ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Направление *Экономика*

Профиль образовательной программы *Финансы и кредит*

Форма обучения *заочная*

СОДЕРЖАНИЕ

1. Конспект лекций
1. 1 Лекция №1 (2 часа)
Тема: «Матрицы. Определитель матрицы. Обратная матрица. Системы линейных алгебраических уравнений»

1.1.1 Вопросы лекции:
1. Виды матриц. Действия над матрицами.
2. Определители второго порядка. Способы вычисления определителя третьего порядка.
3. Решение матричных уравнений вида АХ = В. Матричная запись систем линейных алгебраических уравнений.
4. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

1.1.2 Краткое содержание вопросов:

1 Виды матриц. Действия над матрицами.

Матрицей называют таблицу, состоящую из n строк и m столбцов. Элементами матрицы могут быть числа или иные математические объекты.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} \sin\alpha & \sin\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Последняя матрица имеет две строки и два столбца, следовательно, её размер (2x2).

c_{ij} - элемент матрицы С, стоящий в i-ой строке и j-ом столбце.

Если число строк матрицы равно числу столбцов, то такая матрица называется **квадратной**.

Две матрицы одинакового размера называются **равными** ($A=B$), если равны их элементы, стоящие на соответствующих местах.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой.**

Квадратная матрица называется **единичной**, если она имеет вид:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} \qquad \text{или} \qquad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}$$

Верхнетреугольной называется матрица у которой все элементы ниже главной диагонали равны нулю.

С матрицами можно производить операции сложения (вычитания), умножения на число, умножения матрицы на матрицу, транспонирования, нахождения матрицы, обратной данной. Для иллюстрации операций будем рассматривать матрицы размера (3x3), если заранее не оговорен другой размер.

Суммой (разностью) двух матриц A и B называется матрица, определяемая равенством:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3x3} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & a_{13}\pm b_{13} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & a_{23}\pm b_{23} \\ a_{31}\pm b_{31} & a_{32}\pm b_{32} & a_{33}\pm b_{33} \end{pmatrix}$$

Произведением числа *m* на матрицу *A* называется матрица, определяемая равенством:

$$m\bullet\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma_{11} & ma_{12} & ma_{13} \\ ma_{21} & ma_{22} & ma_{23} \\ ma_{31} & ma_{32} & ma_{33} \end{pmatrix}$$

Произведение двух матриц *A* и *B* обозначается символом $A\cdot B$ и определяется **равенством:**

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j2} & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j3} \\ \sum\limits_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j2} & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j3} \\ \sum\limits_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j2} & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j3} \end{pmatrix}$$

т.е. элемент матрицы - произведения стоящий в *i*-ой строке и k -м столбце, равен сумме произведений элементов *i*-ой строки матрицы *A* и *k*-го столбца матрицы *B*.

Отсюда вытекает ограничение на размерность матриц *A* и *B*: число элементов в строке матрицы *A* должно равняться числу элементов в столбце матрицы *B*, чтобы для каждого элемента *i*-й строки матрицы *A* нашелся парный элемент из *k*-го столбца *B*.

По отношению к произведению двух матриц переместительный закон, вообще говоря, не выполняется: *AB* не равно *BA*.

2. Определители второго порядка. Способы вычисления определителя третьего порядка.

Каждой квадратной матрице *A* соответствует число − **определитель** данной матрицы Δ (*det A*).

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \to \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ −определитель второго порядка.

$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \to \Delta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$ −определитель третьего порядка

Формула для вычисления определителя второго порядка:

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \bullet a_{22} - a_{12} \bullet a_{21} \qquad (1)$$

Свойства определителей:

1. Определитель не изменяется, если его строки поменять местами с соответствующими столбцами,

2. При перестановки двух строк (или столбцов) определитель изменит знак на противоположный, сохраняя абсолютную величину.

3. Определитель с двумя одинаковыми сроками (столбцами) равен нулю.

4. Общий множитель всех элементов строки или столбца можно вынести за знак определителя; если все элементы какой-то строки или столбца равны 0, то и определитель равен 0.

5. Если к элементам какой-либо строки (или столбца) (определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и тоже число, то определитель не изменится.

Рассмотрим теперь матрицу размера (3 х 3), то есть имеющую 3 строки и 3 столбца

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

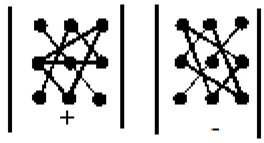
Её определителем (третьего порядка) называют число, обозначаема символом

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

и определяемое равенством

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \qquad (2)$$

Чтобы запомнить, какие произведения в правой части равенства (2) берутся со знаком *«+»,* а какие со знаком *«*—», полезно использован следующее правило треугольников:



Это правило позволяет легко записать формулу (2) и вычислить данный определитель.

Все свойства определителей второго порядка остаются справедливыми для определителей третьего порядка и доказываются так же непосредственной проверкой.

3. Решение матричных уравнений вида АХ = В. Матричная запись систем линейных алгебраических уравнений.

Матричный метод применим к решению систем уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных.

Метод удобен для решения систем невысокого порядка.

Метод основан на применении свойств умножения матриц.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Составим матрицы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Систему уравнений можно записать: $A \cdot X = B$.

Сделаем следующее преобразование: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$,

т.к. $A^{-1} \cdot A = E$, то $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$ $\mathbf{X = A^{-1} \cdot B}$

Для применения данного метода необходимо находить обратную матрицу, что может быть связано с вычислительными трудностями при решении систем высокого порядка.

Несмотря на ограничения возможности применения данного метода и сложность вычислений при больших значениях коэффициентов, а также систем высокого порядка, метод может быть легко реализован на ЭВМ.

4. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

Рассмотрим СЛУ $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ (1)

Метод Гаусса (метод последовательного исключения переменных) заключается в том, что с помощью элементарных преобразований системы переходим к равносильной СЛУ ступенчатого или треугольного вида, из которой последовательно находят все переменные. К элементарным преобразованиям относят: перестановка уравнений, вычеркивание из системы верного равенства, умножение обеих частей одного уравнения на одно и то же число $\neq 0$ и прибавление к соответствующим обеим частям другого уравнения.

Используя метод Гаусса и элементарные преобразования, мы работаем с коэффициентами при неизвестных и свободными членами. Поэтому удобно выписывать расширенную матрицу, соответствующую данной СЛУ и приводить эту матрицу к ступенчатому виду. Используя найденную матрицу записать систему ступенчатого вида, решив которую, найдем решение СЛУ.

<u>Пример:</u> Решить СЛУ методом Гаусса $\begin{cases} x + 2y + 5z = -9 \\ x - y + 3z = 2 \\ 3x - 6y - z = 25 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -2 & 25 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-1)\ (-3) \\ \lrcorner \\ \quad \lrcorner \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-4) \\ \lrcorner \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = -9 \\ \quad -3y - 2z = 11 \\ \qquad\quad -8z = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = -1 \end{cases}$$

Ответ: (2;-3;-1)

Достоинством метода Гаусса по сравнению с другими в том, что он позволяет однозначно установить совместна система или нет, а в случае совместности, найти её решение (единственное или бесконечное множество).

1.2. Лекция № 2 (2 часа)
Тема: «Векторная алгебра. Евклидово пространство. Многочлены и комплексные числа»

1.2.1. Вопросы лекции:

1. Арифметические векторы и линейные операции над ними.

2. Векторное пространство R^n. Геометрический смысл пространств R^2 и R^3. Линейные пространства общего вида. Линейная зависимость системы векторов и ее геометрический смысл.

3. Базис и размерность линейного пространства. Координаты вектора в данном базисе. Преобразование координат векторов при замене базиса. Подпространства линейного пространства. Скалярное произведение векторов в R^n.

4. Евклидово пространство. Длины векторов и угол между векторами в R^n.

5. Ортогональный и ортонормированный базисы в R^n. Координаты вектора в ортогональном базисе.

6. Основные понятия, связанные с многочленами. Схема Горнера и корни многочленов. Теорема Безу. Разложение правильной дроби на сумму элементарных дробей.

7. Комплексные числа и действия над ними. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа.

8. Алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексных чисел. Корни *n*-ой степени из комплексного числа. Формулировка основной теоремы алгебры.

1.2.2.**. Краткое содержание вопросов**

1. Арифметические векторы и линейные операции над ними.

