделей принятия решений; приобрели умения решать типовые математические задачи, используемые при принятии управленческих решений, использовать математический язык и математическую символику при построении организационно-управленческих моделей.

Разработал ______________________________ В.А. Ротова