ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические рекомендации для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Б1.Б.05 Математика для экономистов

Направление подготовки 38.03.01 Экономика
Профиль образовательной программы Бухгалтерский учет, анализ и аудит
Форма обучения заочная

1. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1. Организационно-методические данные дисциплины

№ п.п.	Наименование темы	Общий объем часов по видам самостоятельной работы				
		подготовка курсового проекта (работы)	подготовка реферата /эссе	индивидуальные домашние задания (ИДЗ)	самостоятельное изучение вопросов (СИВ)	подготовка к занятиям (ПкЗ)
1	2	3	4	5	6	7
	Элементы линейной алгебры и их применение для решения экономических задач	-	-	-	16	4
	Функция одной и нескольких переменных	-	-	-	46	6
	Ряды и дифференциальные уравнения	-	-	-	20	-
Итого			**-**	**-**	**82**	**10**

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ВОПРОСОВ

2.1. Матрицы. Виды матриц. Действия над матрицами

Матрицей называют таблицу, состоящую из n строк и m столбцов. Элементами матрицы могут быть числа или иные математические объекты.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 4 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}\sin\alpha & \sin\beta\\ \cos\alpha & \cos\beta\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$$

Последняя матрица имеет две строки и два столбца, следовательно, её размер (2x2).

c_{ij} - элемент матрицы C, стоящий в i-ой строке и j-ом столбце.

Если число строк матрицы равно числу столбцов, то такая матрица называется **квадратной**.

Две матрицы одинакового размера называются **равными** ($A=B$), если равны их элементы, стоящие на соответствующих местах.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой.**

Квадратная матрица называется **единичной**, если она имеет вид:

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}_{3x3}\qquad \text{или}\qquad E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}_{4x4}$$

Верхнетреугольной называется матрица у которой все элементы ниже главной диагонали равны нулю.

С матрицами можно производить операции сложения (вычитания), умножения на число, умножения матрицы на матрицу, транспонирования, нахождения матрицы, обратной данной. Для иллюстрации операций будем рассматривать матрицы размера (3x3), если заранее не оговорен другой размер.

Суммой (разностью) двух матриц A и B называется матрица, определяемая равенством:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3x3} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & a_{13}\pm b_{13} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & a_{23}\pm b_{23} \\ a_{31}\pm b_{31} & a_{32}\pm b_{32} & a_{33}\pm b_{33} \end{pmatrix}$$

Произведением числа *m* на матрицу *A* называется матрица, определяемая равенством:

$$m\bullet\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma_{11} & ma_{12} & ma_{13} \\ ma_{21} & ma_{22} & ma_{23} \\ ma_{31} & ma_{32} & ma_{33} \end{pmatrix}$$

Произведение двух матриц *A* и *B* обозначается символом $A{\cdot}B$ и определяется **равенством:**

$$A{\cdot}B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j3} \end{pmatrix}$$

т.е. элемент матрицы - произведения стоящий в i-ой строке и k -м столбце, равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A и k-го столбца матрицы B.

Отсюда вытекает ограничение на размерность матриц A и B: число элементов в строке матрицы A должно равняться числу элементов в столбце матрицы B, чтобы для каждого элемента i-й строки матрицы A нашелся парный элемент из k-го столбца B.

Пример. Найдите произведение матриц, если это возможно:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\ ;\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B, следовательно, их можно перемножить. Чтобы получить элемент c_{11} произведения, умножим первую строку матрицы A на первый столбец матрицы B. Далее, умножая первую строку A на второй столбец B, получим c_{12}**,** умножая первую строку A на третий столбец B, получим c_{13}.

В результате получится матрица С, состоящая из двух строк и трех столбцов:

$$C=\begin{pmatrix} 7 & 12 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}_{2x3}.$$

По отношению к произведению двух матриц переместительный закон, вообще говоря, не выполняется: AB не равно BA.

2.2. Модель Леонтьева – модель многоотраслевой экономики

Рассмотрим модель международной торговли (модель обмена) в виде математической модели.

Пусть имеем n стран - $S_1, S_2, ..., S_n$, национальный доход каждой из которых равен $x_1, x_2, ..., x_n$.

Обозначим через a_{ij}, $i=1...n;\ j=1...n$ долю национального дохода, который страна S_j тратит на покупку товаров у страны S_i.

Будем считать, что весь национальный доход тратится на закупку товаров либо внутри страны, либо на импорт из других стран, т.е. $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad (j=1...n)$.

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется *структурной матрицей торговли*.

Обозначим через $p_i \quad (i = 1 \dots n)$ выручку от внутренней и внешней торговли для страны S_i, тогда $p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$.

Очевидно, что выручка от торговли каждой страны должна быть не меньше её национального дохода, т.е. $p_i \geq x_i$. Но $p_i > x_i$ - невозможный случай, т.к. все страны не могут одновременно получать прибыль, поэтому условие $p_i \geq x_i$ примет вид $p_i = x_i$.

Введем вектор национальных доходов страны $\vec{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, получим матричное уравнение

$A \cdot X = X$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Т.е. задача свелась к отысканию собственного вектора матрицы А, отвечающего собственному значению $\lambda = 1$.

Пример: Структурная матрица торговли трех стран S_1, S_2, S_3 имеет вид $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$.

Найти национальные доходы для сбалансированной торговли.

Решение: Найдем собственный вектор $\vec{x}$, соответствующий собственному значению $\lambda = 1$.

$(A - E)X = 0 \quad \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = 1{,}5c \\ x_2 = 2c \\ x_3 = c \end{cases}$ - метод Гаусса. Т.е.

$\vec{x} = (1{,}5c; 2c; c)$

Таким образом, сбалансированность торговли трех стран достигается при векторе национальных доходов $\vec{x} = (1{,}5c; 2c; c)$, т.е. при соотношении национальных доходов стран $\frac{3}{2} : 2 : 1$ или $3 : 4 : 2$.

Цель балансового анализа – ответить на вопрос, возникающий в макроэкономике и связанный с эффективностью ведения многоотраслевого хозяйства: каким должен быть объем производства каждой из отраслей, чтобы удовлетворить все потребности в продукции этой отрасли. При этом каждая отрасль выступает, с одной стороны, как производитель некоторой продукции, а с другой – как потребитель продукции и своей, и произведенной другими отраслями. Математическая модель Леонтьева позволяет анализировать связь между отраслями.

Задача. В таблице приведены данные об использовании стоимостного баланса за отчетный период, усл. ден. ед.:

№ п/п	Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовый продукт
		Q_1	Q_2		
1	Q_1	3	8	89	100
2	Q_2	5	7	88	100

Требуется:

1) составить матрицу прямых затрат и проверить ее продуктивность;
2) вычислить объемы конечного продукта при увеличении валового выпуска каждой отрасли соответственно на 100% и 50%;
3) Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление отрасли Q_1 увеличить в k =1 раз, а отрасли Q_2 – на 10%.

Решение: 1. Введем в рассмотрение матрицу $X = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ и векторы $\bar{y} = \begin{pmatrix} 89 \\ 88 \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}.$

Составим матрицу прямых затрат *A*, учитывая, что ее элементы $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}: \quad A = \begin{pmatrix} 0{,}03 & 0{,}08 \\ 0{,}05 & 0{,}07 \end{pmatrix}.$

Легко видеть, что сумма элементов столбцов (строк) *A* меньше единицы. Следовательно, в силу второго критерия продуктивности (матрица продуктивна, если максимум сумм элементов её столбцов не превосходит единицы) матрица *A* продуктивна.

2. Уравнение линейного межотраслевого баланса имеет вид: $\vec{x} = A\vec{x} + \vec{y}.$

При увеличении валового выпуска отраслей Q_1 и Q_2 соответственно на 100% и 50% получим новый вектор валового выпуска $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix}.$

Вектор потребления $\vec{y}_1$, соответствующий вектору $\vec{x}_1$, найдем из уравнения баланса:

$$\vec{y}_1 = (E - A)\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}97 & -0{,}08 \\ -0{,}05 & 0{,}93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 182 \\ 129{,}5 \end{pmatrix}.$$

Изменения объемов конечного продукта Q_1 на 182 – 89 = 93 ед. или 104,5%, Q_2 – на 129,5 – 98 = 41,5 ед. на 47,2%.

3. Конечное потребление отрасли Q_1 остается без изменения, а отрасли Q_2 станет равным Получим новый вектор потребления

$$\vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 89 \\ 96{,}8 \end{pmatrix}.$$

Новый вектор валового выпуска $\vec{x}_2$ найдем из уравнения баланса

$$\vec{x}_2 = (E - A)^{-1}\vec{y}_2.$$

$$E - A = \begin{pmatrix} 0{,}97 & -0{,}08 \\ -0{,}05 & 0{,}93 \end{pmatrix}; \quad \textit{Определитель} \quad |E - A| = 0{,}8981.$$

Обратная матрица $(E - A)^{-1} = 0{,}8981 \begin{pmatrix} 0{,}93 & 0{,}08 \\ 0{,}05 & 0{,}97 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}03 & 0{,}09 \\ 0{,}06 & 1{,}08 \end{pmatrix}.$

Откуда $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1{,}03 & 0{,}09 \\ 0{,}06 & 1{,}08 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 89 \\ 96{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100{,}38 \\ 109{,}88 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 & 0{,}09 \\ 6 & 1{,}08 \end{matrix}.$

Валовый продукт отраслей необходимо увеличить Q_1 на 0,38%, Q_2 – на 9,88%.

Продуктивные модели Леонтьева.

ТЕОРЕМА Если для матрицы А с неотрицательными элементами и некоторого вектора $\bar{y}$ с неотрицательными компонентами уравнение $\bar{x} = A\bar{x} + \bar{y}. \qquad (16.6)$ имеет решение $\bar{x}$ с неотрицательными компонентами, то матрица А продуктивна.

Иными словами, достаточно установить наличие положительного решения системы (16.6) хотя бы для одного положительного вектора $\bar{y}$, чтобы матрица А была продуктивной. Перепишем систему (16.6) с использованием единичной матрицы Е в виде $(E - A)\bar{x} = \bar{y}. \qquad (16.7)$

Если существует обратная матрица (Е - А)-1 , то существует и единственное решение уравнения (16.7):

$$\bar{x} = (E - A)^{-1}\bar{y}. \qquad (16.8)$$

Матрица (Е — А)-1 называется матрицей полных затрат.

Существует несколько критериев продуктивности матрицы А. Приведем два из них.

Первый критерий продуктивности. Матрица А продуктивна тогда и только тогда, когда матрица (Е - А)-1 существует и ее элементы неотрицательны.

Второй критерий продуктивности. Матрица А с неотрицательными элементами продуктивна, если сумма элементов по любому ее столбцу (строке) не превосходит единицы: $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leqslant 1,$

причем хотя бы для одного столбца (строки) эта сумма строго меньше единицы.