Арифметическим вектором называется упорядоченная совокупность n чисел.
бозначается $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$;
числа $x_1, x_2, ..., x_n$ называются компонентами арифметического вектора.
Для арифметических векторов определены линейные операции — сложение арифметических векторов и умножение вектора на число:
для любых $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ и любого числа α справедливо:
$x + y = (x_1+ y_1, x_2 +y_2, ..., x_n+ y_n)$; $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$.
Множество арифметических векторов, для которых определены операции сложения и умножения на число называется пространством арифметических векторов Rn.
Вектор $\theta = (0, 0, ..., 0)$ называется нулевым вектором Rn,
а вектор $-x = (-x_1,- x_2, ...,- x_n)$ — противоположным вектором для вектора x в Rn.
Для любых векторов x, y и z из Rn и любых чисел α и β справедливо:
1. $x + y = x + y$, сложение коммутативно;
2. $x + (y + z) = (x + y)+ z$, сложение ассоциативно;
3. $x + \theta = x$;
4. $x + (-x) = \theta$;
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, умножение на число дистрибутивно относительно сложения векторов;
6. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, умножение на число ассоциативно;
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, умножение вектора на число дистрибутивно относительно сложения чисел.
8. $1\cdot x = x$.
Примером пространства арифметических векторов Rn, n = 2, является пространство геометрических радиусов-векторов на плоскости, записанных в координатной форме:
$a = a_1\cdot i + a_2\cdot j = (a_1, a_2)$, $b = b_1\cdot i + b_2\cdot j = (b_1, b_2)$,
$a + b = (a_1+ b_1 , a_2+ b_2)$, $\alpha a = (\alpha a_1, \alpha a_2)$.
Множество квадратных матриц размерности 2, с определенными для них операциями сложения и умножения на число, можно рассматривать как пространство арифметических векторов Rn, n = 4.
Действительно.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},\ \mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix},\ \alpha\cdot\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha\cdot a_{11} & \alpha\cdot a_{12} \\ \alpha\cdot a_{21} & \alpha\cdot a_{22} \end{pmatrix}.$$

С другой стороны,

$\mathbf{a} = (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$, $\mathbf{b} = (b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22})$,
$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_{11} + b_{11}, a_{12} + b_{12}, a_{21} + b_{21}, a_{22} + b_{22})$,
$\alpha \cdot \mathbf{a} = (\alpha \cdot a_{11}, \alpha \cdot a_{12}, \alpha \cdot a_{21}, \alpha \cdot a_{22})$

Множество Mn многочленов степени не выше n , с определенными для них операциями сложения и умножения на число, можно рассматривать как пространство арифметических векторов Rn+1.

$$P_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n \in \mathbf{M_n} \Leftrightarrow (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{R_{n+1}},$$
$$Q_n(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_n t^n \in \mathbf{M_n} \Leftrightarrow (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbf{R_{n+1}},$$
$$P_n(t) + Q_n(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + \ldots + (a_n + b_n)t^n \in \mathbf{M_n} \Leftrightarrow$$
$$(a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \in \mathbf{R_{n+1}},$$

Действительно. $\alpha \cdot P_n(t) = \alpha \cdot a_0 + \alpha \cdot a_1 t + \alpha \cdot a_2 t^2 + \ldots + \alpha \cdot a_n t^n \in \mathbf{M_n} \Leftrightarrow (\alpha \cdot a_0, \alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \ldots, \alpha \cdot a_n) \in \mathbf{R_{n+1}}$.

Вектор а = (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) − вектор из R4.

2. Векторное пространство R^n. Геометрический смысл пространств R^2 и R^3. Линейные пространства общего вида. Линейная зависимость системы векторов и ее геометрический смысл.

Вектором размерности n называется упорядоченный набор из n действительных чисел. Будем записывать вектор в виде $\overline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$ - координаты вектора. Размерность вектора определяется числом его координат и является его отличительной характеристикой. Векторы равны, если они одной размерности и имеют равные соответствующие координаты: (2,3,5) = (2,3,5). Нуль-вектор $\bar{0}$ = (0,0,…,0) не следует путать с числом нуль.

N-мерное векторное пространство R^n определяется как множество всех n-мерных векторов, для которых определены операции умножения на действительные числа и сложение.

Геометрический смысл пространств R^2 и R^3 Множество всех n-мерных арифметических векторов, в которых введены операции: сложение векторов и умножение на число называется арифметическим n-мерным пространством (R^n).

Геометрический смысл имеют лишь пространства R^1, R^2, R3 . Для R^1 – это прямая, для R^2 – плоскость, для R^3 – трехмерное пространство.

При n>3 пространство R^n представляется лишь чисто математическим и не реальным объектом.

Линейные пространства общего вида Ги́льбертово простра́нство — обобщение евклидова пространства, допускающее бесконечную размерность. Названо в честь Давида Гильберта.

Гильбертово пространство есть банахово пространство, норма которого порождена положительно определённым скалярным произведением.

Линейная зависимость системы векторов и ее геометрический смысл Вектор B называется линейной комбинацией векторов A_1, A_2, . . ., A_n векторного пространства Rn, если он равен сумме произведений этих векторов на произвольные действительные числа: $B = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_n A_n$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ – любые действительные числа.

Векторы A_1, A_2, . . ., A_n называются линейно зависимыми, если существует такая линейная комбинация $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_n A_n = 0$, при не равных нулю одновременно αi (i = 1, 2, . . . n), т.е. $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 \neq 0$.

Если же $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_n A_n = 0$ выполняется только при всех $\alpha_i = 0$ (i = 1, 2, . . . n), то векторы называются линейно независимыми.

Свойства:

1. Если среди векторов Ai (i = 1, 2, . . . n) есть нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.
2. Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима.
3. Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов раскладывается в линейную комбинацию остальных векторов.

Геометрический смысл линейной зависимости векторов очевиден для случаев двумерных векторов на плоскости и трехмерных векторов в пространстве: в случае двух векторов, когда один вектор выражается через другой: $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, т.е. эти векторы коллинеарны или, что то же самое, они находятся на параллельных прямых.

4. Любые 2 коллинеарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 2 линейно зависимые векторы коллинеарны: $\vec{b} \parallel \vec{a} \Leftrightarrow \vec{b} = \lambda \vec{a}$

В пространственном случае линейной зависимости трех векторов они параллельны одной плоскости, т.е. компланарны.

5. Любые 3 компланарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 3 линейно зависимые векторы компланарны.

Т.е., достаточно «подправить» соответствующими сомножителями длины этих векторов, чтобы один из них стал суммой двух других (выражался через них).

В пространстве Rn любая система, содержащая m векторов, линейно зависима при m > n.

3. Базис и размерность линейного пространства. Координаты вектора в данном базисе. Преобразование координат векторов при замене базиса. Подпространства линейного пространства. Скалярное произведение векторов в R^n.

Говорят, что элемент (вектор) x линейного пространства L линейно выражается через элементы (векторы) $e_1, e_2, \ldots, e_n \in L$, если его можно представить в виде линейной комбинации этих элементов, т.е. представить в виде $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$.

Если любой вектор системы $e_1, e_2, \ldots, e_k$ векторов линейного пространства L линейно выражается через остальные векторы системы, то система векторов называется линейно зависимой.

Система векторов, которая не является линейно зависимой, называется линейно независимой.

Справедливо следующее утверждение: Система $e_1, e_2, \ldots, e_k$ векторов линейного пространства L линейно независима тогда и только тогда, когда из равенства $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = 0$ следует равенство нулю всех коэффициентов $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$.

Если в линейном пространстве L существует линейно независимая система из n векторов, а любая система из (n+1)-го вектора линейно зависима, то число n называется **размерностью пространства** L и обозначается $\dim(L)$. В этом случае пространство L называют n-мерным линейным пространством или n-мерным векторным пространством.

Любая упорядоченная линейно независимая система n векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейного пространства L образует **базис пространства** и любой вектор x€L единственным образом выражается через векторы базиса: $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$.

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называют координатами вектора x в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и обозначают $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. При этом для любых двух произвольных векторов n-мерного линейного пространства $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и произвольного числа α справедливо:

$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$ и $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$.

Это означает, что все n-мерные линейные пространства “устроены” одинаково - как пространство R^n векторов-столбцов из n действительных чисел, т.е. что все они изоморфны пространству R^n.

Линейные пространства X и Y называются изоморфными, если между их элементами можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что если векторам X и X’ из X соответствуют векторы y и y' из Y, то вектору $x + x'$ соответствует вектор $y + y'$ и при любом α вектору $\alpha x \in X$ соответствует вектор $\alpha y \in Y$.

Изоморфизм n-мерных линейных пространств пространству R^n означает, что соотношения между элементами n-мерного линейного пространства и операции с ними можно изучать как соотношения между векторами из R^n и операции с ними и что всякое утверждение относительно векторов из $\mathbb{R}^n$ справедливо для соответствующих элементов любого n-мерного линейного пространства.

