ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические рекомендации для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Б1.Б.05 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Направление подготовки 38.03.01 Экономика
Профиль образовательной программы Бухгалтерский учет, анализ и аудит
Форма обучения очная

1. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1 Организационно-методические данные дисциплины

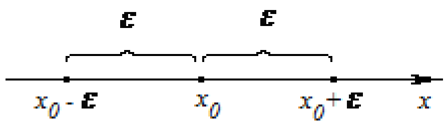
№ п.п	Наименование темы	Общий объем часов по видам самостоятельной работы				
		подготовка курсового проекта (работы)	подготовка реферата/ эссе	индивидуальные домашние задания (ИДЗ)	самостоятельное изучение вопросов (СИВ)	подготовка к занятиям (ПкЗ)
1	2	3	4	5	6	7
1.	Числовые множества				2	2
2.	Предел функции				2	2
3.	Производная функции				2	2
4.	Производные и дифференциалы высших порядков				4	4
5.	Неопределенный интеграл				4	4
6.	Интегрирование рациональных функций				4	4
7.	Определенный интеграл				4	4
8.	Приложения определенного интеграла				4	4
9.	Функции нескольких переменных				4	4
10.	Частные производные				4	4
11.	Производная по направлению, градиент				4	4
12.	Экстремум функции нескольких переменных				4	4
13.	Числовые ряды				4	2
14.	Знакочередующиеся ряды				4	4
15.	Степенные ряды				4	4
16.	Ряды Маклорена и Тейлора				4	4
17.	Дифференциальные уравнения				2	2
18.	Некоторые типы дифференциальных уравнений первого порядка				6	4
19.	Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка				6	4
20.	Однородные системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами				4	4

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ВОПРОСОВ

2.1 Действительные числа, их свойства. Обозначения для сумм и произведений. Объединение, пересечение, разность множеств. Диаграммы Венна (круги Эйлера).

Множество – совокупность элементов, объединенных по какому-либо признаку.
Множество Ø, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым*.
Множество A называется *подмножеством* множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B ($A \subset B$).
Объединением (суммой) множеств A и B называется множество $A \cup B$, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из этих множеств.
Пересечением (произведением) множеств A и B называется множество $A \cap B$, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит и множеству A, и множеству B.
Разностью множеств A и B называется множество $A \setminus B$, состоящее из всех элементов множества A, не принадлежащих множеству B.
Если $B \subset A$, то разность $A \setminus B$ называют *дополнением* множества B до множества A.
Диаграммы Венна – изображение множеств и всевозможных отношений между множествами в виде кругов (*круги Эйлера*).
Пусть даны два множества X и Y. Соответствие, при котором каждому элементу $x \in X$ соответствует единственный элемент $y \in Y$, называется *отображением* множества X во множество Y.
Если элементу x соответствует y, то y называется *образом элемента* x, а x – *прообразом элемента* y.
Интервал $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называется «ε - окрестностью» точки x_0.

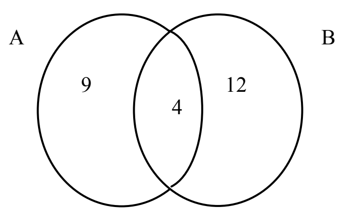
Число x_0 называется *центром* окрестности, а число ε - его *радиусом*.



<u>Пример:</u> Определить количество всех элементов множества $A = \{x \,|\, x \in Z, |x| \le 5, x \vdots 4\}$.

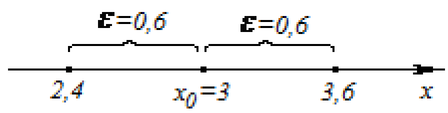
Решение: Неравенству $|x| \le 5$ удовлетворяют целые числа: -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5. Из них кратны 4 только -4; 0; 4. Таким образом: $A = \{-4;\ 0;\ 4\}$. В данном множестве 3 элемента.
Ответ: 3.

<u>Пример:</u> Сколько человек в группе занимается спортом, если 9 человек занимаются лыжами и плаванием, а 12 человек – плаванием и волейболом, причём в секцию по плаванию ходят 4 человека из группы?



Решение: Имеем:
$n(A) = 9$, $n(B) = 12$, $n(A \cap B) = 4$,
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 9 + 12 - 4 = 17.$
Итак, в группе занимаются спортом 17 человек.
Ответ: 17 .

<u>Пример:</u> Интервал $(2{,}4; 3{,}6)$ является «ε-окрестностью» точки x_0. Найти значение выражения $4x_0 - 5\varepsilon$.
Решение:



Точка x_0 является центром «ε-окрестности», следовательно, $x_0 = \dfrac{2{,}4+3{,}6}{2} = 3$. Число ε – радиус окрестности, т.е. $\varepsilon = 3{,}6 - 3 = 0{,}6$. Тогда значение выражения $4x_0 - 5\varepsilon = 4 \cdot 3 - 5 \cdot 0{,}6 = 9$.
Ответ: 9.

2.2 Задача о непрерывном начислении процентов

Пусть Q_0 ден. ед. – первоначальный взнос в банк, p % - годовые проценты.

При использовании *простых процентов:* $Q_1 = Q_0 + \dfrac{Q_0}{100}p = Q_0(1+\dfrac{p}{100})$ - размер вклада через 1 год, $Q_2 = Q_0(1+\dfrac{2p}{100})$ - через 2 года и т.д., размер вклада через t лет состави:

$$Q_t = Q_0(1+\frac{tp}{100}).$$

При использовании *сложных процентов* размер вклада ежегодно увеличивается в одно и то же число раз $\left(1+\dfrac{p}{100}\right)$ и размер вклада Q_t через t лет*:*

$Q_1 = Q_0(1+\dfrac{p}{100})$, $Q_2 = Q_0\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^2$, … , $Q_t = Q_0\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^t$ - размер вклада через t лет. Если начислять проценты по вкладам не один раз в году, а n раз, то при том же ежегодном приросте p %, процент начисления за $\dfrac{1}{n}$-ую часть года составит $\dfrac{p}{n}\%$, а размер вклада за t лет при $n \cdot t$ начислениях составит:

$$Q_t = Q_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt}.$$

Если проценты по вкладу начисляются непрерывно ($n \to \infty$). Тогда размер вклада за t лет составит:

$$Q_t = Q_0 e^{\frac{pt}{100}}.$$

Это показательный закон роста (при *p>0*) или убывания (при *p<0*). Эта формула используется при непрерывном начислении процентов.

