ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Направление подготовки (специальность) Экономика
Профиль образовательной программы Финансы и кредит
Форма обучения заочная

СОДЕРЖАНИЕ

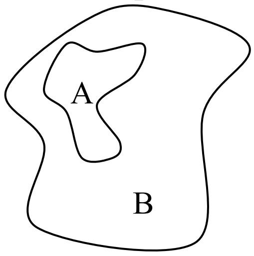
1. Конспект лекций
1. 1 Лекция №1 (2 часа)
Тема: «Числовые множества. Числовые функции»
1.1.1 Вопросы лекции:
1. Элементы алгебры множеств.
2. Окрестность точки. Ограниченные множества.
3. Числовые функции. Способы задания функций.
4. Область определения и множество значений функции. График функции.
5. Сложная и обратная функции.
6. Элементарные функции.
1.1.2 Краткое содержание вопросов:
1. Элементы алгебры множеств.

<u>Определение.</u> Множеством М называется объединение в единое целое определенных различимых объектов *а*, которые называются **элементами** множества. $a \in$ M

Множество можно описать, указав какое – нибудь свойство, присущее всем элементам этого множества.

Множество, не содержащее элементов, называется **пустым** и обозначается $\varnothing$.

<u>Определение.</u> Если все элементы множества А являются также элементами множества В, то говорят, что множество А **включается (содержится)** в множестве В.



A ⊂ B

<u>Определение.</u> Если А $\subseteq$ В, то множество А называется **подмножеством** множества В, а если при этом А $\neq$ В, то множество А называется **собственным подмножеством** множества В и обозначается А $\subset$ В.

Для трех множеств А, В, С справедливы следующие соотношения.

$$A \subseteq A; \quad A \not\subset A;$$
$$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \to A \subseteq C;$$
$$A \subseteq B \wedge B \subset C \to A \subset C;$$

Связь между включением и равенством множеств устанавливается следующим соотношением:

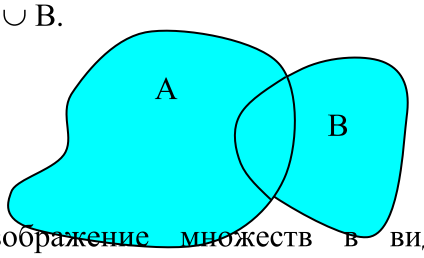
$$A = B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Здесь знак $\wedge$ обозначает **конъюнкцию** (логическое “и”).

<u>Операции над множествами.</u>

<u>Определение.</u> Объединением множеств А и В называется множество С, элементы которого принадлежат хотя бы одномк из множеств А и В.

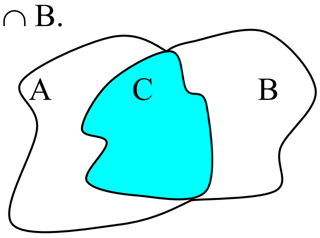
Обозначается С = А $\cup$ В.



Геометрическое изображение множеств в виде области на плоскости называется **диаграммой Эйлера – Венна**.

<u>Определение.</u> Пересечением множеств А и В называется множество С, элементы которого принадлежат каждому из множеств А и В.

Обозначение С = А $\cap$ В.

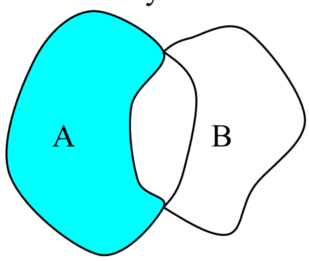


Для множеств A, B и C справедливы следующие свойства:

$$A \cap A = A \cup A = A; \quad A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = B \cap A;$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C); \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$
$$A \cup (A \cap B) = A; \quad A \cap (A \cup B) = A;$$
$$A \cup \varnothing = A; \quad A \cap \varnothing = \varnothing;$$

Определение. **Разностью** множеств A и B называется множество, состоящее из элементов множества A, не принадлежащих множеству B.

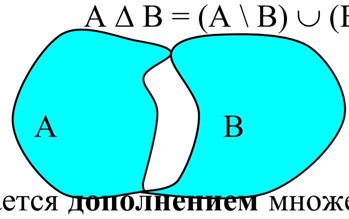
Обозначается $C = A \setminus B$.



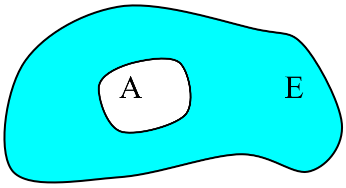
Определение. **Симметрической разностью** множеств A и B называется множество C, элементы которого принадлежат в точности одному из множеств A или B.

Обозначается $A \Delta B$.

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



Определение. C_E называется **дополнением** множества A относительно множества E, если $A \subseteq E$ и $C_E = E \setminus A$.



Для множеств A, B и C справедливы следующие соотношения:

$$A \setminus B \subseteq A; \quad A \setminus A = \varnothing; \quad A \setminus (A \setminus B) = A \cap B;$$
$$A \Delta B = B \Delta A; \quad A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B);$$
$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C); \quad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C);$$
$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C); \quad (A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C);$$
$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C); \quad (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C);$$
$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C); \quad A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C);$$
$$A \cup C_E A = E; \quad A \cap C_E A = \varnothing; \quad C_E E = \varnothing; \quad C_E \varnothing = E; \quad C_E C_E A = A;$$
$$C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B; \quad C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B;$$

Пример. Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, доказать тождество и проверить его с помощью диаграммы Эйлера - Вейна.

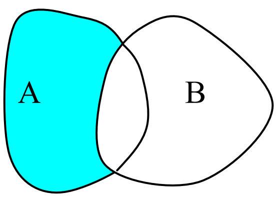
$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$$

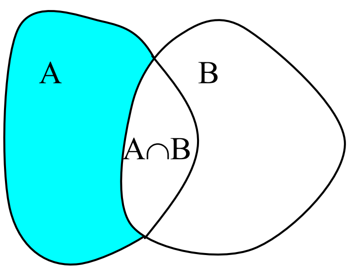
Из записанных выше соотношений видно, что

$$A \setminus (A \cap B) = (A \setminus A) \cup (A \setminus B) = \varnothing \cup (A \setminus B) = A \setminus B$$

Что и требовалось доказать.

Для иллюстрации полученного результата построим диаграммы Эйлера – Вейна





2. Окрестность точки. Ограниченные множества.

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное фиксированное число.

Окрестностью точки x_0 на числовой прямой (иногда говорят ε-окрестностью) называется множество точек, удаленных от x_0 менее чем на ε, то есть $O_\varepsilon(x_0) = \{x : |x - x_0| < \varepsilon\}$.

Множество вещественных чисел $X \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху, если существует число b, такое что все элементы X не превосходят b:

$\exists b\, \forall x\ (x \in X \Rightarrow x \leqslant b)$

Множество вещественных чисел $X \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным снизу, если существует число b, такое что все элементы X не меньше b: $\exists b\, \forall x\ (x \in X \Rightarrow x \geqslant b)$

Множество $X \subset \mathbb{R}$, ограниченное сверху и снизу, называется ограниченным.

Множество $X \subset \mathbb{R}$, не являющееся ограниченным, называется неограниченным. Как следует из определения, множество не ограничено тогда и только тогда, когда оно не ограничено сверху и не ограничено снизу.

Примером ограниченного множества является отрезок $[a, b] = \{a \leqslant x \leqslant b\}$,

неограниченного — множество всех целых чисел $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$,

ограниченного сверху, но неограниченного снизу — луч $x < 0$,

ограниченного снизу, но неограниченного сверху — луч $x > 0$.

3. Числовые функции. Способы задания функций.

<u>ОПР:</u> Пусть X и У – некоторые множества. <u>*Функцией*</u> называется зависимость, по которой каждому $x \in X$ ставится в соответствие единственное значение $y \in Y$.

<u>Обозначение:</u> $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = F(x)$ и т.д.

у – значение функции в точке х.

у – зависимая переменная, х – независимая переменная (аргумент).

Х – область определения функции, У –область значений функции

Существует три основных способа задания функции:

1) <u>Табличный способ.</u> В таблице по крайней мере одну из переменных принимают за независимую, другие величины являются функциями этого аргумента. Широко используется в бухгалтерской отчетности и банковской деятельности, статистических данных и т.д.

2) <u>Аналитический способ.</u> Состоит в задании связи между аргументом и функцией в виде формулы или набора формул.

3) <u>Графический способ.</u> На плоскости функция изображается в виде <u>*графика*</u> – множество точек $(x; y)$, координаты которых связаны соотношением $y = f(x)$, называемым уравнением графика.

4. Область определения и множество значений функции. График функции.

<u>ОПР:</u> Множество значений х, при которых функция существует, называется <u>*областью определения*</u> функции.

Область определения находится по соблюдению законности выполнения математических операций, входящих в формулу $f(x)$. Именно: подкоренное выражение в корне четной степени не отрицательно, знаменатель дроби не равен 0, выражение под знаком логарифма – положительно и т.д.

<u>ОПР:</u> Функция, все значения которой равны между собой, называется <u>*постоянной*</u> (обозначается: $f(x) = C$).

<u>ОПР:</u> Функция $f(x)$, определенная на некотором множестве Х, называется <u>*ограниченной*</u>, если существуют числа A и B такие, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $A \leq f(x) \leq \hat{A}$. В противном случае - <u>*неограниченной*</u>.

<u>ОПР:</u> Функция $y = f(x)$ называется <u>*четной*</u>, если для любых значений аргумента из области её определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

ОПР: Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если для любых значений аргумента из области её определения выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

5. Сложная и обратная функции.

ОПР: Если на некотором промежутке X определена функция $z = \varphi(x)$ с множеством значений Z и на множестве Z определена функция $y = f(z)$, то функция $y = f(\varphi(x))$ называется *сложной функцией* от x, а переменная z- промежуточной переменной сложной функции.

ОПР: Пусть X и У – некоторые множества и задана функция $y = f(x)$, т.е. множество пар чисел *(x;y)*, в которых каждое число x входит в одну и только одну пару. Если в каждой паре поменять местами x и y, то получим множество пар чисел *(y;x)*, которое называется *обратной функцией* φ к функции f $(x = \varphi(y).)$

6. Элементарные функции.

Классификация функций:

- $f(x) = C$ - постоянная функция $C = const$
- $x^\alpha, \quad \alpha \in R$ - степенная функция
- $a^x, \quad a > 0$ - показательная функция
- $\log_a x, \quad a > 0, a \neq 1$ - логарифмическая функция
- $\sin x, \cos x, tgx, ctgx$ - тригонометрические функции
- $\arcsin x, \arccos x, arctgx, arcctgx$ - обратные тригонометрические функции

Данные функции являются *простейшими элементарными функциями*. Функции, полученные из простейших элементарных функций с помощью конечного числа арифметических действий, называются *элементарными функциями*.

1.2 Лекция №2 (2 часа)

Тема: «Предел последовательности. Предел и непрерывность функции»

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Числовые последовательности. Способы задания последовательностей. Предел последовательности.
2. Различные типы пределов: односторонние пределы, пределы в бесконечности, бесконечные пределы.
3. Сравнение бесконечно малых функций: эквивалентные функции.
4. Непрерывность функции в точке. Непрерывность суммы, разности, произведения и частного непрерывных функций. Непрерывность сложной и обратной функции. Непрерывность элементарных функций. Теорема о сохранении знака непрерывной функции.
5. Точки разрыва функции, их классификация.

1.2.2. Краткое содержание вопросов

1. Числовые последовательности. Способы задания последовательностей. Предел последовательности.

Определение. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n, то говорят, что задана **последовательность** $x_1, x_2, \ldots, x_n = \{x_n\}$

Общий элемент последовательности является функцией от n. $x_n = f(n)$

Таким образом последовательность может рассматриваться как функция.

Задать последовательность можно различными способами – главное, чтобы был указан способ получения любого члена последовательности.

Для последовательностей можно определить следующие **операции**:

1) Умножение последовательности на число m: $m\{x_n\} = \{mx_n\}$, т.е. $mx_1, mx_2, \ldots$
2) Сложение (вычитание) последовательностей: $\{x_n\} \pm \{y_n\} = \{x_n \pm y_n\}$.
3) Произведение последовательностей: $\{x_n\}\cdot\{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\}$.

4) Частное последовательностей: $\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ при $\{y_n\} \neq 0$.

<u>Ограниченные и неограниченные последовательности.</u>

<u>Определение.</u> Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если существует такое число M>0, что для любого n верно неравенство:

$$|x_n| < M$$

т.е. все члены последовательности принадлежат промежутку (-M; M).

<u>Определение.</u> Последовательность $\{x_n\}$называется **ограниченной сверху**, если для любого n существует такое число М, что

$$x_n \leq M.$$

<u>Определение.</u> Последовательность $\{x_n\}$называется **ограниченной снизу**, если для любого n существует такое число М, что

$$x_n \geq M$$

<u>Пример.</u> $\{x_n\} = n$ – ограничена снизу $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

<u>Определение.</u> Число **а** называется **пределом** последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного $\varepsilon>0$ существует такой номер N, что для всех n > N выполняется условие: $|a - x_n| < \varepsilon$. Это записывается: $\lim x_n = a$.

В этом случае говорят, что последовательность $\{x_n\}$**сходится** к а при $n\to\infty$.

<u>Свойство:</u> Если отбросить какое- либо число членов последовательности, то получаются новые последовательности, при этом если сходится одна из них, то сходится и другая.

<u>Теорема.</u> *Последовательность не может иметь более одного предела.*

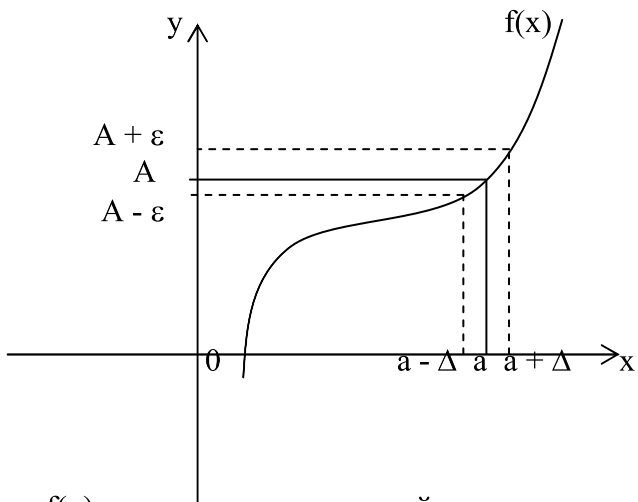
<u>Теорема.</u> *Если $x_n \to a$, то $|x_n| \to |a|$.*

<u>Теорема.</u> *Если $x_n \to a$, то последовательность $\{x_n\}$ ограничена.*

Следует отметить, что обратное утверждение неверно, т.е. из ограниченности последовательности не следует ее сходимость.

2. Различные типы пределов: односторонние пределы, пределы в бесконечности, бесконечные пределы.

<u>Предел функции в точке.</u>



Пусть функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x = a (т.е. в самой точке x = a функция может быть и не определена)

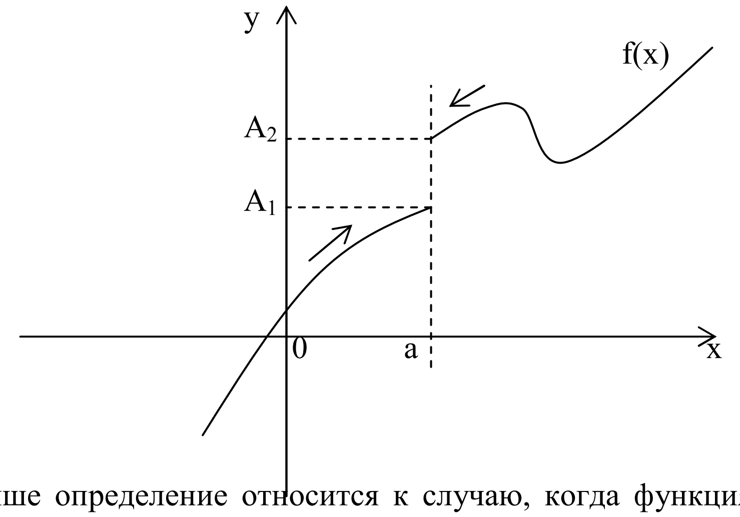
<u>Определение.</u> Число А называется **пределом** функции f(x) при $x\to a$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $\Delta>0$, что для всех x таких, что $0 < |x - a| < \Delta$ верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

То же определение может быть записано в другом виде:

Если $a - \Delta < x < a + \Delta$, $x \neq a$, то верно неравенство $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Запись предела функции в точке: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

<u>Определение.</u> Если f(x) → A_1 при x → a только при x < a, то $\lim_{x\to a-0} f(x) = A_1$ - называется **пределом** функции f(x) в точке x = a **слева**, а если f(x) → A_2 при x → a только при x > a, то $\lim_{x\to a+0} f(x) = A_2$ называется **пределом** функции f(x) в точке x = a **справа**.



Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция f(x) не определена в самой точке x = a, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Пределы A_1 и A_2 называются также **односторонними пределами** функции f(x) в точке x = a. Также говорят, что A – **конечный предел** функции f(x).

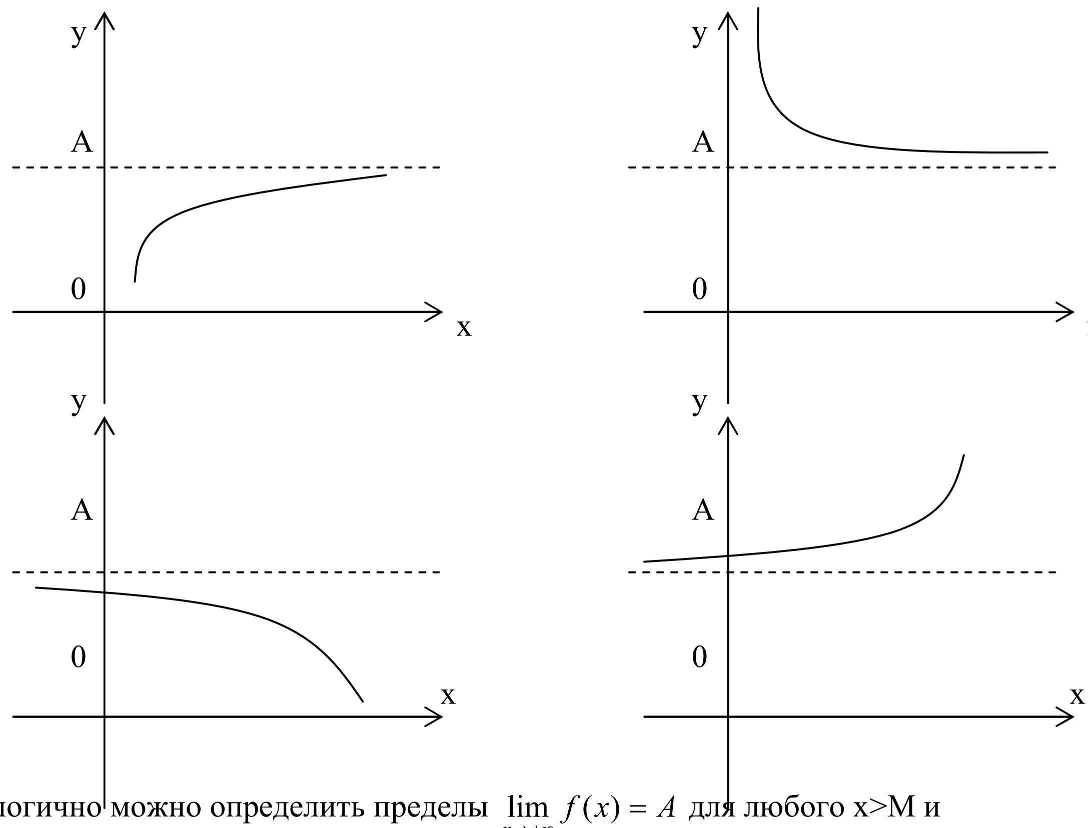
<u>Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности.</u>

<u>Определение.</u> Число A называется **пределом** функции f(x) при x→∞, если для любого числа ε>0 существует такое число M>0, что для всех x, $|x|$>M выполняется неравенство $|A - f(x)| < \varepsilon$

При этом предполагается, что функция f(x) определена в окрестности бесконечности.

Записывают: $\lim_{x\to\infty} f(x) = A.$

Графически можно представить:



Аналогично можно определить пределы $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$ для любого x>M и

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$ для любого x<M.

Основные теоремы о пределах.

Теорема 1. $\lim\limits_{x\to a} C = C$, где C = const.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции f(x) и g(x) имеют конечные пределы при $x\to a$.

Теорема 2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Теорема 3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Следствие. $\lim\limits_{x\to a} C\cdot f(x) = C\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$

Теорема 4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$

Теорема 5. *Если f(x)>0 вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$*, то A>0.*

Аналогично определяется знак предела при f(x) < 0, f(x) ≥ 0, f(x) ≤ 0.

Теорема 6. *Если g(x) ≤ f(x) ≤ u(x) вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} u(x) = A$*, то и* $\lim\limits_{x\to a} = A$.

Определение. Функция f(x) называется **ограниченной** вблизи точки x = a, если существует такое число M>0, что $|f(x)|<M$ вблизи точки x = a.

Теорема 7. *Если функция f(x) имеет конечный предел при $x\to a$, то она ограничена вблизи точки x = a.*

3. Сравнение бесконечно малых функций: эквивалентные функции.

Определение. Функция f(x) называется **бесконечно малой** при $x\to a$, где а может быть числом или одной из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Бесконечно малой функция может быть только если указать к какому числу стремится аргумент х. При различных значениях а функция может быть бесконечно малой или нет.

Теорема. *Для того, чтобы функция f(x) при $x\to a$ имела предел, равный А, необходимо и достаточно, чтобы вблизи точки x = a выполнялось условие f(x) = A + α(x), где α(x) – бесконечно малая при $x\to a$ ($\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$).*

Свойства бесконечно малых функций:

1) Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при $x\to a$ тоже бесконечно малая функция при $x\to a$.
2) Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при $x\to a$ тоже бесконечно малая функция при $x\to a$.
3) Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки x = a является бесконечно малой функцией при $x\to a$.
4) Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю есть величина бесконечно малая.

Определение. Предел функции f(x) при $x\to a$, где а- число, **равен бесконечности**, если для любого числа M>0 существует такое число Δ>0, что неравенство $|f(x)|>M$ выполняется при всех х, удовлетворяющих условию $0<|x-a|<\Delta$

Записывается $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

Собственно, если в приведенном выше определении заменить условие $|f(x)|>M$ на f(x)>M, то получим: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, а если заменить на f(x)<M, то: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Определение. Функция называется **бесконечно большой** при $x\to a$, где а – чосли или одна из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, где А – число или одна из величин ∞, +∞ или -∞.

Теорема. *Если $f(x)\to 0$ при $x\to a$ (если $x\to\infty$) и не обращается в ноль, то* $y = \dfrac{1}{f(x)} \to \infty$

Сравнение бесконечно малых функций.

Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$. Будем обозначать эти функции α, β и γ соответственно. Эти бесконечно малые функции можно сравнивать по быстроте их убывания, т.е. по быстроте их стремления к нулю.

Например, функция $f(x) = x^{10}$ стремится к нулю быстрее, чем функция $f(x) = x$.

<u>Определение.</u> Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = 0$, то функция α называется **бесконечно малой более высокого порядка**, чем функция β.

<u>Определение.</u> Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = A, \quad A \neq 0, \quad A = const$, то α и β называются **бесконечно малыми одного порядка**.

<u>Определение.</u> Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = 1,$ то функции α и β называются **эквивалентными бесконечно малыми**. Записывают $\alpha \sim \beta$.

<u>Определение.</u> Бесконечно малая функция α называется **бесконечно малой порядка k** относительно бесконечно малой функции β, если предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta^k}$ конечен и отличен от нуля.

Однако следует отметить, что не все бесконечно малые функции можно сравнивать между собой. Например, если отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ не имеет предела, то функции несравнимы.

<u>Свойства эквивалентных бесконечно малых.</u>

1) $\alpha \sim \alpha$, $\left(\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\alpha} = 1\right)$

2) Если $\alpha \sim \beta$ и $\beta \sim \gamma$, то $\alpha \sim \gamma$, $\left(\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\gamma} = \lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\gamma}\right) = 1\cdot 1 = 1\right)$

3) Если $\alpha \sim \beta$, то $\beta \sim \alpha$, $\left(\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha} = \lim\limits_{x\to a}\frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}} = 1\right)$

4) Если $\alpha \sim \alpha_1$ и $\beta \sim \beta_1$ и $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = k$, то и $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1} = k$ или $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1}$.

<u>Следствие:</u> а) если $\alpha \sim \alpha_1$ и $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = k$, то и $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta}$

б) если $\beta \sim \beta_1$ и $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = k$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta_1}$

Свойство 4 особенно важно на практике, т.к. оно фактически означает, что предел отношения бесконечно малых не меняется при замене их на эквивалентные бесконечно малые. Этот факт дает возможность при нахождении пределов заменять бесконечно малые на эквивалентные им функции, что может сильно упростить вычисление пределов.

4. Непрерывность функции в точке. Непрерывность суммы, разности, произведения и частного непрерывных функций. Непрерывность сложной и обратной функции. Непрерывность элементарных функций. Теорема о сохранении знака непрерывной функции.

<u>Определение.</u> Функция $f(x)$, определенная в окрестности некоторой точки x_0, называется **непрерывной в точке** x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Тот же факт можно записать иначе: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$

<u>Определение.</u> Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, но не является непрерывной в самой точке x_0, то она называется **разрывной** функцией, а точка x_0 – точкой разрыва.

<u>Определение.</u> Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если для любого положительного числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\Delta>0$, что для любых x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \Delta$ верно неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Определение. Функция f(x) называется **непрерывной** в точке $x = x_0$, если приращение функции в точке x_0 является бесконечно малой величиной.

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x) \text{ где } \alpha(x) \text{ – бесконечно малая при } x \to x_0.$$

Свойства непрерывных функций.

1) Сумма, разность и произведение непрерывных в точке x_0 функций – есть функция, непрерывная в точке x_0.

2) Частное двух непрерывных функций $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ – есть непрерывная функция при условии, что g(x) не равна нулю в точке x_0.

3) Суперпозиция непрерывных функций – есть непрерывная функция.

Это свойство может быть записано следующим образом:
Если $u = f(x)$, $v = g(x)$ – непрерывные функции в точке $x = x_0$, то функция $v = g(f(x))$ – тоже непрерывнаяфункция в этой точке.

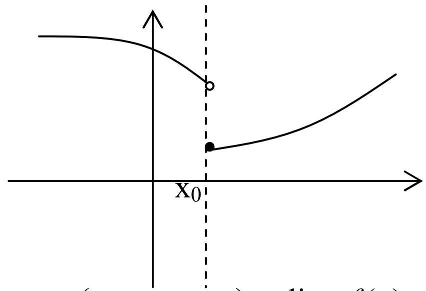
Справедливость приведенных выше свойств можно легко доказать, используя теоремы о пределах.

5. Точки разрыва функции, их классификация.

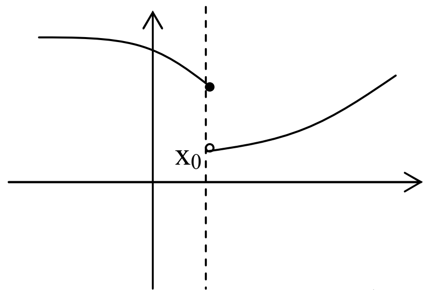
Рассмотрим некоторую функцию f(x), непрерывную в окрестности точки x_0, за исключением может быть самой этой точки. Из определения точки разрыва функции следует, что $x = x_0$ является точкой разрыва, если функция не определена в этой точке, или не является в ней непрерывной.

Следует отметить также, что непрерывность функции может быть односторонней. Поясним это следующим образом.

Если односторонний предел (см. выше) $\lim\limits_{x \to x+0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной справа.



Если односторонний предел (см. выше) $\lim\limits_{x \to x-0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной слева.



Определение. Точка x_0 называется **точкой разрыва** функции f(x), если f(x) не определена в точке x_0 или не является непрерывной в этой точке.

Определение. Точка x_0 называется **точкой разрыва 1- го рода**, если в этой точке функция f(x) имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы.

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0-0} f(x)$$

Для выполнения условий этого определения не требуется, чтобы функция была определена в точке $x = x_0$, достаточно того, что она определена слева и справа от нее.

Из определения можно сделать вывод, что в точке разрыва 1 – го рода функция может иметь только конечный скачок. В некоторых частных случаях точку разрыва 1 – го рода еще иногда называют **устранимой** точкой разрыва, но подробнее об этом поговорим ниже.

<u>Определение.</u> Точка x_0 называется **точкой разрыва 2 – го рода**, если в этой точке функция f(x) не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

<u>Определение.</u> Функция f(x) называется **непрерывной на интервале (отрезке)**, если она непрерывна в любой точке интервала (отрезка).

При этом не требуется непрерывность функции на концах отрезка или интервала, необходима только односторонняя непрерывность на концах отрезка или интервала.

<u>Свойства функций, непрерывных на отрезке.</u>

<u>Свойство 1:</u> (Первая теорема Вейерштрасса (Вейерштрасс Карл (1815-1897)- немецкий математик)). Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке, т.е. на отрезке [a, b] выполняется условие $–M \le f(x) \le M$.

Доказательство этого свойства основано на том, что функция, непрерывная в точке x_0, ограничена в некоторой ее окрестности, а если разбивать отрезок [a, b] на бесконечное количество отрезков, которые “стягиваются” к точке x_0, то образуется некоторая окрестность точки x_0.

<u>Свойство 2:</u> Функция, непрерывная на отрезке [a, b], принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.

Т.е. существуют такие значения x_1 и x_2, что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$, причем $m \le f(x) \le M$

Отметим эти наибольшие и наименьшие значения функция может принимать на отрезке и несколько раз (например – f(x) = sinx).

Разность между наибольшим и наименьшим значением функции на отрезке называется **колебанием** функции на отрезке.

<u>Свойство 3:</u> (Вторая теорема Больцано – Коши). Функция, непрерывная на отрезке [a, b], принимает на этом отрезке все значения между двумя произвольными величинами.

<u>Свойство 4:</u> Если функция f(x) непрерывна в точке $x = x_0$, то существует некоторая окрестность точки x_0, в которой функция сохраняет знак.

<u>Свойство 5:</u> (Первая теорема Больцано (1781-1848) – Коши). Если функция f(x)- непрерывная на отрезке [a, b] и имеет на концах отрезка значения противоположных знаков, то существует такая точка внутри этого отрезка, где f(x) = 0.

<u>Свойство 7:</u> Если функция f(x) определена, монотонна и непрерывна на некотором промежутке, то и обратная ей функция x = g(y) тоже однозначна, монотонна и непрерывна.

1.3. Лекция №3 (2 часа)
Тема: «Производная функции»

1.3.1 Вопросы лекции:

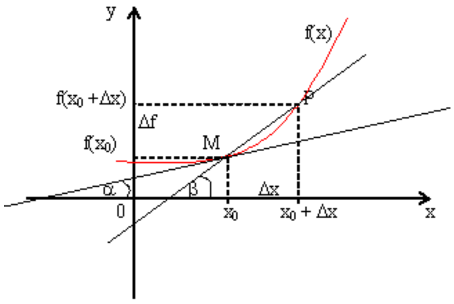
1. Производная функции. Дифференцируемость и дифференциал функции.
2. Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного двух функций, сложной и обратной функций. Непрерывность дифференцируемой функции. Производные основных элементарных функций.
3. Геометрический смысл производной и дифференциала функции.
4. Предельные величины в экономике. Эластичность функции, ее свойства и геометрический смысл.
5 Производные и дифференциалы высших порядков.
6. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей.

1.3.2 Краткое содержание вопросов

1. Производная функции. Дифференцируемость и дифференциал функции.

<u>Определение.</u> Производной функции *f(x)* в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Пусть *f(x)* определена на некотором промежутке (a, b). Тогда $tg\beta = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ – тангенс угла наклона секущей MP к графику функции.

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\beta = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = tg\alpha$, где α - угол наклона касательной к графику функции *f(x)* в точке (x_0, $f(x_0)$).

Угол между кривыми может быть определен как угол между касательными, проведенными к этим кривым в какой- либо точке.

Уравнение касательной к кривой: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Уравнение нормали к кривой: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Фактически производная функции показывает как бы скорость изменения функции, как изменяется функция при изменении переменной.

Физический смысл производной функции f(t), где t- время, а f(t)- закон движения (изменения координат) – мгновенная скорость движения.

Соответственно, вторая производная функции- скорость изменения скорости, т.е. ускорение.

<u>Теорема.</u> (Необходимое условие существования производной) *Если функция f(x) имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.*

Понятно, что это условие не является достаточным.

<u>Теорема.</u> *Пусть y = f(x); u = g(x), причем область значений функции u входит в область определения функции f. Тогда* $y' = f'(u) \cdot u'$

Пусть требуется найти производную функции *y = f(x)* при условии, что обратная ей функция *x = g(y)* имеет производную, отличную от нуля в соответствующей точке. $y' = \frac{1}{g'(y)}$

Пусть функция y = f(x) имеет производную в точке x: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

Тогда можно записать: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$, при $\Delta x \to 0$.