Например, доказано, что система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ из R^n

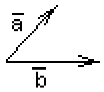
$$e_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ \ldots \\ e_{n1} \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \\ \ldots \\ e_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \quad e_n = \begin{pmatrix} e_{1n} \\ e_{2n} \\ \ldots \\ e_{nn} \end{pmatrix}$$

образует базис в R^n тогда и только тогда, когда отличен от нуля определитель матрицы, со столбцами $e_1, e_2, \ldots, e_n$:

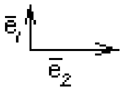
$$\det A = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{n1} & e_{n1} & \dots & e_{nn} \end{pmatrix} \neq 0$$

Для векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ из L это означает, что они образуют базис в L тогда и только тогда, когда отличен от нуля определитель матрицы, столбцами которой являются компоненты векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$.

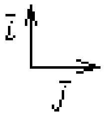
Упорядоченная пара двух ненулевых, не коллинеарных векторов образует _базис_ на плоскости.



$(\vec{a}; \vec{b})$ - базис. $\bar{a} \nparallel \bar{b}$, $\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$



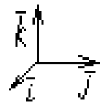
$\bar{e}_1 \perp \bar{e}_2$, $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ - _ортогональный базис_.



$|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$, $\bar{i} \perp \bar{j}$, $(\vec{i}; \vec{j})$ - _ортонормированный базис_. (ПДСК на плоскости)

ОПР: Упорядоченная система трёх ненулевых, не кокомплонарных векторов образуют _базис_ в пространстве.

$\bar{e}_1 \perp \bar{e}_2 \perp \bar{e}_3$. $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ - ортогональный базис в пространстве.



$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, $\bar{i} \perp \bar{j} \perp \bar{k}$, $(\vec{i}; \vec{j}, \vec{k})$ - ортонормированный базис в пространстве.

(ПДСК в пространстве)

n – мерным вектором называется упорядоченная совокупность n действительных чисел, записываемых в виде $\vec{a} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, где x_i - i-ая координата вектора $\vec{a}$.

Понятие n – мерного вектора широко используется в экономике. Например, некоторый набор товаров можно охарактеризовать вектором $\vec{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, а соответствующие цены – вектором $\vec{y} = (y_1; y_2; \dots; y_n)$.

Сумма, разность, умножение вектора на число вводятся аналогично.

Свойства операций:

1) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ - переместительное свойство

2) $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ - сочетательное свойство

3) $\alpha \cdot (\beta \vec{x}) = \alpha \beta \vec{x}$, $\alpha, \beta \in R$

4) $\alpha (\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \vec{x} + \alpha \vec{y}$ - дистрибутивное свойство

5) $(\alpha + \beta) \vec{x} = \alpha \vec{x} + \beta \vec{x}$

6) $\exists \ \vec{0} = (0, 0, \dots 0)$ такой, что $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$, для $\forall \ \vec{x}$

7) Для $\forall \ \vec{x} \ \ \exists \ -\vec{x}$ - противоположный вектор такой, что $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$

8) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$, для $\forall \ \vec{x}$.

Множество векторов с действительными координатами, в котором определены операции сложения и умножения на число, удовлетворяющие приведенным выше восьми свойствам, называется _векторным пространством_.

Вектор $\vec{b}$ называется *линейной комбинацией* векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$, если его можно представить в виде $\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + ... + \lambda_n \vec{a}_n$, где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in R$.

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in R$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, что $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + ... + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$. В противном случае, векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называются *линейно независимыми.*

Размерность пространства – это максимальное число содержащихся в нем линейно независимых векторов.

Совокупность n линейно независимых векторов n – мерного пространства называется *базисом*.

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих сторон на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi$$

Свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$;
2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, если $\vec{a} \perp \vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$.
3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
4) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
5) $(m\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (m\vec{b}) = m(\vec{a} \cdot \vec{b})$;

Если рассматривать векторы $\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$; $\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b;$$

Используя полученные равенства, получаем формулу для вычисления угла между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|};$$

4. Евклидово пространство. Длины векторов и угол между векторами в R^n.

Вспомним, как в обычном трехмерном пространстве мы вычисляли скалярное произведение векторов. Если координаты векторов $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ были заданы в ортонормированном базисе, то скалярное произведение (a,b) вычислялось по формуле $\mathbf{ab} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$. Аналогичной формулой можно задать и скалярное произведение в n-мерном пространстве. Пусть L - вещественное n-мерное пространство, в котором задан базис. Тогда векторы a и b из L задаются своими координатами: $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n, \quad b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n.$

Скалярное произведение векторов, обозначается оно обычно , задается формулой $(a, b) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n.$ В отличие от обычного трехмерного пространства, где с помощью транспортира и линейки можно измерить угол между векторами и длину вектора, в n-мерном пространстве ни угол между векторами, ни длину вектора измерить невозможно. Поэтому ортонормированным в n-мерном пространстве называется тот базис, в котором скалярное произведение вычисляется по формуле . Если $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ - координатные столбцы векторов a и b, то скалярное произведение можно задать формулой $(a, b) = \alpha^{\mathsf{T}}\beta.$

Вещественное линейное пространство, в котором задано скалярное произведение называется **евклидовым пространством**

В трехмерном пространстве модуль вектора равен корню квадратному из скалярного произведения вектора на себя $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$. В евклидовом пространстве модуль вектора определим аналогично $|a| = \sqrt{(a,a)}$, то есть $|a| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2}$.

В трехмерном пространстве с помощью скалярного произведения определялся угол между векторами. В евклидовом пространстве тоже можно определить угол между векторами. Но угол в n-мерном пространстве не имеет существенного значения, кроме одного случая. В трехмерном пространстве два вектора ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

Два вектора евклидова пространства называются ортогональными , если их скалярное произведение равно нулю.

5. Ортогональный и ортонормированный базисы в R^n. Координаты вектора в ортогональном базисе.

Вектор $\bar{x} \in E$ называется нормированным или единичным, если $|\bar{x}| = 1$.

Если $\bar{x} \neq \bar{0}$, то соответствующими этому вектору нормированными векторами будут $\bar{x}_0 = \bar{x}/|\bar{x}|$, $\bar{x}_0' = -\bar{x}/|\bar{x}|$.

Векторы x и y пространства со скалярным произведением L называются ортогональными, если (x,y)=0. В этом случае пишут $x \perp y$.

Процесс ортогонализации Грама--Шмидта позволяет превратить линейно независимую систему векторов в ортонормированную. Вы уже встречались с ним в курсе линейной алгебры. Это обстоятельство позволяет нам сразу перейти к формальному изложению сути дела.

Теорема. Если $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ - счетная система линейно независимых векторов в линейном пространстве со скалярным произведением L, то новые последовательности обладают следующими свойствами:

1) система $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ ортонормирована, т. е. любые два ее вектора ортогональны и каждый вектор имеет единичную длину;

2) для любого $n \in N$ линейная оболочка векторов $z_1, z_2, \ldots, z_n$ совпадает с линейной оболочкой векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Ортогональные дополнения подпространств Пусть L - евклидово (унитарное) пространство, подпространство $M \subset L$. Вектор $X \in L$ называется **ортогональным к подпространству** $M \subset L$, если для всех $Y \in M$ $(X,Y) = 0$.

Множество всех векторов X ортогональных к подпространству M называется **ортогональным дополнением** M и обозначается $M^\perp$.

Очевидно, $M^\perp$ является подпространством пространства L, причем для размерности подпространств M, $M^\perp$ и размерность пространства L связаны соотношением $\dim(M^\perp) + \dim(M) = \dim(L)$.

Действительно, выберем базис $e_1, e_2, \ldots, e_k$ подпространства M, дополним его до базиса L, получим $E = \langle e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n \rangle$. Ортогонализируем данный базис методом Грамма-Шмидта, получим: $\Sigma = \langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, \sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_n \rangle$ - базис пространства L, $\Sigma_1 = \langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k \rangle$ - базис подпространства M, $\Sigma_2 = \langle \sigma_{k+1}, \sigma_{k+2}, \ldots, \sigma_n \rangle$ - базис подпространства ортогонального дополнения $M^\perp$.

Говорят, что пространство L является прямой ортогональной суммой своих подпространств M и $M^\perp$: $L = M \oplus M^\perp$

6. Основные понятия, связанные с многочленами. Схема Горнера и корни многочленов. Теорема Безу. Разложение правильной дроби на сумму элементарных дробей.

Схема Го́рнера - алгоритм вычисления значения многочлена, записанного в виде суммы мономов, при заданном значении переменной. Метод Горнера позволяет найти корни многочлена, а также вычислить производные полинома в заданной точке. Схема Горнера также является простым алгоритмом для деления многочлена на бином вида x − c.