Пример: Прирост населения страны составляет 3% в год. Через сколько лет население страны удвоится?

Решение: $2Q_0 = Q_0 e^{\frac{3t}{100}} \Rightarrow t = \dfrac{100\ln 2}{3} \approx 23$ года.

Ответ: 23 года.

2.3 Задача о распределении налогового бремени. Предельные показатели в микроэкономике. Эластичность экономических показателей

Экономический смысл производной: если функция $u = u(t)$ выражает количество произведенной продукции u за время t, то ее производная есть *производительность труда* в момент времени t:

$$z(t) = u'(t).$$

Производная соответствующей функции выражает *предельные издержки, предельную выручку, предельный доход, предельный продукт, предельную полезность, предельную производительность* и т.д.

Эластичность функции $E_x(y)$ показывает приближенно, на сколько процентов изменится функция $y = f(x)$ при изменении независимой переменной x на 1% и находится по формуле:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y'.$$

Если $\left|E_x(y)\right| > 1$, то функция *эластичная*; если $\left|E_x(y)\right| < 1$, то функция *неэластичная*; если $\left|E_x(y)\right| = 1$, то функция *с единичной эластичностью.*

Темп изменения функции $T_y = (\ln y)' = \dfrac{y'}{y}$, т.е. $E_x(y) = x \cdot T_y$.

Пример: Зависимость между себестоимостью единицы продукции y (тыс. руб.) и выпуском продукции x (млрд. руб.) выражается функцией $y = -0{,}5x + 80$. Найти эластичность себестоимости при выпуске продукции, 60 млн. руб.

Решение:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y' \quad \Rightarrow \quad E_x(y) = \frac{-0{,}5x}{-0{,}5x + 80} = \frac{x}{x - 160} \Rightarrow \qquad E_{x=60}(y) = -0{,}6.$$

При выпуске продукции, равном 60 млн. руб., увеличение его на 1% приведет к снижению себестоимости на 0,6%.

Ответ: -0,6.

2.4 Достаточные условия выпуклости функции. Необходимый и достаточный признаки точки перегиба.

Производной второго порядка функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной, т.е. $y'' = \left(y'\right)'$.

Производной третьего порядка данной функции называется производная от ее второй производной.

Производной n-го порядка или n-ой производной от функции $y = f(x)$ называется производная от ее $(n-1)$-ой производной.

Производную n-го порядка обозначают $y^{(n)}$ или $f^{(n)}(x)$.

Дифференциалом второго порядка функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка: $d^2y = d(dy) = y'' \cdot dx^2$.

Дифференциалом третьего порядка: $d^3y = d(d^2y) = y''' \cdot dx^3$.

Дифференциал $n-$го порядка: $d^n y = d(d^{n-1}y) = y^{(n)} \cdot dx^n$.

2.5 Методы интегрирования

Непосредственное. С использованием свойств интегралов и таблицы интегралов.

Замена переменной (подстановка). Часто подстановка $x = \varphi(t)$ (или $\psi'(x) = t$) позволяет перейти к непосредственному интегрированию, тогда:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt, \text{ где } x = \varphi(t),\ dx = \varphi'(t)dt.$$

Интегрирование по частям. $\int u dv = uv - \int v du$.

Классы интегралов, берущихся по частям:

I класс: $\left.\begin{array}{l} \int P(x)e^{ax}dx \\ \int P(x)\sin ax dx \\ \int P(x)\cos ax dx \end{array}\right\}$ $\quad \begin{array}{c} a \in R \\ u = P(x) \\ dv = \begin{cases} e^{ax}dx \\ \sin ax dx \\ \cos ax dx \end{cases} \end{array}$

II класс: $\left.\begin{array}{l} \int P(x)\ln ax dx \\ \int P(x)\arcsin ax dx \\ \int P(x)\arccos ax dx \\ \int P(x) arctgax dx \\ \int P(x) arcctgax dx \end{array}\right\}$ $\quad \begin{array}{c} a \in R \\ u = \begin{cases} \ln ax \\ \arcsin ax, \arccos ax \\ arctgax, arcctgax \end{cases} \\ dv = P(x)dx \end{array}$

Пример: Найти интеграл $\int \sin^2 x \cos x dx$.

Решение: Интегрирование подстановкой.

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ d(\sin x) = dt \\ (\sin x)' dx = dt \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C .$$

Ответ: $\frac{1}{3}\sin^3 x + C$.

2.6 Интегрирование рациональных дробей, рекуррентная формула

Если $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ - правильная рациональная дробь, знаменатель $P(x)$ которой представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей (отметим, что любой многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в таком виде: $P(x) = (x - a)^{\alpha} \ldots (x - b)^{\beta} (x^2 + px + q)^{\lambda} \ldots (x^2 + rx + s)^{\mu}$), то эта дробь может быть разложена на элементарные по следующей схеме:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \ldots + \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} +$$
$$+ \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \ldots + \frac{M_\lambda x + N_\lambda}{(x^2 + px + q)^\lambda} + \ldots + \frac{R_1 x + S_1}{x^2 + rx + s} + \frac{R_2 x + S_2}{(x^2 + rx + s)^2} + \ldots + \frac{R_\mu x + S_\mu}{(x^2 + rx + s)^\mu}$$

где A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i – некоторые постоянные величины.

При интегрировании рациональных дробей прибегают к разложению исходной дроби на элементарные. Для нахождения величин A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i применяют так называемый *метод неопределенных коэффициентов*, суть которого состоит в том, что для того, чтобы два многочлена были тождественно равны, необходимо и достаточно, чтобы были равны коэффициенты при одинаковых степенях x.

Пример: Найти интеграл $\int \frac{(x^3 + 4)dx}{x^3 + 2x^2}$.

