ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.16 Линейная алгебра

Направление подготовки 38.03.01 Экономика

Профиль образовательной программы Бухгалтерский учет, анализ и аудит

Форма обучения очная

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.1 Лекция №1 (2 часа).
Тема: «Определители»

1.1.1 Вопросы лекции:
1. Определение определителей второго и третьего порядка.
2. Минор, алгебраическое дополнение.
3. Теорема Лапласа.
4. Свойства определителей.
5. Метод эффективного понижения порядка.

1.1.2 Краткое содержание вопросов:
1. Определение определителей второго и третьего порядка.

ОПР: *Определителем второго порядка* называется число, обозначаемое символом Δ (дельта)

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, где a_{ij}- числа, i – номер строки, j- номер столбца (i=1,2 ; j=1,2) и определяемое равенством $\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Примеры: 1) Числовой определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-1)(-3) = 8 - 3 = 5$$

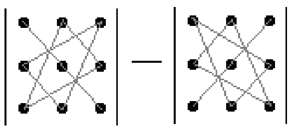
побочная диагональ главная диагональ

2) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ - функциональный определитель

ОПР: *Определителем третьего порядка* называется число, обозначаемое символом

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, где a_{ij}- числа, i – номер строки, j- номер столбца (i=1,2,3 ; j=1,2,3) и определяемое равенством

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33})$$



Пример: $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 0 - 12 - (0 - 3 + 4) = -13 - 1 = -14$

2. Минор, алгебраическое дополнение.

$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $\qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 6 = 8$ – *минор* M_{12}

ОПР: *Минором* M_{ij} элемента a_{ij} определителя называется определитель, полученный из данного в результате вычеркивания i-ой строки и j-го столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}

Пример:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6$$

ОПР: *Алгебраическим дополнением* A_{Ij} элемента a_{ij} определителя называется число

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}}$$

Пример: $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(-3-0) = 3$

$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1$

3. Теорема Лапласа.

ТЕОРЕМА ЛАПЛАСА *(о разложении определителя по элементам строки или столбца):* Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$
$$(= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23})$$

Пример: $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2A_{21} + 1A_{22} + 0A_{23} = 2(-1)^3 M_{21} + 1(-1)^4 M_{22} + 0 = -2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 + (-1) = -3$

4. Свойства определителей.

1. Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, сохранив нумерацию. Эта операция называется *транспонированием.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2. При замене двух строк (столбцов) местами, знак определителя изменится на противоположный.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3. Общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & k \cdot a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & k \cdot a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & k \cdot a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

4. Определитель равен нулю, если:

а) он содержит нулевую строку (столбец);

б) он содержит хотя бы две одинаковые строки (столбца);

в) элементы одной строки (столбца) пропорциональны элементам другой строки (столбца).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

5. Если каждый элемент какого-либо столбца (строки) представляет сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 + a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 + a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 + a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

6. Определитель не изменится, если элементы одной строки (столбца) умножить на одно и то же число $k \neq 0$ и прибавить к соответствующим элементам другой строки (столбца).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \times k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + k \cdot a_{21} & a_{32} + k \cdot a_{22} & a_{33} + k \cdot a_{23} \end{vmatrix}$$

7. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) и соответствующих алгебраических дополнений другой строки (столбца) равна нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{aligned} a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} &= 0 - \textit{строка} \\ a_{13}A_{12} + a_{23}A_{22} + a_{33}A_{32} &= 0 - \textit{столбец} \end{aligned}$$

5. Метод эффективного понижения порядка.

Замечание: Определители можно вычислять:

а) по определению;

б) по теореме Лапласа;

в) методом эффективного понижения порядка.

г) приведение к треугольному виду

Метод эффективного понижения порядка заключается в накапливании нулей в какой-либо строке (столбце) с помощью 6-го свойства определителей и последующем вычислении его по теореме Лапласа.

Пример:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} \cdot 5 \quad \cdot 7 \quad = \begin{vmatrix} 0 & 13 & 22 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 17 & 34 \end{vmatrix} = (-1)A_{21} = (-1)(-M_{21}) = \begin{vmatrix} 13 & 22 \\ 17 & 34 \end{vmatrix} = 17\begin{vmatrix} 13 & 22 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 34\begin{vmatrix} 13 & 11 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 34(13-11) = 68$$

Приведение к треугольному виду Определитель, у которого все элементы, находящиеся выше или ниже главной диагонали равны нулю, называется определителем *треугольного вида*. Очевидно, что в таком случае определитель равен произведению элементов, стоящих по главной диагонали.

Определители высших порядков определяются аналогично. Для определителей любых порядков остается в силе определения минора и алгебраического дополнения некоторого элемента, свойства определителей.

Пример:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 640$$

1.2 Лекция №2 (2 часа).

Тема: «Матрицы»

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Определение матрицы.
2. Действия над матрицами, их свойства.

1.2.2 Краткое содержание вопросов:

1. 1 Определение матрицы.

ОПР: *Матрицей размера $m \times n$* называется прямоугольная таблица вида $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$,

где a_{ij}-элементы матрицы (числа, функции), i – номер строки, j- номер столбца (i=1,2,…,m ; j=1,2,…,n)

Обозначение: $A_{m\times n} = (a_{ij}) \qquad B_{m\times n} = (b_{ij})$

Частные виды матриц:

1) если m=n, то матрица называется *квадратной* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 2}$ - квадратная матрица второго порядка

2) если m=1, то $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}_{1\times n}$ - *строчная* матрица.

3) если n=1, то $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}_{m\times 1}$ - *столбцовая* матрица.

4) матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* матрицей $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5) *единичной* матрицей называется квадратная матрица, у которой по главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю. $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6) матрица называется *треугольной*, если под или над её главной диагональю стоят нули. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$

ОПР: Матрицы одинаковой размерности называются *равными*, если равны элементы, стоящие на соответствующих местах.

2. Действия над матрицами, их свойства.

Основные операции над матрицами:

ОПР: *Суммой (разностью)* двух матриц одинаковой размерности называется матрица той же размерности, элементы которой равны сумме (разности) элементов, стоящих на одинаковых местах.

$A_{m\times n} \pm B_{m\times n} = C_{m\times n} \qquad A_{m\times n} = (a_{ij}) \quad i = 1...m$

$B_{m\times n} = (b_{ij}) \quad j = 1...n \qquad \boxed{c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}}$

$C_{m\times n} = (c_{ij})$

ОПР: *Произведением матрицы A на действительное число* $k \neq 0$ называется матрица B, каждый элемент которой получен умножением каждого элемента исходной матрицы A на это число k.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad 3A = B \qquad 3A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 0 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix} = B$

ОПР: *Произведением матрицы $A_{m\times k}$ и матрицы $B_{k\times n}$* называется матрица $C_{m\times n}$, элементы которой c_{ij} равны сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A и соответствующих элементов j-го столбца матрицы B.

$A_{m\times k}\cdot B_{m\times k}=C_{m\times n}$ $\qquad$ $A_{m\times k}=(a_{ip})\quad i=1...m\quad p=1...k$

$B_{k\times m}=(b_{pj})\quad j=1...n$

$$\boxed{c_{ij}=\sum_{p=1}^{k} a_{ip}\cdot b_{pj}} \qquad C_{m\times n}=(c_{ij})$$

Замечание: Матрицы можно перемножать лишь в том случае, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Свойства операций над матрицами:

1. A+B=B+A
2. (A+B)+C=A+(B+C)
3. α (A+B)= α A+ α B, где α - действительное число
4. A(B+C)=AB+AC
5. (A+B)C=AC+BC
6. α (AB)=(α A)B=A(α B)
7. A(BC)=(AB)C

Замечание: 1) если $\exists\ A\cdot B$, то $B\cdot A$ может и не существовать. $A_{2\times\underline{3}}\cdot B_{\underline{3}\times 3}$, то $B_{3\times\underline{3}}\cdot A_{\underline{2}\times 3}$ -не существует

2) даже если $\exists\ A\cdot B$ и $\exists\ B\cdot A$, то в общем виде эти матрицы различные

$A_{2\times 3}=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&3&2\end{pmatrix},\ B_{3\times 2}=\begin{pmatrix}0&3\\1&5\\-1&1\end{pmatrix},\ A_{2\times 3}\cdot B_{3\times 2}=C_{2\times 2}=\begin{pmatrix}0&12\\1&17\end{pmatrix},\ B_{3\times 2}\cdot A_{2\times 3}=D_{3\times 3}=\begin{pmatrix}0&2&-2\\2&16&11\\-2&2&1\end{pmatrix}$ - различные размерности.

$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&5\\6&8\end{pmatrix},\ A\cdot B=\begin{pmatrix}12&21\\24&47\end{pmatrix},\ B\cdot A=\begin{pmatrix}15&20\\30&44\end{pmatrix}\quad AB\neq BA$ -одинаковые размерности (это возможно только для квадратных матриц), но сами матрицы различные.

3)

$A_{n\times n}\cdot E_{n\times n}=E_{n\times n}\cdot A_{n\times n}=A_{n\times n}\qquad \begin{pmatrix}2&3\\-4&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\-4&5\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3\\-4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\-4&5\end{pmatrix}$

4) Произведение двух ненулевых матриц может быть нулевой матрицей

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\neq O,\quad B=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\neq O, íî \qquad A\cdot B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O$$

ОПР: *Целой положительной степенью* A^m $(m>1)$ квадратной матрицы А называется произведение m матриц, равных А, т.е. $A^m=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{m\ ðàç}$

Замечание: По определению полагают, что: $A^0=E,\quad A^1=A$

Можно доказать, что $A^m\cdot A^k=A^{m+k},\quad (A^m)^k=A^{m\cdot k}$

ОПР: Матрица A^t, полученная из матрицы А, с помощью замены местами строк и столбцов с сохранением порядка, называется *транспонированной*.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}_{2\times 3},\quad A^t=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Свойства:

1. $(A^t)^t=A$
2. $(\alpha A)^t=\alpha A^t$, где α - действительное число
3. $(A+B)^t=A^t+B^t$
4. $(AB)^t=B^t\cdot A^t$

1.3 Лекция №3 (2 часа).
Тема: «Обратная матрица»

1.3.1 Вопросы лекции:
1. Обратная матрица.
2. Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.

1.3.2 Краткое содержание вопросов:
1. Обратная матрица.
Пример: $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 7\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}7 & -4\\ -5 & 3\end{pmatrix}$ $AC=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$ *и* $CA=E$ -единичная матрица

Обозначим $C=A^{-1}$

ОПР: Обратной матрицей по отношению к данной называется матрица, которая будучи умноженной на данную матрицу как слева, так и справа дает единичную матрицу. $\boxed{A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E}$

ТЕОРЕМА (*о существовании и единственности обратной матрицы):* Для квадратной матрицы $A_{n\times n}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$, определитель которой отличен от нуля ($\Delta(A)\neq 0$), существует обратная матрица A^{-1}, причем единственная. $\boxed{A^{-1}=\frac{1}{\Delta(A)}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix}}$ (*),

где A_{ij} - алгебраические дополнения для элементов a_{ij} матрицы А, $i=1...n,\ j=1...n$

Алгоритм нахождения обратной матрицы:
1) находим $\Delta(A)$, если матрица А невырожденная, т.е. $\Delta(A)\neq 0$, то матрица A^{-1} существует.
2) находим A_{ij} A_{ij} - алгебраические дополнения для элементов a_{ij} матрицы А.
3) составляем A^{-1} по формуле (*).
4) выполняем проверку $AA^{-1}=A^{-1}A=E$

Пример: Найти обратную матрицу для матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$

Решение: $\Delta(A)=-9\neq 0$

$A_{11}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3$ $A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-4$ $A_{31}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=2$

$A_{12}=-\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-6$ $A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2$ $A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-1$

$A_{13}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=3$ $A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1$ $A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-4$

$$A^{-1}=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}3 & -4 & 2\\ -6 & 2 & -1\\ 3 & -1 & -4\end{pmatrix}$$

проверка: $AA^{-1}=E$

$A^{-1}A=E$

2. Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.

ОПР: *Элементарными преобразованиями* над строками матрицы называются такие преобразования, для которых возможны следующие действия (над строками матриц):

1) перестановка строк;
2) вычеркивание нулевой строки (если она имеется);
3) умножение любой строки на число, отличное от 0;
4) прибавление к одной из строк другой строки, умноженной на любое число, отличное от 0.

Пример: Найти обратную матрицу для матрицы $A=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$ с помощью элементарных преобразований.

Решение: Для того, чтобы получить обратную матрицу с помощью элементарных преобразований нужно приписать к данной матрице через вертикальную черту (слева или справа) единичную матрицу той же размерности. Далее с помощью элементарных преобразований над строками «сдвоенной» матрицы (A\E) приводим матрицу A (левую половину) к единичной матрице, тогда на месте приписанной единичной матрицы , окажется обратная A^{-1}.

$$(A/E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&2&3&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\-1&2&1&0&0&1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&0&1&0\\2&2&3&1&0&0\\-1&2&1&0&0&1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&0&1&0\\0&4&3&1&-2&0\\0&1&1&0&1&1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&0&1&0\\0&1&1&0&1&1\\0&4&3&1&-2&0\end{array}\right)=$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&2&1\\0&1&1&0&1&1\\0&0&+1&-1&+6&+4\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&-4&-3\\0&1&0&1&-5&-3\\0&0&1&-1&6&4\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-4&-3\\0&1&0&1&-5&-3\\0&0&1&-1&6&4\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}$$

1.4 Лекция №4 (2 часа).

Тема: «Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования**»**

1.4.1 Вопросы лекции:

1. Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования.
2. Линейная модель обмена.

1.4.2 Краткое содержание вопросов:

1. Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования.

Пусть дана матрица A.

ОПР: Число λ называется *собственным значением* матрицы A, если выполняется равенство

$$\boxed{\Delta(A-\lambda E)=0}$$

ОПР: Вектор $\vec{x}=(x_1;x_2;...;x_n)$, $\vec{x}\neq\vec{0}$ называется *собственным вектором*, соответствующим собственному значению λ, если $(A-\lambda E)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\...\\x_n\end{pmatrix}=\vec{0}$.

Пример: Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A=\begin{pmatrix}1&4\\9&1\end{pmatrix}$.

Решение: 1) $\Delta(A-\lambda E)=0$

$$\left|\begin{pmatrix}1 & 4\\ 9 & 1\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right| = 0 \qquad \begin{vmatrix}1-\lambda & 4\\ 9 & 1-\lambda\end{vmatrix} = 0 \qquad (1-\lambda)^2 - 36 = 0$$

$\lambda_1 = -5;\quad \lambda_2 = 7$ - собственные значения матрицы A.

2) $\overrightarrow{x_1} = (x_1; x_2);\quad \lambda_1 = -5$

$$\begin{pmatrix}1-\lambda & 4\\ 9 & 1-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix}6 & 4\\ 9 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}6x_1 + 4x_2 = 0\\ 9x_1 + 6x_2 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1 = c\\ x_2 = -1{,}5c\end{cases}$$

$\overrightarrow{x_1} = (c; -1{,}5c),\quad \forall c \neq 0$ - собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = -5.$

$\overrightarrow{x_2} = (x_3; x_4);\quad \lambda_2 = 7$

$$\begin{pmatrix}-6 & 4\\ 9 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_3\\ x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-6x_3 + 4x_4 = 0\\ 9x_3 - 6x_4 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_3 = d\\ x_4 = 1{,}5d\end{cases}$$

$\overrightarrow{x_2} = (d; 1{,}5d),\quad \forall d \neq 0$- собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 7.$

2. Линейная модель обмена.

Рассмотрим модель международной торговли (модель обмена) в виде математической модели.

Пусть имеем n стран - $S_1, S_2, ..., S_n$, национальный доход каждой из которых равен $x_1, x_2, ..., x_n$.

Обозначим через a_{ij} , $i = 1...n;\ j = 1...n$ долю национального дохода, который страна S_j тратит на покупку товаров у страны S_i .

Будем считать, что весь национальный доход тратится на закупку товаров либо внутри страны, либо на импорт из других стран, т.е. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad (j = 1...n).$

Матрица $A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n}\\ ... & ... & ... & ...\\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}\end{pmatrix}$ называется *структурной матрицей торговли*.

Обозначим через $p_i \quad (i = 1...n)$ выручку от внутренней и внешней торговли для страны S_i , тогда

$p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n$.

Очевидно, что выручка от торговли каждой страны должна быть не меньше её национального дохода, т.е. $p_i \geq x_i$. Но $p_i > x_i$ - невозможный случай, т.к. все страны не могут одновременно получать прибыль, поэтому условие $p_i \geq x_i$ примет вид $p_i = x_i$.

Введем вектор национальных доходов страны $\vec{x} = (x_1; x_2; ...; x_n)$, получим матричное уравнение

$A \cdot X = X$, где $X = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ ...\\ x_n\end{pmatrix}$.

Т.е. задача свелась к отысканию собственного вектора матрицы A, отвечающего собственному значению λ =1.

Пример: Структурная матрица торговли трех стран S_1, S_2, S_3 имеет вид
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$
Найти национальные доходы для сбалансированной торговли.

Решение: Найдем собственный вектор $\vec{x}$, соответствующий собственному значению $\lambda = 1$.

$(A - E)X = 0$ $\quad \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} x_1 = 1{,}5c \\ x_2 = 2c \\ x_3 = c \end{cases}$ - метод Гаусса. Т.е.

$\vec{x} = (1{,}5c; 2c; c)$

Таким образом, сбалансированность торговли трех стран достигается при векторе национальных доходов $\vec{x} = (1{,}5c; 2c; c)$, т.е. при соотношении национальных доходов стран $\frac{3}{2} : 2 : 1$ или $3 : 4 : 2$.

1.5 Лекция №5 (2 часа).

Тема: «Системы линейных уравнений»

1.5.1 Вопросы лекции:

1. Решение системы в матричном виде.
2. Решение системы по формулам Крамера.

1.5.2 Краткое содержание вопросов:

1. Решение системы в матричном виде.

ОПР: *Системой n линейных уравнений с m неизвестными* называется система вида
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$
(1), где $a_{ij} \in R$ - коэффициенты при неизвестных, $b_j \in R$ - свободные члены, x_j - неизвестные, i=1…m, j=1…n.

ОПР: *Решением* системы называется такая совокупность чисел $(x_1 = k_1, x_2 = k_2, ..., x_n = k_n)$, которая обращают данную СЛУ в систему верных равенств (тождеств).

ОПР: СЛУ называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение и *несовместной*, если она не имеет решений.

ОПР: Совместная СЛУ называется *определенной*, если она имеет одно решение и *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

Этот метод применим для систем n линейных уравнений с n неизвестными.
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$
Введем в рассмотрение матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}_{n\times n}\qquad X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix}_{n\times 1}\qquad B=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \dots\\ b_n\end{pmatrix}_{n\times 1}$$

$$A\cdot X=\begin{pmatrix} a_{11}\cdot x_1+ & a_{12}\cdot x_2+ & \dots & +a_{1n}\cdot x_n\\ a_{21}\cdot x_1+ & a_{22}\cdot x_2+ & \dots & +a_{2n}\cdot x_n\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1}\cdot x_1+ & a_{n2}\cdot x_2+ & \dots & +a_{nn}\cdot x_n\end{pmatrix}_{n\times 1}=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \dots\\ b_n\end{pmatrix}_{n\times 1}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{A\cdot X=B}$ на основании определений произведения и равенства матриц.

