ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Направление подготовки (специальность) Экономика
Профиль образовательной программы Финансы и кредит
Форма обучения очная

СОДЕРЖАНИЕ

1. Конспект лекций
1. 1 Лекция №1 (2 часа)
Тема: «Матрицы»
1.1.1 Вопросы лекции:
1. Виды матриц.
2. Действия над матрицами.

1.1.2 Краткое содержание вопросов:

1 Виды матриц.

Матрицей называют таблицу, состоящую из n строк и m столбцов. Элементами матрицы могут быть числа или иные математические объекты.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 4 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}\sin\alpha & \sin\beta\\ \cos\alpha & \cos\beta\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$$

Последняя матрица имеет две строки и два столбца, следовательно, её размер (2x2).

c_{ij} - элемент матрицы С, стоящий в i-ой строке и j-ом столбце.

Если число строк матрицы равно числу столбцов, то такая матрица называется **квадратной**.

Две матрицы одинакового размера называются **равными** ($A=B$), если равны их элементы, стоящие на соответствующих местах.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой.**

Квадратная матрица называется **единичной**, если она имеет вид:

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}_{3x3} \qquad \text{или} \qquad E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}_{4x4}$$

Верхнетреугольной называется матрица у которой все элементы ниже главной диагонали равны нулю.

2 Действия над матрицами.

С матрицами можно производить операции сложения (вычитания), умножения на число, умножения матрицы на матрицу, транспонирования, нахождения матрицы, обратной данной. Для иллюстрации операций будем рассматривать матрицы размера (3х3), если заранее не оговорен другой размер.

Суммой (разностью) двух матриц A и B называется матрица, определяемая равенством:

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}_{3x3} \pm \begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix}a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & a_{13}\pm b_{13}\\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & a_{23}\pm b_{23}\\ a_{31}\pm b_{31} & a_{32}\pm b_{32} & a_{33}\pm b_{33}\end{pmatrix}$$

Произведением числа *m* на матрицу *A* называется матрица, определяемая равенством:

$$m\bullet\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ma_{11} & ma_{12} & ma_{13}\\ ma_{21} & ma_{22} & ma_{23}\\ ma_{31} & ma_{32} & ma_{33}\end{pmatrix}$$

Произведение двух матриц *A* и *B* обозначается символом $A\cdot B$ и определяется **равенством:**

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j3} \end{pmatrix}$$

т.е. элемент матрицы - произведения стоящий в i-ой строке и k -м столбце, равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A и k-го столбца матрицы B.

Отсюда вытекает ограничение на размерность матриц A и B: число элементов в строке матрицы A должно равняться числу элементов в столбце матрицы B, чтобы для каждого элемента i-й строки матрицы A нашелся парный элемент из k-го столбца B.

Пример. Найдите произведение матриц, если это возможно:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\ ;\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B, следовательно, их можно перемножить. Чтобы получить элемент c_{11} произведения, умножим первую строку матрицы A на первый столбец матрицы B. Далее, умножая первую строку A на второй столбец B, получим c_{12}**,** умножая первую строку A на третий столбец B, получим c_{13}.

В результате получится матрица С, состоящая из двух строк и трех столбцов:

$$C=\begin{pmatrix} 7 & 12 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}_{2x3}.$$

По отношению к произведению двух матриц переместительный закон, вообще говоря, не выполняется: AB не равно BA.

1.2. Лекция № 2 (2 часа)
Тема: «Определитель матрицы»

1.2.1. Вопросы лекции:
1. Определители второго порядка.
2. Способы вычисления определителя третьего порядка.
3. Миноры, алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.

1.2.2.. **Краткое содержание вопросов**

1. Определители второго порядка.

Каждой квадратной матрице *A* соответствует число − **определитель** данной матрицы Δ (*det A*).

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \to \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ −определитель второго порядка.

$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \to \Delta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$ −определитель третьего порядка

Формула для вычисления определителя второго порядка:

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \bullet a_{22} - a_{12} \bullet a_{21} \qquad (1)$$

Свойства определителей:

1. Определитель не изменяется, если его строки поменять местами с соответствующими столбцами,
2. При перестановки двух строк (или столбцов) определитель изменит знак на противоположный, сохраняя абсолютную величину.
3. Определитель с двумя одинаковыми сроками (столбцами) равен нулю.
4. Общий множитель всех элементов строки или столбца можно вынести за знак определителя; если все элементы какой-то строки или столбца равны 0, то и определитель равен 0.
5. Если к элементам какой-либо строки (или столбца) (определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и тоже число, то определитель не изменится.

2 Способы вычисления определителя третьего порядка.

Рассмотрим теперь матрицу размера (3 х 3), то есть имеющую 3
строки и 3 столбца

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

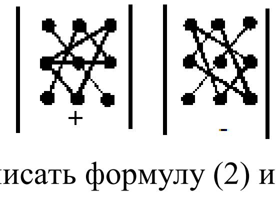
Её определителем (третьего порядка) называют число, обозначаема символом

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

и определяемое равенством

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \qquad (2)$$

Чтобы запомнить, какие произведения в правой части равенства (2) берутся со знаком *«+»,* а какие со знаком *«*—», полезно использован следующее правило треугольников:



Это правило позволяет легко записать формулу (2) и вычислить данный определитель.

Все свойства определителей второго порядка остаются справедливыми для определителей третьего порядка и доказываются так же непосредственной проверкой.

3. Миноры, алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.

Для вычисления определителей любого порядка широко применяется теорема разложения определителя по элементам строки (столбца). Перед тем как рассмотреть теорему, введем понятия минора и алгебраического дополнения.

Минором M_{ij} некоторого элемента α_{ij} определителя называется определитель, получаемый из данного вычеркиванием 1 строки и] столбца Так минор, соответствующий элементу a_{12} есть определитель:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Он получается, если вычеркнуть первую строку и второй столбец.

Аналогично M_{13} получится вычеркиванием первой строки и третьего столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется минор этого элемента, умноженный на $(—1)^p$, где $p=i+j$.

Например, если элемент a_{12} находится на пересечении первого столбца и второй строки, то для него p=1+2=3 и алгебраическим дополнением является

$$A_{12}=(—1)^3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -(a_{21} \bullet a_{33} - a_{23} \bullet a_{31})$$

Теорема о разложении определителя (Теорема Лапласа):

Определитель равен сумме произведений элементов любого столбца (строки) на соответствующие им алгебраические дополнения, т. е.

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{is}$$

(разложение по элементам 1-й строки; 1=1;2;..,;n);

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{sj}A_{sj}$$

(разложение по элементам j-го столбца; j=1;2;...;n);

Например, разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки записывается так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \bullet A_{11} + a_{12} \bullet A_{21} + a_{13} + A_{13}$$

Значение теоремы разложения состоит в том, что позволяет свести вычисление определителей n-го порядка к вычислению определителей (n-1)-го порядка.

1.3. Лекция № 3 (2 часа)
Тема: «Обратная матрица»

1.3.1. Вопросы лекции:
1. Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.
2. Применение определителей для нахождения обратной матрицы.

1.3.2.**. Краткое содержание вопросов**
1 Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.
<u>*Элементарными преобразованиями*</u> над строками матрицы называются такие преобразования, для которых возможны следующие действия (над строками матриц):

1) перестановка строк;
2) вычеркивание нулевой строки (если она имеется);
3) умножение любой строки на число, отличное от 0;
4) прибавление к одной из строк другой строки, умноженной на любое число, отличное от 0.

<u>Пример:</u> Найти обратную матрицу для матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ с помощью элементарных преобразований.

Решение: Для того, чтобы получить обратную матрицу с помощью элементарных преобразований нужно приписать к данной матрице через вертикальную черту (слева или справа) единичную матрицу той же размерности. Далее с помощью элементарных преобразований над строками «сдвоенной» матрицы (A\E) приводим матрицу A (левую половину) к единичной матрице, тогда на месте приписанной единичной матрицы , окажется обратная A^{-1}.

$$(A/E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)=$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & +6 & +4 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

2 Применение определителей для нахождения обратной матрицы.
Обратной матрицей по отношению к данной называется матрица, которая будучи умноженной на данную матрицу как слева, так и справа дает единичную матрицу. $\boxed{A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E}$

<u>ТЕОРЕМА (*о существовании и единственности обратной матрицы):*</u> Для квадратной матрицы $A_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ .... & .... & ... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$, определитель которой отличен от нуля ($\Delta(A)\neq 0$), существует обратная матрица A^{-1}, причем единственная. $\boxed{A^{-1}=\frac{1}{\Delta(A)}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ..... & ..... & ... & .... \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix}}$ (*), где A_{ij} - алгебраические дополнения для элементов a_{ij} матрицы A, $i=1...n,\ j=1...n$

<u>*Алгоритм нахождения обратной матрицы:*</u>
1) находим $\Delta(A)$, если матрица A невырожденная, т.е. $\Delta(A)\neq 0$, то матрица A^{-1} существует.
2) находим A_{ij} A_{ij} - алгебраические дополнения для элементов a_{ij} матрицы A.
3) составляем A^{-1} по формуле (*).
4) выполняем проверку $AA^{-1}=A^{-1}A=E$

Пример: Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Решение: $\Delta(A) = -9 \neq 0$

$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4$

$$A^{-1} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

проверка: $AA^{-1} = E$

$A^{-1}A = E$

1.4. Лекция № 4 (2 часа)
Тема: «Ранг матрицы»

1.4.1. Вопросы лекции:
1. Приведение матрицы к ступенчатому виду.
2. Ранг матрицы
3. Решение матричных уравнений вида АХ = В.

1.4.2.**. Краткое содержание вопросов**
1. Приведение матрицы к ступенчатому виду.
Определение. Матрица называется ступенчатой, если выполнены следующие условия:
- после нулевой строки идут только нулевые строки;
- опорный элемент в каждой последующей строке расположен правее, чем в предыдущей.

Пример ступенчатой матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&1&2&3\\0&0&0&0&5\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Теорема. Любая матрица может быть приведена к ступенчатой матрице при помощи элементарных преобразований первого и второго типов.
Пример. Привести матрицу А к ступенчатому виду при помощи элементарных преобразований первого и второго типов.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&2\\2&2&1&0\\3&2&2&2\\0&2&0&3\end{pmatrix}$$

Решение. Для элементарных преобразований будем использовать обозначения, приведенные выше.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&2\\2&2&1&0\\3&2&2&2\\0&2&0&3\end{pmatrix}(-2)\ (-3)\ \to\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&2&-1&-4\\0&2&-1&-4\\0&2&0&3\end{pmatrix}(-1)\ (-1)\ \to\to\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&2&-1&-4\\0&0&0&0\\0&0&1&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&2&-1&-4\\0&0&1&7\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Это есть ступенчатый вид матрицы А .
Определение. Если у ступенчатой матрицы все опорные элементы равны единице, а под опорными элементами стоят нули, то матрица имеет ступенчатый вид Гаусса.
Пример. Привести матрицу А к ступенчатому виду Гаусса при помощи элементарных преобразований строк.

$$A=\begin{pmatrix}0&2&3\\0&2&1\\1&2&3\\2&1&1\\3&2&1\end{pmatrix}$$

Решение:

$$A=\begin{pmatrix}0&2&3\\0&2&1\\1&2&3\\2&1&1\\3&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\\0&2&3\\0&2&1\\3&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\\3&2&1\\0&2&1\\0&2&3\end{pmatrix}(-2)\ (-3)\ \to\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&5\\0&-4&-8\\0&2&1\\0&2&3\end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-5\\0&1&2\\0&2&1\\0&2&3\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&-3&-5\\0&2&1\\0&2&3\end{pmatrix}(3)\ (-2)\ (-2)\ \to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\\0&0&-3\\0&0&1\end{pmatrix}(3)\ (-1)\ \to\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

2 Ранг матрицы

Как было сказано выше, минором матрицы порядка s называется определитель матрицы, образованной из элементов исходной матрицы, находящихся на пересечении каких - либо выбранных *s* строк и *s* столбцов.

<u>Определение.</u> В матрице порядка m×n минор порядка r называется **базисным**, если он не равен нулю, а все миноры порядка *r+1* и выше равны нулю, или не существуют вовсе, т.е. *r* совпадает с меньшим из чисел m или n.

Столбцы и строки матрицы, на которых стоит базисный минор, также называются **базисными.**

В матрице может быть несколько различных базисных миноров, имеющих одинаковый порядок.

<u>Определение.</u> Порядок базисного минора матрицы называется **рангом** матрицы и обозначается Rg A.

Очень важным свойством элементарных преобразований матриц является то, что они не изменяют ранг матрицы.

<u>Определение.</u> Матрицы, полученные в результате элементарного преобразования, называются **эквивалентными.**

Надо отметить, что **равные** матрицы и **эвивалентные** матрицы - понятия совершенно различные.

<u>Теорема.</u> *Наибольшее число линейно независимых столбцов в матрице равно числу линейно независимых строк.*

Т.к. элементарные преобразования не изменяют ранг матрицы, то можно существенно упростить процесс нахождения ранга матрицы.

<u>Пример.</u> Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 10 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{RgA} = 2.$$

<u>Пример:</u> Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rg} = 2.$$

<u>Пример.</u> Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0. \Rightarrow \text{Rg} = 2.$$

Если с помощью элементарных преобразований не удается найти матрицу, эквивалентную исходной, но меньшего размера, то нахождение ранга матрицы следует начинать с вычисления миноров наивысшего возможного порядка. В вышеприведенном примере – это миноры порядка 3. Если хотя бы один из них не равен нулю, то ранг матрицы равен порядку этого минора.

3. Решение матричных уравнений вида AX = B.

Матричный метод применим к решению систем уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных.

Метод удобен для решения систем невысокого порядка.

Метод основан на применении свойств умножения матриц.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Составим матрицы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Систему уравнений можно записать: $A \cdot X = B$.

Сделаем следующее преобразование: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$,

т.к. $A^{-1} \cdot A = E$, то $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$ $\quad$ $\mathbf{X = A^{-1} \cdot B}$

Для применения данного метода необходимо находить обратную матрицу, что может быть связано с вычислительными трудностями при решении систем высокого порядка.

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}.

$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + 1(2 - 12) - 1(3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30.$

$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5;$ $\quad M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1;$ $\quad M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10;$ $\quad M_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14;$ $\quad M_{32} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 16;$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5;$ $\quad M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 19;$ $\quad M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$

$a_{11}^{-1} = \frac{5}{30};\quad a_{12}^{-1} = \frac{1}{30};\quad a_{13}^{-1} = \frac{1}{30};$

$a_{21}^{-1} = -\frac{10}{30};\quad a_{22}^{-1} = -\frac{14}{30};\quad a_{23}^{-1} = \frac{16}{30};$

$a_{31}^{-1} = \frac{5}{30};\quad a_{32}^{-1} = \frac{19}{30};\quad a_{33}^{-1} = -\frac{11}{30};$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix};$$

Сделаем проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix} = E.$$

Находим матрицу X.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3}0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6}0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Итого решения системы: x =1; y = 2; z = 3.

Несмотря на ограничения возможности применения данного метода и сложность вычислений при больших значениях коэффициентов, а также систем высокого порядка, метод может быть легко реализован на ЭВМ.

1.5. Лекция № 5 (2 часа)
Тема: «Системы линейных алгебраических уравнений»
1.5.1. Вопросы лекции:
1. Матричная запись систем линейных алгебраических уравнений.
2. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

1.5.2. **Краткое содержание вопросов**
1 Матричная запись систем линейных алгебраических уравнений.
Системой n линейных уравнений с m неизвестными называется система вида
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$
(1), где $a_{ij} \in R$ - коэффициенты при неизвестных, $b_j \in R$-свободные члены, x_j - неизвестные, i=1…m, j=1…n.

Решением системы называется такая совокупность чисел $(x_1 = k_1, x_2 = k_2, ..., x_n = k_n)$, которая обращают данную СЛУ в систему верных равенств (тождеств).
СЛУ называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение и *несовместной*, если она не имеет решений.
Совместная СЛУ называется *определенной*, если она имеет одно решение и *неопределенной*, если она имеет более одного решения.
Этот метод применим для систем n линейных уравнений с n неизвестными.
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$
Введем в рассмотрение матрицы:
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ .... & .... & ... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$$
$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot x_1 + & a_{12}\cdot x_2 + & ... & + a_{1n}\cdot x_n \\ a_{21}\cdot x_1 + & a_{22}\cdot x_2 + & ... & + a_{2n}\cdot x_n \\ .... & .... & ... & .... \\ a_{n1}\cdot x_1 + & a_{n2}\cdot x_2 + & ... & + a_{nn}\cdot x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$$
$\Rightarrow$ $\boxed{A \cdot X = B}$ на основании определений произведения и равенства матриц.
$A \cdot X = B$-матричное уравнение, которое позволяет записать СЛУ (1) в матричном виде.
Чтобы найти X, умножим равенство с обеих сторон <u>слева</u> на A^{-1}
$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$
$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$$
$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$
Получили решение СЛУ (1) в матричной форме.

<u>Пример:</u>
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

Введем в рассмотрение матрицы:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{\Delta(A)}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2}\\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots\\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix}}$$

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{vmatrix}=14$$

$$\begin{matrix} A_{11}=-2 & A_{21}=11 & A_{31}=5\\ A_{12}=2 & A_{22}=-4 & A_{32}=2\\ A_{13}=4 & A_{23}=-1 & A_{33}=-3\end{matrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -2 & 11 & 5\\ 2 & -4 & 2\\ 4 & -1 & -3\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -2 & 11 & 5\\ 2 & -4 & 2\\ 4 & -1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2\\ 0\\ -2\end{pmatrix}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -14\\ 0\\ 14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

Ответ: (-1;0;1)

2. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

Рассмотрим СЛУ
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\quad(1)$$

Метод Гаусса (метод последовательного исключения переменных) заключается в том, что с помощью элементарных преобразований системы переходим к равносильной СЛУ ступенчатого или треугольного вида, из которой последовательно находят все переменные. К элементарным преобразованиям относят: перестановка уравнений, вычеркивание из системы верного равенства, умножение обеих частей одного уравнения на одно и то же число $\neq 0$ и прибавление к соответствующим обеим частям другого уравнения.

Используя метод Гаусса и элементарные преобразования, мы работаем с коэффициентами при неизвестных и свободными членами. Поэтому удобно выписывать расширенную матрицу, соответствующую данной СЛУ и приводить эту матрицу к ступенчатому виду. Использую найденную матрицу записать систему ступенчатого вида, решив которую, найдем решение СЛУ.

Пример: Решить СЛУ методом Гаусса
$$\begin{cases} x+2y+5z=-9\\ x-y+3z=2\\ 3x-6y-z=25\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9\\ 1 & -1 & 3 & 2\\ 3 & -6 & -2 & 25\end{array}\right)\begin{matrix}(-1)\ (-3)\\ \hookleftarrow\quad\\ \quad\hookleftarrow\end{matrix}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9\\ 0 & -3 & -2 & 11\\ 0 & -12 & -16 & 52\end{array}\right)\begin{matrix}\\ (-4)\\ \hookleftarrow\end{matrix}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9\\ 0 & -3 & -2 & 11\\ 0 & 0 & -8 & 8\end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x+2y+5z=-9\\ -3y-2z=11\\ -8z=8\end{cases}\qquad\begin{cases} x=2\\ y=-3\\ z=-1\end{cases}$$

Ответ: (2;-3;-1)

Достоинством метода Гаусса по сравнению с другими в том, что он позволяет однозначно установить совместна система или нет, а в случае совместности, найти её решение (единственное или бесконечное множество).

1.6. Лекция № 6 (2 часа)
Тема: «Системы *n* линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными»

1.6.1. Вопросы лекции:
1. Теорема Кронекера-Капелли.
2. Правило Крамера и метод Гаусса.

1.6.2**. Краткое содержание вопросов**
1. Теорема Кронекера-Капелли.
<u>ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА-КАПЕЛЛИ (критерий совместности СЛУ):</u> Для того, чтобы система m линейных уравнений с n неизвестными (1) была совместной (имела решение) необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы (2) был равен рангу расширенной матрицы (3).

Т.е., если rangA $\neq$ rangB, то система несовместна
если rangA=rangB=r, то система совместна, причем:
1) если r=n (n-число неизвестных), то система имеет единственное решение.
2) если r<n, то система имеет бесчисленное множество решение, зависящих от (n-r) параметров.

<u>Пример:</u> $\begin{cases} x+2y+z+t=5 \\ \qquad y+z+t=3 \\ x+y \qquad\quad =2 \end{cases}$

Составим расширенную матрицу:

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ \underbrace{1 \quad 1 \quad 0 \quad 0}_{A} & & & & 2 \end{array}\right)\begin{matrix}(-1)\\ \big| \\ \hookleftarrow\end{matrix}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)\begin{matrix}\\ 1 \\ \hookleftarrow\end{matrix}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Т.к. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$ - минор второго порядка,

то rangA=2 и rangB=2 r=2 $\Rightarrow$ система совместна
n=4 (x, y, z, t) n>r , n-r=4-2=2 $\Rightarrow$ система имеет бесчисленное множество решений, зависящих от двух параметров.

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$ $\begin{cases} x+2y+z+t=5 \\ \qquad y+z+t=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2-y \\ t=3-y-z \end{cases}$ $\Rightarrow$ $(2-y;\ y;\ z;\ 3-y-z)$ - общее решение (зависит от двух параметров – y и z).

Ответ: $(2-y;\ y;\ z;\ 3-y-z)$

2. Правило Крамера и метод Гаусса.
Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & \big|\times a_{21} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & \big|\times a_{11} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}a_{21}x_1+a_{12}a_{21}x_2=b_1a_{21} \\ a_{11}a_{21}x_1+a_{11}a_{22}x_2=b_2a_{11} \end{cases}(-) \qquad (a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22})x_2=b_1a_{21}-b_2a_{11}$$

$$x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & \big|\times a_{22} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & \big|\times a_{12} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}a_{22}x_1+a_{12}a_{22}x_2=b_1a_{22} \\ a_{12}a_{21}x_1+a_{12}a_{22}x_2=b_2a_{12} \end{cases}(-) \qquad (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

$$x_1=\frac{a_{22}b_1-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

Заметим: $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ - <u>главный определитель</u> СЛУ $(\Delta\neq 0)$

$\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{21} \end{vmatrix}=b_1a_{21}-a_{12}b_2$ *и* $\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}$ - <u>вспомогательные определители</u> СЛУ

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} \end{cases}}$$ - *формулы Крамера*

ТЕОРЕМА КРАМЕРА: Система n линейных уравнений с n неизвестными, определитель которой $\Delta \neq 0$ имеет решение и при этом единственное, определяемое по формулам $\boxed{x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}}$ (*) , где Δ_j $(j = 1...n)$-определитель, получаемый из определителя системы Δ заменой j-го столбца столбцом свободных членов.

Замечание: 1) Если $\Delta \neq 0$, то система (1) имеет единственное решение, которое определяется по формулам (*).

2) Если $\Delta = 0$ и хотя бы один из вспомогательных определителей $\Delta_j \neq 0$, то система (1) не имеет решений.

3) Если $\Delta = 0$ и $\Delta_j = 0$, то система либо имеет множество решений, либо не имеет решений. Нужны дополнительные исследования.

Пример: Решить СЛУ по формулам Крамера $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 14$$ $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ система имеет единственное решение

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -14 \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 14$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} \\ z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Ответ: (-1;0;1)

В отличие от матричного метода и метода Крамера, метод Гаусса может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных. Суть метода заключается в последовательном исключении неизвестных.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Разделим обе части 1–го уравнения на $a_{11} \neq 0$, затем:

1) умножим на a_{21} и вычтем из второго уравнения

2) умножим на a_{31} и вычтем из третьего уравнения

и т.д.

Получим:

$$\begin{cases} x_1 + d_{12}x_2 + ... + d_{1n}x_n = d_1 \\ d_{22}x_2 + d_{23}x_3 + ... + d_{2n}x_n = d_2 \\ .... \\ d_{m2}x_2 + d_{m3} + ... + d_{mn}x_n = d_m \end{cases}$$, где $d_{1j} = a_{1j}/a_{11}$, $j = 2, 3, …, n+1$.

$$d_{ij} = a_{ij} - a_{i1}d_{1j} \qquad i = 2, 3, … , n; \qquad j = 2, 3, … , n+1.$$

Далее повторяем эти же действия для второго уравнения системы, потом – для третьего и т.д.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases}$$, откуда получаем: $x_3 = 2$; $x_2 = 5$; $x_1 = 1$.

Пример. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ -5y - 10z = 40 \\ 6z = 18 \end{cases}$$, откуда получаем: $z = 3$; $y = 2$; $x = 1$.

Полученный ответ совпадает с ответом, полученным для данной системы методом Крамера и матричным методом.

Для самостоятельного решения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Ответ: {1, 2, 3, 4}.

1.7. Лекция № 7 (2 часа)
Тема: «Векторная алгебра»

1.7.1. Вопросы лекции:
1. Арифметические векторы и линейные операции над ними.
2. Векторное пространство R^n. Геометрический смысл пространств R^2 и R^3. Линейные пространства общего вида. Линейная зависимость системы векторов и ее геометрический смысл.
3. Базис и размерность линейного пространства. Координаты вектора в данном базисе. Преобразование координат векторов при замене базиса. Подпространства линейного пространства.