Задан многочлен P(x):

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Пусть требуется вычислить значение данного многочлена при фиксированном значении x = x0. Представим многочлен P(x) в следующем виде:

$$P(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots x(a_{n-1} + a_nx) \ldots)).$$

Определим следующую последовательность:

$$b_n = a_n \quad b_{n-1} = a_{n-1} + b_nx \quad \ldots b_i = a_i + b_{i+1}x \quad \ldots \quad b_0 = a_0 + b_1x$$

Искомое значение $P(x_0) = b_0$.

Использование схемы Горнера для деления многочлена на бином

При делении многочлена $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ на x − c получается многочлен $b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1}$ с остатком b_n.

При этом коэффициенты результирующего многочлена удовлетворяют рекуррентным соотношениям:

$b_0 = a_0$, $b_k = a_k + cb_{k-1}$.

Таким же образом можно определить кратность корня (использовать схему Горнера для нового полинома). Так же схему можно использовать для нахождения коэффициентов при разложении полинома по степеням x - c: $P(x) = A_0 + A_1(x-c) + A_2(x-c)^2 + \cdots + A_n(x-c)^n$

Теорема Безу утверждает, что остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x - a$ равен $P(a)$.

Предполагается, что коэффициенты многочлена содержатся в некотором коммутативном кольце с единицей (например, в поле вещественных или комплексных чисел). Следствия:

- Число a является корнем многочлена $p(x)$ тогда и только тогда, когда $p(x)$ делится без остатка на двучлен $x - a$ (отсюда, в частности, следует, что множество корней многочлена $P(x)$ тождественно множеству корней соответствующего уравнения $P(x) = 0$).
- Свободный член многочлена делится на любой целый корень многочлена с целыми коэффициентами (если старший коэффициент равен 1, то все рациональные корни являются и целыми).
- Пусть α — целый корень приведенного многочлена A(x) с целыми коэффициентами. Тогда для любого целого k число A(k) делится на α-k.

Классическим примером применения метода неопределённых коэффициентов является разложение правильной рациональной дроби в комплексной или вещественной области на элементарные дроби.

Пусть p(z) и q(z) — многочлены с комплексными коэффициентами, причём степень многочлена p(z) меньше степени многочлена q(z), коэффициент при старшем члене многочлена q(z) равен 1, zi $i \in \{1, .., k\}$— корни многочлена q(z) с кратностями αi, следовательно, $q(z) = (z-z_1)^{\alpha_1}(z-z_2)^{\alpha_2}..(z-z_k)^{\alpha_k}$

Функция p / q представима, и притом единственным образом, в виде суммы элементарных дробей

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\alpha_i}\frac{A_{i,j}}{(z-z_i)^j},$$

где $A_{i,j}$ — неизвестные пока комплексные числа (их число равно степени q). Для их отыскания обе части равенства приводят к общему знаменателю. После его отбрасывания и приведения в правой части подобных членов получается равенство, которое сводится к системе линейных уравнений относительно $A_{i,j}$.

Примечание. Нахождение неизвестных можно упростить, если q(z) имеет некратные корни zj. После умножения на z − zj последнего равенства и подстановки z = zj непосредственно получаем значение соответствующего коэффициента $A_j = \dfrac{p(z_j)}{\prod\limits_{i \neq j} (z_j - z_i)^{\alpha_i}}$.

Основная теорема алгебры утверждает, что всякий отличный от константы многочлен с комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один корень в поле комплексных чисел.

Эквивалентная формулировка теоремы следующая: поле комплексных чисел алгебраически замкнуто.

Немедленным следствием из теоремы является то, что любой многочлен степени n над полем комплексных чисел имеет в нём ровно n корней, с учётом кратности корней.

7. Комплексные числа и действия над ними. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа.

Определение. **Комплексным числом** z называется выражение $z = a + ib$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, которая определяется соотношением:

$$i^2 = -1; \qquad i = \sqrt{-1}.$$

При этом число a называется **действительной частью** числа z ($a = Re\, z$), а b- **мнимой частью** ($b = Im\, z$).

Если $a = Re\, z = 0$, то число z будет чисто мнимым, если $b = Im\, z = 0$, то число z будет действительным.

Определение. Числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ называются **комплексно – сопряженными.**

Определение. Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части:

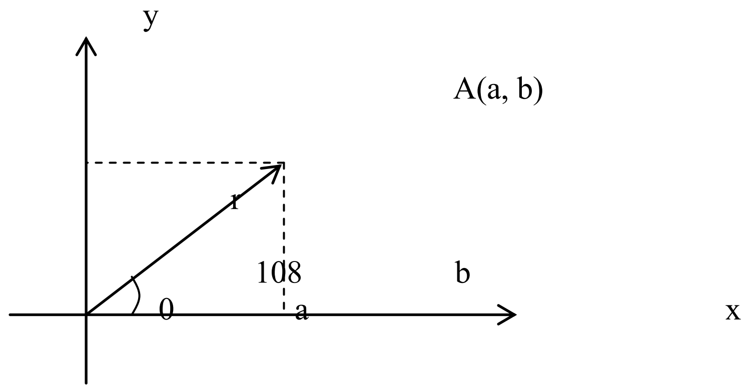
$$a_1 = a_2; \qquad b_1 = b_2;$$

Определение. Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части.

$$a = b = 0.$$

Понятие комплексного числа имеет геометрическое истолкование. Множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел за счет включения множества мнимых чисел. Комплексные числа включают в себя все множества чисел, которые изучались ранее. Так натуральные, целые, рациональные, иррациональные, действительные числа являются, вообще говоря, частными случаями комплексных чисел.

Если любое действительное число может быть геометрически представлено в виде точки на числовой прямой, то комплексное число представляется точкой на плоскости, координатами которой будут соответственно действительная и мнимая части комплексного числа. При этом горизонтальная ось будет являться действительной числовой осью, а вертикальная - мнимой осью.



С помощью подобного геометрического представления можно представлять числа в так называемой тригонометрической форме.

8. Алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексных чисел. Корни *n*-ой степени из комплексного числа. Формулировка основной теоремы алгебры.

Из геометрических соображений видно, что $a = r\cos\varphi$; $b = r\sin\varphi$. Тогда комплексное число можно представить в виде: $z = a + ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Такая форма записи называется **тригонометрической формой записи комплексного числа.**

При этом величина r называется **модулем** комплексного числа, а угол наклона φ - **аргументом** комплексного числа.

$$r = |z|; \qquad \varphi = Arg\ z.$$

Из геометрических соображений видно: $r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = Arg\ z = arctg\ \frac{b}{a};$

Очевидно, что комплексно – сопряженные числа имеют одинаковые модули и противоположные аргументы.

$$|z| = |\bar{z}|; \qquad Arg\ z = -Arg\ \bar{z}.$$

Действия с комплексными числами.

Основные действия с комплексными числами вытекают из действий с многочленами.

1) **Сложение и вычитание.**

$$z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$$

2) **Умножение.**

$$z = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2$$

$$z = z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

В тригонометрической форме:

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

С случае комплексно – сопряженных чисел:

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2.$$

3) **Деление.**

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy$$

$$z = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} \qquad z = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

В тригонометрической форме: $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

4) **Возведение в степень.**

Из операции умножения комплексных чисел следует, что

$$z^2 = zz = r^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$$

В общем случае получим: $z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$, где n – целое положительное число.

Это выражение называется **формулой Муавра.**

Формулу Муавра можно использовать для нахождения тригонометрических функций двойного, тройного и т.д. углов.

5) **Извлечение корня из комплексного числа.**

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$$

Возводя в степень, получим:

$$\rho^n (\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Отсюда: $\rho = \sqrt[n]{r}; \qquad n\psi = \varphi + 2\pi k; \qquad k \in Z.$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

Таким образом, корень n – ой степени из комплексного числа имеет n различных значений.

Показательная форма комплексного числа.

Рассмотрим показательную функцию $w = e^z; \qquad z = x + iy.$

Можно показать, что функция w может быть записана в виде:

$$w = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Данное равенство называется **уравнением Эйлера.** Для комплексных чисел будут справедливы следующие свойства:

1) $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2};$

2) $e^{z_1 - z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$;

3) $(e^{z})^{m} = e^{mz}$; где m – целое число.

Если в уравнении Эйлера показатель степени принять за чисто мнимое число ($x=0$), то получаем: $e^{iy} = \cos y + i\sin y$

Для комплексно – сопряженного числа получаем: $e^{-iy} = \cos y - i\sin y$

Из этих двух уравнений получаем:

$$\begin{cases} \cos y = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \\ \sin y = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \end{cases}$$

Этими формулами пользуются для нахождения значений степеней тригонометрических функций через функции кратных углов.