$A\cdot X=B$ -матричное уравнение, которое позволяет записать СЛУ (1) в матричном виде.
Чтобы найти X, умножим равенство с обеих сторон слева на A^{-1}

$$A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B$$

$$E\cdot X = A^{-1}\cdot B$$

$$\boxed{X = A^{-1}\cdot B}$$

Получили решение СЛУ (1) в матричной форме.

Пример: $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=2\\ x_1-x_2+x_3=0\\ x_1+3x_2-x_3=-2\end{cases}$

Введем в рассмотрение матрицы: $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&-1&1\\1&3&-1\end{pmatrix}\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{\Delta(A)}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix}}\qquad \Delta(A)=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&-1&1\\1&3&-1\end{vmatrix}=14$$

$$A_{11}=-2\quad A_{21}=11\quad A_{31}=5$$
$$A_{12}=2\quad A_{22}=-4\quad A_{32}=2$$
$$A_{13}=4\quad A_{23}=-1\quad A_{33}=-3$$

$$A^{-1}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-2&11&5\\2&-4&2\\4&-1&-3\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-2&11&5\\2&-4&2\\4&-1&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-14\\0\\14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Ответ: (-1;0;1)

2. Решение системы по формулам Крамера.

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & \times a_{21}\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & \times a_{11}\end{cases}\qquad \begin{cases} a_{11}a_{21}x_1+a_{12}a_{21}x_2=b_1a_{21}\\ a_{11}a_{21}x_1+a_{11}a_{22}x_2=b_2a_{11}\end{cases}(-)\qquad (a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22})x_2=b_1a_{21}-b_2a_{11}$$

$$x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & \times a_{22}\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & \times a_{12}\end{cases}\qquad \begin{cases} a_{11}a_{22}x_1+a_{12}a_{22}x_2=b_1a_{22}\\ a_{12}a_{21}x_1+a_{12}a_{22}x_2=b_2a_{12}\end{cases}(-)\qquad (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

$$x_1=\frac{a_{22}b_1-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

Заметим: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ - <u>главный определитель</u> СЛУ $(\Delta \neq 0)$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{21} \end{vmatrix} = b_1 a_{21} - a_{12} b_2$ *и* $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - b_1 a_{21}$ - <u>вспомогательные определители</u> СЛУ

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} \end{cases}}$$ - <u>*формулы Крамера*</u>

<u>ТЕОРЕМА КРАМЕРА:</u> Система n линейных уравнений с n неизвестными, определитель которой $\Delta \neq 0$ имеет решение и при этом единственное, определяемое по формулам $\boxed{x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}}$ (*), где Δ_j $(j = 1...n)$-определитель, получаемый из определителя системы Δ заменой j-го столбца столбцом свободных членов.

<u>Замечание:</u> 1) Если $\Delta \neq 0$, то система (1) имеет единственное решение, которое определяется по формулам (*).

2) Если $\Delta = 0$ и хотя бы один из вспомогательных определителей $\Delta_j \neq 0$, то система (1) не имеет решений.

3) Если $\Delta = 0$ и $\Delta_j = 0$, то система либо имеет множество решений, либо не имеет решений. Нужны дополнительные исследования.

<u>Пример:</u> Решить СЛУ по формулам Крамера $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 14$ $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ система имеет единственное решение

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -14$ $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$ $\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 14$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} \\ z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Ответ: (-1;0;1)

1.6 Лекция №6 (2 часа).

Тема: «Методы решения систем линейных уравнений»

1.6.1 Вопросы лекции:

1. Метод Гаусса. Ранг матрицы. Исследование решения систем.
2. Однородные системы линейных уравнений

1.6.2 Краткое содержание вопросов:

1. Метод Гаусса. Ранг матрицы. Исследование решения систем.

Рассмотрим СЛУ $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ (1)

Метод Гаусса (метод последовательного исключения переменных) заключается в том, что с помощью элементарных преобразований системы переходим к равносильной СЛУ ступенчатого или треугольного вида, из которой последовательно находят все переменные. К элементарным преобразованиям относят: перестановка уравнений, вычеркивание из системы верного равенства, умножение обеих частей одного уравнения на одно и то же число $\neq 0$ и прибавление к соответствующим обеим частям другого уравнения.

Используя метод Гаусса и элементарные преобразования, мы работаем с коэффициентами при неизвестных и свободными членами. Поэтому удобно выписывать расширенную матрицу, соответствующую данной СЛУ и приводить эту матрицу к ступенчатому виду. Использую найденную матрицу записать систему ступенчатого вида, решив которую, найдем решение СЛУ.

<u>Пример:</u> Решить СЛУ методом Гаусса $\begin{cases} x + 2y + 5z = -9 \\ x - y + 3z = 2 \\ 3x - 6y - z = 25 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -2 & 25 \end{array}\right)(-1)\,(-3) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right)(-4) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = -9 \\ -3y - 2z = 11 \\ -8z = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = -1 \end{cases}$$

Ответ: (2;-3;-1)

Достоинством метода Гаусса по сравнению с другими в том, что он позволяет однозначно установить совместна система или нет, а в случае совместности, найти её решение (единственное или бесконечное множество).

<u>ОПР:</u> <u>*Рангом матрицы А*</u> (rangA) называется наивысший порядок отличного от нуля минора матрицы А.

<u>Пример:</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Delta(A) = 0 \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \quad rangA = 2$

С каждой системой можно связать две матрицы:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ (2) –основная матрица и $B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_m \end{array}\right)$ (3) – расширенная матрица.

<u>ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА-КАПЕЛЛИ (критерий совместности СЛУ):</u> Для того, чтобы система m линейных уравнений с n неизвестными (1) была совместной (имела решение) необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы (2) был равен рангу расширенной матрицы (3).

Т.е., если rangA $\neq$ rangB, то система несовместна

если rangA=rangB=r, то система совместна, причем:

1) если r=n (n-число неизвестных), то система имеет единственное решение.

2) если r<n, то система имеет бесчисленное множество решение, зависящих от (n-r) параметров.

Пример: $\begin{cases} x+2y+z+t=5 \\ \quad\; y+z+t=3 \\ x+y \qquad\quad =2 \end{cases}$

Составим расширенную матрицу:

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)\begin{matrix}(-1)\\ |\\ \lrcorner\end{matrix}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)\begin{matrix}\\ 1\\ \lrcorner\end{matrix}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Т.к. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$ - минор второго порядка,

то rangA=2 и rangB=2 r=2 $\Rightarrow$ система совместна

n=4 (x, y, z, t) n>r , n-r=4-2=2 $\Rightarrow$ система имеет бесчисленное множество решений, зависящих от двух параметров.

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$ $\begin{cases} x+2y+z+t=5 \\ \quad\; y+z+t=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2-y \\ t=3-y-z \end{cases}$ $\Rightarrow$ $(2-y;\, y;\, z;\, 3-y-z)$ - общее решение (зависит от двух параметров – y и z).

Ответ: $(2-y;\, y;\, z;\, 3-y-z)$

2. Однородные системы линейных уравнений (ОСЛУ).

ОПР: СЛУ, свободные члены которой равны нулю, называется *однородной системой линейных уравнений*

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

Замечание: В ОСЛУ ранг основной матрицы всегда равен рангу расширенной матрицы, т.к. расширенная матрица отличается от основной только нулевым столбцом $\Rightarrow$ ОСЛУ всегда совместна. (0;0;...;0) - очевидно решение ОСЛУ (тривиальное решение).

ТЕОРЕМА: ОСЛУ имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $r<n$, где r- ранг основной и расширенной матрицы, n- число неизвестных.

Пример: $\begin{cases} x+2y+3z+4t=0 \\ 2x+4y-z \qquad =0 \\ x+2y+10z+12t=0 \\ x+2y+6z+4t=0 \end{cases}$ Ответ: (- 2y – 4t; y; 0; t)

1.7 Лекция №7 (2 часа).

Тема: «Системы линейных неравенств»

1.7.1 Вопросы лекции:

1. Решение систем линейных неравенств.
2. Представление выпуклого многогранника
3. Область допустимых решений системы уравнений и неравенств.

1.7.2 Краткое содержание вопросов:

1. Решение систем линейных неравенств

Определение 1. Совокупность точек пространства R^n, координаты которых удовлетворяют уравнению $a_1x_1+ a_2x_2+\ldots+a_nx_n = b$, называется (n - 1)-мерной гиперплоскостью в n-мерном пространстве.

Теорема 1. Гиперплоскость делит все пространство на два полупространства. Полупространство является выпуклым множеством.

Пересечение конечного числа полупространств является выпуклым множеством.

<u>Теорема 2</u>. Решением линейного неравенства с n неизвестными

$a_1x_1+ a_2x_2+\ldots+a_nx_n \leq b$

является одно из полупространств, на которые все пространство делит гиперплоскость

$a_1x_1+ a_2x_2+\ldots+a_nx_n = b$.

Рассмотрим систему из m линейных неравенств с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m. \end{cases}$$

Решением каждого неравенства системы является некоторое полупространство. Решением системы будет являться пересечение всех полупространств. Это множество будет замкнутым и выпуклым.

Решение систем линейных неравенств

с двумя переменными

Пусть дана система из m линейных неравенств с двумя переменными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m. \end{cases}$$

Решением каждого неравенства будет являться одна из полуплоскостей, на которые всю плоскость разбивает соответствующая прямая. Решением системы будет являться пересечение этих полуплоскостей. Данная задача может быть решена графически на плоскости X_10X_2.

2. Представление выпуклого многогранника

Определение 1. <u>Замкнутое</u> <u>выпуклое</u> ограниченное множество в R^n, имеющее конечное число <u>угловых точек</u>, называется выпуклым n-мерным многогранником.

Определение 2. Замкнутое выпуклое неограниченное множество в R^n, имеющее конечное число угловых точек, называется выпуклой многогранной областью.

Определение 3. Множество $A \subset R^n$ называется ограниченным, если найдется n-мерный шар, содержащий это множество.

Определение 4. Выпуклой линейной комбинацией точек $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k$ называется выражение $t_1\bar{x}_1 + t_2\bar{x}_2 + \ldots + t_k\bar{x}_k$, где $t_i \geq 0$, $i=\overline{1,k}$; $\sum_{i=1}^{k} t_i = 1$.

<u>Теорема</u> (теорема о представлении выпуклого многогранника). Любую точку выпуклого многогранника можно представить в виде выпуклой линейной комбинации его угловых точек.

3. Область допустимых решений системы уравнений и неравенств.

Пусть дана система из m линейных уравнений и неравенств с n неизвестными.

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ & \ldots \\ & a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \ldots + a_{ln}x_n = b_l, \end{aligned}\right\rangle l \\ \left.\begin{aligned} & a_{l+1\,1}x_1 + a_{l+1\,2}x_2 + \ldots + a_{l+1\,n}x_n \leq b_{l+1}, \\ & \ldots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m. \end{aligned}\right\rangle m-l \end{cases}$$

Определение 1. Точка $\bar{x} \in R^n$ называется возможным решением системы, если ее координаты удовлетворяют уравнениям и неравенствам системы. Совокупность всех возможных решений называется областью возможных решений (ОВР) системы.

Определение 2. Возможное решение, координаты которого неотрицательны, называется допустимым решением системы. Множество всех допустимых решений называется областью допустимых решений (ОДР) системы.

Теорема 1. ОДР является замкнутым, выпуклым, ограниченным (или неограниченным) подмножеством вR^n.

Теорема 2. Допустимое решение системы является опорным тогда и только тогда, когда эта точка являетсяугловой точкой ОДР.

Теорема 3 (теорема о представлении ОДР). Если ОДР - ограниченное множество, то любое допустимое решение можно представить в виде выпуклой линейной комбинации угловых точек ОДР (в виде выпуклой линейной комбинации опорных решений системы).

Теорема 4 (теорема о существовании опорного решения системы). Если система имеет хотя бы одно допустимое решение (ОДР$\neq$), то среди допустимых решений существует хотя бы одно опорное решение.$\varnothing$

1.8 Лекция №8 (2 часа).

Тема: «Векторы. Действия над векторами»

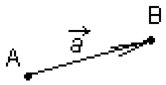
1.8.1 Вопросы лекции:

1. Действия над векторами в геометрической и координатной форме, их свойства.
2. Длина вектора.
3. Признаки коллинеарности и компланарности векторов.
4. Деление отрезка в данном отношении.

1.8.2 Краткое содержание вопросов:

1. Действия над векторами в геометрической и координатной форме, их свойства.

ОПР: *Вектором* называется направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ с начальной тачкой А и конечной точкой В, который можно перемещать параллельно самому себе.



Обозначение: $\vec{a} = \overline{AB}$

ОПР: *Длиной (модулем)* вектора $\overrightarrow{AB}$ называется число, равное длине отрезка, изображающего вектор (Обозначение: $\left|\overline{AB}\right|$ или $\left|\bar{a}\right|$).

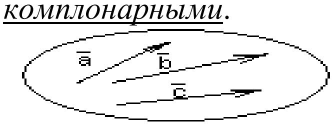
ОПР: Вектор называется *нулевым*, если его начало совпадает с концом (Обозначение: $\bar{0} = \overline{AA}$ и $\left|\bar{0}\right| = 0$).

ОПР: Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным* (Обозначение: $\bar{e}$ и $\left|\bar{e}\right| = 1$).

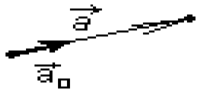
ОПР: Векторы, лежащие на одной или на параллельных прямых, называются *коллинеарными* ($\bar{a} \parallel \bar{b}$).

Замечание: Нулевой вектор $\bar{0}$ считается коллинеарным (сонаправленным) любому вектору.

ОПР: Векторы, лежащие на одной или на параллельных плоскостях, называются *компланарными*.



ОПР:Единичный вектор, одинаково направленный с вектором $\overline{a}$,называется *орт-вектором* вектора $\overline{a}$.



$\overline{a_0}$ - орт-вектор. $\left|\overline{a_0}\right| = 1$ и $\overline{a_0} \parallel \overline{a}$

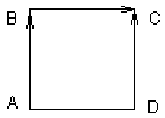
ОПР: Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются *равными*, если они коллинеарны, сонаправленны и имеют одинаковую длину.

$\overline{a} = \overline{b}$: 1) $\overline{a} \parallel \overline{b}$

2) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

3) $\left|\overline{a}\right| = \left|\overline{b}\right|$

Пример: ABCD – квадрат

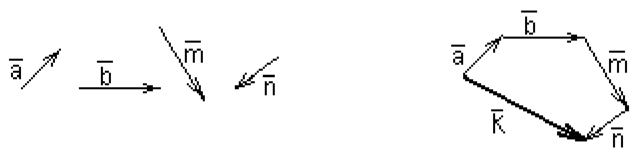


1) $\overline{AB} \neq \overline{BC}$; 2) $\overline{CD} \neq \overline{AB}$ - они противоположно направлены, но $\overline{CD} = -\overline{AB}$; 3) $\overline{DC} = \overline{AB}$

Действия над векторами:

1.ОПР: *Суммой* двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется новый вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом первого слагаемого вектора, а конец – с концом второго, при условии, что начало вектора $\overline{b}$ лежит в конце вектора $\overline{a}$.

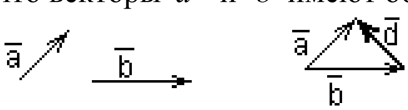
$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ - *правило треугольника*



$\vec{k} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{m} + \vec{n}$ - *правило многоугольника*

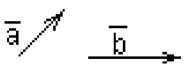
$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ - *правило параллелограмма*

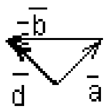
2. ОПР: *Разностью* векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется новый вектор $\vec{c}$, начало которого лежит в конце вычитаемого вектора $\overline{b}$, а конец – в конце уменьшаемого вектора $\overline{a}$, при условии, что векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ имеют общее начало.



$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$

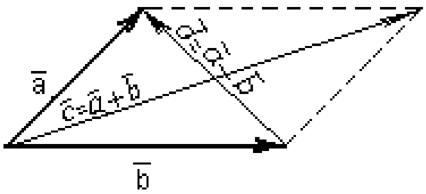
На разность векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ можно смотреть как на сумму векторов $\overline{a}$ и $-\overline{b}$:





$\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b})$

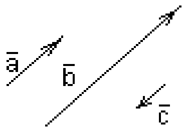
Очевидно, в параллелограмме, построенном на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, одна диагональ представляет собой вектор суммы $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, а другая – вектор разности $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$



3. <u>ОПР</u>: <u>*Произведением вектора $\overline{a}$ на число λ*</u> называется новый вектор $\overline{b}$, который удовлетворяет условиям: 1) $\overline{b} \parallel \overline{a}$, причем $\overline{b}\uparrow\uparrow\overline{a}$, если $\lambda>0$

$\overline{b}\uparrow\downarrow\overline{a}$, если $\lambda<0$.

2) $\left|\vec{b}\right| = |\lambda| \cdot \left|\vec{a}\right|$



$\vec{b} = 2 \cdot \vec{a}$ $\qquad \vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a}$

Если $|\lambda| > 1$, то вектор $\overline{a}$ «растягивается» в λ раз.

Если $|\lambda| < 1$, то вектор $\overline{a}$ «сжимается» в λ раз.

Если $\lambda=0$, то $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$

<u>ОПР</u>: <u>*Противоположным вектором*</u> $-\vec{a}$ называется произведение вектора $\overline{a}$ на число (-1), т.е. $-\vec{a}$=(-1) $\overline{a}$.

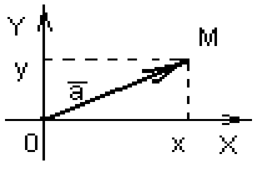
<u>*Основные свойства линейных операций над векторами:*</u>

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ $\qquad$ 3) $\lambda(\alpha\vec{a}) = (\lambda\alpha)\vec{a}$ $\qquad$ 5) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ $\qquad$ 4) $(\lambda + \alpha)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \alpha\vec{a}$

2. Длина вектора.

Перенесем вектор $\overline{a}$ параллельно самому себе так, чтобы его начало совпало с началом координат.

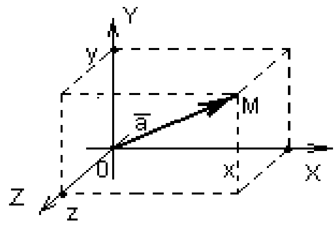


$\overline{a}$ - <u>*радиус-вектор*</u> $\qquad \vec{a} = (x; y)$ - два числа на плоскости

<u>Замечание</u>: Даны координаты начала и конца вектора $A(x_1; y_1)$ *и* $B(x_2; y_2)$. Для того, чтобы найти <u>*координаты вектора*</u>, нужно из координат конца вектора вычесть координаты начала.

$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$

ОПР: *Координатами* вектора $\overline{a}$ называются координаты конечной точки его радиус-вектора.



$\vec{a} = (x; y; z)$ - три числа в пространстве

В соответствии с данными определениями, нетрудно показать, что для векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ *и* $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, то $\vec{c} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$

$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, то $\vec{d} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$

$\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$, то $\vec{b} = (\lambda \cdot x_1; \lambda \cdot y_1; \lambda \cdot z_1)$

На рисунке видно, что длину вектора можно найти по теореме Пифагора из ΔOMx

$$\boxed{\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{или} \quad \boxed{\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Замечание: *Расстояние между двумя точками* $A(x_1; y_1)$ *и* $B(x_2; y_2)$ можно находить как длину вектора $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. Поэтому

$$\boxed{d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

ОПР: Два вектора называются *равными*, если равны их соответствующие координаты.