Следовательно: $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Величина $\alpha\Delta x$- бесконечно малая более высокого порядка, чем $f'(x)\Delta x$, т.е. $f'(x)\Delta x$- главная часть приращения Δy.

<u>Определение.</u> Дифференциалом функции f(x) в точке x называется главня линейная часть приращения функции.

Обозначается dy или df(x).

Из определения следует, что $dy = f'(x)\Delta x$ или $dy = f'(x)dx$.

Можно также записать: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$

2. Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного двух функций, сложной и обратной функций. Непрерывность дифференцируемой функции. Производные основных элементарных функций.

Если *u = f(x)* и *v = g(x)*- функции, дифференцируемые в точке x, то непосредственно из определения дифференциала следуют следующие свойства:

1) $d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$

2) $d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = vdu + udv$
3) $d(Cu) = Cdu$
4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

<u>Дифференциал сложной функции. Инвариантная форма записи дифференциала</u>

Пусть $y = f(x)$, $x = g(t)$, т.е y- сложная функция.

Тогда $dy = f'(x)g'(t)dt = f'(x)dx$

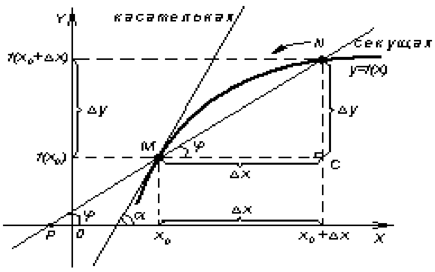
Видно, что форма записи дифференциала dy не зависит от того, будет ли x независимой переменной или функцией какой- то другой переменной, в связи с чем эта форма записи называется **инвариантной формой записи дифференциала**.

Однако, если x- независимая переменная, то $dx = \Delta x$, но если x зависит от t, то $\Delta x \neq dx$

Таким образом форма записи $dy = f'(x)\Delta x$ не является инвариантной

3. Геометрический смысл производной и дифференциала функции.

<u>1) Геометрический смысл производной</u> Пусть задана функция $y = f(x)$, определенная на промежутке *X.*



Возьмем любую точку $M(x_0; f(x_0))$ принадлежащую графику функции. Зададим приращение аргумента Δx.

Получим новую точку $N(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$.

Проведем секущую *MN*. Обозначим $\angle XPN = \varphi$.

Будем приближать точку *N* к точке *M,* двигаясь по кривой, тогда положение секущей будет меняться. Когда точки *N* и *M* совместятся, секущая превратится в касательную.

В этом случае: если $M \to N$, то $\Delta x \to 0$, $\angle\varphi \to \angle\alpha$, т.е. $\lim\limits_{N \to M} \varphi = \alpha$, где α - угол наклона касательной к оси *Ox*.

Найдем $tg\varphi$. Проведем дополнительные построения: $MC \parallel Ox$, ΔMCN - прямоугольный: $\angle CMN = \varphi$.

$$tg\varphi = \frac{NC}{MC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (*)$$

$\lim\limits_{\substack{N \to M \\ (\Delta x \to 0)}} \varphi = \alpha$. Рассмотрим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg(\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi) = tg\alpha \qquad (**)$

Подставим в (**) вместо $tg\varphi$ значение из (*), то

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = tg\alpha = f'(x_0)$ - по определению производной.

$$\boxed{tg\alpha = f'(x_0)}$$

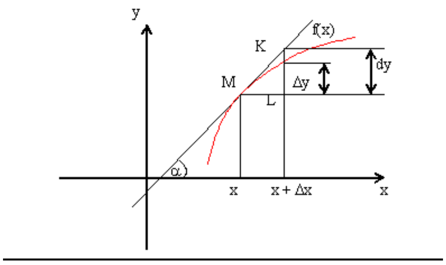
<u>Тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен значению производной функции в этой точке</u>.

Вспомним $tg\alpha = k$ - угловой коэффициент касательной, т.е. $\boxed{k = f'(x_0)}$. Касательная проходит через точку $M(x_0; f(x_0))$ и имеет угловой коэффициент $k = f'(x_0)$

$y - y_1 = k(x - x_1)$ - уравнение прямой с начальной точкой и угловым коэффициентом. Значит:

$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$ - уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0; f(x_0))$

<u>Геометрический смысл дифференциала.</u>



Из треугольника ΔMKL: KL = $dy = tg\alpha \cdot \Delta x = y' \cdot \Delta x$

Таким образом, дифференциал функции *f(x)* в точке x равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в рассматриваемой точке.

4. Предельные величины в экономике. Эластичность функции, ее свойства и геометрический смысл.

Функции находят широкое применение в экономической теории и практике. Спектр используемых в экономике функций весьма широк: от простейших линейных до функций, получаемых по определенному алгоритму с помощью так называемых рекуррентных соотношений, связывающих состояния изучаемых объектов в разные периоды времени.

1. Задача о производительности труда.

Пусть функция $u = u(t)$ выражает количество произведенной продукции u за время t. Необходимо найти производительность труда в момент времени t_0. За период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ количество произведенной продукции изменится от значения $u_0 = u(t_0)$ до $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$. Тогда средняя производительность труда за этот период времени $z_{cp} = \dfrac{\Delta u}{\Delta t}$.

Очевидно, что *производительность труда в момент времени* t_0 можно определить как предельное значение средней производительности за период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$, при $\Delta t \to 0$, т.е.

$$z = \lim_{\Delta t \to 0} z_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = u'(t_0)$$

2. Пусть функция $y = y(x)$ задает зависимость издержек производства y от количества выпускаемой продукции x. Пусть Δx - прирост продукции, тогда Δy - приращение издержек производства и $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ - среднее приращение издержек производства на единицу продукции.

Производная $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ выражает ***предельные издержки** производства и характеризует приближенно дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции.*

Аналогично определяются *предельная выручка, предельный доход, предельный продукт, предельная полезность, предельная производительность* и т.д.

Предельные величины характеризуют *процесс, изменение экономического объекта*. Таким образом, *производная выступает как скорость изменения некоторого экономического объекта (процесса) по времени или относительного другого фактора*.

Рассмотрим **соотношения между средним и предельным доходом** в условиях монопольного и конкурентного рынков.

Замечание: В экономической литературе предельные величины называют также *маржинальными*. При их записи к обычному обозначению величин добавляется буква *M*. При записи средних величин добавляется буква *A*. Например: *MR* – предельный доход, *AR* – средний доход.

Пусть r – суммарный доход (выручка) от реализации продукции,
p – цена единицы продукции,
q – количество продукции Тогда $r=pq$

В **условиях монополии** одна или несколько фирм полностью контролируют предложение некоторой продукции, а значит и цены на неё. При этом с увеличением цены спрос на продукцию падает. Пусть это происходит по прямой $p=aq+b$, где $a<0$, $b>0$, т.е. линейная убывающая функция. Тогда $r=(aq+b)q=aq^2+bq$. И средний доход на единицу продукции $r_{ср}=\dfrac{r}{q}=aq+b$.

Предельный доход составит $r_q'=2aq+b$ (рис. 1)

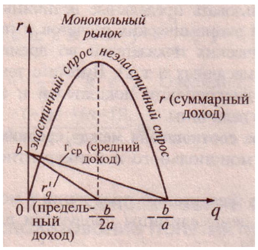


рис. 1

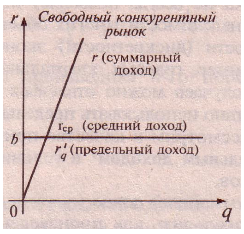


рис. 2

Следовательно, *в условиях монопольного рынка с ростом количества реализованной продукции предельный доход снижается, что приводит к уменьшению среднего дохода*.

В условиях **совершенной конкуренции** каждая фирма не способна контролировать уровень цен. Пусть преобладающая рыночная цена $p=b$. При этом суммарный доход составит $r=bq$ и соответственно средний доход $r_{ср}=\dfrac{r}{q}=b$ и предельный доход $r_q'=b$ (рис. 2).

Таким образом, *в условиях свободного конкурентного рынка средний и предельный доходы совпадают.*

Для исследования экономических процессов и решения прикладных задач используется понятие *эластичности функции.*

ОПР: *Эластичностью функции* $E_x(y)$ называется предел относительного приращения функции y к относительному приращению переменной x при $\Delta x \to 0$:

$$E_x(y)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{x}{y}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x}{y}\cdot y'$$

Эластичность функции показывает приближенно, на сколько процентов изменится функция $y=f(x)$ при изменении независимой переменной x на 1%.

Геометрический смысл:

$E_x(y)=\dfrac{x}{y}\cdot y'=\dfrac{x}{y}tg\alpha$, где $tg\alpha$ - тангенс угла наклона касательной в точке $M(x;y)$

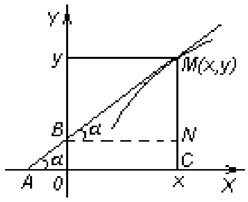


рис. 3

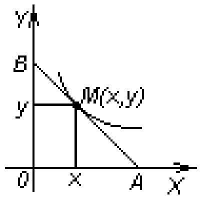


рис. 4

$\Delta MBN:\ MN=x\cdot tg\alpha,\ \ MC=y,\ \ \Delta MBN \infty \Delta AMC \Rightarrow\ \dfrac{MN}{MC}=\dfrac{MB}{MA}$. Значит $E_x(y)=\dfrac{MB}{MA}$

Т.е. *эластичность функции (по абсолютной величине) равна отношению расстояний по касательной от данной точки графика функции до точек её пересечения с осями Ox и Oy*.

Если точки A и B находятся по одну сторону от точки M, то эластичность положительна (рис. 3), если по разные, то отрицательна (рис. 4).

Свойства эластичности функции:

1) Эластичность функции равна произведению независимой переменной x на темп изменения функции $T_y=(\ln y)'=\dfrac{y'}{y}$, т.е. $E_x(y)=x\cdot T_y$.

2) Эластичность произведения (частного) двух функций равна сумме (разности) эластичностей этих функций. $E_x(UV)=E_x(U)+E_x(V)$ и $E_x(\dfrac{U}{V})=E_x(U)-E_x(V)$.

3) Эластичности взаимнообратных функций – взаимно обратные величины. $E_x(y) = \dfrac{1}{E_y(x)}$

Итак, эластичность спроса y относительно цены (или дохода) x показывает приближенно, на сколько процентов изменится спрос при изменении цены (дохода) x на 1%. Причем:

- если эластичность спроса $|E_x(y)| > 1$, то спрос считают <u>*эластичным*</u>;
- если эластичность спроса $|E_x(y)| < 1$, то спрос считают <u>*неэластичным*</u> относительно цены (дохода);
- если эластичность спроса $|E_x(y)| = 1$, то говорят о спросе <u>*с единичной эластичностью*</u>.

Выясним как влияет эластичность спроса относительно цены на суммарный доход *r=pq* при реализации продукции. Пусть *p=p(q)*- произвольная функция (не обязательно линейная). Найдем предельный доход.

$$r'_q = (pq)'_q = p'_q \cdot q + p \cdot 1 = p\left(1 + \frac{q}{p} p'_q\right) = p(1 + E_q(p))$$

По свойству 3: $E_q(p) = \dfrac{1}{E_p(q)}$ и $E_p(q) < 0$, получим при произвольной кривой спроса

$$r'_q = p\left(1 + \frac{1}{|E_p(q)|}\right)$$

- если спрос эластичен, то предельный доход r'_q - положителен при любой цене. Это означает, что <u>*для продукции эластичного спроса с возрастанием цены суммарный доход от реализации продукции увеличивается*</u>.
- если спрос неэластичен, то предельный доход r'_q - отрицателен при любой цене. Это означает, что <u>*для продукции неэластичного спроса с возрастанием цены суммарный доход от реализации продукции уменьшается*</u>.

Наиболее часто используются в экономике следующие функции:

1. <u>*Функция полезности (функция предпочтений)*</u> – в широком смысле зависимость полезности, т.е. результата, эффекта некоторого действия от уровня (интенсивности) этого действия.

2. <u>*Производственная функция*</u> – зависимость результата производственной деятельности от обусловивших его факторов.

3. <u>*Функция выпуска*</u> (частный вид производственной функции) – зависимость объёма производства от наличия или потребления ресурсов.

4. <u>*Функция издержек*</u> (частный вид производственной функции) – зависимость издержек производства от объема продукции.

5. <u>*Функции спроса, потребления и предложения*</u> – зависимость объёма спроса, потребления или предложения на отдельные товары или услуги от различных факторов (напр-р, цены, дохода и т.п.).

Рассмотрим зависимость спроса D (demand) и предложения S (supply) от цены на товар P (price).

Чем меньше цена, тем больше спрос при постоянной покупательской способности населения. Обычно зависимость D от P имеет вид ниспадающей линии, например прямой:

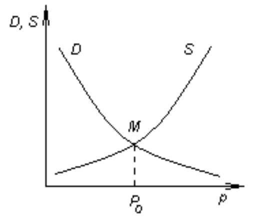
$D = -aP + c, \quad a > 0, \quad c > 0$ (1)

В свою очередь, предложение растет с увеличением цены на товар, и поэтому зависимость S от P имеет следующий характерную форму: $S = bP + d, \quad b > 0, \quad d > 0$ (2)

В формулах (1) и (2) *a, b, c, d* – так называемые экзогенные величины; они зависят от ряда других причин (благосостояние общества, политическая обстановка и т.п.). Переменные, входящие в формулы (1) и (2), положительны, поэтому графики функций имеют смысл только в первой координатной четверти.

Для экономики представляет интерес условие равновесия, т.е. равенство спроса и предложения; это условие задается уравнением $D(P) = S(P)$

и соответствует точке *M* пересечения кривых D и S – это так называемая точка равновесия. Цена P_0, при которой выполнено это условие, называется <u>*равновесной*</u>.



При увеличении благосостояния населения, что соответствует росту величины c в формуле (1), точка равновесия M смещается вправо, т.к. кривая D поднимается вверх; при этом цена товара растет при неизменной кривой предложения S.

Рассмотрим простейшую задачу поиска равновесной цены. Это одна из основных поблеем рынка, означающая торг между производителем и покупателем (рис. 1,2,3).

Пусть сначала цену P_1 называет производитель (в простейшей схеме он же и продавец). Цена P_1 на самом деле выше равновесной (естественно всякий производитель стремится получить максимум выгоды из своего производства). Покупатель оценивает спрос D_1 при этой цене и определяет свою цену P_2, при которой этот спрос D_1 равен предложению. Цена P_2 ниже равновесной (всякий покупатель стремится купить подешевле). В свою очередь, производитель оценивает спрос D_2, соответствующий цене P_2, и определяет свою цену P_3, при которой спрос равен предложению; эта цена выше равновесной. Процесс торга продолжается и при определенных условиях приводит к устойчивому приближению к равновесной цене, т.е. к «скручиванию» спирали. Если рассматривать последовательность чисел, состоящую из называемых в процессе торга цен, то она имеет своим пределом равновесную цену P_0 (рис. 1). Следует заметить, что в данной схеме спираль торга скручивается, если $b < a$. В противном случае имеет место либо циркулирование по замкнутому циклу $(b = a)$ - рис. 2, либо «раскручивание» спирали и уход от равновесной цены $(b < a)$ - рис.3.

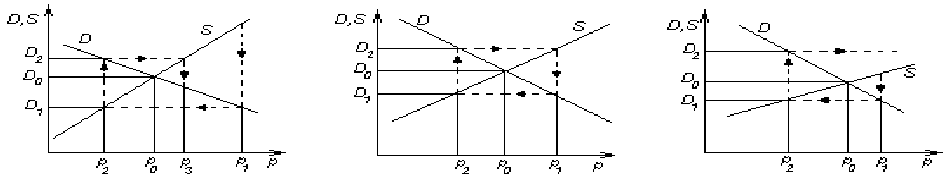


рис. 1 рис. 2 рис. 3

Поиск равновесной цены

5 Производные и дифференциалы высших порядков.

Пусть функция f(x)- дифференцируема на некотором интервале. Тогда, дифференцируя ее, получаем первую производную

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Если найти производную функции f′(x), получим **вторую производную** функции f(x).

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

т.е. y′′ = (y′)′ или $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Этот процесс можно продолжить и далее, находя производные степени n.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right).$$

6. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей.

(Лопиталь (1661-1704) – французский математик)

Теорема (правило Лопиталя). *Если функции f(x) и g(x) дифференцируемы в вблизи точки a, непрерывны в точке a, g′(x) отлична от нуля вблизи a и f(a) = g(a) = 0, то предел отношения функций при x→a равен пределу отношения их производных, если этот предел (конечный или бесконечный) существует*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Следует отметить, что правило Лопиталя – всего лишь один из способов вычисления пределов. Часто в конкретном примере наряду с правилом Лопиталя может быть использован и какой – либо другой метод (замена переменных, домножение и др

Неопределенности вида 0^0; 1^∞; ∞^0 можно раскрыть с помощью логарифмирования. Такие неопределенности встречаются при нахождении пределов функций вида $y=\left[f(x)\right]^{g(x)}$, f(x)>0 вблизи точки а при x→a. Для нахождения предела такой функции достаточно найти предел функции lny = g(x)lnf(x).