Если представить комплексное число в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

и воспользуемся формулой Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$$z = re^{i\varphi}$$

Полученное равенство и есть **показательная форма комплексного числа.**

1.3. Лекция № 3 (2 часа)
Тема: «Прямая и плоскость. Кривые второго порядка. Поверхности второго порядка»

1.3.1. Вопросы лекции:
1. Прямая на плоскости и в пространстве.
2. Плоскость в трехмерном пространстве.
3. Классификация кривых второго порядка. Эллипс, гипербола и парабола, их свойства и канонические уравнения.
4. Классификация поверхностей второго порядка. Эллипсоиды, параболоиды и гиперболоиды, их канонические уравнения.

1.3.2. Краткое содержание вопросов
1. Прямая на плоскости и в пространстве.
Как известно, любая точка на плоскости определяется двумя координатами в какой- либо системе координат. Системы координат могут быть различными в зависимости от выбора базиса и начала координат.

Определение. **Уравнением линии** называется соотношение $y = f(x)$ между координатами точек, составляющих эту линию.

Отметим, что уравнение линии может быть выражено параметрическим способом, то есть каждая координата каждой точки выражается через некоторый независимый параметр *t*.

Характерный пример – траектория движущейся точки. В этом случае роль параметра играет время.

Определение. Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка

$$Ax + By + C = 0,$$

причем постоянные А, В не равны нулю одновременно, т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$. Это уравнение первого порядка называют **общим уравнением прямой.**

В зависимости от значений постоянных А,В и С возможны следующие частные случаи:

- $C = 0, A \neq 0, B \neq 0$ – прямая проходит через начало координат
- $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$ $\{ By + C = 0\}$- прямая параллельна оси Ох
- $B = 0, A \neq 0, C \neq 0$ $\{ Ax + C = 0\}$ – прямая параллельна оси Оу
- $B = C = 0, A \neq 0$ – прямая совпадает с осью Оу
- $A = C = 0, B \neq 0$ – прямая совпадает с осью Ох

Уравнение прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

Определение. В декартовой прямоугольной системе координат вектор с компонентами (А, В) перпендикулярен прямой , заданной уравнением $Ax + By + C = 0$.

Если общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ привести к виду: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$

и обозначить $-\frac{A}{B} = k; \quad -\frac{C}{B} = b; \quad т.е. \quad y = kx + b$, то полученное уравнение называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом k**.

Определение. Каждый ненулевой вектор $\vec{a}\,(\alpha_1, \alpha_2)$, компоненты которого удовлетворяют условию $A\alpha_1 + B\alpha_2 = 0$ называется направляющим вектором прямой
$Ax + By + C = 0$.

Если в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ $C \neq 0$, то, разделив на –С, получим: $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$ или $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где $a = -\frac{C}{A}; \quad b = -\frac{C}{B}$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент *a* является координатой точки пересечения прямой с осью Ох, а *b* – координатой точки пересечения прямой с осью Оу.

Определение. Если заданы две прямые $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, то острый угол между этими прямыми будет определяться как $tg\,\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|$.

Две прямые параллельны, если $k_1 = k_2$.
Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = -1/k_2$.

Теорема. *Прямые $Ax + By + C = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ параллельны, когда пропорциональны коэффициенты $A_1 = \lambda A$, $B_1 = \lambda B$. Если еще и $C_1 = \lambda C$, то прямые совпадают.*

Координаты точки пересечения двух прямых находятся как решение системы двух уравнений.

Определение. Прямая, проходящая через точку $M_1(x_1, y_1)$ и перпендикулярная к прямой $y = kx + b$ представляется уравнением: $y - y_1 = -\frac{1}{k}(x - x_1)$

Теорема. *Если задана точка $M(x_0, y_0)$, то расстояние до прямой $Ax + By + C = 0$ определяется как* $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Общие уравнения прямой в пространстве. Уравнение прямой может быть рассмотрено как уравнение линии пересечения двух плоскостей.

Как было рассмотрено выше, плоскость в векторной форме может быть задана уравнением:

$$\vec{N} \cdot \vec{r} + D = 0, \text{ где}$$

$\vec{N}$ - нормаль плоскости; $\vec{r}$ - радиус- вектор произвольной точки плоскости.

Пусть в пространстве заданы две плоскости: $\overrightarrow{N_1} \cdot \vec{r} + D_1 = 0$ и $\overrightarrow{N_2} \cdot \vec{r} + D_2 = 0$, векторы нормали имеют координаты: $\overrightarrow{N_1}$ (A_1, B_1, C_1), $\overrightarrow{N_2}$ (A_2, B_2, C_2); $\vec{r}$ (x, y, z).

Тогда общие уравнения прямой в векторной форме: $\begin{cases} \overrightarrow{N_1} \cdot \vec{r} + D_1 = 0 \\ \overrightarrow{N_2} \cdot \vec{r} + D_2 = 0 \end{cases}$

Общие уравнения прямой в координатной форме: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

Практическая задача часто состоит в приведении уравнений прямых в общем виде к каноническому виду.

Для этого надо найти произвольную точку прямой и числа m, n, p.

При этом направляющий вектор прямой может быть найден как векторное произведение векторов нормали к заданным плоскостям.

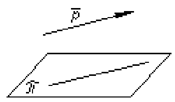
$$\vec{S} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \vec{i}m + \vec{j}n + \vec{k}p.$$

2. Плоскость в трехмерном пространстве.

ТЕОРЕМА: Уравнение $Ax + By + Cz = 0$, где *A, B и C* – некоторые действительные числа (не обращаются одновременно в 0), задает в пространстве поверхность.

Обратное утверждение тоже верно: Любую поверхность в пространстве можно задать уравнением вида $Ax + By + Cz = 0$.

Направляющим вектором $\vec{p}$ плоскости называется вектор, лежащий в этой плоскости или в плоскости, параллельной ей.



Замечание: Можно доказать, что направляющий вектор имеет координаты $\boxed{\vec{p} = (-B; A; 0)}$

ТЕОРЕМА: Для того, чтобы вектор $\vec{p} = (\alpha; \beta; \gamma)$ был направляющим для плоскости $Ax + By + Cz = 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$

Расположение плоскости	Условие	Общее уравнение плоскости
1) Проходит через начало координат.	$D = 0$	$Ax + By + Cz = 0$
2) $\pi \parallel OX$	$A = 0$	$By + Cz + D = 0$
3) $\pi \parallel OY$	$B = 0$	$Ax + Cz + D = 0$
4) $\pi \parallel OZ$	$C = 0$	$Ax + By + D = 0$

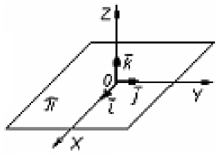
5) π проходит через ось OX	$A=0;\quad D=0$	$By+Cz=0$
6) π проходит через ось OУ	$B=0;\quad D=0$	$Ax+Cz=0$
7) π проходит через ось OZ	$C=0;\quad D=0$	$Ax+By=0$
8) $\pi \parallel$ плоскости XOУ	$A=0;\quad B=0$	$Cz+D=0 \qquad (z=h)$
9) $\pi \parallel$ плоскости УOZ	$B=0;\quad C=0$	$Ax+D=0 \qquad (x=h)$
10) $\pi \parallel$ плоскости XOZ	$A=0;\quad C=0$	$By+D=0 \qquad (y=h)$
11) π совпадает с плоскостью XOУ	$A=0;\quad B=0;\quad D=0$	$Cz=0, \qquad z=0$
12) π совпадает с плоскостью УOZ	$B=0;\quad C=0;\quad D=0$	$Ax=0, \qquad x=0$
13) π совпадает с плоскостью XOZ	$A=0;\quad C=0;\quad D=0$	$By=0, \qquad y=0$

1) Точка O(0;0)$\in \pi \Rightarrow \quad A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot 0+D=0 \Rightarrow \quad D=0$

2) $\pi \parallel OX \Rightarrow \quad \vec{i}=(1;0;0)\parallel \pi \quad \Rightarrow \quad A\cdot 1+B\cdot 0+C\cdot 0=0 \Rightarrow \quad A=0$

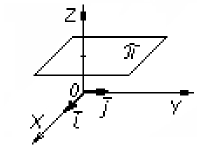
5) π проходит через ось OX $\Rightarrow \quad O(0;0;0)\in\pi \Rightarrow \quad D=0$

$\vec{i}=(1;0;0)\parallel\pi \Rightarrow \quad A=0$



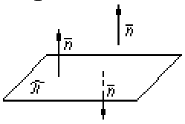
8) $\pi \parallel$ плоскости XOУ $\Rightarrow \quad \vec{i}=(1;0;0)\parallel\pi \Rightarrow \quad A=0$

$\vec{j}=(0;1;0)\parallel\pi \Rightarrow \quad B=0$



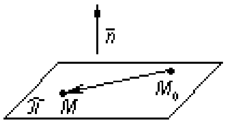
9) $\pi \equiv XOY \quad \Rightarrow \quad \vec{i}=(1;0;0)\parallel\pi \quad \Rightarrow \quad A=0, \qquad \vec{j}=(0;1;0)\parallel\pi \quad\Rightarrow\quad B=0,$ O(0;0)$\in\pi \Rightarrow \quad D=0$

Вектор $\vec{n}$ называется *нормальным вектором* плоскости, если он перпендикулярен этой плоскости.
Очевидно, что каждая плоскость имеет бесчисленное множество нормальных векторов, параллельных между собой.