3. Признаки коллинеарности и компланарности векторов.

ТЕОРЕМА *(признак коллинеарности векторов в координатной форме)*: Для того, чтобы два ненулевых вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их соответствующие координаты были пропорциональны.

$\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ $\quad \vec{a} \neq \vec{0}$

$\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ $\quad \vec{b} \neq \vec{0}$ $\quad \vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$

Доказательство: 1) необходимость: дано: $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ *и* $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ и $\overline{a} \parallel \overline{b}$

доказать: $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$

доказательство: $\overline{a} \parallel \overline{b} \quad \Rightarrow \vec{a} = \lambda \cdot \vec{b} \Rightarrow$

$(x_1; y_1; z_1) = (\lambda \cdot x_2; \lambda \cdot y_2; \lambda \cdot z_2)$

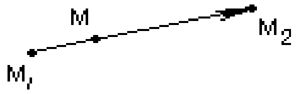
$$\begin{cases} x_1 = \lambda\, x_2 \\ y_1 = \lambda\, y_2 \\ z_1 = \lambda\, z_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x_1}{x_2} = \lambda \\ \dfrac{y_1}{y_2} = \lambda \\ \dfrac{z_1}{z_2} = \lambda \end{cases} \Rightarrow \quad \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$$

2) достаточность – самостоятельно.

ТЕОРЕМА (*признак компланарности векторов в координатной форме*): Для того, чтобы три ненулевых вектора были компланарными необходимо и достаточно, чтобы определитель 3-го порядка, составленный из координат этих векторов был равен 0.

$\vec{a} = (x_1; y_1; z_1),\quad \vec{b} = (x_2; y_2; z_2),\quad \vec{c}(x_3; y_3; z_3):\qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$

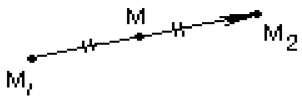
4. Деление отрезка в данном отношении.



Пусть $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и точка $M(x; y; z) \in [M_1M_2]$- внутренняя точка, причем $\dfrac{|M_1M|}{|MM_2|} = \lambda \quad (\lambda \neq 0)$ - точка М делит отрезок $[M_1M_2]$ в отношении λ. Тогда координаты точки М определяются формулами:

$$\boxed{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda};\quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda};\quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}}$$

Следствие:



Если М-середина отрезка $[M_1M_2]$, то $\dfrac{|M_1M|}{|MM_2|} = \dfrac{|M_1M|}{|M_1M|} = \lambda = 1$, то

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2};\quad y = \frac{y_1 + y_2}{2};\quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}}$$ -координаты середины отрезка.

1.9 Лекция №9 (2 часа).

Тема: «Скалярное произведение векторов**»**

1.9.1 Вопросы лекции:

1. Скалярное произведение векторов
2. Проекция вектора на ось, ее свойства

1.9.2 Краткое содержание вопросов:

1. Скалярное произведение векторов.

ОПР: *Скалярным произведением* $\vec{a} \cdot \vec{b}$ *двух векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ называется число , равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними

$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a};\hat{\ } \vec{b})}$ - в геометрической форме.

Запишем скалярное произведение в координатной форме:

Рассмотрим ΔABD: пусть $\vec{a} = (x_1; y_1)$ *и* $\vec{b} = (x_2; y_2)$, $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$

$|\vec{d}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a};\hat{\ } \vec{b})$ - теорема косинусов.

$$\Rightarrow \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos(\vec{a};^\wedge \vec{b}) = \frac{1}{2}(\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{d}\right|^2)$$, причем

$\left|\vec{a}\right|^2 = x_1^2 + y_1^2$, $\left|\vec{b}\right|^2 = x_2^2 + y_2^2$, $\left|\vec{d}\right|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

тогда: (вывод самостоятельно)

$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}$ - в координатной форме.

ОПР: *Скалярное произведение* двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.

Следствие: Угол между векторами определяется по формуле:

$\boxed{\cos(\vec{a};^\wedge \vec{b}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}}$ - геометрической форме $\boxed{\cos(\vec{a};^\wedge \vec{b}) = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}}$ - в координатной форме.

Замечание: Данные формулы справедливы и для векторов в пространстве.

Пример: Дано: $\vec{a} = (2;-1;-2)$, $\vec{b} = (8;-4;0)$

Найти: а) $\vec{c} = 2\vec{a}$; $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$; б) $\left|\vec{c}\right|$, $\left|\vec{d}\right|$ в) $\vec{c} \cdot \vec{d}$ г) $(\vec{c};^\wedge \vec{d})$

Решение:

а) $\vec{c} = 2\vec{a} = (4;-2;-4)$; $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a} = (8;-4;0) - (2;-1;-2) = (6;-3;2)$

б) $\left|\vec{c}\right| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = 6$, $\left|\vec{d}\right| = \sqrt{36 + 9 + 4} = 7$

в) $\vec{c} \cdot \vec{d} = 4 \cdot 6 + (-2)(-3) + (-4)2 = 22$

г) $\cos(\vec{c};^\wedge \vec{d}) = \dfrac{22}{6 \cdot 7} \approx 0{,}52 \Rightarrow$ $(\vec{c};^\wedge \vec{d}) = \arccos 0{,}52 \approx 58^0$

Свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ - переместительный закон умножения.

2) $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$ - сочетательный закон относительно числового множителя.

3) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ - распределительное свойство относительно суммы.

Свойства 1-3 дают право при умножении векторов переставлять сомножители и объединять числовые коэффициенты векторных сомножителей.

4) $\vec{a} \cdot \vec{a} = (\vec{a})^2 = \left|\vec{a}\right|^2$ - скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

Доказательство: $\vec{a} \cdot \vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{a}\right| \cos(\vec{a};^\wedge \vec{a}) = \left|\vec{a}\right|^2 \cos 0 = \left|\vec{a}\right|^2$

если $\vec{a} \neq 0$, $\vec{b} \neq 0$ *и* $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ $\Leftrightarrow$ $\vec{a}$ перпендикулярен $\vec{b}$

Доказательство: 1) необходимость: дано: $\vec{a} \neq 0$, $\vec{b} \neq 0$ *и* $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

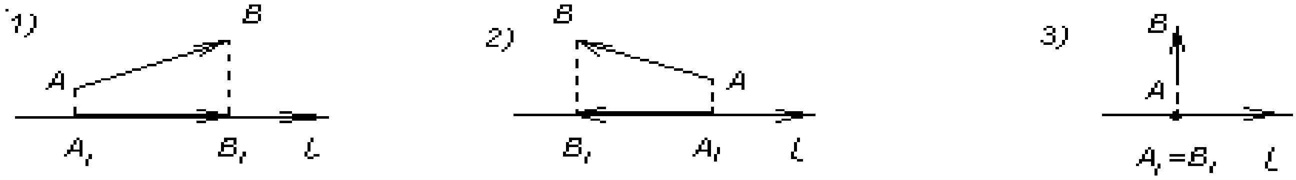
доказать: $\vec{a}$ перпендикулярен $\vec{b}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos(\vec{a};^\wedge \vec{b}) = 0$, причем $\left|\vec{a}\right| \neq 0$, $\left|\vec{b}\right| \neq 0$ $\Rightarrow$ $\cos(\vec{a};^\wedge \vec{b}) = 0 \Rightarrow$ $\vec{a}$ перпендикулярен $\vec{b}$

2) достаточность: самостоятельно.

2. Проекция вектора на ось, ее свойства.

Рассмотрим ось l на плоскости.



Геометрическая проекция $\overrightarrow{AB}$ на ось l (фигура):

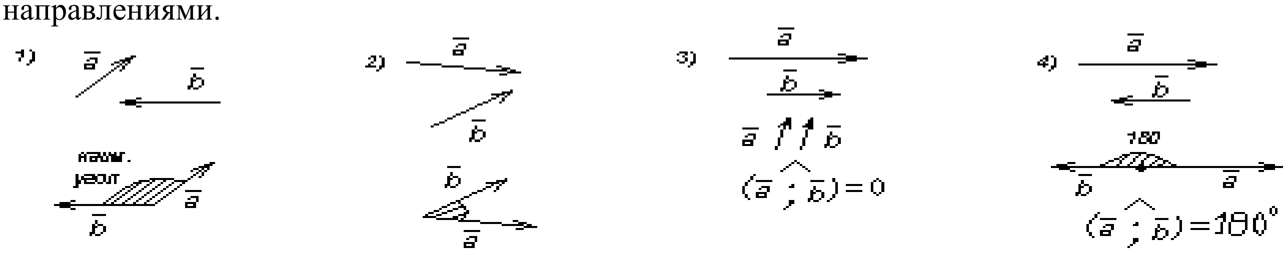
1) $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\uparrow l$ 2) $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\downarrow l$ 3) точка

Алгебраическая проекция $\overrightarrow{AB}$ на ось l (число):

1) $+\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$ 2) $-\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$ 3) 0

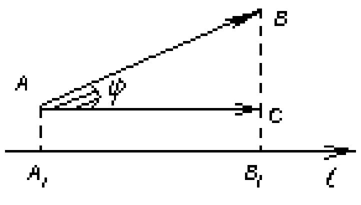
<u>ОПР:</u> <u>*Алгебраической проекцией*</u> (проекцией) вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется положительное число, совпадающее с длиной вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\uparrow l$ (одинаково направлены); отрицательное число, совпадающее с длиной вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$, если $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\downarrow l$; 0- если $\overrightarrow{AB}$ перпендикулярен l.

<u>ОПР:</u> <u>*Углом*</u> между двумя векторами называется наименьший угол между их направлениями.



<u>*Свойства проекции:*</u>

1) Пусть $(\overrightarrow{AB};\hat{}\, l) = \varphi, \quad 0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$



Проекция $\overrightarrow{AB}$ на ось l равна $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$ записывается как $Пр_l\,\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$

Рассмотрим ΔABC - прямоугольный: $\cos\varphi = \dfrac{\left|\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| \Rightarrow \boxed{Пр_l\,\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\varphi}$

Данная формула справедлива и для $\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ - доказательство самостоятельно.

<u>Замечание:</u> $\cos(\vec{a};\hat{}\,\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \Rightarrow Пр_{\vec{b}}\,\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} \Rightarrow \boxed{Пр_{\vec{b}}\,\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}}$ -<u>*проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$*</u>

2) $Пр_l(\vec{a}+\vec{b}) = Пр_l\,\vec{a} + Пр_l\,\vec{b}$, $\quad Пр_l(\vec{a}-\vec{b}) = Пр_l\,\vec{a} - Пр_l\,\vec{b}$

3) $Пр_l\,\lambda\cdot\vec{a} = \lambda\cdot Пр_l\,\vec{a}$

1.10 Лекция №10 (2 часа).
Тема: «Векторное и смешанное произведение векторов**»**

1.10.1 Вопросы лекции:
1. Понятие векторного произведения векторов
2. Свойства векторного произведения векторов.
3. Выражение векторного произведения в декартовых координатах.
4. Правые и левые тройки векторов.
5. Смешанное произведение векторов

1.10.2 Краткое содержание вопросов:
1. Понятие векторного произведения векторов
Определение. Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, обозначаемый символом $\vec{c}=\left[\vec{a}\vec{b}\right]$ и удовлетворяющий следующим трём требованиям:
1) длина вектора $\vec{c}$ равна произведению длин векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на синус угла φ между ними, то есть
$$\left|\vec{c}\right|=\left|\left[\vec{a}\vec{b}\right]\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi;$$
2) вектор $\vec{c}$ ортогонален к каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
3) вектор $\vec{c}$ направлен так, что тройка векторов $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ является правой.
Для решения большинства типичных задач на векторное произведение векторов достаточно знать первое из перечисленных требований и относящуюся к нему формулу. Поэтому вскоре и перейдём к примерам решения задач. Но требование ортогональности и понимание сути правых и левых троек векторов могут потребоваться при ответе на теретические вопросы, так что этих вопросов коснёмся, но в завершении изучения векторного произведения векторов, перед параграфом о смешанном произведении.

2. Свойства векторного произведения векторов
Геометрические свойства
Теорема 1. Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов является равенство нулю векторного произведения этих векторов.

Теорема 2. Длина (или модуль) векторного произведения векторов $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$ равна площади *S* параллелограмма, построенного на приведённых к общему началу векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
Следствие. Площадь треугольника, построенного на приведённых к общему началу векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна половине длины векторного произведения этих векторов.
Алгебраические свойства
1. $\left[\vec{a}\vec{b}\right]=-\left[\vec{b}\vec{a}\right]$ (свойство антиперестановочности сомножителей);
2. $\left[\left(\alpha\vec{a}\right)\vec{b}\right]=\alpha\left[\vec{a}\vec{b}\right]$ (сочетательное относительно числового множителя свойство);
3. $\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\vec{c}\right]=\left[\vec{a}\vec{c}\right]+\left[\vec{b}\vec{c}\right]$ (распределительное относительно суммы векторов свойство);
4. $\left[\vec{a}\vec{a}\right]=0$ для любого вектора $\vec{a}$.

3. Выражение векторного произведения в декартовых координатах
Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определены своими **<u>декартовыми прямоугольными координатами</u>**

$\vec{a} = \left(x_1; \;\; y_1; \;\; z_1 \right)$, $\vec{b} = \left(x_2; \;\; y_2; \;\; z_2 \right)$,

то векторное произведение этих векторов имеет вид

$$\left[\vec{a}\vec{b} \right] = \left(y_1 z_2 - y_2 z_1; \;\; z_1 x_2 - z_2 x_1; \;\; x_1 y_2 - x_2 y_1 \right) \qquad (1).$$

Для запоминания этой формулы удобно использовать определитель и переписать формулу в виде

$$\left[\vec{a}\vec{b} \right] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Раскрывая определитель по элементам первой строки, получим **разложение вектора** $\left[\vec{a}\vec{b} \right]$ по базису *i*, *j*, *k*, эквивалентное (1).

4. Правые и левые тройки векторов

Для того, чтобы получить векторное произведение двух векторов, необходимо, чтобы:

1) векторы были не коллинеарны;

2) векторы были взяты в определённом порядке.

Определённый порядок связан с понятием упорядоченных троек векторов. В этой тройке два вектора - перемножаемые векторы, а третий - векторное произведение этих векторов.

Определение 1. Три вектора называются упорядоченной тройкой (или просто тройкой), если указано, какой из этих векторов является первым, какой - вторым и какой - третьим.

При записи тройки векторов мы всегда будем располагать эти векторы в порядке их следования. Так, запись $\vec{b}\vec{a}\vec{c}$ означает, что первым элементом тройки является вектор $\vec{b}$, вторым - вектор $\vec{a}$ и третьим - вектор $\vec{c}$.

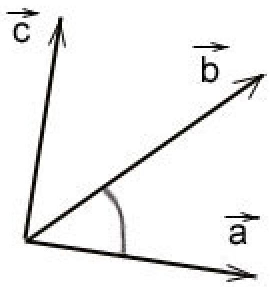


Рис. 1

Определение 2. Тройка некомпланарных векторов $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ называется правой (левой), если выполнено одно из следующих трёх условий:

1. если, будучи приведены к общему началу, эти векторы располагаются так, как могут быть расположены соответственно большой, несогнутый указательный и средний пальцы правой (левой) руки;

2. если после приведения к общему началу вектор $\vec{c}$ располагается по ту сторону от плоскости, определяемой векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, откуда кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ представляется совершающимся против часовой стрелки (по часовой стрелке);

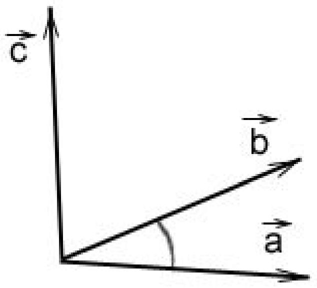


Рис. 2

3. если, находясь внутри телесного угла, образованного приведёнными к общему началу векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, мы видим поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ и от него к $\vec{c}$ совершающимсяпротив часовой стрелки (по часовой стрелке).

Условия 1, 2 и 3 эквивалентны между собой. С помощью каждого из приведённых условий можно убедиться в том, что тройка $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, изображённая на рис. 1, является правой, а тройка $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, изображённая на рис. 2, является левой.

Замечание. Понятие правой и левой тройки теряет смысл для компланарных векторов.

Если две тройки векторов либо обе являются правыми, либо обе являются левыми, то принято считать, что эти тройки одной ориентации. В противном случае - две тройки противоположной ориентации.

Всего из трёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ можно составить следующие шесть троек:

$\vec{a}\vec{b}\vec{c}$; $\vec{b}\vec{c}\vec{a}$; $\vec{c}\vec{a}\vec{b}$ (1)

$\vec{b}\vec{a}\vec{c}$; $\vec{a}\vec{c}\vec{b}$; $\vec{c}\vec{b}\vec{a}$ (2)

С помощью условия 3 определения 2 легко проверить, что все три тройки (1) той же ориентации, что и тройка $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, а все три тройки (2) имеют ориентацию, противоположную $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Определение 3. Аффинная или декартова система координат называется правой(левой), если три базисных вектора образуют правую (левую) тройку.

5. Смешанное произведение векторов

Определение. Пусть даны три произвольных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Если вектор $\vec{a}$ векторно умножается на вектор $\vec{b}$, а затем получившийся при этом вектор $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$ скалярно умножается на вектор $\vec{c}$, то в результате получается число $\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}$, называемое смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Геометрический смысл смешанного произведения

Теорема 3. Смешанное произведение $\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}$ равно объёму параллелепипеда, построенного на приведённых к общему началу векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, взятому со знаком плюс, если тройка $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ правая, и со знаком минус, если тройка $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ левая. Если же векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, то $\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}$ равно нулю.

Следствие 1. Справедливо равенство $\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}=\vec{a}\left[\vec{b}\vec{c}\right]$.

Следствие 2. Необходимым и достаточным условием компланарности трёх векторов является равенство нулю их смешанного произведения.

Следствие 3. Смешанное произведение трёх векторов, два из которых совпадают, равно нулю.

Выражение смешанного произведения в декартовых координатах

Теорема 4. Если три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ определены своими декартовыми прямоугольными координатами
$\vec{a}=(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\vec{b}=(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $\vec{c}=(x_3;\ y_3;\ z_3)$,

то смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$
равно определителю, строки которого соответственно равны координатам перемножаемых векторов, т.е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Следствие. Необходимым и достаточным условием компланарности трёх векторов $\vec{a}=(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\vec{b}=(x_2;\ y_2;\ z_2)$ и $\vec{c}=(x_3;\ y_3;\ z_3)$ является равенство нулю определителя, строками которого служат координаты этих векторов, то есть равенство

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0.$$

1.11 Лекция №11 (2 часа).

Тема: «Базис векторного пространства»

1.11.1 Вопросы лекции:

1. Простейшие свойства.
2. Линейные отображения. Операции над линейными отображениями.
3. Матрица линейного отображения.
4. Линейные комбинации. Линейная оболочка. Линейная зависимость системы векторов.
5. Базис и размерность линейных пространств.

1.11.2 Краткое содержание вопросов:

1. Простейшие свойства.