Решение:

Дробь неправильная, выделим целую часть делением в столбик:

$$\begin{array}{r|l} -\; x^3 + 4 & x^3 + 2x^2 \\ \cline{2-2} \underline{x^3 + 2x^2} & 1 \\ -2x^2 + 4 & \end{array}$$

$$\int \frac{(x^3 + 4)dx}{x^3 + 2x^2} = \int \left(1 + \frac{-2x^2 + 4}{x^3 + 2x^2} \right) dx = x + \int \frac{-2x^2 + 4}{x^2(x+2)} dx$$

Рассмотрим дробь: $\frac{-2x^2 + 4}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2} = \frac{Ax^2 + 2Ax + Bx + 2B + Cx^2}{x^2(x+2)}$

$$-2x^2 + 4 = x^2(A + C) + x(2A + B) + 2B$$

$$\begin{cases} A + C = -2 \\ 2A + B = 0 \\ 2B = 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} A + C = -2 \\ 2A + 2 = 0 \\ B = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} -1 + C = -2 \\ A = -1 \\ B = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} A = -1 \\ B = 2 \\ C = -1 \end{cases}$$

Таким образом: $\frac{-2x^2 + 4}{x^2(x+2)} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x+2}$.

$$x+\int\frac{-2x^2+4}{x^2(x+2)}dx = x+\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x+2}\right)dx = x-\ln|x|-\frac{2}{x}-\ln|x+2|+C.$$

Ответ: $x-\ln|x|-\dfrac{2}{x}-\ln|x+2|+C$.

2.7 Методы интегрирования в определенном интеграле

Формула Ньютона – Лейбница: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$.

Основные свойства определенного интеграла:

1) $\int\limits_a^b Af(x)dx = A\int\limits_a^b f(x)dx$;

2) $\int\limits_a^b (f_1(x)\pm f_2(x))dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx$;

3) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$;

4) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$;

5) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

Замена переменной в определенном интеграле:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)] = F(b)-F(a),$$

где f(x)–непрерывная функция на отрезке [a,b], подстановка: x=φ(t), «новые» пределы интегрирования находятся из условий: φ(α)=a, φ(β)=b.

Интегрирование по частям: $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu.$

<u>Пример:</u> Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{-1}^{2}\frac{2xdx}{(2x^2+1)^2}$.

Решение:

Метод замены переменной (подстановки).

$$\int\limits_{-1}^{2}\frac{2xdx}{(2x^2+1)^2} = \left|\begin{array}{l} 2x^2+1=t \\ 4xdx=dt \\ 2xdx=0{,}5dt \\ \alpha=2\cdot(-1)^2+1=3 \\ \beta=2\cdot 2^2+1=9 \end{array}\right| = 0{,}5\int\limits_3^9\frac{dt}{t^2} = -\frac{0{,}5}{t}\Big|_3^9 = -0{,}5\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{9}$.

<u>Пример</u>: Вычислить определенный интеграл $\int\limits_1^e x\ln x dx$.

Решение:

Интегрирование по частям, второй класс.

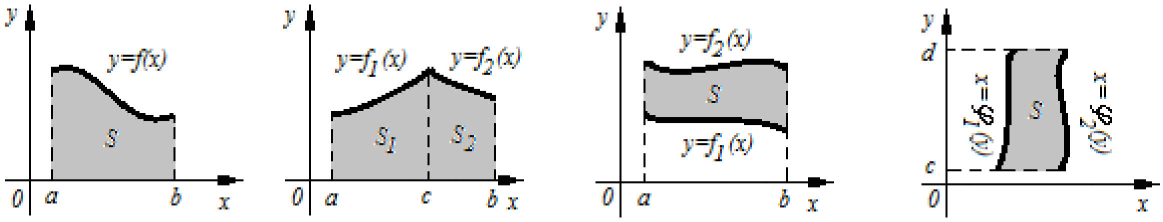
$$\int_1^e x\ln x dx = \left| \begin{array}{l} u=\ln x \\ dv = xdx \\ du = \dfrac{dx}{x} \\ v=\int xdx = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e xdx = \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_1^e = \frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}-\left(0-\frac{1}{4}\right) = \frac{e^2+1}{4}.$$

Ответ: $0{,}25(e^2+1)$.

2.8 Использование определенного интеграла в экономике

Вычисление площадей плоских фигур

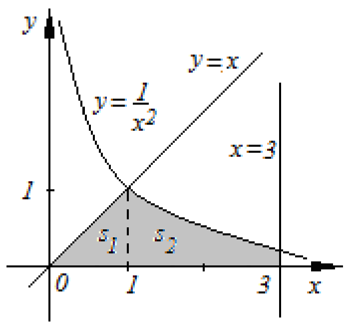
Определенный интеграл на отрезке представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции *f(x)*. Частные случаи:



$$S=\left|\int_a^b f(x)dx\right|;\quad S=\int_a^c f_1(x)dx+\int_c^b f_2(x)dx;\quad S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx;\quad S=\int_c^d (\varphi_2(y)-\varphi_1(y))dy$$

Пример: Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x$, $y=\dfrac{1}{x^2}$, $x=3$ и осью *Ox*.

Решение:

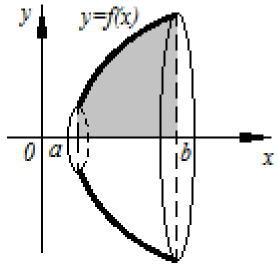


$$S=S_1+S_2=\int_0^1 xdx+\int_1^3 \frac{1}{x^2}dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{1}{x}\Big|_1^3 = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}+1=1\frac{1}{6}\ \text{(кв. ед.)}$$

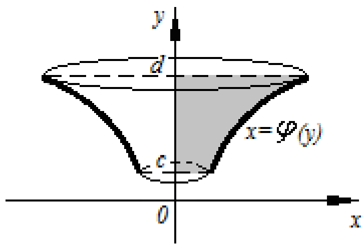
Ответ: $1\frac{1}{6}$ кв. ед.

Объем тел вращения

Пусть функция *f(x)* непрерывна на некотором отрезке. Если соответствующую ей криволинейную трапецию вращать вокруг оси *Ox* или *Oy*, то получим *тела вращения*, для которых можно вычислить площадь поверхности и объем:



Вокруг оси Ox



Вокруг оси Oy

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \qquad S = 2\pi\int_c^d \varphi(y)\sqrt{1+(\varphi'(y))^2}\,dy$$

$$V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx \qquad V = \pi\int_c^d (\varphi(y))^2\,dy$$

Экономический смысл определенного интеграла

Если функция $z = f(t)$ задает изменение производительности некоторого производства с течением времени t , то *объем выпущенной продукции u* за промежуток времени $[0,T]$ находится по формуле:

$$u = \int_0^T f(t)dt\,.$$

Если функция $P = f(Q)$ характеризует зависимость между ценой единицы товара P и количеством товара Q, то *потребительский излишек* находится по формуле:

$$CS = \int_0^{Q^*} f(Q)dQ - P^*Q^*,$$

где Q^* - количество товара, которое приобретает покупатель по равновесной цене P^*.