ТЕОРЕМА: Если плоскость π задана общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, то вектор $\boxed{\vec{n}=(A;B;C)}$ является нормальным вектором плоскости π.

Рассмотрим ПДСК и в ней точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и $\vec{n}=(A;B;C)$. Составим уравнение плоскости, проходящей через данную точку с данным нормальным вектором.



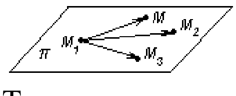
Возьмем точку $M(x;y;z)\in\pi$. Рассмотрим вектор $\overline{M_0M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$

Т.к. $\overline{M_0M}\in\pi \quad\Rightarrow\quad \vec{n}\perp\overline{M_0M} \quad\Rightarrow\quad \overline{M_0M}\cdot\vec{n}=0$

Запишем в координатной форме: $\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$

Составим уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$,

Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x;y;z)$. Построим векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$



Тогда их координаты $\overrightarrow{M_1M}(x-x_1;y-y_1;z-z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_3}(x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1)$

Воспользуемся признаком компланарности векторов, получим:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0}$$ - уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.

Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей

- если $\pi_1 \parallel \pi_2 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Rightarrow$ их координаты пропорциональны.

Если $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$, то $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

- если $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

Расстояние от точки до плоскости

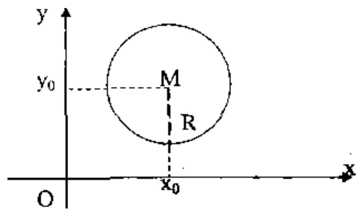
Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ определяется по формуле:

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

3. Классификация кривых второго порядка. Эллипс, гипербола и парабола, их свойства и канонические уравнения.

Кривые второго порядка - это линии на плоскости, координаты точек которых связаны уравнениями второй степени относительно x и y в декартовой системе координат. Рассмотрим следующие виды кривых второго порядка: окружность, эллипс, гипербола и парабола.

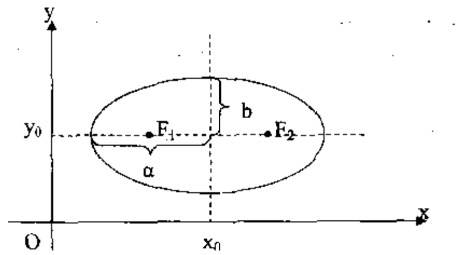
Окружность - это совокупность точек на плоскости, равноудаленных от одной фиксированной точки (центра). Расстояние от точки, лежащей на окружности, до центра называется радиусом окружности.



Каноническое уравнение окружности имеет вид:
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, где $M(x_0, y_0)$ -центр окружности, R –радиус.

Эллипсом называется геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина, большая, чем расстояние между фокусами.

Постоянную сумму расстояний произвольной точки эллипса до фокусов примято обозначать через 2a. Фокусы эллипса обозначают буквами F_1 и F_2, расстояние между ними - через 2c. По определению эллипса 2a > 2c или a > c.



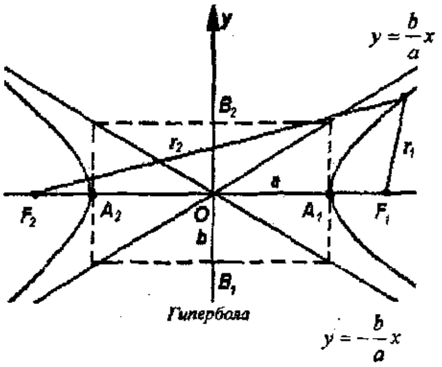
Данная фигура обладает двумя осями симметрии и центром симметрии.

Если фокусы (F_1 и F_2) расположенные на прямой, параллельной оси OX, то каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Здесь точка $A(x_0; y_0)$ - центр эллипса, a и b - большая и малая полуоси эллипса. Фокусы эллипса F_1 и F_2 расположены в точках, удаленных на расстоянии $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ от центра эллипса. Отношение $\frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса и обозначается ε .

Гиперболой называется геометрическое место точек, для которых разность расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина; указанная разность берется по абсолютному значению и обозначается обычно через 2a. Фокусы гиперболы обозначают буквами F_1 и F_2 расстояние между ними - через 2с. По определению гиперболы 2а < 2с или а < с.



Гипербола

Данная фигура также обладает двумя осями симметрии и центром. Если фокусы F_1 и F_2 расположены на оси Ох, то ее каноническое уравнение имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Здесь точка $A(x_0;y_0)$ - центр гиперболы, a и b - действительная и мнимая полуось.

Прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы.

Параболой называется геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, называемой директрисой.

Фокус параболы обозначается буквой F, расстояние от фокуса до директрисы - буквой р. Число р называется параметром параболы.

Фигура обладает осью симметрии. Если директриса параболы перпендикулярна Ох (Ох - ось симметрии), то уравнение параболы имеет вид:

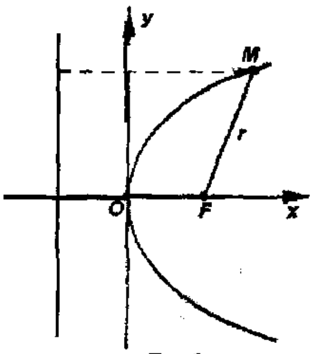
$(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$, где р - расстояние от фокуса до директрисы, точка (x_0; y_0) - вершина параболы.

Уравнение директрисы: $x=x_0-\frac{p}{2}$.

Фокус в точке $F\left(x_0+\frac{p}{2};y_0\right)$.

Если Оу - ось симметрии, то уравнение параболы имеет вид:

$(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$. Уравнение директрисы: $y=y_0-\frac{p}{2}$. Фокус в точке $F\left(x_0;y_0+\frac{p}{2}\right)$.



Парабола

4. Классификация поверхностей второго порядка. Эллипсоиды, параболоиды и гиперболоиды, их канонические уравнения.

Поверхность в пространстве, как правило, можно рассматривать как геометрическое место точек, удовлетворяющих какому-либо условию.

Прямоугольная система координат $Oxyz$ в пространстве позволяет установить взаимно однозначное соответствие между точками пространства и тройками чисел x, y и z - их координатами. Свойство, общее всем точкам поверхности, можно записать в виде уравнения, связывающего координаты всех точек поверхности.

Уравнением данной поверхности в прямоугольной системе координат $Oxyz$ называется такое уравнение $F(x, y, z) = 0$ с тремя переменными x, y и z, которому удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на поверхности, и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на этой поверхности. Переменные x, y и z в уравнении поверхности называются **текущими координатами** точек поверхности.

Поверхности второго порядка – это поверхности, уравнения которых в прямоугольной системе координат являются уравнениями второго порядка.

Цилиндрическими поверхностями называются поверхности, образованные линиями, параллельными какой- либо фиксированной прямой.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - эллиптический цилиндр

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - гиперболический цилиндр.

$x^2 = 2py$ – параболический цилиндр.

Поверхность, описываемая некоторой линией, вращающейся вокруг неподвижной прямой d, называется поверхностью вращения с осью вращения d.

Если уравнение поверхности в прямоугольной системе координат имеет вид: $F(x^2 + y^2, z) = 0$, то эта поверхность – поверхность вращения с осью вращения Oz. Аналогично: $F(x^2 + z^2, y) = 0$ – поверхность вращения с осью вращения Oy, $F(z^2 + y^2, x) = 0$ – поверхность вращения с осью вращения Ox.

