ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические рекомендации для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Б1.В.16 ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Направление подготовки 38.03.01 Экономика

Профиль образовательной программы Бухгалтерский учет, анализ и аудит

Форма обучения очная

1. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1 Организационно-методические данные дисциплины

№ п.п.	Наименование темы	Общий объем часов по видам самостоятельной работы (*из табл. 5.1 РПД*)				
		подготовка курсового проекта (работы)	подготовка реферата/эссе	индивидуальные домашние задания (ИДЗ)	самостоятельное изучение вопросов (СИВ)	подготовка к занятиям (ПкЗ)
1	2	3	4	5	6	7
1.	Определители				2	2
2.	Матрицы				2	2
3.	Обратная матрица				2	2
4.	Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования				2	2
5.	Системы линейных уравнений				2	2
6.	Методы решения систем линейных уравнений				2	2
7.	Системы линейных неравенств				4	2
8.	Векторы. Действия над векторами				2	2
9.	Скалярное произведение векторов				2	2
10.	Векторное и смешанное произведение векторов				2	4
11.	Базис векторного пространства				4	4
12.	Разложение вектора по базису. Переход к новому базису				4	2
13.	Уравнение прямой линии на плоскости. Способы задания прямой				4	2
14.	Общее уравнение прямой, его частные случаи				2	2
15.	Линии второго порядка				2	2
16.	Плоскость в пространстве				2	2
17.	Прямая в пространстве				2	2
18.	Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве				2	2

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ВОПРОСОВ

2.1 Метод эффективного понижения порядка. Сведение определителя к треугольному виду

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Определение определителей второго и третьего порядка.
2. Минор, алгебраическое дополнение.
3. Теорема Лапласа.
4. Свойства определителей.
5. Метод эффективного понижения порядка.

2.2 Матрицы в экономике

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Определение матрицы.
2. Действия над матрицами, их свойства.

2.3. Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Обратная матрица. Теорема о существовании и единственности обратной матрицы.
2. Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.
3. Применение матриц в модели экономической торговли, модели Леонтьева многоотраслевой экономики.

2.4 Линейная модель обмена

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования.
2. Линейная модель обмена.

2.5 Однородные системы линейных уравнений

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Основные определения и понятия.
2. Решение системы в матричном виде.
3. Решение системы по формулам Крамера

2.6 Матричный метод решения систем линейных уравнений

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Метод Гаусса.
2. Ранг матрицы.
3. Исследование решения систем.
4. Особенности решения однородных систем линейных уравнений.

2.7 Построение области решений системы линейных неравенств

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Решение систем линейных неравенств.
2. Представление выпуклого многогранника
3. Область допустимых решений системы уравнений и неравенств.
3. Признаки коллинеарности и компланарности векторов.
4. Деление отрезка в данном отношении.
5. Скалярное произведение векторов.
6. Проекция вектора на ось, ее свойства.

2.8 Признаки коллинеарности и компланарности векторов. Деление отрезка в данном отношении

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Действия над векторами в геометрической и координатной форме, их свойства.

2. Длина вектора.
3. Признаки коллинеарности и компланарности векторов.
4. Деление отрезка в данном отношении.

2.9 Применение скалярного произведения векторов в экономике
При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Скалярное произведение векторов
2. Проекция вектора на ось, ее свойства

2.10 Применение векторного и смешанного произведения векторов в экономике
При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Понятие векторного произведения векторов
2. Свойства векторного произведения векторов.
3. Выражение векторного произведения в декартовых координатах.
4. Правые и левые тройки векторов.
5. Смешанное произведение векторов

2.11 Линейные отображения. Операции над линейными отображениями
При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Простейшие свойства.
2. Линейные отображения. Операции над линейными отображениями.
3. Матрица линейного отображения.
4. Линейные комбинации. Линейная оболочка. Линейная зависимость системы векторов.
5. Базис и размерность линейных пространств.