Излишек производителя:

$$PS = P^*Q^* - \int_0^{Q^*} f(Q)dQ\,.$$

Пример: Определить объем продукции, произведенной рабочим за третий час рабочего дня, если производительность труда характеризуется функцией $f(t) = \frac{3}{3t+1} + 4$.

Решение:

$$u = \int_2^3 \left(\frac{3}{3t+1} + 4\right)dt = \left(\ln|3t+1| + 4t\right)\Big|_2^3 = \ln 10 + 12 - \ln 7 - 8 = \ln\frac{10}{7} + 4 \approx 4{,}36 \text{ (ед.)}$$

Ответ: 4,36 ед.

2.9 Функции нескольких переменных в экономике

Средняя фондоотдача есть отношение произведённого продукта к величине затраченного капитала $z = \frac{Y}{K}$.

Средняя производительность труда есть отношение произведённого продукта к объему ресурсов $b = \frac{Y}{L}$.

Предельная фондоотдача $W = Y'_K = \alpha \cdot z$.

Предельная производительность труда $V = Y'_L = \beta \cdot b$.

2.10 Использование полярных координат для вычисления двойных интегралов.
Если каждой паре независимых друг от друга чисел (x, y) из некоторого множества по какому-либо правилу ставится в соответствие одно значение переменной z, то переменная z называется *функцией двух переменных.*

$$z = f(x, y)$$

Уравнение $z = f(x, y)$ определяет некоторую поверхность в пространстве. *Областью определения* функции z называется совокупность пар (x, y), при которых функция z существует. Область определения функции z представляет собой множество точек плоскости.

Линиями уровня называют графики функций $f(x, y) = c_1$, $f(x, y) = c_2, \ldots,$ $f(x, y) = c_n$, где $z = c_1, c_2, ..., c_n \in E_z$.

Число A называется *пределом* функции $f(x, y)$ при $M(x, y) \to M_0(x_0, y_0)$, если для каждого числа $\varepsilon >$ 0 найдется такое число $r >0$, что для любой точки $M(x, y)$, для которых верно условие $MM_0 < r$ также верно и условие $\left|f(x, y) - A\right| < \varepsilon$.

Если переменная x получает приращение Δx, а y остается постоянной, то функция $z = f(x, y)$ получает *частное приращение переменной x*:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Если переменная y получает приращение Δy, а x остается постоянной, то функция $z = f(x, y)$ получает *частное приращение по переменной y:*

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Если существуют пределы $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = f'_x(x, y)$ и $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y} = f'_y(x, y)$, то они называются *частными производными* функции $z = f(x, y)$ по переменным x и y соответственно.

Дифференциал функции $z = f(x, y)$, найденный при условии, что одна из независимых переменных изменяется, а вторая остается постоянной, называется *частным дифференциалом*

$$d_x z = f'_x(x, y)dx \quad \text{и} \quad d_y z = f'_y(x, y)dy,$$

где $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$ - произвольные приращения независимых переменных, называемые их дифференциалами.

Если функция имеет непрерывные частные производные, то полный дифференциал существует и равен:

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy.$$

Полный дифференциал используется для приближенных вычислений значений функции:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy + f(x_0, y_0).$$

Частными производными второго порядка называют частные производные, взятые от частных производных первого порядка:

$$\left(f'_x(x, y)\right)'_x = f''_{xx}(x, y) \qquad \left(f'_y(x, y)\right)'_x = f''_{yx}(x, y)$$

$$\left(f'_x(x, y)\right)'_y = f''_{xy}(x, y) \qquad \left(f'_y(x, y)\right)'_y = f''_{yy}(x, y)$$

Частные производные $f''_{xy}(x, y)$ и $f''_{yx}(x, y)$ называются *смешанными*. Смешанные производные равны.

2.11 Максимилизация прибыли
Производная функции $z = f(x, y)$ *в точке* (x_0, y_0) *в направлении вектора* $\vec{\rho}$ представляет собой скорость изменения функции в данном направлении и находится по формуле:

$$f'_\rho(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\cos\beta,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ – направляющие косинусы вектора $\vec{\rho}$.

Градиент функции в данной точке – это вектор, который указывает направление наиболее быстрого возрастания функции. Его координаты:

$$gradz\left(f'_x(x_0,y_0); f'_y(x_0,y_0)\right).$$

Величина градиента $|gradz| = \sqrt{(f'_x(x_0,y_0))^2 + (f'_y(x_0,y_0))^2}$ определяет крутизну наибольшего ската или подъема поверхности $z = f(x,y)$.

Пример: Найти производную функции $z = \sqrt{xy} + y\ln x$ в точке $M(1;4)$ в направлении вектора $\vec{\rho}$, проходящего под углом $\alpha = 30^0$ к оси Ox.

Решение:

$$\underset{y=const}{z'_x} = \left.\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + \frac{y}{x}\right|_{M(1;4)} = 1 + 4 = 5, \qquad \underset{x=const}{z'_y} = \left.\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} + \ln x\right|_{M(1;4)} = \frac{1}{4} + 0 = 0{,}25.$$

$$z'_\rho(1;4) = 5\cos 30^0 + 0{,}25\cos 60^0 = 5\cdot 0{,}866 + 0{,}25\cdot 0{,}5 = 4{,}455.$$

Ответ: 4,455.

2.12 Функция Кобба-Дугласа

Производственная функция Кобба-Дугласа описывает взаимосвязь валового внутреннего продукта Y с объемом производственных фондов (капитала) K и объемом занятых в производстве трудовых ресурсов L:

$$Y = A\,K^\alpha\,L^\beta$$

Здесь A – коэффициент нейтрального технического прогресса, $\alpha = E_K(Y) = Y'_K\cdot\frac{K}{Y}$ и $\beta = E_L(Y) = Y'_L\cdot\frac{L}{Y}$ – коэффициенты эластичности валового внутреннего продукта по капитальным и трудовым затратам.

2.13 Признаки сходимости рядов

Сумма членов бесконечной числовой последовательности $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называется *числовым рядом.*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

где числа $u_1, u_2, \ldots$ - члены ряда, а u_n – общий член ряда.