1.7.2**. Краткое содержание вопросов**
1. Арифметические векторы и линейные операции над ними.
Арифметическим вектором называется упорядоченная совокупность n чисел.
бозначается $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$;
числа $x_1, x_2, ..., x_n$ называются компонентами арифметического вектора.
Для арифметических векторов определены линейные операции — сложение арифметических векторов и умножение вектора на число:
для любых x = (x1, x2, ..., xn), y = (y1, y2, ..., yn) и любого числа α справедливо:
x + y = (x1+ y1, x2 +y2, ..., xn+ yn); αx = (αx1, αx2, ..., αxn).
Множество арифметических векторов, для которых определены операции сложения и умножения на число называется пространством арифметических векторов Rn.
Вектор θ = (0, 0, ..., 0) называется нулевым вектором Rn,
а вектор −x = (−x1, −x2, ..., −xn) — противоположным вектором для вектора x в Rn.
Для любых векторов x, y и z из Rn и любых чисел α и β справедливо:
1. x + y = x + y, сложение коммутативно;
2. x + (y + z) = (x + y)+ z, сложение ассоциативно;
3. x + θ = x;
4. x + (−x) = θ;
5. α(x + y) = αx + αy, умножение на число дистрибутивно относительно сложения векторов;
6. α(βx) = (αβ)x, умножение на число ассоциативно;
7. (α + β)x = αx + βx , умножение вектора на число дистрибутивно относительно сложения чисел.
8. 1·x = x.
Примером пространства арифметических векторов Rn, n = 2, является пространство геометрических радиусов-векторов на плоскости, записанных в координатной форме:
a = a1·i + a2· j = (a1, a2), b = b1·i + b2· j = (b1, b2),
a + b = (a1+ b1 , a2+ b2), αa = (αa1, αa2).
Множество квадратных матриц размерности 2, с определенными для них операциями сложения и умножения на число, можно рассматривать как пространство арифметических векторов Rn, n = 4.
Действительно.
$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix},\ \mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{pmatrix},\ \alpha\cdot\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \alpha\cdot a_{11} & \alpha\cdot a_{12} \\ \alpha\cdot a_{21} & \alpha\cdot a_{22}\end{pmatrix}.$$
С другой стороны,
$$\mathbf{a}=(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}),\ \mathbf{b}=(b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}),$$
$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_{11}+b_{11}, a_{12}+b_{12}, a_{21}+b_{21}, a_{22}+b_{22}),$$
$$\alpha\cdot\mathbf{a}=(\alpha\cdot a_{11}, \alpha\cdot a_{12}, \alpha\cdot a_{21}, \alpha\cdot a_{22})$$
Множество Mn многочленов степени не выше n , с определенными для них операциями сложения и умножения на число, можно рассматривать как пространство арифметических векторов Rn+1.

$$P_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n \in \mathbf{M_n} \Leftrightarrow (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{R_{n+1}},$$
$$Q_n(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_n t^n \in \mathbf{M_n} \Leftrightarrow (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbf{R_{n+1}},$$
$$P_n(t) + Q_n(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + \ldots + (a_n + b_n)t^n \in \mathbf{M_n} \Leftrightarrow$$
$$(a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \in \mathbf{R_{n+1}},$$

Действительно. $\alpha \cdot P_n(t) = \alpha \cdot a_0 + \alpha \cdot a_1 t + \alpha \cdot a_2 t^2 + \ldots + \alpha \cdot a_n t^n \in \mathbf{M_n} \Leftrightarrow (\alpha \cdot a_0, \alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \ldots, \alpha \cdot a_n) \in \mathbf{R_{n+1}}$.

Вектор a = (a11, a12, a21, a22) − вектор из R4.

2. Векторное пространство R^n. Геометрический смысл пространств R^2 и R^3. Линейные пространства общего вида. Линейная зависимость системы векторов и ее геометрический смысл.

Вектором размерности n называется упорядоченный набор из n действительных чисел. Будем записывать вектор в виде $\overline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$ - координаты вектора. Размерность вектора определяется числом его координат и является его отличительной характеристикой. Векторы равны, если они одной размерности и имеют равные соответствующие координаты: (2,3,5) = (2,3,5). Нуль-вектор $\vec{0}$ = (0,0,…,0) не следует путать с числом нуль.

N-мерное векторное пространство R^n определяется как множество всех n-мерных векторов, для которых определены операции умножения на действительные числа и сложение.

Геометрический смысл пространств R^2 и R^3 Множество всех n-мерных арифметических векторов, в которых введены операции: сложение векторов и умножение на число называется арифметическим n-мерным пространством (R^n).

Геометрический смысл имеют лишь пространства R^1, R^2, R3 . Для R^1 – это прямая, для R^2 – плоскость, для R^3 – трехмерное пространство.

При n>3 пространство R^n представляется лишь чисто математическим и не реальным объектом.

Линейные пространства общего вида Ги́льбертово простра́нство — обобщение евклидова пространства, допускающее бесконечную размерность. Названо в честь Давида Гильберта.

Гильбертово пространство есть банахово пространство, норма которого порождена положительно определённым скалярным произведением.

Линейная зависимость системы векторов и ее геометрический смысл Вектор B называется линейной комбинацией векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ векторного пространства Rn, если он равен сумме произведений этих векторов на произвольные действительные числа: $B = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_n A_n$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ – любые действительные числа.

Векторы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются линейно зависимыми, если существует такая линейная комбинация $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_n A_n = 0$, при не равных нулю одновременно αi (i = 1, 2, . . . n), т.е. $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 \neq 0$.

Если же $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_n A_n = 0$ выполняется только при всех $\alpha_i = 0$ (i = 1, 2, . . . n), то векторы называются линейно независимыми.

Свойства:

1. Если среди векторов Ai (i = 1, 2, . . . n) есть нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.
2. Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима.
3. Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов раскладывается в линейную комбинацию остальных векторов.

Геометрический смысл линейной зависимости векторов очевиден для случаев двумерных векторов на плоскости и трехмерных векторов в пространстве: в случае двух векторов, когда один вектор выражается через другой: $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, т.е. эти векторы коллинеарны или, что то же самое, они находятся на параллельных прямых.

4. Любые 2 коллинеарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 2 линейно зависимые векторы коллинеарны: $\vec{b} \parallel \vec{a} \Leftrightarrow \vec{b} = \lambda\vec{a}$

В пространственном случае линейной зависимости трех векторов они параллельны одной плоскости, т.е. компланарны.

5. Любые 3 компланарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 3 линейно зависимые векторы компланарны.

Т.е., достаточно «подправить» соответствующими сомножителями длины этих векторов, чтобы один из них стал суммой двух других (выражался через них).

В пространстве Rn любая система, содержащая m векторов, линейно зависима при m > n.

3. Базис и размерность линейного пространства. Координаты вектора в данном базисе. Преобразование координат векторов при замене базиса. Подпространства линейного пространства.

Говорят, что элемент (вектор) x линейного пространства L линейно выражается через элементы (векторы) $e_1, e_2, \ldots, e_n \in L$, если его можно представить в виде линейной комбинации этих элементов, т.е. представить в виде $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$.

Если любой вектор системы $e_1, e_2, \ldots, e_k$ векторов линейного пространства L линейно выражается через остальные векторы системы, то система векторов называется линейно зависимой.

Система векторов, которая не является линейно зависимой, называется линейно независимой.

Справедливо следующее утверждение: Система $e_1, e_2, \ldots, e_k$ векторов линейного пространства L линейно независима тогда и только тогда, когда из равенства $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = 0$ следует равенство нулю всех коэффициентов $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$.

Если в линейном пространстве L существует линейно независимая система из n векторов, а любая система из (n+1)-го вектора линейно зависима, то число n называется **размерностью пространства** L и обозначается $\dim(L)$. В этом случае пространство L называют n-мерным линейным пространством или n-мерным векторным пространством.

Любая упорядоченная линейно независимая система n векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейного пространства L образует **базис пространства** и любой вектор x€L единственным образом выражается через векторы базиса: $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$.

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называют координатами вектора x в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и обозначают $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. При этом для любых двух произвольных векторов n-мерного линейного пространства $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и произвольного числа α справедливо:
$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$ и $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$.

Это означает, что все n-мерные линейные пространства “устроены” одинаково - как пространство R^n векторов-столбцов из n действительных чисел, т.е. что все они изоморфны пространству R^n.

Линейные пространства X и Y называются изоморфными, если между их элементами можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что если векторам X и X’ из X соответствуют векторы y и y' из Y, то вектору $x + x'$ соответствует вектор $y + y'$ и при любом α вектору $\alpha x \in X$ соответствует вектор $\alpha y \in Y$.

Изоморфизм n-мерных линейных пространств пространству R^n означает, что соотношения между элементами n-мерного линейного пространства и операции с ними можно изучать как соотношения между векторами из R^n и операции с ними и что всякое утверждение относительно векторов из $\mathbb{R}^n$ справедливо для соответствующих элементов любого n-мерного линейного пространства.

Например, доказано, что система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ из R^n

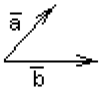
$$e_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ \ldots \\ e_{n1} \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \\ \ldots \\ e_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \quad e_n = \begin{pmatrix} e_{1n} \\ e_{2n} \\ \ldots \\ e_{nn} \end{pmatrix}$$

образует базис в R^n тогда и только тогда, когда отличен от нуля определитель матрицы, со столбцами $e_1, e_2, \ldots, e_n$:

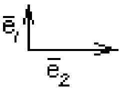
$$\det A = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \ldots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \ldots & e_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e_{n1} & e_{n1} & \ldots & e_{nn} \end{pmatrix} \neq 0$$

Для векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ из L это означает, что они образуют базис в L тогда и только тогда, когда отличен от нуля определитель матрицы, столбцами которой являются компоненты векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

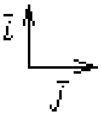
Упорядоченная пара двух ненулевых, не коллинеарных векторов образует <u>*базис*</u> на плоскости.



$(\vec{a};\vec{b})$ - базис. $\bar{a} \nparallel \bar{b}$, $\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$

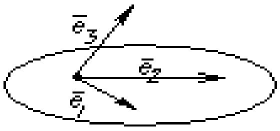


$\bar{e}_1 \perp \bar{e}_2$, $(\vec{e_1};\vec{e_2})$ - <u>*ортогональный базис*</u>.

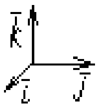


$|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$, $\bar{i} \perp \bar{j}$, $(\vec{i};\vec{j})$ - <u>*ортонормированный базис*</u>. (ПДСК на плоскости)

<u>ОПР:</u> Упорядоченная система трёх ненулевых, не кокомплонарных векторов образуют <u>*базис*</u> в пространстве.



$\bar{e}_1 \perp \bar{e}_2 \perp \bar{e}_3$. $(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$ - ортогональный базис в пространстве.



$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, $\bar{i} \perp \bar{j} \perp \bar{k}$, $(\vec{i};\vec{j},\vec{k})$ - ортонормированный базис в пространстве.

(ПДСК в пространстве)

<u>*n – мерным вектором*</u> называется упорядоченная совокупность n действительных чисел, записываемых в виде $\vec{a} = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$, где x_i - i-ая координата вектора $\vec{a}$.

Понятие n – мерного вектора широко используется в экономике. Например, некоторый набор товаров можно охарактеризовать вектором $\vec{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$, а соответствующие цены – вектором $\vec{y} = (y_1; y_2; \ldots; y_n)$.

Сумма, разность, умножение вектора на число вводятся аналогично.

<u>*Свойства операций:*</u>

1) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ - переместительное свойство

2) $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ - сочетательное свойство

3) $\alpha \cdot (\beta \vec{x}) = \alpha \beta \vec{x}$, $\alpha, \beta \in R$

4) $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$ - дистрибутивное свойство

5) $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$

6) $\exists$ $\vec{0} = (0,0,\ldots0)$ такой, что $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$, для $\forall \vec{x}$

7) Для $\forall \vec{x}$ $\exists$ $-\vec{x}$ - противоположный вектор такой, что $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$

8) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$, для $\forall \vec{x}$.

Множество векторов с действительными координатами, в котором определены операции сложения и умножения на число, удовлетворяющие приведенным выше восьми свойствам, называется <u>*векторным пространством*</u>.

Вектор $\vec{b}$ называется <u>*линейной комбинацией*</u> векторов $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$, если его можно представить в виде $\vec{b} = \lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \ldots + \lambda_n\vec{a_n}$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in R$.

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in R$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, что $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + ... + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$. В противном случае, векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называются *линейно независимыми.*

Размерность пространства – это максимальное число содержащихся в нем линейно независимых векторов.

Совокупность n линейно независимых векторов n – мерного пространства называется *базисом*.

Пример: Доказать, что векторы $\vec{b}_1 = (1;1;0), \vec{b}_2 = (1;-1;1), \vec{b}_3 = (-3;5;-6)$ образуют базис.

Три линейно независимых вектора трехмерного пространства образуют базис. Проверим, являются ли данные векторы линейно независимыми.

Т.е. $\lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \lambda_3 \vec{b}_3 = \vec{0}$ только тогда, когда все числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ =0.

$\lambda_1(1;1;0) + \lambda_2(1;-1;1) + \lambda_3(-3;5;-6) = (0;0;0)$

$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - 6\lambda_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$ Вектора $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ - лин. независ. и образуют базис 3-мерного пространства.

1.8. Лекция № 8 (2 часа)
Тема: «Евклидово пространство»

1.8.1. Вопросы лекции:
1. Скалярное произведение векторов в R^n.
2. Евклидово пространство. Длины векторов и угол между векторами в R^n.
3. Ортогональный и ортонормированный базисы в R^n. Координаты вектора в ортогональном базисе

1.8.2**. Краткое содержание вопросов**
1. Скалярное произведение векторов в R^n.

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих сторон на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi$$

<u>**Свойства**</u> скалярного произведения:

1) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$;
2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, если $\vec{a}\perp\vec{b}$ или $\vec{a}=0$ или $\vec{b} = 0$.
3) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;
4) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$;
5) $(m\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(m\vec{b}) = m(\vec{a}\cdot\vec{b})$;

Если рассматривать векторы $\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$; $\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b;$$

Используя полученные равенства, получаем формулу для вычисления угла между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|};$$

<u>Пример.</u> Найти $(5\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2,\quad |\vec{b}| = 3,\quad \vec{a}\perp\vec{b}$.

$$10\vec{a}\cdot\vec{a} - 5\vec{a}\cdot\vec{b} + 6\vec{a}\cdot\vec{b} - 3\vec{b}\cdot\vec{b} = 10|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 = 40 - 27 = 13,$$

т.к. $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 = 4,\quad \vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|^2 = 9,\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

<u>Пример.</u> Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

Т.е. $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (6, 4, -2)$
$\vec{a}\cdot\vec{b} = 6 + 8 - 6 = 8$:
$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14};\qquad |\vec{b}| = \sqrt{36+16+4} = \sqrt{56}$.

$$\cos\varphi = \frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = \frac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7};\qquad \varphi = \arccos\frac{2}{7}.$$

<u>Пример.</u> Найти скалярное произведение $(3\vec{a} - 2\vec{b})\cdot(5\vec{a} - 6\vec{b})$, если $|\vec{a}| = 4,\quad |\vec{b}| = 6,\quad \vec{a}\hat{\ }\vec{b} = \pi/3$.

$$15\vec{a}\cdot\vec{a} - 18\vec{a}\cdot\vec{b} - 10\vec{a}\cdot\vec{b} + 12\vec{b}\cdot\vec{b} = 15|\vec{a}|^2 - 28|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3} + 12|\vec{b}|^2 = 15\cdot16 - 28\cdot4\cdot6\cdot\frac{1}{2} +$$
$$+ 12\cdot36 = 240 - 336 + 432 = 672 - 336 = 336.$$

<u>Пример.</u> Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

Т.е. $\vec{a}$ = (3, 4, 5), $\vec{b}$ = (4, 5, -3)

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ = 12 + 20 - 15 =17 :

$|\vec{a}| = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50};$ $|\vec{b}| = \sqrt{16+25+9} = \sqrt{50}$.

cosφ = $\dfrac{17}{\sqrt{50}\sqrt{50}} = \dfrac{17}{50};$ $\varphi = \arccos\dfrac{17}{50}.$

<u>Пример.</u> При каком m векторы $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ перпендикулярны.

$\vec{a}$ = (m, 1, 0); $\vec{b}$ = (3, -3, -4)

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3m - 3 = 0; \quad \Rightarrow m = 1.$

<u>Пример.</u> Найти скалярное произведение векторов $2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}$ и $5\vec{a}+6\vec{b}+7\vec{c}$, если $|\vec{a}| = 1,\quad |\vec{b}| = 2,\quad |\vec{c}| = 3,\quad \vec{a}\wedge\vec{b} = \vec{a}\wedge\vec{c} = \vec{b}\wedge\vec{c} = \dfrac{\pi}{3}.$

$(2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c})(5\vec{a}+6\vec{b}+7\vec{c}) = 10\vec{a}\cdot\vec{a} + 12\vec{a}\cdot\vec{b} + 14\vec{a}\cdot\vec{c} + 15\vec{a}\cdot\vec{b} + 18\vec{b}\cdot\vec{b} + 21\vec{b}\cdot\vec{c} +$
$+ 20\vec{c}\cdot\vec{a} + 24\vec{b}\cdot\vec{c} + 28\vec{c}\cdot\vec{c} = 10\ \vec{a}\cdot\vec{a} + 27\vec{a}\cdot\vec{b} + 34\vec{a}\cdot\vec{c} + 45\vec{b}\cdot\vec{c} + 18\vec{b}\cdot\vec{b} + 28\vec{c}\cdot\vec{c}$ = 10 +
+ 27 + 51 + 135 + 72 + 252 = 547.

2. Евклидово пространство. Длины векторов и угол между векторами в R^n.

Вспомним, как в обычном трехмерном пространстве мы вычисляли скалярное произведение векторов. Если координаты векторов $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ были заданы в ортонормированном базисе, то скалярное произведение (a,b) вычислялось по формуле $\mathbf{ab} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3.$ Аналогичной формулой можно задать и скалярное произведение в n-мерном пространстве. Пусть L - вещественное n-мерное пространство, в котором задан базис. Тогда векторы a и b из L задаются своими координатами: $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n, \quad b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n.$

Скалярное произведение векторов, обозначается оно обычно , задается формулой $(a, b) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n.$ В отличие от обычного трехмерного пространства, где с помощью транспортира и линейки можно измерить угол между векторами и длину вектора, в n-мерном пространстве ни угол между векторами, ни длину вектора измерить невозможно. Поэтому ортонормированным в n-мерном пространстве называется тот базис, в котором скалярное произведение вычисляется по формуле . Если $\alpha = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$ - координатные столбцы векторов a и b, то скалярное произведение можно задать формулой $(a, b) = \alpha^{\top}\beta.$

Вещественное линейное пространство, в котором задано скалярное произведение называется **евклидовым пространством**

В трехмерном пространстве модуль вектора равен корню квадратному из скалярного произведения вектора на себя $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$. В евклидовом пространстве модуль вектора определим аналогично $|a| = \sqrt{(a, a)},$ то есть $|a| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2}.$

В трехмерном пространстве с помощью скалярного произведения определялся угол между векторами. В евклидовом пространстве тоже можно определить угол между векторами. Но угол в n-мерном пространстве не имеет существенного значения, кроме одного случая. В трехмерном пространстве два вектора ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

Два вектора евклидова пространства называются ортогональными , если их скалярное произведение равно нулю.

3. Ортогональный и ортонормированный базисы в R^n. Координаты вектора в ортогональном базисе

Вектор $\bar{x} \in E$ называется нормированным или единичным, если $|\bar{x}| = 1.$

Если $\bar{x} \neq \bar{0},$ то соответствующими этому вектору нормированными векторами будут $\bar{x}_0 = \bar{x}/|\bar{x}|, \ \bar{x}'_0 = -\bar{x}/|\bar{x}|.$

Векторы x и y пространства со скалярным произведением L называются ортогональными, если (x,y)=0. В этом случае пишут $x \perp y$.

Процесс ортогонализации Грама--Шмидта позволяет превратить линейно независимую систему векторов в ортонормированную. Вы уже встречались с ним в курсе линейной алгебры. Это обстоятельство позволяет нам сразу перейти к формальному изложению сути дела.

Теорема. Если $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ - счетная система линейно независимых векторов в линейном пространстве со скалярным произведением L, то новые последовательности обладают следующими свойствами:

1) система $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ ортонормирована, т. е. любые два ее вектора ортогональны и каждый вектор имеет единичную длину;

2) для любого $n \in N$ линейная оболочка векторов $z_1, z_2, \ldots, z_n$ совпадает с линейной оболочкой векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Ортогональные дополнения подпространств Пусть L - евклидово (унитарное) пространство, подпространство $M \subset L$. Вектор $X \in L$ называется **ортогональным к подпространству** $M \subset L$, если для всех $Y \in M$ $(X,Y) = 0$.

Множество всех векторов X ортогональных к подпространству M называется **ортогональным дополнением** M и обозначается $M^\perp$.

Очевидно, $M^\perp$ является подпространством пространства L, причем для размерности подпространств M, $M^\perp$ и размерность пространства L связаны соотношением $\dim(M^\perp) + \dim(M) = \dim(L)$.

Действительно, выберем базис $e_1, e_2, \ldots, e_k$ подпространства M, дополним его до базиса L, получим $E = \langle e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n \rangle$. Ортогонализируем данный базис методом Грамма-Шмидта, получим: $\Sigma = \langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, \sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_n \rangle$ - базис пространства L,

$\Sigma_1 = \langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k \rangle$ - базис подпространства M, $\Sigma_2 = \langle \sigma_{k+1}, \sigma_{k+2}, \ldots, \sigma_n \rangle$ - базис подпространства ортогонального дополнения $M^\perp$.

Говорят, что пространство L является прямой ортогональной суммой своих подпространств M и $M^\perp$: $L = M \oplus M^\perp$

1.9 Лекция № 9 (2 часа)
Тема: «Многочлены и комплексные числа»

1.9.1. Вопросы лекции:
1. Основные понятия, связанные с многочленами. Схема Горнера и корни многочленов. Теорема Безу. Разложение правильной дроби на сумму элементарных дробей.
2. Комплексные числа и действия над ними. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа.
3. Алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексных чисел. Корни *n*-ой степени из комплексного числа. Формулировка основной теоремы алгебры.

1.9.2. **Краткое содержание вопросов**
1. Основные понятия, связанные с многочленами. Схема Горнера и корни многочленов. Теорема Безу. Разложение правильной дроби на сумму элементарных дробей.
Схема Го́рнера - алгоритм вычисления значения многочлена, записанного в виде суммы мономов, при заданном значении переменной. Метод Горнера позволяет найти корни многочлена, а также вычислить производные полинома в заданной точке. Схема Горнера также является простым алгоритмом для деления многочлена на бином вида x − c.

Задан многочлен P(x):
$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$
Пусть требуется вычислить значение данного многочлена при фиксированном значении x = x0. Представим многочлен P(x) в следующем виде:
$$P(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots x(a_{n-1} + a_nx)\ldots)).$$
Определим следующую последовательность:
$$b_n = a_n \quad b_{n-1} = a_{n-1} + b_nx \ \ldots\ b_i = a_i + b_{i+1}x \ \ldots\ b_0 = a_0 + b_1x$$
Искомое значение $P(x_0) = b_0$.

Использование схемы Горнера для деления многочлена на бином

При делении многочлена $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ на x − c получается многочлен $b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1}$ с остатком b_n.

При этом коэффициенты результирующего многочлена удовлетворяют рекуррентным соотношениям:
$b_0 = a_0$, $b_k = a_k + cb_{k-1}$.

Таким же образом можно определить кратность корня (использовать схему Горнера для нового полинома). Так же схему можно использовать для нахождения коэффициентов при разложении полинома по степеням x - c: $P(x) = A_0 + A_1(x-c) + A_2(x-c)^2 + \cdots + A_n(x-c)^n$

Теорема Безу утверждает, что остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x - a$ равен $P(a)$.

Предполагается, что коэффициенты многочлена содержатся в некотором коммутативном кольце с единицей (например, в поле вещественных или комплексных чисел). Следствия:

- Число a является корнем многочлена $p(x)$ тогда и только тогда, когда $p(x)$ делится без остатка на двучлен $x - a$ (отсюда, в частности, следует, что множество корней многочлена $P(x)$ тождественно множеству корней соответствующего уравнения $P(x) = 0$).
- Свободный член многочлена делится на любой целый корень многочлена с целыми коэффициентами (если старший коэффициент равен 1, то все рациональные корни являются и целыми).
- Пусть α — целый корень приведенного многочлена A(x) с целыми коэффициентами. Тогда для любого целого k число A(k) делится на α-k.

Классическим примером применения метода неопределённых коэффициентов является разложение правильной рациональной дроби в комплексной или вещественной области на элементарные дроби.

Пусть p(z) и q(z) — многочлены с комплексными коэффициентами, причём степень многочлена p(z) меньше степени многочлена q(z), коэффициент при старшем члене многочлена q(z) равен 1, zi

$i \in \{1, .., k\}$— корни многочлена q(z) с кратностями αi, следовательно, $q(z) = (z - z_1)^{\alpha_1}(z - z_2)^{\alpha_2}..(z - z_k)^{\alpha_k}$

Функция p / q представима, и притом единственным образом, в виде суммы элементарных дробей $\frac{p(z)}{q(z)} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\alpha_i}\frac{A_{i,j}}{(z - z_i)^j}$,

где $A_{i,j}$ — неизвестные пока комплексные числа (их число равно степени q). Для их отыскания обе части равенства приводят к общему знаменателю. После его отбрасывания и приведения в правой части подобных членов получается равенство, которое сводится к системе линейных уравнений относительно $A_{i,j}$.