Пусть *M* —множество элементов произвольной природы, для которых определены операции сложения и умножения на действительное число:

паре элементов множества $x\in M,\ y\in M$ отвечает элемент $x+y\in M$, называемый суммой *x* и *y*;

паре $x,\alpha,\ x\in M,\ \alpha\in R$, α— любое действительное число, отвечает элемент $\alpha x\in M$, называемый произведением числа α и элемента *x*.

Будем называть множество *M* *линейным пространством,* если для всех его элементов определены операции сложения и умножения на действительное число и для любых элементов $x,y,z\in M$ и произвольных чисел α,β справедливо:

1. $x+y=y+x$, сложение коммутативно;
2. $x+(y+z)=(x+y)+z$,сложение ассоциативно;
3. существует единственный нулевой элемент $\Theta\in M$ такой, что $x+\Theta=x,\quad \forall x\in M$;

4. для каждого элемента существует единственный противоположный элемент -*x* такой, что $x+(-x)=\Theta, \quad \forall x \in M$,
5. $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$, умножение на число ассоциативно;
6. $1\cdot x = x, \ \forall x \in M$;
7. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$, умножение на число дистрибутивно относительно сложения элементов;
8. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta y$, умножение вектора на число дистрибутивно относительно сложения чисел.

Равенства 1—8 называют *аксиомами линейного пространства*.
Линейное пространство часто называют *векторным* пространством*,* а его элементы — *векторами.* Такое название, как будет показано в последующих лекциях, не случайно.

Некоторые свойства линейных пространств

Утверждение 1. В произвольном линейном пространстве нулевой элемент — единственный.
Утверждение 2. В произвольном линейном пространстве нулевой элемент равен произведению произвольного элемента на действительное число 0.
Оба утверждения доказаны на лекции.
Следующие 3 утверждения предложены в качестве **упражнений к лекциям**.
Утверждение 3. В произвольном линейном пространстве каждому элементу отвечает единственный противоположный элемент.
Утверждение 4. В произвольном линейном пространстве противоположный элемент произвольного элемента *x* равен произведению *x* на действительное число -1.
Утверждение 5. В произвольном линейном пространстве для любых двух произвольных элементов *x* и *y* существует и единственна *разность*: *x-y = x+(-1) ·y*.

2. Линейные отображения. Операции над линейными отображениями.

Линейным отображением (оператором) векторного пространства L_K над полем K в векторное пространство M_K над полем K называется отображение $f: L_K \to M_K$, удовлетворяющее условию линейности $f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$ для всех $x, y \in L_K$ и $\alpha, \beta \in K$.

3. Матрица линейного отображения.

Опред. Пусть V_1 и V_2 — конечномерные векторные пространства над полем F с базисами $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и $\{f_1, \ldots, f_m\}$ соответственно. Рассмотрим линейное отображение $\varphi\colon V_1 \to V_2$. Тогда $\varphi(e_i)$ можно представить в виде $\varphi(e_i)=\sum_{i=1}^{m} a_{ji} f_j$.

Матрица $A_\varphi = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ называется **матрицей линейного отображения** $\varphi\colon V_1 \to V_2$ в базисах $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и $\{f_1, \ldots, f_m\}$. Столбцами этой матрицы являются координаты векторов $\varphi(e_i)$ в базисе $\{f_1, \ldots, f_m\}$.

Пусть произвольный вектор $v \in V_1$ имеет следующие координаты в разложении по базису $\{e_1, \ldots, e_n\}$, $v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$, тогда его образ $\varphi(v)$ из пространства V_2 в базисе $\{f_1, \ldots, f_m\}$ имеет разложение $\varphi(v) = y_1f_1 + \ldots + y_mf_m$, где $y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k$.

То есть $$\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Существует взаимно однозначное отображение между множеством всех линейных отображений из n-мерного векторного пространства V_1 в m-мерное векторное пространство V_2 с фиксированными базисами и множеством матриц размера $m \times n$.

Матрица линейного оператора — это матрица линейного отображения в случае, когда $V_1 = V_2$.

Пример. Пусть $\{e_1, \dots, e_n\}$ — базис n-мерного векторного пространства V. Рассмотрим тождественный[3)] линейный оператор $\mathrm{id}\colon V \to V$. Так как $\mathrm{id}(e_i) = e_i$, то матрица A_{id} — это в точности единичная матрица

$$A_{\mathrm{id}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть V_1, V_2, V_3 — конечномерные векторные пространства, $\varphi : V_1 \to V_2$ и $\psi : V_2 \to V_3$ — линейные отображения. Тогда $A_{\psi\circ\varphi} = A_\psi A_\varphi$.

4. Линейные комбинации. Линейная оболочка. Линейная зависимость системы векторов.

ОПР: Вектор $\vec{b}$ называется *линейной комбинацией* векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$, если его можно представить в виде $\vec{b} = \lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + ... + \lambda_n \vec{a_n}$, где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in R$.

ОПР: Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in R$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, что $\lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + ... + \lambda_n \vec{a_n} = \vec{0}$. В противном случае, векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называются *линейно независимыми.*

ОПР: *Размерность* пространства – это максимальное число содержащихся в нем линейно независимых векторов.

ОПР: Совокупность n линейно независимых векторов n – мерного пространства называется *базисом*.

Пример: Доказать, что векторы $\vec{b}_1 = (1;1;0), \vec{b}_2 = (1;-1;1), \vec{b_3} = (-3;5;-6)$ образуют базис.

Три линейно независимых вектора трехмерного пространства образуют базис. Проверим, являются ли данные векторы линейно независимыми.

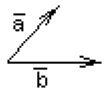
Т.е. $\lambda_1 \vec{b_1} + \lambda_2 \vec{b_2} + \lambda_3 \vec{b_3} = \vec{0}$ только тогда, когда все числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ =0.

$\lambda_1 (1;1;0) + \lambda_2 (1;-1;1) + \lambda_3 (-3;5;-6) = (0;0;0)$

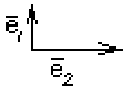
$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - 6\lambda_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$ Вектора $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$ - лин. независ. и образуют базис 3-мерного пространства.

5. Базис и размерность линейных пространств.

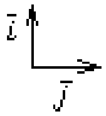
<u>ОПР:</u> Упорядоченная пара двух ненулевых, не коллинеарных векторов образует <u>*базис*</u> на плоскости.



$(\vec{a};\vec{b})$ - базис. $\bar{a} \nparallel \bar{b}$, $\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$



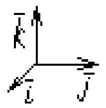
$\bar{e}_1 \perp \bar{e}_2$, $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$ - <u>*ортогональный базис*</u>.



$\left|\overrightarrow{i}\right| = \left|\overrightarrow{j}\right| = 1$, $\bar{i} \perp \bar{j}$, $(\vec{i};\vec{j})$ - <u>*ортонормированный базис*</u>. (ПДСК на плоскости)

<u>ОПР:</u> Упорядоченная система трёх ненулевых, не кокомплонарных векторов образуют <u>*базис*</u> в пространстве.

$\bar{e}_1 \perp \bar{e}_2 \perp \bar{e}_3$. $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};\overrightarrow{e_3})$ - ортогональный базис в пространстве.



$\left|\overrightarrow{i}\right| = \left|\overrightarrow{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1$, $\bar{i} \perp \bar{j} \perp \bar{k}$, $(\vec{i};\vec{j},\vec{k})$ - ортонормированный базис в пространстве.

(ПДСК в пространстве)

<u>ОПР:</u> <u>*n – мерным вектором*</u> называется упорядоченная совокупность n действительных чисел, записываемых в виде $\vec{a} = (x_1; x_2; ...; x_n)$, где x_i - *i*-ая координата вектора $\vec{a}$.

Понятие n – мерного вектора широко используется в экономике. Например, некоторый набор товаров можно охарактеризовать вектором $\vec{x} = (x_1; x_2; ...; x_n)$, а соответствующие цены – вектором $\vec{y} = (y_1; y_2; ...; y_n)$.

Сумма, разность, умножение вектора на число вводятся аналогично.

<u>*Свойства операций:*</u>

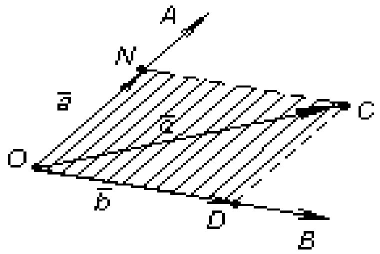
1) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ - переместительное свойство
2) $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ - сочетательное свойство
3) $\alpha \cdot (\beta\, \vec{x}) = \alpha\, \beta\, \vec{x}$, $\alpha, \beta \in R$
4) $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$ - дистрибутивное свойство
5) $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$
6) $\exists\ \ \vec{0} = (0,0,...0)$ такой, что $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$, для $\forall\ \vec{x}$
7) Для $\forall\ \vec{x}$ $\exists\ -\vec{x}$ - противоположный вектор такой, что $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$
8) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$, для $\forall\ \vec{x}$.

<u>ОПР:</u> Множество векторов с действительными координатами, в котором определены операции сложения и умножения на число, удовлетворяющие приведенным выше восьми свойствам, называется <u>*векторным пространством*</u>.

1.12 Лекция №12 (2 часа).
Тема: «Разложение вектора по базису. Переход к новому базису»

1.12.1 Вопросы лекции:
1. Разложение вектора по базису.
2. Переход к новому базису

1.12.2 Краткое содержание вопросов:
1. Разложение вектора по базису.
Рассмотрим векторы $\bar a \nparallel \bar b$, $\bar a \neq \bar 0$, $\bar b \neq \bar 0$ и вектор $\vec{\tilde n}$, причем $\vec a$; $\vec b$; $\vec c$ - комплонарные.
Построим на векторах $\vec a$; $\vec b$; $\vec c$ параллелограмм ONCD.



$$\overline{OC} = \overline{ON} + \overline{OD}$$
$$\overline{ON} \upuparrows \overline{OA} \Rightarrow \overline{ON} = \alpha \cdot \overline{OA}$$
$$\overline{OD} \upuparrows \overline{OB} \Rightarrow \overline{OD} = \beta \cdot \overline{OB}$$
$$\overline{OC} = \alpha \cdot \overline{OA} + \beta \cdot \overline{OB}$$

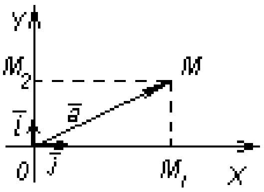
$\boxed{\bar c = \alpha \cdot \bar a + \beta \cdot \bar b}$ - <u>*линейная комбинация векторов*</u> $\vec a$ è $\vec b$

<u>ТЕОРЕМА:</u> Если вектора $\vec a$ è $\vec b$ образуют базис, то любой вектор $\vec{\tilde n}$, комплонарный с векторами $\vec a$ è $\vec b$, может быть представлен в виде линейной комбинации векторов базиса.

Равенство $\bar c = \alpha \cdot \bar a + \beta \cdot \bar b$ означает, что $\vec{\tilde n}$ разложен по базисным векторам $\vec a$ è $\vec b$, причем коэффициенты α è β - числа, которые являются координатами вектора $\vec{\tilde n}$ в базисе $(\vec a;\vec b)$.
Аналогично и для вектора в пространстве.

<u>ТЕОРЕМА:</u> Если вектора $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ образуют базис пространства, то любой вектор $\vec a$ раскладывается по ним единственным образом
$\vec a = \alpha_1 \vec{e_1} + \alpha_2 \vec{e_2} + \alpha_3 \vec{e_3}$, причем $\vec a = (\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3)$

Рассмотрим ПДСК на плоскости и вектор $\vec a(x; y)$



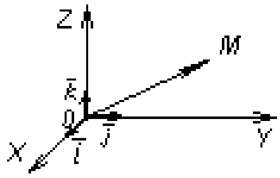
$$\overline{OM} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2}$$
$$\overline{OM_1} \upuparrows \bar i \Rightarrow \overline{OM_1} = x \cdot \bar i$$
$$\overline{OM_2} \upuparrows \bar j \Rightarrow \overline{OM_2} = y \cdot \bar j$$

$\boxed{\overline{OM} = x \cdot \bar i + y \cdot \bar j}$ - вектор $\overrightarrow{OM}$ представлен в виде линейной комбинации векторов $\vec i$ и $\vec j$

Равенство $\overline{OM} = x \cdot \bar i + y \cdot \bar j$ означает, что $\overrightarrow{OM}$ разложен по ортонормированному базису (декартову), где x и y- коэффициенты разложения являются координатами вектора $\overrightarrow{OM}$ в этом базисе.

<u>ТЕОРЕМА:</u> Любой вектор плоскости может быть разложен по ортонормированному базису $(\vec i; \vec j)$ единственным образом.

ТЕОРЕМА: Любой вектор пространства может быть разложен по ортонормированному базису $(\vec{i};\ \vec{j},\vec{k})$ единственным образом.

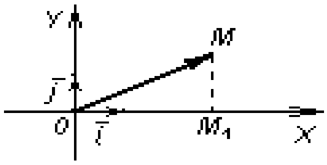


$$\overline{OM} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$$

Замечание: На плоскости и в пространстве существует бесконечное множество базисов и один и тот же вектор можно разложить по этим базисным векторам, где коэффициенты разложения будут являться координатами вектора в выбранном базисе.

Проекция вектора на оси координат.

Рассмотрим ПДСК. Любой вектор $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$, где $(\vec{i};\ \vec{j})$ - ортонормированный базис.



$\text{Ïð}_{ox}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1}$ - геометрически

$\text{Ïð}_{ox}\overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OM_1}\right|$ - алгебраически

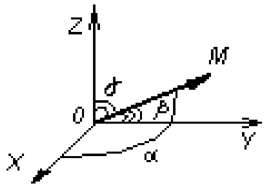
$$\text{Ïð}_{ox}\overrightarrow{OM} = \text{Ïð}_{ox}(x\,\vec{i} + y\,\vec{j}) = x\ \text{Ïð}_{ox}\vec{i} + y\ \underbrace{\text{Ïð}_{ox}\vec{j}}_{=0} = \begin{cases} x\vec{i} - \text{ãåîì. ïðîåêöèÿ},\ \text{ò.ê.}\ |\vec{i}| = 1 \\ x - \text{àëã. ïðîåêöèÿ} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Ïð}_{OX}\overrightarrow{OM} = x \quad \text{и} \quad \text{Ïð}_{OY}\overrightarrow{OM} = y}$$

В ПДСК координаты вектора равны его алгебраическим проекциям на оси координат.

Направляющие косинусы вектора.

Направление вектора определяется значением косинусов углов, которые образует вектор с координатными осями.



$$\left.\begin{array}{ll} (\overline{OM};\hat{}\,OX) = \alpha & \cos\alpha \\ (\overline{OM};\hat{}\,OY) = \beta & \cos\beta \\ (\overline{OM};\hat{}\,OZ) = \gamma & \cos\gamma \end{array}\right\}\ \text{направляющие косинусы.}$$

$$Пр_{OX}\overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OM}\right|\cos\alpha \quad \Rightarrow \cos\alpha = \frac{Пр_{OX}\overrightarrow{OM}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

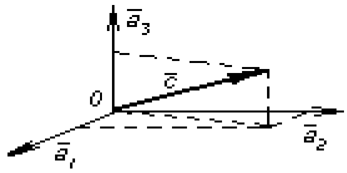
$$Пр_{OY}\overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OM}\right|\cos\beta \quad \Rightarrow \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

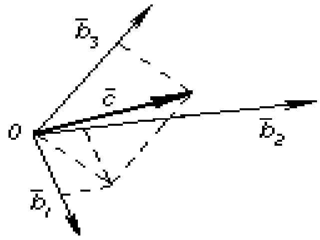
$$Пр_{OZ}\overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OM}\right|\cos\gamma \quad \Rightarrow \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1}$ - основное свойство направляющих косинусов: сумма квадратов направляющих косинусов равна 1.

2. Переход к новому базису.

Пусть в пространстве R имеются два базиса: старый $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ и новый $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$





Один и тот же вектор $\vec{c}$ имеет различные координаты в различных базисах.

Пусть в старом базисе $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ вектор $\vec{c} = (c_1; c_2; c_3)$. Найдем координаты вектора $\vec{c}$ в новом базисе $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$.

Пусть $\vec{b_1} = (b_{11}; b_{12}; b_{13})$, $\vec{b_2} = (b_{21}; b_{22}; b_{23})$, $\vec{b_3} = (b_{31}; b_{32}; b_{33})$. Обозначим неизвестные координаты вектора $\vec{c} = (x; y; z)$ относительно нового базиса $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$.

Разложим вектор $\vec{c}$ по векторам базиса $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$:

$$\vec{n} = x \cdot \vec{b_1} + y \cdot \vec{b_2} + z \cdot \vec{b_3}$$

$$(c_1; c_2; c_3) = x \cdot (b_{11}; b_{12}; b_{13}) + y \cdot (b_{21}; b_{22}; b_{23}) + z \cdot (b_{31}; b_{32}; b_{33})$$

$$\begin{cases} b_{11}x + b_{12}y + b_{13}z = c_1 \\ b_{21}x + b_{22}y + b_{23}z = c_2 \\ b_{31}x + b_{32}y + b_{33}z = c_3 \end{cases}$$ Решая систему трех уравнений с тремя неизвестными x, y, z, найдем искомые координаты.

<u>Пример:</u> Продолжение. Вектор $\vec{n} = (4; -4; 5)$ задан в базисе $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Найти координаты вектора $\vec{c}$ в базисе $\vec{b_1} = (1;1;0)$, $\vec{b_2} = (1;-1;1)$, $\vec{b_3} = (-3;5;-6)$.

Решение: 1) $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$ - базис.

2) $\vec{c} = (x; y; z)_{\{\vec{b}\}}$, тогда $\vec{n} = x \cdot \vec{b_1} + y \cdot \vec{b_2} + z \cdot \vec{b_3}$

$$(4; -4; 5) = x(1;1;0) + y(1;-1;1) + z(-3;5;-6)$$

$$\begin{cases} x + y - 3z = 4 \\ x - y + 5z = -4 \\ y - 6z = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0{,}5 \\ y = 2 \\ z = -0{,}5 \end{cases}$$ $\vec{n} = 0{,}5 \cdot \vec{b_1} + 2 \cdot \vec{b_2} - 0{,}5 \cdot \vec{b_3}$ - разложение по векторам базиса.

$\vec{c} = (0{,}5; 2; -0{,}5)_{\{\vec{b}\}}$ - координаты вектора в новом базисе.

1.13 Лекция №13 (2 часа).

Тема: «Уравнение прямой линии на плоскости. Способы задания прямой»

1.13.1 Вопросы лекции:

1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
2. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с угловым коэффициентом.
3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.
4. Уравнение прямой в отрезках.
5. Угол между двумя прямыми.
6. Условие параллельности и перпендикулярности прямых.

1.13.2 Краткое содержание вопросов:

1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

В аналитической геометрии геометрические образы (точка, прямая, кривые, поверхности) и их расположение на плоскости и в пространстве изучается аналитически, т.е. методом алгебры. В аналитической геометрии это стало возможно с того времени, как впервые французский математик Рене Декарт (1596-1650) ввел в понятие ПДСК. С её помощью стало возможно изобразить пространство в виде осей (x, y, z). Всякий геометрический образ рассматривается как множество точек, обладающих некоторым, присущим только им свойством. Эти свойства выражаются уравнениями и неравенствами.

ОПР: *Уравнением*, соответствующим данному множеству точек на плоскости или в пространстве, называется равенство, которому удовлетворяют координаты точек этого множества и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих этому множеству.