2.12 Матрица линейного отображения
При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Векторное пространство векторов. Базис векторного пространства.
2. Разложение вектора по базису.
3. Переход к новому базису

2.13 Линейные зависимости в экономике
При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
2. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с угловым коэффициентом.
3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.
4. Уравнение прямой в отрезках.
5. Угол между двумя прямыми.
6. Условие параллельности и перпендикулярности прямых.

2.14 Вывод формулы расстояния от точки до прямой
При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Общее уравнение прямой, его частные случаи.
2. Расстояние от точки до прямой.
3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с нормальным вектором.
4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с направляющим вектором.
5. Задачи по теме прямая линия на плоскости.

2.15 Кривые спроса и предложения. Равновесная цена
При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Окружность. Каноническое уравнение окружности, его исследование.
2. Эллипс. Каноническое уравнение эллипса, его исследование.
3. Гипербола. Каноническое уравнение гиперболы, его исследование.
4. Парабола. Каноническое уравнение параболы, его исследование.

5. Кривые спроса и предложения.
6. Паутинная модель рынка.

2.16 Способы задания плоскости в пространстве
При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Общее уравнение плоскости, его частные случаи.
2. Способы задания плоскости.

2.17 Способы задания прямой в пространстве
При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Уравнение прямой в пространстве.
2. Способы задания прямой в пространстве

2.18 Условие параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью
При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.
2. Угол между прямой и плоскостью

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЗАНЯТИЯМ

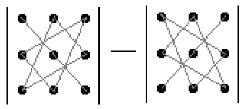
3.1 Практическое занятие 1: Определители

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Вычисление определителей второго и третьего порядка по определению.

Определителем второго порядка называется число, обозначаемое символом Δ (дельта) $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, и определяемое равенством $\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Определителем третьего порядка называется число, обозначаемое символом $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, и определяемое равенством $\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33})$



2. Минор, алгебраическое дополнение.

Минором М $_{Ij}$ элемента a_{ij} определителя называется определитель, полученный из данного в результате вычеркивания i-ой строки и j-го столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}

Алгебраическим дополнением А $_{Ij}$ элемента a_{ij} определителя называется число

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}}$$

3. Вычисление определителей по теореме Лапласа.

ТЕОРЕМА ЛАПЛАСА (о разложении определителя по элементам строки или столбца): Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{array}{l} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ (= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}) \end{array}$$

4. Вычисление определителей методом эффективного понижения порядка.

Метод эффективного понижения порядка заключается в накапливании нулей в какой-либо строке (столбце) с помощью 6-го свойства определителей и последующем вычислении его по теореме Лапласа.

3.2 Практическое занятие 2: Матрицы

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

Действия над матрицами.

Суммой (разностью) двух матриц одинаковой размерности называется матрица той же размерности, элементы которой равны сумме (разности) элементов, стоящих на одинаковых местах.

Произведением матрицы А на действительное число $k \neq 0$ называется матрица В, каждый элемент которой получен умножением каждого элемента исходной матрицы А на это число k.

Произведением матрицы $A_{m\times k}$ и матрицы $B_{k\times n}$ называется матрица $C_{m\times n}$, элементы которой c_{ij} равны сумме произведений элементов i-ой строки матрицы А и соответствующих элементов j-го столбца матрицы В.

$$A_{m\times k} \cdot B_{m\times k} = C_{m\times n} \qquad A_{m\times k} = (a_{ip}) \quad i = 1...m \quad p = 1...k$$

$$B_{k\times m} = (b_{pj}) \quad j = 1...n$$

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{p=1}^{k} a_{ip} \cdot b_{pj}} \qquad C_{m\times n} = (c_{ij})$$

Матрицы можно перемножать лишь в том случае, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

3.3 Практическое занятие 3 : Обратная матрица

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
Нахождение обратной матрицы.
Обратной матрицей по отношению к данной называется матрица, которая будучи умноженной на данную матрицу как слева, так и справа дает единичную матрицу.