Примечание. Нахождение неизвестных можно упростить, если q(z) имеет некратные корни zj. После умножения на z − zj последнего равенства и подстановки z = zj непосредственно получаем значение соответствующего коэффициента $A_j = \frac{p(z_j)}{\prod_{i \neq j}(z_j - z_i)^{\alpha_i}}$.

Основная теорема алгебры утверждает, что всякий отличный от константы многочлен с комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один корень в поле комплексных чисел.

Эквивалентная формулировка теоремы следующая: поле комплексных чисел алгебраически замкнуто.

Немедленным следствием из теоремы является то, что любой многочлен степени n над полем комплексных чисел имеет в нём ровно n корней, с учётом кратности корней.

2. Комплексные числа и действия над ними. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа.

Определение. Комплексным числом *z* называется выражение $z = a + ib$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, которая определяется соотношением:

$$i^2 = -1; \qquad i = \sqrt{-1}.$$

При этом число a называется **действительной частью** числа z ($a = Re\ z$), а b- **мнимой частью** ($b = Im\ z$).

Если $a = Re\ z = 0$, то число z будет чисто мнимым, если $b = Im\ z = 0$, то число z будет действительным.

Определение. Числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ называются **комплексно – сопряженными.**

Определение. Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части:

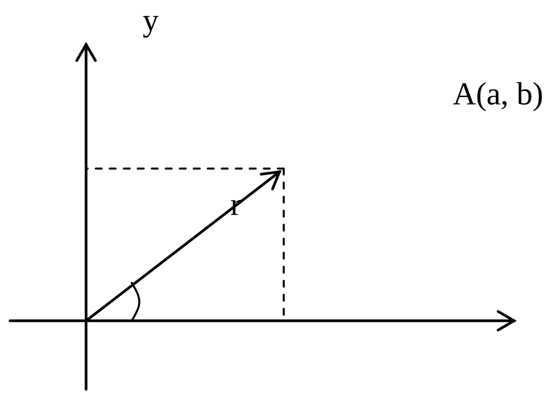
$$a_1 = a_2; \qquad b_1 = b_2;$$

Определение. Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части.

$$a = b = 0.$$

Понятие комплексного числа имеет геометрическое истолкование. Множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел за счет включения множества мнимых чисел. Комплексные числа включают в себя все множества чисел, которые изучались ранее. Так натуральные, целые, рациональные, иррациональные, действительные числа являются, вообще говоря, частными случаями комплексных чисел.

Если любое действительное число может быть геометрически представлено в виде точки на числовой прямой, то комплексное число представляется точкой на плоскости, координатами которой будут соответственно действительная и мнимая части комплексного числа. При этом горизонтальная ось будет являться действительной числовой осью, а вертикальная - мнимой осью.



108 b

0 a x

С помощью подобного геометрического представления можно представлять числа в так называемой тригонометрической форме.

3. Алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексных чисел. Корни *n*-ой степени из комплексного числа. Формулировка основной теоремы алгебры.

Из геометрических соображений видно, что $a = r\cos\varphi$; $b = r\sin\varphi$. Тогда комплексное число можно представить в виде: $z = a + ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Такая форма записи называется **тригонометрической формой записи комплексного числа.**

При этом величина r называется **модулем** комплексного числа, а угол наклона φ - **аргументом** комплексного числа.

$$r = |z|; \qquad \varphi = Arg\, z.$$

Из геометрических соображений видно: $r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\varphi = Arg\, z = arctg\dfrac{b}{a}$;

Очевидно, что комплексно – сопряженные числа имеют одинаковые модули и противоположные аргументы.

$$|z| = |\bar{z}|; \qquad Arg\, z = -Arg\, \bar{z}.$$

<u>Действия с комплексными числами.</u>

Основные действия с комплексными числами вытекают из действий с многочленами.

1) **Сложение и вычитание.**

$$z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$$

2) **Умножение.**

$$z = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 + i^2 b_1b_2$$

$$z = z_1 z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2)$$

В тригонометрической форме:

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

С случае комплексно – сопряженных чисел:

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2.$$

3) **Деление.**

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy$$

$$z = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + i(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2} \qquad z = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

В тригонометрической форме: $z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

4) **Возведение в степень.**

Из операции умножения комплексных чисел следует, что

$$z^2 = zz = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

В общем случае получим: $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, где n – целое положительное число.

Это выражение называется **формулой Муавра.**

Формулу Муавра можно использовать для нахождения тригонометрических функций двойного, тройного и т.д. углов.

<u>Пример.</u> Найти формулы sin2φ и cos2φ.

Рассмотрим некоторое комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Тогда с одной стороны $z^2 = r^2(\cos^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi)$.

По формуле Муавра: $z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$

Приравнивая, получим $\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi$

Т.к. два комплексных числа равны, если равны их действительные и мнимые части, то

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$
$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$$

Получили известные формулы двойного угла.

5) **Извлечение корня из комплексного числа.**

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

Возводя в степень, получим:

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Отсюда: $\rho = \sqrt[n]{r}; \qquad n\psi = \varphi + 2\pi k; \qquad k \in Z.$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

Таким образом, корень n – ой степени из комплексного числа имеет n различных значений.

<u>Показательная форма комплексного числа.</u>

Рассмотрим показательную функцию $w = e^z; \qquad z = x + iy.$

Можно показать, что функция w может быть записана в виде:

$$w = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

Данное равенство называется **уравнением Эйлера.** Для комплексных чисел будут справедливы следующие свойства:

1) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$;

2) $e^{z_1-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$;

3) $(e^z)^m = e^{mz}$; где m – целое число.

Если в уравнении Эйлера показатель степени принять за чисто мнимое число ($x=0$), то получаем: $e^{iy} = \cos y + i\sin y$

Для комплексно – сопряженного числа получаем: $e^{-iy} = \cos y - i\sin y$

Из этих двух уравнений получаем:

$$\begin{cases} \cos y = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \\ \sin y = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \end{cases}$$

Этими формулами пользуются для нахождения значений степеней тригонометрических функций через функции кратных углов.

Если представить комплексное число в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

и воспользуемся формулой Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$$z = re^{i\varphi}$$

Полученное равенство и есть **показательная форма комплексного числа.**

Рассмотрим несколько примеров действий с комплексными числами.

<u>Пример.</u> Даны два комплексных числа $z_1 = 1 - \dfrac{7}{2}i; \quad z_2 = -7 - 2i$. Требуется а) найти значение выражения $\left(\dfrac{1-\frac{7}{2}i}{-7-2i}\right)^{-4}$ в алгебраической форме, б) для числа $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ найти тригонометрическую форму, найти z^{20}, найти корни уравнения $w^3 + z = 0$.

а) Очевидно, справедливо следующее преобразование:

$$\left(\frac{1-\frac{7}{2}i}{-7-2i}\right)^{-4} = \left(\frac{2-7i}{-14-4i}\right)^{-4} = \left(\frac{-14-4i}{2-7i}\right)^{4} = 16\left(\frac{-7-2i}{2-7i}\right)^{4}$$

Далее производим деление двух комплексных чисел:

$$\frac{-7-2i}{2-7i}=\frac{(-7-2i)(2+7i)}{(2-7i)(2+7i)}=\frac{-14-49i-4i+14}{4+49}=\frac{-53i}{53}=-i.$$

Получаем значение заданного выражения: $16(-i)^4 = 16i^4 = 16$.

б) Число $z=2-2\sqrt{3}i$ представим в виде $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где

$$r=|z|=\sqrt{4+12}=4; \qquad \varphi=arctg\,\frac{b}{a}=arctg\left(-\sqrt{3}\right)=-60^0$$

Тогда $z=4(\cos 60^0-i\sin 60^0)$.

Для нахождения z^{20} воспользуемся формулой Муавра.

$$z^{20}=4^{20}(\cos 1200^0-i\sin 1200^0)=4^{20}(\cos(3\cdot 2\pi+120^0)-i\sin(3\cdot 2\pi+120^0))=$$

$$=4^{20}(\cos 120^0-i\sin 120^0)=-4^{20}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

Если $w^3+z=0$, то $w=\sqrt[3]{z}$

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{3}\right)=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{-60^0+2\pi k}{3}+i\sin\frac{-60^0+2\pi k}{3}\right); \quad k\in Z.$$

1.10. Лекция № 10 (2 часа)
Тема: «Линейные преобразования и квадратичные формы»

1.10.1. Вопросы лекции:
1. Линейные преобразования пространства *R^n^*. Линейные операторы. Ядро и образ линейного оператора. Матрица линейного оператора.
2. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов. Собственные значения квадратных матриц..
3. Квадратичные формы, их матрицы в данном базисе. Приведение квадратичной формы к нормальному виду методом Лагранжа. Приведение квадратичной формы к каноническому виду при помощи ортогонального преобразования. Закон инерции квадратичных форм. Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы

1.10.2**. Краткое содержание вопросов**
1. Линейные преобразования пространства R^n. Линейные операторы. Ядро и образ линейного оператора. Матрица линейного оператора.

Оператор A, действующий в линейных пространствах X, Y называется линейным оператором, если $A(u+v) = A(u) + A(v)$ и $A(\alpha u) = \alpha A(u)$ для любых $u, v \in X$ и для любого числа α.

Если пространства X и Y совпадают, то говорят, что оператор действует в пространстве X. В дальнейшем ограничимся рассмотрением линейных операторов, действующих в линейном пространстве X.

Рассмотрим линейный оператор A, действующий в конечномерном линейном пространстве X. Доказано, что образ $Im(A)$ линейного оператора — линейное пространство. Размерность образа линейного оператора называется рангом оператора, обозначается $Rg(A) = r = dim(Im(A))$.

Ядром линейного оператора называется множество элементов из X, образом которых является нулевой элемент. Ядро оператора обозначают $Ker(A)$: $Ker(A) = \{x \in X : A(x) = \mathbf{0}\}$. Ядро линейного оператора — линейное пространство; размерность ядра линейного оператора называется дефектом оператора, обозначается $Def(A)$: $d = Def(A) = dim(Ker(A))$.

Для линейного оператора, действующего в n-мерном линейном пространстве X, справедливы следующие утверждения:
- сумма ранга и дефекта оператора равно размерности пространства, в котором действует оператор: $Def(A) + Rg(a) = n$;
- ранг оператора равен рангу его матрицы;
- ядро оператора совпадает с множеством решений линейной однородной системы с матрицей A, размерность пространства решений этой системы равна дефекту оператора, а ее фундаментальная система решений образует базис в ядре оператора;
- столбцы, входящие в базисный минор матрицы оператора образуют базис в образе оператора.

Сформулированные утверждения позволяют описать структуру образа и ядра линейного оператора, заданного матрицей, используя язык матричных преобразований и общей теории линейных систем.

Матрица, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ столбцами которой являются координаты образов базисных векторов, называется **матрицей линейного оператора** в заданном базисе.

2. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов. Собственные значения квадратных матриц..

Пусть А- линейный оператор, действующий в линейном пространстве.

Число λ называется собственным значением, а ненулевой вектор Х -соответствующим собственным вектором линейного оператора А, если они связаны между собой соотношением $A x = \lambda x$.

Пусть А- матрица оператора в некотором базисе.

Собственные значения оператора и соответствующие им собственные векторы связаны соотношением $(A - \lambda E)\, x = 0$, где E— единичная матрица, а 0 —нулевой элемент пространства X. Это означает, что собственный вектор оператора является ненулевым решением линейной однородной системы $(A - \lambda E)\, x = 0$, которое существует тогда и только тогда, когда $\det (A - \lambda E) = 0$.

Следовательно, собственные значения линейного оператора могут быть вычислены как корни уравнения $\det (A - \lambda E) = 0$, а собственные векторы - как решения соответствующих однородных систем.

Уравнение $\det (A - \lambda E) = 0$ называется характеристическим уравнением оператора, а многочлен $\det (A - \lambda E)$ —характеристическим многочленом оператора.

Для собственных значений и собственных векторов линейного оператора справедливы следующие утверждения:

- многочлен оператора, действующего в n-мерном линейном пространстве является многочленом n-й степени относительно λ;
- линейный оператор, действующий в n-мерном линейном пространстве имеет не более n различных собственных значений;
-собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы;
-если линейный оператор, действующий в n-мерном линейном пространстве Х, имеет n различных собственных значений, то собственные векторы оператора образуют базис в пространстве X; этот базис называют собственным базисом оператора;
-матрица оператора в базисе из его собственных векторов имеет диагональную форму с собственными значениями на диагонали.

Пусть дана матрица А. Число λ называется <u>*собственным значением*</u> матрицы А, если выполняется равенство $\boxed{\,|\Delta(A-\lambda E)=0|\,}$

Вектор $\vec{x} = (x_1; x_2; ...; x_n)$, $\vec{x} \neq \vec{0}$ называется <u>*собственным вектором*</u>, соответствующим собственному значению λ, если $(A-\lambda E)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{0}$.

<u>Пример:</u> Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение: 1) $\Delta(A-\lambda E) = 0$

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 9 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (1-\lambda)^2 - 36 = 0$$

$\lambda_1 = -5;\quad \lambda_2 = 7$ - собственные значения матрицы А.

2) $\vec{x_1} = (x_1; x_2);\quad \lambda_1 = -5$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 9 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 = 0 \\ 9x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = -1{,}5c \end{cases}$$

$\vec{x_1} = (c;-1{,}5c), \quad \forall c \neq 0$ - собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = -5.$

$\vec{x_2} = (x_3; x_4); \quad \lambda_2 = 7$

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -6x_3 + 4x_4 = 0 \\ 9x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = d \\ x_4 = 1{,}5d \end{cases}$$

$\vec{x_2} = (d;1{,}5d), \quad \forall d \neq 0$- собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 7.$

Рассмотрим модель международной торговли (модель обмена) в виде математической модели.

Пусть имеем n стран - $S_1, S_2, ..., S_n$, национальный доход каждой из которых равен $x_1, x_2, ..., x_n$.

Обозначим через $a_{i\,j}$, $i = 1...n;\ j = 1...n$ долю национального дохода, который страна S_j тратит на покупку товаров у страны S_i .

Будем считать, что весь национальный доход тратится на закупку товаров либо внутри страны, либо на импорт из других стран, т.е. $\sum_{i=1}^{n} a_{i\,j} = 1 \quad (j = 1...n).$

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется *<u>структурной матрицей торговли</u>*.

Обозначим через $p_i \quad (i = 1...n)$ выручку от внутренней и внешней торговли для страны S_i , тогда $p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n$.

Очевидно, что выручка от торговли каждой страны должна быть не меньше её национального дохода, т.е. $p_i \geq x_i$. Но $p_i > x_i$ - невозможный случай, т.к. все страны не могут одновременно получать прибыль, поэтому условие $p_i \geq x_i$ примет вид $p_i = x_i$.

Введем вектор национальных доходов страны $\vec{x} = (x_1; x_2; ...; x_n)$, получим матричное уравнение

$A \cdot X = X$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$.

Т.е. задача свелась к отысканию собственного вектора матрицы А, отвечающего собственному значению λ =1.

<u>Пример:</u> Структурная матрица торговли трех стран S_1, S_2, S_3 имеет вид $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$.

Найти национальные доходы для сбалансированной торговли.

Решение: Найдем собственный вектор $\vec{x}$, соответствующий собственному значению λ =1.

$(A - E)X = 0 \qquad \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = 1{,}5c \\ x_2 = 2c \\ x_3 = c \end{cases}$ - метод Гаусса. Т.е. $\vec{x} = (1{,}5c; 2c; c)$

Таким образом, сбалансированность торговли трех стран достигается при векторе национальных доходов $\vec{x} = (1{,}5c; 2c; c)$, т.е. при соотношении национальных доходов стран $\frac{3}{2} : 2 : 1$ или $3 : 4 : 2$.

3. Квадратичные формы, их матрицы в данном базисе. Приведение квадратичной формы к нормальному виду методом Лагранжа. Приведение квадратичной формы к каноническому виду при помощи ортогонального преобразования. Закон инерции квадратичных форм. Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы

, Квадратичная форма — функция на векторном пространстве задаваемая однородным квадратным многочленом от координат.

Пусть L есть векторное пространство над полем K и $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$— базис в L.

Функция Q из L в K называется квадратичной формой если её можно представить в виде

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

где $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ а a_{ij} -элементы поля K.

Матрицу (a_{ij}) называют матрицей квадратичной формы в данном базисе.

В случае если характеристика поля K не равна 2, можно считать, что матрица квадратичной формы симметрична, то есть $a_{ij} = a_{ji}$.

Нормальным видом квадратичной формы называется такой канонический вид, в котором коэффициенты при квадратах неизвестных (не считая нулевых) равны ± 1.

Метод Лагранжа — метод приведения квадратичной формы к каноническому виду, указанный в 1759 году Лагранжем.

Данный метод состоит в последовательном выделении в квадратичной форме полных квадратов. Пусть $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ есть данная квадратичная форма. Возможны два случая:

1. хотя бы один из коэффициентов a_{ii} при квадратах отличен от нуля. Не нарушая общности, будем считать $a_{11} \neq 0$ (этого всегда можно добиться соответствующей перенумерацией переменных);
2. все коэффициенты $a_{ii} = 0, i = 1, 2, ..., n$, но есть коэффициент $a_{ij}, i \neq j$, отличный от нуля (для определённости пусть будет $a_{12} \neq 0$).

В первом случае преобразуем квадратичную форму следующим образом:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = (a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + ... + 2a_{1n}x_1x_n) + f_1(x_2, x_3, ..., x_n) =$$
$$= \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n)^2 - \frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n)^2 + f_1(x_2, x_3, ..., x_n) == \frac{1}{a_{11}}y_1^2 + f_2(x_2, x_3, ..., x_n)$$

, где $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n$, а через $f_2(x_2, x_3, ..., x_n)$ обозначены все остальные слагаемые.

$f_2(x_2, ..., x_n)$ представляет собой квадратичную форму от n-1 переменных $x_2, x_3, ..., x_n$. С ней поступают аналогичным образом и так далее.

Заметим, что $y_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1}$.

Второй случай заменой переменных $x_1 = y_1 + y_2, x_2 = y_1 - y_2, x_3 = y_3, ..., x_n = y_n$ сводится к первому.

Квадратичная форма называется канонической (имеет канонический вид), если коэффициенты $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$, то есть, если матрица квадратичной формы диагональная и следовательно

$$f(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2.,$$

где не все коэффициенты a_{ii} равны нулю.

Существует ортогональное преобразование n-мерного евклидова пространства, приводящее квадратичную форму к каноническому виду.

Алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду состоит в следующем:

-находим собственные значения матрицы квадратичной формы и записываем её канонический вид в виде суммы квадратов, коэффициентами при которых являются собственные значения матрицы;

-если нужно указать вид преобразования, то находим собственные векторы матрицы, нормируем их, и записываем матрицу перехода от исходного ортонормированного базиса к базису, составленному из найденных собственных векторов.

Закон инерции квадратичных форм. Приводя квадратичную форму к сумме квадратов: $A(\bar{x},\bar{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a'_i\,(x'_i)^2,$ вобще говоря, будем получать различные коэффициенты при квадратах.

Однако, справедлива следующая теорема, которая носит название "закон инерции квадратичных форм".

Теорема. Если квадратичная форма $A(\bar{x},\bar{x})$ приводится к сумме квадратов в двух различных базисах, то число членов с положительными коэффициентами и число членов с отрицательными коэффициентами в обоих случаях одни и те же.

Теорема (критерий Сильвестра). Для того чтобы квадратичная форма $f(\vec{x})$ была положительно определённой, необходимо и достаточно чтобы все угловые миноры матрицы квадратичной формы были положительны,то есть, чтобы

$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ..., \Delta_n > 0.$

Здесь $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ -угловые миноры матрицы квадратичной формы.

Следствие. Для того чтобы квадратичная форма $f(\vec{x})$ была отрицательно определённой, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров матрицы квадратичной формы чередовались следующим образом: $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, ..., (-1)^n \Delta_n > 0.$

1.11. Лекция № 11 (2 часа)
Тема: «Прямая и плоскость»

1.11.1. Вопросы лекции:
1. Прямая и гиперплоскость в *n*-мерном пространстве. Угол между гиперплоскостями. Расстояние от точки до гиперплоскости.
2. Прямая на плоскости и в пространстве.
3. Плоскость в трехмерном пространстве.

1.11.2. Краткое содержание вопросов
1. Прямая и гиперплоскость в *n*-мерном пространстве. Угол между гиперплоскостями. Расстояние от точки до гиперплоскости.

Пусть в n-мерном пространстве дана точка А ($a_1, a_2, \dots, a_n$) и ненулевой вектор u_0=($a_1, a_2, \dots, a_n$). Этими данными определено множество π^t, состоящее из всех точек М, являющихся концевыми точками всевозможных векторов вида t_{u0}, где t- произвольное число из поля к, приложенных к точке А. Так, определенное множество π^t называется *прямой*, проходящей через точку А в пространстве R^n и имеющей (или несущей на себе) направляющий вектор u_0.

В N-мерном пространстве существуют подпространства всех размерностей k < N, часто называемые *гиперплоскостями* или k-плоскостями, где k — размерность подпространства. Термин «гиперплоскость» используется также в узком смысле для обозначения подпространства размерности N–1 (коразмерности 1). Одномерное подпространство по аналогии с обычной геометрией называется прямой, двумерное подпространство — плоскостью. Название «плоскость» подчёркивает тот факт, что объект находится внутри пространства большей размерности, то есть является подпространством. Например, в 4-пространстве обычное трёхмерное пространство является 3-плоскостью.

2. Прямая на плоскости и в пространстве.

Как известно, любая точка на плоскости определяется двумя координатами в какой- либо системе координат. Системы координат могут быть различными в зависимости от выбора базиса и начала координат.

Определение. Уравнением линии называется соотношение y = f(x) между координатами точек, составляющих эту линию.

Отметим, что уравнение линии может быть выражено параметрическим способом, то есть каждая координата каждой точки выражается через некоторый независимый параметр *t*.

Характерный пример – траектория движущейся точки. В этом случае роль параметра играет время.

Определение. Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка

$$Ax + By + C = 0,$$

причем постоянные А, В не равны нулю одновременно, т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$. Это уравнение первого порядка называют **общим уравнением прямой.**

В зависимости от значений постоянных А,В и С возможны следующие частные случаи:

- $C = 0, A \neq 0, B \neq 0$ – прямая проходит через начало координат
- $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$ { $By + C = 0$}- прямая параллельна оси Ох
- $B = 0, A \neq 0, C \neq 0$ { $Ax + C = 0$} – прямая параллельна оси Оу
- $B = C = 0, A \neq 0$ – прямая совпадает с осью Оу
- $A = C = 0, B \neq 0$ – прямая совпадает с осью Ох

Уравнение прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

Определение. В декартовой прямоугольной системе координат вектор с компонентами (А, В) перпендикулярен прямой , заданной уравнением $Ax + By + C = 0$.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точку А(1, 2) перпендикулярно вектору $\vec{n}$(3, -1).

Составим при A = 3 и B = -1 уравнение прямой: $3x - y + C = 0$. Для нахождения коэффициента С подставим в полученное выражение координаты заданной точки А.
Получаем: $3 - 2 + C = 0$, следовательно $C = -1$.
Итого: искомое уравнение: $3x - y - 1 = 0$.

Пусть в пространстве заданы две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Если какой- либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель.

На плоскости записанное выше уравнение прямой упрощается:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

если $x_1 \neq x_2$ и $x = x_1$, если $x_1 = x_2$.

Дробь $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ = k называется **угловым коэффициентом** прямой.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точки A(1, 2) и B(3, 4).
Применяя записанную выше формулу, получаем:

$$y - 2 = \frac{4 - 2}{3 - 1}(x - 1)$$
$$y - 2 = x - 1$$
$$x - y + 1 = 0$$

Если общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ привести к виду: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$

и обозначить $-\frac{A}{B} = k;\ \ -\frac{C}{B} = b;\ \ т.е.\ \ y = kx + b$, то полученное уравнение называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом k**.

Определение. Каждый ненулевой вектор $\vec{a}(\alpha_1, \alpha_2)$, компоненты которого удовлетворяют условию $A\alpha_1 + B\alpha_2 = 0$ называется направляющим вектором прямой
$Ax + By + C = 0$.

Пример. Найти уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{a}(1, -1)$ и проходящей через точку A(1, 2).

Уравнение искомой прямой будем искать в виде: $Ax + By + C = 0$. В соответствии с определением, коэффициенты должны удовлетворять условиям:

$$1\cdot A + (-1)\cdot B = 0, \text{ т.е. } A = B.$$

Тогда уравнение прямой имеет вид: $Ax + Ay + C = 0$, или $x + y + C/A = 0$.

при $x = 1$, $y = 2$ получаем $C/A = -3$, т.е. искомое уравнение: $x + y - 3 = 0$

Если в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ $C \neq 0$, то, разделив на $-C$, получим: $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$ или $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где $a = -\frac{C}{A};\ \ b = -\frac{C}{B}$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент a является координатой точки пересечения прямой с осью Ох, а b – координатой точки пересечения прямой с осью Оу.