Любую линию можно выразить уравнением, но не всякое уравнение выражает линию.

$x^2 + y^2 = 0$ - этому уравнению соответствует точка (0;0).

$x^2 + y^2 + 3 = 0$

Чтобы убедиться лежит ли точка $M(a;b)$ на данной линии, нужно проверить удовлетворяют ли координаты этой точки данному уравнению.

Уравнение прямой линии на плоскости

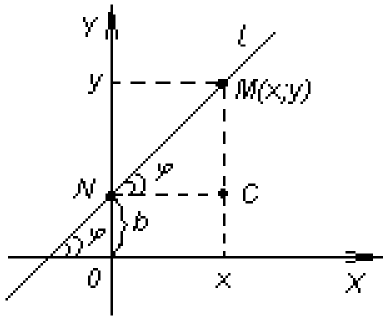
В общем случае уравнение линии может быть записано в виде $F(x,y) = 0$ или $y = f(x)$, где $F(x,y)$ и $f(x)$ - некоторые функции. Если точка $M(x;y)$ перемещается по линии, то её координаты изменяясь, удовлетворяют уравнению этой линии. Поэтому координаты точки М называют *текущими координатами*.

ОПР: Уравнение $F(x,y) = 0$ называется *уравнением прямой линии*, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на прямой, и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой прямой.

ОПР: *Углом наклона* прямой l к оси X называется угол между этой прямой и положительным направлением оси X.

ОПР: Угловым коэффициентом прямой l называется тангенс угла наклона между прямой и положительным направлением оси X.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом



$(\widehat{l;OX}) = \varphi$, $M(x;y) \in l$

$NC = x$

$MC = y - b$

$\triangle MNC$ – прямоугольный: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{MC}{NC} = \dfrac{y-b}{x}$

$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y-b}{x}$ $\dfrac{y-b}{x} = k$

$\boxed{y = k \cdot x + b}$ (1)

2. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с угловым коэффициентом

Пусть прямая l проходит через точку $M_1(x_1;y_1)$.

Подставим координаты точки M_1 в уравнение (1): $y_1 = kx_1 + b \Rightarrow b = y_1 - kx_1$

Подставим найденное b в уравнение (1): $y = kx + y_1 - kx_1 \Rightarrow$ $\boxed{y - y_1 = k(x - x_1)}$ (2)

3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

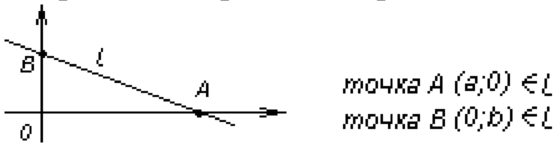
Пусть $M_1(x_1;y_1) \in l$ и $M_2(x_2;y_2) \in l$. Подставим в уравнение (2) координаты точки M_2:

$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1) \Rightarrow$ $\boxed{k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$ (3) – *формула углового коэффициента*

Подставим (3) в (2):

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}} \; (4)$$

4. Уравнение прямой в отрезках

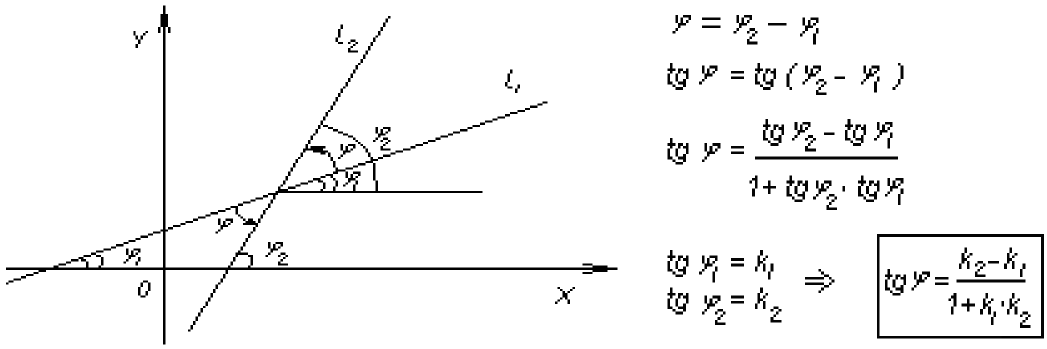


Т.е. прямая проходит через две точки. Подставим их координаты в уравнение (4):

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a} \quad\Rightarrow\quad \frac{y}{b}=\frac{x-a}{-a} \quad\Rightarrow\quad \frac{y}{b}=-\frac{x}{a}+1 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1} \; (5)$$

5. Угол между двумя прямыми

Дано: $\begin{matrix} l_1: & y=k_1x+b_1 \\ l_2: & y=k_2x+b_2 \end{matrix}$



(6)

ОПР: *Углом между двумя прямыми* называется угол поворота одной прямой по отношению к другой против хода часовой стрелки.

$$\varphi = arctg\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$$

6. Условие параллельности и перпендикулярности прямых

- Если $l_1 \parallel l_2$, то $\varphi=0$

$$tg0^0=0 \quad\Rightarrow \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=0 \quad\Rightarrow\quad k_2-k_1=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{k_1=k_2} \; (7)$$

Если прямые параллельны, то их угловые коэффициенты равны.

Обратное утверждение тоже справедливо:

Если $k_2=k_1$, то $k_2-k_1=0 \quad\Rightarrow\quad \varphi=0$

- Если $l_1 \perp l_2$, то $\varphi=90^0$ $\quad tg90^0$ - не существует. Рассмотрим $ctg90^0=0$

$$ctg\varphi=\frac{1}{tg\varphi} \qquad ctg90^0=\frac{1}{\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}}=\frac{1+k_1k_2}{k_2-k_1}=0 \quad\Rightarrow\quad 1+k_1k_2=0$$

$\boxed{k_1k_2=-1}$ (8) –*Если прямые перпендикулярны, то произведение их угловых коэффициентов равно -1.*

$\boxed{k_2=-\frac{1}{k_1}}$ (8’) - *Если прямые перпендикулярны, то их угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку.*

Обратное утверждение тоже справедливо.

<u>Пример:</u> Определить какие из данных прямых $l_1: x - y + 1 = 0$, $l_2: 2y = 2x + 10$, $l_3: y = -x$ параллельны, перпендикулярны, пересекаются.

1.14 Лекция №14 (2 часа).

Тема: «Общее уравнение прямой, его частные случаи»

1.14.1 Вопросы лекции:

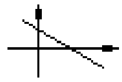
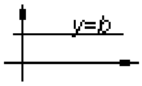
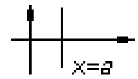
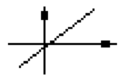
1. Общее уравнение прямой, его частные случаи.
2. Расстояние от точки до прямой.
3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с нормальным вектором.
4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с направляющим вектором.
5. Задачи по теме прямая линия на плоскости.

1.14.2 Краткое содержание вопросов:

1. Общее уравнение прямой, его частные случаи

<u>ТЕОРЕМА:</u> В ПДСК любая прямая задается уравнением первой степени $\boxed{Ax + By + C = 0}$ (9), где $A \neq 0$ или $B \neq 0$.

Обратное утверждение тоже верно, т.е. уравнение (9) при произвольных коэффициентах *A, B и C* ($A \neq 0$ или $B \neq 0$) определяет некоторую прямую в ПДСК.

Общее уравнение прямой	Уравнение прямой с угловым коэффициентом	Расположение прямой на плоскости
1) $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$ $Ax + By + C = 0$	$y = kx + b$	$L \cap OX$ и $L \cap OY$ 
2) $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$ $By + C = 0$	$y = -\frac{C}{B}$; $y = b$	$L \parallel OX$ 
3) $A \neq 0, B = 0, C \neq 0$ $Ax + C = 0$	$x = -\frac{C}{A}$; $x = a$	$L \parallel OY$ 
4) $A \neq 0, B \neq 0, C = 0$ $Ax + By = 0$	$y = -\frac{A}{B}x$; $y = k \cdot x$	$O(0;0) \in L$ – проходит через начало координат. 
5) $A = 0, B \neq 0, C = 0$ $By = 0$; $y = 0$	$y = 0$	ось ОХ
6) $A \neq 0, B = 0, C = 0$ $Ax = 0$; $x = 0$	$x = 0$	ось ОУ

$$Ax + By + C = 0$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \qquad \boxed{k = -\frac{A}{B}} \qquad \boxed{b = -\frac{C}{B}} \quad (10)$$

$$y = kx + b$$

Точка пересечения прямых

$$\begin{matrix} l_1: \\ l_2: \end{matrix} \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \quad (11)$$

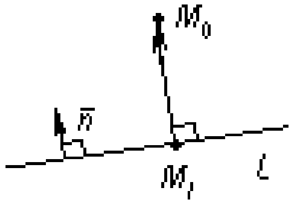
Чтобы найти точку пересечения прямых l_1 *и* l_2 нужно решить систему, составленную из уравнений этих прямых.

<u>Пример:</u> Даны координаты точек $A(1;3), B(2;-1), C(0;1), D(4;1)$. Найти точку пересечения прямых AD и BC.

2. Расстояние от точки до прямой

ОПР: Вектор $\vec{n}$, перпендикулярный к прямой l, называется *нормальным вектором* прямой l.

$l: Ax + By + C = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = (A; B)$



$M_0(x_0; y_0) \notin l$
$M_0M_1 \perp l$
$M_1 \in l$

Найти: $\left|M_1M_0\right|$

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_1M_0} : M_0(x_0; y_0)$ -по условию. Пусть $M_1(x_1; y_1)$ -не известны $\Rightarrow \overrightarrow{M_1M_0}(x_0 - x_1; y_0 - y_1)$

$l: Ax + By + C = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = (A; B)$ - нормальный вектор прямой l

$\vec{n} \parallel \overrightarrow{M_1M_0} \qquad \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M_0} = \left|\vec{n}\right| \cdot \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right| \cdot \underbrace{\cos(\vec{n};\hat{\ } \overrightarrow{M_1M_0})}_{0^0 \text{ или } 180^0}$

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M_0} = \left|\vec{n}\right| \cdot \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right| \cdot (\pm 1)$

$\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M_0}\right| = \left|\vec{n}\right| \cdot \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right| \quad \Rightarrow \quad \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right| = \dfrac{\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M_0}\right|}{\left|\vec{n}\right|}$

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M_0} = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) = Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1 = Ax_0 + By_0 + C$

$\text{т.к. } Ax_1 + By_1 + C = 0 \Rightarrow C = -Ax_1 - By_1$

$\left|\vec{n}\right| = \sqrt{A^2 + B^2}$

$\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right| = \dfrac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

$\boxed{d(M_0; l) = \dfrac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$ - расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $l: Ax + By + C = 0$

3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с нормальным вектором

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_1M_0} : M_0(x_0; y_0)$ -по условию. Пусть $M(x; y)$ принадлежит прямой и ее координаты не известны $\Rightarrow \overrightarrow{M_0M}(x - x_0; y - y_0)$

$\vec{n} = (A; B)$ - нормальный вектор прямой

Тогда

$\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$

$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$

4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с направляющим вектором

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_1M_0} : M_0(x_0; y_0)$ -по условию. Пусть $M(x; y)$ принадлежит прямой и ее координаты не известны $\Rightarrow \overrightarrow{M_0M}(x - x_0; y - y_0)$

$\vec{p} = (\alpha; \beta)$ - направляющий вектор прямой

Тогда $\vec{p} \parallel \overrightarrow{M_0M} \Leftrightarrow$ их координаты пропорциональны, получим:

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}$$

5. Задачи по теме прямая линия на плоскости

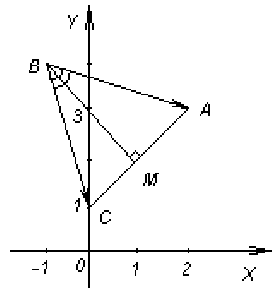
Пример: Дано: $\Delta ABC: A(2;3), B(-1;4), C(0;1)$

Требуется: 1) составить уравнение высоты, проведенной из вершины A на медиану из вершины B. Найти длину медианы.

2) найти внутренний угол B треугольника ABC.

Решение:

1) Уравнение $h_A -?$



$h_A \perp BM \Rightarrow k_{h_A}=-\frac{1}{k_{BM}}; \quad k_{BM}=\frac{y_M-y_B}{x_M-y_B}; \quad B(-1;4), \quad M(?)$

$M(1;2)-середина \quad [AC]$

$k_{BM}=\frac{2-4}{1+1}=-1 \Rightarrow \quad k_{h_A}=-\frac{1}{-1}=1$

$h_A: \quad k_{h_A}=1$ *и проходит через точку* $A(2;3) \Rightarrow$

$y-y_0=k(x-x_0)$

$y-3=1(x-2)$

$x-y+1=0-$ *уравнение высоты из вершины A на медиану из вершины B* (*если прямые перпендикулярны* $\Rightarrow k_1k_2=-1$).

В нашем случае высота совпадает со стороной Δ.

$B(-1;4), \quad M(1;2)$

$|BM|=\sqrt{(1+1)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{2}$

2) I *сп*: $\cos B=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}$

$\overrightarrow{BA}=(3;-1), \quad \overrightarrow{BC}=(1;-3)$

$|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{10}; \quad |\overrightarrow{BC}|=\sqrt{10}; \quad \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=3+3=6$

$\cos B=\frac{3}{5}$

II *сп*: $tgB=\frac{k_{AB}-k_{BC}}{1+k_{AB}k_{BC}}$

$k_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{3-4}{2+1}=-\frac{1}{3}; \quad k_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{1-4}{0+1}=-3$

$tgB=\frac{-1+9}{3\cdot 2}=\frac{4}{3}\Rightarrow \angle B=53^0$

Пример: Дано: $\Delta ABC: A(-1;2), B(5;-1), C(-4;-5)$

Найти: 1) уравнение медианы AE

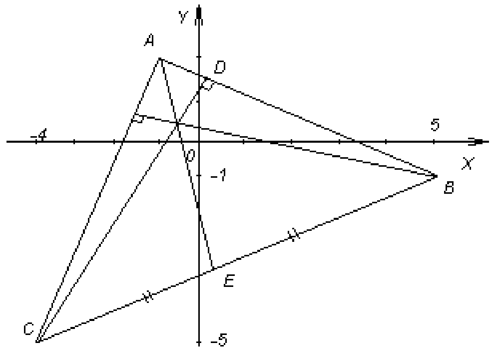
2) уравнение высоты CD

3) длину высоты CD

Решение:

1) $E-середина\,[CB], \quad E(\frac{1}{2};-3)$

$AE: \frac{x-x_A}{x_E-x_A}=\frac{y-y_A}{y_E-y_A}; \quad \frac{x+1}{0,5+1}=\frac{y-2}{-3-2}; \quad AE: 10x+3y+4=0$



2) $CD \perp AB \Rightarrow k_{CD} = -\dfrac{1}{k_{AB}}$

$k_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \quad k_{CD} = 2$

$CD: k_{CD} = 2$ *и проходит через* $C(-4;-5)$

$y - y_0 = k(x - x_0)$

$CD: 2x - y + 3 = 0$

3) Длину CD найдем как расстояние от C до AB.

$d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

AB проходит через точки A(-1;2) и B(5;-1):

$AB: x + 2y - 3 = 0$

$d = \dfrac{|-4 - 10 - 3|}{\sqrt{1+4}} = \dfrac{17}{\sqrt{5}}$

1.15 Лекция №15 (2 часа).
Тема: «Линии второго порядка»

1.15.1 Вопросы лекции:
1. Окружность. Каноническое уравнение окружности, его исследование.
2. Эллипс. Каноническое уравнение эллипса, его исследование.
3. Гипербола. Каноническое уравнение гиперболы, его исследование.
4. Парабола. Каноническое уравнение параболы, его исследование.

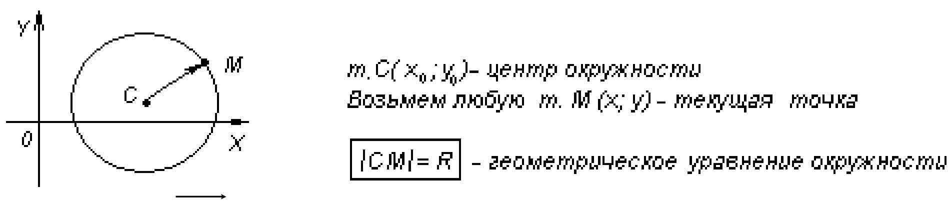
1.15.2 Краткое содержание вопросов:
1. Окружность. Каноническое уравнение окружности, его исследование

ОПР: Уравнение вида $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, где A,B,C,D,E,F- некоторые действительные числа и хотя бы одно из чисел A,B или C отлично от 0, определяет *линию второго порядка* на плоскости.

Линии второго порядка: окружность, эллипс, парабола, гипербола.

Окружность и её каноническое уравнение.

ОПР: *Окружностью* с центром в точке C и радиусом R называется множество точек плоскости M, равноудаленных от точки C на расстояние R.



Рассмотрим $\overrightarrow{CM} = (x - x_0; y - y_0)$

$|\overrightarrow{CM}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$

$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2}$ - каноническое уравнение окружности с центром в точке $C(x_0; y_0)$ и радиусом R.

Пример: $(x-1)^2+(y+3)^2=25$ - уравнение окружности с центром в точке $C(1;-3)$ и радиусом *R=5*.

$$x_0=1,\ y_0=-3,\ R=\sqrt{25}=5$$

$x^2+y^2-2x+6y-15=0$ - общее уравнение окружности

Пример: $x^2+y^2=3$ - окружность с центром в точке $C(0;0)$ и радиусом $R=\sqrt{3}$

$$(x-0)^2+(y-0)^2=(\sqrt{3})^2$$

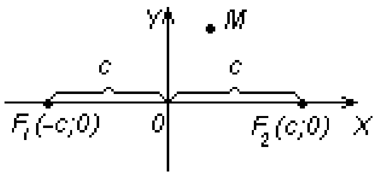
$\boxed{x^2+y^2=R^2}$ - уравнение окружности с центром в точке $C(0;0)$ и радиусом *R*.

Пример: Найти координаты центра и радиус окружности, заданной общим уравнением $x^2+y^2+6x-y-1=0$

Ответ: $\tilde{N}(-3;\frac{1}{2})$ è $R=\frac{\sqrt{41}}{2}$

2. Эллипс. Каноническое уравнение эллипса, его исследование

ОПР: *Эллипсом* называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек (называемых *фокусами*) есть величина постоянная, больше чем расстояние между фокусами.