Рассмотрим применение модели Леонтьева на несложных примерах.

Пример 1. В табл. 16.4 приведены данные по балансу за некоторый период времени между пятью отраслями промышленности. Найти векторы конечного потребления и валового выпуска, а также матрицу коэффициентов прямых затрат и определить, является ли она продуктивной в соответствии с приведенными выше критериями.

Таблица 16.4

№ п/п	Отрасль	Потребление					Конечный продукт	Валовой выпуск, ден. ед.
		1	2	3	4	5		
1	Станкостроение	15	12	24	23	16	10	100
2	Энергетика	10	3	35	15	7	30	100
3	Машиностроение	10	5	10	10	10	5	50
4	Автомобильная промышленность	10	5	10	5	5	15	50
5	Добыча и переработка углеводородов	7	15	15	10	3	50	100

Решение. В данной таблице приведены составляющие баланса в соответствии с соотношениями (16.2): xij — первые пять столбцов, yi — шестой столбец, xi — последний столбец (i,j = 1, 2, 3, 4, 5). Согласно формулам (16.3) и (16.4), имеем

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 5 \\ 15 \\ 50 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}12 & 0{,}48 & 0{,}46 & 0{,}16 \\ 0{,}10 & 0{,}03 & 0{,}70 & 0{,}30 & 0{,}07 \\ 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}05 \\ 0{,}07 & 0{,}15 & 0{,}30 & 0{,}20 & 0{,}03 \end{pmatrix}.$$

Все элементы матрицы А положительны, однако нетрудно видеть, что их сумма в третьем и четвертом столбцах больше единицы. Следовательно, условия второго критерия продуктивности не соблюдены и матрица А не является продуктивной. Экономическая причина этой непродуктивности заключается в том, что внутреннее потребление отраслей 3 и 4 слишком велико в соотношении с их валовыми выпусками.

Пример 2. Табл. 16.5 содержит данные баланса трех отраслей промышленности за некоторый период времени. Требуется найти объем валового выпуска каждого вида продукции, если конечное потребление по отраслям увеличить соответственно до 60, 70 и 30 условных денежных единиц.

Таблица 16.5

№ п/п	Отрасль	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
		1	2	3		
1	Добыча и переработка углеводородов	5	35	20	40	100
2	Энергетика	10	10	20	60	100
3	Машиностроение	20	10	10	10	50

Решение. Выпишем векторы валового выпуска и конечного потребления и матрицу коэффициентов прямых затрат. Согласно формулам (16.3) и (16.4), имеем

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}35 & 0{,}40 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}40 \\ 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}20 \end{pmatrix}.$$

Матрица А удовлетворяет обоим критериям продуктивности. В случае заданного увеличения конечного потребления новый вектор конечного продукта будет иметь вид

$$\bar{y}_* = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}. \qquad (16.9)$$

Требуется найти новый вектор валового выпуска $\bar{x}$ *, удовлетворяющий соотношениям баланса в предположении, что матрица А не изменяется. В таком случае компоненты x1, x2, x3 неизвестного вектора $\bar{x}$ * находятся из системы уравнений, которая согласно (16.4) имеет в данном случае вид

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}05x_1 + 0{,}35x_2 + 0{,}4x_3 + 60, \\ x_2 = 0{,}1x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}4x_3 + 70, \\ x_3 = 0{,}2x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}2x_3 + 30. \end{cases}$$

В матричной форме эта система выглядит следующим образом: $$\bar{x}_* = A\bar{x}_* + \bar{y}_*, \qquad (16.10)$$

Или $$(E - A)\bar{x}_* = \bar{y}_*, \qquad (16.11)$$

где матрица (E — A) имеет вид $(E-A)=\begin{pmatrix} 0{,}95 & -0{,}35 & -0{,}40 \\ -0{,}10 & 0{,}90 & -0{,}40 \\ -0{,}20 & -0{,}10 & 0{,}80 \end{pmatrix}$.

Решение системы линейных уравнений (16.11) при заданном векторе правой части (16.9) (например, методом Гаусса) дает новый вектор $\bar{x}$ * как решение системы уравнений баланса (16.10): $\bar{x}_* = \begin{pmatrix} 152{,}6 \\ 135{,}8 \\ 92{,}5 \end{pmatrix}$.

Таким образом, для того чтобы обеспечить заданное увеличение компонент вектора конечного продукта, необходимо увеличить соответствующие валовые выпуски: добычу и переработку углеводородов на 52,2%, уровень энергетики — на 35,8% и выпуск продукции машиностроения — на 85% по сравнению с исходными величинами, указанными в табл.

Т е о р е м а . (критерий продуктивности). *Матрица* $\mathbf{A} \geq 0$ *продуктивна тогда и только тогда, когда матрица* $\mathbf{S} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ *существует и является неотрицательной.*

Экономический смысл элементов матрицы $\mathbf{S} = (s_{ik})$ заключается в следующем: элемент s_{ik} равен количеству продукции, которое должен выпустить объект P_i, для того чтобы объект P_k мог выпустить одну единицу конечной продукции (а не полного выпуска). В связи с этим элементы s_{ik} носят название**коэффициентов полных затрат**, а матрица **S** – **матрицы коэффициентов полных затрат**.

Приведем еще один достаточный признак продуктивности модели Леонтьева, наиболее удобный для проверки продуктивности матрицы межотраслевого баланса в натурально-стоимостной форме.

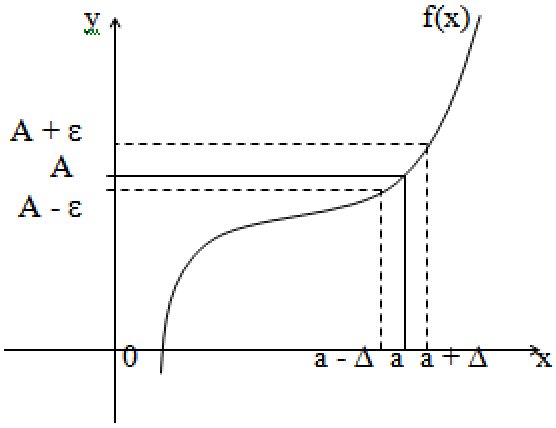
Т е о р е м а *Если матрица* **A** = *(* a_{ij} *) неотрицательна, сумма элементов каждой строки не больше единицы и хотя бы для одной строки строго меньше единицы, то модель Леонтьева, определяемая матрицей* ***A****, продуктивна.*

Таким образом, матрица **A** продуктивна, если $c_{ij} \geq 0$ для любых $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} < 1$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) и существует номер i_0 такой, что $\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} < 1$.

Очевидно, что коэффициенты s_{ij} полных затрат всегда меньше, а могут быть и существенно больше соответствующих коэффициентов a_{ij} прямых затрат, поскольку, во-первых, коэффициенты s_{ij} указывают не только непосредственные поставки продукции объекта P_i объекту P_j, но и поставки продукции объекта P_i другим объектам, для того чтобы последние в свою очередь могли поставить объекту P_j требуемое количество их продукции, и во-вторых, при вычислении коэффициентов s_{ij} берется отношение суммы поставок продукции объекта P_i всем объектам к величине конечной продукции объекта P_j, а эта величина меньше полного выпуска продукции объекта P_j

2.3. Предел функции. Различные типы пределов: односторонние пределы, пределы в бесконечности, бесконечные пределы.

<u>Предел функции в точке.</u>



Пусть функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x = a (т.е. в самой точке x = a функция может быть и не определена)

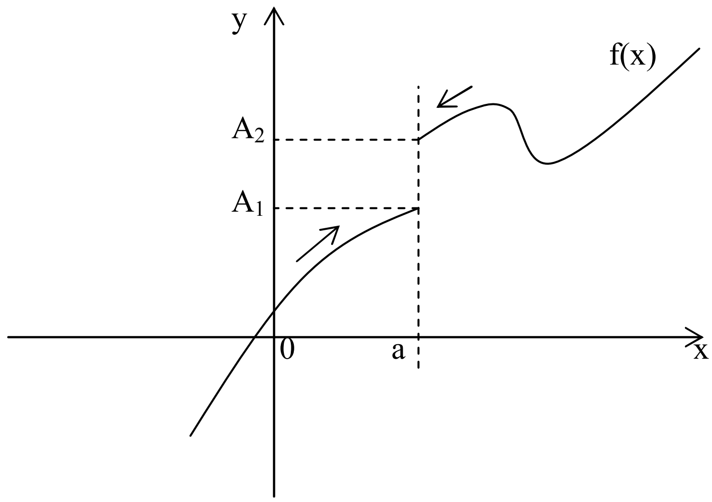
<u>Определение.</u> Число A называется **пределом** функции f(x) при $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\Delta > 0$, что для всех x таких, что $0 < |x - a| < \Delta$ верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

То же определение может быть записано в другом виде:

Если $a - \Delta < x < a + \Delta$, $x \neq a$, то верно неравенство $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Запись предела функции в точке: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

<u>Определение.</u> Если $f(x) \to A_1$ при $x \to a$ только при $x < a$, то $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A_1$ - называется **пределом** функции f(x) в точке x = a **слева**, а если $f(x) \to A_2$ при $x \to a$ только при $x > a$, то $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A_2$ называется **пределом** функции f(x) в точке x = a **справа**.



Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция f(x) не определена в самой точке x = a, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Пределы A_1 и A_2 называются также **односторонними пределами** функции f(x) в точке x = a. Также говорят, что A – **конечный предел** функции f(x).

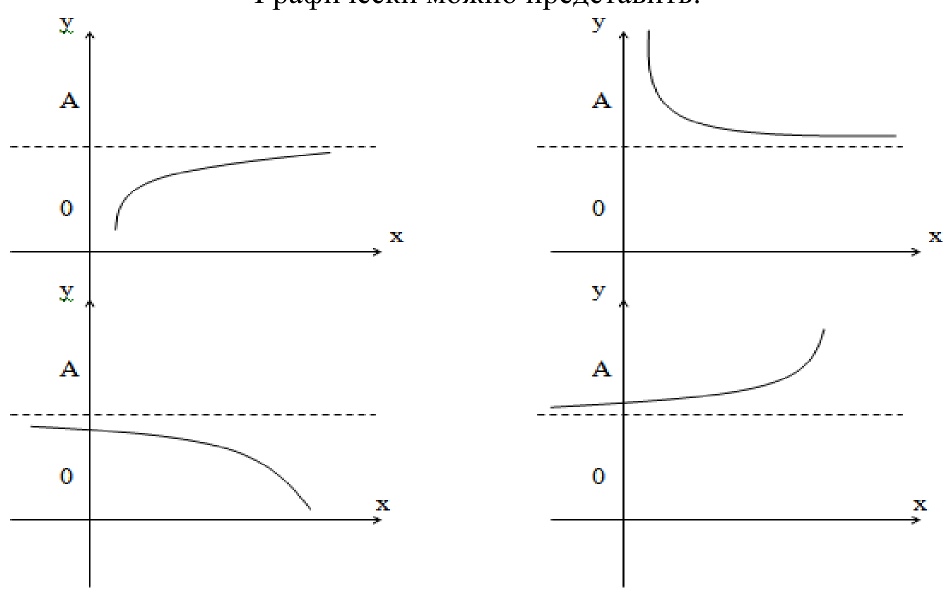
<u>Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности.</u>

<u>Определение.</u> Число A называется **пределом** функции f(x) при $x \to \infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $M > 0$, что для всех x, $|x| > M$ выполняется неравенство $|A - f(x)| < \varepsilon$

При этом предполагается, что функция f(x) определена в окрестности бесконечности.