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E}$$

ТЕОРЕМА (о существовании и единственности обратной матрицы): Для квадратной матрицы $A_{n\times n}$, определитель которой отличен от нуля ($\Delta(A) \neq 0$), существует обратная матрица A^{-1}, причем единственная.

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}},$$

где A_{ij} - алгебраические дополнения для элементов a_{ij} матрицы A, $i = 1...n,\ j = 1...n$

3.4 Практическое занятие 4: Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
Отыскание собственных векторов и собственных значений матриц.
Число λ называется собственным значением матрицы A, если выполняется равенство

$$\boxed{\Delta(A - \lambda E) = 0}$$

Вектор $\vec{x} = (x_1; x_2; ...; x_n)$, $\vec{x} \neq \vec{0}$ называется собственным вектором, соответствующим собственному значению λ, если $(A - \lambda E) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{0}$.

3.5 Практическое занятие 5: Системы линейных уравнений

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
1. Решение системы в матричном виде.
Этот метод применим для систем n линейных уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Введем в рассмотрение матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

$A \cdot X = B$ -матричное уравнение, которое позволяет записать СЛУ в матричном виде.
Чтобы найти X, умножим равенство с обеих сторон слева на A^{-1}

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

Получили решение СЛУ в матричной форме.

2. Решение системы по формулам Крамера.

Теорема Крамера: Система n линейных уравнений с n неизвестными, определитель которой $\Delta \neq 0$ имеет решение и при этом единственное, определяемое по формулам $\boxed{x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}}$, где Δ_j $(j = 1...n)$-определитель, получаемый из определителя системы Δ заменой *j*-го столбца столбцом свободных членов.

Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое определяется по формулам.

Если $\Delta = 0$ и хотя бы один из вспомогательных определителей $\Delta_j \neq 0$, то система не имеет решений.

Если $\Delta = 0$ и $\Delta_j = 0$, то система либо имеет множество решений, либо не имеет решений. Нужны дополнительные исследования.

3.6 Практическое занятие 6 : Методы решения систем линейных уравнений

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

Решение системы метод Гаусса. Ранг матрицы. Исследование решения систем. Однородные системы линейных уравнений.

Метод Гаусса заключается в том, что с помощью элементарных преобразований системы переходим к равносильной СЛУ ступенчатого или треугольного вида, из которой последовательно находят все переменные.

Теорема Кронекера-Капелли (критерий совместности СЛУ): Для того, чтобы система m линейных уравнений с n неизвестными была совместной (имела решение) необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы был равен рангу расширенной матрицы.

Если rangA=rangB=r, то система совместна, причем:

1) если r=n (n-число неизвестных), то система имеет единственное решение.

2) если r<n, то система имеет бесчисленное множество решение, зависящих от (n-r) параметров.

Если rangA $\neq$ rangB, то система несовместна.

3.7 Практическое занятие 7 : Системы линейных неравенств

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Совокупность точек пространства R^n, координаты которых удовлетворяют уравнению $a_1x_1+ a_2x_2+\ldots+a_nx_n = b$, называется (n - 1)-мерной гиперплоскостью в n-мерном пространстве.

Решением линейного неравенства с n неизвестными

$a_1x_1+ a_2x_2+\ldots+a_nx_n \leq b$

является одно из полупространств, на которые все пространство делит гиперплоскость

$a_1x_1+ a_2x_2+\ldots+a_nx_n = b$.

Решением каждого неравенства системы является некоторое полупространство. Решением системы будет являться пересечение всех полупространств. Это множество будет замкнутым и выпуклым.

2. Область допустимых решений системы уравнений и неравенств**.**

Пусть дана система из m линейных уравнений и неравенств с n неизвестными.