Суммы $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $n = 1,2,3\ldots$ называются *частичными суммами* ряда.

Ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *сходящимся*, если сходится последовательность его частичных сумм. *Сумма сходящегося ряда* – предел последовательности его частичных сумм.

$$\lim S_n = S, \qquad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Если последовательность частных сумм не имеет предела, или имеет бесконечный предел, то ряд называется *расходящимся*.

Необходимое условие сходимости ряда: Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его общий член стремится к нулю (т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$).

Обратная теорема не верна.

Справедливо утверждение: если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Свойства рядов:

1) Сходимость или расходимость ряда не нарушится, если изменить, отбросить или добавить конечное число членов ряда.

2) Если ряд $\sum u_n$ сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum Cu_n$ тоже сходится, и его сумма равна CS $(C \neq 0)$.

3) Если ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ сходятся и их суммы равны соответственно S и σ, то ряд $\sum (u_n \pm v_n)$ тоже сходится и его сумма равна $S + \sigma$.

Ряды с неотрицательными членами

Эталонные ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - *гармонический ряд*, расходится.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$, $k \in R$ - *обобщенно гармонический ряд*. Если $k > 1$, то ряд сходится; если $k \leq 1$, то ряд расходится.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a \cdot q^n$, $a \in R$ - *геометрический ряд*. Если $|q| \geq 1$, то ряд расходится, если $|q| < 1$, то ряд сходится.

Признак сравнения: пусть даны два ряда с неотрицательными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ (A) и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n, b_n > 0$ (B) и для всех $n \in N$ выполняется неравенство $a_n \leq b_n$, тогда из сходимости ряда (B) следует сходимость ряда (A), а из расходимости ряда (A) следует расходимость ряда (B).

Предельный признак сравнения: пусть даны два ряда с неотрицательными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ (A) и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n, b_n > 0$ (B). Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = P$, где $P > 0$, то оба ряда (A) и (B) в плане сходимости ведут себя одинаково (т.е. либо оба сходятся, либо оба расходятся).

<u>Пример</u>: Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - 5}{3n^3 + n - 3}$.

Решение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - 5}{3n^3 + n - 3} \ (A), \quad a_n = \frac{2n^2 - 5}{3n^3 + n - 3}, \quad a_n > 0$$

Рассмотрим $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (B) - гармонический ряд, расходится, $b_n = \frac{1}{n}$, $b_n > 0$

Предельный признак сравнения: $P = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 5}{3n^3 + n - 3} : \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 5n}{3n^3 + n - 3} = \frac{2}{3}$

$P = \dfrac{2}{3} > 0 \Rightarrow$ ряды (A) и (B) в плане сходимости ведут себя одинаково, т.е. оба расходятся $\Rightarrow$ исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2 - 5}{3n^3 + n - 3}$ расходится.

Ответ: ряд расходится.

Предельная форма признака Даламбера: пусть дан ряд с неотрицательны-ми членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = D$, то при $D < 1$ ряд сходится; при $D > 1$ ряд расходится; при $D = 1$ вопрос о сходимости ряда не решен, признак не подходит.

Пример: Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n}{(n-2)!}$.

Решение:

Предельный признак Даламбера

$$a_n = \frac{5^n}{(n-2)!}, \quad a_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{((n+1)-2)!} = \frac{5 \cdot 5^n}{(n-1)!}$$

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5 \cdot 5^n}{(n-1)!} : \frac{5^n}{(n-2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{5 \cdot 5^n}{(n-1)!} \cdot \frac{(n-2)!}{5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n-1} = \frac{5}{\infty} = 0, \quad D = 0 < 1 \Rightarrow \text{ ряд сходится}$$

Ответ: ряд сходится.

Предельная форма признака Коши: пусть дан ряд с неотрицательными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = K$, то при $K < 1$ ряд сходится; при $K > 1$ ряд расходится; $K = 1$ вопрос о сходимости ряда не решен, признак не подходит.

Пример: Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arctg^n \dfrac{1}{n}$.

Решение:

Предельный признак Коши

$$K = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{arctg^n \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} arctg \frac{1}{n} = arctg 0 = 0, \; K = 0 < 1 \Rightarrow \text{ ряд сходится}$$

Ответ: ряд сходится.

2.14 Признак Лейбница

Знакочередующийся ряд можно записать в виде:

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n, \quad \text{где } u_n > 0, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

Признак Лейбница: если у знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ абсолютные величины (модули) u_i убывают $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$ и общий член стремится к нулю $u_n \to 0$, то ряд сходится.

Если ряд сходится вместе с рядом, составленным из модулей его членов, то такой ряд называется *абсолютно сходящимся.*

Если знакочередующийся ряд сходится, а ряд, составленный из модулей его членов расходится, то такой ряд называется *условно сходящимся.*

Пример: Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4}{\sqrt{n}}$.

Решение:
Признак Лейбница

1) $|u_n| = \frac{4}{\sqrt{n}}$, $|u_{n+1}| = \frac{4}{\sqrt{n+1}}$, $|u_{n+1}| < |u_n|$ $\Rightarrow$ ряд строго убывает

2) $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\infty} = 0$

Оба условия выполняются $\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4}{\sqrt{n}}$ сходится.

Рассмотрим ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\sqrt{n}} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$ - обобщенно гармонический ряд, $k = 1/2 < 1$, ряд расходится $\Rightarrow$ исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4}{\sqrt{n}}$ сходится условно.

Ответ: ряд сходится условно.

2.15 Область и радиус сходимости степенных рядов

Ряд вида $a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + ... + a_n(x-x_0)^n + ...$, где $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, x_0 \in R$, x -переменная, называется *степенным рядом.* Обозначение $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.

Признак Даламбера для рядов с произвольными членами: Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = D$, то при $D<1$ ряд абсолютно сходится, при $D>1$ ряд расходится, $D=1$ признак не подходит, вопрос о сходимости ряда не решен.

Радиус, интервал, область сходимости степенного ряда

Рассмотрим $D = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a^n(x-x_0)^n}\right| = |x-x_0|\cdot\frac{1}{R}$, где $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{R}$, $R>0$.

При D<1 степенной ряд абсолютно сходится.

$|x-x_0|\cdot\frac{1}{R} < 1$, откуда:

$x_0 - R < x < x_0 + R$ или $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$ - *интервал сходимости ряда*,

$R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ - *радиус сходимости ряда.*

Чтобы найти *область сходимости* ряда, нужно выяснить вопрос о сходимости на концах интервала, т.е. при $x = x_0 - R$ и $x = x_0 + R$.