$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ - эллипсоид вращения

$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ - однополостный гиперболоид вращения

$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ - двуполостный гиперболоид вращения

$\frac{x^2 + y^2}{p} = 2z$ - параболоид вращения

Однако, перечисленные выше поверхности являются всего лишь частными случаями поверхностей второго порядка общего вида, некоторые типы которых рассмотрены ниже:

Сфера**:** $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

Трехосный эллипсоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Однополостный гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Двуполостный гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

Эллиптический параболоид: $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad где \;\; p > 0, q > 0$

Гиперболический параболоид: $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$

Конус второго порядка: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

1.4. Лекция № 4 (2 часа)
Тема: «Продуктивность неотрицательных матриц. Модель многоотраслевой экономики Леонтьева»

1.4.1. Вопросы лекции:
1. Собственные значения и собственные векторы неотрицательных матриц.
2. Продуктивность неотрицательных матриц.
3. Модель многоотраслевой экономики Леонтьева.
4. Продуктивные модели Леонтьева.
5. Различные критерии продуктивности модели Леонтьева.

1.4.2. Краткое содержание вопросов
1. Собственные значения и собственные векторы неотрицательных матриц.
Определение: Пусть L – заданное n- мерное линейное пространство. Ненулевой вектор $\bar{x} \in L$ называется **собственным вектором** линейного преобразования А, если существует такое число λ, что выполняется равенство: $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$.

При этом число λ называется **собственным значением (характеристическим числом)** линейного преобразования А, соответствующего вектору $\bar{x}$.

Определение: Если линейное преобразование А в некотором базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ имеет матрицу А = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, то собственные значения линейного преобразования А можно найти как корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ уравнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Это уравнение называется **характеристическим уравнением,** а его левая часть- **характеристическим многочленом** линейного преобразования А.

Следует отметить, что характеристический многочлен линейного преобразования не зависит от выбора базиса.

Рассмотрим частный случай. Пусть А – некоторое линейное преобразование плоскости, матрица которого равна $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Тогда преобразование А может быть задано формулами:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}; \qquad \begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$ в некотором базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2$.

Если преобразование А имеет собственный вектор с собственным значением λ, то $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$.

$$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = \lambda x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

Т.к. собственный вектор $\bar{x}$ ненулевой, то x_1 и x_2 не равны нулю одновременно. Т.к. данная система однородна, то для того, чтобы она имела нетривиальное решение, определитель системы должен быть равен нулю. В противном случае по правилу Крамера система имеет единственное решение – нулевое, что невозможно.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

Полученное уравнение является **характеристическим уравнением линейного преобразования А**.

Таким образом, можно найти собственный вектор $\bar{x}$ (x_1, x_2) линейного преобразования А с собственным значением λ, где λ - корень характеристического уравнения, а x_1 и x_2 – корни системы уравнений при подстановке в нее значения λ.

Понятно, что если характеристическое уравнение не имеет действительных корней, то линейное преобразование A не имеет собственных векторов.

Следует отметить, что если $\bar{x}$ - собственный вектор преобразования A, то и любой вектор ему коллинеарный – тоже собственный с тем же самым собственным значением λ.

Действительно, $A(k\bar{x}) = kA\bar{x} = k\lambda\bar{x} = \lambda(k\bar{x})$. Если учесть, что векторы имеют одно начало, то эти векторы образуют так называемое **собственное направление** или **собственную прямую**.

Т.к. характеристическое уравнение может иметь два различных действительных корня λ_1 и λ_2, то в этом случае при подстановке их в систему уравнений получим бесконечное количество решений. (Т.к. уравнения линейно зависимы). Это множество решений определяет две **собственные прямые**.

Если характеристическое уравнение имеет два равных корня $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то либо имеется лишь одна собственная прямая, либо, если при подстановке в систему она превращается в систему вида: $\begin{cases} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \end{cases}$. Эта система удовлетворяет любым значениям x_1 и x_2. Тогда все векторы будут собственными, и такое преобразование называется **преобразованием подобия**.

Рассмотрим другой частный случай. Если $\bar{x}$ - собственный вектор линейного преобразования A, заданного в трехмерном линейном пространстве, а x_1, x_2, x_3 – компоненты этого вектора в некотором базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, то $x_1' = \lambda x_1;\ \ x_2' = \lambda x_2;\ \ x_3' = \lambda x_3$, где λ - собственное значение (характеристическое число) преобразования A.

Если матрица линейного преобразования A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ то } \begin{cases} \lambda x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \lambda x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \lambda x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

Характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$

Раскрыв определитель, получим кубическое уравнение относительно λ. Любое кубическое уравнение с действительными коэффициентами имеет либо один, либо три действительных корня.

2. Продуктивность неотрицательных матриц.

Определение 1. Матрица $D = \left\|d_{ij}\right\|_{i,j=\overline{1,n}}$, удовлетворяющая условию $d_{ij} \le 0$; при всех $i \ne j$, называется продуктивной, если существует $\vec{x} \ge 0$ такой, что $D\vec{x} > 0$.

Определение 2. Матрица $D = \left\|d_{ij}\right\|_{i,j=\overline{1,n}}$, удовлетворяющая условию $d_{ij} \le 0$; при всех $i \ne j$, называется прибыльной, если существует $\vec{p} \ge 0$ такой, что $D^T\vec{p} > 0$.

Теорема 1. Пусть матрица удовлетворяет условию $d_{ij} \le 0$ при всех $i \ne j$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. существует $\vec{x} \ge 0$ такой, что $D\vec{x} > 0$ (продуктивность);
2. для любого $\vec{\omega} \ge 0$ существует $\vec{x} \ge 0$ такой, что $D\vec{x}=\vec{\omega}$;
3. последовательные главные миноры матрицы D положительны;
4. все главные миноры матрицы D положительны;
5. существует $\vec{p} \ge 0$ такой что $D^T\vec{p} > 0$ (прибыльность);
6. для любого $\vec{\pi} \ge 0$ существует $\vec{p} \ge 0$ такой, что $D^T\vec{p}=\vec{\pi}$;
7. последовательные главные миноры матрицы D^T положительные;
8. все главные миноры матрицы D^T положительны;
9. матрица D неотрицательно обратима, т.е. существует D-1 ≥ 0.

Теорема 2. Пусть A - неотрицательная квадратная матрица. Тогда:

1. Если матрица (ρE - A) неотрицательно обратима, то $\rho > 0$ и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\rho^{k+1}}$ сходится и его сумма

равна (ρE - A)-1.

2. Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\rho^{k+1}}$ сходится и ρ > 0, то матрица (ρE - A) неотрицательно обратима.

3. Модель многоотраслевой экономики Леонтьева.

Рассмотрим модель международной торговли (модель обмена) в виде математической модели. Пусть имеем n стран - $S_1, S_2, ..., S_n$, национальный доход каждой из которых равен $x_1, x_2, ..., x_n$. Обозначим через a_{ij}, $i = 1...n;\ j = 1...n$ долю национального дохода, который страна S_j тратит на покупку товаров у страны S_i.

Будем считать, что весь национальный доход тратится на закупку товаров либо внутри страны, либо на импорт из других стран, т.е. $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad (j = 1 ... n)$.

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется <u>*структурной матрицей торговли*</u>.

Обозначим через $p_i \quad (i = 1 ... n)$ выручку от внутренней и внешней торговли для страны S_i, тогда $p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n$.

Очевидно, что выручка от торговли каждой страны должна быть не меньше её национального дохода, т.е. $p_i \geq x_i$. Но $p_i > x_i$ - невозможный случай, т.к. все страны не могут одновременно получать прибыль, поэтому условие $p_i \geq x_i$ примет вид $p_i = x_i$.

Введем вектор национальных доходов страны $\vec{x} = (x_1; x_2; ...; x_n)$, получим матричное уравнение

$A \cdot X = X$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Т.е. задача свелась к отысканию собственного вектора матрицы А, отвечающего собственному значению λ =1.

4. Продуктивные модели Леонтьева.

ТЕОРЕМА Если для матрицы А с неотрицательными элементами и некоторого вектора $\bar{y}$ с неотрицательными компонентами уравнение $\bar{x} = A\bar{x} + \bar{y}$. (16.6) имеет решение $\bar{x}$ с неотрицательными компонентами, то матрица А продуктивна.

Иными словами, достаточно установить наличие положительного решения системы (16.6) хотя бы для одного положительного вектора $\bar{y}$, чтобы матрица А была продуктивной. Перепишем систему (16.6) с использованием единичной матрицы Е в виде $(E - A)\bar{x} = \bar{y}$. (16.7)

Если существует обратная матрица (Е - А)-1 , то существует и единственное решение уравнения (16.7): $\bar{x} = (E - A)^{-1}\bar{y}$. (16.8)

Матрица (Е — А)-1 называется матрицей полных затрат.

Существует несколько критериев продуктивности матрицы А. Приведем два из них.

Первый критерий продуктивности. Матрица А продуктивна тогда и только тогда, когда матрица (Е - А)-1 существует и ее элементы неотрицательны.