$|MF_1|+|MF_2|=const$

$|MF_1|+|MF_2|>|F_1F_2|$

т. $M(x;y)$ - текущая точка

$|F_1F_2|=2c$ - фокусное расстояние

Обозначим *const* за *2a*, причем $a>c$

$const=2a \Rightarrow$ $\boxed{|MF_1|+|MF_2|=2a}$ - геометрическое уравнение эллипса.

$$\sqrt{(-\tilde{n}-x)^2+(0-y)^2}+\sqrt{(c-x)^2+(0-y)^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4cx \quad |:4$$

$$a^2((x-c)^2+y^2)=(a^2-xc)^2$$

$$\underline{a^2x^2}+\underline{\underline{a^2c^2}}+a^2y^2=\underline{\underline{a^4}}+\underline{c^2x^2}$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

$$a>c \Rightarrow \quad a^2-c^2\neq 0, \qquad \underline{\underline{a^2-c^2=b^2}}$$

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \quad |:a^2b^2$$

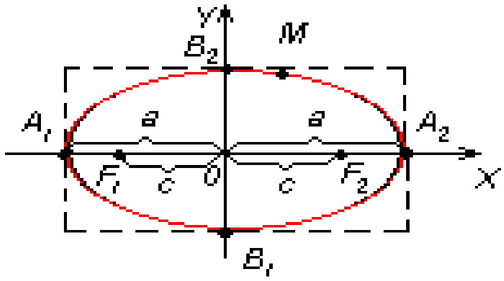
$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$ - каноническое уравнение эллипса, где $\boxed{c^2=a^2-b^2}$

Исследуем форму эллипса по его каноническому уравнению:

1) O(0;0) не принадлежит эллипсу. Т.к. в уравнение эллипса переменные входят в четной степени (x^2 и y^2), то эллипс симметричен относительно осей координат. Поэтому точка O(0;0) – центр эллипса

2) $\frac{x^2}{a^2}\geq 0$ *и* $\frac{y^2}{b^2}\geq 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}\leq 1$ *и* $\frac{y^2}{b^2}\leq 1$

$$\left.\begin{array}{l} x^2\leq a^2 \Rightarrow -a\leq x\leq a \\ y^2\leq b^2 \Rightarrow -b\leq y\leq b \end{array}\right\} \Rightarrow A_1(-a;0),\ A_2(a;0),\ B_1(0;-b),\ B_2(0;b)$$ - вершины эллипса.



Если $a > b$, то A_1A_2 – большая ось, $|A_1A_2| = 2a$

B_1B_2 – малая ось, $|B_1B_2| = 2b$

A_1O, OA_2 – большие полуоси, $|A_1O| = |OA_2| = a$

B_1O, OB_2 – малые полуоси, $|B_1O| = |OB_2| = b$

<u>ОПР:</u> <u>*Эксцентриситетом*</u> эллипса (ε) называют отношение длин полу фокусного расстояния (c) к большей полуоси (a). Эксцентриситет показывает степень деформации эллипса.

$\boxed{\varepsilon = \dfrac{c}{a}}$, $\quad \underline{\underline{0 < \varepsilon < 1}}$

<u>Пример:</u> Построить эллипс и найти его основные параметры по уравнению

$25x^2 + 16y^2 = 400 \quad | \, 400$

$\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

$a^2 = 16 \qquad |a| = 4$ – *малая полуось*

$b^2 = 25 \qquad |b| = 5$ – *большая полуось*

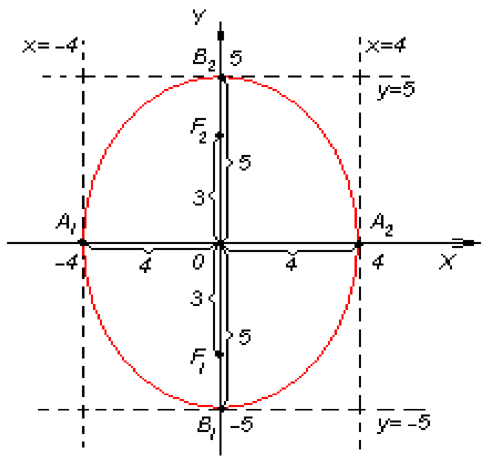
$c^2 = b^2 - a^2$, т.к. $a < b$

$c^2 = 25 - 16 = 9 \qquad |c| = 3$

$F_1(0;-3)$, $F_2(0;3)$ – *фокусы эллипса*

$A_1(-4;0)$, $A_2(0;4)$, $B_1(0;-5)$, $B_2(0;5)$ – *вершины эллипса*

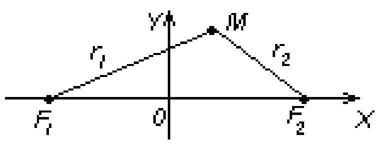
$\varepsilon = \dfrac{c}{b} \quad (a < b) \qquad \varepsilon = \dfrac{3}{5}$ – *эксцентрис итет эллипса*



3. Гипербола. Каноническое уравнение гиперболы, его исследование

<u>ОПР:</u> <u>*Гиперболой*</u> называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых <u>*фокусами*</u>, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами.

Рассмотрим ПДСК:



Пусть $F_1(-c;0)$ *и* $F_2(c;0)$ – *фокусы гиперболы*

$OF_1 = OF_2$

Рассмотрим точку $M(x;y) \in$ *гиперболе*

$|F_1F_2| = 2c$ – *фокусное расстояние*

$\big| |MF_1| - |MF_2| \big| = const$

$|MF_1| + |MF_2| < |F_1F_2|$

Обозначим $const$ *за* $2a$

$2a < 2c \qquad \underline{\underline{a < c}}$

$\boxed{\big| |MF_1| - |MF_2| \big| = 2a}$ - геометрическое уравнение гиперболы.

Числа $|F_1M|$ и $|F_2M|$ называются <u>*фокальными радиусами*</u> точки М, обозначим их r_1 и r_2.

По определению точка М принадлежит гиперболе, если $|r_1 - r_2| = 2a \Rightarrow \quad r_1 - r_2 = \pm 2a$

$$\left.\begin{matrix} M(x;y) \\ F_1(-c;0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad |F_1M| = r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}$$

$$\left.\begin{matrix} M(x;y) \\ F_2(c;0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad |F_2M| = r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a$$

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2$$

$$\pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4cx - 4a^2 \quad |:4$$

$$a^2((x-c)^2 + y^2) = c^2x^2 - 2ca^2x + a^4$$

$$\underline{a^2x^2} + \underline{\underline{a^2c^2}} + a^2y^2 = \underline{\underline{a^4}} + \underline{c^2x^2}$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

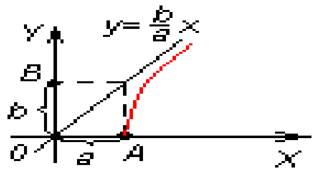
$$\underline{\underline{c^2 - a^2 = b^2}}, \quad т.к. \quad a < c \Rightarrow \quad c^2 - a^2 > 0 \Rightarrow \quad b > 0$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad |:a^2b^2$$

$\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$ - каноническое уравнение гиперболы, где $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$

Исследуем форму гиперболы в 1 четверти, т.е. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1; \qquad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2); \qquad y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}; \quad т.к. \quad y \geq 0$$



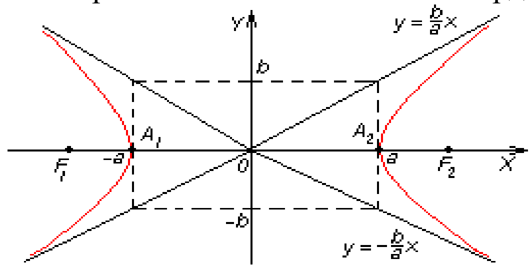
1) $x^2 - a^2 \geq 0; \qquad |x| > a; \qquad x \geq a \Rightarrow \quad 0 \leq x < a$ – точек гиперболы нет.

2) Если $x=a$, то $\quad y = \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = 0;$ точка A(a ;0) принадлежит гиперболе.

3) Если $x>a$, то $y>0$, т.е. если x возрастает, то y – возрастает и наоборот.

4) Рассмотрим уравнение $y = \dfrac{b}{a}x$ - прямая, $k = \dfrac{b}{a}$ и проходит через точку O(0;0)

Можно доказать, что гипербола, простираясь в бесконечность, неограниченно приближается к прямой $y = \dfrac{b}{a}x$, но никогда её не пересекает. Т.к. x и y входят в уравнение параболы в четной степени, то график симметричен относительно осей координат. Достроим гиперболу.



$\boxed{y = \dfrac{b}{a}x}$ и $\boxed{y = -\dfrac{b}{a}x}$ - ***асимптоты гиперболы***

$A_1(-a;0), \quad A_2(a;0)$ – вершины гиперболы

$F_1(-c;0),\quad F_2(c;0)$ – фокусы гиперболы $\boxed{c^2=a^2+b^2}$

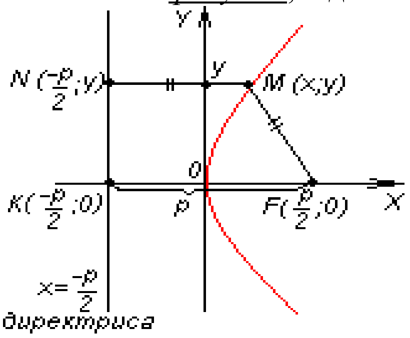
$A_1O,\quad OA_2$ – действительные полуоси, $|A_1O|=|OA_2|=a$

$B_1O,\quad OB_2$ – мнимые полуоси, $|B_1O|=|OB_2|=b$

<u>Замечание:</u> Уравнение гиперболы, асимптотами которой являются оси координат, имеет вид $\boxed{y=\dfrac{m}{x}}$, где m- некоторое действительное число.

4. Парабола. Каноническое уравнение параболы, его исследование

<u>ОПР:</u> <u>*Параболой*</u> называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой <u>*фокусом*</u>, и данной прямой, называемой <u>*директрисой*</u>.



|FK|=p

т. M(x;y) - лежит на параболе

$\Rightarrow$ $\boxed{|MN|=|MF|}$ *– геометрическое уравнение параболы*

Введем ПДСК так, чтобы ось ОХ проходила через точки К и F, а ось ОУ – через середину KF.

Тогда: $\boxed{F(\dfrac{p}{2};0)}$ - фокус $\quad K(-\dfrac{p}{2};0)\quad M(x;y),\quad N(-\dfrac{p}{2};y)$

$$\sqrt{(x+\frac{p}{2})^2+(y-y)^2}=\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+(y-0)^2}$$

$$x+\frac{p}{2}=\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}$$

$\boxed{y^2=2px}$ - каноническое уравнение параболы, где р – параметр. Заметим, <u>*p>0*</u>, т.к. р – расстояние между фокусом и директрисой $\boxed{x=-\dfrac{p}{2}}$.

Исследование формы кривой:

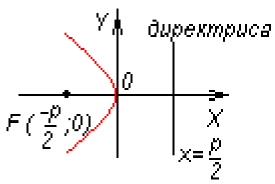
1) точка О(0;0) принадлежит параболе. $y^2\ge 0,\ p>0\Rightarrow x\ge 0\Rightarrow$ О(0;0) является вершиной параболы.

2) т.к. в уравнение параболы у входит в четной степени, то парабола симметрична относительно оси ОХ.

<u>*Частные случаи:*</u>

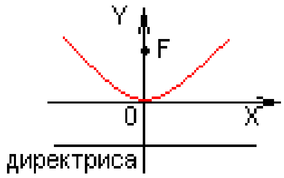
1) $y^2=-2px$ - парабола с вершиной в точке О(0;0), ветви направлены влево, симметрична относительно оси ОХ.

$F(-\dfrac{p}{2};0)$ - фокус, $\quad x=\dfrac{p}{2}$ - директриса

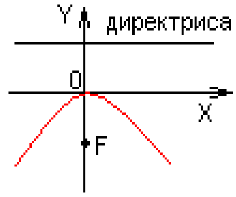


2) $x^2=2py$ - парабола с вершиной в точке О(0;0), ветви направлены вверх, симметрична относительно оси ОУ.

$F(0;\dfrac{p}{2})$ - фокус, $\quad y=-\dfrac{p}{2}$ - директриса



3) $x^2 = -2py$ - парабола с вершиной в точке O(0;0),
ветви направлены вниз, симметрична относительно оси OY.
$F(0;-\frac{p}{2})$ - фокус, $y = \frac{p}{2}$ - директриса



Замечание: Уравнения вида $(y-y_0)^2 = \pm 2p(x-x_0)$ и $(x-x_0)^2 = \pm 2p(y-y_0)$ определяют параболу с вершиной в точке $C(x_0;y_0)$.

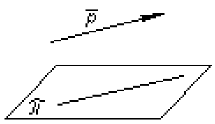
1.16 Лекция №16 (2 часа).
Тема: «Плоскость в пространстве»

1.16.1 Вопросы лекции:
1. Общее уравнение плоскости, его частные случаи.
2. Способы задания плоскости.

1.16.2 Краткое содержание вопросов:
1. Общее уравнение плоскости, его частные случаи
ОПР: *Поверхностью* в пространстве называется множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению вида: $f(x,y,z)=0$.

ТЕОРЕМА: Уравнение $Ax+By+Cz=0$, где *A, B и C* – некоторые действительные числа (не обращаются одновременно в 0), задает в пространстве поверхность.
Обратное утверждение тоже верно: Любую поверхность в пространстве можно задать уравнением вида $Ax+By+Cz=0$.

ОПР: *Направляющим вектором* $\vec{p}$ плоскости называется вектор, лежащий в этой плоскости или в плоскости, параллельной ей.



Замечание: Можно доказать, что направляющий вектор имеет координаты $\boxed{\vec{p}=(-B;A;0)}$

ТЕОРЕМА: Для того, чтобы вектор $\vec{p}=(\alpha;\beta;\gamma)$ был направляющим для плоскости $Ax+By+Cz=0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $A\alpha+B\beta+C\gamma=0$

Расположение плоскости	Условие	Общее уравнение плоскости
1) Проходит через начало координат.	$D=0$	$Ax+By+Cz=0$
2) $\pi \parallel OX$	$A=0$	$By+Cz+D=0$
3) $\pi \parallel OY$	$B=0$	$Ax+Cz+D=0$
4) $\pi \parallel OZ$	$C=0$	$Ax+By+D=0$
5) π проходит через ось OX	$A=0;\quad D=0$	$By+Cz=0$
6) π проходит через ось OУ	$B=0;\quad D=0$	$Ax+Cz=0$
7) π проходит через ось OZ	$C=0;\quad D=0$	$Ax+By=0$
8) $\pi \parallel$ плоскости XOУ	$A=0;\quad B=0$	$Cz+D=0 \quad (z=h)$
9) $\pi \parallel$ плоскости УOZ	$B=0;\quad C=0$	$Ax+D=0 \quad (x=h)$

10) $\pi \parallel$ плоскости XOZ $\quad A=0;\ \ C=0 \quad By+D=0 \quad (y=h)$

11) π совпадает с плоскостью XOY $\quad A=0;\ \ B=0;\ \ D=0 \quad Cz=0,\ \ z=0$

12) π совпадает с плоскостью YOZ $\quad B=0;\ \ C=0;\ \ D=0 \quad Ax=0,\ \ x=0$

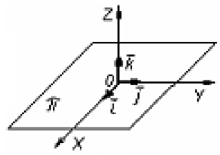
13) π совпадает с плоскостью XOZ $\quad A=0;\ \ C=0;\ \ D=0 \quad By=0,\ \ y=0$

1) Точка $O(0;0)\in\pi \Rightarrow \quad A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot 0+D=0 \Rightarrow \quad D=0$

2) $\pi \parallel OX \Rightarrow \quad \vec{i}=(1;0;0)\parallel \pi \quad \Rightarrow \quad A\cdot 1+B\cdot 0+C\cdot 0=0 \Rightarrow \quad A=0$

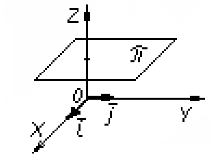
5) π проходит через ось OX $\Rightarrow \quad O(0;0;0)\in\pi \Rightarrow \quad D=0$

$\vec{i}=(1;0;0)\parallel\pi \Rightarrow \quad A=0$



8) $\pi \parallel$ плоскости XOY $\Rightarrow \quad \vec{i}=(1;0;0)\parallel\pi \Rightarrow \quad A=0$

$\vec{j}=(0;1;0)\parallel\pi \Rightarrow \quad B=0$



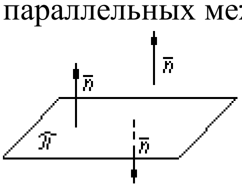
9) $\quad \pi\equiv XOY \quad \Rightarrow \quad \vec{i}=(1;0;0)\parallel\pi \quad \Rightarrow \quad A=0, \qquad \vec{j}=(0;1;0)\parallel\pi \quad \Rightarrow \quad B=0$, $O(0;0)\in\pi \Rightarrow \quad D=0$

2. Способы задания плоскости

Задание плоскости с помощью начальной точки и нормального вектора.

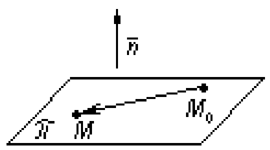
ОПР: Вектор $\vec{n}$ называется *нормальным вектором* плоскости, если он перпендикулярен этой плоскости.

Очевидно, что каждая плоскость имеет бесчисленное множество нормальных векторов, параллельных между собой.



ТЕОРЕМА: Если плоскость π задана общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, то вектор $\boxed{\vec{n}=(A;B;C)}$ является нормальным вектором плоскости π.

Рассмотрим ПДСК и в ней точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *и* $\vec{n}=(A;B;C)$. Составим уравнение плоскости, проходящей через данную точку с данным нормальным вектором.



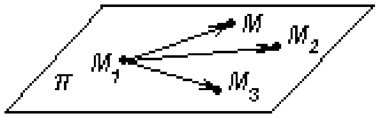
Возьмем точку $M(x;y;z)\in\pi$. Рассмотрим вектор $\overline{M_0M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$

Т.к. $\overline{M_0M}\in\pi \quad \Rightarrow \quad \vec{n} \perp \overline{M_0M} \quad \Rightarrow \quad \overline{M_0M}\cdot\vec{n}=0$

Запишем в координатной форме: $\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Составим уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$, Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x;y;z)$. Построим векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$



Тогда их координаты $\overrightarrow{M_1M}(x-x_1;y-y_1;z-z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_3}(x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1)$

Воспользуемся признаком компланарности векторов, получим:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0}$$ - уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.

Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей

- если $\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Rightarrow$ их координаты пропорциональны.

Если $\vec{n}_1 = (A_1;B_1;C_1)$ *и* $\vec{n}_2 = (A_2;B_2;C_2)$, то $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

- если $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

Расстояние от точки до плоскости

Расстояние от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ определяется по формуле:

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

1.17 Лекция №17 (2 часа).

Тема: «Прямая в пространстве»

1.17.1 Вопросы лекции:

1. Уравнение прямой в пространстве.
2. Способы задания прямой в пространстве

1.17.2 Краткое содержание вопросов:

1. Уравнение прямой в пространстве

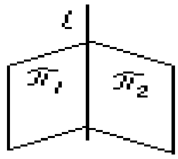
В пространстве каждая линия рассматривается как пересечение двух поверхностей. В частности, каждую прямую линию мы будем рассматривать как пересечение двух плоскостей.

2. Способы задания прямой в пространстве

1) Рассмотрим ПДСК и две плоскости: $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

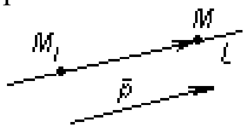
Если $\pi_1 \cap \pi_2$, то они пересекаются по прямой l. Заметим, что координаты точек, лежащих на прямой l, должны удовлетворять как первому, так и второму уравнению, поэтому:

$$\boxed{l:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}}$$ - <u>общее уравнение прямой в пространстве</u>.



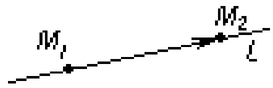
2) Для решения задач данное задание прямой не всегда удобно. Рассмотрим каноническое уравнение прямой.

Пусть дан направляющий вектор $\vec{p}=(\alpha;\beta;\gamma)\parallel l$ и точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$, принадлежащая прямой l.