1.4 Лекция №4 (2 часа)
Тема: «Исследование функций»

1.4.1 Вопросы лекции:

1. Признак монотонности функции на интервале.
2. Достаточные условия локального экстремума.
3. Выпуклые (вогнутые) функции. Достаточные условия выпуклости функции. Необходимый и достаточный признаки точки перегиба.
4. Асимптоты графика функции.
5. Общая схема исследования функции и построения ее графика.

1.4.2. Краткое содержание вопросов
1. Признак монотонности функции на интервале.

Установим связь между свойствами функций и их производными. Изучим точные методы исследования функции и построения графиков с помощью первой и второй производных.

Рассмотрим функцию $y=f(x)$ непрерывную и определенную на некотором промежутке X.

ОПР: Функция называется *возрастающей*, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т.е. $x_2>x_1 \Rightarrow f(x_2)>f(x_1)$ (рис. 1)

ОПР: Функция называется *убывающей*, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, т.е. $x_2>x_1 \Rightarrow f(x_2)<f(x_1)$ (рис. 2)

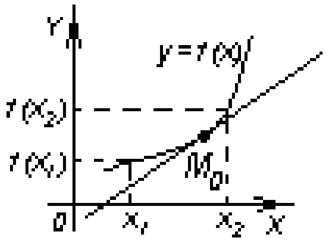


рис. 1

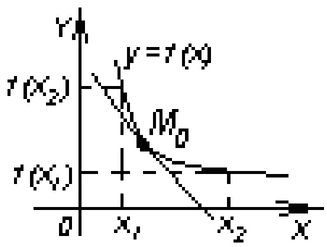


рис.2

Установим связь между возрастанием (убыванием) функции и ее производной.

Рассмотрим возрастающую функцию $y=f(x)$ непрерывную и определенную на некотором промежутке X.

Возьмем любую точку $M_0(x_0;y_0)$ на графике и проведем касательную к графику функции в этой точке.

Обозначим α_1 - угол наклона касательной к оси Ox.

Вспомним геометрический смысл производной: $f'(x)=k$, тогда

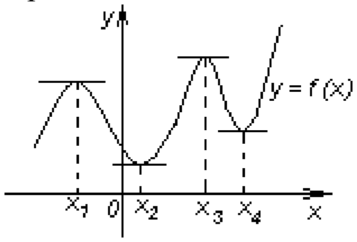
$f'(x_0)=k_{кас}=tg\alpha_1$, α_1 - острый угол, поэтому $tg\alpha_1>0 \Rightarrow f'(x_0)>0$

Аналогично для убывающей функции. Угол α_2 наклона касательной к оси Ox тупой, поэтому $tg\alpha_2<0 \Rightarrow f'(x_0)<0$

Обобщим сказанное в виде теоремы.

ТЕОРЕМА (*признак монотонности*): Если функция $y=f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и внутри интервала $f'(x)>0$ $\left[\ f'(x)<0\ \right]$, то график функции $y=f(x)$ возрастает [убывает] на интервале $(a;b)$.

Рассмотрим функцию, которая имеет несколько интервалов возрастания и убывания, дифференцируемую на всей области определения.



Точки x_1, x_2, x_3, x_4 отделяют интервалы возрастания от интебрвалов убывания.

Заметим, что значение функции в точке x_1 больше значений функции во всех «соседних» точках как слева, так и справа от x_1. Поэтому в точке x_1 функция имеет максимум. В точке x_3 функция тоже имеет максимум, хотя $f(x_1) < f(x_3)$. Аналогично для точек минимума x_2 и x_4.

ОПР: Функция $y = f(x)$ имеет *максимум [минимум]* в точке x_0, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех точек, отличных от x_0 и принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ $[\ f(x) > f(x_0)\ ]$.

Замечание: Точка x_1 - локальный максимум, x_3 - глобальный максимум,

x_4 - локальный минимум, x_2 - глобальный минимум.

Точки максимума и минимума объединяют под общим названием точек *экстремума*.

2. Достаточные условия локального экстремума.

Установим связь между производной и точками экстремума.

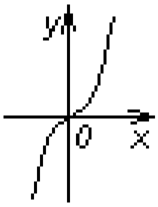
ТЕОРЕМА (*необходимое условие экстремума*): Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то производная функции в этой точке равна нулю или не существует.

Теорема имеет следующий геометрический смысл:

Если x_1, x_2, x_3, x_4 - точки экстремума и функция дифференцируема в этих точках, то можно провести касательные в этих точках, причем $k_1 = f'(x_1) = tg\alpha_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 0$. Аналогично $\alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0$ и $\alpha_4 = 0$. Это означает, что касательные параллельны оси Ox.

Заметим, что обратная теорема не верна. Из того, что $f'(x_0) = 0$ или $\nexists\ f'(x_0)$ не следует, что точка x_0 является точкой экстремума.

Пример: $y = x^3$



$$y' = 3x^2 \qquad y' = 0 \quad при \quad x = 0$$

Тем не менее, в точке (0,0) нет экстремума, поэтому точки в которых производная равна нулю или не существует называют точками возможного экстремума (*критическими точками*), а условие $f'(x_0) = 0$ или $\nexists\ f'(x_0)$ является лишь *необходимым.*

Чем же отличаются, например, точка x_3 от точки $x=0$?

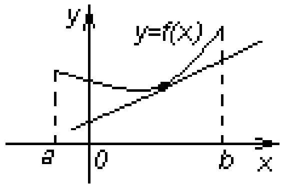
В точке x_3 функция меняет характер монотонности (с возрастания на убывание), т.е. производная слева от точки x_3 положительна, а справа отрицательна. В точке $x=0$ функция $y = x^3$ характер монотонности не меняет. Слева и справа от критической точки функция возрастает и её производная сохраняет положительный знак. Сформулируем достаточный признак экстремума.

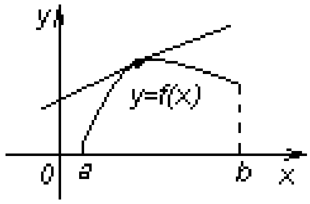
ТЕОРЕМА (*достаточное условие экстремума*): Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема во всех точках своей области определения, и точка x_0 принадлежит области определения. Если производная $f'(x)$ при переходе аргумента слева направо через критическую точку x_0 меняет знак с «+» на «-», то x_0 - точка максимума, если с «-» на «+», то x_0 - точка минимума, а если производная знака не меняет, то в точке x_0 экстремума нет.

3. Выпуклые (вогнутые) функции. Достаточные условия выпуклости функции. Необходимый и достаточный признаки точки перегиба.

Еще одной важной характеристикой функции является характер её выпуклости.

ОПР: График дифференцируемой функции называется *выпуклым [вогнутым]* в интервале $(a;b)$, если он расположен ниже [выше] любой своей касательной в этом интервале.





За выпуклость и вогнутость графика функции «отвечает» вторая производная.

ТЕОРЕМА: Если функция $y = f(x)$ имеет вторую производную во всех точках интервала $(a;b)$ и если во всех точках этого интервала $f''(x) > 0$, то график функции вогнутый в интервале $(a;b)$, если же $f''(x) < 0$, то график функции выпуклый в интервале $(a;b)$.

ОПР: Точка $M_0(x_0; f(x_0))$ называется точкой перегиба графика функции $y = f(x)$, если проходя через эту точку функция меняет характер выпуклости / вогнутости.

ТЕОРЕМА (*необходимое условие точки перегиба):* Пусть график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M_0(x_0; f(x_0))$, то вторая производная в этой точке равна нулю или не существует.

Доказательство: Метод от противного. Пусть $f''(x_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad f''(x) < 0$ или $f''(x) > 0$. Значит в точке $M_0(x_0; f(x_0))$ функция имеет определенное направление выпуклости / вогнутости, а это противоречит наличию перегиба в точке $M_0(x_0; f(x_0))$.

Замечание: Обратное утверждение не верно. Не всякая точка, в которой $f''(x) = 0$ или $\nexists\, f''(x)$ является точкой перегиба.

ТЕОРЕМА (*достаточное условие точки перегиба*): Пусть x_0 - стационарная точка. Если проходя через стационарную точку вторая производная меняет знак, то график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M_0(x_0; f(x_0))$.

4. Асимптоты графика функции.

Пусть дана функция $f(x)$. При исследовании функции на бесконечности, т.е. при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$ или вблизи точек разрыва II рода, часто оказывается, что график функции сколь угодно близко приближается к той или иной прямой. Такие прямые называются *асимптотами*.

ОПР: Пряма линия называется *асимптотой* для кривой $y = f(x)$, если расстояние d от точки M, лежащей на кривой до прямой стремится к 0 при удалении точки M от начала координат в бесконечность.

Существует три вида асимптот: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

ОПР: Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

ОПР: Если $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} f(x) = A$, то прямая $y = A$ называется *горизонтальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$).

ОПР: Если существуют такие числа k и b, что $\boxed{k=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\dfrac{f(x)}{x}}$, $\boxed{b=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}(f(x)-kx)}$, то прямая $y=kx+b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$).

Практически целесообразно искать асимптоты в следующем порядке:

1) вертикальные асимптоты
2) горизонтальные асимптоты
3) наклонные асимптоты

5. Общая схема исследования функции и построения ее графика.

Исследование функций и построение графиков следует проводить по следующей схеме:

I. Исследование функции без использования производной.

1) Найти область определения функции D_y.

2) Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва функции, определить их род.

3) Найти асимптоты графика функции.

4) Если возможно, найти пересечение графика функции с осями координат. Если отыскание точек пересечения затруднительно, то посмотреть координаты по графику (приблизительно).

5) Исследовать функцию на четность / нечетность.

II. Исследование функции с помощью первой производной.

6) Определить интервалы монотонности и точки экстремума функции.

III. Исследование функции с помощью второй производной.

7) Определить интервалы выпуклости и вогнутости, найти точки перегиба графика функции.

IV. Построение графика функции.

8) Построение по пунктам исследования (построение графика принято начинать с построения асимптот).

9) Определить множество значений функции E_y.

1.5 Лекция №5 (2 часа)

Тема: «Неопределенный интеграл. Определенный интеграл»

1.5.1 Вопросы лекции:

1. Первообразная и неопределенный интеграл. Таблица неопределенных интегралов.
2. Свойства неопределенного интеграла. Замена переменной в неопределенном интеграле, интегрирование по частям.
3. Интегрирование рациональных функций.
4. Задача о вычислении площади криволинейной трапеции. Формула Ньютона-Лейбница.
5. Замена переменной в определенном интеграле, интегрирование по частям.
6. Геометрические приложения определенного интеграла: вычисление площади криволинейной трапеции и объема тела вращения.

1.5.2 Краткое содержание вопросов

1. Первообразная и неопределенный интеграл. Таблица неопределенных интегралов.

Одной из основных задач дифференциального исчисления является отыскание производной заданной функции. Обратной задачей является нахождение по данной функции $f(x)$ такой функции $F(x)$, производная которой была бы равна функции $f(x)$, т. е. $F'(x)=f(x)$.

Восстановление функции по известной производной этой функции составляет одну из основных задач интегрального исчисления.

ОПР: Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, если для всех значений x из этого промежутка выполняется равенство

$$\boxed{F'(x)=f(x)}$$

ТЕОРЕМА: Если $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, то любая другая первообразная для функции $f(x)$ на этом промежутке X, может быть представлена в виде $F(x)+C$, где C- некоторая постоянная.

ОПР: Если функция $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$, то множество функций $F(x)+C$, где C=const, называется *неопределённым интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx = F(x)+C$

f(x)- подынтегральная функция, f(x)dx-подынтегральное выражение, x- переменная интегрирования.

2. Свойства неопределенного интеграла. Замена переменной в неопределенном интеграле, интегрирование по частям.

1) $(\int f(x)dx)' = f(x) \quad и \quad d(\int f(x)dx) = f(x)dx$

Доказательство: 1) $(\int f(x)dx)' = (F(x)+C)' = F'(x)+0 = f(x)$

2) $d(\int f(x)dx) = (\int f(x)dx)'dx = f(x)dx$

2) $\int dF(x) = F(x)+C$

Доказательство: $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x)+C$

3) $\int k\cdot f(x)dx = k\cdot\int f(x)dx$

4) $\int (f(x)\pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Часто введение новой переменной позволяет свести нахождение интеграла к нахождению табличного, т. е. перейти к непосредственному интегрированию.

Рассм $\int f(x)dx$ Обозначим $x=\varphi(t)$ тогда $dx = d(\varphi(t)) \Rightarrow dx = \varphi'(t)dt$ подставим в исходный интеграл: $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$

Зам: На практике обычно обозначают некоторую функцию от x через t $\psi'(x) = t$

3. Интегрирование рациональных функций.

Обозначим многочлен n-ой степени через $P_n(x)$

$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$

$P_0(x) = A - мн\ 0-ой\ степ, \quad P_1(x) = Ax+B - мн\ 1-ой\ степ, \quad P_2(x) = Ax^2+Bx+C - мн\ 2-ой\ степ...$

Вспомним: 1) Два многочлена одинаковой степени называются *равными*, если равны их коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях неизвестных.

2) Значение переменной x, обращающее многочлен в 0, называется *корнем* Многочлена

3) Целые корни многочлена, если они существуют, находятся среди делителей свободного члена

4) Каждый многочлен делится нацело на разность меxду x и его корнем.

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} - рациональная\ дробь \Rightarrow \begin{cases} m>n - правильная\ дробь \\ m\le n - неправильная\ дробь \end{cases}$

Существует 4 типа простейших правильных дробей:

I тип: $\frac{A}{x-k}$, $k\in R$, $k - корень\ знаменателя$ II тип: $\frac{A}{(x-k)^\alpha}, \alpha\ge 2$, $k - корень\ кратности\ \alpha$ III тип: $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $D<0$ IV тип: $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^\alpha}, \alpha\ge 2$, $D<0$

Рассм.: I: $\int\frac{Adx}{x-k} = A\ln|x-k|+C$

II: $\int\frac{Adx}{(x-k)^\alpha} = A\int(x-k)^{-\alpha}dx = \frac{A}{(1-\alpha)(x-k)^{1-\alpha}}+C$

III: $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx -$ *интеграл от дроби с квадрвтным трёхчленом в знаменателе*

$D<0$

IV: $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^{\alpha}}dx -$ *рекурентная формула*

$D<0$

Основана на выделении полного квадрата в знаменателе. Метод применяют несколько раз, каждый раз степень в знаменателе понижается на 1

Разложение рациональных дробей на простейшие.

Любую <u>*правильную*</u> дробь можно единственным образом представить (разложить) в виде суммы простейших дробей. Это разложение зависит от корней многочлена, стоящего в знаменателе.

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $n<m -$ <u>*правильная дробь*</u>. (*Если дробь неправильная, то сначала выделим целую часть*)

Разложим многочлен, стоящий в знаменателе на произведение элементарных множителей.

$Q_m(x)=(x-k)^t(x^2+px+q)^s$

$$\frac{P_n(x)}{\underbrace{(x-k)^t}_{\substack{t\text{ дробей}\\\text{разложении}\\\text{I и II типа}}}\underbrace{(x^2+px+q)^s}_{\substack{s\text{ дробей}\\\text{разложении}\\\text{III и IV типа}}}}=\underbrace{\frac{A}{x-k}+\frac{B}{(x-k)^2}+\frac{C}{(x-k)^3}+...+\frac{D}{(x-k)^t}}_{t\text{ дробей}}+\underbrace{\frac{Ex+F}{x^2+px+q}+\frac{Gx+K}{(x^2+px+q)^2}+...+\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^s}}_{s\text{ дробей}}$$ где

A,B,C,D,E,F…M,N-некоторые числа, которые вычисляются <u>*методом неопределённых коэффициентов.*</u>

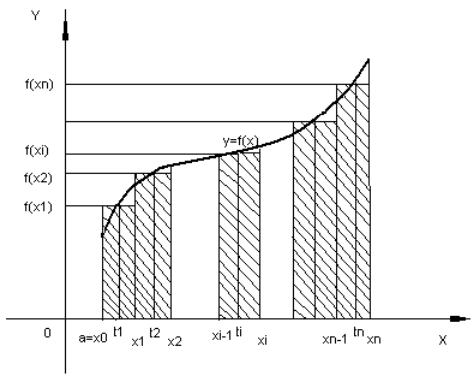
Чтобы найти коэффициенты, нужно привести сумму дробей к общему знаменателю. Получим две равные дроби, причём у них одинаковые знаменатели $\Rightarrow$ приравниваем числители. Учитывая, что два многочлена равны, если равны коэффициенты при соответствующих степенях неизвестных, находим коэффициенты A,B,C,D…M,N.