Пример. Задано общее уравнение прямой $x - y + 1 = 0$. Найти уравнение этой прямой в отрезках.

$C = 1$, $-\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1$, $a = -1$, $b = 1$.

Для самостоятельного решения: Составить уравнения прямых, проходящих через точку M(-3, -4) и параллельных осям координат. Ответ: { $x + 3 = 0$; $y + 4 = 0$}.

Определение. Если заданы две прямые $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, то острый угол между этими прямыми будет определяться как $tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|$.

Две прямые параллельны, если $k_1 = k_2$.
Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = -1/k_2$.

Теорема. *Прямые Ax + By + C = 0 и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ параллельны, когда пропорциональны коэффициенты $A_1 = \lambda A$, $B_1 = \lambda B$. Если еще и $C_1 = \lambda C$, то прямые совпадают.*

Координаты точки пересечения двух прямых находятся как решение системы двух уравнений.

Определение. Прямая, проходящая через точку $M_1(x_1, y_1)$ и перпендикулярная к прямой y = kx + b представляется уравнением: $y - y_1 = -\frac{1}{k}(x - x_1)$

Теорема. *Если задана точка $M(x_0, y_0)$, то расстояние до прямой Ax + By + C =0 определяется как* $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Общие уравнения прямой в пространстве. Уравнение прямой может быть рассмотрено как уравнение линии пересечения двух плоскостей.

Как было рассмотрено выше, плоскость в векторной форме может быть задана уравнением:

$$\vec{N} \cdot \vec{r} + D = 0, \text{ где}$$

$\vec{N}$ - нормаль плоскости; $\vec{r}$ - радиус- вектор произвольной точки плоскости.

Пусть в пространстве заданы две плоскости: $\overrightarrow{N_1} \cdot \vec{r} + D_1 = 0$ и $\overrightarrow{N_2} \cdot \vec{r} + D_2 = 0$, векторы нормали имеют координаты: $\overrightarrow{N_1}(A_1, B_1, C_1)$, $\overrightarrow{N_2}(A_2, B_2, C_2)$; $\vec{r}(x, y, z)$.

Тогда общие уравнения прямой в векторной форме: $\begin{cases} \overrightarrow{N_1} \cdot \vec{r} + D_1 = 0 \\ \overrightarrow{N_2} \cdot \vec{r} + D_2 = 0 \end{cases}$

Общие уравнения прямой в координатной форме: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

Практическая задача часто состоит в приведении уравнений прямых в общем виде к каноническому виду.

Для этого надо найти произвольную точку прямой и числа m, n, p.

При этом направляющий вектор прямой может быть найден как векторное произведение векторов нормали к заданным плоскостям.

$$\vec{S} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \vec{i}m + \vec{j}n + \vec{k}p.$$

Пример. Найти каноническое уравнение, если прямая задана в виде:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ 5x + 4y - z - 7 = 0 \end{cases}$$

Для нахождения произвольной точки прямой, примем ее координату x = 0, а затем подставим это значение в заданную систему уравнений.

$$\begin{cases} y = 3z - 1 \\ 4y - z - 7 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3z - 1 \\ 12z - 4 - z - 7 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3z - 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \end{cases}, \text{ т.е. } A(0, 2, 1).$$

Находим компоненты направляющего вектора прямой.

$$m = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -11; \quad n = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 17; \quad p = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 13.$$

Тогда канонические уравнения прямой:

$$-\frac{x}{11} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{13}.$$

Пример. Привести к каноническому виду уравнение прямой, заданное в виде:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 16z - 7 = 0 \\ 3x + y - 17z = 0 \end{cases}$$

Для нахождения произвольной точки прямой, являющейся линией пересечения указанных выше плоскостей, примем z = 0. Тогда:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 16z - 7 = 0 \\ 3x + y - 17z = 0 \end{cases}; \quad y = -3x;$$

$$2x - 9x - 7 = 0;$$

$$x = -1; y = 3;$$

Получаем: A(-1; 3; 0).

Направляющий вектор прямой: $\vec{S} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -16 \\ 3 & 1 & -17 \end{vmatrix} = -35\vec{i} - 14\vec{j} - 7\vec{k}$.

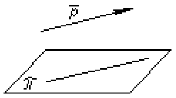
Итого: $\dfrac{x+1}{-35} = \dfrac{y-3}{-14} = \dfrac{z}{-7}$; $\qquad \dfrac{x+1}{5} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z}{1}$;

3. Плоскость в трехмерном пространстве.

ТЕОРЕМА: Уравнение $Ax + By + Cz = 0$, где A, B и C – некоторые действительные числа (не обращаются одновременно в 0), задает в пространстве поверхность.

Обратное утверждение тоже верно: Любую поверхность в пространстве можно задать уравнением вида $Ax + By + Cz = 0$.

Направляющим вектором $\vec{p}$ плоскости называется вектор, лежащий в этой плоскости или в плоскости, параллельной ей.



Замечание: Можно доказать, что направляющий вектор имеет координаты $\boxed{\vec{p} = (-B; A; 0)}$

ТЕОРЕМА: Для того, чтобы вектор $\vec{p} = (\alpha; \beta; \gamma)$ был направляющим для плоскости $Ax + By + Cz = 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$

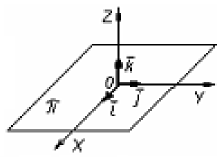
Расположение плоскости	Условие	Общее уравнение плоскости
1) Проходит через начало координат.	$D = 0$	$Ax + By + Cz = 0$
2) $\pi \parallel OX$	$A = 0$	$By + Cz + D = 0$
3) $\pi \parallel OY$	$B = 0$	$Ax + Cz + D = 0$
4) $\pi \parallel OZ$	$C = 0$	$Ax + By + D = 0$
5) π проходит через ось OX	$A = 0; \quad D = 0$	$By + Cz = 0$
6) π проходит через ось OУ	$B = 0; \quad D = 0$	$Ax + Cz = 0$
7) π проходит через ось OZ	$C = 0; \quad D = 0$	$Ax + By = 0$
8) $\pi \parallel$ плоскости XOУ	$A = 0; \quad B = 0$	$Cz + D = 0 \qquad (z = h)$
9) $\pi \parallel$ плоскости УOZ	$B = 0; \quad C = 0$	$Ax + D = 0 \qquad (x = h)$
10) $\pi \parallel$ плоскости XOZ	$A = 0; \quad C = 0$	$By + D = 0 \qquad (y = h)$
11) π совпадает с плоскостью XOУ	$A = 0; \quad B = 0; \quad D = 0$	$Cz = 0, \qquad z = 0$
12) π совпадает с плоскостью УOZ	$B = 0; \quad C = 0; \quad D = 0$	$Ax = 0, \qquad x = 0$
13) π совпадает с плоскостью XOZ	$A = 0; \quad C = 0; \quad D = 0$	$By = 0, \qquad y = 0$

1) Точка $O(0;0) \in \pi \Rightarrow \quad A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow \quad D = 0$

2) $\pi \parallel OX \Rightarrow \quad \vec{i} = (1;0;0) \parallel \pi \quad \Rightarrow \quad A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 = 0 \Rightarrow \quad A = 0$

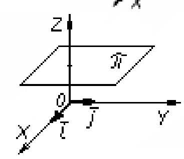
5) π проходит через ось OX $\Rightarrow \quad O(0;0;0) \in \pi \Rightarrow \quad D = 0$

$\vec{i} = (1;0;0) \parallel \pi \quad \Rightarrow \quad A = 0$



8) $\pi \parallel$ плоскости XOУ $\Rightarrow \quad \vec{i} = (1;0;0) \parallel \pi \quad \Rightarrow \quad A = 0$

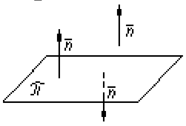
$\vec{j} = (0;1;0) \parallel \pi \quad \Rightarrow \quad B = 0$



9) $\pi \equiv XOY \quad \Rightarrow \quad \vec{i} = (1;0;0) \parallel \pi \quad \Rightarrow \quad A = 0, \qquad \vec{j} = (0;1;0) \parallel \pi \quad \Rightarrow \quad B = 0, \qquad O(0;0) \in \pi \Rightarrow \quad D = 0$

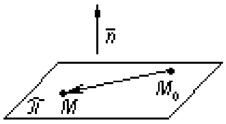
Вектор $\vec{n}$ называется <u>*нормальным вектором*</u> плоскости, если он перпендикулярен этой плоскости.

Очевидно, что каждая плоскость имеет бесчисленное множество нормальных векторов, параллельных между собой.



ТЕОРЕМА: Если плоскость π задана общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, то вектор $\boxed{\vec{n}=(A;B;C)}$ является нормальным вектором плоскости π.

Рассмотрим ПДСК и в ней точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *и* $\vec{n}=(A;B;C)$. Составим уравнение плоскости, проходящей через данную точку с данным нормальным вектором.



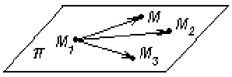
Возьмем точку $M(x;y;z)\in\pi$. Рассмотрим вектор $\overline{M_0M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$

Т.к. $\overline{M_0M}\in\pi \Rightarrow \vec{n}\perp\overline{M_0M} \Rightarrow \overline{M_0M}\cdot\vec{n}=0$

Запишем в координатной форме: $\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$

Составим уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$,

Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x;y;z)$. Построим векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$



Тогда их координаты $\overrightarrow{M_1M}(x-x_1;y-y_1;z-z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_3}(x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1)$

Воспользуемся признаком компланарности векторов, получим:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0}$$ - уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.

Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей

- если $\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Rightarrow$ их координаты пропорциональны.

  Если $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$ *и* $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$, то $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$

- если $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Rightarrow \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0 \Rightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

Расстояние от точки до плоскости

Расстояние от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ определяется по формуле:

$$\boxed{d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

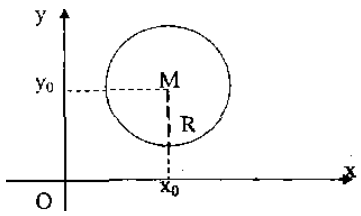
1.12. Лекция № 12 (2 часа)
Тема: «Кривые второго порядка»

1.12.1. Вопросы лекции:
1. Классификация кривых второго порядка. Эллипс, гипербола и парабола, их свойства и канонические уравнения.
2. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду.

1.12.2. **Краткое содержание вопросов**
1. Классификация кривых второго порядка. Эллипс, гипербола и парабола, их свойства и канонические уравнения.

Кривые второго порядка - это линии на плоскости, координаты точек которых связаны уравнениями второй степени относительно x и y в декартовой системе координат. Рассмотрим следующие виды кривых второго порядка: окружность, эллипс, гипербола и парабола.

Окружность - это совокупность точек на плоскости, равноудаленных от одной фиксированной точки (центра). Расстояние от точки, лежащей на окружности, до центра называется радиусом окружности.

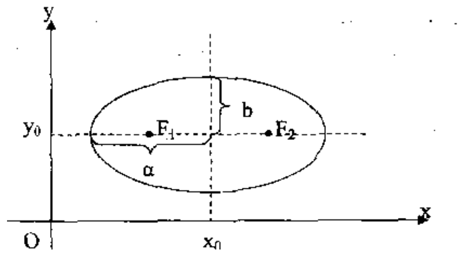


Каноническое уравнение окружности имеет вид:
$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2,\ \textit{где}\ \ M(x_0,y_0)$-центр окружности, R –радиус.

3.2. Эллипс.

Эллипсом называется геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина, большая, чем расстояние между фокусами.

Постоянную сумму расстояний произвольной точки эллипса до фокусов примято обозначать через 2a. Фокусы эллипса обозначают буквами F_1 *и* F_2, расстояние между ними - через 2c. По определению эллипса 2a > 2c или a > c.



Данная фигура обладает двумя осями симметрии и центром симметрии.

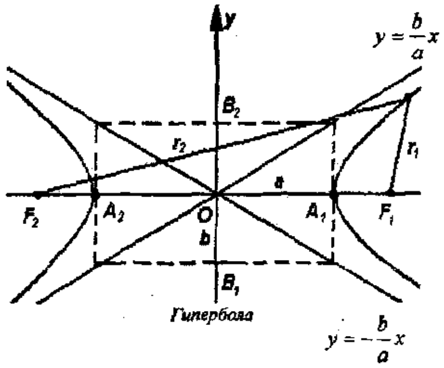
Если фокусы (F_1 *и* F_2) расположенные на прямой, параллельной оси OX, то каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Здесь точка $A(x_0;y_0)$- центр эллипса, a *и* b- большая и малая полуоси эллипса. Фокусы эллипса F_1 *и* F_2 расположены в точках, удаленных на расстоянии $c=\sqrt{a^2-b^2}$ от центра эллипса. Отношение $\frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса и обозначается ε .

3.3. Гипербола.

Гиперболой называется геометрическое место точек, для которых разность расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина; указанная разность берется по абсолютному значению и обозначается обычно через 2a. Фокусы гиперболы обозначают буквами F_1 и F_2 расстояние между ними - через 2с. По определению гиперболы 2а < 2с или а < с.



Гипербола

Данная фигура также обладает двумя осями симметрии и центром. Если фокусы F_1 и F_2 расположены на оси Ох, то ее каноническое уравнение имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Здесь точка $A(x_0;y_0)$ - центр гиперболы, a и b - действительная и мнимая полуось.

Прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы.

3.4. Парабола.

Параболой называется геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, называемой директрисой.

Фокус параболы обозначается буквой F, расстояние от фокуса до директрисы - буквой р. Число р называется параметром параболы.

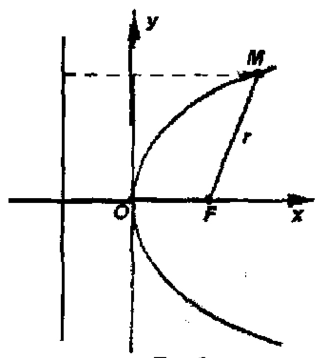
Фигура обладает осью симметрии. Если директриса параболы перпендикулярна Ох (Ох - ось симметрии), то уравнение параболы имеет вид:

$(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$, где р - расстояние от фокуса до директрисы, точка (x_0; y_0) - вершина параболы.

Уравнение директрисы: $x=x_0-\frac{p}{2}$.

Фокус в точке $F\left(x_0+\frac{p}{2};y_0\right)$.

Если Оу - ось симметрии, то уравнение параболы имеет вид: $(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$. Уравнение директрисы: $y=y_0-\frac{p}{2}$. Фокус в точке $F\left(x_0;y_0+\frac{p}{2}\right)$.



Парабола

2. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду.

Рассмотрим некоторое линейное преобразование А с матрицей $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Это симметрическое преобразование можно записать в виде:

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$
$$y_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2$$

где y_1 и y_2 – координаты вектора $A\overline{x}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

Очевидно, что квадратичная форма может быть записана в виде

$$\Phi(x_1, x_2) = x_1y_1 + x_2y_2.$$

Как видно, геометрический смысл числового значения квадратичной формы Ф в точке с координатами x_1 и x_2 – скалярное произведение $\overline{x}\cdot A\overline{x} = \Phi$.

Если взять другой ортонормированный базис на плоскости, то в нем квадратичная форма Ф будет выглядеть иначе, хотя ее числовое значение в каждой геометрической точке и не изменится. Если найти такой базис, в котором квадратичная форма не будет содержать координат в первой степени, а только координаты в квадрате, то квадратичную форму можно будет привести к каноническому виду.

Если в качестве базиса взять совокупность собственных векторов линейного преобразования, то в этом базисе матрица линейного преобразования имеет вид:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

При переходе к новому базису от переменных x_1 и x_2 мы переходим к переменным x_1' и x_2'. Тогда:

$$\Phi = x_1'y_1' + x_2'y_2'$$
$$y_1' = a_{11}'x_1' + a_{12}'x_2'$$
$$y_2' = a_{12}'x_1' + a_{22}'x_2'$$

Тогда $y_1' = \lambda_1 x_1', \qquad y_2' = \lambda_2 x_2'$.

Выражение $\boxed{\Phi(x_1', x_2') = \lambda_1(x_1')^2 + \lambda_2(x_2')^2}$ называется **каноническим видом** квадратичной формы. Аналогично можно привести к каноническому виду квадратичную форму с большим числом переменных.

Теория квадратичных форм используется для приведения к каноническому виду уравнений кривых и поверхностей второго порядка.

<u>Пример.</u> Привести к каноническому виду уравнение второго порядка:

$$17x^2 + 12xy + 8y^2 - 20 = 0.$$

Коэффициенты $a_{11} = 17$, $a_{12} = 6$, $a_{22} = 8$. $\quad A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 17-\lambda & 6 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$(17 - \lambda)(8 - \lambda) - 36 = 0$$
$$136 - 8\lambda - 17\lambda + \lambda^2 - 36 = 0$$
$$\lambda^2 - 25\lambda + 100 = 0$$
$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 20.$$

Итого: $5(x')^2 + 20(y')^2 - 20 = 0;\qquad \dfrac{x'^2}{4} + \dfrac{y'^2}{1} = 1$ - каноническое уравнение эллипса.

<u>Пример.</u> Используя теорию квадратичных форм, привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка. Схематично изобразить график.

$$5x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 6 = 0$$

<u>Решение:</u> Составим характеристическое уравнение квадратичной формы $5x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2$: при $a_{11} = 5, a_{12} = \sqrt{3}, a_{22} = 3$.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3-\lambda \end{vmatrix} = 15 - 3\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 3 = \lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0$$

Решив это уравнение, получим $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 6$.
Найдем координаты собственных векторов:

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda_1)m_1 + a_{12}n_1 = 0\\ a_{12}m_1 + (a_{22}-\lambda_1)n_1 = 0\end{cases} \quad \begin{cases}3m_1 + \sqrt{3}n_1 = 0\\ \sqrt{3}m_1 + n_1 = 0\end{cases}$$ полагая $m_1 = 1$, получим $n_1 = -\sqrt{3}$

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda_2)m_2 + a_{12}n_2 = 0\\ a_{12}m_2 + (a_{22}-\lambda_2)n_2 = 0\end{cases} \quad \begin{cases}-m_2 + \sqrt{3}n_2 = 0\\ \sqrt{3}m_2 - 3n_2 = 0\end{cases}$$ полагая $m_2 = 1$, получим $n_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Собственные векторы: $\bar{u}_1(1; -\sqrt{3})$ $\quad \bar{u}_2(1; \frac{1}{\sqrt{3}})$

$$|\bar{u}_1| = \sqrt{1+3} = 2; \qquad |\bar{u}_2| = \sqrt{1+\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Находим координаты единичных векторов нового базиса.

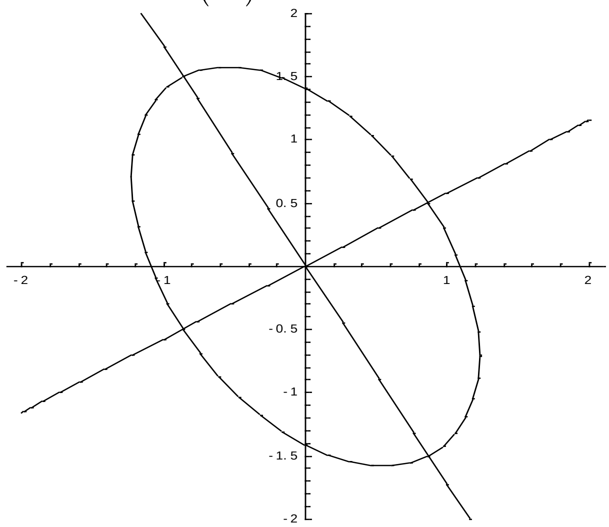
$$\bar{e}_1' = \left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \bar{e}_2' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

Имеем следующее уравнение линии в новой системе координат:

$$2(x')^2 + 6(y')^2 = 6$$

Каноническое уравнение линии в новой системе координат будет иметь вид:

$$\frac{(x')^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2} + \frac{(y')^2}{1^2} = 1$$



Пример. Используя теорию квадратичных форм, привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка. Схематично изобразить график.

$$5x^2 + 4\sqrt{6}xy + 7y^2 - 22 = 0$$

Решение: Составим характеристическое уравнение квадратичной формы $5x^2 + 4\sqrt{6}xy + 7y^2$: при $a_{11} = 5, a_{12} = 2\sqrt{6}, a_{22} = 7$.

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}5-\lambda & 2\sqrt{6}\\ 2\sqrt{6} & 7-\lambda\end{vmatrix} = 35 - 7\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 24 = \lambda^2 - 12\lambda + 11 = 0$$

Решив это уравнение, получим $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 11$.
Найдем координаты собственных векторов:

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda_1)m_1 + a_{12}n_1 = 0\\ a_{12}m_1 + (a_{22}-\lambda_1)n_1 = 0\end{cases} \quad \begin{cases}2m_1 + \sqrt{6}n_1 = 0\\ \sqrt{6}m_1 + 3n_1 = 0\end{cases}$$ полагая $m_1 = 1$, получим $n_1 = -\frac{2}{\sqrt{6}}$

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda_2)m_2+a_{12}n_2=0\\ a_{12}m_2+(a_{22}-\lambda_2)n_2=0\end{cases}\quad \begin{cases}-3m_2+\sqrt{6}n_2=0\\ \sqrt{6}m_2-2n_2=0\end{cases}$$ полагая $m_2 = 1$, получим $n_2 = \dfrac{3}{\sqrt{6}}$

Собственные векторы: $\bar{u}_1(1;-\sqrt{\frac{2}{3}})$ $\quad \bar{u}_2(1;\sqrt{\frac{3}{2}})$

$$|\bar{u}_1|=\sqrt{1+\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{5}{3}}; \qquad |\bar{u}_2|=\sqrt{1+\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{5}{2}}$$

Находим координаты единичных векторов нового базиса.

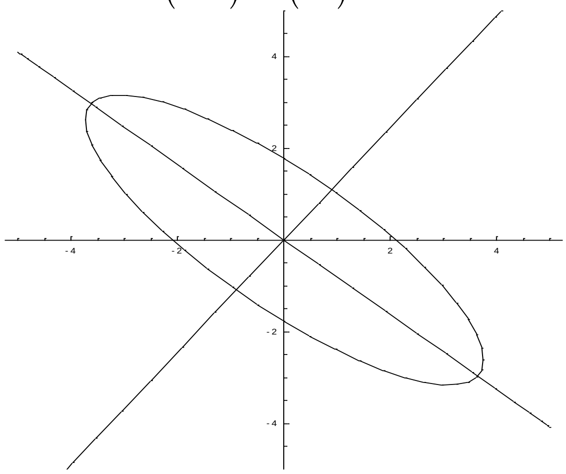
$$\bar{e}'_1=\left(\sqrt{\frac{3}{5}};-\sqrt{\frac{2}{5}}\right) \qquad \bar{e}'_2=\left(\sqrt{\frac{2}{5}};\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

Имеем следующее уравнение линии в новой системе координат:

$$(x')^2+11(y')^2=22$$

Каноническое уравнение линии в новой системе координат будет иметь вид:

$$\frac{(x')^2}{\left(\sqrt{22}\right)^2}+\frac{(y')^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=1$$



Пример. Используя теорию квадратичных форм, привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка. Схематично изобразить график.

$$4xy + 3y^2 + 16 = 0$$

Коэффициенты: $a_{11} = 0$; $\quad a_{12} = 2$; $\quad a_{22} = 3$.

Характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix}0-\lambda & 2\\ 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=-3\lambda+\lambda^2-4=0$

Корни: $\lambda_1 = -1$, $\quad \lambda_2 = 4$.

Для $\lambda_1 = -1$

$$\begin{cases}1\cdot m_1+2n_1=0\\ 2m_1+4n_1=0\end{cases}$$

$m_1 = 1$; $\quad n_1 = -0{,}5$;

$\overrightarrow{u_1} = (1; -0{,}5)$

$$\left|\overrightarrow{u_1}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\overrightarrow{e'_1}=\frac{\overrightarrow{u_1}}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

Для $\lambda_2 = 4$

$$\begin{cases}-4m_2+2n_2=0\\ 2m_2-n_2=0\end{cases}$$

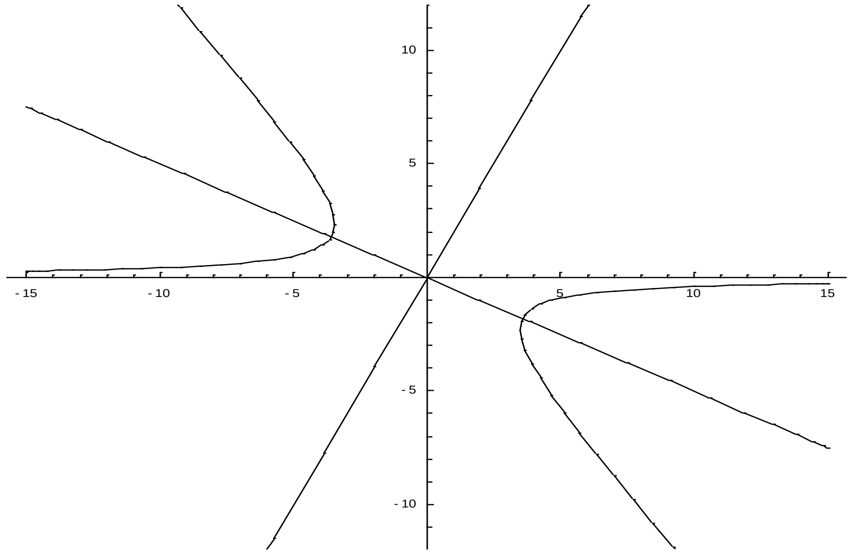
$m_2 = 1$; $\quad n_2 = 2$;

$\overrightarrow{u_2} = (1; 2)$

$$\left|\overrightarrow{u_2}\right|=\sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{e'_2}=\frac{\overrightarrow{u_2}}{\left|\overrightarrow{u_2}\right|}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Получаем: $-x'^2+4y'^2=-16;$ $\qquad \dfrac{x'^2}{16}-\dfrac{y'^2}{4}=1$ -каноническое уравнение гиперболы.