Записывают: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

Графически можно представить:



Аналогично можно определить пределы $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ для любого x>M и

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ для любого x<M.

<u>Основные теоремы о пределах.</u>

<u>Теорема 1.</u> $\lim\limits_{x\to a} C = C$, где C = const.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции f(x) и g(x) имеют конечные пределы при $x\to a$.

<u>Теорема 2.</u> $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

<u>Теорема 3.</u> $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

<u>Следствие.</u> $\lim\limits_{x\to a} C\cdot f(x) = C\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$

<u>Теорема 4.</u> $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

<u>Теорема 5.</u> *Если f(x)>0 вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, *то A>0.*

Аналогично определяется знак предела при f(x) < 0, f(x) ≥ 0, f(x) ≤ 0.

<u>Теорема 6.</u> *Если g(x) ≤ f(x) ≤ u(x) вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} u(x) = A$, *то и* $\lim\limits_{x\to a} = A$.

<u>Определение.</u> Функция f(x) называется **ограниченной** вблизи точки x = a, если существует такое число M>0, что |f(x)|<M вблизи точки x = a.

<u>Теорема 7.</u> *Если функция f(x) имеет конечный предел при $x\to a$, то она ограничена вблизи точки x = a.*

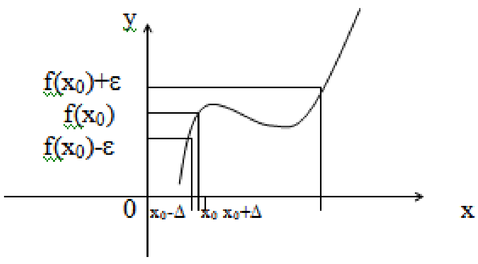
2.4. Непрерывность функции. Точки разрыва функции, их классификация.

<u>Определение.</u> Функция f(x), определенная в окрестности некоторой точки x_0, называется **непрерывной в точке** x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

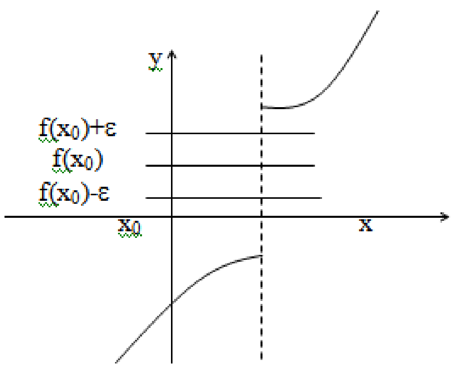
Тот же факт можно записать иначе: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$

<u>Определение.</u> Если функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0, но не является непрерывной в самой точке x_0, то она называется **разрывной** функцией, а точка x_0 – точкой разрыва.

Пример непрерывной функции:



Пример разрывной функции:



Определение. Функция f(x) называется непрерывной в точке x_0, если для любого положительного числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\Delta>0$, что для любых x, удовлетворяющих условию

$$|x-x_0|<\Delta$$

верно неравенство $$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Определение. Функция f(x) называется **непрерывной** в точке $x = x_0$, если приращение функции в точке x_0 является бесконечно малой величиной.

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x) \text{ где } \alpha(x) \text{ – бесконечно малая при } x\to x_0.$$

Свойства непрерывных функций.

1) Сумма, разность и произведение непрерывных в точке x_0 функций – есть функция, непрерывная в точке x_0.

2) Частное двух непрерывных функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ – есть непрерывная функция при условии, что g(x) не равна нулю в точке x_0.

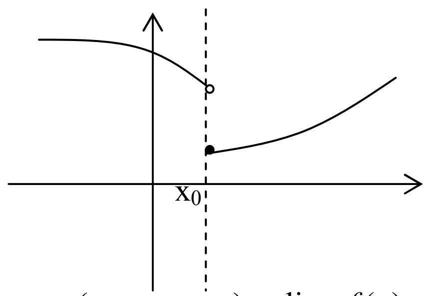
3) Суперпозиция непрерывных функций – есть непрерывная функция.

Это свойство может быть записано следующим образом:
Если u = f(x), v = g(x) – непрерывные функции в точке $x = x_0$, то функция v = g(f(x)) – тоже непрерывнаяфункция в этой точке.

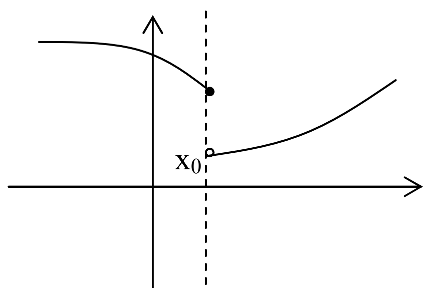
Рассмотрим некоторую функцию f(x), непрерывную в окрестности точки x_0, за исключением может быть самой этой точки. Из определения точки разрыва функции следует, что $x = x_0$ является точкой разрыва, если функция не определена в этой точке, или не является в ней непрерывной.

Следует отметить также, что непрерывность функции может быть односторонней. Поясним это следующим образом.

Если односторонний предел (см. выше) $\lim\limits_{x\to x+0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной справа.



Если односторонний предел (см. выше) $\lim\limits_{x\to x-0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной слева.



Определение. Точка x_0 называется **точкой разрыва** функции f(x), если f(x) не определена в точке x_0 или не является непрерывной в этой точке.

Определение. Точка x_0 называется **точкой разрыва 1- го рода**, если в этой точке функция f(x) имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы.

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0-0} f(x)$$

Для выполнения условий этого определения не требуется, чтобы функция была определена в точке $x = x_0$, достаточно того, что она определена слева и справа от нее.

Из определения можно сделать вывод, что в точке разрыва 1 – го рода функция может иметь только конечный скачок. В некоторых частных случаях точку разрыва 1 – го рода еще иногда называют **устранимой** точкой разрыва, но подробнее об этом поговорим ниже.

Определение. Точка x_0 называется **точкой разрыва 2 – го рода**, если в этой точке функция f(x) не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

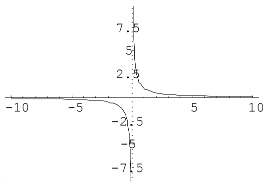
Пример. Функция Дирихле (Дирихле Петер Густав(1805-1859) – немецкий математик, член-корреспондент Петербургской АН 1837г)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x - \textit{рациональное число} \\ 0, & x - \textit{иррациональное число} \end{cases}$$

не является непрерывной в любой точке x_0.

Пример. Функция f(x) = $\frac{1}{x}$ имеет в точке x_0 = 0 точку разрыва 2 – го рода, т.к.

$\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = -\infty$.



Определение. Функция f(x) называется **непрерывной на интервале (отрезке)**, если она непрерывна в любой точке интервала (отрезка).

При этом не требуется непрерывность функции на концах отрезка или интервала, необходима только односторонняя непрерывность на концах отрезка или интервала.

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Свойство 1: (Первая теорема Вейерштрасса (Вейерштрасс Карл (1815-1897)- немецкий математик)). Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке, т.е. на отрезке [a, b] выполняется условие $-M \le f(x) \le M$.

Свойство 2: Функция, непрерывная на отрезке [a, b], принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.

Т.е. существуют такие значения x_1 и x_2, что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$, причем $m \le f(x) \le M$

Отметим эти наибольшие и наименьшие значения функция может принимать на отрезке и несколько раз (например – f(x) = sinx).

Разность между наибольшим и наименьшим значением функции на отрезке называется **колебанием** функции на отрезке.

Свойство 3: (Вторая теорема Больцано – Коши). Функция, непрерывная на отрезке [a, b], принимает на этом отрезке все значения между двумя произвольными величинами.

Свойство 4: Если функция f(x) непрерывна в точке $x = x_0$, то существует некоторая окрестность точки x_0, в которой функция сохраняет знак.

Свойство 5: (Первая теорема Больцано (1781-1848) – Коши). Если функция f(x)- непрерывная на отрезке [a, b] и имеет на концах отрезка значения противоположных знаков, то существует такая точка внутри этого отрезка, где f(x) = 0.

Свойство 7: Если функция f(x) определена, монотонна и непрерывна на некотором промежутке, то и обратная ей функция x = g(y) тоже однозначна, монотонна и непрерывна.

2.5. Формула сложных процентов.

Капитализация процентов — причисление процентов к сумме вклада, позволяет в дальнейшем осуществлять начисление процентов на проценты. Начисление процентов на проценты, используемое в некоторых видах банковских вкладов, или при наличии долга проценты, которые включаются в сумму основного долга, и на них также начисляются проценты. То же, что и сложный процент. Проценты по вкладу с капитализацией могут начисляться ежедневно, ежемесячно, ежеквартально и ежегодно. Если их не выплачивают, то прибавляют к сумме вклада. И в следующем периоде проценты будут начислены уже на большую сумму.

Общая сумма, которую получит вкладчик, при расчёте по сложному проценту будет равна $x \cdot (1+a)^n$, где x — начальная сумма вложенных средств, 0 < a < 1 — годовая процентная ставка, n — срок вклада в годах. При вкладе по ставке s% годовых, после первого года хранения капитал составил бы x плюс s% от неё, то есть возрос бы в $(1+s/100)$ раза. На второй год s% рассчитывались бы уже не от одной копейки, а от величины, большей её в (1 + s/100) раза. И, в свою очередь, данная величина увеличилась бы тоже за год в (1 + s/100) раза. Значит, по сравнению с первичной суммой вклад за два года возрос бы в $(1+s/100)^2$ раз. За три года — в $(1+s/100)^3$ раз.

К году N первичный вклад вырос бы до величины в $(1+s/100)^N$ раз больше первоначальной.

В применении к ежемесячной капитализации формула сложного процента имеет вид:

$$x\cdot(1+(1+s/100)^{1/12}-1)^m=x\cdot(1+s/100)^{m/12},$$

где x — начальная сумма вклада, s — годовая ставка в процентах, m — срок вклада в месяцах.