4. Задача о вычислении площади криволинейной трапеции. Формула Ньютона-Лейбница.

Исторически возникла потребность вычислять площадь произвольной фигуры, в частности - криволинейной трапеции. Любую фигуру можно представить в виде нескольких криволинейных трапеций. Таким образом, если мы научимся вычислять площадь произвольной криволинейной трапеции, то мы сможем вычислять площади различных фигур.

Перенесём криволинейную трапецию в ПДСК т. о., что её основание совпадёт с отрезком $[a;b]$ оси OX, слева и справа трапеция будет ограничена прямыми $x=a$ и $x=b$, а сверху – графиком функции $y=f(x)$, определённой и непрерывной на этом отрезке.

Разобьём отрезок $[a;b]$ на n сколь угодно малых частей (т. е. $n\to\infty$) произвольным образом, причём: $a=x_0<x_1<x_2<...<x_{i-1}<x_i<...<x_n=b$.



Точки $x_0,x_1,x_2,...,x_n$ - <u>*точки разбиения.*</u>

В каждом из полученных отрезков возьмём точку:

$t_1\in[x_0;x_1], t_2\in[x_1;x_2],...,t_i\in[x_{i-1};x_i],...,t_n\in[x_{n-1};x_n]$

Обозначим $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}-$ *длина элементарного отрезка разбиения* $[x_{i-1};x_i]$.

Каждой точке t_i соответствует значение функции $f(t_i)$. Построим прямоугольники с основаниями Δx_i и высотами $f(t_i)$. Сумма площадей всех полученных прямоугольников будет приблизительно равна площади данной криволинейной трапеции.

Составим сумму $\sigma = f(t_1)\Delta x_1 + f(t_2)\Delta x_2 + ... + f(t_i)\Delta x_i + ... + f(t_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$

σ (сигма)- *интегральная сумма.*

Геометрический смысл: σ - это сумма площадей прямоугольников с основаниями $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ и высотами $f(t_1), f(t_2), ..., f(t_n)$, если $f(x) \geq 0$. σ приблизительно равна площади данной криволинейной трапеции.

Обозначим через λ (лямбда) длину наибольшего отрезка разбиения $\lambda = \max\limits_{i=1,,,n}(\Delta x_i)$

Очевидно, что чем больше n, тем меньше λ (т. е. если $n \to \infty$, то $\lambda \to 0$) $\Rightarrow$ площадь криволинейной трапеции будет тем ближе к значению σ, чем больше n (или, чем меньше λ).

ОПР: Если существует конечный предел I интегральной суммы σ при $\lambda \to 0$, то этот предел называется *определённым интегралом* от функции $f(x)$ по отрезку $[a;b]$ и обозначается

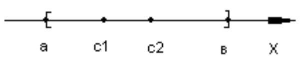
$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda \to 0} \sigma,$$

Функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a;b]$, a-нижний, b-верхний пределы интегрирования

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$

2) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$

3)



$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^{c1} f(x)dx + \int\limits_{c1}^{c2} f(x)dx + \int\limits_{c2}^{b} f(x)dx$$

4) $\int\limits_a^b k \cdot f(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$

5) $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$

Вычисление определённого интеграла с помощью $\lim\sigma$ затруднительно, поэтому существует другой метод, основанный на теореме.

ТЕОРЕМА *(Ньютона-Лейбница):* Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и F(x)-некоторая её первообразная на этом отрезке, то справедлива формула: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

формула Ньютона- Лейбница

5. Замена переменной в определенном интеграле, интегрирование по частям.

1) *Замена переменной* $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$

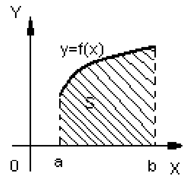
$x = \varphi(t)$	x	a	в	φ(t)=a ⇒ t= α
$dx = \varphi'(t)dt$	t	α	β	φ(t)=b ⇒ t= β

2) *Интегрирование по частям* $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$

6. Геометрические приложения определенного интеграла: вычисление площади криволинейной трапеции и объема тела вращения.

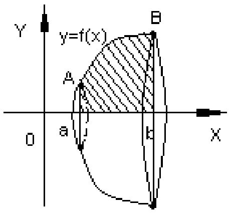
Пусть в ПДСК задана криволинейная трапеция, ограниченная отрезком $[a;b]$ на оси ОХ, прямыми х=а и х=в и сверху графиком функции $y = f(x)$ непрерывной на этом отрезке , её площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx$$



Определённый интеграл от неотрицательной непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ численно равен площади криволинейной трапеции с основанием $[a;b]$, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$.

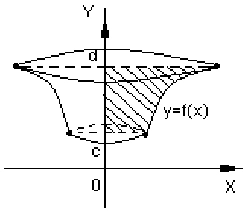
Пусть имеем функцию $y = f(x), a \le x \le b, f(x) > 0$ и непрерывна.



Будем вращать дугу АВ вокруг оси ОХ, получим тело вращения, площадь поверхности которого вычисляется по формуле $S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

И объём вычисляется по формуле $V = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx$

Заметим, если дугу вращать вокруг оси ОУ, то



выразим х через у $x = \varphi(y), c \le y \le d$, тогда площадь поверхности тела вращения вокруг оси ОУ вычисляется по формуле $S = 2\pi\int_c^d \varphi(y)\sqrt{1+(\varphi'(y))^2}dy$

1.6 Лекция №6 (2 часа)
Тема: «Числовые ряды. Степенные ряды»

1.6.1 Вопросы лекции:

1. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимый признак сходимости.
2. Числовые ряды с положительными членами: критерий сходимости. Достаточные признаки сходимости: первый и второй признаки сравнения, признак Даламбера и Коши в предельной форме, интегральный признак Коши.
3. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Оценка остатка ряда. Абсолютно и условно сходящиеся ряды сходящиеся ряды и их свойства.
4. Степенные ряды. Теорема Абеля. Область, интервал и радиус сходимости степенного ряда. Свойства степенного ряда на интервале сходимости.

1.6.2 Краткое содержание вопросов

1. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимый признак сходимости.

Пусть задана последовательность действительных чисел (a_n): $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

<u>Опр;</u> Символ $a_1+a_2+a_3+\dots+a_n+\dots$ называется <u>*числовым рядом*</u> , а числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ его <u>*членами,*</u> a_n ($n \in N$) называется <u>*.общим членом.*</u>

Обозначим: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...(1)$

Опр: Суммы $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, ... $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ .... называются *частичными суммами* ряда (1).

Опр: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *сходящимся,* если последовательность его частичных сумм сходится к какому-нибудь числу S (т е $\exists$ конечный предел $\lim_{n\to\infty} S_n = S$), при этом S- *сумма ряда.*

В этом случае $S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ или S=$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\boxed{S = \lim_{n\to\infty} S_n}$ -сумма ряда

Опр: Если не существует $\lim_{n\to\infty} S_n$ или $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$, то ряд (1) называется *расходящимся.*

ТЕОРЕМА (*Необходимое условие сходимости ряда):* Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его общий член стремится к 0 (т е $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$)

Замечание: Обратная теорема не верна.

СЛЕДСТВИЕ: Если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

2. Числовые ряды с положительными членами: критерий сходимости. Достаточные признаки сходимости: первый и второй признаки сравнения, признак Даламбера и Коши в предельной форме, интегральный признак Коши.

1) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится (расходится), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Ca_n$, где $\tilde{N} \in R$ тоже сходится (расходится). Обратное верно при $C \neq 0$

2) Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, который называется суммой данных рядов, тоже сходится.

Гармонический ряд. Это ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, *где* $p \in R$ 1) если p>1, то ряд сходится.

2) если p$\leq$ 1, то ряд расходится.

В частности, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - расходится.

ОПР: Ряд, все члены которого положительны, называется *знакоположительным.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0 \quad (n \in N) \qquad (2)$$

ТЕОРЕМА (*Признак сравнения*): Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0$ (A) и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n, b_n > 0$ (B), $(n \in N)$.и выполняется неравенство $a_n \leq b_n, \forall n \in N$,
тогда из сходимости ряда (B)$\Rightarrow$ сходимость ряда (A),
а из расходимости ряда (A) $\Rightarrow$ расходимость ряда (B).

ТЕОРЕМА (*Предельный признак сравнения):* Пусть даны два знакоположительных ряда (A) и (B). Если $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, где $k > 0$, то оба знакоположительных ряда (A) и (B) в плане сходимости ведут себя одинаково (т. е. либо оба сходятся, либо оба расходятся).

ТЕОРЕМА (*Признак Даламбера)*: Пусть дан знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0$ (2). Если начиная с некоторого значения n члены ряда (2) удовлетворяют неравенству $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1$, то ряд (2) сходится, а если начиная с некоторого значения n выполняется неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то ряд (2) расходится

ТЕОРЕМА (<u>*Предельная форма признака Даламбера):*</u> Пусть дан знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0$ Если $\exists \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = D$, то $\begin{cases} \text{если } D < 1 - \text{ряд сходится} \\ \text{если } D > 1\ (D = \infty) - \text{ряд расходится} \\ D = 1 - \text{вопрос о сходимости ряда не решён, признак не подходит.} \end{cases}$

ТЕОРЕМА (<u>*Признак Коши*</u>): Пусть дан знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0$ (2). Если начиная с некоторого значения n выполняется неравенство $\sqrt[n]{a_n} \le 1$, то ряд (2) сходится, а если $\sqrt[n]{a_n} > 1$, то ряд (2) расходится

ТЕОРЕМА 2 (<u>*Предельная форма признака Коши):*</u> Если $\exists \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = K$, то

$$\begin{cases} \text{если } K < 1 - \text{ряд сходится} \\ \text{если } K > 1\ (D = \infty) - \text{ряд расходится} \\ K = 1 - \text{вопрос о сходимости ряда не решён, признак не подходит.} \end{cases}$$

3. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Оценка остатка ряда. Абсолютно и условно сходящиеся ряды сходящиеся ряды и их свойства.

<u>ОПР:</u> Ряд a_1-a_2+a_3-a_4+…, где a_n>0 называется <u>*знакочередующимся рядом*</u> $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$

-a_1+a_2-a_3+a_4-…, где a_n>0 тоже знакочередующийся ряд

Обозначим $u_n = (-1)^n a_n \quad то \quad |u_n| = a_n$

ТЕОРЕМА (<u>*Признак Лейбница):*</u> Если общий член знакочередующегося ряда удовлетворяет условиям:

$$\left.\begin{matrix} 1)\ |u_n|\ \textit{строго убывает} \\ 2)\ \lim_{n\to\infty}|u_n| = 0 \end{matrix}\right\} \textit{то ряд } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \textit{ сходится.}$$

Если хотя бы одно из этих условий нарушается, то ряд расходится.

<u>ОПР:</u> Если ряд сходится вместе с рядом, составленным из модулей его членов, то такой ряд называется <u>*абсолютно сходящимся.*</u>

<u>Свойства абсолютно сходящихся рядов.</u>

<u>1) Теорема.</u> *Для абсолютной сходимости ряда* $\sum u_n$ *необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде разности двух сходящихся рядов с неотрицательными членами.*

<u>Следствие.</u> Условно сходящийся ряд является разностью двух расходящихся рядов с неотрицательными стремящимися к нулю членами.

2) В сходящемся ряде любая группировка членов ряда, не изменяющая их порядка, сохраняет сходимость и величину ряда.

3) Если ряд сходится абсолютно, то ряд, полученный из него любой перестановкой членов, также абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Перестановкой членов условно сходящегося ряда можно получить условно сходящийся ряд, имеющий любую наперед заданную сумму, и даже расходящийся ряд.

4) **<u>Теорема.</u>** *При любой группировке членов абсолютно сходящегося ряда (при этом число групп может быть как конечным, так и бесконечным и число членов в группе может быть как конечным, так и бесконечным) получается сходящийся ряд, сумма которого равна сумме исходного ряда.*

5) Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся абсолютно и их суммы равны соответственно S и σ, то ряд, составленный из всех произведений вида $u_i v_k,\quad i,k = 1,2,...$ взятых в каком угодно порядке, также сходится абсолютно и его сумма равна $S\cdot\sigma$ - произведению сумм перемножаемых рядов.

Если же производить перемножение условно сходящихся рядов, то в результате можно получить расходящийся ряд.

ОПР: Если знакочередующийся ряд сходится, а ряд, составленный из модулей его членов расходится, то такой ряд называется *условно сходящимся.*

4. Степенные ряды. Теорема Абеля. Область, интервал и радиус сходимости степенного ряда. Свойства степенного ряда на интервале сходимости.

ОПР: Ряд вида $a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$, где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, x_0 \in R$ -заданные действительные числа, x-переменная, называется *степенным рядом.*

Обозначение $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ (4)

ТЕОРЕМА (*Признак Даламбера для рядов с произвольными членами):* Если $\exists \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = D$, то

$$\begin{cases} \text{если } D<1 \Rightarrow \text{ряд сходится абсолютно} \\ \text{если } D>1 \Rightarrow \text{ряд расходится} \\ \text{если } D=1 \Rightarrow \text{вопрос о сходимости ряда не решен} \end{cases}$$

Найем интервал и радиус сходимости степенного ряда, воспользовавшись признаком Даламбера

$$D = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a^n(x-x_0)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)}{a_n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}(x-x_0)\right|$$

Пусть D<1, то степенной ряд абсолютно сходится.

Теоремы Абеля. (Нильс Хенрик Абель (1802 – 1829) – норвежский математик)

Теорема. *Если степенной ряд* $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ *сходится при* $x = x_1$ *, то он сходится и притом абсолютно для всех* $|x| > |x_1|$.

$$\Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}(x-x_0)\right| < 1 \quad \Rightarrow |x-x_0| < \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x - x_0 < \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \Rightarrow x < \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| + x_0 \\ x - x_0 > -\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \Rightarrow x > x_0 - \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \end{array}\right.$$

Т е $x_0 - \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| < x < x_0 + \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

обозн. $c_1 < x < c_2$

Значит, на интервале $(c_1;c_2)$ ряд абсолютно сходится.

$R = \left|\frac{c_1 - c_2}{2}\right|$ -*радиус сходимости ряда.*

Также нужно выяснить вопрос о сходимости ряда на концах интервала, т е при x= c_1 и x=c_2. Таким образом, получим *область сходимости.*

Теорема. Если степенной ряд $\sum a_nx^n$ сходится для положительного значения $x=x_1$, то он сходится равномерно в любом промежутке внутри $(-|x_1|;|x_1|)$.

Действия со степенными рядами.

1) Интегрирование степенных рядов.

Если некоторая функция *f(x)* определяется степенным рядом: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$, то интеграл от этой функции можно записать в виде ряда:

$$\int f(x)dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int a_nx^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C$$

2) Дифференцирование степенных рядов.

Производная функции, которая определяется степенным рядом, находится по формуле:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(a_nx^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} na_nx^{n-1}$$

1.7 Лекция №7 (2 часа)
Тема: «Дифференциальные уравнения»

1.7.1 Вопросы лекции:
1. Обыкновенные дифференциальные уравнения n -го порядка, основные понятия.
2. Некоторые типы дифференциальных уравнений первого порядка. Уравнения с разделяющимися переменными. Линейные уравнения. Уравнения Бернулли.
3. Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка. Теорема о существовании и единственности решения. Однородные и неоднородные линейные дифференциальные уравнения.

4. Теорема об общем решении линейного неоднородного уравнения. Пространство решений линейного однородного уравнения, фундаментальная система решений. Определитель Вронского системы решений. Теорема об общем решении линейного однородного уравнения.
5. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (на примере уравнений второго порядка). Характеристическое уравнение и фундаментальная система решений однородного уравнения.
6. Построение частного решения неоднородного уравнения с правой частью специального вида методом неопределенных коэффициентов.

1.7.2 Краткое содержание вопросов
1. Обыкновенные дифференциальные уравнения n -го порядка, основные понятия.
ОПР: *Дифференциальным уравнением* называется равенство, выражающее зависимость между аргументом, искомой функцией и её производными.

$$F(x;y;y';y'';...;y^{(n)})=0 \quad (1)$$

Запишем это уравнение в виде: $y^{(n)}=F_1(x;y;y';y'';...;y^{(n-1)}) \quad (2)$

ОПР: *Порядком* ДУ называется наивысший порядок входящей в него производной.
Уравнения (1) и (2) называются *ДУ n-го порядка.*
ОПР: *Решением ДУ* называется функция, обращающая его в верное равенство, т е в тождество.
ОПР: *Общим решением ДУ* n-го порядка называется функция, зависящая от аргумента и n произвольных постоянных. $y=\varphi(x;C_1;C_2:...:C_n) \quad (3)$
ОПР: *Частным решением ДУ* называется решение, полученное из общего при определенных значениях постоянных
График общего решения ДУ называется *интегральными кривыми.*
2. Некоторые типы дифференциальных уравнений первого порядка. Уравнения с разделяющимися переменными. Линейные уравнения. Уравнения Бернулли.