10
5
- 5
- 10
- 15
- 10
- 5
5
10
15

1.13. Лекция № 13 (2 часа)
Тема: «Поверхности второго порядка»

1.13.1. Вопросы лекции:
1. Классификация поверхностей второго порядка. Эллипсоиды, параболоиды и гиперболоиды, их канонические уравнения.
2. Выпуклые множества в пространстве R^n. Полупространства, выпуклые многогранные области. Системы линейных неравенств и их геометрический смысл.

1.13.2. **Краткое содержание вопросов**
1. Классификация поверхностей второго порядка. Эллипсоиды, параболоиды и гиперболоиды, их канонические уравнения.

Поверхность в пространстве, как правило, можно рассматривать как геометрическое место точек, удовлетворяющих какому-либо условию.

Прямоугольная система координат $Oxyz$ в пространстве позволяет установить взаимно однозначное соответствие между точками пространства и тройками чисел x, y и z - их координатами. Свойство, общее всем точкам поверхности, можно записать в виде уравнения, связывающего координаты всех точек поверхности.

Уравнением данной поверхности в прямоугольной системе координат $Oxyz$ называется такое уравнение $F(x,y,z)=0$ с тремя переменными x, y и z, которому удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на поверхности, и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на этой поверхности. Переменные x, y и z в уравнении поверхности называются **текущими координатами** точек поверхности.

Поверхности второго порядка – это поверхности, уравнения которых в прямоугольной системе координат являются уравнениями второго порядка.

Цилиндрическими поверхностями называются поверхности, образованные линиями, параллельными какой- либо фиксированной прямой.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - эллиптический цилиндр

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ - гиперболический цилиндр.

$x^2 = 2py$ – параболический цилиндр.

Поверхность, описываемая некоторой линией, вращающейся вокруг неподвижной прямой *d*, называется поверхностью вращения с осью вращения *d*.

Если уравнение поверхности в прямоугольной системе координат имеет вид: $F(x^2 + y^2, z) = 0$, то эта поверхность – поверхность вращения с осью вращения Oz. Аналогично: $F(x^2 + z^2, y) = 0$ – поверхность вращения с осью вращения Oy, $F(z^2 + y^2, x) = 0$ – поверхность вращения с осью вращения Ox.

$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ - эллипсоид вращения

$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ - однополостный гиперболоид вращения

$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ - двуполостный гиперболоид вращения

$\frac{x^2+y^2}{p}=2z$ - параболоид вращения

Однако, перечисленные выше поверхности являются всего лишь частными случаями поверхностей второго порядка общего вида, некоторые типы которых рассмотрены ниже:

Сфера**:** $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

Трехосный эллипсоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Однополостный гиперболоид: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

Двуполостный гиперболоид: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$

Эллиптический параболоид: $\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z, \quad где\ p>0, q>0$

Гиперболический параболоид: $\dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}=2z$

Конус второго порядка: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$

2. Выпуклые множества в пространстве R^n. Полупространства, выпуклые многогранные области. Системы линейных неравенств и их геометрический смысл.

Множество R∈ R^n называется выпуклым, если:

$$\alpha x+(1-\alpha)y\in D \quad \forall x,y\in D; \alpha\in[0,1],$$

Т.е. вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и весь отрезок, соединяющий эти точки.

К простейшим свойствам выпуклых множеств относятся:

1. Если D_i, i∈I, - некоторые выпуклые множества из R^n, то их пересечение $D=\bigcap_{i\in I}D_i$, если оно непустое, также является выпуклым множеством.
2. Пусть D_i, i∈ $\overline{1,m}$ - некоторые выпуклые множества из R^n, а a_i, i∈ $\overline{1,m}$ – любые числа. Тогда множество $D=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i D_i=\{x\in\mathbb{R}^n: x=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x^i,\ x^i\in D_i\}$ является выпуклым.
3. Если D – выпуклое множество, $\{x^i\}_{i=\overline{1,m}}\subset D,\ \alpha_i\ge 0,\ \sum_{i=1}^{m}\alpha_i=1,$, то $\alpha_1 x^1+\ldots+\alpha_m x^m\in D.$

Полупространство, ограниченное гиперплоскостью α — это геометрическая фигура в пространстве, для которой выполняется следующее:

1. Эта фигура включает в себя плоскость α, но не сводится к ней.
2. Любой отрезок, ограниченный произвольными точками этой фигуры A и B, не принадлежащими α, не имеет пересечений с плоскостью α.
3. Любой отрезок, ограниченный произвольными точками этой фигуры A и B, где A принадлежит α, а B — нет, имеет пересечение с плоскостью α.

Выпуклая область на плоскости — часть плоскости, обладающая тем свойством, что отрезок, соединяющий две ее любые точки, содержится в ней целиком . Через каждую точку ее границы можно провести опорную прямую, которая не рассекает эту область.

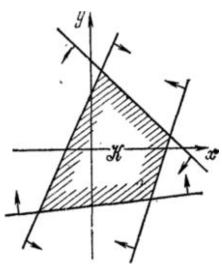
Эти понятия переносятся с двумерного пространства (плоскости) на многомерное. Напр., роль опорной прямой по отношению к n-мерному выпуклому многограннику в нем играет опорная гиперплоскость.

К выпуклым множествам относятся все n-мерное пространство R_n, или множество точек (x_1...x_n) в n-мерном пространстве, удовлетворяющих условию: $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, или r-окрестность любой n-мерной точки и др. Пересечение выпуклых множеств является выпуклым множеством.

Выпуклые многогранники и выпуклые многогранные конусы принадлежат к числу наиболее распространенных понятий математической экономики. В линейном и выпуклом программировании используются обязательно выпуклые области изменения переменных (допустимые множества по теоретико-множественной терминологии, многогранники — по геометрической) и выпуклые целевые функции.

Системы линейных неравенств и их геометрический смысл: Пусть дана система неравенств с двумя неизвестными x и y.

$$a_1x+b_1y+c_1\ge 0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2\ge 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_mx+b_my+c_m\ge 0.$$



Первое неравенство системы определяет на координатной плоскости xOy некоторую полуплоскость П1, второе – полуплоскость П2 и т.д. Если пара чисел x, y удовлетворяет всем неравенствам системы, то соответствующая точка M(x, y) принадлежит всем полуплоскостям П1,П2,...,Пm одновременно. Другими словами, точка M принадлежит пересечению (общей части) указанных полуплоскостей. Легко видеть, что пересечение конечного числа полуплоскостей есть некоторая многоугольная область.

Пример. Вдоль контура области изображены штрихи, идущие внутрь области. Они одновременно указывают, с какой стороны от данной прямой лежит соответствующая полуплоскость; то же самое указано и с помощью стрелок.

1.14. Лекция № 14 (2 часа)
Тема: «Продуктивность неотрицательных матриц»

1.14.1. Вопросы лекции:
1. Собственные значения и собственные векторы неотрицательных матриц.
2. Теорема Фробениуса-Перрона. Число и вектор Фробениуса, их свойства.
3. Продуктивность неотрицательных матриц.

1.14.2. **Краткое содержание вопросов**
1. Собственные значения и собственные векторы неотрицательных матриц.
Определение: Пусть L – заданное n- мерное линейное пространство. Ненулевой вектор $\bar{x} \in L$ называется **собственным вектором** линейного преобразования A, если существует такое число λ, что выполняется равенство: $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$.

При этом число λ называется **собственным значением (характеристическим числом)** линейного преобразования A, соответствующего вектору $\bar{x}$.

Определение: Если линейное преобразование A в некотором базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}$ имеет матрицу A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, то собственные значения линейного преобразования A можно найти как корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ уравнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Это уравнение называется **характеристическим уравнением,** а его левая часть- **характеристическим многочленом** линейного преобразования A.

Следует отметить, что характеристический многочлен линейного преобразования не зависит от выбора базиса.

Рассмотрим частный случай. Пусть A – некоторое линейное преобразование плоскости, матрица которого равна $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Тогда преобразование A может быть задано формулами:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}; \qquad \begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$ в некотором базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}$.

Если преобразование A имеет собственный вектор с собственным значением λ, то $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$.

$$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = \lambda x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

Т.к. собственный вектор $\bar{x}$ ненулевой, то x_1 и x_2 не равны нулю одновременно. Т.к. данная система однородна, то для того, чтобы она имела нетривиальное решение, определитель системы должен быть равен нулю. В противном случае по правилу Крамера система имеет единственное решение – нулевое, что невозможно.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

Полученное уравнение является **характеристическим уравнением линейного преобразования A**.

Таким образом, можно найти собственный вектор $\bar{x}$ (x_1, x_2) линейного преобразования A с собственным значением λ, где λ - корень характеристического уравнения, а x_1 и x_2 – корни системы уравнений при подстановке в нее значения λ.

Понятно, что если характеристическое уравнение не имеет действительных корней, то линейное преобразование A не имеет собственных векторов.

Следует отметить, что если $\bar{x}$ - собственный вектор преобразования A, то и любой вектор ему коллинеарный – тоже собственный с тем же самым собственным значением λ.

Действительно, $A(k\bar{x}) = kA\bar{x} = k\lambda\bar{x} = \lambda(k\bar{x})$. Если учесть, что векторы имеют одно начало, то эти векторы образуют так называемое **собственное направление** или **собственную прямую**.

Т.к. характеристическое уравнение может иметь два различных действительных корня λ_1 и λ_2, то в этом случае при подстановке их в систему уравнений получим бесконечное количество решений. (Т.к. уравнения линейно зависимы). Это множество решений определяет две **собственные прямые**.

Если характеристическое уравнение имеет два равных корня $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то либо имеется лишь одна собственная прямая, либо, если при подстановке в систему она превращается в систему вида: $\begin{cases} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \end{cases}$. Эта система удовлетворяет любым значениям x_1 и x_2. Тогда все векторы будут собственными, и такое преобразование называется **преобразованием подобия**.

Пример. Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования с матрицей А = $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Запишем линейное преобразование в виде: $\begin{matrix} x_1' = \lambda x_1 = 5x_1 + 4x_2 \\ x_2' = \lambda x_2 = 2x_1 + 3x_2 \end{matrix}$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 15 - 3\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 8 = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0;$$

Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 7$; $\lambda_2 = 1$;

Для корня $\lambda_1 = 7$: $\begin{cases} (5-7)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + (3-7)x_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$

Из системы получается зависимость: $x_1 - 2x_2 = 0$. Собственные векторы для первого корня характеристического уравнения имеют координаты: ***(t; 0,5t)*** где *t*- параметр.

Для корня $\lambda_2 = 1$: $\begin{cases} (5-1)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + (3-1)x_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$

Из системы получается зависимость: $x_1 + x_2 = 0$. Собственные векторы для второго корня характеристического уравнения имеют координаты: ***(t; -t)*** где *t*- параметр.

Полученные собственные векторы можно записать в виде:

$$\vec{u}_1 = t(\vec{e}_1 + 0{,}5\vec{e}_2); \quad \vec{u}_2 = t(\vec{e}_1 - \vec{e}_2).$$

Пример. Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования с матрицей А = $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Запишем линейное преобразование в виде: $\begin{matrix} x_1' = \lambda x_1 = 6x_1 - 4x_2 \\ x_2' = \lambda x_2 = 4x_1 - 2x_2 \end{matrix}$ $\quad \begin{cases} (6-\lambda)x_1 - 4x_2 = 0 \\ 4x_1 - (2+\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -4 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(6-\lambda)(2+\lambda) + 16 = -12 - 6\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 16 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0;$$

Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$;

Получаем: $\begin{cases} (6-2)x_1 - 4x_2 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$

Из системы получается зависимость: $x_1 - x_2 = 0$. Собственные векторы для первого корня характеристического уравнения имеют координаты: ***(t; t)*** где *t*- параметр.

Собственный вектор можно записать: $\vec{u} = (\vec{e}_1 + \vec{e}_2)t$.

Рассмотрим другой частный случай. Если $\bar{x}$ - собственный вектор линейного преобразования А, заданного в трехмерном линейном пространстве, а x_1, x_2, x_3 – компоненты этого вектора в некотором базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, то $x_1' = \lambda x_1$; $x_2' = \lambda x_2$; $x_3' = \lambda x_3$, где λ - собственное значение (характеристическое число) преобразования А.

Если матрица линейного преобразования А имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ то } \begin{cases} \lambda x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \lambda x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \lambda x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

Характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$

Раскрыв определитель, получим кубическое уравнение относительно λ. Любое кубическое уравнение с действительными коэффициентами имеет либо один, либо три действительных корня.

Тогда любое линейное преобразование в трехмерном пространстве имеет собственные векторы.

Пример. Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования А, матрица линейного преобразования А = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 = 1\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 3\cdot x_3 \\ x_2' = \lambda x_2 = 1\cdot x_1 + 5\cdot x_2 + 1\cdot x_3 \\ x_3' = \lambda x_3 = 3\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 1\cdot x_3 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1 - \lambda)((5 - \lambda)(1 - \lambda) - 1) - (1 - \lambda - 3) + 3(1 - 15 + 3\lambda) = 0$$

$$(1 - \lambda)(5 - 5\lambda - \lambda + \lambda^2 - 1) + 2 + \lambda - 42 + 9\lambda = 0$$

$$(1 - \lambda)(4 - 6\lambda + \lambda^2) + 10\lambda - 40 = 0$$

$$4 - 6\lambda + \lambda^2 - 4\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 + 10\lambda - 40 = 0$$

$$-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 36 = 0$$

$$-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 2\lambda^2 - 36 = 0$$

$$-\lambda^2(\lambda + 2) + 9(\lambda^2 - 4) = 0$$

$$(\lambda + 2)(-\lambda^2 + 9\lambda - 18) = 0$$

Собственные значения: $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 6$;

1) Для $\lambda_1 = -2$: $\begin{cases} (1+2)x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

Если принять $x_1 = 1$, то $\begin{cases} 7x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x_2 = 0$; $x_3 = -1$;

Собственные векторы: $\vec{u_1} = (\vec{e_1} - \vec{e_3})\cdot t.$

2) Для $\lambda_2 = 3$: $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

Если принять $x_1 = 1$, то $\begin{cases} 2x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x_2 = -1$; $x_3 = 1$;

Собственные векторы: $\vec{u_2} = (\vec{e_1} - \vec{e_2} + \vec{e_3})\cdot t.$

3) Для $\lambda_3 = 6$: $\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$

Если принять $x_1 = 1$, то $\begin{cases} -x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 - 5x_3 = -3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x_2 = 2$; $x_3 = 1$;

Собственные векторы: $\vec{u_3} = (\vec{e_1} + 2\vec{e_2} + \vec{e_3})\cdot t.$

Пример. Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования А, матрица линейного преобразования А = $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 & -4 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-(3+\lambda)((1-\lambda)(2-\lambda)-2)+2(4-2\lambda-2)-4(2-1+\lambda)=0$$
$$-(3+\lambda)(2-\lambda-2\lambda+\lambda^2-2)+2(2-2\lambda)-4(1+\lambda)=0$$
$$-(3+\lambda)(\lambda^2-3\lambda)+4-4\lambda-4-4\lambda=0$$
$$-3\lambda^2+9\lambda-\lambda^3+3\lambda^2-8\lambda=0$$
$$-\lambda^3+\lambda=0$$
$$\lambda_1=0;\quad \lambda_2=1;\quad \lambda_3=-1;$$

Для $\lambda_1 = 0$: $\begin{cases} -3x_1-2x_2-4x_3=0 \\ 2x_1+x_2+2x_3=0 \\ x_1+x_2+2x_3=0 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} 2x_1+x_2=-2x_3 \\ x_1+x_2=-2x_3 \end{cases}$

Если принять $x_3 = 1$, получаем $x_1 = 0$, $x_2 = -2$

Собственные векторы $\vec{u_1} = (0\cdot\vec{e_1} - 2\cdot\vec{e_2} + 1\cdot\vec{e_3})\cdot t$, где t – параметр.

2. Теорема Фробениуса-Перрона. Число и вектор Фробениуса, их свойства.

Теорема Фробениуса-Перрона: Пусть A — квадратная матрица, со строго положительными вещественными элементами, тогда справедливы утверждения:

1) наибольшее по модулю собственное число является вещественным и строго положительным;
2) это собственное значение является простым корнем характеристического многочлена;
3) соответствующий собственной вектор имеет строго положительные координаты;
4) собственное значение удовлетворяет неравенствам.

$$\min_i \sum_j a_{ij} \leqslant r \leqslant \max_i \sum_j a_{ij}.$$

Число и вектор Фробениуса, их свойства. Собственным вектором матрицы A называется такой ненулевой вектор $x \in R^n$, что $Ax = \lambda x$, где λ - некоторый скаляр, называемый собственным числом матрицы A , соответствующим собственному вектору x. Неотрицательный собственный вектор неотрицательной неразложимой матрицы A называется вектором Фробениуса матрицы A , а соответствующее ему собственное число - числом Фробениуса матрицы A.

Неразложимая матрица A называется устойчивой, если для любого x последовательность $\{\overline{A}^k x\}_{k=1}^{\infty}$ сходится, где $\overline{A}^k$ - k-ая степень матрицы $\overline{A} = \lambda_A^{-1} A$, λ_A - число Фробениуса для матрицы A.

Предельной точкой этой последовательности при $x \geq 0$ и $x \neq 0$ является вектор $\left(\|x\| / \|x_A\|\right)\cdot x_A$, где $\bar{x} = x_A$ - вектор Фробениуса для матрицы A .

3. Продуктивность неотрицательных матриц.

Определение 1. Матрица $D = \|d_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$, удовлетворяющая условию $d_{ij} \leq 0$; при всех $i \neq j$, называется продуктивной, если существует $\vec{x} \geq 0$ такой, что $D\vec{x} > 0$.

Определение 2. Матрица $D = \|d_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$, удовлетворяющая условию $d_{ij} \leq 0$; при всех $i \neq j$, называется прибыльной, если существует $\vec{p} \geq 0$ такой, что $D^T\vec{p} > 0$.

Теорема 1. Пусть матрица удовлетворяет условию $d_{ij} \leq 0$ при всех $i \neq j$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. существует $\vec{x} \geq 0$ такой, что $D\vec{x} > 0$ (продуктивность);
2. для любого $\vec{\omega} \geq 0$ существует $\vec{x} \geq 0$ такой, что $D\vec{x} = \vec{\omega}$;
3. последовательные главные миноры матрицы D положительны;
4. все главные миноры матрицы D положительны;
5. существует $\vec{p} \geq 0$ такой что $D^T\vec{p} > 0$ (прибыльность);

6. для любого $\vec{\pi} \geq 0$ существует $\vec{p} \geq 0$ такой, что $D^T\vec{p}=\vec{\pi}$;
7. последовательные главные миноры матрицы D^T положительные;
8. все главные миноры матрицы D^T положительны;
9. матрица D неотрицательно обратима, т.е. существует D-1 ≥ 0.

Теорема 2. Пусть A - неотрицательная квадратная матрица. Тогда:

1. Если матрица (ρE - A) неотрицательно обратима, то ρ > 0 и ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\rho^{k+1}}$ сходится и его сумма равна (ρE - A)-1.
2. Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\rho^{k+1}}$ сходится и ρ > 0, то матрица (ρE - A) неотрицательно обратима.

1.15. Лекция № 15 (2 часа)
Тема: «Модель многоотраслевой экономики Леонтьева»

1.15.1. Вопросы лекции:
1. Модель многоотраслевой экономики Леонтьева.
2. Продуктивные модели Леонтьева.
3. Различные критерии продуктивности модели Леонтьева.

1.15.2**. Краткое содержание вопросов**
1. Модель многоотраслевой экономики Леонтьева.
Рассмотрим модель международной торговли (модель обмена) в виде математической модели.
Пусть имеем n стран - $S_1, S_2, ..., S_n$, национальный доход каждой из которых равен $x_1, x_2, ..., x_n$.
Обозначим через $a_{i\,j}$, $i = 1...n;\ j = 1...n$ долю национального дохода, который страна S_j тратит на покупку товаров у страны S_i.
Будем считать, что весь национальный доход тратится на закупку товаров либо внутри страны, либо на импорт из других стран, т.е. $\sum_{i=1}^{n} a_{i\,j} = 1 \quad (j = 1...n)$.

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется *структурной матрицей торговли*.

Обозначим через $p_i \quad (i = 1...n)$ выручку от внутренней и внешней торговли для страны S_i, тогда $p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n$.
Очевидно, что выручка от торговли каждой страны должна быть не меньше её национального дохода, т.е. $p_i \ge x_i$. Но $p_i > x_i$ - невозможный случай, т.к. все страны не могут одновременно получать прибыль, поэтому условие $p_i \ge x_i$ примет вид $p_i = x_i$.
Введем вектор национальных доходов страны $\vec{x} = (x_1; x_2; ...; x_n)$, получим матричное уравнение

$A \cdot X = X$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$.

Т.е. задача свелась к отысканию собственного вектора матрицы А, отвечающего собственному значению λ =1.

Пример: Структурная матрица торговли трех стран S_1, S_2, S_3 имеет вид $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$.

Найти национальные доходы для сбалансированной торговли.
Решение: Найдем собственный вектор $\vec{x}$, соответствующий собственному значению λ =1.

$(A - E)X = 0 \qquad \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = 1{,}5c \\ x_2 = 2c \\ x_3 = c \end{cases}$ - метод Гаусса. Т.е.

$\vec{x} = (1{,}5c; 2c; c)$

Таким образом, сбалансированность торговли трех стран достигается при векторе национальных доходов $\vec{x} = (1{,}5c; 2c; c)$, т.е. при соотношении национальных доходов стран $\frac{3}{2} : 2 : 1$ или $3 : 4 : 2$.

Цель балансового анализа – ответить на вопрос, возникающий в макроэкономике и связанный с эффективностью ведения многоотраслевого хозяйства: каким должен быть объем производства каждой из отраслей, чтобы удовлетворить все потребности в продукции этой отрасли. При этом каждая отрасль выступает, с одной стороны, как производитель некоторой продукции, а с другой – как потребитель продукции и своей, и произведенной другими отраслями. Математическая модель Леонтьева позволяет анализировать связь между отраслями.

Задача. В таблице приведены данные об использовании стоимостного баланса за отчетный период, усл. ден. ед.:

№ п/п	Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовый продукт
		Q_1	Q_2		
1	Q_1	3	8	89	100
2	Q_2	5	7	88	100

Требуется:

1) составить матрицу прямых затрат и проверить ее продуктивность;

2) вычислить объемы конечного продукта при увеличении валового выпуска каждой отрасли соответственно на 100% и 50%;

3) Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление отрасли Q_1 увеличить в k =1 раз, а отрасли Q_2 – на 10%.

Решение: 1. Введем в рассмотрение матрицу $X = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{y} = \begin{pmatrix} 89 \\ 88 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$.

Составим матрицу прямых затрат *A*, учитывая, что ее элементы $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$: $A = \begin{pmatrix} 0{,}03 & 0{,}08 \\ 0{,}05 & 0{,}07 \end{pmatrix}$.

Легко видеть, что сумма элементов столбцов (строк) *A* меньше единицы. Следовательно, в силу второго критерия продуктивности (матрица продуктивна, если максимум сумм элементов её столбцов не превосходит единицы) матрица *A* продуктивна.

2. Уравнение линейного межотраслевого баланса имеет вид: $\vec{x} = A\vec{x} + \vec{y}$.

При увеличении валового выпуска отраслей Q_1 и Q_2 соответственно на 100% и 50% получим новый вектор валового выпуска $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix}$.

Вектор потребления $\vec{y}_1$, соответствующий вектору $\vec{x}_1$, найдем из уравнения баланса:

$$\vec{y}_1 = (E - A)\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}97 & -0{,}08 \\ -0{,}05 & 0{,}93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 182 \\ 129{,}5 \end{pmatrix}.$$

Изменения объемов конечного продукта Q_1 на 182 – 89 = 93 ед. или 104,5%, Q_2 – на 129,5 – 98 = 41,5 ед. на 47,2%.