2.6. Формула непрерывных процентов.

При многократном начислении *простых процентов* начисление делается по отношению к исходной сумме ипредставляет собой каждый раз одну и ту же величину. Иначе говоря,

$$S=P+P\cdot n\cdot i=(1+ni)P,$$

где P — исходная сумма

S — наращенная сумма (исходная сумма вместе с начисленными процентами)

i — процентная ставка, выраженная в долях

n — число периодов начисления

В этом случае говорят о ***простой процентной ставке***.

При многократном начислении *сложных процентов* начисление каждый раз делается по отношени ю к суммес уже начисленными ранее процентами. Иначе говоря,

$$S=(1+i)^nP$$

(при тех же обозначениях).

В этом случае говорят о ***сложной процентной ставке***.

Часто рассматривается следующая ситуация. Годовая процентная ставка составляет j, а процентына числяются m раз в году по сложной процентной ставке равной j / m (например, поквартально, тогда m = 4или ежемесячно, тогда m = 12). Тогда формула для наращенной суммы будет выглядеть:

$$S=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nm}P$$

В этом случае говорят о ***номинальной процентной ставке***. Сравнение сложных процентных ставок с разными интервалами начисления производят при помощи показателя годовая процентная доходность.

Наконец, иногда рассматривают ситуацию так называемых ***непрерывно начисляемых процентов***, т о естьгодовое число периодов начисления m устремляют к бесконечности. Процентную ставку обоз начают δ, аформула для наращенной суммы: $S=e^{\delta n}P$.

В этом случае номинальную процентную ставку δ называют ***сила роста***.

Наращение и дисконтирование. Наращенная сумма в случае непрерывного начисления процентов по ставке j: $\boldsymbol{S=Pe^{jn}}$

Для того чтобы отличать ставку непрерывных процентов от ставок дискретных процентов, ее называют ***силой роста*** и обозначают символом ***δ***. С учетом введенного обозначения равенство (4.1) принимает вид $\boldsymbol{S=Pe^{\delta n}}$ Сила роста представляет собой номинальную ставку процентов при $\boldsymbol{m\to\infty}$.

Задача Сила роста банковского вклада $\delta=0{,}03$. Найти сумму на счете через 2 года, если первоначальная сумма вклада составляет 9000 руб.

Р е ш е н и е. $S=9000e^{0{,}03*2}=9000e^{0{,}06}=9556{,}38$ руб.

Дисконтирование на основе непрерывных процентных ставок осуществляется по формуле $\boldsymbol{P=Se^{-\delta n}}$

Связь дискретных и непрерывных процентных ставок. Дискретные и непрерывные процентные ставки находятся в функциональной зависимости, благодаря которой можно осуществлять переход от расчета непрерывных процентов к дискретным и наоборот. Формулу эквивалентного перехода от одних ставок к другим можно получить, приравнивая соответствующие множители наращения $\boldsymbol{(1+i)^n=e^{\delta n}}$ (Из записанного равенства следует, что $\boldsymbol{\delta=\ln(1+i)}$, откуда $\boldsymbol{i=e^{\delta}-1}$

Задача. Годовая ставка сложных процентов равна 15%. Чему равна эквивалентная сила роста?

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой: $\delta = \ln(1 + i) = \ln(1 + 0{,}15) = 0{,}13976$, т.е. эквивалентная сила роста равна 13,976%.

2.7. Производственная функция и функция полезности.

Функции находят широкое применение в экономической теории и практике. Спектр используемых в экономике функций весьма широк: от простейших линейных до функций, получаемых по определенному алгоритму с помощью так называемых рекуррентных соотношений, связывающих состояния изучаемых объектов в разные периоды времени.

Наиболее часто используются в экономике следующие функции:

1. *Функция полезности (функция предпочтений)* – в широком смысле зависимость полезности, т.е. результата, эффекта некоторого действия от уровня (интенсивности) этого действия.

2. *Производственная функция* – зависимость результата производственной деятельности от обусловивших его факторов.

3. *Функция выпуска* (частный вид производственной функции) – зависимость объёма производства от наличия или потребления ресурсов.

4. *Функция издержек* (частный вид производственной функции) – зависимость издержек производства от объема продукции.

5. *Функции спроса, потребления и предложения* – зависимость объёма спроса, потребления или предложения на отдельные товары или услуги от различных факторов (напр-р, цены, дохода и т.п.).

2.8. Предельные величины в экономике. Эластичность функции, ее свойства и геометрический смысл.

Функции находят широкое применение в экономической теории и практике. Спектр используемых в экономике функций весьма широк: от простейших линейных до функций, получаемых по определенному алгоритму с помощью так называемых рекуррентных соотношений, связывающих состояния изучаемых объектов в разные периоды времени.

1. Задача о производительности труда.

Пусть функция $u = u(t)$ выражает количество произведенной продукции u за время t. Необходимо найти производительность труда в момент времени t_0. За период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ количество произведенной продукции изменится от значения $u_0 = u(t_0)$ до $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$. Тогда средняя производительность труда за этот период времени $z_{cp} = \dfrac{\Delta u}{\Delta t}$.

Очевидно, что *производительность труда в момент времени* t_0 можно определить как предельное значение средней производительности за период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$, при $\Delta t \to 0$, т.е.

$$z = \lim_{\Delta t \to 0} z_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = u'(t_0)$$

2. Пусть функция $y = y(x)$ задает зависимость издержек производства y от количества выпускаемой продукции x. Пусть Δx - прирост продукции, тогда Δy - приращение издержек производства и $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ - среднее приращение издержек производства на единицу продукции.

Производная $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ выражает ***предельные издержки*** *производства и характеризует приближенно дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции.*

Аналогично определяются *предельная выручка, предельный доход, предельный продукт, предельная полезность, предельная производительность* и т.д.

Предельные величины характеризуют *процесс, изменение экономического объекта*. Таким образом, *производная выступает как скорость изменения некоторого экономического объекта (процесса) по времени или относительного другого фактора*.

Рассмотрим **соотношения между средним и предельным доходом** в условиях монопольного и конкурентного рынков.

Замечание: В экономической литературе предельные величины называют также *маржинальными*. При их записи к обычному обозначению величин добавляется буква M. При записи средних величин добавляется буква A. Например: MR – предельный доход, AR – средний доход.

Пусть r – суммарный доход (выручка) от реализации продукции,

p – цена единицы продукции,

q – количество продукции Тогда $r=pq$

В **<u>условиях монополии</u>** одна или несколько фирм полностью контролируют предложение некоторой продукции, а значит и цены на неё. При этом с увеличением цены спрос на продукцию падает. Пусть это происходит по прямой $p=aq+b$, где $a<0,\ b>0,$ т.е. линейная убывающая функция. Тогда $r=(aq+b)q=aq^2+bq$. И средний доход на единицу продукции $r_{cp}=\dfrac{r}{q}=aq+b$.

Предельный доход составит $r_q'=2aq+b$ (рис. 1)

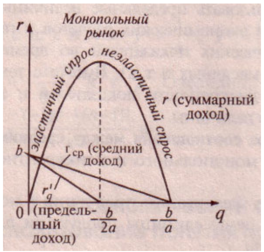


рис. 1

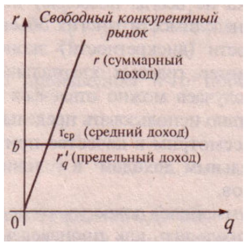


рис. 2

Следовательно, *<u>в условиях монопольного рынка с ростом количества реализованной продукции предельный доход снижается, что приводит к уменьшению среднего дохода</u>*.

В условиях **<u>совершенной конкуренции</u>** каждая фирма не способна контролировать уровень цен. Пусть преобладающая рыночная цена $p=b$. При этом суммарный доход составит $r=bq$ и соответственно средний доход $r_{cp}=\dfrac{r}{q}=b$ и предельный доход $r_q'=b$ (рис. 2).

Таким образом, *<u>в условиях свободного конкурентного рынка средний и предельный доходы совпадают.</u>*

Для исследования экономических процессов и решения прикладных задач используется понятие *<u>эластичности функции.</u>*

<u>ОПР:</u> *<u>Эластичностью функции</u>* $E_x(y)$ называется предел относительного приращения функции y к относительному приращению переменной x при $\Delta x\to 0$:

$$E_x(y)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{x}{y}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x}{y}\cdot y'$$

Эластичность функции показывает приближенно, на сколько процентов изменится функция $y=f(x)$ при изменении независимой переменной x на 1%.

<u>Геометрический смысл:</u>

$E_x(y)=\dfrac{x}{y}\cdot y'=\dfrac{x}{y}tg\alpha$, где $tg\alpha$ - тангенс угла наклона касательной в точке $M(x;y)$

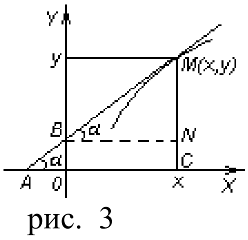


рис. 3

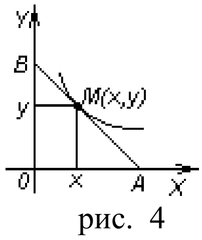


рис. 4

$\Delta MBN:\ \ MN=x\cdot tg\alpha,\ \ MC=y,\ \ \Delta MBN\infty\Delta AMC\Rightarrow\ \dfrac{MN}{MC}=\dfrac{MB}{MA}$. Значит $E_x(y)=\dfrac{MB}{MA}$

Т.е. *<u>эластичность функции (по абсолютной величине) равна отношению расстояний по касательной от данной точки графика функции до точек её пересечения с осями Ох и Оу</u>*.

Если точки A и B находятся по одну сторону от точки M, то эластичность положительна (рис. 3), если по разные, то отрицательна (рис. 4).

<u>Свойства эластичности функции:</u>

1) Эластичность функции равна произведению независимой переменной x на темп изменения функции $T_y = (\ln y)' = \frac{y'}{y}$, т.е. $E_x(y) = x \cdot T_y$.

2) Эластичность произведения (частного) двух функций равна сумме (разности) эластичностей этих функций. $E_x(UV) = E_x(U) + E_x(V)$ и $E_x(\frac{U}{V}) = E_x(U) - E_x(V)$.

3) Эластичности взаимнообратных функций – взаимно обратные величины. $E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}$

Итак, эластичность спроса y относительно цены (или дохода) x показывает приближенно, на сколько процентов изменится спрос при изменении цены (дохода) x на 1%. Причем:

- если эластичность спроса $|E_x(y)| > 1$, то спрос считают *эластичным*;
- если эластичность спроса $|E_x(y)| < 1$, то спрос считают *неэластичным* относительно цены (дохода);
- если эластичность спроса $|E_x(y)| = 1$, то говорят о спросе *с единичной эластичностью*.