$\boxed{M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0}$ (4) –уравнение с разделяющимися переменными.

Разделим переменные, т е приведем уравнение к такому виду, чтобы в левой части равенства были функции, зависящие только от y, а в правой- только от x.

$$M_2(y)N_2(y)dy=-M_1(x)N_1(y)dx \quad \Big|: M_2(x)N_1(y)\neq 0$$

$$\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=-\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx - \text{уравнение с разделенными переменными}$$

Проинтегрируем обе части равенства

$$\int\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=-\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx$$

Решив интегралы, найдем решение ДУ
ОПР: ДУ $y'=f(x;y)$ называется *однородным ДУ 1 порядка ,* если функция $f(x;y)$ удовлетворяет условию: $\boxed{f(tx;ty)=f(x;y)}$ (5) , где t-произвольный параметр.

Рассмотрим однородное ДУ $y'=f(x;y)$

Обозначим $\boxed{z=\frac{y}{x}} \Rightarrow y=xz$, z-функция от x

$$y' = z'x + zx' = z'x + z$$

Подставим в исходное уравнение:

$z'x + z = f(x; zx)$

$z'x = f(x; zx) - z$ - можно свести к уравнению с разделяющимися переменными.

<u>Определение.</u> Дифференциальное уравнение первого порядка вида: $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ называется **уравнением в полных дифференциалах**, если левая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u = F(x, y)$.

Интегрирование такого уравнения сводится к нахождению функции u, после чего решение легко находится в виде: $du = 0; \quad u = C$.

Таким образом, для решения надо определить:

1) в каком случае левая часть уравнения представляет собой полный дифференциал функции u;

2) как найти эту функцию.

Если дифференциальная форма $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции u, то можно записать: $du = M(x, y)dx + N(x, y)dy = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy.$

Т.е. $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) \end{cases}.$

Найдем смешанные производные второго порядка, продифференцировав первое уравнение по y, а второе – по x:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial M(x, y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial N(x, y)}{\partial x} \end{cases}$$

Приравнивая левые части уравнений, получаем **необходимое и достаточное условие** того, что левая часть дифференциального уравнения является полным дифференциалом. Это условие также называется **условием тотальности.**

Теперь рассмотрим вопрос о нахождении собственно функции *u.*

Проинтегрируем равенство $\dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x, y): \quad u = \int M(x, y)dx + C(y).$

Вследствие интегрирования получаем не постоянную величину С, а некоторую функцию С(у), т.к. при интегрировании переменная *у* полагается постоянным параметром.

Определим функцию С(у).

Продифференцируем полученное равенство по *у*. $\dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx + C'(y).$

Откуда получаем: $C'(y) = N(x, y) - \dfrac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx.$

Для нахождения функции С(у) необходимо проинтегрировать приведенное выше равенство. Однако, перед интегрированием надо доказать, что функция С(у) не зависит от *х*. Это условие будет выполнено, если производная этой функции по *х* равна нулю.

<u>ОПР:</u> <u>*Линейным ДУ 1 порядка*</u> называется уравнение вида $\boxed{y' + p(x)y = q(x)}$ (6) , где $p(x)$ *и* $q(x)$ - некоторые функции от х.

Одним из методов решения таких уравнений является <u>*метод Бернулли.*</u>

Решение ДУ ищут в виде $y = u(x) \cdot v(x)$, *где* $u(x)$ *и* $v(x)$ -неизвестные функции от х.

$y = uv$

$y' = u'v + uv'$ подставим в (6)

$u'v + \underline{\underline{uv'}} + \underline{\underline{p(x)uv}} = q(x)$ вынесем u за скобку

$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$

Подберём v(x) так, чтобы $v' + p(x)v = 0$, получим систему

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0 \\ u'v = q(x) \end{cases}$$ -это уравнения с разделяющимися переменными

Из первого уравнения найдём v(x), подставим его во второе уравнение и найдём u(x). Т.о. найдём $y = u(x)\cdot v(x)$ - общее решение ДУ.

3. Линейные дифференциальные уравнения *n* -го порядка. Теорема о существовании и единственности решения. Однородные и неоднородные линейные дифференциальные уравнения.

__Определение.__ **Дифференциальным уравнением порядка *n*** называется уравнение вида:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

В некоторых случаях это уравнение можно разрешить относительно $y^{(n)}$:

$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$. Так же как и уравнение первого порядка, уравнения высших порядков имеют бесконечное количество решений

__Определение.__ Решение $y = \varphi(x)$ удовлетворяет начальным условиям $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$, если $\varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi'(x_0) = y_0', \quad .... \quad , \quad \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

__Определение.__ Нахождение решения уравнения $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$, называется **решением задачи Коши.**

__Теорема Коши.__ (Теорема о необходимых и достаточных условиях существования решения задачи Коши).

Если функция (n-1) –й переменных вида $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ *в некоторой области D (n-1)-мерного пространства непрерывна и имеет непрерывные частные производные по* $y, y', ..., y^{(n-1)}$, *то какова бы не была точка (* $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$*) в этой области, существует единственное решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$, *определенного в некотором интервале, содержащем точку* x_0, *удовлетворяющее начальным условиям* $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$.

4. Теорема об общем решении линейного неоднородного уравнения. Пространство решений линейного однородного уравнения, фундаментальная система решений. Определитель Вронского системы решений. Теорема об общем решении линейного однородного уравнения.

__Определение.__ **Линейным дифференциальным уравнением *n* – го порядка** называется любое уравнение первой степени относительно функции *y* и ее производных $y', y'', ..., y^{(n)}$ вида:

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = f(x);$$

где $p_0, p_1, ..., p_n$ – функции от *x* или постоянные величины, причем $p_0 \neq 0$.

Левую часть этого уравнения обозначим *L(y)*.

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = L(y);$$

__Определение.__ Если *f(x) = 0*, то уравнение *L(y) = 0* называется **линейным однородным** уравнением, если *f(x) ≠ 0,* то уравнение *L(y) = f(x)* называется **линейным неоднородным** уравнением, если все коэффициенты $p_0, p_1, p_2, ... p_n$ – постоянные числа, то уравнение *L(y) = f(x)* называется **линейным дифференциальным уравнением высшего порядка с постоянными коэффициентами**.

Отметим одно важное свойство линейных уравнений высших порядков, которое отличает их от нелинейных. Для нелинейных уравнений частный интеграл находится из общего, а для линейных – наоборот, общий интеграл составляется из частных. Линейные уравнения представляют собой наиболее изученный класс дифференциальных уравнений высших порядков. Это объясняется сравнительной простотой нахождения решения. Если при решении каких – либо практических задач требуется решить нелинейное дифференциальное уравнение, то часто применяются приближенные методы, позволяющие заменить такое уравнение “близким” к нему линейным.

Решения линейного однородного уравнения обладают следующими свойствами:

1) Если функция y_1 является решением уравнения, то функция Cy_1, где C – постоянное число, также является его решением.

2) Если функции y_1 и y_2 являются решениями уравнения, то $y_1 + y_2$ также является его решением.

<u>Структура общего решения.</u>

<u>Определение.</u> Фундаментальной системой решений линейного однородного дифференциального уравнения n –го порядка на интервале (a, b) называется всякая система n линейно независимых на этом интервале решений уравнения.

<u>Определение.</u> Если из функций y_i составить определитель n – го порядка

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

то этот определитель называется **определителем Вронского.**

(Юзеф Вроньский (1776 – 1853) – польский математик и философ - мистик)

<u>Теорема.</u> *Если функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ линейно зависимы, то составленный для них определитель Вронского равен нулю.*

<u>Теорема.</u> *Если функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ линейно независимы, то составленный для них определитель Вронского не равен нулю ни в одной точке рассматриваемого интервала.*

<u>Теорема.</u> *Для того, чтобы система решений линейного однородного дифференциального уравнения $y_1, y_2, \dots, y_n$ была фундаментальной необходимо и достаточно, чтобы составленный для них определитель Вронского был не равен нулю.*

<u>Теорема.</u> *Если $y_1, y_2, \dots, y_n$ - фундаментальная система решений на интервале (a, b), то общее решение линейного однородного дифференциального уравнения является линейной комбинацией этих решений.* $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n$, где C_i –постоянные коэффициенты.

5. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (на примере уравнений второго порядка). Характеристическое уравнение и фундаментальная система решений однородного уравнения.

Решение дифференциального уравнения вида $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = 0$ или, короче, $L(y) = 0$ будем искать в виде $y = e^{kx}$, где $k = const$.

Т.к. $y' = ke^{kx}$; $y'' = k^2e^{kx}$; ... $y^{(n)} = k^ne^{kx}$, то $L(e^{kx}) = e^{kx}(k^n + a_1k^{n-1} + \dots + a_n)$.

При этом многочлен $F(k) = k^n + a_1k^{n-1} + \dots + a_n$ называется ***характеристическим многочленом*** *дифференциального уравнения.*

Для того, чтобы функция $y = e^{kx}$ являлась решением исходного дифференциального уравнения, необходимо и достаточно, чтобы $L(e^{kx}) = 0$; т.е. $e^{kx}F(k) = 0$.

Т.к. $e^{kx} \neq 0$, то $F(k) = 0$ - это уравнение называется **характеристическим уравнением**.

Как и любое алгебраическое уравнение степени n, характеристическое уравнение $k^n + a_1k^{n-1} + \dots + a_n = 0$ имеет n корней. Каждому корню характеристического уравнения k_i соответствует решение дифференциального уравнения.

В зависимости от коэффициентов k характеристическое уравнение может иметь либо n различных действительных корней, либо среди действительных корней могут быть кратные корни, могут быть комплексно – сопряженные корни, как различные, так и кратные.

Не будем подробно рассматривать каждый случай, а сформулируем общее правило нахождения решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

1) Составляем характеристическое уравнение и находим его корни.

2) Находим частные решения дифференциального уравнения, причем:

а) каждому действительному корню соответствует решение e^{kx};

б) каждому действительному корню кратности m ставится в соответствие m решений: $e^{kx};\ \ xe^{kx};\ \ \ldots\ \ x^{m-1}e^{kx}$.

в) каждой паре комплексно – сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнение ставится в соответствие два решения: $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

г) каждой паре m – кратных комплексно – сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения ставится в соответствие $2m$ решений:
$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad xe^{\alpha x}\cos\beta x,\quad \ldots\quad x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\quad xe^{\alpha x}\sin\beta x,\quad \ldots x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

3) Составляем линейную комбинацию найденных решений.

Эта линейная комбинация и будет являться общим решением исходного линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

6. Построение частного решения неоднородного уравнения с правой частью специального вида методом неопределенных коэффициентов.

ОПР: *ЛНДУ 2 пор. с постоянными коэф-ми* называется уравнение вида: (8)

$y'' + py' + qy = P_n(x)e^{\gamma x}$, *где* $P_n(x)$ -многочлен, степени n, p и q – действит. числа.

Общее решение данного ЛНДУ ищут в виде: $\boxed{y = y_0 + y_ч}$, *где* y_0 – общее решение соотв-го ЛОДУ, $y_ч$ - частное решение исходного ЛНДУ.

Для отыскания $y_ч$ пользуются следующим правилом:

1)если $\gamma \neq k_1$ *и* $\gamma \neq k_2$ (т.е. не является корнем характеристич. уравнения), то $y_ч = Q_n(x)e^{\gamma x}$, где $Q_n(x)$ - многочлен степени n с неопределёнными коэффициентами.

2) если $\gamma = k_1$ *и* $\gamma \neq k_2$ (т.е. совпадает с одним из корней характеристич. уравнения), то $y_ч = x \cdot Q_n(x)e^{\gamma x}$

3) если $\gamma = k_1$ *и* $\gamma = k_2$ (т.е. корни равны и равны γ), то $y_ч = x^2 \cdot Q_n(x)e^{\gamma x}$

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

2.1 Практическое занятие №1 (2 часа).

Тема: «Числовые множества. Числовые функции. Элементарные функции»

2.1.1 Задание для работы:

1. Действительные числа, их свойства. Элементы алгебры множеств.
2. Окрестность точки. Ограниченные множества. Обозначения для сумм и произведений.
3. Числовые функции. Способы задания функций. Область определения и множество значений функции. График функции.
4. Характеристики функций: четность и нечетность, периодичность, монотонность, ограниченность.
5. Сложная и обратная функции.
6. Степенная, показательная и логарифмическая функции. Тригонометрические функции и обратные к ним.
7. Свойства основных элементарных функций.

2.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Действительные числа, их свойства. Элементы алгебры множеств.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Изобразить пары множеств на числовой прямой и записать, какое из них является подмножеством другого:
   1) A={3; 4; 5; ...}, B={5; 6; 7 ...};
   2) A=(-∞; 3], B=(-∞;6];
   3) A=(-2; 5], B=[0; 4);
   4) A=[2; 6), B={2; 3; 4; 5};
   5) A=(-∞;4), B=[0; 1];
   6) A=[2; ∞), B=[3; 6).

2. Пусть даны множества A, B, C. Найдите A∩B, A∩C, B∩C, A∪B, A∪C, B∪C, если:
   1) A={2; 3; 8; 9}, B={16; 18; 20}, C=N;
   2) A=N, B={-2; -1; 0; 1; 2}, C={3; 5; 7};
   3) A={3; 4; 5; ...}, B=N, C={-1; 0; 1; 2};
   4) A={21; 22; ...; 26}, B={3; 5}, C=N;

3. Туристическая фирма продала путевок в санатории в три раза меньше, чем в пансионаты, но на 88 путевок больше, чем на турбазы. Сколько всего продала фирма путевок, если в пансионаты продано на 312 путевок больше, чем в санаторий.

4. Найдите для каждой тройки множеств A, B, C результаты операции: 1) A∩(B∪C); 2)A∪(B∩C); 3)(A∪B)∩C; 4)(A∩C)∪(A∩B); 5) (A∪C)∩B; 6) (A∩B)∪C, если:
   а) A={2; 3; 4}, B={3; 6}, C=N;
   б) A=N, B=Z, C={-1; 0; 1};
   в) A={1; 3; 5; ...}, B={2; 4; 6; ...}, C=N;
   г) A=Z, B=N, C={3; 6; 9; ...};

2. Окрестность точки. Ограниченные множества. Обозначения для сумм и произведений.

Провести устный опрос теоретического материала.

3. Числовые функции. Способы задания функций. Область определения и множество значений функции. График функции.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Найти область определения следующих функций:

а) $y=\sqrt{6-x}+\dfrac{1}{x+5}$; б) $y=\sqrt[7]{3-x^2}$; в) $y=\log_5(4-x^2)$; г) $y=\dfrac{\sqrt{9-x}}{\ln(4+x)}$.

2. Найдите $E(y)$: а) $y=4\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\sin(\pi+x)$; б) $y=x^2-6x+5$.

3. Для функции $f(x)=\begin{cases} 0 \quad при \quad x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{49} \quad при \quad 0 < x \le 7 \\ 1 \quad при \quad x > 7 \end{cases}$ найти $f(-2), f(0), f(5), f(8)$. Построить график функции.

4. Характеристики функций: четность и нечетность, периодичность, монотонность, ограниченность.

Провести устный опрос теоретического материала.

Исследовать функцию на четность (нечетность), периодичность, монотонность, ограниченность:

а) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$; б) $f(x)=x^5\cdot\cos x$; в) $f(x)=\sqrt{6x-x^2}$; г) $f(x)=\lg\dfrac{x+2}{x-2}$.

д) $y=x^3\sin x$ е) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ ж) $y=x\dfrac{2^x+1}{2^x-1}$

5. Сложная и обратная функции.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Найти функцию обратную для $y=3x+2$, $y=2^x$.

2. Построить графики функций и указать их свойства:

а) $y=3\sqrt{x}$; б) $y=|x+2|$; в) $y=\sin 0{,}5x$.

6. Степенная, показательная и логарифмическая функции. Тригонометрические функции и обратные к ним.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Найти область определения следующих функций:

а) $y=\sqrt{x^2-6x+5}$ б) $y=\sqrt{25-x^2}+\lg(\sin x)$ в) $y=\lg(2^{3x}-4)$ г) $y=\sqrt{x}+\ln(2x-5)$

д) $y=\dfrac{1}{\lg(1-x)}+\sqrt[3]{x+2}$

2. Найти множество значений функции $y=2\sin x-5$ а) построением, б) используя ограниченность функции $y=\sin x$.