3. Конечное потребление отрасли Q_1 остается без изменения, а отрасли Q_2 станет равным Получим новый вектор потребления

$$\vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 89 \\ 96{,}8 \end{pmatrix}.$$

Новый вектор валового выпуска $\vec{x}_2$ найдем из уравнения баланса

$$\vec{x}_2 = (E - A)^{-1}\vec{y}_2.$$

$$E - A = \begin{pmatrix} 0{,}97 & -0{,}08 \\ -0{,}05 & 0{,}93 \end{pmatrix}; \text{ Определитель } |E - A| = 0{,}8981.$$

Обратная матрица $(E - A)^{-1} = 0{,}8981 \begin{pmatrix} 0{,}93 & 0{,}08 \\ 0{,}05 & 0{,}97 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}03 & 0{,}09 \\ 0{,}06 & 1{,}08 \end{pmatrix}.$

Откуда $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1{,}03 & 0{,}09 \\ 0{,}06 & 1{,}08 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 89 \\ 96{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100{,}38 \\ 109{,}88 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 & 0{,}09 \\ 6 & 1{,}08 \end{matrix}.$

Валовый продукт отраслей необходимо увеличить Q_1 на 0,38%, Q_2 – на 9,88%.

2. Продуктивные модели Леонтьева.

ТЕОРЕМА Если для матрицы А с неотрицательными элементами и некоторого вектора $\bar{y}$ с неотрицательными компонентами уравнение $\bar{x} = A\bar{x} + \bar{y}$. (16.6) имеет решение $\bar{x}$ с неотрицательными компонентами, то матрица А продуктивна.

Иными словами, достаточно установить наличие положительного решения системы (16.6) хотя бы для одного положительного вектора $\bar{y}$, чтобы матрица А была продуктивной. Перепишем систему (16.6) с использованием единичной матрицы Е в виде $(E - A)\bar{x} = \bar{y}$. (16.7)

Если существует обратная матрица (Е - А)-1 , то существует и единственное решение уравнения (16.7): $\bar{x} = (E - A)^{-1}\bar{y}$. (16.8)

Матрица (Е — А)-1 называется матрицей полных затрат.

Существует несколько критериев продуктивности матрицы А. Приведем два из них.

Первый критерий продуктивности. Матрица А продуктивна тогда и только тогда, когда матрица (Е - А)-1 существует и ее элементы неотрицательны.

Второй критерий продуктивности. Матрица А с неотрицательными элементами продуктивна, если сумма элементов по любому ее столбцу (строке) не превосходит единицы: $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leqslant 1$,

причем хотя бы для одного столбца (строки) эта сумма строго меньше единицы.

Рассмотрим применение модели Леонтьева на несложных примерах.

Пример 1. В табл. 16.4 приведены данные по балансу за некоторый период времени между пятью отраслями промышленности. Найти векторы конечного потребления и валового выпуска, а также матрицу коэффициентов прямых затрат и определить, является ли она продуктивной в соответствии с приведенными выше критериями.

Таблица 16.4

№ п/п	Отрасль	Потребление					Конечный продукт	Валовой выпуск, ден. ед.
		1	2	3	4	5		
1	Станкостроение	15	12	24	23	16	10	100
2	Энергетика	10	3	35	15	7	30	100
3	Машиностроение	10	5	10	10	10	5	50
4	Автомобильная промышленность	10	5	10	5	5	15	50
5	Добыча и переработка углеводородов	7	15	15	10	3	50	100

Решение. В данной таблице приведены составляющие баланса в соответствии с соотношениями (16.2): xij — первые пять столбцов, yi — шестой столбец, xi — последний столбец (i,j = 1, 2, 3, 4, 5). Согласно формулам (16.3) и (16.4), имеем

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 5 \\ 15 \\ 50 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}12 & 0{,}48 & 0{,}46 & 0{,}16 \\ 0{,}10 & 0{,}03 & 0{,}70 & 0{,}30 & 0{,}07 \\ 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}05 \\ 0{,}07 & 0{,}15 & 0{,}30 & 0{,}20 & 0{,}03 \end{pmatrix}.$$

Все элементы матрицы А положительны, однако нетрудно видеть, что их сумма в третьем и четвертом столбцах больше единицы. Следовательно, условия второго критерия продуктивности не соблюдены и матрица А не является продуктивной. Экономическая причина этой непродуктивности заключается в том, что внутреннее потребление отраслей 3 и 4 слишком велико в соотношении с их валовыми выпусками.

Пример 2. Табл. 16.5 содержит данные баланса трех отраслей промышленности за некоторый период времени. Требуется найти объем валового выпуска каждого вида продукции, если конечное потребление по отраслям увеличить соответственно до 60, 70 и 30 условных денежных единиц.

Таблица 16.5

№ п/п	Отрасль	Потребление 1	2	3	Конечный продукт	Валовой выпуск
1	Добыча и переработка углеводородов	5	35	20	40	100
2	Энергетика	10	10	20	60	100
3	Машиностроение	20	10	10	10	50

Решение. Выпишем векторы валового выпуска и конечного потребления и матрицу коэффициентов прямых затрат. Согласно формулам (16.3) и (16.4), имеем

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}35 & 0{,}40 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}40 \\ 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}20 \end{pmatrix}.$$

Матрица А удовлетворяет обоим критериям продуктивности. В случае заданного увеличения конечного потребления новый вектор конечного продукта будет иметь вид

$$\bar{y}_* = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}. \qquad (16.9)$$

Требуется найти новый вектор валового выпуска $\bar{x}$ *, удовлетворяющий соотношениям баланса в предположении, что матрица А не изменяется. В таком случае компоненты x1, x2, x3 неизвестного вектора $\bar{x}$ * находятся из системы уравнений, которая согласно (16.4) имеет в данном случае вид

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}05x_1 + 0{,}35x_2 + 0{,}4x_3 + 60, \\ x_2 = 0{,}1x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}4x_3 + 70, \\ x_3 = 0{,}2x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}2x_3 + 30. \end{cases}$$

В матричной форме эта система выглядит следующим образом: $\bar{x}_* = A\bar{x}_* + \bar{y}_*, \qquad (16.10)$

Или $(E - A)\bar{x}_* = \bar{y}_*, \qquad (16.11)$

$$(E - A) = \begin{pmatrix} 0{,}95 & -0{,}35 & -0{,}40 \\ -0{,}10 & 0{,}90 & -0{,}40 \\ -0{,}20 & -0{,}10 & 0{,}80 \end{pmatrix}.$$

где матрица (E — A) имеет вид

Решение системы линейных уравнений (16.11) при заданном векторе правой части (16.9) (например, методом Гаусса) дает новый вектор $\bar{x}$ * как решение системы уравнений баланса (16.10):

$$\bar{x}_* = \begin{pmatrix} 152{,}6 \\ 135{,}8 \\ 92{,}5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для того чтобы обеспечить заданное увеличение компонент вектора конечного продукта, необходимо увеличить соответствующие валовые выпуски: добычу и переработку углеводородов на 52,2%, уровень энергетики — на 35,8% и выпуск продукции машиностроения — на 85% по сравнению с исходными величинами, указанными в табл.

3. Различные критерии продуктивности модели Леонтьева.

Теорема. (критерий продуктивности). *Матрица* $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ *продуктивна тогда и только тогда, когда матрица* $\mathbf{S} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ *существует и является неотрицательной.*

Экономический смысл элементов матрицы $\mathbf{S} = (s_{ik})$ заключается в следующем: элемент s_{ik} равен количеству продукции, которое должен выпустить объект P_i, для того чтобы объект P_k мог выпустить одну единицу конечной продукции (а не полного выпуска). В связи с этим элементы s_{ik}

носят название**коэффициентов полных затрат**, а матрица **S** – **матрицы коэффициентов полных затрат**.

Приведем еще один достаточный признак продуктивности модели Леонтьева, наиболее удобный для проверки продуктивности матрицы межотраслевого баланса в натурально-стоимостной форме.

Т е о р е м а *Если матрица* **A** = (a_{ij}) *неотрицательна, сумма элементов каждой строки не больше единицы и хотя бы для одной строки строго меньше единицы, то модель Леонтьева, определяемая матрицей* ***A****, продуктивна.*

Таким образом, матрица **A** продуктивна, если $a_{ij} \geq 0$ для любых *i*, *j* = 1, 2, …, *n*, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq 1$ (*i* = 1, 2, …, *n*) и существует номер i_0 такой, что $\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} < 1$.

Очевидно, что коэффициенты s_{ij} полных затрат всегда меньше, а могут быть и существенно больше соответствующих коэффициентов a_{ij} прямых затрат, поскольку, во-первых, коэффициенты s_{ij} указывают не только непосредственные поставки продукции объекта P_i объекту P_j, но и поставки продукции объекта P_i другим объектам, для того чтобы последние в свою очередь могли поставить объекту P_j требуемое количество их продукции, и во-вторых, при вычислении коэффициентов s_{ij} берется отношение суммы поставок продукции объекта P_i всем объектам к величине конечной продукции объекта P_j, а эта величина меньше полного выпуска продукции объекта P_j

1.16. Лекция № 16 (2 часа)
Тема: «Задачи линейного программирования»

1.16.1. Вопросы лекции:

1. Примеры экономико-математических моделей, приводящих к задачам линейного программирования.
2. Стандартная и каноническая формы записи задач линейного программирования.
3. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования в случае двух переменных. Графический метод решения.
4. Решение задачи линейного программирования методом перебора вершин.

1.16.2**. Краткое содержание вопросов**

1. Примеры экономико-математических моделей, приводящих к задачам линейного программирования.

Линейное программирование- это математическая дисциплина, изучающая методы нахождения наибольшего или наименьшего значений линейной функции нескольких переменных. При этом переменные должны удовлетворять конечному числу уравнений или неравенств и быть неотрицательными.

Пусть имеем СЛУ (I) систему ограничений $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$, где $x_i \geq 0\ (i = 1 \ldots n)$ (II)- условие неотрицательности

и линейную функцию (III)- $f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ -целевая функция.

Нужно найти такое неотрицательное решение СЛУ (I), при котором функция f принимала бы наименьшее значение.

Всякое неотрицательное решение СЛУ (I) называется допустимым. Решение, при котором целевая функция принимает минимальное значение называется оптимальным решением.

2. Стандартная и каноническая формы записи задач линейного программирования.

Первая стандартная форма задачи линейного программирования имеет вид

$$\begin{aligned} & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \Rightarrow \max \\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m, \\ & x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad \ldots; \quad x_n \geq 0. \end{aligned}$$

Введем вектора

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

а также вектора

$$\vec{A}_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix} \quad i = \overline{1,n}$$

и матрицу

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Заметим, что комбинация $c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n$ есть не что иное, как скалярное произведение векторов $\vec{c}$ и $\vec{x}$. Поэтому в векторной форме задача примет вид

$$(\vec{c},\vec{x})\Rightarrow \max$$
$$x_1\vec{A}_1+x_2\vec{A}_2+...+x_n\vec{A}_n\le\vec{b}$$
$$\vec{x}\ge\vec{0}$$

Вторая стандартная форма задачи линейного программирования имеет вид

$$\begin{aligned}&c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n\Rightarrow \min\\&a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n\ge b_1,\\&a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n\ge b_2,\\&.............................\\&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n\ge b_m,\\&x_1\ge 0;\quad x_2\ge 0;\quad ...;\quad x_n\ge 0.\end{aligned}$$

В векторной форме эта задача имеет вид

$$(\vec{c},\vec{x})\Rightarrow \min$$
$$x_1\vec{A}_1+x_2\vec{A}_2+...+x_n\vec{A}_n\ge\vec{b}$$
$$\vec{x}\ge\vec{0}$$

Канонической формой задачи линейного программирования называется задача вида

$$\begin{aligned}&c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n\Rightarrow \min\\&a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1,\\&a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2,\\&.............................\\&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m,\\&x_1\ge 0;\quad x_2\ge 0;\quad ...;\quad x_n\ge 0.\end{aligned}$$

В векторной форме эта задача имеет вид

$$(\vec{c},\vec{x})\Rightarrow \min$$
$$x_1\vec{A}_1+x_2\vec{A}_2+...+x_n\vec{A}_n=\vec{b}$$
$$\vec{x}\ge\vec{0}$$

Во всех этих задачах функцию $c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n$ называют целевой функцией. Вектор $\vec{c}=[c_1,c_2,...,c_n]^T$ называют вектором коэффициентов линейной формы, вектор $\vec{b}=[b_1,b_2,...,b_n]^T$ - вектором ограничений. Матрицу $A=[a_{ij}]$ называют матрицей коэффициентов.

Правила приведения задач линейного программирования к стандартной и канонической формам

1. Превращение max в min и наоборот.

Если целевая функция в задаче линейного программирования задана в виде $c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n\Rightarrow \min$, то, умножая её на (- 1), приведем её к виду $(-c_1)x_1+(-c_2)x_2+...+(-c_n)x_n\Rightarrow \max$,так как смена знака приводит к смене min на max. Аналогично можно заменить max на min.

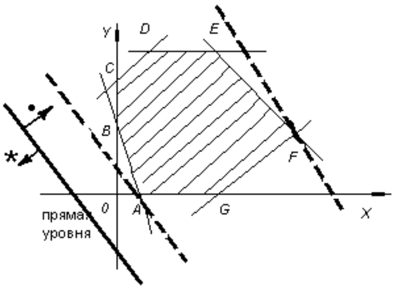
2. Смена знака неравенства.
3. Превращение равенства в систему неравенств.
4. Превращение неравенств в равенства.
5. Ограничения на неотрицательность переменных.

3. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования в случае двух переменных. Графический метод решения.

Пусть имеем (I) систему ограничений $\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+b_1\ge 0\\a_{21}x+a_{22}y+b_2\ge 0\\.........................\\a_{m1}x+a_{m2}y+b_m\ge 0\end{cases}$, линейную функцию (II) $z=c_1x+c_2y$ и $x\ge 0, y\ge 0$ (III)

Нужно найти минимальное значение функции z.

$c_1x+c_2y=\tilde{n}$-на плоскости прямая, называемая <u>*прямая уровня*</u>. Система ограничений на плоскости-многогранная область.



Будем менять значение с, прямая будет двигаться параллельно прямой $c_1x + c_2y = \tilde{n}$.

Если <u>увеличивать с</u>: 1) движение по (не пересекая область)$\Rightarrow$ ближняя точка A-max, дальняя точка F-min

2) движение по $\Rightarrow$ ближняя точка A-min, дальняя точка F-max.

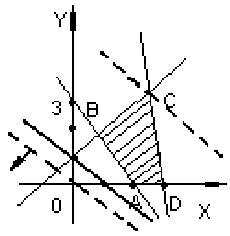
Если <u>уменьшать с:</u> 1) движение по $\Rightarrow$ ближняя точка A-min, дальняя точка F-max

2) движение по $\Rightarrow$ ближняя точка A-max, дальняя точка F-min

<u>Пример:</u> Пусть система ограничений имеет вид (I) $\begin{cases} x - y + 1 \ge 0 \\ 3x + 2y - 6 \ge 0 \\ -3x - y + 9 \ge 0 \end{cases}$ (II) $z = -x - y + 1$, $x \ge 0, y \ge 0$ (III)

Найти: $z_{\max}$ *и* $z_{\min}$

Решение:



1) с=0: -x-y+1=0

2) увеличим с: с=1: y=-x

При увеличении с прямая уровня движется вниз $\Rightarrow$ $z_{\max}$ будет в точке А, $z_{\min}$ - в точке С

$z_{\min}$ (2;3)=-2-3+1=-4 и $z_{\max}$ (2;0)=-2-0+1=-1

4. Решение задачи линейного программирования методом перебора вершин.

В основе симплексного метода лежит перебор вершин многогранника области допустимых решений с учётом изменений функции цели. То есть при переходе от одной вершине к другой надо, чтобы функция цели принимала лучшее (или не худшее) значение, чем на предыдущем шаге. Тем самым число перебираемых вершин сокращается, и оптимум находится быстрее.

Для решения задач симплексным методом надо освоить три основных элемента: способ определения первоначального допустимого базисного решения, правило перехода к лучшему решению, критерий проверки оптимальности найденного решения

Кроме того, для решения задачи симплексным методом, она должна быть представлена в канонической форме (все неравенства должны быть заменены уравнениями). Для этого, если в неравенстве стоит знак "$>$" или "$\geq$", надо ввести дополнительную переменную в левую часть уравнения, со знаком "-" при её коэффициенте, иначе со знаком "+". И так заменяются все неравенства.

Особые случаи, которые необходимо учитывать при поиске оптимума в симплексной задаче.

Неединственность оптимального решения (альтернативный оптимум). Она появляется, когда после выражения функции через неосновные переменные одна из переменных становится нулевой, а другая удовлетворяет условию оптимальности. То есть оптимум найден, но можно менять нулевую переменную, хотя улучшения функции это не даст. Графически это представляется как совпадение линии функции с линией многогранника области допустимых решений.

Вырожденное базисное решение. Это когда одна из основных переменных равна нулю. После такого решения следующее, может не улучшить функцию, а лишь сменить набор основных переменных. В таких случаях (хотя крайне редко) возможно зацикливание, то есть перебор одних и тех же решений.

Отсутствие конечного оптимума. Это когда на очередном шаге решения все границы роста равны бесконечности или минус бесконечности. Графически это выглядит, как отсутствие какое-то стороны многогранника области допустимых решений и функция может двигаться в эту сторону до бесконечности.

1.17. Лекция № 17 (2 часа)
Тема: «Симплекс-метод решения задач линейного программирования»

1.17.1. Вопросы лекции:
1. Алгоритм симплекс-метода.
2. Нахождение исходного допустимого базиса.
3. Метод искусственного базиса.

1.17.2**. Краткое содержание вопросов**
1. Алгоритм симплекс-метода.
Теперь приведём шаги алгоритма. На каждом шаге мы будем менять множества простых и непростых векторов (двигаться по рёбрам), и матрица будет иметь следующий вид: $\begin{bmatrix} 1 & c_B^T B^{-1} A - c^T & c_B^T B^{-1} \\ 0 & B^{-1} A & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ x \\ x_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_B^T B^{-1} b \\ B^{-1} b \end{bmatrix}$, где c_B — коэффициенты вектора с соответствующие простым переменным (переменным x_s соответствуют 0), B — столбцы , соответствующие простым переменным. Матрицу, образованную оставшимися столбцами обозначим D. Почему матрица будет иметь такой вид поясним в описании шагов алгоритма.
Первый шаг.
Выбираем начальное допустимое значение. На первом шаге B — единичная матрица, так как простыми переменными являются xs. cB — нулевой вектор по тем же причинам.
Второй шаг
Покажем, что в выражении $(c_B^T B^{-1} A - c^T)x + (c_B^T B^{-1})x_s$ только непростые переменные имеют ненулевой коэффициент. Заметим, что из выражения $A_x+x_s=b$ простые переменные однозначно выражаются через непростые, так как число простых переменных равно числу уравнений. Пусть x ' — простые, а x'' — непростые переменные на данной итерации. Уравнение $A_x+x_s=b$ можно переписать, как B_x '+D_x ''=b. Умножим его на B^{-1} слева: x' + $B^{-1}D_x$'' = $B^{-1}b$. Таким образом мы выразили простые переменные через непростые, и в выражении $B^{-1}A_x + B^{-1}x_s$, эквивалентному левой части равенства, все простые переменные имеют единичные коэффициенты. Поэтому, если прибавить к равенству $Z - c^T{}_x = 0$ равенство $c_B^T B^{-1} A x + c_B^T B^{-1} x_s$, то в полученном равенстве все простые переменные будут иметь нулевой коэффициент — все простые переменные вида x сократятся, а простые переменные вида x_s не войдут в выражение $c_B^T B^{-1} x_s$.

Выберем ребро, по которому мы будем перемещаться. Поскольку мы хотим максимизировать Z, то необходимо выбрать переменную, которая будет более всех уменьшать выражение $(c_B^T B^{-1} A - c^T)x + (c_B^T B^{-1})x_s$.

Для этого выберем переменную, которая имеет наибольший по модулю отрицательный коэффициент. Если таких переменных нет, то есть все коэффициенты этого выражения неотрицательны, то мы пришли в искомую вершину и нашли оптимальное решение. В противном случае начнём увеличивать эту непростую переменную, то есть перемещаться по соответствующему ей ребру. Эту переменную назовём входящей.
Третий шаг
Теперь необходимо понять, какая простая переменная первой обратится в ноль по мере увеличения входящей переменной. Для этого достаточно рассмотреть систему: $\begin{bmatrix} B^{-1} A B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_s \end{bmatrix} = B^{-1} b$

При фиксированных значениях непростых переменных система однозначно разрешима относительно простых, поэтому мы можем определить, какая из простых переменных первой достигнет нуля при увеличении входящей. Эту переменную назовем выходящей. Это будет означать, что мы натолкнулись на новую вершину. Теперь входящую и выходящую переменную поменяем местами — входящая «войдёт» в простую, а выходящая из них «выйдет» в непростые. Теперь перепишем матрицу B и вектор c_B в соответствии с новыми наборами простых и непростых переменных, после чего вернёмся ко второму шагу. x''

Поскольку число вершин конечно, то алгоритм однажды закончится. Найденная вершина будет являться оптимальным решением.

2. Нахождение исходного допустимого базиса.

Симплекс-метод реализует упорядоченный процесс, при котором, начиная с некоторой исходной допустимой угловой точки, осуществляются последовательные переходы от одной допустимой экстремальной точки к другой, пока не будет найдена точка оптимального решения.

Обозначим: N– общее количество переменных в ЗЛП, представленной в канонической форме; n - количество исходных переменных; m - количество ограничений, n_∂ - количество дополнительных переменных, тогда $N = n + n_\partial$.

Каждая вершина многогранника решений имеет m - ненулевых переменных и ($N - m$) - нулевых переменных.

Ненулевые переменные называются базисными, нулевые переменные – небазисными.

Для получения решения составляется начальный допустимый базис, в котором базисные переменные должны быть представлены в виде единичных орт. Это означает, что уравнения, представляющие данную вершину должны включать каждую базисную переменную только в одной строке с коэффициентом, равным 1.

При выборе начального допустимого базиса для составления симплекс-таблицы на первом шаге СТ(0) исходные x_1, x_2 переменные приравниваются к нулю и являются небазисными, среди введённых дополнительных переменных выбираются переменные с коэффициентами равными единице. Переменные x_3, x_4, x_5 в равенствах (2) - (4) являются базисными и в Z - строку входят с коэффициентами, равными 0.

3. Метод искусственного базиса.

Метод искусственного базиса используется для нахождения допустимого базисного решения задачи линейного программирования, когда в условии присутствуют ограничения типа равенств. Рассмотрим задачу: $\max\{F(x)=\sum c_i x_i | \sum_{ajixi}=b_j,\ j=1,m;\ x_i \geq 0\}$.

В ограничения и в функцию цели вводят так называемые «искусственные переменные» R_j следующим образом: $\sum a_{ji}x+R_j=b_j,\ j=1,m; F(x)=\sum c_i x_i - M\sum R_j$

При введении искусственных переменных в методе искусственного базиса в функцию цели им приписывается достаточно большой коэффициент М, который имеет смысл штрафа за введение искусственных переменных. В случае минимизации искусственные переменные прибавляются к функции цели с коэффициентом М. Введение искусственных переменных допустимо в том случае, если в процессе решения задачи они последовательно обращаются в нуль.

Симплекс-таблица, которая составляется в процессе решения, используя метод искусственного базиса, называется расширенной. Она отличается от обычной тем, что содержит две строки для функции цели: одна – для составляющей $F = \sum c_i x_i$, , а другая – для составляющей $M \sum Rj$.

Пример 1. Найти максимум функции $F(x) = -x_1 + 2x_2 - x_3$ при ограничениях:

$2x_1+3x_2+x_3=3$,

$x_1+3x_3=2$,

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$.

Применим метод искусственного базиса. Введем искусственные переменные в ограничения задачи

$2x_1 + 3x_2 + x_3 + R_1 = 3$;

$x_1 + 3x_3 + R_2 = 2$;

Функция цели $F(x)-M \sum Rj= -x_1 + 2x_2 - x_3 - M(R_1+R_2)$.

Выразим сумму $R_1 + R_2$ из системы ограничений: $R_1 + R_2 = 5 - 3x_1 - 3x_2 - 4x_3$, тогда $F(x) = -x_1 + 2x_2 - x_3 - M(5 - 3x_1 - 3x_2 - 4x_3)$.

При составлении первой симплекс-таблицы (табл. 1) будем полагать, что исходные переменные x_1, x_2 , x_3 являются небазисными, а введенные искусственные переменные – базисными. В задачах максимизации знак коэффициентов при небазисных переменных в F- и М-строках изменяется на противоположный. Знак постоянной величины в М-строке не изменяется. Оптимизация проводится сначала по М-строке. Выбор ведущих столбца и строки, все симплексные преобразования при использовании метода искусственного базиса осуществляются как в обычном симплекс-методе.

Таблица 1

Базисные перемен-ные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	x_2	x_3
R_1	3	2	3	1
R_2	2	1	0	3
F	0	1	-2	1
M	-5	-3	-3	-4

Максимальный по абсолютному значению отрицательный коэффициент (-4) определяет ведущий столбец и переменную x_3, которая перейдет в базис. Минимальное симплексное отношение (2/3) соответствует второй строке таблицы, следовательно, переменная R_2 должна быть из базиса исключена. Ведущий элемент обведен контуром.