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \ldots + a_{ln}x_n = b_l, \end{array}\right\rangle l \\ \left.\begin{array}{l} a_{l+1\,1}x_1 + a_{l+1\,2}x_2 + \ldots + a_{l+1\,n}x_n \leq b_{l+1}, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m. \end{array}\right\rangle m-l \end{cases}$$

Точка $\bar{x} \in R^n$ называется возможным решением системы, если ее координаты удовлетворяют уравнениям и неравенствам системы. Совокупность всех возможных решений называется областью возможных решений (ОВР) системы.
Возможное решение, координаты которого неотрицательны, называется допустимым решением системы. Множество всех допустимых решений называется областью допустимых решений (ОДР) системы.
ОДР является замкнутым, выпуклым, ограниченным (или неограниченным) подмножеством вR^n.
Допустимое решение системы является опорным тогда и только тогда, когда эта точка являетсяугловой точкой ОДР.
Если ОДР - ограниченное множество, то любое допустимое решение можно представить в виде выпуклой линейной комбинации угловых точек ОДР (в виде выпуклой линейной комбинации опорных решений системы).
Если система имеет хотя бы одно допустимое решение, то среди допустимых решений существует хотя бы одно опорное решение.∅

3.8 Практическое занятие 8 : Векторы. Действия над векторами

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
1. Действия над векторами в геометрической и координатной форме.

Вектором называется направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ с начальной тачкой A и конечной точкой B, который можно перемещать параллельно самому себе.

Суммой двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется новый вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом первого слагаемого вектора, а конец – с концом второго, при условии, что начало вектора $\bar{b}$ лежит в конце вектора $\bar{a}$.

Разностью векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется новый вектор $\vec{c}$, начало которого лежит в конце вычитаемого вектора $\bar{b}$, а конец – в конце уменьшаемого вектора $\bar{a}$, при условии, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют общее начало.

Координатами вектора $\bar{a}$ называются координаты конечной точки его радиус-вектора.

Для векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ *и* $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ действия в координатной форме имеют вид:

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, то $\vec{c} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$

$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, то $\vec{d} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$

$\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$, то $\vec{b} = (\lambda \cdot x_1; \lambda \cdot y_1; \lambda \cdot z_1)$

2. Длина вектора.

Длина вектора находится по формуле:

$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}}$ или $\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

Расстояние между двумя точками $A(x_1; y_1)$ *и* $B(x_2; y_2)$ можно находить как длину вектора $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. Поэтому $\boxed{d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$

3.9 Практическое занятие 9 : Скалярное произведение векторов

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
1. Скалярное произведение векторов.

Скалярным произведением $\vec{a} \cdot \vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ называется число , равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a};\hat{}\,\vec{b})}.$$

Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2}$$

2. Проекция вектора на ось, ее свойства.

Алгебраической проекцией (проекцией) вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется положительное число, совпадающее с длиной вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}\uparrow\uparrow l$ (одинаково направлены); отрицательное число, совпадающее с длиной вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$, если $\overrightarrow{A_1B_1}\uparrow\downarrow l$; 0- если $\overrightarrow{AB}$ перпендикулярен l.

Проекция вектора на ось равна произведению длины этого вектора на косинус угла между вектором и осью

$$\boxed{Пр_l\,\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos\varphi}$$

Проекция вектора на направление другого вектора равна отношению скалярного произведения векторов на длину того вектора, на который опускается проекция

$$\boxed{Пр_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}}.$$

3.10 Практическое занятие 10: Векторное и смешанное произведение векторов

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

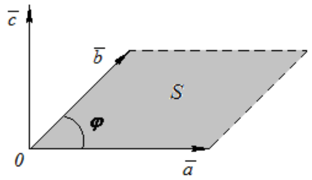
1. Векторное произведение векторов

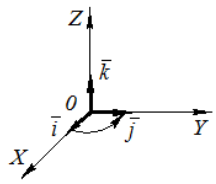
Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется новый вектор $\vec{c}$, для которого выполнены следующие условия:

1) $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$;

2) $|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right)$;

3) Вектора $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют правую тройку (векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ориентированы в пространстве также как базисные вектора $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).