3. Найдите $E(y)$ двумя способами: $y=4\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\sin(\pi+x)$

7. Свойства основных элементарных функций.

Провести устный опрос теоретического материала.

Построить графики функций и указать их свойства: а) $y=3\sqrt{x}$; б) $y=|x+2|$; в) $y=\sin 0{,}5x$.

2.1.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Числовые множества. Числовые функции. Элементарные функции», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Числовые множества. Числовые функции. Элементарные функции», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

2.2 Практическое занятие №2 (2 часа).

Тема: «Предел последовательности. Предел функции. Непрерывность функции»

2.2.1 Задание для работы:

1. Числовые последовательности. Способы задания последовательностей. Прогрессии. Формула сложных процентов.
2. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, их свойства. Свойства пределов, связанные с арифметическими действиями.
3. Различные типы пределов: односторонние пределы, пределы в бесконечности, бесконечные

пределы. Сравнение бесконечно малых функций: эквивалентные функции.
4. Первый и второй замечательные пределы. Формула непрерывных процентов.
5. Непрерывность функции в точке. Непрерывность суммы, разности, произведения и частного непрерывных функций. Непрерывность сложной и обратной функции. Непрерывность элементарных функций. Теорема о сохранении знака непрерывной функции. Точки разрыва функции, их классификация.

2.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Числовые последовательности. Способы задания последовательностей. Прогрессии. Формула сложных процентов.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. По общему члену последовательности написать пять первых членов:

а) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$; б) $y_n = \dfrac{1}{3n+5}$.

2. Найти a_5 для последовательности, заданной рекуррентным соотношением:

а) $a_{n+1} = a_n + 2$ и $a_1 = 3$; б) $a_{n+2} = a_n \cdot a_{n+1}$ и $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.

3. а) Для $x_n = \dfrac{6}{(3n-1)n}$ найти x_7; б) для $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}\cdot n^2}{n^2+1}$ найти x_{20}.

4. а) $1; -\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{5}; -\dfrac{1}{7}; \ldots$; б) $\dfrac{2}{3}, \left(\dfrac{3}{7}\right)^2, \left(\dfrac{4}{11}\right)^3, \left(\dfrac{5}{15}\right)^4, \ldots$ Записать формулу общего члена числовой последовательности.

5. В первом ряду кинозала 30 мест, а в каждом следующем на 2 места больше, чем в предыдущем. Сколько мест в ряду с номером n?

6. Бригада маляров красит забор длиной 240 метров, ежедневно увеличивая норму покраки на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 60 метров забора. Определите, сколько дней бригада маляров красила весь забор.

7. Найти прибыль от 30 000 рублей положенных на депозит на 3 года под 10% годовых, если в конце каждого года проценты добавлялись к депозитному вкладу.

8. Найти прибыль от 30 000 рублей положенных на депозит на 3 года под 10% годовых, если в конце каждого года проценты добавлялись к депозитному вкладу.

9. Вкладчик положил на депозит 1000 рублей на срок 2 года под 15 % годовых. Выяснить, в каком случае наращенная сумма будет больше: если будет происходить внутригодовое начисление или нет? (Внутригодовое начисление принять за ежемесячное)

2. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, их свойства. Свойства пределов, связанные с арифметическими действиями.

Провести устный опрос теоретического материала.

Вычислить пределы числовых последовательностей

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^4+(2-n)^4}{(1-n)^4-(1+n)^4}$. 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^3-(1+n)^3}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[3]{5n^2}+\sqrt[4]{9n^8+1}}{(n+\sqrt{n})\sqrt{7-n+n^2}}$. 5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3}+\sqrt[4]{n^5+1}}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$. 7. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2-3})$.

3. Различные типы пределов: односторонние пределы, пределы в бесконечности, бесконечные пределы. Сравнение бесконечно малых функций: эквивалентные функции.

Провести устный опрос теоретического материала.

Вычислить пределы, используя эквивалентные бесконечно малые функции:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{arctg 2x}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 2x}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{tg 3x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{4x^2}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{tg 4x}$

6) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-5x+6}$

7) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin(x+2)}{x^3+8}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{2x^2}$

4. Первый и второй замечательные пределы. Формула непрерывных процентов.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Вычислить пределы функций: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{4x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 3x\cdot\sin 4x}{x^2}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{2x^2}$ 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 3x+\sin 7x}{2x}$

2. Вычислить: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{8x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+9x)^{\frac{4}{x}}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+1}\right)^{x+3}$; г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{2}{x^2+6}\right)^{x}$.

3. Кредит в размере на 100 тыс. долларов получен сроком на 3 года под 8% годовых. Определить сумму подлежащего возврату в конце срока кредита, если проценты будут начисляться:
а) один раз в год; б) ежедневно; в) непрерывно.

4. Сила роста банковского вклада *δ=0,03*. Найти сумму на счете через 2 года, если первоначальная сумма вклада составляет 9000 руб.

5. Непрерывность функции в точке. Непрерывность суммы, разности, произведения и частного непрерывных функций. Непрерывность сложной и обратной функции. Непрерывность элементарных функций. Теорема о сохранении знака непрерывной функции. Точки разрыва функции, их классификация.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Исследовать на непрерывность функции и построить их графики: а) $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & при\ x\le 1\\ x+1 & при\ x>1\end{cases}$; б) $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & при\ x\le 1\\ x-1 & при\ x>1\end{cases}$; в) $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & при\ x\le 1\\ \dfrac{1}{x-1} & при\ x>1\end{cases}$.

2. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=3^{\frac{1}{x+1}}+1$ в точках $x_1=1$ и $x_2=-1$.

3. При каком значении a $f(x)=\begin{cases}\cos x & при\ x\le 0\\ a(x-1) & при\ x>0\end{cases}$ непрерывна в точке $x_0=0$?

4. Сколько точек разрыва (и какого рода) имеет функция: а) $y=\dfrac{x+2}{x^2+8x+12}$; б) $y=\dfrac{|\sin x|}{\sin x}$?

Построить график функции.

2.2.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Предел последовательности. Предел функции. Непрерывность функции», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Предел последовательности. Предел функции. Непрерывность функции», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала и применять математические методы для решения экономических задач.

2.3 Практическое занятие №3 (2 часа).
Тема: «Производная функции»

2.3.1 Задание для работы:

1. Производная функции. Дифференцируемость и дифференциал функции.
2. Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного двух функций, сложной и обратной функций.
3. Производные основных элементарных функций.
4. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции.
5. Геометрический смысл дифференциала функции. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.

2.3.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Производная функции. Дифференцируемость и дифференциал функции.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Что можно сказать о дифференцируемости суммы $f(x)+g(x)$ в точке $x=x_0$, если в этой точке:

а) функция $f(x)$ дифференцируема, а функция $g(x)$ недифференцируема;

б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ недифференцируемы.

2. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f(x_0)\neq 0$, а функция $g(x)$ недифференцируема в этой точке. Доказать, что произведение $f(x)g(x)$ является недифференцируемым в точке x_0

2. Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного двух функций, сложной и обратной функций.

Провести устный опрос теоретического материала.

3. Производные основных элементарных функций.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Найти производную: а) $y=\dfrac{2x-7}{3}$; б) $y=x^4-\dfrac{1}{12x^4}+6\cdot\sqrt[5]{x^2}+\sin 4$; в) $y=\dfrac{5}{x^7}-\sqrt[9]{x^4}+3^x$;

   г) $y=(x^3+2)\cdot\sin x$; д) $y=\dfrac{\ln x}{x-4}$.
2. Найдите $f'(1)+3f(1)$ для функции $f(x)=(3x+4)\cdot\sqrt{x}$.
3. Найдите значение производной функции $f(x)=\dfrac{x^3-64}{x^2+4x+16}$ в точке $x_0=2009$.
4. При каких значениях *x* функция $f(x)=\sqrt{1-2x^2+x}$ не дифференцируема?
5. Продифференцировать функции: а) $y=\sqrt{1-x^2}$; б) $y=3\sin\left(3x+5\right)$; в) $y=\dfrac{x^2-2}{x^2+3}$; г) $y=\cos^2 x$; д) $y=\ln\left(x^4-4x\right)$; е) $y=10^{2x-3}$.
6. Найти производную от функции и упростить полученное выражение: а) $x\cdot\sin x+\cos x-8$; б) $x\cdot\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$; в) $x\cdot arctg\dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{2}\ln(x^2+9)$.
7. Найти производную: а) $\lg\left(5-x^2\right)$; б) $ctg^3\dfrac{x}{3}$; в) $3^{\cos x}$; г) $\cos 3^x$; д) $\log_5 x^2$.

4. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 образует с отрицательным направлением оси абсцисс угол 45^0. Найдите $f'(x_0)$.
2. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ в точке его пересечения с осью ординат. Сделать рисунок.

5. Геометрический смысл дифференциала функции. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.
Провести устный опрос теоретического материала.

1. Вычислить dy, если: а) $y=\left(\frac{9}{x^2}-\sqrt[3]{x}\right)^3$; б) $y=\frac{arctg2x}{1+4x^2}$; в) $y=\ln x\cdot tg5x$.

2. Найти приближенное значение функции $f(x)=\sqrt{x^2+7}$ при $x=3,02$, исходя из ее точного значения при $x=3$.

3. Пользуясь приближенным равенством $f(x)\approx f(x_0)+f'(x)(x-x_0)$, вычислить приближенно указанные величины:

а) $\cos 61^0$; б) $tg44^0$; в) $e^{0,2}$; г) $\sqrt[3]{7,76}$; д) $arctg1,05$; е) $\arcsin 0,54$.

2.3.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Производная функции», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Производная функции», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

2.4 Практическое занятие №4 (2 часа).

Тема: «Предельные величины в экономике. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей»

2.4.1 Задание для работы:

1. Предельные величины в экономике. Эластичность функции, ее свойства и геометрический смысл.
2. Задача о распределении налогового бремени.
3. Производные и дифференциалы высших порядков.
4. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей.

2.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Предельные величины в экономике. Эластичность функции, ее свойства и геометрический смысл.
Провести устный опрос теоретического материала.

1. Объем продукции u (усл. ед.) цеха в течение рабочего дня представляет функцию $u=-t^3-5t^2+75t+425$, где t – время (ч.). Найти производительность труда через 2 ч после начала работы.

2. Зависимость между издержками производства y (ден. ед.) и объемом выпускаемой продукции x (ед.) выражается функцией $y=10x-0,04x^3$. Определить средние и предельные издержки при объеме продукции, равном 5 ед.

3. Функции спроса q и предложения s от цены p выражаются соответственно уравнениями $q=7-p$ и $s=p+1$. Найти: а) равновесную цену; б) Эластичность спроса и предложения для этой цены; в) изменение дохода (в %) при увеличении цены на 5% от равновесной.

2. Задача о распределении налогового бремени.
Провести устный опрос теоретического материала.

Кривые спроса на магнитофоны и предложения магнитофонов фирмы «Электрик» марки А-2000 имеют линейный вид и заданы формулами: $Q_d=300-2*P, Q_s=3*P-200$, где P измеряется в долларах, Q – в тысячах штук.

Правительство ввело акциз, равный пяти долларам за каждый проданный магнитофон.

а) Определите сумму налога, которую соберёт налоговая служба.
б) Вычислите налоговое бремя покупателей.
в) Вычислите налоговое бремя продавцов.
г) Найдите чистые общественные потери.

3. Производные и дифференциалы высших порядков.

Провести устный опрос теоретического материала.
1. Найти производную третьего порядка от функции $y = \ln(x+6)$
2. Вычислить: а) $y^{(15)}$, если $y = e^x(x+4)$; б) $y^{(2009)}$, если $y = \cos x$.
3. Проверить, является ли решением уравнения $y'' + 2y' - 8y = 0$ функция $y = e^{2x} + 9e^{-4x}$.

4. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей.
Провести устный опрос теоретического материала.
Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$

3) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{1/x}$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3}$

2.4.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Предельные величины в экономике. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Предельные величины в экономике. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей» и применять математические методы для решения экономических задач, сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала и навыки применения современного математического инструментария для решения экономических задач.

2.5 Практическое занятие №5 (2 часа).
Тема: «Исследование функций»

2.5.1 Задание для работы:
1. Признак монотонности функции на интервале.
2. Достаточные условия локального экстремума.
3. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

2.5.2 Краткое описание проводимого занятия:
1. Признак монотонности функции на интервале.
Провести устный опрос теоретического материала.
1. Исследовать функцию $y = -x^3 + 6x^2 - 4$ и построить ее график.
2. Построить график функции: а) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$; б) $y = e^{-x^2}$.
3. На параболе найти точку, наименее удаленную от прямой $y = 2x - 4$.

2. Достаточные условия локального экстремума.
Провести устный опрос теоретического материала.

Требуется выгородить прямоугольное пастбище площадью $1\,км^2$ и разделить его на два прямоугольных участка. Какой наименьшей длины забор при этом может получиться?

3. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.
Провести устный опрос теоретического материала.
Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $y = 2x^2 + \ln x$ $\quad [1, e^5]$

2.5.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Исследование функций», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Исследование функций», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

2.6 Практическое занятие №6 (2 часа).
Тема: «Исследование функций»

2.6.1 Задание для работы:

1. Выпуклые (вогнутые) функции. Достаточные условия выпуклости функции. Необходимый и достаточный признаки точки перегиба.
2. Асимптоты графика функции.
3. Полное исследование функции и построение ее графика.

2.6.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Выпуклые (вогнутые) функции. Достаточные условия выпуклости функции. Необходимый и достаточный признаки точки перегиба.

Провести устный опрос теоретического материала.

Найти промежутки выпуклости / вогнутости, точки перегиба функций

1) $y = \dfrac{2x^2}{1+x^2}$ 2) $y = x \cdot e^x$ 3) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

2. Асимптоты графика функции.

Провести устный опрос теоретического материала.

Найти асимптоты графиков функций:

1) $y = \dfrac{3-4x}{2+5x}$ 2) $y = \dfrac{3x^5}{16-x^4}$ 3) $y = \dfrac{2x^3 \ln x}{x^2+1}$ 4) $y = xe^{-x}$

5) $y = \dfrac{2x^2}{x+1}$ 6) $y = \sqrt[3]{27x^3+5x^2}$

3. Полное исследование функции и построение ее графика.

Провести устный опрос теоретического материала.

Выполнить полное исследование функций и построить графики.

1) $y = 2x^2 + \ln x$ 2) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ 3) $y = e^{\sqrt[3]{x^2}}$

2.6.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Исследование функций», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Исследование функций», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

2.7 Практическое занятие №7 (2 часа).
Тема: «Неопределенный интеграл. Определенный интеграл»

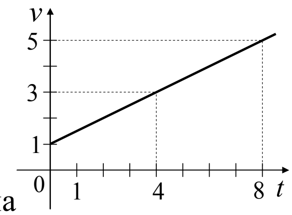
2.7.1 Задание для работы:

1. Первообразная и неопределенный интеграл. Таблица неопределенных интегралов.
2. Свойства неопределенного интеграла. Замена переменной в неопределенном интеграле, интегрирование по частям.
3. Интегрирование рациональных функций.
4. Задача о вычислении площади криволинейной трапеции. Формула Ньютона-Лейбница.
5. Замена переменной в определенном интеграле, интегрирование по частям.
6. Геометрические приложения определенного интеграла: вычисление площади криволинейной трапеции и объема тела вращения.

2.7.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Первообразная и неопределенный интеграл. Таблица неопределенных интегралов.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Для функции $f(x) = \cos x$ найти ту первообразную, которая проходит через точку $(0; 3)$.
2. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $(-2; 8)$, если угловой коэффициент касательной в любой точке касания x равен $2x-4$.
3. На чертеже изображен график скорости тела 

. Найти по графику уравнение движения, если тело за первые $2\ c$ прошло путь, равный $10\ м$.

2. Свойства неопределенного интеграла. Замена переменной в неопределенном интеграле, интегрирование по частям.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Найти: $\int 8dx$; $\int \frac{dx}{4}$; $\int dx$; $\int x^{11}dx$; $\int x^{-3}dx$; $\int \frac{1}{z^6}dz$; $\int \sqrt[5]{x}dx$; $\int \frac{1}{4t}dt$; $\int \frac{6}{x\cdot\sqrt[3]{x}}dx$.

2. Вычислить: а) $\int\left(2x-\frac{5}{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$; б) $\int\left(7x^6-\frac{6}{x^7}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$.

3. Вычислить интеграл: а) $\int(5x-1)^7dx$; б) $\int e^{-5x}dx$; в) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^6+1}}$.

4. Вычислить: а) $\int arccrgxdx$; б) $\int(6x+1)\cdot\sin\frac{x}{3}dx$; в) $\int e^x\sin 2xdx$.