Таблица 2

Базисные перемен-ные	Свободные члены	Небазисные переменные	
		x_1	x_2
R_1	7/3	5/3	3
x_3	2/3	1/3	0
F	-2/3	2/3	-2
M	-7/3	-5/3	-3

Таблица 3

Базисные перемен-ные	Свободные члены	Небазисные переменные
		x_1
x_2	7/9	5/9
x_3	2/3	1/3
F	8/9	16/9
M	0	0

В методе искусственного базиса искусственные переменные, исключенные из базиса, в него больше не возвращаются, поэтому столбцы элементов таких переменных опускаются. Табл. 2. сократилась на 1 столбец. Осуществляя пересчет этой таблицы, переходим к табл. 3., в которой строка M обнулилась, ее можно убрать. После исключения из базиса всех искусственных переменных получаем допустимое базисное решение исходной задачи, которое в рассматриваемом примере является оптимальным:

$x1=0$; $x2=7/9$; $F_{max}=8/9$.

Если при устранении М-строки решение не является оптимальным, то процедура оптимизации продолжается и выполняется обычным симплекс-методом. Рассмотрим пример, в котором присутствуют ограничения всех типов:≤,=,≥

1.18. Лекция № 18 (2 часа)
Тема: «Транспортная задача»

1.18.1. Вопросы лекции:
1. Транспортная задача.

1.18.2**. Краткое содержание вопросов**
1.Транспортная задача.
<u>*Транспортными задачами*</u> называют задачи для определения оптимального плана перевозок грузов от данных пунктов отправления в заданные пункты потребления.

Пусть в p пунктах отправления имеется соответственно a_1 , a_2 , ..., a_p однородного груза. Пусть этот груз нужно перевезти q потребителям. Каждому из потребителей нужно b_1 , b_2 ,..., b_q . Известно $c_{i\,j}$ – стоимость перевозок из i-го пункта отправления j-му потребителю. Надо составить такой план перевозки, при котором суммарная стоимость перевозки будет минимальной.

Если $\sum_{i=1}^{p} a_i = \sum_{j=1}^{q} b_j$, то транспортная задача называется транспортной задачей <u>*закрытого типа*</u> , в противном случае- <u>*открытого типа.*</u> Задачу открытого типа можно свести к задаче закрытого типа, добавив фиктивный отправитель, т.е. строку в распределительную таблицу.

Удобно составлять распределительную таблицу:

Обозначим: $x_{i\,j}$- количество груза, который надо перевезти из i-го пункта отправления j-му потребителю.

b_j / a_i	b_1	b_2	…	b_j	…	b_q
a_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	…	C_{1j} X_{1j}	…	C_{1q} X_{1q}
a_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	…	C_{2j} X_{2j}	…	C_{2q} X_{2q}
...	…	…	…	…	…	…
a_i	C_{i1} X_{i1}	C_{i2} X_{i2}	…	$C_{i\,j}$ $X_{i\,j}$	…	$C_{i\,q}$ $X_{i\,q}$
…	…	…	…	…	…	…
a_p	C_{p1} X_{p1}	C_{p2} X_{p2}	…	$C_{p\,j}$ $X_{p\,j}$	…	$C_{p\,q}$ $X_{p\,q}$

Составим математическую модель.

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1q} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2q} = a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{p1} + x_{p2} + \ldots + x_{pq} = a_p \\ \\ x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{p1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{p2} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1q} + x_{2q} + \ldots + x_{pq} = b_q \end{cases}$$

- (I) <u>система ограничений</u> -всего товара вывезли (1-3 уравн), всего товара получено потребит.(4-6 уравн.)

$x_{i\,j} \geq 0, \quad i = 1..p, \quad j = 1..q$ (II)

(III) $f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{21}x_{21} + \ldots + c_{ij}x_{ij} + \ldots + c_{pq}x_{pq}$ -целевая функция.

Метод северо-западного угла

<u>Пример:</u> Будем заполнять распределительную таблицу, начиная с верхнего левого угла (<u>метод северо-западного угла</u>)

a_i \ b_j	80	50	60	20	50
40	5 40	8	9	10	14
120	10 40	7 50	9 30	6	5
60	7	3	6 30	4 20	12 10
40	6	3	11	5	4 40

260=260- задача закрытого типа.

$x_{11}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{33}, x_{34,}, x_{35}, x_{45}$- базисные переменные (8 штук). Все остальные свободные переменные.

P=4, q=5. Число базисных переменных = *p+q-1=8*

$x_{11}=40,\ x_{21}=40,\ x_{22}=50,\ x_{23}=30\ x_{33}=30,\ x_{34}=20,\ x_{35}=10,\ x_{45}=40$

$f=c_{11}x_{11}+c_{21}x_{21}+\tilde{n}_{22}x_{22}+c_{23}x_{23}+c_{33}x_{33}+c_{34}x_{34}+c_{35}x_{35}+c_{45}x_{45}=5\cdot 40+10\cdot 40+7\cdot 50+9\cdot 30+6\cdot 30+4\cdot 20+$
$+12\cdot 10+4\cdot 40=1760$

В методе северо-западного угла, если окажется при распределении груза, что одновременно и строка и столбец будут закрыты, то сдвигаясь вправо по строке <u>или</u> столбцу заполняем клетку **0**. В отличие от не заполняемых клеток, значение этой переменной является <u>базисным нулём</u> и её включают в базисные переменные.

Используя метод северо-западного угла, получаем значение линейной функции в большинстве случаев намного больше, чем оптимальное решение.

Метод потенциалов Пусть имеем $A_1, A_2, \ldots, A_m$ пунктов отправления и $B_1, B_2, \ldots, B_n$ пунктов потребления. c_{ij} – стоимость перевозок из A_i в B_j. Требуется составить такой план перевозки, при котором суммарная стоимость перевозок будет минимальной. В каждом пункте $A_1, A_2, \ldots, A_m$ a_i груза, нужно доставить b_j –в $B_1, B_2, \ldots, B_n$ $(i=1\ldots m, j=1\ldots n)$

Пусть несколько решений найдено. Все переменные разделятся на базисные x_{kl} и свободные x_{pq}. Будем рассматривать величины α_i $(i=1...m)$ - потенциал *i-го* пункта отправления. Каждому α_i сопоставим β_j - потенциал пункта назначения.

Для базисных переменных x_{kl} будем полагать $\alpha_k+\beta_l=c_{kl}$ (1) . Из системы этих уравнений определим какое-нибудь конкретное решение $(\alpha_1^0,\alpha_2^0,...,\alpha_m^0,\beta_1^0,\beta_2^0,...,\beta_n^0)$.

Найдем (2) $\alpha_p^0+\beta_q^0=c_{pq}^{\backslash}$ -<u>*косвенная стоимость.*</u> Для каждой свободной неизвестной составим косвенную стоимость $c_{pq}-c_{pq}^{\backslash}=s_{pq}$(3).

Выразим линейную функцию через свободные переменные:

$f=\sum c_{kl}x_{kl}=s$. Вместо базисных переменных x_{kl} подставим конкретные значения, получим s.

Выразим f через свободные переменные:

$f=\sum s_{pq}x_{pq}+s$, где x_{pq} – свободные переменные.

1) Если все $s_{pq}\ge 0$, то линейную функцию уменьшить нельзя и поэтому данное базисное решение будет оптимальным решением.

2) Если существует $s_{pq}<0$, то перейдем к новому базисному решению. Одну свободную переменную переведем в базисные, одну- в свободные. Если $s_{pq}<0$, то перераспределим груз в клетку x_{pq}, но т.к. количество груза должно быть постоянным по строкам и столбцам, то, добавив в клетку x_{pq}, мы должны убрать груз из некоторого базисного переменного. Т.е. в базисных клетках будем прибавлять и вычитать количество груза, которое мы отправили в клетку x_{pq}, чтобы сохранить баланс груза. Тогда переменная x_{pq} перейдет в базисные, а одна из базисных переменных (клетка, обратившаяся в 0) перейдет в свободные переменные.

Пример:

b_j / a_i	40	60	80	60
60	1	2	3	4
80	4	3	2	0
100	0	2	2	1

Пусть распределили так:

40	20		
	40	40	
		40	60

$$f = 1\cdot 40 + 2\cdot 20 + 3\cdot 40 + 2\cdot 40 + 2\cdot 40 + 1\cdot 60 = 420 \quad (= s)$$

x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{33}, $x_{34,}$ - базисные переменные

$\alpha_1 + \beta_1 = c_{11} = 1$

$\alpha_1 + \beta_2 = c_{12} = 2$

$\alpha_2 + \beta_2 = c_{22} = 3$

$\alpha_2 + \beta_3 = c_{23} = 2$

$\alpha_3 + \beta_3 = c_{33} = 2$

$\alpha_3 + \beta_4 = c_{34} = 1$

Уравнений 6, переменных 7. Любой переменной придадим любое значение. Пусть $\alpha_1 = 1$

$\beta_1 = 0$
$\beta_2 = 1$
$\alpha_2 = 2$
$\beta_3 = 0$
$\alpha_3 = 2$
$\beta_4 = -1$

Определение потенциалов удобно проводить в таблице:

β_j / α_i	β_1 0	β_2 1	β_3 0	β_4 -1
α_1 1	1	2	1’	0’
α_2 2	2’	3	2	1’
α_3 2	2’	3’	2	1

α_i и β_j заполнили сами. Стоимость в клетке должна быть равна сумме в строке α_i и столбце β_j

c_{pq} : $c'_{13} = \alpha_1 + \beta_3 = 1'$ - считаем, где остались свободные клетки

$c'_{14} = \alpha_1 + \beta_4 = 0'$ внесем их в таблицу со штрихами

$c'_{21} = \alpha_2 + \beta_1 = 2'$

$c'_{24} = \alpha_2 + \beta_4 = 1'$

$c'_{31} = \alpha_3 + \beta_1 = 2'$

$c'_{32} = \alpha_3 + \beta_2 = 3'$

s_{pq} :- коэффициенты в линейной форме при свободных переменных.

$s_{13} = c_{13} - c'_{13} = 3 - 1' = 2$

$s_{14} = c_{14} - c'_{14} = 4 - 0' = 4$

$s_{21} = c_{21} - c'_{21} = 4 - 2' = 2$

$s_{24} = c_{24} - c'_{24} = 0 - 1' = -1$

$s_{31} = c_{31} - c_{31}^{\backslash} = 0 - 2^{\backslash} = -2$

$s_{32} = c_{32} - c_{32}^{\backslash} = 2 - 3^{\backslash} = -1$

$\Rightarrow \quad f = 2x_{13} + 4x_{14} + 2x_{21} - x_{24} - \underline{2x_{31}} - x_{32} + 420$ Коэффициент при x_{31} отрицательный, поэтому можно уменьшить значение линейной функции, перераспределив груз в клетку x_{31}.

1 баз. реш.

40-λ	20+λ		
	40-λ	40+λ	
λ		40-λ	60

Поместив груз в клетку x_{31}, строим ломаную, состоящую из звеньев, обходя базисные клетки (не обязательно все) т.о., чтобы баланс груза сохранился. Данная замкнутая ломаная называется *<u>циклом пересчета.</u>*

Учитывая, что все значения $x_{i\,j} \geq 0$, полагаем $\lambda = 40$, тогда

2 баз. реш.

0	60		
	(0)	80	
40		0	60

Сразу 3 базисные переменные обратились в 0. Пусть x_{22} свободная переменная, тогда x_{11} и x_{33} - базисные нули. Тогда $f = 420 - 2 \cdot 40 = 340$

Определим потенциалы для новых базисных переменных.

β_j / α_i	0	1	2	1
1	1	2	3'	2'
0	0'	1'	2	1'
0	0	1'	2	1

Строку α_i и столбец β_j заполнили сами, составили косвенные переменные (со штрихами)

$s_{13} = c_{13} - c_{13}^{\backslash} = 3 - 3^{\backslash} = 0$

$s_{14} = c_{14} - c_{14}^{\backslash} = 4 - 2^{\backslash} = 2$

$s_{21} = c_{21} - c_{21}^{\backslash} = 4 - 0^{\backslash} = 4$

$s_{22} = c_{22} - c_{22}^{\backslash} = 3 - 1^{\backslash} = 2$

$s_{24} = c_{24} - c_{24}^{\backslash} = 0 - 1^{\backslash} = -1$

$s_{32} = c_{32} - c_{32}^{\backslash} = 2 - 1^{\backslash} = 1$

Составим новую линейную функцию $f = 0 \cdot x_{13} + 2x_{14} + 4x_{21} + 2x_{22} - x_{24} + x_{32} + 340$.

Коэффициент при x_{24} отрицательный

0	60		
	0	80-λ	λ
40		0+λ	60-λ

3 баз. реш. $\lambda = 60$

0	60		
		20	60
40		60	(0)

x_{34} перешла в свободные переменные $f = 340 - 60 = 280$

β_j / α_i	0	1	2	0
1	1	2	3'	1'
0	0'	1'	2	0
0	0	1'	2	0'

$$s_{13} = c_{13} - c'_{13} = 3 - 3' = 0$$
$$s_{14} = c_{14} - c'_{14} = 4 - 1' = 3$$
$$s_{21} = c_{21} - c'_{21} = 4 - 0' = 4$$
$$s_{22} = c_{22} - c'_{22} = 3 - 1' = 2$$
$$s_{32} = c_{32} - c'_{32} = 2 - 1' = 1$$
$$s_{34} = c_{34} - c'_{34} = 1 - 0' = 1$$

Все коэффициенты положительные, то найденное базисное решение 3 оптимальное.

Ответ: $f_{\min} = 280$ при $x_{11} = 0, \quad x_{12} = x_{24} = x_{33} = 60, \quad x_{23} = 20, \quad x_{31} = 40$

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

2.1 Практическое занятие №1 (2 часа).

Тема: «Матрицы»

2.1.1 Задание для работы:

1. Входной контроль.
2. Виды матриц.
3. Действия над матрицами.

2.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Провести входной контроль.

Примерный вариант входного контроля

1. Вычислить: $2\frac{3}{4}:\left(1\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right)\cdot 1\frac{17}{19}$.

2. Найти a, если $\frac{a}{600}=\frac{1{,}25+\frac{1}{4}}{0{,}4\cdot 4{,}5}$

3. Из равенства $(x-a)(y-b)=x$ выразить x.

4. Решить неравенство: $x^2(1+3x)\le 0$.

5. Преобразовать: $\left(-\frac{2}{3}a^4b^3c^2\right)^3:\left(-\frac{1}{3}a^2bc^3\right)^2$.

6. Вычислить: $\frac{-2^4\cdot 2^{-2}-5^5\cdot(25^{-1})^2+12^0}{2^{-1}}$

7. Определить знак $\cos(\lg 600)$.

8. Построить график $y=-ctgx$.

2. Виды матриц.

Привести примеры основных видов матриц (устно). Провести устный опрос теоретического материала.

3. Действия над матрицами.

1. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 3 & 5 & -2\\ 6 & -1 & -4\end{pmatrix}$. Записать:

а) сумму элементов, стоящих на главной диагонали;

б) произведение элементов, стоящих на побочной диагонали;

в) элементы $a_{13},\ a_{21},\ a_{32}$;

г) транспонированную матрицу.

2. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 9 & 4\end{pmatrix}$. Найти:

а) $A+B$; б) $B-A$; в) $-3B$; г) $A\cdot B$; д) $B\cdot A$; е) A^2.

3. Даны две матрицы $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -6\\ 2 & 4 & 3\\ -3 & 1 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & 8 & -5\\ -3 & -1 & 0\\ 4 & 5 & -3\end{pmatrix}$.

Найти: $A+B$; $A-B$; $3A-2B$; $A\cdot B$; $B\cdot A$; A^2-B^2; $(A-B)(A+B)$.

4. Даны две матрицы $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -6\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 8\\ -3 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix}$. Найти $B\cdot A$.

5. Даны две матрицы $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$. Найти произведение $A \cdot B$ и $B \cdot A$.

6. Проверить равенство: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$; если:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.1.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Матрицы», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Матрицы», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

2.2 Практическое занятие №2 (2 часа).
Тема: «Определитель матрицы»

2.2.1 Задание для работы:

1. Определители второго порядка.
2. Способы вычисления определителя третьего порядка.
3. Миноры, алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.

2.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Определители второго порядка.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Вычислить определитель:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & -8 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} e^x & e^{3x} \\ e^x & 3e^{3x} \end{vmatrix}$.

2. Найти α, если: а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & \alpha \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} -4 & \alpha \\ 10 & -1 \end{vmatrix} = 24$.

2. Способы вычисления определителя третьего порядка.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Вычислить определители по правилу треугольника и приписыванием столбцов:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \\ 8 & 7 & 0 \end{vmatrix}$.

2. Найти x, если: а) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1$.

3. Вычислить: а) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 1 & -7 & 0 & 6 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 9 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

3. Миноры, алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Для определителя $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 6 & 5 & 12 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ найти: а) миноры M_{23}, M_{11}, M_{31}; б) алгебраические дополнения A_{12}; A_{13}; A_{32}; в) значение определителя.

2. Вычислить определители по правилу треугольника, приписыванием столбцов и по теореме Лапласа: а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \\ 8 & 7 & 0 \end{vmatrix}$.

2.2.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Определитель матрицы», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Определитель матрицы», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

2.3 Практическое занятие №3 (2 часа).
Тема: «Обратная матрица»

2.1.1 Задание для работы:

1. Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.
2. Применение определителей для нахождения обратной матрицы.

2.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Найдите с помощью элементарных преобразований обратную матрицу A^{-1}, к данной матрице A:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

2. При каких значениях λ матрица A не имеет обратной 1) $A=\begin{pmatrix} \lambda & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$.

2. Применение определителей для нахождения обратной матрицы.

Провести устный опрос теоретического материала.

Определить, имеет ли матрица обратную, и если имеет, то вычислить её:

а) $A=\begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ б) $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2.1.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Обратная матрица», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Обратная матрица», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

2.4 Практическое занятие №4 (2 часа).
Тема: «Ранг матрицы»

2.4.1 Задание для работы:

1. Приведение матрицы к ступенчатому виду.
2. Ранг матрицы
3. Решение матричных уравнений вида АХ = В.

2.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Приведение матрицы к ступенчатому виду.

Провести устный опрос теоретического материала.

Привести матрицу к ступенчатому виду:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Ранг матрицы

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований если:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 6 & 11 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -7 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & -10 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров и указать один из базисных миноров:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 & 8 & -3 \\ 3 & -2 & 3 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Решение матричных уравнений вида АХ = В.

Провести устный опрос теоретического материала.

Решить матричные уравнения:

а) $X\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $X\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

2.4.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Ранг матрицы», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Ранг матрицы», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

2.5 Практическое занятие №5 (2 часа).
Тема: «Системы линейных алгебраических уравнений»

2.5.1 Задание для работы:

1. Матричная запись систем линейных алгебраических уравнений и матричный способ решения системы.
2. Системы линейных однородных уравнений.
3. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

2.5.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Матричная запись систем линейных алгебраических уравнений и матричный способ решения системы.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Решить СЛУ матричным методом: а) $\begin{cases} 4x+y-3z=9 \\ x+y-z=-2 \\ 8x+3y-6z=12 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+3y+z=12 \\ 2x+y+3z=16 \\ 3x+2y+z=8 \end{cases}$

2. Имеются три банка, каждый из которых начисляет вкладчику определенный годовой % (свой для каждого банка). Вкладчик имеет сумму размером 6000 ден. ед. В начале года $1/3$ вклада он положил в 1 банк, $1/2$ - вклада во 2 банк и оставшуюся – в банк 3 и к концу года сумма этих вкладов возросла до 7250 ден. ед. Если бы первоначально $1/6$ вклада он положил в банк 1, $2/3$ - в банк 2 и $1/6$ вклада - в банк 3, то к концу года сумма вклада составила бы 7200 ден. ед. Если бы $1/2$ вклада он положил в банк 1, $1/6$ - в банк 2 и $1/3$ вклада – в банк 3, то сумма вкладов в конце года составила бы вновь 7250 ден. ед. Какой % выплачивает каждый банк?

2. Системы линейных однородных уравнений.

Провести устный опрос теоретического материала.

Вопросы для самопроверки

1 Какая система линейных уравнений называется определенной?
2 Какая система линейных уравнений называется несовместной?
3 Какая система линейных уравнений называется неопределенной?
4 Что называется решением системы линейных уравнений?
5 Какая система линейных уравнений называется однородной?
6 Какая система линейных уравнений называется неоднородной?
7 Сколько решений имеет неопределенная система линейных уравнений?

Найти общее и частное решение системы линейных однородных уравнений: а) $\begin{cases} x_1-x_2-2x_3+3x_4=0, \\ x_1+2x_2-4x_4=0, \\ 2x_1+x_2+2x_3-x_4=0, \\ x_1-4x_2+x_3+10x_4=0. \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0, \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0, \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0. \end{cases}$

3. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

Провести устный опрос теоретического материала.

Решить СЛУ методом Гаусса: а) $\begin{cases} 3x-2y+4z=21 \\ 3x+4y-2z=9 \\ 2x-y-z=10 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x+2y-6z+3t=6 \\ 8x+4y-13z+t=24 \\ 2x+y-3z+t=5 \\ 12x+6y-19z+t=36 \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x-7y-2z=0 \\ 2x-3y-4z=6 \\ 2x-4y+2z=2 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-y+2z=3 \\ 3x-y+3z=13 \\ -5x+y-4z=-23 \end{cases}$ д) $\begin{cases} -6x+10y-2z+t=-7 \\ 24x-43y+5z-7t=13 \\ -8x+15y-z+3t=-1 \\ 4x-7y+z-t=3 \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x+y+z+t+p=7 \\ x+2y+z+t+p=9 \\ x+y+2z+t+p=8 \\ x+y+z+2t+p=5 \\ x+y+z+t+2p=7 \end{cases}$

2.5.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Системы линейных алгебраических уравнений», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Системы линейных алгебраических уравнений», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала и навыки применения современного математического инструментария для решения экономических задач.

2.6 Практическое занятие №6 (2 часа).
Тема: «Системы *n* линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными»

2.6.1 Задание для работы:

1. Теорема Кронекера-Капелли.
2. Правило Крамера и метод Гаусса.

2.6.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Теорема Кронекера-Капелли.

Провести устный опрос теоретического материала.

Исследовать систему линейных уравнений: $\begin{cases} ax_1 + 2x_3 = 2; \\ 5x_1 + 2x_2 = 1; \\ x_1 - 2x_2 + bx_3 = 3. \end{cases}$ а) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 9, \\ 3x - 5y + z = -4, \\ 4x - 7y + z = 5, \end{cases}$ б)

$$\begin{cases} -9x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7, \\ -4x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 7x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3, \end{cases}$$

2. Правило Крамера и метод Гаусса.

Провести устный опрос теоретического материала.

Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера и методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x + iy - 2z = 10, \\ x - y + 2iz = 20, \\ ix + 3iy - (1+i)z = 30. \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 30, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 10, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10. \end{cases}$

2.6.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Системы *n* линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Системы *n* линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

2.7 Практическое занятие №7 (2 часа).
Тема: «Векторная алгебра»

2.7.1 Задание для работы:

1. Арифметические векторы и линейные операции над ними.
2. Векторное пространство R^n. Геометрический смысл пространств R^2 и R^3. Линейные пространства общего вида. Линейная зависимость системы векторов и ее геометрический смысл.
3. Базис и размерность линейного пространства. Координаты вектора в данном базисе. Преобразование координат векторов при замене базиса. Подпространства линейного пространства.

2.7.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Арифметические векторы и линейные операции над ними.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Изобразить произвольно вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Построить векторы $\vec{\kappa} = (\vec{b} + \vec{c}) \cdot 5 - 4\vec{c} - 3\vec{b} - 1{,}5\vec{a}$ и $\vec{m} = (\vec{b} - 3\vec{c}) \cdot 2 + 4\vec{c} - 3{,}5\vec{b} + 2(\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b})$.
2. В треугольнике ABC D и E – середины сторон AB и BC соответственно. Выразить векторы $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{CD}$ через векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$.
3. В ΔABC сторона AB разделена точкой M в отношении $4:3$, считая от точки A. Найти разложение вектора $\overrightarrow{CM}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$.
4. Записать вектора $\vec{a}(1; -1; 2)$, $\vec{b}(0; 1; -5)$, $\vec{c}(-8; 9; 0)$ в ортонормированном базисе.
5. Найти проекции вектора $\vec{a}$ на оси координат, если $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, $A(0; 0; 1)$, $B(3; 2; 1)$, $C(4; 6; 5)$ и $D(1; 6; 3)$.

2. Векторное пространство R^n. Геометрический смысл пространств R^2 и R^3. Линейные пространства общего вида. Линейная зависимость системы векторов и ее геометрический смысл.

Провести устный опрос теоретического материала.

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

$$Ax = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3, -3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2x_3),$$

1. $$Bx = (6 - 5x_2 - 4x_3, 3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2),$$

$$Cx = (x_3^4, 3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2x_3).$$

1) Найти какой-нибудь базис и размерность подпространства L пространства R_3, если L задано уравнением $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$.

2) Доказать, что все симметрические матрицы третьего порядка образуют линейное подпространство всех квадратных матриц третьего порядка. Найти базис и размерность этого подпространства.

3. Базис и размерность линейного пространства. Координаты вектора в данном базисе. Преобразование координат векторов при замене базиса. Подпространства линейного пространства.

Провести устный опрос теоретического материала.

1) Найти какой-нибудь базис и размерность подпространства L пространства R_3, если L задано уравнением $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$.

3) Доказать, что все симметрические матрицы третьего порядка образуют линейное подпространство всех квадратных матриц третьего порядка. Найти базис и размерность этого подпространства.