Пример: Найти интервал, радиус и область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n+2}\cdot x^n$.

Решение:

$D = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{3x(n+2)}{n+3}\right| = |3x|$.

Ряд абсолютно сходится при $D<1$, т.е. $|3x|<1$; $3|x|<1$; $|x|<\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$.

Получаем, $x\in\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ - интервал сходимости ряда,

$R=\frac{1}{3}$ - радиус сходимости ряда.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости:

1) $x=\frac{1}{3}\Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n+2}\cdot\frac{1}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$ - гармонический ряд, расходится $\Rightarrow x=\frac{1}{3}$ не входит в область сходимости ряда.

2) $x=-\frac{1}{3}\Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n+2}(-\frac{1}{3})^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}$

Рассмотрим признак Лейбница: $|u_n|=\dfrac{1}{n+2}$

$\left.\begin{array}{l}1)\ |u_{n+1}|<|u_n|\\ 2)\ \lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+2}=0\end{array}\right\}\Rightarrow$ ряд сходится условно, т.к. ряд, составленный из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$ - расходится $\Rightarrow x=-\frac{1}{3}$ входит в область сходимости ряда.

$x\in\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ - область сходимости ряда.

Ответ: $x\in\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$, $R=\frac{1}{3}$.

2.16 Разложение функций в ряд Тейлора и Маклорена

Если функция $f(x)$ имеет непрерывные производные вплоть до $(n+1)$-го порядка, то ее можно разложить в степенной *ряд Тейлора*:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)(x-a)^2}{2!}+...+\frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}+...$$

При $a=0$ получаем *ряд Маклорена*:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)x^2}{2!}+...+\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}+...,$$

где $a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ - коэффициенты ряда Маклорена.

Разложение некоторых функций в ряд Маклорена

1) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+...+\dfrac{x^n}{n!}+...,\quad x\in R$

2) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+...+\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+...,\quad x\in R$

3) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+...+\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+...,\quad x\in R$

4) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+...+(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+...,\quad x\in(-1;1]$

5) $(1+x)^m=1+mx+\dfrac{m(m-1)\cdot x^2}{2!}+\dfrac{m(m-1)(m-2)\cdot x^3}{3!}+...+\dfrac{m(m-1)...(m-n+1)\cdot x^n}{n!}+...,x\in(-1;1)$

6) $arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ..., x \in R$

С помощью разложения в ряд можно приближенно вычислять значения тригонометрических функций, логарифмов чисел, корней, так называемых «неберущихся» интегралов.

Пример: Вычислить приближенно $\sin 18^0$ с точностью до 0,0001.

Решение:

$$\sin 18^0 = \sin\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^5}{5!} - ...$$

Так как $\frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^5}{5!} < 0{,}0001$, то ограничиваемся двумя членами этого ряда, получим:

$$\sin 18^0 = \sin\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^3}{3!} \approx 0{,}3091.$$

Ответ: 0,3091.

2.17 Элементы качественного анализа дифференциальных уравнений.

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

Общим решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция $y=\varphi(x,C)$, которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

Решение вида $y=\varphi(x,C_0)$ называется *частным решением* дифференциального уравнения.

Задачей Коши называется нахождение любого частного решения дифференциального уравнения вида $y=\varphi(x,C_0)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$.

Интегральной кривой называется график $y=\varphi(x)$ решения дифференциального уравнения на плоскости XOY.

2.18 Дифференциальные уравнения, не содержащие явно переменную *x*. Дифференциальные уравнения, не содержащие явно переменную *y*. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах.

Дифференциальным уравнением порядка n называется уравнение вида:

$F(x, y, y',..., y^{(n)}) = 0$ (или $y^{(n)} = f(x, y, y',..., y^{(n-1)})$).

Решение $y = \varphi(x)$ удовлетворяет начальным условиям $x_0, y_0, y'_0,..., y_0^{(n-1)}$, если $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y'_0$, ... , $\varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Нахождение решения уравнения $F(x, y, y',..., y^{(n)}) = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $x_0, y_0, y'_0,..., y_0^{(n-1)}$, называется *решением задачи Коши.*

Уравнения, допускающие понижение порядка

1) *Уравнения вида* $y^{(n)} = f(x)$, где $f(x)$ – функция непрерывная на некотором промежутке $a<x<b$, то решение может быть найдено последовательным интегрированием.

Пример: Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' = 48x + \cos x - 6$.

Решение:

$$y'' = \int (48x + \cos x - 6)dx = 24x^2 + \sin x - 6x + C_1$$

$$y' = \int (24x^2 + \sin x - 6x + C_1)dx = 8x^3 - \cos x - 3x^2 + C_1 x + C_2$$

$y = \int (8x^3 - \cos x - 3x^2 + C_1 x + C_2)dx = 2x^4 - \sin x - x^3 + 0{,}5C_1 x^2 + C_2 x + C_3$

Ответ: $y = 2x^4 - \sin x - x^3 + 0{,}5C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.

2) Уравнения 2-го порядка, *не содержащие явно искомой функции y*: $F(x, y', y'') = 0$.

Производим замену переменной: $y' = z$; $y'' = z'$ и получаем: $F(x, z, z') = 0$.

Проинтегрировав полученное уравнение, делаем обратную подстановку и интегрируем полученное соотношение последовательно 2 раза, получаем окончательный ответ: $y = \varphi(x, C_1, C_2)$.

3) Уравнения 2-го порядка, *не содержащие явно независимой переменной x*: $F(y, y', y'') = 0$.

Решаем с помощью замены переменной: $y' = p$, $y'' = p \cdot p'$, получаем: $F(y, p, p') = 0$.

Интегрируем данное уравнение и решаем уравнение первого порядка: $\Phi(y, y', C_1, C_2) = 0$.

2.19 Использование дифференциальных уравнений в экономической динамике

Линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ) 2 пор. с постоянными коэффициентами называется уравнение вида $y'' + py' + qy = 0$, где p и q - действительные числа.

Обозначим $y''k^2, y' = k, y = k^0 = 1$. Получим *характеристическое уравнение*: $k^2 + pk + q = 0$.