5. Вычислить: а) $\int e^{2x}\cos xdx$; б) $\int e^{\sqrt{x}}dx$; в) $\int\frac{xdx}{\cos^2 x}$; г) $\int\frac{\ln x}{\sqrt[5]{x}}dx$.

3. Интегрирование рациональных функций.

Провести устный опрос теоретического материала.

Найти неопределенные интегралы:

1. а) $\int\frac{4dx}{x+7}$; б) $\int\frac{dx}{x-11}$; в) $\int\frac{12dx}{4x+9}$.
2. а) $\int\frac{8dx}{x^3}$; б) $\int\frac{8dx}{(x+9)^3}$; в) $\int\frac{5dx}{x^2-4x+4}$.
3. а) $\int\frac{(4x+5)dx}{x^2-8x+17}$; б) $\int\frac{(2-x)dx}{x^2+4x+20}$; в) $\int\frac{7dx}{x^2-2x+5}$.
4. а) $\int\frac{(4x+41)dx}{x^2+3x-4}$; б) $\int\frac{(6x+23)dx}{x^2+6x+9}$; в) $\int\frac{(x^3-57x+157)dx}{x^2-9x+20}$.

4. Задача о вычислении площади криволинейной трапеции. Формула Ньютона-Лейбница.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Вычислить: а) $\int_2^3 3x^2dx$; б) $\int_0^2\frac{dx}{4+x^2}$; в) $\int_1^4(x^2+3)dx$.

2. Вычислить определенные интегралы: а) $\int_{0,5}^{3}\left(\frac{1}{x^5}\right)dx$; б) $\int_{-1}^{2}(2x-4)(3x+2)dx$.

3. Найти: а) $\int_2^{-13}\frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$; б) $\int_0^{T/2}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}-\varphi_0\right)dt$; в) $\int_0^4\sqrt{2x+1}\,dx$

4. Найти: а) $\int_0^1 \frac{3x^2dx}{x^3+1}$; б) $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; в) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$.

5. Замена переменной в определенном интеграле, интегрирование по частям.
Провести устный опрос теоретического материала.

1. Вычислить определенный интеграл: а) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\cos 3xdx$; б) $\int_0^{0,25} arctg4xdx$.

2. Вычислить значение интеграла: а) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{x+1}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^3xdx$; в) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

6. Геометрические приложения определенного интеграла: вычисление площади криволинейной трапеции и объема тела вращения.
Провести устный опрос теоретического материала.

1. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями:
а) $y=e^x$, $y=0$, $x=-2$, $x=1$; б) $y=x^2-4$, $y=0$, $x=-3$;
в) $y=-x^2+4x+6$, $y=6-x$; г) $y=\ln x$, $y=\ln^2 x$.
2. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $xy=4$, $x=1$, $x=4$, $y=0$.
3. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

2.7.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Неопределенный интеграл. Определенный интеграл», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Неопределенный интеграл. Определенный интеграл», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

2.8 Практическое занятие №8 (2 часа).
Тема: «Функции нескольких переменных. Частные производные. Экстремум функции нескольких переменных»

2.8.1 Задание для работы:

1. Функции нескольких переменных. Поверхности (линии) уровня функции. Элементарные функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.
2. Частные производные, дифференцируемость, дифференциал функции нескольких переменных.
3. Локальный экстремум функции нескольких переменных. Необходимое условие первого порядка. Достаточные условия существования локального экстремума.

2.8.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Функции нескольких переменных. Поверхности (линии) уровня функции. Элементарные функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.
Провести устный опрос теоретического материала.
1. Составить таблицу значений функции $z=2x-3y+1$, давая независимым переменным значения от 0 до 3 через единицу.
2. Найти значения функции: а) $u=e^{\sin(x+4y+z)}$ при $x=y=\frac{\pi}{2}$ и $z=-\pi$; б) $z=y^{x-1}+x^y$ в точках $M_1(2;2)$; $M_1(1;2)$; $M_1(2;1)$.

3. Найти области определения функции двух переменных: а) $z=\dfrac{1}{3y-x}$; б) $z=\ln(y^2-4x+8)$;

в) $z=\dfrac{\ln x}{25-x^2-y^2}$; г) $z=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$; д) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$.

4. Построить линии уровней и примерное изображение поверхностей для функций двух переменных.

$а) z=\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{16}$ $\qquad$ $б) z=x+y^2$

2. Частные производные, дифференцируемость, дифференциал функции нескольких переменных.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Найти частные производные функции двух переменных

1) $z=x^y$ $\qquad$ 2) $z=\sin\sqrt{\dfrac{y}{x+y}}$ $\qquad$ 3) $z=e^{-2x^2+y^5}$

2. Найти частные и полный дифференциалы данных функций.

1) $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}$ $\qquad$ 2) $z=\sqrt[3]{(x^2-y^3)^2}$

3. Найти значение полного дифференциала функции $z=\dfrac{xy}{x^2-y^2}$ при $x=2$, $y=1$, $\Delta x=0{,}01$, $\Delta y=0{,}03$.

4. Вычислить приближенно изменение функции $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$ при изменении x от $x_1=5$ до $x_2=4{,}5$ и y от $y_1=3$ до $y_2=3{,}3$.

3. Локальный экстремум функции нескольких переменных. Необходимое условие первого порядка. Достаточные условия существования локального экстремума.

Провести устный опрос теоретического материала.

Исследовать на экстремум функции:

а) $z=-4+6x-x^2-xy-y^2$;

б) $z=x^2-xy+y^2+8x-4y+15$;

в) $z=2x^2-14xy+y^2+2x-9y+1$.

2.8.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Функции нескольких переменных. Частные производные. Экстремум функции нескольких переменных», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Функции нескольких переменных. Частные производные. Экстремум функции нескольких переменных», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

2.9 Практическое занятие №9 (2 часа).

Тема: «Условный экстремум функции нескольких переменных. Производная по направлению, градиент»

2.9.1 Задание для работы:

1. Условный экстремум функции нескольких переменных.
2. Метод исключения переменных. Метод множителей Лагранжа.
3. Нахождение глобальных экстремумов дифференцируемой функции на замкнутом ограниченном множестве.
4. Производная по направлению, градиент. Свойства градиента.

2.9.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Условный экстремум функции нескольких переменных.
Провести устный опрос теоретического материала.
1) Найти условный экстремум функции z(x,y)=x+3y при условии $x^2+y^2=10$.
2) Найти условный экстремум функции $z(x,y)=3y^3+4x^2-xy$ при условии x+y=0.
2. Метод исключения переменных. Метод множителей Лагранжа.
Провести устный опрос теоретического материала.
А) Найти условный экстремум функции $z(x,y)=3y^3+4x^2-xy$ при условии x+y=0 (методом множителей Лагранжа).
Б) Найти наибольшее и наименьшее значения функции z=5xy−4, если переменные x и y положительны и удовлетворяют уравнению связи $x^2/8+y^2/2-1=0$. (методом множителей Лагранжа).
3. Нахождение глобальных экстремумов дифференцируемой функции на замкнутом ограниченном множестве.
Провести устный опрос теоретического материала.

1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=-2y-6x+x^2+xy+2$ в прямоугольнике $1\le x\le 3$, $1\le y\le 4$.

2. Найти наименьшее и наибольшее значения функции:

а) $z=4xy+x^2-y^2-5$ в треугольнике, ограниченном Ox, Oy, $y=2-x$.

б) $z=-2xy+x^2+4x-4y+7$ в области, ограниченной $y=-x^2-4x$ и Ox

4. Производная по направлению, градиент. Свойства градиента.
Провести устный опрос теоретического материала.
1. Найти производную функции $u=xy^2+z^3-xyz$ в точке $M(1;1;2)$ в направлении, образующем с осями координат углы соответственно 60^0, 45^0, 60^0.
2. Найти производную функции $u=arctgxy$ в точке $M(1;1)$ в направлении биссектрисы первого координатного угла.
3. Найти $grad\ z$ в точке $M(2;1)$, если $z=\sqrt{4+x^2+y^2}$.
4. Каково направление наибольшего изменения функции $\varphi(x;y;z)=x\sin z-y\cos z$ в точке $M(0;0;0)$?
5. Найти точки, в которых модуль градиента $z=\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}$ равен 2.

2.9.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Условный экстремум функции нескольких переменных. Производная по направлению, градиент», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Условный экстремум функции нескольких переменных. Производная по направлению, градиент», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

2.10 Практическое занятие №10 (2 часа).
Тема: «Числовые ряды. Степенные ряды»

2.10.1 Задание для работы:

1. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимый признак сходимости.
2. Числовые ряды с положительными членами: критерий сходимости. Достаточные признаки сходимости: первый и второй признаки сравнения, признак Даламбера и Коши в предельной форме, интегральный признак Коши.
3. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Оценка остатка ряда. Абсолютно сходящиеся ряды и их свойства. Условно сходящиеся ряды.
4. Степенные ряды. Теорема Абеля. Область, интервал и радиус сходимости степенного ряда.
5. Свойства степенного ряда на интервале сходимости.

2.10.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимый признак сходимости.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. По заданному общему члену ряда написать пять первых членов ряда:

   а) $a_n = \dfrac{1}{2n+5}$; б) $a_n = \dfrac{2^n}{n^2}$.

2. Найти формулу для общего члена ряда:

   а) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\dfrac{7}{2^4}+\ldots$; б) $1+\dfrac{4}{2}+\dfrac{9}{6}+\dfrac{16}{24}+\dfrac{25}{120}+\ldots$;

   в) $\dfrac{2}{3}+\left(\dfrac{3}{7}\right)^2+\left(\dfrac{4}{11}\right)^3+\left(\dfrac{5}{15}\right)^4+\ldots$

3. Найти частичную сумму первых четырех членов ряда и сумму ряда:

   а) $1+8+27+\ldots$; б) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 5}+\ldots$

4. Найти сумму ряда: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

5. Проверить, выполняется ли необходимое условие сходимости ряда:

   а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{5n+3}$;

   в) $0{,}6+0{,}51+0{,}501+\ldots+\left[0{,}5+0{,}1^n\right]+\ldots$.

2. Числовые ряды с положительными членами: критерий сходимости. Достаточные признаки сходимости: первый и второй признаки сравнения, признак Даламбера и Коши в предельной форме, интегральный признак Коши.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Исследовать на сходимость ряд:

а) $\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{14}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)\cdot 2^n}$;

в) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{11}+\ldots$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$

2. С помощью признака Даламбера исследовать на сходимость ряды:

   а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n-2}{4^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^n}{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{10^n}{n!}$.

3. С помощью признака Коши исследовать на сходимость ряды:

   а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^n}$; б) $\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{2}{5}\right)^2+\left(\dfrac{3}{7}\right)^3+\left(\dfrac{4}{9}\right)^4+\ldots$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^n n}$.

4. С помощью интегрального признака исследовать на сходимость ряды:

   а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+3}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}$.

3. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Оценка остатка ряда. Абсолютно сходящиеся ряды и их свойства. Условно сходящиеся ряды.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. По признаку Лейбница исследовать сходимость ряда $\dfrac{1}{1^2+1}-\dfrac{2}{2^2+1}+\dfrac{3}{3^2+1}-\dfrac{4}{4^2+1}+\ldots$
2. Исследовать сходимость ряда $1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}-\dfrac{1}{2^4}-\dfrac{1}{2^5}+\ldots$
3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n^2$; б) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+...$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$

4. Исследовать сходимость знакопеременных рядов и установить характер сходимости (абсолютная, условная): а) $\frac{1}{2}-\frac{4}{5}+\frac{7}{8}-\frac{10}{11}+...$; б) $\frac{1}{10}+\frac{7}{10^2}-\frac{13}{10^3}+\frac{19}{10^4}+\frac{25}{10^5}-\frac{31}{10^6}+...$;

   в) $-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+...$

4. Степенные ряды. Теорема Абеля. Область, интервал и радиус сходимости степенного ряда.
Провести устный опрос теоретического материала.

1. Написать первые три члена ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{3^n\sqrt{n+1}}$, найти интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на концах интервала.

2. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость ряда на концах интервала. Найти сумму ряда при $x=-1$.

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{5^n\sqrt[3]{n}};\ б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{8^n\sqrt{n}};\ в)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n n^2}.$$

5. Свойства степенного ряда на интервале сходимости.
Провести устный опрос теоретического материала.

2.10.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Числовые ряды. Степенные ряды», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Числовые ряды. Степенные ряды», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

2.11 Практическое занятие №11 (2 часа).
Тема: «Дифференциальные уравнения»

2.11.1 Задание для работы:

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения n -го порядка, основные понятия.
2. Некоторые типы дифференциальных уравнений первого порядка. Уравнения с разделяющимися переменными. Линейные уравнения. Уравнения Бернулли.
3. Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка. Теорема о существовании и единственности решения. Однородные и неоднородные линейные дифференциальные уравнения.
4. Теорема об общем решении линейного неоднородного уравнения. Пространство решений линейного однородного уравнения, фундаментальная система решений. Определитель Вронского системы решений. Теорема об общем решении линейного однородного уравнения.
5. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (на примере уравнений второго порядка). Характеристическое уравнение и фундаментальная система решений однородного уравнения.
6. Построение частного решения неоднородного уравнения с правой частью специального вида методом неопределенных коэффициентов.

2.11.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения n -го порядка, основные понятия.
Провести устный опрос теоретического материала.

Определить порядок ДУ: а) $y''+2x^2\cdot y'=y^5$; б) $y'''-5xy''=y\cdot y'$.

2. Некоторые типы дифференциальных уравнений первого порядка. Уравнения с разделяющимися переменными. Линейные уравнения. Уравнения Бернулли.
Провести устный опрос теоретического материала.

1) Известно, что функция $y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = \frac{3}{2+x} \cdot y$ и $y(-3) = 5$. Найти $y(1)$.
2) Скорость распада радия пропорциональна количеству радия в данный момент времени. Вычислить, через сколько лет от 100 г радия останется 65 г, если период полураспада равен 1600 лет.
3) Вода в открытом резервуаре сначала имела температуру $70^0 C$, через 10 минут температура воды стала $65^0 C$, температура окружающей резервуар среды $15^0 C$. Определить температуру воды в резервуаре через 30 минут от начального момента. (Скорость охлаждения воды пропорциональна разности температур воды в резервуаре и в окружающей его среде).

1. Определить порядок однородности функции $f(x;y) = \frac{x^4 - 2y^4}{x^3}$
2. Решить дифференциальные уравнения первого порядка

а) $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$; б) $y' = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}$; в) $\left(1 - \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(y^2 + \frac{1}{x}\right)dy = 0$.

3. Решить: а) $y' = \frac{x+y}{x-y}$; б) $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$; в) $y' = \frac{y - 3x^2}{4y - x}$.

4. Решить: а) $xy' + y = 2x^2 y^2$, б) $y' + yctgx = y^2 \sin x \cos x$.

5. Решить задачу Коши: а) $xy' - 2y = x^2 \sqrt{y}$, $y(1) = 1$; б) $y' - \frac{3y}{x} = y^2$, $y_0 = -4, x_0 = 1$.

3. Линейные дифференциальные уравнения *n* -го порядка. Теорема о существовании и единственности решения. Однородные и неоднородные линейные дифференциальные уравнения.

Провести устный опрос теоретического материала.

4. Теорема об общем решении линейного неоднородного уравнения. Пространство решений линейного однородного уравнения, фундаментальная система решений. Определитель Вронского системы решений. Теорема об общем решении линейного однородного уравнения.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Функции $y = x^3$ и $y = x^4$ удовлетворяют некоторому ДУ второго порядка. Убедиться, что они образуют ФСР и составить его уравнение.
2. Функции $y = x$, $y = x^3$ и $y = e^x$ удовлетворяют некоторому ДУ третьего порядка. Убедиться, что они образуют ФСР и составить его уравнение.

5. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (на примере уравнений второго порядка). Характеристическое уравнение и фундаментальная система решений однородного уравнения.

Провести устный опрос теоретического материала.

Решить ЛОДУ второго порядка:

1. $y'' + 5y' - 6y = 0$. 2. $9y'' - 6y' + y = 0$

3. $y'' + 4y' + 13y = 0$. 4. $y'' + 9y' = 0$

6. Построение частного решения неоднородного уравнения с правой частью специального вида методом неопределенных коэффициентов.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Записать структуру частного решения ЛНДУ по виду функции $f(x)$: $y'' + 4y = f(x)$; а) $f(x) = 4x^3 + 1$; б) $f(x) = 10e^{-x} \cos 2x$; в) $f(x) = x \cdot \sin x$.

2. Решить ДУ: а) $y'' - y' - 6y = (2x-1)e^{3x}$; б) $y'' - 2y' - 8y = 12 \sin 2x - 36 \cos 2x$.

2.11.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Дифференциальные уравнения», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Дифференциальные уравнения», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.