4) Найти координаты многочлена $P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ в базисе 1, $(x-1),(x-1)^2,(x-1)^3$.

5) Линейный оператор A в базисе (e_1, e_2, e_3) имеет матрицу $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого же оператора в базисе $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$.

2.7.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Векторная алгебра», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Векторная алгебра», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

2.8 Практическое занятие №8 (2 часа).
Тема: «Евклидово пространство»

2.8.1 Задание для работы:

1. Скалярное произведение векторов в R^n.
2. Евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского. Длины векторов и угол между векторами в R^n.
3. Ортогональный и ортонормированный базисы в R^n. Координаты вектора в ортогональном базисе. Процесс ортогонализации. Ортогональные дополнения подпространств.

2.8.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Скалярное произведение векторов в R^n.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Рассматривается евклидово пространство непрерывных функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, … на отрезке $[-1, 1]$. Скалярное произведение определено равенством $(x, y) = \int_{-1}^{1} x(t)y(t)dt$.

   Найти угол между векторами $x = 3t^2 - 1$, $y = 3t - 5t^3$.

2. Известно, что $a \perp b$; $(\widehat{a,c}) = \dfrac{\pi}{3}$; $(\widehat{b,c}) = \dfrac{\pi}{3}$; $|a| = 3$, $|b| = 5$, $|c| = 8$. Вычислить: а) $(3a - 2b)\cdot(b + 3c)$; б) $(b + 2a)\cdot(a - 3c)$; в) $(a + b + c)^2$; г) $(a + 2b - 3c)^2$

2. Евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского. Длины векторов и угол между векторами в R^n.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Задано линейное пространство V^n при $n = 4$. Определить косинус угла между векторами $x = (4; 1; 2; 2)$ и $y = (1; 3; 3; -9)$.

2. Является ли линейно зависимой система векторов: 1) $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; 2) $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$; $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$; 3) $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} - 3\vec{j}$, $c = 2\bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}$.

3. Является ли линейным пространством множество систем четырех действительных чисел $(x_1; x_2; 0; 0)$, $(y_1; y_2; 0; 0)$, $(z_1; z_2; 0; 0)$, где $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ - всевозможные действительные числа? Сложение элементов и умножение на действительное число определены обычно.

3. Ортогональный и ортонормированный базисы в R^n. Координаты вектора в ортогональном базисе. Процесс ортогонализации. Ортогональные дополнения подпространств.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Образуют ли векторы $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ базис? Если образуют, то найти координаты вектора $\overrightarrow{a_4}$ в базисе $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$: $\overrightarrow{a_1}$ $(-2; 1; 0)$, $\overrightarrow{a_2}$ $(3; -1; 1)$, $\overrightarrow{a_3}$ $(2; 0; -1)$, $\overrightarrow{a_4}$ $(1; 1; 1)$.

2. Задано евклидово пространство при $n = 6$. Проверить справедливость теоремы Пифагора для ортогональных векторов $x = (1; 0; 2; 0; 2; 0)$ и $y = (0; 6; 0; 3; 0; 2)$.

3. В евклидовом пространстве непрерывных функций рассматриваются два вектора: $x = t^2 + 1$, $y = \lambda t^2 + 1$. Найти значение λ, при котором векторы x и y ортогональны на отрезке [0, 1], и проверить справедливость теоремы Пифагора для этих векторов.

2.8.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме Евклидово пространство», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме Евклидово пространство», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

2.9 Практическое занятие №9 (2 часа).
Тема: «Многочлены и комплексные числа»

2.9.1 Задание для работы:

1. Основные понятия, связанные с многочленами. Схема Горнера и корни многочленов. Теорема Безу.
2. НОД многочленов и алгоритм Евклида.
3. Разложение правильной дроби на сумму элементарных дробей.
4. Комплексные числа и действия над ними. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа.
5. Алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексных чисел. Корни *n*-ой степени из комплексного числа. Формулировка основной теоремы алгебры.

2.9.2 Краткое описание проводимого занятия:

1**. Основные понятия, связанные с многочленами. Схема Горнера и корни многочленов. Теорема Безу.**

Провести устный опрос теоретического материала.

Разложить на линейные множители следующие многочлены:

1. f (x) = $x^3 + x$
2. f (x) = $x^4 + 3x^2 - 4$

2. НОД многочленов и алгоритм Евклида.

Провести устный опрос теоретического материала.

Выполнить деление многочленов

1) $\dfrac{6x^5 + 13x^4 - 3x^2 - 7x^2 + 6x + 2}{2x^3 + x^2 - 1}$ (2) $\dfrac{x^4}{x^2+1}$; 3) $\dfrac{6x^4 + x^3 + 6x + 1}{2x^2 + 3x + 2}$

3. Разложение правильной дроби на сумму элементарных дробей.

Провести устный опрос теоретического материала.

а) представить следующие дроби в виде суммы простейших (не определяя коэффициентов)

$$\frac{10x^3+6x^2-2x+4}{x^2(x-2)^3(x+1)} \quad \frac{4x^2+6x-3}{(x-1)(x+3)^2(x^2+x+1)} \quad \frac{2x^3-x+5}{x(x+10)(x-4)^3} \quad \frac{12x^6+5x^2-6x}{(x-3)^2(x+2)(x^2+4)}$$

б) Разложить следующие дроби на сумму простейших и определить коэффициенты A,B,C.

$$\frac{2+3x}{x(x+2)} \quad \frac{3x^2-8x-3}{x(x-1)(x+3)} \quad \frac{x^2-4}{x^2(x+1)} \quad \frac{3x+1}{x(x-1)^3} \quad \frac{x^2-3x+1}{(x+2)(x^2+x+1)} \quad \frac{4x-8}{x^2(x^2+4)}$$

4. Комплексные числа и действия над ними. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Даны комплексные числа $z_1 = 3+5i,\quad z_2 = -4-3i,\quad z_3 = 7-i$. Вычислить:

   а) $z_1 + z_2 \cdot z_3$; б) $(z_2 - z_1)\cdot 2z_3$; в) $\dfrac{z_2+z_3}{z_1}$; г) $\dfrac{z_1\cdot z_2}{z_3}$.

2. Следующие комплексные числа изобразить векторами, определить их модули и аргументы

   а) $z_1 = 3,\quad z_2 = -4,\quad z_3 = 2i,\quad z_4 = -6i$;

   б) $z_1 = 7-7i,\quad z_2 = 1+\sqrt{3}i,\quad z_3 = -3\sqrt{2}-3\sqrt{2}\,i,\quad z_4 = -\sqrt{3}+i$.

5. Алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексных чисел. Корни *n*-ой степени из комплексного числа. Формулировка основной теоремы алгебры.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Вычислить: а) $(-1+i)^7$; б) $(-\sqrt{3}+i)^5$; в) $\sqrt[6]{-64}$; г) $\sqrt[3]{1+i}$.
2. Записать в тригонометрической форме $z=-5i$

2.9.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Многочлены и комплексные числа», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Многочлены и комплексные числа», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

2.10 Практическое занятие №10 (2 часа).
Тема: «Линейные преобразования и квадратичные формы»

2.10.1 Задание для работы:

1. Линейные преобразования пространства R^n. Линейные операторы. Ядро и образ линейного оператора. Матрица линейного оператора.
2. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов. Собственные значения квадратных матриц..
3. Квадратичные формы, их матрицы в данном базисе. Приведение квадратичной формы к нормальному виду методом Лагранжа. Приведение квадратичной формы к каноническому виду при помощи ортогонального преобразования. Закон инерции квадратичных форм. Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы

2.10.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Линейные преобразования пространства R^n. Линейные операторы. Ядро и образ линейного оператора. Матрица линейного оператора.

Провести устный опрос теоретического материала.

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

1. $Ax = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3, -3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2x_3)$, $Bx = (6 - 5x_2 - 4x_3, 3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2)$, $Cx = (x_3^4, 3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2x_3)$.

2. $Ax = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2, x_2 + 2)$, $Bx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 0, x_2^4 + 2x_3)$, $Cx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2, x_2 + 2x_3)$.

2. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов. Собственные значения квадратных матриц..

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}. \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.Линейное преобразование в пространстве $\mathbf{R}^3$ переводит вектор вида (a, b, c) в вектор $(c, a + 4b + c, a)$. Записать матрицу этого преобразования в каноническом базисе. Найти собственные значения заданного преобразования.

3. Квадратичные формы, их матрицы в данном базисе. Приведение квадратичной формы к нормальному виду методом Лагранжа. Приведение квадратичной формы к каноническому виду при помощи ортогонального преобразования. Закон инерции квадратичных форм. Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_3^2. \qquad 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 3x_2^2 + 4x_3^2.$$

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием.

$$4x_2^2 - 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3. \qquad 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2\sqrt{3}x_2x_3.$$

2.10.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Линейные преобразования и квадратичные формы», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Линейные преобразования и квадратичные формы», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

2.11 Практическое занятие №11 (2 часа).
Тема: «Прямая и плоскость»

2.11.1 Задание для работы:

1. Прямая и гиперплоскость в *n*-мерном пространстве. Угол между гиперплоскостями. Расстояние от точки до гиперплоскости.
2. Прямая на плоскости и в пространстве. Прямая, отрезок, луч в *n*-мерном пространстве.
3. Плоскость в трехмерном пространстве.

2.11.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Прямая и гиперплоскость в *n*-мерном пространстве. Угол между гиперплоскостями. Расстояние от точки до гиперплоскости.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Найти угол между плоскостями.

1) $x-3y+5=0, \quad 2x-y+5z-16=0.$ 2). $x-3y+z-1=0, \quad x+z-1=0.$

2. Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3

$M_1(-3{,}4{,}-7), \quad M_2(1{,}5{,}-4), \quad M_3(-5{,}-2{,}0), \quad M_0(-12{,}7{,}-1).$

2. Прямая на плоскости и в пространстве. Прямая, отрезок, луч в *n*-мерном пространстве.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точки: а) $A(3;1)$ *и* $B(5;4)$; б) $A(3;1)$ *и* $C(3;5)$; в) $A(3;1)$ *и* $D(-4;1)$.
2. Стороны AB, BC и AC треугольника ABC заданы соответственно уравнениями $4x+3y-5=0,\ x-3y+10=0,\ x-2=0$. Определить координаты его вершин.
3. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{4}, \quad x+2y+3z-14=0.$

3. Плоскость в трехмерном пространстве.

Провести устный опрос теоретического материала.

Даны координаты точек $A(5;5;4)$, $B(1;-1;4)$, $C(3;5;1)$, $D(5;8;-1)$. Составить уравнения:
1) плоскости ABC; 2) прямой AB; 3) прямой DM, перпендикулярной к плоскости ABC; 4) прямой CN, параллельной прямой AB; 5) плоскости, проходящей через точку D перпендикулярно к прямой AB. Вычислить:
6) синус угла между прямой AD и плоскостью ABC; 7) косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью ABC.

2.11.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Прямая и плоскость», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Прямая и плоскость», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

2.12 Практическое занятие №12 (2 часа).
Тема: «Кривые второго порядка»

2.1.1 Задание для работы:

1. Классификация кривых второго порядка. Эллипс, гипербола и парабола, их свойства и канонические уравнения.

2. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду.

2.12.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Классификация кривых второго порядка. Эллипс, гипербола и парабола, их свойства и канонические уравнения.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Составьте уравнение окружности, концы диаметра которой имеют координаты $A(-4;5)$ и $B(8;9)$.
2. Составьте уравнение прямой, проходящей через центры окружностей: $x^2+y^2-8x-4y+11=0$ и $x^2+y^2+4x+12y+4=0$.
3. Составьте уравнение эллипса, если он проходит через точки $A(4;\,0)$ и $B(2;\,3)$. Найти большую и малую полуоси, расстояние между фокусами и эксцентриситет эллипса.
4. Составьте уравнение эллипса, один из фокусов которого находится в точке $\left(\sqrt{3};\,0\right)$, а эксцентриситет равен $\frac{1}{3}$.
5. Найти координаты фокусов, расстояние между ними, длины действительной и мнимой осей, эксцентриситет гиперболы $\frac{x^2}{14}-\frac{y^2}{22}=1$.
6. Составить уравнение гиперболы, если длина действительной полуоси равна 8, и гипербола проходит через точку $(-10;-3)$.
7. Даны уравнения асимптот $y=\pm\,2x$ и точка $M(5;8)$, лежащая на гиперболе. Составить ее уравнение.
8. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы для параболы $y=0{,}5x^2$.
9. Составить уравнение параболы, если ее фокус находится в точке: а) $F(5;0)$; б) $F(0;-3)$.
10. Найти координаты точек пересечения кривой второго порядка и прямой: а) $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{25}=1$ и $x+3y-21=0$; б) $16x-y^2=0$ и $2x-y+2=0$. Сделать чертеж.

2. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду.

Провести устный опрос теоретического материала.

Определить тип линий, их основные элементы и сделать рисунок.

а) $x^2+y^2+8x-3y+37/4=0$	*б*) $4x^2+9y^2-36=0$
в) $25x^2-4y^2-100=0$	*г*) $-9x^2+16y^2=144$
д) $y^2=8x$	*е*) $y^2-8y+4x+8=0$

2.12.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Кривые второго порядка», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Кривые второго порядка», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

2.13 Практическое занятие №13 (2 часа).
Тема: «Поверхности второго порядка»

2.13.1 Задание для работы:

1. Классификация поверхностей второго порядка. Эллипсоиды, параболоиды и гиперболоиды, их канонические уравнения.

2. Выпуклые множества в пространстве R^n. Полупространства, выпуклые многогранные области. Системы линейных неравенств и их геометрический смысл.

3. Угловые точки выпуклых многогранных областей. Выпуклая оболочка системы точек в R^n.

2.13.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Классификация поверхностей второго порядка. Эллипсоиды, параболоиды и гиперболоиды, их канонические уравнения.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Определите вид поверхности $x^2+2y^2+3z^2-6x+4y- \;-12z-13=0$.

2. Приведите уравнение поверхности $9x^2+4y^2-12z^2-18x- \;-24y+48z-3=0$ к каноническому виду.

3. Приведите уравнение поверхности $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+ \;+2yz-2x+6y+2z=0$ к каноническому виду и изобразите график полученной поверхности второго порядка.

4. Определите координаты центра и радиус сферы $x^2+y^2+z^2-12x-6y+37=0.$

5. Определите каноническое уравнение поверхности второго порядка $4x^2+9y^2+18z^2-8x+18y-72z+49=0$, и изобразите график полученной поверхности.

6. Определите каноническое уравнение поверхности второго порядка $5x^2+4y^2+3z^2+9xy+8xz+7yz+7x+6y+5z+2=0$, и изобразите график полученной поверхности.

2. Выпуклые множества в пространстве R^n. Полупространства, выпуклые многогранные области. Системы линейных неравенств и их геометрический смысл.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Дайте определение выпуклой оболочки множества точек. Пусть M – выпуклая оболочка точек $A(7; –3)$, $B(9; –3)$, $C(7; –1)$, $D(8,8; –3)$, $E(8,2; –2,2)$, $F(7; –1,6)$. Найдите ограничения в виде неравенств, которые задают множество M.

3. Угловые точки выпуклых многогранных областей. Выпуклая оболочка системы точек в R^n.

Провести устный опрос теоретического материала.

2.13.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Поверхности второго порядка», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Поверхности второго порядка», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

2.14 Практическое занятие №14 (2 часа).
Тема: «Продуктивность неотрицательных матриц»

2.14.1 Задание для работы:

1.. Собственные значения и собственные векторы неотрицательных матриц.
2. Теорема Фробениуса-Перрона. Число и вектор Фробениуса, их свойства.
3. Продуктивность неотрицательных матриц.

2.14.2 Краткое описание проводимого занятия:

1.. Собственные значения и собственные векторы неотрицательных матриц.

Провести устный опрос теоретического материала.
Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Теорема Фробениуса-Перрона. Число и вектор Фробениуса, их свойства.

Провести устный опрос теоретического материала.

Найти число и вектор Фробениуса матрицы $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 7 \\ 8 & 4 & 5 \\ 3 & 9 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Продуктивность неотрицательных матриц.

Провести устный опрос теоретического материала.
1. Выяснить, продуктивна ли матрица А:

1) $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 1{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}$

2. Выяснить, при каких значениях k>0 матрица $A = \kappa \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ будет продуктивна

2.14.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Продуктивность неотрицательных матриц», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Продуктивность неотрицательных матриц», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

2.15 Практическое занятие №15 (2 часа).
Тема: «Модель многоотраслевой экономики Леонтьева»

2.15.1 Задание для работы:

1. Модель многоотраслевой экономики Леонтьева.
2. Продуктивные модели Леонтьева.
3. Различные критерии продуктивности модели Леонтьева.

2.15.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Модель многоотраслевой экономики Леонтьева.
Провести устный опрос теоретического материала.
2. Продуктивные модели Леонтьева.
Провести устный опрос теоретического материала.

В таблице приведены данные об использовании стоимостного баланса за отчетный период, усл. ден. ед.:

№ п/п	Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовый продукт
		Q_1	Q_2		
1	Q_1	3	8	89	100
2	Q_2	5	7	88	100

Требуется:

1) составить матрицу прямых затрат и проверить ее продуктивность;
2) вычислить объемы конечного продукта при увеличении валового выпуска каждой отрасли соответственно на 100% и 50%;
3) Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление отрасли Q_1 увеличить в k =1 раз, а отрасли Q_2 – на 10%.

3. Различные критерии продуктивности модели Леонтьева.
Провести устный опрос теоретического материала.
В табл. 16.4 приведены данные по балансу за некоторый период времени между пятью отраслями промышленности. Найти векторы конечного потребления и валового выпуска, а также матрицу коэффициентов прямых затрат и определить, является ли она продуктивной в соответствии с приведенными выше критериями.

Таблица 16.4

№ п/п	Отрасль	Потребление					Конечный продукт	Валовой выпуск, ден. ед.
		1	2	3	4	5		
1	Станкостроение	15	12	24	23	16	10	100
2	Энергетика	10	3	35	15	7	30	100
3	Машиностроение	10	5	10	10	10	5	50
4	Автомобильная промышленность	10	5	10	5	5	15	50
5	Добыча и переработка углеводородов	7	15	15	10	3	50	100

2.15.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Модель многоотраслевой экономики Леонтьева», необходимые для решения экономических задач, приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Модель многоотраслевой экономики Леонтьева» и применять методы линейной алгебры для решения экономических задач, сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

2.16 Практическое занятие №16 (2 часа).
Тема: «Задачи линейного программирования»

2.16.1 Задание для работы:

1. Примеры экономико-математических моделей, приводящих к задачам линейного программирования.
2. Стандартная и каноническая формы записи задач линейного программирования.
3. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования в случае двух переменных. Графический метод решения.
4. Решение задачи линейного программирования методом перебора вершин.

2.16.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Примеры экономико-математических моделей, приводящих к задачам линейного программирования.

Провести устный опрос теоретического материала.

Составить экономико-математическую модель задачи **об оптимальном использовании ресурсов**

Для изготовления двух видов продукции используется четыре вида ресурсов: Вь B_2, B_3, B_4. Запасы ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, приведены в табл. 1.

Вид ресурса	Запас ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		Первый вид	Второй вид продукции
B_1	18	1	3
B_2	16	2	1
B_3	5	-	1
B_4	21	3	-

На производство единицы продукции 1-го и 2-го вида используется различное количество ресурсов. Так, на производство единицы продукции 1-го вида используется только одна единица ресурса B_1 а на производство единицы продукции 2-го вида используется 3 единицы ресурса B_1 на производство единицы продукции 1-го вида используется 2 единицы ресурса B_2, а на производство единицы продукции 2-го вида используется 1 единица ресурса B_2, в то же время на производство продукции 1-го вида ресурс B_3 вообще не используется, а на производство продукции 2-го вида не используется ресурс B_4.

Выручка, получаемая предприятием от продажи единицы продукции первого и второго вида, составляет соответственно 2 и 3 рубля.

Необходимо составить такой план производства продукции первого и второго вида, при котором выручка предприятия от ее реализации будет максимальной.

2. Стандартная и каноническая формы записи задач линейного программирования.

Провести устный опрос теоретического материала.

Привести к каноническому виду общую задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 7, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \ge 3, \\ x_1 - x_2 + 9x_3 = 16, \\ x_1 \ge 0, \end{cases}$$
$$L(X) = x_1 + x_2 - x_3 \to \max$$

3. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования в случае двух переменных. Графический метод решения.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Решить графическим способом следующую задачу линейного программирования:

$$z = x - 3y \to \min; \begin{cases} 2x + 4y \geq 30, \\ 7x - 3y \leq 37, \\ 5x - 7y \geq -27, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

2. Решить графическим способом следующую задачу (*Выбор оптимального рациона питания*). Детская молочная кухня в суточный рацион питания для одного трехмесячного ребенка включает два продукта питания: смесь № 5 и В-рис, причем смеси № 5 должно войти в дневной рацион не более 400 г. Стоимость 100 г смеси № 5 составляет 0,7 руб., В-риса — 0,9 руб. Содержание питательных веществ в 100 г продукта, минимальные нормы потребления указаны в таблице 3. Определить оптимальный рацион питания, стоимость которого будет наименьшей.

4. Решение задачи линейного программирования методом перебора вершин.

Провести устный опрос теоретического материала.

Решить предыдущую задачу *методом перебора вершин*

2.16.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Задачи линейного программирования», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Задачи линейного программирования», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

2.17 Практическое занятие №17 (2 часа).
Тема: «Симплекс-метод решения задач линейного программирования»

2.1.1 Задание для работы:

1. Алгоритм симплекс-метода.
2. Нахождение исходного допустимого базиса.
3. Метод искусственного базиса.

2.17.2 Краткое описание проводимого занятия :

1. Алгоритм симплекс-метода.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Решить задачу линейного программирования на минимум, если начальная симплекс-таблица имеет следующий вид:
$$\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ z \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 10 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 & -9 \end{pmatrix}.$$

2. Составить симплекс-таблицу для задачи. На АООТ «Балтекс» для выпуска глянцевой ткани, ткани «Турист» и курточной ткани используются ткацкие станки двух типов: станки гидравлические и станки ткацкие бесчелночные (коротко: СГ и СТБ) с различной производительностью. Для изготовления указанных видов ткани используются нити и красители. Ресурсы времени работы станков, нитей и красителей ограничены. В таблице 13 указаны ежемесячные ресурсы времени работы станков в тысячах станко-часов, нитей и красителей в килограммах, производительность станков в метрах на час, нормы расхода нитей и красителей в килограммах на тысячу метров каждого вида ткани и цена 1 м ткани. Требуется организовать выпуск продукции так, чтобы ежемесячная выручка предприятия была максимальной.

2. Нахождение исходного допустимого базиса.

Провести устный опрос теоретического материала.

Найти исходный допустимый базис сформулированной выше задачи.

3. Метод искусственного базиса.

Провести устный опрос теоретического материала.

Решить сформулированную выше задачу методом искусственного базиса.

2.17.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Симплекс-метод решения задач линейного программирования», необходимые для решения экономических задач, приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Симплекс-метод решения задач линейного программирования» и применять для решения экономических задач, сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

2.18 Практическое занятие №18 (2 часа).
Тема: «Транспортная задача»

2.18.1 Задание для работы:

1. Понятие о взаимно-двойственных задачах линейного программирования. Основные теоремы двойственности. Двойственность в экономико-математических моделях.
2. Транспортная задача.

2.18.2 Краткое описание проводимого занятия :

1. Понятие о взаимно-двойственных задачах линейного программирования. Основные теоремы двойственности. Двойственность в экономико-математических моделях.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Используя двойственность, найти решение следующей задачи линейного программирования: $z = 6y_1 + 133y_2 - 41y_3 \to \min$; $\begin{cases} -10y_1 + 7y_2 + 3y_3 \geq 1, \\ 4y_1 + 7y_2 - 11y_3 \geq 20, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0. \end{cases}$.

2. Исходная задача $Z(X) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18, \\ 2x_1 + x_2 \leq 16, \\ x_2 \leq 5, \\ 3x_1 \leq 21, \end{cases} \quad x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0$$

имеет оптимальное решение $X^* = (6; 4; 0; 0; 1; 3)$ и значение целевой функции $Z(X^*) = 24 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4$, для которой $\max Z(X^*) = 24$. Составить двойственную задачу и найти её оптимальное решение, целевую функцию оптимального решения и её минимум.

2. Транспортная задача.

Провести устный опрос теоретического материала.

Автотранспортное предприятие получило заказ на укомплектование трех строящихся объектов стройматериалами, производимыми на двух заводах. На первом заводе подготовлено к отправке 120 т стройматериалов, на втором — 180 т. На первый объект необходимо доставить 70 т строительных материалов. Второй и третий объекты нуждаются в получении 140 и 90 т указанного материала.

Матрицей $\begin{pmatrix} 8 & 12 & 5 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ задано:

а) доход от перевозки одной тонны стройматериалов с каждого завода к каждому строящемуся объекту;

б) стоимость перевозки одной тонны стройматериалов с каждого завода к каждому строящемуся объекту.

Составить оптимальный план перевозок,

а) максимизирующий доход;

б) минимизирующий стоимость.

2.18.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Транспортная задача», необходимые для решения экономических задач, приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Транспортная задача», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.