Возьмем точку $M(x;y;z)\in l$. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$.

$\overrightarrow{M_0M}\parallel\vec{p}\Rightarrow$ их координаты пропорциональны. $$\boxed{\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}}$$ - <u>каноническое ур. пр</u>.



3) Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

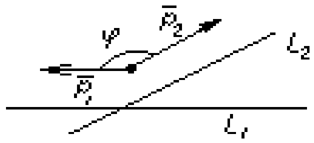
Пусть $M_1(x_1;y_1;z_1)\in l$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)\in l$. Пусть M_1 -начальная точка, $\overrightarrow{M_1M_2}$ - направляющий вектор.

$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}}$$ - <u>уравнение прямой, проходящей через две точки</u>.

4) Угол между двумя прямыми в пространстве.

$l_1:\dfrac{x-x_1}{\alpha_1}=\dfrac{y-y_1}{\beta_1}=\dfrac{z-z_1}{\gamma_1}$ и $l_2:\dfrac{x-x_2}{\alpha_2}=\dfrac{y-y_2}{\beta_2}=\dfrac{z-z_2}{\gamma_2}$



<u>ОПР:</u> <u>*Углом*</u> между двумя прямыми называется угол между их направляющими векторами.

$\vec{p}_1=(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)$ и $\vec{p}_2=(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)$ $$\boxed{\cos\varphi=\frac{\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2}{|\vec{p}_1|\cdot|\vec{p}_2|}=\frac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2}\cdot\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2}}}$$

- Условие параллельности прямых:

$l_1\parallel l_2 \Leftrightarrow \vec{p}_1\parallel\vec{p}_2\Rightarrow$ их координаты пропорциональны. $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}=\dfrac{\beta_1}{\beta_2}=\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}$

- Условие перпендикулярности прямых:

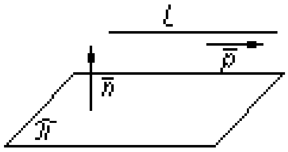
$l_1\perp l_2 \Leftrightarrow \vec{p}_1\perp\vec{p}_2\Rightarrow \vec{p}_1\cdot\vec{p}_2=0\Rightarrow \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0$.

1.18 Лекция №18 (2 часа).
Тема: «Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве»

1.18.1 Вопросы лекции:
1. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.
2. Угол между прямой и плоскостью

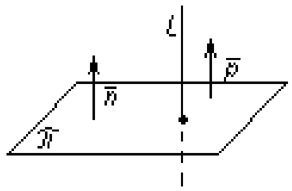
1.18.2 Краткое содержание вопросов:
1. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве
Условие параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

$l:\dfrac{x-x_0}{\alpha}=\dfrac{y-y_0}{\beta}=\dfrac{z-z_0}{\gamma}$ и $\pi: Ax+By+Cz+D=0$



$l \parallel \pi \;\Leftrightarrow\; \bar{p} \perp \bar{n} \Rightarrow$

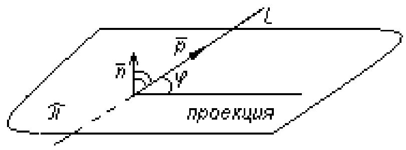
$\bar{p}\cdot\bar{n}=0,\quad \bar{p}=(\alpha;\beta;\gamma),\quad \bar{n}=(A;B;C) \Rightarrow \quad \alpha A+\beta B+\gamma C=0$



$l \perp \pi \;\Leftrightarrow\; \bar{p} \parallel \bar{n} \Rightarrow$ *их координаты пропорциональны*

$\dfrac{A}{\alpha}=\dfrac{B}{\beta}=\dfrac{C}{\gamma}$

2. Угол между прямой и плоскостью.
ОПР: *Углом* φ между прямой l и плоскостью π называется острый угол между прямой и её проекцией на плоскость.



$\varphi = 90^0-(\vec{n};\hat{\ }\vec{p}) \quad\Rightarrow\quad (\vec{n};\hat{\ }\vec{p})=90^0-\varphi$

$\cos(\vec{n};\hat{\ }\vec{p})=\cos(90^0-\varphi)=\sin\varphi \qquad \vec{n}=(A;B;C),\quad \vec{p}=(\alpha;\beta;\gamma)$

$$\boxed{\sin\varphi=\frac{\alpha A+\beta B+\gamma C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}}$$

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

2.1 Практическое занятие №1 (2 часа)

Тема: «Определители»

2.1.1 Задание для работы:

1. Вычисление определителей второго и третьего порядка по определению.
2. Минор, алгебраическое дополнение.
3. Вычисление определителей по теореме Лапласа.
4. Вычисление определителей методом эффективного понижения порядка.

2.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Определение определителя второго и третьего порядка.
2. Определение минора и алгебраического дополнения.
3. Теорема Лапласа.
4. Свойства определителей.
5. Суть метода эффективного понижения порядка.

Решение задач:

1. Вычислить определители второго и третьего порядка по определению.

1) $\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 15 & 4 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 9 & 36 & 0 \\ -6 & 60 & 5 \\ 3 & 48 & 5 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix}$.

2. Дан определитель $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}$. Найти следующие миноры и алгебраические дополнения матрицы, соответствующей данному определителю: M_{23}, M_{14}, M_{34}, A_{32}, A_{43}, A_{24}.

3. Вычислить определители по теореме Лапласа.

1) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 9 & 1 \\ -6 & -15 & 20 \end{vmatrix}$.

4. Вычислить определители методом эффективного понижения порядка.

1) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & -1 \\ -6 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

4. Решить уравнения:

1) $\begin{vmatrix} x & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & -x \end{vmatrix} = 3$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & x \\ 7 & -x & 4 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -39$.

2.1.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры, приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

2.2 Практическое занятие №2 (2 часа)
Тема: «Матрицы»

2.2.1 Задание для работы:
1. Действия над матрицами.

2.2.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Определение матрицы.
2. Сложение и вычитание матриц.
3. Умножение матрицы на число.
4. Произведение матриц.

Решение задач:

1. Найти матрицы $C = 2A - B^t$ и B^2, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить матрицу *D=ABC-3E*, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, E – единичная матрица соответствующей размерности.

3. Вычислить матрицу $D = (AB)^t - C^2$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Найти ранги матриц:
1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 10 & -4 & 7 \end{pmatrix}$.

2.2.3 Результаты и выводы:
На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры, приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

2.3 Практическое занятие №3 (2 часа)
Тема: «Обратная матрица»

2.3.1 Задание для работы:
1. Нахождение обратной матрицы.

2.3.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Произведение матриц.
2. Теорема о существовании и единственности обратной матрицы.
3. Способы нахождения обратной матрицы

Решение задач:

1. При каких значениях λ матрица $A=\begin{pmatrix}\lambda & 4 & 1\\ 2 & 5 & -1\\ 0 & \lambda & 1\end{pmatrix}$ не имеет обратной?

2. Определить, имеют ли данные матрицы обратные, и если имеют, то вычислить их:

1) $\begin{pmatrix}4 & -8 & -5\\ -4 & 7 & -1\\ -3 & 5 & 1\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 5 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 4 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

3. Найти матрицу $C = A^{-1} + 2B^t$, если $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 7 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 4 & -2\end{pmatrix}$.

2.3.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры, приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

2.4 Практическое занятие №4 (2 часа)

Тема: «Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования»

2.4.1 Задание для работы:

1. Нахождение собственных векторов и собственных значений матрицы.
2. Решение задач на составление модели международной торговли (модели обмена).

2.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Определение собственного значения матрицы.
2. Определение собственного вектора матрицы.
3. Формулы коэффициентов прямых затрат.
4. Формула матрицы полных затрат.
5. Формула структурной матрицы торговли

Решение задач:

1. Найти собственные значения и собственные векторы матриц:

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 9 & 1\end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$; 4) $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & -3\end{pmatrix}$.

2. Найти собственные значения и собственные векторы матриц:

1) $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 3\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$.

3. Структурная матрица торговли трех стран S_1, S_2, S_3 имеет вид

$$A=\begin{pmatrix}0{,}9 & 0 & 0{,}1\\ 0{,}1 & 0{,}9 & 0{,}1\\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5\end{pmatrix}.$$

Найти национальные доходы для сбалансированной торговли.

4. Структурная матрица торговли четырех стран имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Найти бюджеты этих стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что сумма бюджетов задана: $x_1+x_2+x_3+x_4=6270$ (усл. ден. ед.).

5. Структурная матрица торговли трех стран имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,5 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Найти бюджеты первой и второй стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что бюджет третьей страны равен 1100 усл. ед.

6. Структурная матрица торговли трех стран имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,9 \\ 0,6 & 0,4 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Найти национальные торговые бюджеты стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле.

7. Структурная матрица торговли трех стран имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти бюджеты стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что сумма их бюджетов равна 90 (усл. ед.).

8. Экономическая система состоит из трех отраслей. Матрица прямых затрат и вектор конечного потребления имеют вид:

$$A=\begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix} 329 \\ 429 \\ 361 \end{pmatrix}.$$

Выяснить, является ли матрица A продуктивной. Найти матрицу полных затрат. Найти вектор валового выпуска.

9. Дана структурная матрица торговли трёх стран

$$A=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,3 \\ 0,4 & 0,5 & 0,3 \\ 0,4 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Найти бюджеты этих стран, удовлетворяющие бездефицитной торговле, при условии, что сумма бюджетов равна 7000 усл. ед.

10. Дана структурная матрица торговли трех стран:

$$A=\begin{pmatrix} 1/4 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 1/2 \\ 1/4 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Определить, при каких национальных доходах этих стран торговля между ними будет сбалансированной.

2.5 Практическое занятие №5 (2 часа)
Тема: «Системы линейных уравнений»

2.5.1 Задание для работы:
1. Решение системы в матричном виде.
2. Решение системы по формулам Крамера.

2.5.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Суть метода решения системы в матричном виде.
2. Суть метода решения системы по формулам Крамера.

Решение задач:
1. Решить СЛУ матричным методом:

1) $\begin{cases} 4x + y - 3z = 9 \\ x + y - z = -2 \\ 8x + 3y - 6z = 12 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 4x + y + 4z = 19 \\ 2x - y + 2z = 11 \\ x + y + 2z = 8 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 12 \\ 2x + y + 3z = 16 \\ 3x + 2y + z = 8 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} 7x + 4y - z = 13 \\ 3x + 2y + 3z = 3 \\ 2x - 3y + z = -10 \end{cases}$.

2. Решить СЛУ по формулам Крамера:

1) $\begin{cases} -3x + 5y + 6z = -8 \\ 3x + y + z = -4 \\ x - 4y - 2z = -9 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ 4x + y + 4z = 6 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} 3x + 4y - 2z = 11 \\ 2x - y - z = 4 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ 3x + 4y + 2z = 1 \\ x + 5y + z = -3 \end{cases}$.

2.5.3 Результаты и выводы:
На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры, приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

2.6 Практическое занятие №6 (2 часа)
Тема: «Методы решения систем линейных уравнений»

2.6.1 Задание для работы:
1. Решение системы метод Гаусса. Ранг матрицы.
2. Исследование решения систем.
3. Однородные системы линейных уравнений.

2.6.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Суть метода решения системы в матричном виде.
2. Суть метода решения системы по формулам Крамера.
3. Суть метода решения системы метод Гаусса.

4. Определение ранга матрицы.

Решение задач:

1. Решить СЛУ методом Гаусса:

1) $\begin{cases} 3x-2y+4z=21 \\ 3x+4y-2z=9 \\ 2x-y-z=10 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x-y+2z=3 \\ 3x-y+3z=13 \\ -5x+y-4z=-23 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ 2x+y+3z=0 \\ 3x+2y+z=1 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} 5x-9y-4z=6 \\ x-7y-5z=1 \\ 4x-2y+z=2 \end{cases}$.

2.6.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры, приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

2.7 Практическое занятие №7 (2 часа)

Тема: «Системы линейных неравенств»

2.7.1 Задание для работы:

1. Найти ОР и ОДР системы неравенств.
2. Определить координаты угловых точек ОДР.

2.7.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Определение системы линейных неравенств.
2. Принцип решения системы линейных неравенств

Решение задач:

1. Найти ОР и ОДР системы неравенств и определить координаты угловых точек ОДР

$$\begin{cases} x_1+3x_2 \geqslant 3, & (19.1) \\ 3x_1-x_2 \leqslant 6, & (19.2) \\ 2x_1-x_2 \geqslant 0, & (19.3) \\ x_1+x_2 \leqslant 5. & (19.4) \end{cases}$$

Решение. Найдем ОР первого неравенства: $x_1 + 3x_2 \geq 3$. Построим граничную прямую $x_1 + 3x_2 - 3 = 0$ (рис. 19.5). Подставим координаты точки (0,0) в неравенство: $1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 > 3$; так как координаты точки (0,0) не удовлетворяют ему, то решением неравенства (19.1) является полуплоскость, не содержащая точку (0,0).

Аналогично найдем решения остальных неравенств системы. Получим, что ОР и ОДР системы неравенств является выпуклый многогранник *ABCD*.

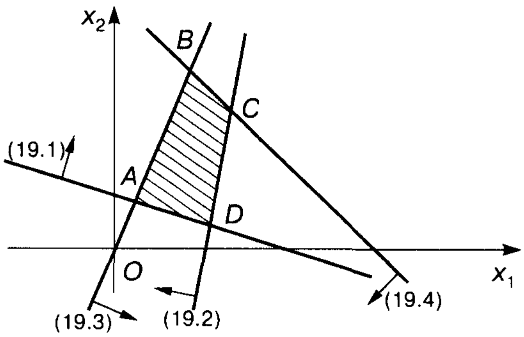


Рис. 19.5

Найдем угловые точки многогранника. Точку A определим как точку пересечения прямых

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получим $A(3/7, 6/7)$.

Точку B найдем как точку пересечения прямых

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 - 5 = 0. \end{cases}$$

Из системы получим $B(5/3, 10/3)$. Аналогично найдем координаты точек C и D: $C(11/4; 9/14)$, $D(3/10; 21/10)$.

2. Найти ОР и ОДР системы неравенств

$$\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 \leqslant 15, & (19.5) \\ 2x_1 - 5x_2 \leqslant 10, & (19.6) \\ 3x_1 + 2x_2 \geqslant 6. & (19.7) \end{cases}$$

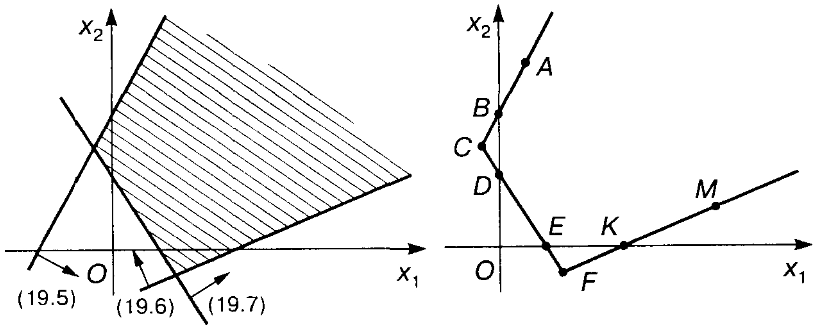


Рис. 19.6

Решение. Построим прямые и определим решения неравенств (19.5)-(19.7). ОР и ОДР являются неограниченные многогранные области $ACFM$ и $ABDEKM$ соответственно (рис. 19.6).

3. Найти ОР и ОДР системы неравенств

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 1, & (19.8) \\ x_1 - x_2 \leqslant -1, & (19.9) \\ x_2 \leqslant 1. & (19.10) \end{cases}$$

Решение. Найдем решения неравенств (19.8)-(19.10) (рис. 19.7). ОР представляет неограниченную многогранную область ABC; ОДР — точка B.

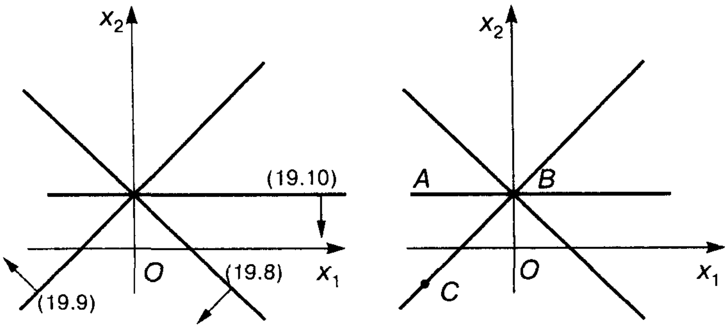


Рис. 19.7

4. Найти ОР и ОДР системы неравенств

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 1, & (19.11) \\ 2x_1 + 3x_2 \geqslant 6, & (19.12) \\ x_2 \leqslant 3. & (19.13) \end{cases}$$

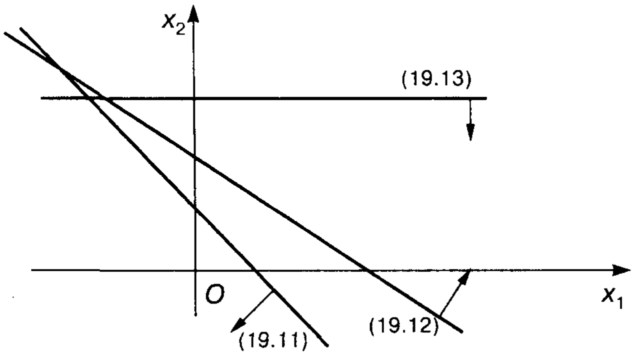


Рис. 19.8

Решение. Построив прямые, найдем решения неравенств системы. ОР и ОДР несовместны (рис. 19.8).

Упражнения

Найти ОР и ОДР систем неравенств

19.1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geqslant 4, \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 6, \\ x_2 \leqslant 5. \end{cases}$ **19.2.** $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leqslant 11, \\ -2x_1 + x_2 \leqslant 2, \\ x_1 - x_2 \leqslant 0. \end{cases}$

19.3. $\begin{cases} x_1 - x_2 \geqslant -3, \\ x_2 \geqslant 1, \\ x_1 \geqslant 1, \\ 7x_1 + 4x_2 \geqslant 28. \end{cases}$ **19.4.** $\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 2, \\ x_1 + x_2 \geqslant 1, \\ x_1 - 2x_2 \geqslant 2, \\ 2x_1 - x_2 \leqslant 1. \end{cases}$

19.5. $\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 2, \\ x_1 - x_2 \leqslant 0, \\ x_1 - x_2 \leqslant 2. \end{cases}$ **19.6.** $\begin{cases} x_1 - x_2 \leqslant 1, \\ x_1 - 2x_2 \geqslant 1, \\ x_1 \geqslant 1. \end{cases}$

19.7. $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leqslant 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 12, \\ x_1 - 4x_2 \leqslant 4. \end{cases}$ **19.8.** $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geqslant 10, \\ 2x_1 + 5x_2 \geqslant 10, \\ x_1 + x_2 \geqslant 5. \end{cases}$

2.7.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры, приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

2.8 Практическое занятие №8 (2 часа)
Тема: «Векторы. Действия над векторами»

2.8.1 Задание для работы:
1. Действия над векторами в геометрической и координатной форме.
2. Длина вектора.

2.8.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Определение вектора.
2. Сумма, разность векторов.
3. Умножение вектора на число.
4. Длина вектора.