Выясним как влияет эластичность спроса относительно цены на суммарный доход *r=pq* при реализации продукции. Пусть *p=p(q)*- произвольная функция (не обязательно линейная). Найдем предельный доход.

$$r'_q = (pq)'_q = p'_q \cdot q + p \cdot 1 = p\left(1 + \frac{q}{p} p'_q\right) = p(1 + E_q(p))$$

По свойству 3: $E_q(p) = \frac{1}{E_p(q)}$ и $E_p(q) < 0$, получим при произвольной кривой спроса

$$r'_q = p\left(1 + \frac{1}{|E_p(q)|}\right)$$

- если спрос эластичен, то предельный доход r'_q - положителен при любой цене. Это означает, что *для продукции эластичного спроса с возрастанием цены суммарный доход от реализации продукции увеличивается*.
- если спрос неэластичен, то предельный доход r'_q - отрицателен при любой цене. Это означает, что *для продукции неэластичного спроса с возрастанием цены суммарный доход от реализации продукции уменьшается*.

Пример 1: Зависимость между издержками производства y и объёмом выпускаемой продукции x выражается функцией $y = 50x - 0{,}05x^3$ (ден. ед.). Определить средние и предельные издержки при объёме продукции 10 ед.

Решение: Функция средних издержек: $y_{cp} = \frac{y}{x} = 50 - 0.05x^2$ $y_{cp}(10) = 45$ (ден. ед.).

Функция предельных издержек: $y'(x) = 50 - 0{,}15x^2$ $y'(10) = 35$ (ден. ед.).

Итак, если средние издержки на производство единицы продукции =45 ден. ед., то предельные издержки (дополнительные затраты на производство ед. продукции), при объёме выпускаемой продукции 10 ед., =35 ден. ед.

Пример 2: Зависимость между себестоимостью единицы продукции y (тыс. руб.) и выпуском продукции x (млрд. руб.) выражается функцией $y = -0{,}5x + 80$. Найти эластичность себестоимости при выпуске продукции, =60 млн. руб.

Решение:

$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y' \Rightarrow E_x(y) = \frac{-0{,}5x}{-0{,}5x + 80} = \frac{x}{x - 160} \Rightarrow$ $E_{x=60}(y) = -0{,}6$, т.е. при выпуске продукции, равном 60 млн. руб., увеличение его на 1% приведет к снижению себестоимости на 0,6%.

Пример 3: Объём продукции u, произведенный бригадой рабочих, может быть описан уравнением $u = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50$ (ед.), $1 \le t \le 8$, где t – рабочее время в часах. Вычислить производительность труда, скорость и темп её изменения через час после начала работы и за час до её окончания.

Решение: Производительность труда: $z(t) = u'(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100$ (ед./ ч.)

Скорость производительности: $z'(t) = -5t + 15$ (ед./ ч^2)

Темп изменения производительности: $T_z(t) = \left(\ln z(t)\right)' \Rightarrow T_z(t) = \frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{2t-6}{t^2-6t-40}$ (ед./ч.)

Если $t_1 = 1$, то $z(1) = 112{,}5$ (ед./ ч.), $z'(1) = 10$ (ед./ ч^2), $T_z(1) = 0{,}09$ (ед./ч.)

Если $t_2 = 8 - 1 = 7$, то $z(7) = 82{,}5$ (ед./ ч.), $z'(7) = -20$ (ед./ ч^2), $T_z(7) = -0{,}24$ (ед./ч.)

Итак, к концу работы производительность труда снижается. Изменение знаков говорит о том, что увеличение производительности труда в первые часы рабочего дня сменяется её снижением в последние часы.

Пример 4: Опытным путем установлены функции спроса $q = \frac{p+8}{p+2}$ и предложения $s = p + 0{,}5$, где q и s – количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени, p – цена товара. Найти: а) равновесную цену; б) эластичность спроса и предложения для этой цены; в) изменение дохода при увеличении цены на 5% от равновесной.

Решение:

а) Равновесная цена определяется из условия $q=s$: $\frac{p+8}{p+2} = p + 0{,}5 \Rightarrow p = 2$ (ден. ед.) - равновесная цена.

б) $E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y'$

$E_p(q) = -\frac{6p}{(p+2)(p+8)}$ - эластичность спроса и $E_p(s) = \frac{2p}{2p+1}$ - эластичность предложения.

Для равновесной цены $p=2$: $E_{p=2}(q) = -0{,}3$ и $E_{p=2}(s) = 0{,}8$.

$E_{p=2}(q) < 1$ и $E_{p=2}(s) < 1 \Rightarrow$ спрос и предложение при равновесной цене неэластичны. Т.е. при увеличении цены p на 1% спрос уменьшится на 0,3%, а предложение увеличится на 0,8%.

в) При увеличении цены на 5% от равновесной спрос уменьшится на $5 \cdot 0{,}3 = 1{,}5\%$, значит доход возрастет на 3,5%.

Пример 5: Как связаны предельные и средние полные затраты предприятия, если эластичность полных затрат равна 1?

Решение:

Пусть $y = f(x)$ - полные затраты предприятия, где x – объём выпускаемой продукции.

Средние затраты на производство ед. продукции $y_{ср} = \frac{y}{x}$

$E_x(y) = 1$ и $1 = \frac{x}{y} \cdot y' \Rightarrow y' = \frac{y}{x}$ - предельные издержки предприятия.

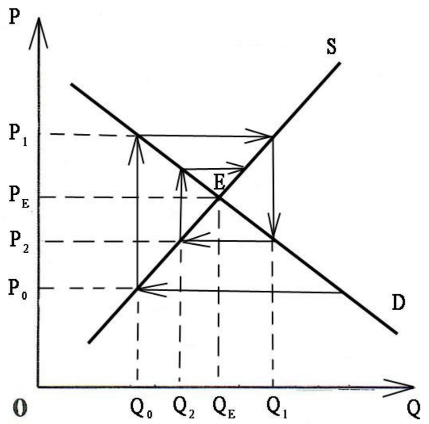
Итак, $y_{ср} = y'$, т.е. предельные издержки = средним издержкам.

Заметим: полученное утверждение верно только для линейных функций издержек.

2.9. Паутинные модели рынка.

Паутинообразная модель рынка — это динамическая модель рынка, показывающая способность рынка к самостоятельному установлению равновесия в результате взаимодействия спроса и предложения.

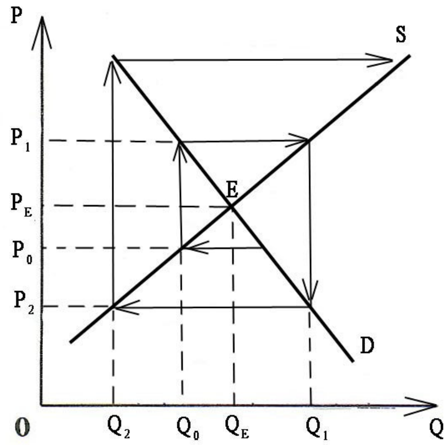
В данной модели предложение реагирует на изменение спроса не сразу, а с запозданием, что приводит к возникновению ценовых колебаний. В экономической теории различают *затухающие*, *усиливающиеся* и *равномерные* колебания цены.



Паутинообразная модель рынка с затухающими колебаниями цен

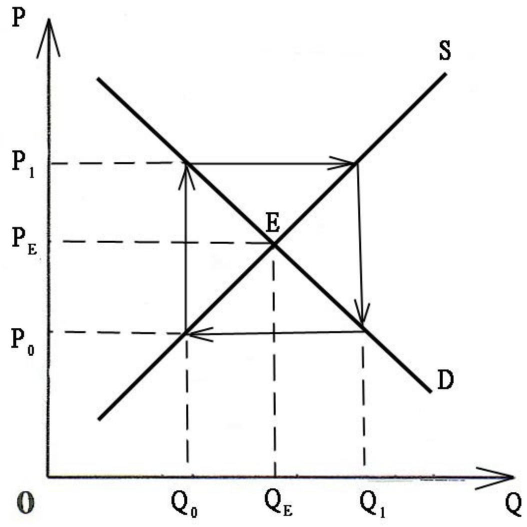
На первом графике представлена паутинообразная модель рынка с затухающими колебаниями цен. Эти колебания происходят когда кривая предложения более крутая, чем кривая спроса. В результате этих затухающих колебаний на рынке восстанавливается равновесие. Первоначально на рынке сложилась ситуация когда продавцы предлагают свой товар по цене P_0 и в объеме Q_0, т.е. на уровне ниже равновесного состояния рынка. При данной цене на рынке возникает дефицит товара, из-за которого цена начинает повышаться до уровня P_1 и у производителей возникнет желание увеличить производство товара до уровня Q_1. Естественно, что рано или поздно при повышенной цене спрос неминуемо сократится и окажется меньше предложения. На рынке возникнет избыток товара, что подтолкнет продавца снизить цену до уровня P_2и снизить предложение товара до уровня Q_2. В результате дальнейших подобных колебаний рынок рано или поздно найдет тот равновесный уровень, который будет отвечать требованиям продавца и покупателя.

На втором графике представлена противоположная первой паутинообразная модель рынка с усиливающимися колебаниями цен, которые свойственны в случае когда кривая спроса имеет более крутой наклон, чем кривая предложения. В этом случае цена будет все дальше отдаляться от равновесного уровня. Теоретически при таких колебаниях и все большего отдаления от равновесного уровня рынок может разрушиться.



Паутинообразная модель рынка с усиливающимися колебаниями цен

На третьем графике представлена паутинообразная модель рынка с равномерными колебаниями цен. Еще одна возможная ситуация на рынке, которая может возникнуть в случае когда кривая спроса и предложения имеет одинаковый наклон.



Паутинообразная модель рынка с равномерными колебаниями цен

В этом случае цена колеблется в определенном диапазоне не приближаясь к равновесному уровню, а рынок находится либо в состоянии дефицита, либо в состоянии избытка товара.

Подводя итог, можно сказать, что паутинообразная модель рынка показывает, что:

- колебания цен возникают в результате запоздалой реакции продавца на изменение спроса;
- не во всех случаях равновесие на рынке достигается самостоятельно.

2.9. Первообразная и неопределенный интеграл. Таблица неопределенных интегралов. Свойства неопределенного интеграла. Замена переменной в неопределенном интеграле, интегрирование по частям.

Одной из основных задач дифференциального исчисления является отыскание производной заданной функции. Обратной задачей является нахождение по данной функции $f(x)$ такой функции $F(x)$, производная которой была бы равна функции $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$.

Восстановление функции по известной производной этой функции составляет одну из основных задач интегрального исчисления.