Общее решение ЛОДУ будет зависеть от корней характеристического уравнения k_1 *и* k_2 следующим образом:

1) $D > 0$, $k_1 \neq k_2$, то $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, где C_1 *и* C_2 - постоянные;

2) $D = 0$, $k_1 = k_2$, то $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x}$, где C_1 *и* C_2 - постоянные;

3) $D < 0$, $k_{1/2} = \alpha \pm \beta i$, то $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$, где α, β, C_1 *и* C_2 - постоянные.

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ) 2 пор. с постоянными коэффициентами называется уравнение вида: $y'' + py' + qy = f(x)$, где $f(x)$ - функция от *x, p* и *q* – действительные числа.

Общее решение данного ЛНДУ есть сумма y_0 - общего решения соответствующего ЛОДУ и y_* - частного решения данного ЛНДУ: $y = y_0 + y_*$.

Правая часть уравнения имеет вид: $f(x) = e^{\alpha x}\left[P_1(x)\cos \beta x + P_2(x)\sin \beta x\right]$, где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – многочлены степени m_1 и m_2 соответственно.

Тогда частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид:

$y_* = x^r e^{\alpha x}\left[Q_1(x)\cos \beta x + Q_2(x)\sin \beta x\right]$,

где число r показывает сколько раз число $\alpha + \beta i$ является корнем характеристического уравнения для соответствующего ЛОДУ, а $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ – многочлены степени m, где m - большая из степеней m_1 и m_2.

2.20 Использование однородных систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами в экономической динамике

Нормальная линейная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами n-го порядка записывается в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t) + f_i(t), \quad i = 1,2,...,n,$$

где $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ − неизвестные функции переменной t, которая часто имеет смысл времени, a_{ij} − заданные постоянные коэффициенты, которые могут быть как действительными, так и комплексными, $f_i(t)$ − заданные (в общем случае комплексные) функции переменной t.

Будем считать, что все указанные функции являются непрерывными на некотором интервале $[a, b]$ действительной числовой оси t.

Полагая

$$X(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\dots\\x_n(t)\end{pmatrix},\ X'(t)=\begin{pmatrix}x_1'(t)\\x_2'(t)\\\dots\\x_n'(t)\end{pmatrix},\ f(t)=\begin{pmatrix}f_1(t)\\f_2(t)\\\dots\\f_n(t)\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix},$$

систему дифференциальных уравнений можно переписать в матричной форме:

$$X'(t)=A\cdot X(t)+f(t).$$

Если вектор $f(t)$ тождественно равен нулю: $f(t)==0$, то система называется *однородной*:

$$X'(t)=A\cdot X(t).$$

Если вектор $f(t)$ отличен от нуля: $f(t)\neq 0$, то система называется *неоднородной*.

Для линейных неоднородных систем, также как и в случае одного линейного неоднородного уравнения, справедлива следующая важная теорема:
Теорема. Общее решение $X(t)$ неоднородной системы представляет собой сумму общего решения $X_0(t)$ соответствующей однородной системы и частного решения $X_1(t)$ неоднородной системы:

$$X(t)=X_0(t)+X_1(t).$$

Еще одним важным свойством линейных неоднородных систем является *принцип суперпозиции*, который формулируется следующим образом:

Если $X_1(t)$ − решение системы с неоднородной частью $f_1(t)$, а $X_2(t)$ − решение такой же системы с неоднородной частью $f_2(t)$, то векторная функция

$$X(t)=X_1(t)+X_2(t)$$

будет являться решением системы с неоднородной частью

$$f(t)=f_1(t)+f_2(t).$$

Рассмотрим наиболее распространенными способами решения подробно.

Решение линейной системы дифференциальных уравнений методом исключения

Используя метод исключения, нормальную линейную систему n уравнений можно привести к одному линейному уравнению n-го порядка. Этот метод удобно использовать для решения простых систем − прежде всего, для систем 2-го порядка.
Рассмотрим однородную систему двух уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases}x'=a_{11}x+a_{12}y\\y'=a_{21}x+a_{22}y\end{cases},$$

где функции x, y зависят от переменной t.

Продифференцируем первое уравнение и подставим производную y' из второго уравнения:

$$x''=a_{11}x'+a_{12}y',\quad\Rightarrow x''=a_{11}x+a_{12}(a_{21}x+a_{22}y),\quad\Rightarrow x''=a_{11}x'+a_{12}a_{21}x+a_{22}(a_{12}y).$$

Из первого уравнения системы выразим $a_{12}y$ и подставим в полученное уравнение. Получаем линейное однородное уравнение 2-го порядка:

$$x''=a_{11}x'+a_{12}a_{21}x+a_{22}(x'-a_{11}x),\quad\Rightarrow\quad x''=a_{11}x'+a_{12}a_{21}x+a_{22}x'-a_{11}a_{22}x,\quad\Rightarrow$$

$$x''-(a_{11}+a_{22})x'+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x=0.$$

Его решение легко построить, если известны корни характеристического уравнения:

$$k^2-(a_{11}+a_{22})k+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=0,$$
$$D=(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})$$
$$k_{1/2}=\frac{a_{11}+a_{22}\pm\sqrt{D}}{2}.$$

В случае действительных коэффициентов a_{ij} корни могут быть как действительными (различными или кратными), так и комплексными. В частности, если коэффициенты a_{12} и a_{21} одного знака, то дискриминант характеристического уравнения всегда будет положительным и, соответственно, корни будут действительными и различными.

После определения функции $x(t)$ другую функцию $y(t)$ можно найти из первого уравнения системы.

Метод исключения можно применять не только к однородным линейным системам. Его можно использовать также для решения неоднородных систем дифференциальных уравнений или систем уравнений с переменными коэффициентами.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЗАНЯТИЯМ

3.1 Практическое занятие 1, 2 (ПЗ-1, 2): Числовые множества

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
Понятия множества, подмножества, объединение множеств, пересечение (произведением) множеств, разность множеств, дополнением множества B до множества A.
Понятие Диаграммы Венна (круги Эйлера)
Отображение множества X во множество Y.
Понятие образа элемента x, и «ε - окрестности» точки x_0.

3.2 Практическое занятие 3, 4 (ПЗ-3, 4): Числовые функции

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
Определение области определения и области значений функции.
Запомнить элементарные функции, их графики.
Понятия четной, нечетной функции.

3.3 Практическое занятие 5, 6 (ПЗ-5, 6): Предел последовательности

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
Понятие числовой последовательности.
Предел числовой последовательности.
Основные свойства сходящихся последовательностей.