Векторное произведение векторов $\vec{a}\,(x_1;y_1;z_1)$ и $\vec{b}\,(x_2;y_2;z_2)$ вычисляется по формуле:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Площадь параллелограмма и треугольника:

$$S_{пар} = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|; \qquad S_{тр} = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|.$$

Момент силы относительно точки O:

$\vec{M} = \overrightarrow{OA}\times\vec{F}$, где точка A – точка приложения силы $\vec{F}$.

2. Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}\,(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}\,(x_2;y_2;z_2)$ и $\vec{c}\,(x_3;y_3;z_3)$ называется число, вычисляемое по формуле:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Объем параллелепипеда и пирамиды:

$$V_{паралл-да} = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|; \quad V_{пирамиды} = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|.$$

Ориентация векторов в пространстве:

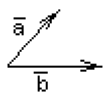
если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, то вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку;

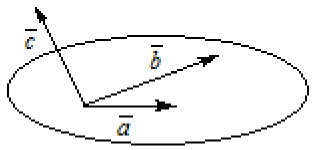
если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$, то вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют левую тройку.

3.11 Практическое занятие 11: Базис векторного пространства

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Упорядоченная пара двух ненулевых, неколлинеарных векторов образует базис на плоскости (а). Упорядоченная тройка ненулевых, некомпланарных векторов образуют базис в пространстве (б).

а) 

б) 

Ортом координатной оси называется единичный вектор, направление которого совпадает с положительным направлением оси.

Орты осей Ox, Oy и Oz обозначают соответственно $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Эти векторы образуют ортонормированный (прямоугольный декартовый) базис.

Если вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис, то любой вектор $\vec{c}$, компланарный с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, может быть разложен по базисным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b},$$

причем коэффициенты α и β - числа, которые являются координатами вектора $\vec{c}$ в базисе $(\vec{a}; \vec{b})$.

2. Линейная зависимость векторов

Вектор $\vec{b}$ называется линейной комбинацией векторов $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}$, если его можно представить в виде $\vec{b} = \lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + ... + \lambda_n\vec{a_n}$, где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in R$.

Векторы $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}$ называются линейно зависимыми, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in R$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, что выполняется равенство $\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + ... + \lambda_n\vec{a_n} = \vec{0}$. Если это равенство выполняется только при $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$, то векторы $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}$ называются линейно независимыми.

3. Размерность пространства – это максимальное число содержащихся в нем линейно независимых векторов. Совокупность n линейно независимых векторов n – мерного пространства называется базисом.

3.12 Практическое занятие 12 : Разложение вектора по базису. Переход к новому базису

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Разложение вектора по базису.

Упорядоченная пара двух ненулевых, не коллинеарных векторов образует базис на плоскости.

Упорядоченная система трёх ненулевых, не кокомпланарных векторов образуют базис в пространстве.
Множество векторов с действительными координатами, в котором определены операции сложения и умножения на число, удовлетворяющие приведенным выше восьми свойствам, называется векторным пространством.

Теорема: Если вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис, то любой вектор $\vec{c}$, компланарный с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, может быть представлен в виде линейной комбинации векторов базиса.

Равенство $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ означает, что $\vec{c}$ разложен по базисным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причем коэффициенты α и β - числа, которые являются координатами вектора $\vec{c}$ в базисе $(\vec{a};\vec{b})$.

2. Переход к новому базису.

Пусть в пространстве R имеются два базиса: старый $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ и новый $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$

Один и тот же вектор $\vec{c}$ имеет различные координаты в различных базисах.

Пусть в старом базисе $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ вектор $\vec{c} = (c_1; c_2; c_3)$. Найдем координаты вектора $\vec{c}$ в новом базисе $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$.

Пусть $\vec{b_1} = (b_{11}; b_{12}; b_{13})$, $\vec{b_2} = (b_{21}; b_{22}; b_{23})$, $\vec{b_3} = (b_{31}; b_{32}; b_{33})$. Обозначим неизвестные координаты вектора $\vec{c} = (x; y; z)$ относительно нового базиса $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$.