<u>ОПР:</u> Функция $F(x)$ называется <u>*первообразной*</u> для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, если для всех значений x из этого промежутка выполняется равенство

$$\boxed{F'(x)=f(x)}$$

<u>Примеры:</u> 1) $F(x) = \sin x$ - первообразная для функции $f(x) = \cos x$ на множестве R, т. к. $(\sin x)' = \cos x, \forall x \in R$

2) $F(x) = x^3$ - первообразная для функции $f(x) = 3x^2$ на множестве R, т. к. $(x^3)' = 3x^2$

<u>Зам:</u> $F(x) = x^3 + C$, где C=const тоже является первообразной для функции $f(x) = 3x^2$, т. к. $(x^3 + C)' = 3x^2$

<u>ТЕОРЕМА:</u> Если $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, то любая другая первообразная для функции $f(x)$ на этом промежутке X, может быть представлена в виде $F(x) + C$, где C- некоторая постоянная.

<u>Доказательство:</u> Пусть $\hat{O}(x)$ - другая первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке X,

т. е. $\Phi'(x) = f(x)$

Рассм. $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \Rightarrow$

$\Phi(x) - F(x) = C \quad \Rightarrow \quad \Phi(x) = F(x) + C$ ч. т. д.

<u>ОПР:</u> Если функция $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$, то множество функций $F(x) + C$, где C=const, называется <u>*неопределённым интегралом*</u> от функции $f(x)$ и обозначается символом

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}$$

f(x)- подынтегральная функция, f(x)dx-подынтегральное выражение, x- переменная интегрирования.

Пример: Проверить, что $\int 4x^3dx = x^4 + C$

Продифференцируем: $(x^4 + C)' = 4x^3$, получим подынтегральную функцию $\Rightarrow$ интегрирование выполнено верно.

Свойства неопределенного интеграла.

1) $(\int f(x)dx)' = f(x) \quad u \quad d(\int f(x)dx) = f(x)dx$

Доказательство: 1) $(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)$

2) $d(\int f(x)dx) = (\int f(x)dx)'dx = f(x)dx$

2) $\int dF(x) = F(x) + C$

Доказательство: $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$

3) $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$

4) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Замена переменной в неопределенном интеграле, интегрирование по частям.

Часто введение новой переменной позволяет свести нахождение интеграла к нахождению табличного, т. е. перейти к непосредственному интегрированию.

Рассмотрим $\int f(x)dx$ Обозначим $x = \varphi(t)$ тогда $dx = d(\varphi(t)) \Rightarrow dx = \varphi'(t)dt$

подставим в исходный интеграл:

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt}$$

Зам: На практике обычно обозначают некоторую функцию от x через t $\underline{\psi'(x) = t}$

Примеры:

1) $\int \frac{x^3dx}{(x-1)^2} = \left| \begin{array}{r} x - 1 = t \Rightarrow d(x-1) = dt \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{(t+1)^3 dt}{t^2} = \int \frac{t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{t^2} dt = \frac{t^2}{2} + 3t + 3\ln|t| - \frac{1}{t} + C =$

$\frac{(x-1)^2}{2} + 3x - 3 + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$

2) $\int \frac{x^4dx}{x^5 + 7} = \left| \begin{array}{c} x^5 + 7 = t \\ d(x^5 + 7) = dt \\ (x^5 + 7)'dx = dt \\ 5x^4dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{5}\ln|t| + C = \frac{1}{5}\ln|x^5 + 7| + C$

3) $\int \sin^2 x \cos x dx = \left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ d(\sin x) = dt \\ (\sin x)'dx = dt \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$

Рассмотрим непрерывные функции $u(x)$ и $v(x)$. Пусть существуют их производные $u'(x)$ и $v'(x)$.

Рассм. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$

Рассм. $d(u \cdot v) = (uv)'dx = u'(x)v(x)dx + u(x)v'(x)dx = vdu + udv$

Рассм. $\int d(uv) = \int (vdu + udv)$

$uv = \int vdu + \int udv$ получим *формулу интегрирования по частям*

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

Выпишем классы интегралов, решаемых этим методом:

I класс: $\left.\begin{array}{l}\int P(x)e^{ax}dx\\ \int P(x)\sin axdx\\ \int P(x)\cos axdx\end{array}\right\}$ $\quad a\in R$, $u=P(x)$, $dv=\begin{cases}e^{ax}dx\\ \sin axdx\\ \cos axdx\end{cases}$

II класс: $\left.\begin{array}{l}\int P(x)\ln axdx\\ \int P(x)\arcsin axdx\\ \int P(x)\arccos axdx\\ \int P(x)arctgaxdx\\ \int P(x)arcctgaxdx\end{array}\right\}$ $\quad a\in R$, $u=\begin{cases}\ln ax\\ \arcsin ax,\arccos ax\\ arctgax, arcctgax\end{cases}$ $dv=P(x)dx$

<u>Примеры:</u>

$$1)\ \int x^2e^{-2x}dx=\left|\begin{array}{c}u=x^2\\ dv=e^{-2x}dx\\ du=d(x^2)\\ u=2xdx\\ v=\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}\end{array}\right|=-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}+\int e^{-2x}xdx=\left|\begin{array}{c}u=x\\ dv=e^{-2x}dx\\ du=dx\\ v=\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}\end{array}\right|=-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}+$$

$$+(-\frac{1}{2}xe^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}dx)=-\frac{1}{2}e^{-2x}(x^2+x+\frac{1}{2})+C$$

$$2)\ \int\ln(2x-5)dx=\left|\begin{array}{c}u=\ln(2x-5)\\ dv=dx\\ du=d(\ln(2x-5))\\ du=\frac{2}{2x-5}dx\\ v=\int dx=x\end{array}\right|=x\ln(2x-5)-\int\frac{2xdx}{2x-5}=x\ln(2x-5)-x-\frac{5}{2}\ln|2x-5|+C$$

III класс: Под знаком интеграла обе функции не алгебраические

$\int e^{ax}\sin bxdx \quad \int\sqrt{a^2-x^2}dx$

$\int e^{ax}\cos bxdx \quad \int\sqrt{x^2-a^2}dx$

Без разницы, что обозначать через u и dv. Метод применяется два раза, главное сохранить обозначение.

<u>Примеры:</u>

1)

$$\int e^x\sin 5xdx=\left|\begin{array}{c}u=e^x\\ dv=\sin 5xdx\\ du=e^xdx\\ v=\int\sin 5xdx=-\frac{1}{5}\cos 5x\end{array}\right|=-\frac{1}{5}e^x\cos 5x+\frac{1}{5}\int e^x\cos 5xdx=\left|\begin{array}{c}u=e^x-\text{подстановка}\\ \text{такая же, как и в первый раз}\\ dv=\cos 5xdx\\ du=e^xdx\\ v=\int\cos 5xdx=\frac{1}{5}\sin 5x\end{array}\right|$$

$=-\frac{1}{5}e^x\cos 5x+\frac{1}{25}e^x\sin 5x-\frac{1}{25}\int e^x\sin 5xdx$ Интеграл повторился. Обозначим его через I, получим:

$$I==-\frac{1}{5}e^x\cos 5x+\frac{1}{25}e^x\sin 5x-\frac{1}{25}I$$

$$I=\frac{5}{26}e^x(-\cos 5x+\frac{1}{5}\sin 5x)+C$$

2.10. Формула Ньютона-Лейбница. Геометрические приложения определенного интеграла.

Вычисление определённого интеграла с помощью $\lim\sigma$ затруднительно, поэтому существует другой метод, основанный на теореме.

ТЕОРЕМА *(Ньютона-Лейбница):* Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и F(x)-некоторая её первообразная на этом отрезке, то справедлива формула: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

формула Ньютона- Лейбница

Доказательство: $\int_a^x f(x)dx = \Phi(x) - \textit{по определению}$ $\int_a^x f(x)dx = F(x) + C - \textit{по условию теоремы}$

Т. к. разность двух первообразных есть const , то Φ(x)-F(x)=C

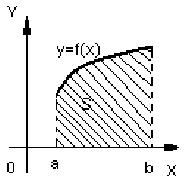
Φ(x)=F(x)+C $\Rightarrow \int_a^x f(x)dx = F(x) + C$

Пусть x=a: $\int_a^a f(x)dx = F(a) + C \Rightarrow 0 = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a) \Rightarrow \int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a)$

Пусть x=b: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Пример: $\int_1^3 x^2 dx = 8\frac{2}{3}$

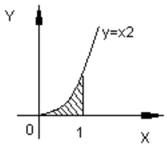
Пусть в ПДСК задана криволинейная трапеция, ограниченная отрезком $[a;b]$ на оси OX, прямыми x=a и x=в и сверху графиком функции $y = f(x)$ непрерывной на этом отрезке , её площадь вычисляется по формуле $S = \int_a^b f(x)dx$



Определённый интеграл от неотрицательной непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ численно равен площади криволинейной трапеции с основанием $[a;b]$, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$.

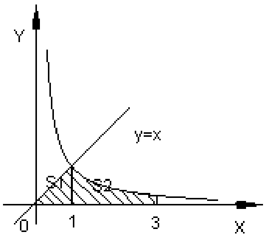
Примеры: Найти площадь фигуры, ограниченной

1) $y = x^2, x = 1 \textit{ и осью } OX$



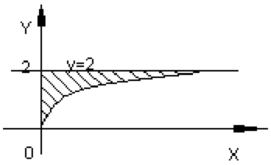
$$S = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

2) $y = x, y = \frac{1}{x^2}, y = o, x = 3$



$$S = S1 + S2 = \int_0^1 xdx + \int_1^3 \frac{1}{x^2}dx = 1\frac{1}{6}$$

3) $y = \sqrt{x}, y = 2, x = 0$



$$S = \int_0^4 (2 - \sqrt{x})dx = 2\frac{2}{3}$$

2.11. Функции нескольких переменных. Поверхности (линии) уровня функции. Элементарные функции нескольких переменных. Частные производные. Экстремум функции нескольких переменных.

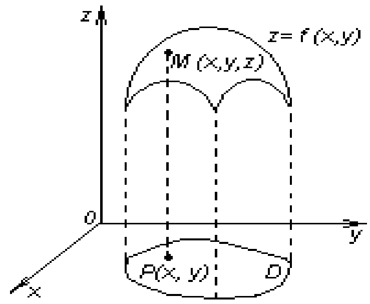
ОПР: *Функцией f двух переменных* $z = f(x,y)$ называется зависимость (закон), по которой каждой паре значений (x,y) из некоторой области $D(x,y)$ соответствует единственное значение $z \in E$.

Тогда x и y – независимые переменные (аргументы),

D – область определения (или существования) функции,

E – область значений функции.

Рассмотрим ПДСК. Если каждой точке на плоскости с координатами (x,y) поставить в соответствие аппликату $z = f(x,y)$, то получим некоторую поверхность в пространстве. Т.о. под *графиком функции двух переменных* будем понимать поверхность, образованную множеством точек $M(x,y,z)$.