3.4 Практическое занятие 7 (ПЗ-7): Предел функции

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
Предел функции в точке и на бесконечности.
Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Теоремы о пределах функций.
Раскрытие неопределенностей.
Два замечательных предела.
Эквивалентные бесконечно малые и их использование при вычислении пределов.
Левый и правый пределы функции.

3.5 Практическое занятие 8 (ПЗ-8): Непрерывность функции

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
Непрерывность функции в точке и на интервале.
Точки разрыва. Классификация точек разрыва.
Асимптоты графика функции: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

3.6 Практическое занятие 9, 10 (ПЗ-9, 10): Производная функции

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
Геометрический, механический и экономический смысл производной.
Правила дифференцирования.
Дифференцирование сложной и обратной функций.
Дифференцирование показательно - степенной функции.
Производная неявной функции.
Производные высших порядков.

3.7 Практическое занятие 11 (ПЗ-11): Геометрический смысл производной и дифференциала функции

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
Определение дифференциала.
Геометрический смысл дифференциала.
Приближенные вычисления с помощью дифференциала.

3.8 Практическое занятие 12 (ПЗ-12): Предельные величины вэкономике

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
Экономический смысл производной.
Предельные издержки, предельная выручка, предельный доход, предельный продукт, предельную полезность, предельную производительность и т.д.
Эластичность функции.
Темп изменения функции.

3.9 Практическое занятие 13 (ПЗ-13): Производные и дифференциалы высших порядков

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
Производные высших порядков:
Производная второго порядка функции.
Производная n-го порядка или n-ой производной от функции
Дифференциал второго порядка функции.
Дифференциал $n-$го порядка.

3.10 Практическое занятие 14 (ПЗ-14): Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
Правило Лопиталя при раскрытии неопределенностей $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

3.11 Практическое занятие 15, 16 (ПЗ-15, 16): Исследование функций с помощью первой производной

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
Возрастание и убывание графика функции.
Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

3.12 Практическое занятие 17 (ПЗ-17): Исследование функций с помощью второй производной

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
Выпуклость и вогнутость графика функции. Точка перегиба.
Алгоритм исследования функции.
Исследование функции. Построение графика.

3.13 Практическое занятие 18 (ПЗ-18): Неопределенный интеграл

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

Непосредственное интегрирование.
Замена переменной.
Интегрирование по частям.

3.14 Практическое занятие 19 (ПЗ-19): Интегрирование рациональных функций
При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
Разложение рациональной дроби на простейшие.
Интегрирование рациональных функций.

3.15 Практическое занятие 20 (ПЗ-20): Определенный интеграл
При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
Вычисление определенных интегралов. Формула Ньютона – Лейбница.
Основные свойства определенного интеграла:
Геометрический и экономический смысл определенного интеграла.
Методы интегрирования в определенном интеграле:
Замена переменной в определенном интеграле, интегрирование по частям.

3.16 Практическое занятие 21 (ПЗ-21): Приложения определенного интеграла.
При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
Площадь фигур на плоскости.
Нахождение объема тела вращения.
Нахождение площади поверхности тела вращения.
Несобственные интегралы первого рода.
Несобственные интегралы второго рода.

3.17 Практическое занятие 22 (ПЗ-22): Функция нескольких переменных
При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
Область определения функции двух переменных.
Непрерывность функции двух переменных.
Предел функции двух переменных.

3.18 Практическое занятие 23 (ПЗ-23): Частные производные
При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
Частные производные первого и второго порядка.
Частные дифференциалы первого и второго порядка.
Полный дифференциал.

3.19 Практическое занятие 24 (ПЗ-24): Производная по направлению, градиент
При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
Производная по направлению.
Градиент.

3.20 Практическое занятие 25 (ПЗ-25): Экстремум функции нескольких переменных
При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
Понятие экстремума.
Необходимое и достаточное условия экстремума.
Функция Кобба-Дугласса.

3.21 Практическое занятие 26 (ПЗ-26): Условный экстремум функции нескольких переменных
При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
Понятие Условный экстремум функции нескольких переменных
Метод множителей Лагранжа для функций двух переменных

Алгоритм исследования функции двух переменных на условный экстремум
Метод множителей Лагранжа для функций n переменных

3.22 Практическое занятие 27 (ПЗ-27): Кратные интегралы
При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
Определение двойного интеграла.
Понятие двойного интеграла.
Свойства двойного интеграла.
Повторные интегралы. Связь между двойными и повторными интегралами
Области интегрирования I и II типа

3.23 Практическое занятие 28 (ПЗ-28): Числовые ряды
При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
Исследование числовых рядов на сходимость.
Признаки сходимости знакоположительных рядов.
Эталонные ряды.

3.24 Практическое занятие 29 (ПЗ-29): Знакочередующиеся ряды
При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
Понятие знакочередующегося ряда.
Признак Лейбница.
Абсолютная и условная сходимость.

3.25 Практическое занятие 30 (ПЗ-30): Степенные ряды
При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
Понятие степенного ряда.
Радиус и интервал сходимости степенного ряда.
Область сходимости степенного ряда.

3.26 Практическое занятие 31 (ПЗ-31): Ряды Маклорена и Тейлора
При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
Разложение функции в ряд Тейлора и Маклорена.
Применение рядов в приближенных вычислениях.

3.27 Практическое занятие 32 (ПЗ-32): Дифференциальные уравнения
При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
Задачи, приводящие к понятию дифференциального уравнения.
Общее решение дифференциального уравнения.
Частное решение дифференциального уравнения.
Задача Коши.
Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными.

3.28 Практическое занятие 33 (ПЗ-33): Некоторые типы дифференциальных уравнений первого порядка
При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
Линейные дифференциальные уравнения.
Уравнения Бернулли. Метод Бернулли.
Однородные дифференциальные уравнения.
Разностные уравнения.

3.29 Практическое занятие 34 (ПЗ-34): Линейные дифференциальные уравнения *n* -го порядка
При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
Понятие и метод решения ЛОДУ второго порядка.

Понятие и метод решения ЛНДУ второго порядка.

3.30 Практическое занятие 35 (ПЗ-35): Однородные системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
Нормальная линейная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
Решение линейной системы дифференциальных уравнений методом исключения
Решение линейной системы дифференциальных уравнений методом неопределенных коэффициентов

Разработала: ______________________________ В.А. Ротова