Разложим вектор $\vec{c}$ по векторам базиса $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$:

$$\vec{c} = x \cdot \vec{b_1} + y \cdot \vec{b_2} + z \cdot \vec{b_3}$$

$$(c_1; c_2; c_3) = x \cdot (b_{11}; b_{12}; b_{13}) + y \cdot (b_{21}; b_{22}; b_{23}) + z \cdot (b_{31}; b_{32}; b_{33})$$

$$\begin{cases} b_{11}x + b_{12}y + b_{13}z = c_1 \\ b_{21}x + b_{22}y + b_{23}z = c_2 \\ b_{31}x + b_{32}y + b_{33}z = c_3 \end{cases}$$

Решая систему трех уравнений с тремя неизвестными x, y, z, найдем искомые координаты.

3.13 Практическое занятие 13: Уравнение прямой линии на плоскости. Способы задания прямой

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Угловым коэффициентом k прямой l называется тангенс угла наклона между прямой и положительным направлением оси X.

$y = kx + b$ **-** уравнение прямой с угловым коэффициентом *k*.

2. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с угловым коэффициентом.

Пусть прямая l проходит через точку $M_1(x_1; y_1)$.

$y - y_1 = k(x - x_1)$ - уравнение прямой, проходящей через данную точку с угловым коэффициентом.

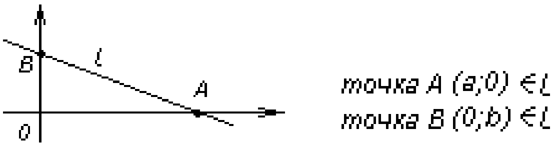
3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

Пусть $M_1(x_1; y_1) \in l$ и $M_2(x_2; y_2) \in l$.

$k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ - формула углового коэффициента прямой, проходящей через две данные точки.

$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ - уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

4. Уравнение прямой в отрезках.



$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ - уравнение прямой в отрезках.

5. Угол между двумя прямыми.

Дано: $\begin{array}{l} l_1: \quad y = k_1 x + b_1 \\ l_2: \; y = k_2 x + b_2 \end{array}$

$tg\varphi == \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ - угол между двумя прямыми.

Углом между двумя прямыми называется угол поворота одной прямой по отношению к другой против хода часовой стрелки.

6. Условие параллельности и перпендикулярности прямых.

Если прямые параллельны, то их угловые коэффициенты равны. $k_1 = k_2$

Обратное утверждение тоже справедливо.

Если прямые перпендикулярны, то произведение их угловых коэффициентов равно -1. $k_1 k_2 = -1$

Если прямые перпендикулярны, то их угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку.

Обратное утверждение тоже справедливо.

3.14 Практическое занятие 14: Общее уравнение прямой, его частные случаи

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Общее уравнение прямой, его частные случаи.

В ПДСК любая прямая задается уравнением первой степени $\boxed{Ax + By + C = 0}$, где $A \neq 0$ или $B \neq 0$.

Обратное утверждение тоже верно, т.е. данное уравнение при произвольных коэффициентах *A, B и C* ($A \neq 0$ или $B \neq 0$) определяет некоторую прямую в ПДСК.

Чтобы найти точку пересечения прямых l_1 *и* l_2 нужно решить систему, составленную из уравнений этих прямых.

$$\begin{array}{l} l_1: \\ l_2: \end{array} \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases}$$

2. Расстояние от точки до прямой.

Вектор $\vec{n}$, перпендикулярный к прямой l, называется нормальным вектором прямой l.

$l: Ax + By + C = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = (A; B)$.

$\boxed{d(M_0; l) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$ - расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $l: Ax + By + C = 0$

3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с нормальным вектором.

$\vec{n} = (A; B)$ - нормальный вектор прямой и $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит прямой.

Тогда $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ - уравнение прямой, проходящей через данную точку с нормальным вектором.