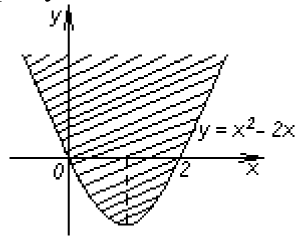


Область определения функции D геометрически представляет собой некоторую часть плоскости Oxy, ограниченную линиями, которые могут принадлежать или не принадлежать этой области. В первом случае область D называется *замкнутой* и обозначается $\overline{D}$, во втором – *открытой*.

Пример: Найти область определения D и область значений E функции $z = \ln(y - x^2 + 2x)$.

$D_Z: \quad y - x^2 + 2x > 0$

Построим границу области D: $y = x^2 - 2x$. Данное уравнение задает параболу, т.к. парабола не принадлежит области D, то она изображается пунктиром. Легко убедиться в том, что любая точка внутри параболы удовлетворяет данному неравенству, в то время, как любая точка, расположенная за параболой - не удовлетворяет. Заштрихуем область D.



Т.к. выражение под знаком логарифма может принимать сколь угодно малые и сколь угодно большие положительные значения, то область значений функции $E: z \in (-\infty; +\infty)$

Обобщим сказанное выше.

ОПР: Функцией n- переменных $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется зависимость (закон), по которой каждой совокупности $(x_1, x_2, ..., x_n)$ из некоторой области n – мерного пространства, ставится в соответствие единственное значение u.

Линии уровня.

Пусть дана функция $z = f(x,y)$. Будем придавать переменной z некоторые значения $c_1, c_2, ..., c_n$ из области значений функции. Получим функции одной переменной $f(x,y) = c_1$, $f(x,y) = c_2, \ldots,$ $f(x,y) = c_n$, графиками которых будут являться некоторые линии на плоскости, называемые *линиями уровня*. Графически это означает, что поверхность $z = f(x,y)$, пересекается плоскостями $z = c_1$, $z = c_2, ...,$ $z = c_n$ параллельными друг другу и плоскости Oxy.

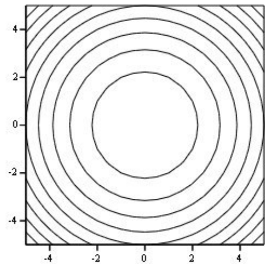
Пример: Построить линии уровня и изображение поверхности $z = x^2 + y^2$

$z = 0: \quad x^2 + y^2 = 0$ - точка (0,0)

$z = 1: \quad x^2 + y^2 = 1$ - окружность

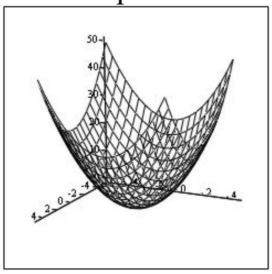
$z = 4: \quad x^2 + y^2 = 4$ и т. д.

Линии уровня



z

Изображение поверхности



z

Если переменной x дать некоторое приращение Δx, y оставить постоянной, то функция $z = f(x, y)$ получит приращение $\Delta_x z$, называемое <u>*частным приращением функции z по переменной x.*</u>

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Аналогично, если переменная y получает приращение Δy, а x остается постоянной, то <u>*частным приращением функции z по переменной y:*</u>

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

<u>ОПР:</u> Если существуют пределы

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = f'_x(x, y)$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = f'_y(x, y),$$

то они называются <u>*частными производными функции* $z = f(x, y)$</u> по переменным x и y соответственно.

Аналогично определяются частные производные функций любого числа независимых переменных.

Т.к. частная производная по любой переменной является производной по этой переменной, найденной при условии, что остальные переменные – постоянны, то все правила и формулы дифференцирования одной переменной применимы для нахождения частных производных функций любого числа переменных.

Экстремум функции нескольких переменных. Пусть задана некоторая функция z=f(x, y).

<u>*Определение 1*</u>. Точка M_0 (x_0; y_0) называется точкой максимума функции z=f(x, y), если можно указать такую окрестность с центром в точке M_0 (x_0; y_0), что для любой точки (x, y) из этой окрестности будет выполняться неравенство $f(x_0, y_0) > f(x, y)$.

<u>*Определение 2.*</u> Точка M_0 (x_0; y_0) называется точкой минимума функции z=f(x,y), если можно указать такую окрестность с центром в точке M_0 (x_0; y_0), что для любой точки (x, y) из этой окрестности будет выполняться неравенство $f(x, y) > f(x_0, y_0)$.

<u>*Определение 3.*</u> Точки максимума и минимума функции z=f(x, y) называются точками экстремума, а значение функции в этих точках называются <u>экстремальными.</u>

Рассмотрим необходимый признак существования экстремума функции двух переменных:

<u>*Теорема:*</u> Если функция z=f(x, y) в данной точке (x_0, y_0) имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю, т.е.

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = 0 \quad и \quad \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = 0$$

<u>Заметим,</u> что экстремум функции z = f(x ,y) может наблюдаться как в стационарных точках так и в точках, где не существуют частные производные. Такие точки называются *критическими.*

Рассмотрим достаточное условие (признак) существования экстремума функции двух переменных.

Теорема: Пусть в некоторой области, содержащей критическую точку (x_0, y_0) функции z=f(x, y), z = f(x ,y) - непрерывна и имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно. Тогда в точке (x_0, y_0)

1) функция f(x, y) имеет максимум, если
$$f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot f''_{yy}(x_0,y_0)-\left[f''_{xy}(x_0,y_0)\right]^2 \succ 0 \quad и \quad f''_{xx}(x_0,y_0)\prec 0;$$
2) функция f(x, y) имеет минимум, если
$$f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot f''_{yy}(x_0,y_0)-\left[f''_{xy}(x_0,y_0)\right]^2 \succ 0 \quad и \quad f''_{xx}(x_0,y_0)\succ 0;$$
3) функция f(x, y) в точке (x_0, y_0) не имеет ни максимум ни минимум, если
$$f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot f''_{yy}(x_0,y_0)-\left[f''_{xy}(x_0,y_0)\right]^2 \prec 0;$$
4) если $f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot f''_{yy}(x_0,y_0)-\left[f''_{xy}(x_0,y_0)\right]^2 = 0,$ то нельзя сказать, есть или нет в точке M_0(x_0, y_0) экстремум. Нужны специальные более тонкие методы исследования.

2.12. Производственная функция Кобба-Дугласа.

[Cobb—Douglas production function] — *производственная функция*, примененная американскими исследователями Ч. Коббом и *П. Дугласом* при анализе развития экономики США в 20—30-х гг. XX века. Имеет простую алгебраическую форму:
$N = A \cdot L^{\alpha}K^{\beta}$,
где *N* — *национальный доход*; *A* — коэффициент размерности; *L* и *K* — соответственно объемы приложенного труда и капитала; α и β — константы (*коэффициенты эластичности производства* по труду *L* и капиталу *K*).

Функция — однородная степени α+β; следовательно, увеличение *L* и *K* в одинаковое число раз *m*увеличивает доход в $m^{\alpha+\beta}$ раз. Если сумма α+β равна единице — функция линейно однородная; если больше или меньше единицы, имеет место *эффект масштаба* (соответственно положительный или отрицательный).

К.—Д. ф. основывается на предположениях о понижающейся предельной отдаче ресурсов (см. *Закон убывающей отдачи*, *Предельный эффект затрат*), постоянстве коэффициентов эластичности производства по затратам ресурсов. *Эластичность замещения ресурсов* в любой точке кривой К.—Д. ф. равна единице.

Хотя К.—Д. ф. нельзя отнести к линейным, значения *параметров* *A*, α, β можно оценить с помощью линейного *регрессионного анализа* по *методу наименьших квадратов*. Для этого ее приводят к линейному виду, прологарифмировав обе части уравнения (обычно здесь берутся натуральные логарифмы):

$lnN = ln\,A + \alpha\, lnL + \beta\, lnK$.

Модификация функции, учитывающая технический прогресс, достигается введением дополнительного сомножителя e^{π}, где π — темп технического прогресса (константа).

2.13. Обыкновенные дифференциальные уравнения *n* -го порядка, основные понятия. Дифференциальные уравнения первого порядка, нормальная форма. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения. Линейные уравнения. Уравнения Бернулли.

Раньше мы встречались с такими зависимостями:

Дано: $v(x) = t^2 + 5t - 3$ Найти: закон движения S(t)

$S'(t) = v(t) = t^2 + 5t - 3 \Rightarrow \quad \dfrac{dS}{dt} = t^2 + 5t - 3$ - находим S интегрированием.

Т е мы получаем уравнение, содержащее производную, а производная есть отношение дифференциалов. Такое уравнение называется *дифференциальным.* Решением таких уравнений является искомая функция.

ОПР: *Дифференциальным уравнением* называется равенство, выражающее зависимость между аргументом, искомой функцией и её производными.

$$F(x;y;y';y'';...;y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

Запишем это уравнение в виде: $y^{(n)} = F_1(x;y;y';y'';...;y^{(n-1)}) \quad (2)$

ОПР: *Порядком* ДУ называется наивысший порядок входящей в него производной.
Уравнения (1) и (2) называются *ДУ n-го порядка.*
Рассмотрим ДУ I порядка: $F(x; y; y') = 0$ *или* $y' = f(x; y)$
ОПР: *Решением ДУ* называется функция, обращающая его в верное равенство, т е в тождество.
Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = f(x)$

$\frac{dy}{dx} = f(x) \Rightarrow dy = f(x)dx \Rightarrow \int dy = \int f(x)dx \Rightarrow y = \int f(x)dx + C$ - о*бщее решение* дифференциального
уравнения представляет собой множество функций.

ОПР: *Общим решением ДУ* n-го порядка называется функция, зависящая от аргумента и n произвольных постоянных. $y = \varphi(x; C_1; C_2 : ... : C_n)$ (3)

ОПР: *Частным решением ДУ* называется решение, полученное из общего при определенных значениях постоянных

Уравнения с разделяющимися переменными.

$\boxed{M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0}$ (4) –уравнение с разделяющимися переменными.

Разделим переменные, т е приведем уравнение к такому виду, чтобы в левой части равенства были функции, зависящие только от y, а в правой- только от x.

$M_2(y)N_2(y)dy = -M_1(x)N_1(y)dx \quad |: M_2(x)N_1(y) \neq 0$

$\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = -\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx -$ *уравнение с разделенными переменными*

Проинтегрируем обе части равенства

$\int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = -\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx$

Решив интегралы, найдем решение ДУ

ОПР: ДУ $y' = f(x; y)$ называется *однородным ДУ 1 порядка ,* если функция $f(x; y)$ удовлетворяет
условию: $\boxed{f(tx; ty) = f(x; y)}$ (5) , где t-произвольный параметр.