Решение задач:
1. При каком значении α векторы $\vec{a} = (\alpha;-3;2)$ и $\vec{b} = (1;2;-\alpha)$ взаимно перпендикулярны?
2. В треугольной пирамиде *SABC* известны векторы $\overrightarrow{SA} = \vec{a}, \overrightarrow{SB} = \vec{b}, \overrightarrow{SC} = \vec{c}$. Найти вектор $\overrightarrow{SO}$, если точка *O* является центром масс треугольника *ABC*.
3. Лежат ли точки $A(1;2;-1), B(4;1;5), C(-1;2;1), D(2;1;3)$ в одной плоскости?
4. Даны координаты точек $A(4;6;3), B(-5;2;6), C(4;-4;-3)$. Найти:
а) модуль вектора $\vec{a} = 4\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}$;
б) скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$;
в) проекцию вектора $\overrightarrow{CB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$;
г) координаты точки *M*, делящей отрезок AB в отношении $5:4$.
5. Даны две вершины $A(2;-3;-5), B(-1;3;2)$ параллелограмма *ABCD* и точка пересечения его диагоналей $E(4;-1;7)$. Найти координаты остальных вершин параллелограмма.

2.8.3 Результаты и выводы:
На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

2.9 Практическое занятие №9 (2 часа)
Тема: «Скалярное произведение векторов»

2.9.1 Задание для работы:
1. Скалярное произведение векторов.
2. Проекция вектора на ось, ее свойства.
3. Применение скалярного произведения векторов в экономике

2.9.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Определение скалярного произведения векторов.
2. Определение проекции вектора на ось.
3. Применение скалярного произведения векторов в экономике

Решение задач:
1. При каком значении α векторы $\vec{a} = (\alpha;-3;2)$ и $\vec{b} = (1;2;-\alpha)$ взаимно перпендикулярны?
2. Даны координаты точек $A(4;6;3), B(-5;2;6), C(4;-4;-3)$. Найти:

а) скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$;

б) проекцию вектора $\overrightarrow{CB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$;

3. Дана прямоугольная трапеция *ABCD*, длины оснований *AD* и *BC* которой соответственно равны 4 и 2, а угол *D* равен 45^0. Найти проекции векторов $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ на ось, определяемую вектором $\overrightarrow{CD}$.

4. Вычислить $(\vec{a}-\vec{b})^2$, если $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$; $|\vec{b}| = 4$; $\left(\vec{a}, \hat{\ } \vec{b}\right) = 135^0$.

2.9.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

2.10 Практическое занятие №10 (2 часа)

Тема: «Векторное и смешанное произведение векторов»

2.10.1 Задание для работы:

1. Нахождение векторного произведения векторов
2. Нахождение площади параллелограмма и треугольника
3. Нахождение смешанного произведения векторов
4. Нахождение объем параллелепипеда и пирамиды

2.10.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Определение векторного произведения векторов.
2. Геометрический смысл векторного произведения векторов.
3. Определение смешанного произведения векторов.
4. Геометрический смысл смешанного произведения векторов.

Решение задач:

1. Даны длины векторов $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ и угол между ними $\angle(\vec{a};\vec{b}) = \dfrac{\pi}{3}$. Найти: а) длину векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

б) площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 1$ и $\angle(\vec{a};\vec{b}) = \dfrac{\pi}{4}$.

3. Найти $|-3\vec{a} \times 2\vec{b}|$, если $|\vec{a}| = \dfrac{1}{2}$, $|\vec{b}| = \dfrac{1}{6}$ и $\angle(\vec{a};\vec{b}) = \dfrac{\pi}{2}$.

4. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{c} = -\vec{m} + 2\vec{n}$ и $d = 3\vec{m} - \vec{n}$, если $|\vec{m}| = 5$, $|\vec{n}| = 4$ и $\angle(\vec{m};\vec{n}) = \dfrac{\pi}{6}$.

5. Найти $|\vec{c} \times \vec{d}|$, если $\vec{c} = \vec{m} + \vec{n}$, $\vec{d} = \vec{m} + 3\vec{n}$, $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 2$ и $\angle(\vec{m};\vec{n}) = \dfrac{\pi}{2}$.

6. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}(-1,2,-3)$, $\vec{b}(0,-4,1)$ и его длину.

7. Даны векторы $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$, $\overrightarrow{AC} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$. Найти $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}$ и вычислить $\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right|$.

8. Даны вершины треугольника $A(0,2,0)$, $B(-2,5,0)$, $C(-2,2,6)$. Найти его площадь.

9. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{a}$, если $A(2,-1,1)$, $B(1,-1,5)$ и $\vec{a}(-2,1,0)$.

10. Проверить, будут ли коллинеарны следующие векторы пространства: а) $\vec{c}(4,-2,1)$ и $\vec{d}(8,-4,4)$; б) $\overrightarrow{KL}(2,0,3)$ и $\overrightarrow{MN}(1,0,3/2)$.

11. Даны векторы $\vec{a}\,(1,-1,2)$, $\vec{b}(0,4,3)$ и $\vec{c}(3,2,-6)$. Вычислить:

а) смешанное произведение векторов;

б) объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$;

в) объём тетраэдра, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

12. Вычислить объём треугольной пирамиды, если даны её вершины $A(-2,-2,0)$, $B(0,4,-1)$, $C(1,2,1)$, $D(-13,8,11)$.

13. Вычислить объём пирамиды, заданной вершинами $A(2,-1,3)$, $B(-5,1,1)$, $C(0,3,-4)$, $D(-1,-3,4)$.

2.10.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, основных математических моделей принятия решений; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику, решать типовые математические задачи, используемые при принятии управленческих решений.

2.11 Практическое занятие №11 (2 часа)

Тема: «Базис векторного пространства»

2.11.1 Задание для работы:

1. Разложение вектора по базису.
2. Переход к новому базису.

2.11.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Определение базиса на плоскости и в пространстве.
2. Определение линейно зависимых векторов.
3. Определение линейно независимых векторов.

Решение задач:

1. Выяснить, являются ли линейно зависимыми векторы $\vec{a}(2;-1;3)$, $\vec{b}(1;4;-1)$, $\vec{c}(0;-9;5)$.

2. Доказать, что векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - \overrightarrow{2j}$, $\vec{b} = \vec{i} + 5\vec{j}$ образуют базис. Если это так, то найти координаты вектора $\vec{c} = 6\vec{i} + 13\vec{j}$ в базисе $\{\vec{a}, \vec{b}\}$.

2.11.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, основных математических моделей принятия решений; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику, решать типовые математические задачи, используемые при принятии управленческих решений.

2.12 Практическое занятие №12 (2 часа)
Тема: «Разложение вектора по базису. Переход к новому базису»

2.12.1 Задание для работы:
1. Разложение вектора по базису.
2. Переход к новому базису.

2.12.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Определение базиса на плоскости и в пространстве.
2. Определение линейно зависимых векторов.
3. Определение линейно независимых векторов.

Решение задач:
1. Известны координаты векторов базиса $\vec{a}(8;-3)$ и $\vec{b}(-1;4)$. Разложение вектора $\vec{c}(-7;-1)$ по этому базису имеет вид $\vec{c} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$. Найти сумму $x + y$.
2. Доказать, что векторы $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k},\ \vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k},\ \vec{c} = \vec{j} + \vec{k}$ образуют базис. Если это так, то найти координаты вектора $\vec{d} = -2\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$ в базисе $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.
3. Доказать, что векторы $\vec{a}(1;2;0),\ \vec{b}(3;-1;1),\ \vec{c}(0;1;1)$ образуют базис. Если это так, то найти координаты вектора $\vec{d}(1;1;1)$ в базисе $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

2.12.3 Результаты и выводы:
На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, основных математических моделей принятия решений; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику, решать типовые математические задачи, используемые при принятии управленческих решений.

2.13 Практическое занятие №13 (2 часа)
Тема: «Уравнение прямой линии на плоскости. Способы задания прямой»

2.13.1 Задание для работы:
1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
2. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с угловым коэффициентом.
3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.
4. Уравнение прямой в отрезках.
5. Угол между двумя прямыми.
6. Условие параллельности и перпендикулярности прямых.

2.13.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Определение прямой линии.
2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с угловым коэффициентом.
4. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.
5. Уравнение прямой в отрезках.
6. Угол между двумя прямыми.
7. Условие параллельности и перпендикулярности прямых.

Решение задач:
1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;3)$: а) параллельно оси Ox; б) параллельно оси Oy; в) составляющей с осью Ox угол 45^0.
2. Составить уравнения прямых, проходящих через точки: а) $A(3;1)$ *и* $B(5;4)$; б) $A(3;1)$ *и* $C(3;5)$; в) $A(3;1)$ *и* $D(-4;1)$.
3. Стороны *AB, BC* и *AC* треугольника *ABC* заданы соответственно уравнениями $4x+3y-5=0,\ x-3y+10=0,\ x-2=0$. Определить координаты его вершин.
4. Найти уравнение множества точек, равноудаленных от точек $A(-4;2)$ *и* $B(-2;-6)$.
5. Составить уравнения прямых, проходящих через точку пересечения прямых $2x-3y+1=0$ и $3x-y-2=0$ параллельно и перпендикулярно прямой $y=x+1$.
6. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(4;3)$ и отсекающей от координатного угла треугольник площадью 3 кв. ед.
7. Дан треугольник с вершинами $A(-2;0), B(2;4)$ *и* $C(4;0)$. Найти уравнения сторон треугольника, медианы *AE*, высоты *AD* и длину медианы *AE*.
8. В треугольнике *ABC* даны уравнения: стороны *AB*: $3x+2y-12=0$, высоты *BM*: $x+2y-4=0$, высоты *AM*: $4x+y-6=0$, где *M* – точка пересечения высот. Найти уравнение сторон *AC, BC* и высоты *CM*.
9. Две стороны параллелограмма заданы уравнениями $y=x-2$ и $x-5y+6=0$. Диагонали его пересекаются в начале координат. Найти уравнения двух других сторон параллелограмма и его диагоналей.
10. Даны уравнения сторон треугольника $AB: 3x-4y+24=0,$ $BC: 4x+3y+32=0,\ AC: 2x-y-4=0$. Составить уравнение высоты, медианы и биссектрисы, проведенных из вершины *B*, и найти их длины.

2.13.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

2.14 Практическое занятие №14 (2 часа)

Тема: «Общее уравнение прямой, его частные случаи**»**

2.7.1 Задание для работы:

1. Общее уравнение прямой, его частные случаи.
2. Расстояние от точки до прямой.
3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с нормальным вектором.
4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с направляющим вектором.

2.7.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:
1. Общее уравнение прямой.
2. Частные случаи общего уравнения прямой.
3. Формула расстояния от точки до прямой.
4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с нормальным вектором.
5. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с направляющим вектором.

Решение задач:
1. Составить уравнение высоты, проведенной через вершину *A* треугольника *ABC*, зная уравнения его сторон: $AB: 2x+y+3=0,\ AC: x-5y+7=0,\ BC: 3x+2y-13=0$.

2. Дан треугольник с вершинами $A(3;1), B(-3;-1), C(5;-12)$. Найти уравнение и вычислить длину его медианы, проведенной из вершины C.
3. Найти уравнения перпендикуляров к прямой $3x+5y-15=0$, проведенных через точки пересечения данной прямой с осями координат.
4. Через точку пересечения прямых $2x-5y-1=0$ *и* $x+4y-7=0$ провести прямую, делящую отрезок между точками $A(4;-3)$ и $B(-1;2)$ в отношении $\lambda = 2/3$.
5. По цене $p_1 = 2$ ден. ед. потребители готовы купить $q_1 = 4$ ед. товара, а по цене $p_2 = 4$ ден. ед. только $q_2 = 2$ ед. товара. Найти: а) зависимость спроса q от цены товара p и максимальное значение спроса; б) цену, при которой спрос на товар пропадет; в) объем рынка $Q = p \cdot q$ и его максимальное значение.
6. По цене $p_1 = 2$ ден. ед. предложение составляет $s_1 = 1$ ед. товара, а при цене $p_2 = 5$ ден. ед., предложение вырастает до $s_2 = 4$ ед. товара. Найти: а) зависимость предложения s от цены товара p и цену, при которой производство прекратится; б) с учетом условия задачи 121, найти равновесную цену p_0 и объем рынка для этой цены.
7. Спрос и предложение на некоторый товар на рынке описываются зависимостями вида $D(P) = 15 - 3P$, $S(P) = 0{,}5P + 1$. Определить равновесную цену. Найти графическим способом, является ли модель паутинного рынка «скручивающейся».
8. Спрос и предложение на некоторый товар на рынке описываются зависимостями вида $D(P) = 5 - 0{,}5P$, $S(P) = 1{,}5P + 1$. Определить равновесную цену. Найти графическим способом, является ли модель паутинного рынка «скручивающейся».

2.14.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, основных математических моделей принятия решений; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику, решать типовые математические задачи, используемые при принятии управленческих решений.

2.15 Практическое занятие №15 (2 часа)

Тема: «Линии второго порядка»

2.15.1 Задание для работы:

1. Построение линий второго порядка. Нахождение их основных элементов.
2. Составление уравнений линий второго порядка по их основным элементам.

2.15.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:
1. Определение линии второго порядка.
2. Определение и каноническое уравнение окружности.
3. Определение и каноническое уравнение эллипса.
4. Определение и каноническое уравнение гиперболы.
5. Определение и каноническое уравнение параболы.

Решение задач:
1. Определить тип линий, их основные элементы и сделать рисунок.
1) $x^2 + y^2 + 8x - 3y + 37/4 = 0$;
2) $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$;
3) $25x^2 - 4y^2 - 100 = 0$;
4) $-9x^2 + 16y^2 = 144$.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через центры окружностей $x^2 + y^2 = 5$ и $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 31 = 0$. Найти отношение радиусов окружностей.

3. Эллипс, симметричный относительно начала координат, проходит через точки $M_1(4;\frac{4\sqrt{5}}{3})$ и $M_2(0;4)$. Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса.

4. Составить уравнения парабол, проходящих через точки: а) (0,0) и (-1,-3), симметрично относительно оси *ОХ*; б) (0,0) и (2,-4), симметрично относительно оси *ОУ*.

5. Найти уравнение параболы и её директрисы, если известно, что парабола имеет вершину в начале координат и симметрична относительно оси *Ox* и что точка пересечения прямых $y = x$ и $x + y - 2 = 0$ лежит на параболе.

6. Найти уравнение геометрического места точек, для каждой из которых отношение расстояния до точки $A(\sqrt{5};0)$ к расстоянию до прямой $\sqrt{5} \cdot x - 9 = 0$ постоянно и равно $\frac{\sqrt{5}}{3}$. Сделать чертеж. Привести уравнение линии к каноническому виду, найти фокусы, эксцентриситет.

7. Найти уравнение геометрического места точек, для каждой из которых отношение расстояния до точки $A(-\sqrt{20};0)$ к расстоянию до прямой $\sqrt{5} \cdot x + 8 = 0$ постоянно и равно $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Сделать чертеж. Привести уравнение линии к каноническому виду, найти фокусы, эксцентриситет, асимптоты.

2.15.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

2.16 Практическое занятие №16 (2 часа)

Тема: «Плоскость в пространстве»

2.16.1 Задание для работы:

1. Определение плоскости.
2. Способы задания плоскости в пространстве.

2.16.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Определение плоскости.
2. Способы задания плоскости в пространстве.
3. Условие параллельности плоскостей в пространстве.

Решение задач:

1. Записать уравнение плоскости:

а) параллельной плоскости *Oxz* и проходящей через точку $M(7;-3;5)$;

б) проходящей через ось *Oz* и точку $A(-3;1;-2)$;

в) параллельной оси *Ox* и проходящей через две точки $A(4;0;-2)$ и $B(5;1;7)$;

г) проходящей через точку $C(2;1;-1)$ и имеющую нормальный вектор $\vec{n}(1;-2;3)$;

д) проходящей через точку $D(3;4;-5)$ параллельно двум векторам $\vec{a}(3;1;-1)$ *и* $\vec{b}(1;-2;1)$.

3. Составить уравнение плоскости: а) проходящей через точки $A(1;1;1)$ и $B(2;3;4)$ перпендикулярно к плоскости $2x-7y+5z+9=0$; б) проходящей через точку $M(7;-5;1)$ и отсекающей на осях координат равные положительные отрезки.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3;4;0)$ и прямую $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{2}$.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка AB, перпендикулярно к этому отрезку, если $A(1;5;6)$ и $B(-1;7;10)$.

5. Найти расстояние от точки $M(2;0;-0,5)$ до плоскости $4x-4y+2z+17=0$.

2.16.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

2.17 Практическое занятие №17 (2 часа)

Тема: «Прямая в пространстве»

2.17.1 Задание для работы:

1. Определение прямой
2. Уравнение прямой в пространстве.

2.17.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Определение прямой.
2. Каноническое уравнение прямой в пространстве.
3. Способы задания прямой в пространстве.
4. Условие параллельности прямых в пространстве.

Решение задач:

1. Дана прямая $l:\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+1}{2}$ и плоскость $\pi:2y-z-11=0$. Доказать, что прямая пересекает плоскость.

2. Дана прямая $l:\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+1}{2}$ и плоскость $\pi:2y-z-11=0$. Найти точку пересечения прямой и плоскости.

3. Через прямую $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{-1}$ провести плоскость, перпендикулярную плоскости $3x-y+2=0$.

2.17.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

2.18 Практическое занятие №18 (2 часа)

Тема: «Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве»

2.18.1 Задание для работы:

1. Способы задания плоскости в пространстве.
2. Уравнение прямой в пространстве.
3. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

2.18.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Определение плоскости.
2. Каноническое уравнение прямой в пространстве.
3. Способы задания прямой в пространстве.
3. Способы задания плоскости в пространстве.
4. Условие параллельности прямых в пространстве.
5. Условие параллельности плоскостей в пространстве.
6. Угол между прямой и плоскостью.

Решение задач:
1. Даны координаты точек $A(5;5;4)$, $B(1;-1;4)$, $C(3;5;1)$, $D(5;8;-1)$.. Составить уравнения:
а) плоскости ABC;
б) прямой AB;
в) прямой DM, перпендикулярной к плоскости ABC;
г) прямой CN, параллельной прямой AB;
д) плоскости, проходящей через точку D перпендикулярно к прямой AB.
Вычислить:
е) синус угла между прямой AD и плоскостью ABC;
ж) косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью ABC.
2. Записать уравнение плоскости:
а) параллельной плоскости Oxz и проходящей через точку $M(7;-3;5)$;
б) проходящей через ось Oz и точку $A(-3;1;-2)$;
в) параллельной оси Ox и проходящей через две точки $A(4;0;-2)$ и $B(5;1;7)$;
г) проходящей через точку $C(2;1;-1)$ и имеющую нормальный вектор $\vec{n}(1;-2;3)$;
д) проходящей через точку $D(3;4;-5)$ параллельно двум векторам $\vec{a}(3;1;-1)$ *и* $\vec{b}(1;-2;1)$.
3. Составить уравнение плоскости: а) проходящей через точки $A(1;1;1)$ и $B(2;3;4)$ перпендикулярно к плоскости $2x-7y+5z+9=0$; б) проходящей через точку $M(7;-5;1)$ и отсекающей на осях координат равные положительные отрезки.
4. Вычислить косинус угла между плоскостями $x-2y+2z-3=0$ и $3x-4y+5=0$.

2.18.3 Результаты и выводы:
На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

Разработала: В.А. Ротова