4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с направляющим вектором.

$\vec{p} = (\alpha;\beta)$ - направляющий вектор прямой и $M_0(x_0;y_0)$ принадлежит прямой.

Тогда $\dfrac{x-x_0}{\alpha} = \dfrac{y-y_0}{\beta}$ - уравнение прямой, проходящей через данную точку с направляющим вектором.

3.15 Практическое занятие 15: Линии второго порядка

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Построение линий второго порядка. Нахождение их основных элементов.

Окружностью с центром в точке C и радиусом R называется множество точек плоскости M, равноудаленных от точки C на расстояние R.

$\boxed{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2}$ - каноническое уравнение окружности с центром в точке $C(x_0;y_0)$ и радиусом R.

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек (называемых фокусами) есть величина постоянная, больше чем расстояние между фокусами.

$\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$ - каноническое уравнение эллипса, где $\boxed{c^2 = a^2 - b^2}$

Гиперболой называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами.

$\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$ - каноническое уравнение гиперболы, где $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$

Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

$\boxed{y^2 = 2px}$ - каноническое уравнение параболы, где р – параметр, $\boxed{F(\dfrac{p}{2};0)}$ - фокус, $\boxed{x = -\dfrac{p}{2}}$ - директриса.

2. Составление уравнений линий второго порядка по их основным элементам.

Эксцентриситетом эллипса (ε) называют отношение длин полу фокусного расстояния (с) к большей полуоси (а). $\boxed{\varepsilon = \dfrac{c}{a}}$, $\underline{\underline{0 < \varepsilon < 1}}$

Эксцентриситетом гиперболы (ε) называют отношение длин полу фокусного расстояния (с) к действительной полуоси (а).

$\boxed{y = \dfrac{b}{a}x}$ *и* $\boxed{y = -\dfrac{b}{a}x}$ - асимптоты гиперболы

$A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ – вершины гиперболы

$F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ – фокусы гиперболы

Различные случаи расположения параболы (ветви вверх, вниз, влево, вправо, с вершиной в точке (0,0) и со смещенной вершиной.

3.16 Практическое занятие 16: Плоскость в пространстве

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

Способы задания плоскости в пространстве.

Уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, где A, B, C и D– некоторые действительные числа (A, B, C не обращаются одновременно в 0), задает в пространстве плоскость.

Обратное утверждение тоже верно: Любую плоскость в пространстве можно задать уравнением вида $Ax+By+Cz+D=0$.

Направляющим вектором $\vec{p}$ плоскости называется вектор, лежащий в этой плоскости или в плоскости, параллельной ей.

Вектор $\vec{n}$ называется нормальным вектором плоскости, если он перпендикулярен этой плоскости.

Если плоскость π задана общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, то вектор $\boxed{\vec{n}=(A;B;C)}$ является нормальным вектором плоскости π.

$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$ - уравнение плоскости, проходящей через данную точку с данным нормальным вектором.

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0}$$ - уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.

3.17 Практическое занятие 17: Прямая в пространстве

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

Уравнение прямой в пространстве.

Рассмотрим ПДСК и две плоскости: $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

$$\boxed{l:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}}$$ - общее уравнение прямой в пространстве.

Пусть дан направляющий вектор $\vec{p}=(\alpha;\beta;\gamma)\parallel l$ и точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$, принадлежащая прямой.

$$\boxed{\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}}$$ - каноническое уравнение прямой.

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}}$$ - уравнение прямой, проходящей через две точки.

3.18 Практическое занятие 18: Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

Условие параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

$l:\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}$ и $\pi: Ax+By+Cz+D=0$: $\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}=\frac{C}{\gamma}$.

Углом φ между прямой 1 и плоскостью π называется острый угол между прямой и её проекцией на плоскость.

$$\boxed{\sin\varphi=\frac{\alpha A+\beta B+\gamma C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}}.$$

Разработала: ________________________________ В.А. Ротова