Рассмотрим однородное ДУ $y' = f(x; y)$

Обозначим $\boxed{z = \frac{y}{x}}$ $\Rightarrow y = xz$, z-функция от x

$$y' = z'x + zx' = z'x + z$$

Подставим в исходное уравнение:

$z'x + z = f(x; zx)$
$z'x = f(x; zx) - z$ - можно свести к уравнению с разделяющимися переменными.

ОПР: *Линейным ДУ 1 порядка* называется уравнение вида $\boxed{y' + p(x)y = q(x)}$ (6) , где $p(x)$ *и* $q(x)$ - некоторые функции от x.

Одним из методов решения таких уравнений является *метод Бернулли.*

Решение ДУ ищут в виде $y = u(x) \cdot v(x)$, ãäå $u(x)$ *и* $v(x)$ -неизвестные функции от x.

$y = uv$
$y' = u'v + uv'$ подставим в (6)

$u'v + \underline{\underline{uv'}} + \underline{\underline{p(x)uv}} = q(x)$ вынесем u за скобку

$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$

Подберём v(x) так, чтобы $v' + p(x)v = 0$, получим систему

$\begin{cases} v' + p(x)v = 0 \\ u'v = q(x) \end{cases}$ -это уравнения с разделяющимися переменными

Из первого уравнения найдём v(x), подставим его во второе уравнение и найдём u(x). Т.о. найдём $y = u(x) \cdot v(x)$ -общее решение ДУ.

При решении методом Бернулли, промежуточное значение const берём =0

2.14. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимый признак сходимости. Числовые ряды с положительными членами: критерий сходимости. Достаточные признаки сходимости: первый и второй признаки сравнения, признак Даламбера и Коши в предельной форме, интегральный признак Коши.

Пусть задана последовательность действительных чисел (a_n): $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

Опр; Символ $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ называется *числовым рядом* , а числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ его *членами,* a_n $(n \in N)$ называется *.общим членом.*

Обозначим: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ (1)

Опр: Суммы $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, ... $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ .... называются *частичными суммами* ряда (1).

Опр: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *сходящимся,* если последовательность его частичных сумм сходится к какому-нибудь числу S (т е $\exists$ конечный предел $\lim_{n\to\infty} S_n = S$), при этом S- *сумма ряда.*

В этом случае $S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ или S=$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\boxed{S = \lim_{n\to\infty} S_n}$ -сумма ряда

Опр: Если не существует $\lim_{n\to\infty} S_n$ или $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$, то ряд (1) называется *расходящимся.*

ТЕОРЕМА (*Необходимое условие сходимости ряда):* Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его общий член стремится к 0 (т е $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$)

Замечание: Обратная теорема не верна.

СЛЕДСТВИЕ: Если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Пример: Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{3n+2}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{3n+2} = \frac{4}{3} \neq 0 \Rightarrow \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{3n+2} \quad \text{расходится}$$

Числовые ряды с положительными членами: критерий сходимости.

1) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится (расходится), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Ca_n$, где $\tilde{N} \in R$ тоже сходится (расходится). Обратное верно при $C \neq 0$

2) Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, который называется суммой данных рядов, тоже сходится.

Гармонический ряд.

Это ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, *где* $p \in R$

1) если p>1, то ряд сходится.

2) если $p \leq 1$, то ряд расходится.

В частности, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - расходится.

ОПР: Ряд, все члены которого положительны, называется *знакоположительным.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0 \quad (n \in N) \qquad (2)$$

Достаточные признаки сходимости: первый и второй признаки сравнения, признак Даламбера и Коши в предельной форме, интегральный признак Коши.

1) ТЕОРЕМА (<u>*Признак сравнения*</u>): Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\, a_n > 0$ (A) и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n, b_n > 0$ (B), $(n \in N)$.и выполняется неравенство $a_n \le b_n, \forall n \in N$,

тогда из сходимости ряда (B)$\Rightarrow$ сходимость ряда (A),
а из расходимости ряда (A) $\Rightarrow$ расходимость ряда (B).

ТЕОРЕМА (<u>*Предельный признак сравнения):*</u> Пусть даны два знакоположительных ряда (A) и (B). Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, где $k > 0$, то оба знакоположительных ряда (A) и (B) в плане сходимости ведут себя одинаково (т. е. либо оба сходятся, либо оба расходятся).

<u>Пример:</u> Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ (A)

Сравним с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (B)-ряд сходится, т к p=2>1

$K = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n \cdot n^2}{n^3+1} = 1,\ K > 0 \Rightarrow$ ряды (A) и (B) в плане сходимости ведут себя одинаково, $\Rightarrow$ ряд (A) -сходятся.

2) ТЕОРЕМА (<u>*Признак Даламбера)*</u>: Пусть дан знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\, a_n > 0$ (2). Если начиная с некоторого значения n члены ряда (2) удовлетворяют неравенству $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1$, то ряд (2) сходится, а если начиная с некоторого значения n выполняется неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то ряд (2) расходится

ТЕОРЕМА (<u>*Предельная форма признака Даламбера):*</u> Пусть дан знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\, a_n > 0$ Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$, то $\begin{cases} \text{если } D < 1 - \text{ряд сходится} \\ \text{если } D > 1\ (D = \infty) - \text{ряд расходится} \\ D = 1 - \text{вопрос о сходимости ряда не решён, признак не подходит.} \end{cases}$

3) ТЕОРЕМА (<u>*Признак Коши*</u>): Пусть дан знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\, a_n > 0$ (2). Если начиная с некоторого значения n выполняется неравенство $\sqrt[n]{a_n} \le 1$, то ряд (2) сходится, а если $\sqrt[n]{a_n} > 1$, то ряд (2) расходится

ТЕОРЕМА 2 (<u>*Предельная форма признака Коши):*</u> Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = K$, то

$\begin{cases} \text{если } K < 1 - \text{ряд сходится} \\ \text{если } K > 1\ (D = \infty) - \text{ряд расходится} \\ K = 1 - \text{вопрос о сходимости ряда не решён, признак не подходит.} \end{cases}$

2.15. Степенные ряды. Теорема Абеля. Область, интервал и радиус сходимости степенного ряда.

<u>ОПР:</u> Ряд вида $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + ...$, где $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, x_0 \in R$ -заданные действительные числа, x-переменная, называется <u>*степенным рядом.*</u>

Обозначение $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ (4)

ТЕОРЕМА (<u>*Признак Даламбера для рядов с произвольными членами):*</u> Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = D$, то

$$\begin{cases} \text{если } D<1 \Rightarrow \text{ряд сходится абсолютно} \\ \text{если } D>1 \Rightarrow \text{ряд расходится} \\ \text{если } D=1 \Rightarrow \text{вопрос о сходимости ряда не решен} \end{cases}$$

Найем интервал и радиус сходимости степенного ряда, воспользовавшись признаком Даламбера

$$D=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a^n(x-x_0)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)}{a_n}\right|=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}(x-x_0)\right|$$ Пусть D<1, то степенной ряд абсолютно сходится.

Теоремы Абеля. (Нильс Хенрик Абель (1802 – 1829) – норвежский математик)

Теорема. *Если степенной ряд* $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ *сходится при* $x = x_1$ *, то он сходится и притом абсолютно для всех* $|x|>|x_1|$.

$$\Rightarrow\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}(x-x_0)\right|<1 \quad \Rightarrow|x-x_0|<\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x-x_0<\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\Rightarrow x<\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|+x_0 \\ x-x_0>-\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\Rightarrow x>x_0-\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \end{array}\right.$$

. Т е $x_0-\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|<x<x_0+\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

обозн. $c_1<x<c_2$

Значит, на интервале $(c_1;c_2)$ ряд абсолютно сходится.

$R=\left|\frac{c_1-c_2}{2}\right|$-*радиус сходимости ряда.*

Также нужно выяснить вопрос о сходимости ряда на концах интервала, т е при x= c_1 и x=c_2. Таким образом, получим *область сходимости.*

Пример: Найти область и радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n+2}\cdot x^n$

$u_n=\frac{3^n}{n+2}x^n;\quad a_n=\frac{3^n}{n+2};\quad x_0=0$

$D=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3x(n+2)}{n+3}\right|=|3x|$

Ряд абсолютно сходится, если D<1, т е $|3x|<1$

$|x|<\frac{1}{3}$

$x\in(-\frac{1}{3};\frac{1}{3})$ **-интервал сходимости ряда.**

R=1\3-**радиус сходимости**.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости:

1) $x=\frac{1}{3}\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n+2}\cdot\frac{1}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$

Сравним с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – гармонический ряд, расходится

Применим предельный признак сравнения $K=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1>0\Rightarrow$ оба ряда в плане сходимости ведут себя одинаково $\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$- расходится. $\Rightarrow$ $x=-\frac{1}{3}$ не входит в область сходимости ряда.

2) $x=-\frac{1}{3}\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n+2}(-\frac{1}{3})^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}$

$D=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{-n-2}{n+3}\right|=1\Rightarrow$ признак Даламбера не подходит

Рассмотрим признак Лейбница:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ |u_n| \text{ строго убывает} \\ 2)\ \lim_{n\to\infty}|u_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2} \text{ сходится,}\quad \text{причем условно, т к.}$$

Рассмотрим ряд, составленный из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$ -расходится

$x \in [\ -\frac{1}{3};\frac{1}{3})$ **- область сходимости ряда**

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЗАНЯТИЯМ

3.1 Практические занятия по теме «Элементы линейной алгебры и их применение для решения экономических задач».

При подготовке к занятиям необходимо обратить внимание на следующие моменты.
1. Правило вычисления определителей второго порядка.
2. Способы и правила вычисления определителя третьего порядка.
3. Понятия минора и алгебраического дополнения. Теорема Лапласа.
4. Алгоритм решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.
5. Алгоритм решение систем линейных алгебраических уравнений методом Крамера.

3.2 Практические занятия по теме «Функция одной и нескольких переменных».

При подготовке к занятиям необходимо обратить внимание на следующие моменты.
1. Способы задания функций. Область определения и множество значений функции. График функции.
2. Характеристики функций: четность и нечетность, периодичность, монотонность, ограниченность.
3. Сложная и обратная функции.
4. Производная функции. Дифференцируемость и дифференциал функции.
5. Производные основных элементарных функций.
6. Производная сложной и обратной функции.
7. Геометрический смысл производной. Геометрический смысл дифференциала функции.
8. Признак монотонности функции на интервале. Достаточные условия локального экстремума.
9. Выпуклые (вогнутые) функции. Достаточные условия выпуклости функции. Необходимый и достаточный признаки точки перегиба.
10. Асимптоты графика функции.
11. Общая схема исследования функции и построения ее графика.

Разработал(а): ___________________________________ В.А. Ротова