Второй критерий продуктивности. Матрица А с неотрицательными элементами продуктивна, если сумма элементов по любому ее столбцу (строке) не превосходит единицы: $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leqslant 1$, причем хотя бы для одного столбца (строки) эта сумма строго меньше единицы.

5. Различные критерии продуктивности модели Леонтьева.

Т е о р е м а . (критерий продуктивности). *Матрица* $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ *продуктивна тогда и только тогда, когда матрица* $\mathbf{S} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ *существует и является неотрицательной.*

Экономический смысл элементов матрицы $\mathbf{S} = (s_{ik})$ заключается в следующем: элемент s_{ik} равен количеству продукции, которое должен выпустить объект P_i, для того чтобы объект P_k мог выпустить одну единицу конечной продукции (а не полного выпуска). В связи с этим элементы s_{ik} носят название**коэффициентов полных затрат**, а матрица **S** – **матрицы коэффициентов полных затрат**.

Приведем еще один достаточный признак продуктивности модели Леонтьева, наиболее удобный для проверки продуктивности матрицы межотраслевого баланса в натурально-стоимостной форме.

Т е о р е м а *Если матрица* **A** = (a_{ij}) *неотрицательна, сумма элементов каждой строки не больше единицы и хотя бы для одной строки строго меньше единицы, то модель Леонтьева, определяемая матрицей* ***A****, продуктивна.*

Таким образом, матрица **A** продуктивна, если $a_{ij} \geq 0$ для любых i, j = 1, 2, …, n, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq 1$ (i = 1, 2, …, n) и существует номер i_0 такой, что $\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} < 1$.

Очевидно, что коэффициенты s_{ij} полных затрат всегда меньше, а могут быть и существенно больше соответствующих коэффициентов a_{ij} прямых затрат, поскольку, во-первых, коэффициенты s_{ij} указывают не только непосредственные поставки продукции объекта P_i объекту P_j, но и поставки продукции объекта P_i другим объектам, для того чтобы последние в свою очередь могли поставить объекту P_j требуемое количество их продукции, и во-вторых, при вычислении коэффициентов s_{ij} берется отношение суммы поставок продукции объекта P_i всем объектам к величине конечной продукции объекта P_j, а эта величина меньше полного выпуска продукции объекта P_j

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

2.1 Практическое занятие №1 (2 часа).

Тема: «Матрицы. Определитель матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений»

2.1.1 Задание для работы:

1. Действия над матрицами.

2. Определители второго порядка. Способы вычисления определителя третьего порядка.

3. Матричная запись систем линейных алгебраических уравнений и матричный способ решения системы.

4. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

2.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Действия над матрицами.

1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \\ 6 & -1 & -4 \end{pmatrix}$. Записать:

а) сумму элементов, стоящих на главной диагонали;

б) произведение элементов, стоящих на побочной диагонали;

в) элементы a_{13}, a_{21}, a_{32};

г) транспонированную матрицу.

2. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$. Найти:

а) $A + B$; б) $B - A$; в) $-3B$; г) $A \cdot B$; д) $B \cdot A$; е) A^2.

3. Даны две матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

Найти: $A + B$; $A - B$; $3A - 2B$; $A \cdot B$; $B \cdot A$; $A^2 - B^2$; $(A - B)(A + B)$.

2. Определители второго порядка. Способы вычисления определителя третьего порядка.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Вычислить определитель:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & -8 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} e^x & e^{3x} \\ e^x & 3e^{3x} \end{vmatrix}$.

2. Вычислить определители по правилу треугольника и приписыванием столбцов:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \\ 8 & 7 & 0 \end{vmatrix}$.

3. Для определителя $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 6 & 5 & 12 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ найти: а) миноры M_{23}, M_{11}, M_{31}; б) алгебраические дополнения A_{12}; A_{13}; A_{32}; в) значение определителя.

4. Вычислить определители по правилу треугольника, приписыванием столбцов и по теореме Лапласа: а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \\ 8 & 7 & 0 \end{vmatrix}$.

3. Матричная запись систем линейных алгебраических уравнений и матричный способ решения системы.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Решить СЛУ матричным методом: а) $\begin{cases} 4x + y - 3z = 9 \\ x + y - z = -2 \\ 8x + 3y - 6z = 12 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 12 \\ 2x + y + 3z = 16 \\ 3x + 2y + z = 8 \end{cases}$

2. Имеются три банка, каждый из которых начисляет вкладчику определенный годовой % (свой для каждого банка). Вкладчик имеет сумму размером 6000 ден. ед. В начале года $1/3$ вклада он положил в 1 банк, $1/2$ - вклада во 2 банк и оставшуюся – в банк 3 и к концу года сумма этих вкладов возросла до 7250 ден. ед. Если бы первоначально $1/6$ вклада он положил в банк 1, $2/3$ - в банк 2 и $1/6$ вклада - в банк 3, то к концу года сумма вклада составила бы 7200 ден. ед. Если бы $1/2$ вклада он положил в банк 1, $1/6$ - в банк 2 и $1/3$ вклада – в банк 3, то сумма вкладов в конце года составила бы вновь 7250 ден. ед. Какой % выплачивает каждый банк?

4. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

Провести устный опрос теоретического материала.

Решить СЛУ методом Гаусса: а) $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 21 \\ 3x + 4y - 2z = 9 \\ 2x - y - z = 10 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x - 7y - 2z = 0 \\ 2x - 3y - 4z = 6 \\ 2x - 4y + 2z = 2 \end{cases}$

2.1.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Матрицы. Определитель матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Матрицы. Определитель матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

2.2 Практическое занятие №2 (2 часа).
Тема: «Линейные преобразования и квадратичные формы»

2.2.1 Задание для работы:

1. Линейные преобразования пространства R^n. Линейные операторы. Ядро и образ линейного оператора. Матрица линейного оператора.

2. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов. Собственные значения квадратных матриц..

3. Квадратичные формы, их матрицы в данном базисе. Приведение квадратичной формы к нормальному виду методом Лагранжа. Приведение квадратичной формы к каноническому виду при помощи ортогонального преобразования. Закон инерции квадратичных форм. Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы

2.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Линейные преобразования пространства R^n. Линейные операторы. Ядро и образ линейного оператора. Матрица линейного оператора.

Провести устный опрос теоретического материала.

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

1. $$Ax = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3, -3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2x_3),$$
$$Bx = (6 - 5x_2 - 4x_3, 3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2),$$
$$Cx = (x_3^4, 3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2x_3).$$

2. $$Ax = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2, x_2 + 2),$$
$$Bx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 0, x_2^4 + 2x_3),$$
$$Cx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2, x_2 + 2x_3).$$

2. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов. Собственные значения квадратных матриц.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}. \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.Линейное преобразование в пространстве $\mathbf{R}^3$ переводит вектор вида (a, b, c) в вектор $(c, a + 4b + c, a)$. Записать матрицу этого преобразования в каноническом базисе. Найти собственные значения заданного преобразования.

3. Квадратичные формы, их матрицы в данном базисе. Приведение квадратичной формы к нормальному виду методом Лагранжа. Приведение квадратичной формы к каноническому виду при помощи ортогонального преобразования. Закон инерции квадратичных форм. Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_3^2. \qquad 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 3x_2^2 + 4x_3^2.$$

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием.

$$4x_2^2 - 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3. \qquad 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2\sqrt{3}x_2x_3.$$

2.2.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Линейные преобразования и квадратичные формы», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Линейные преобразования и квадратичные формы», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

2.3 Практическое занятие №3 (2 часа).
Тема: «Задачи линейного программирования»

2.1.1 Задание для работы:

1. Примеры экономико-математических моделей, приводящих к задачам линейного программирования.
2. Стандартная и каноническая формы записи задач линейного программирования.
3. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования в случае двух переменных. Графический метод решения.
4. Решение задачи линейного программирования методом перебора вершин.

2.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Примеры экономико-математических моделей, приводящих к задачам линейного программирования.

Провести устный опрос теоретического материала.

Составить экономико-математическую модель задачи **об оптимальном использовании ресурсов**

Для изготовления двух видов продукции используется четыре вида ресурсов: Вь B_2, B_3, B_4. Запасы ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, приведены в табл. 1.

Вид ресурса	Запас ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		Первый вид	Второй вид продукции
B_1	18	1	3
B_2	16	2	1
B_3	5	-	1
B_4	21	3	-

На производство единицы продукции 1-го и 2-го вида используется различное количество ресурсов. Так, на производство единицы продукции 1-го вида используется только одна единица ресурса B_1 а на производство единицы продукции 2-го вида используется 3 единицы ресурса B_1 на производство единицы продукции 1-го вида используется 2 единицы ресурса B_2, а на производство единицы продукции 2-го вида используется 1 единица ресурса B_2, в то же время на производство продукции 1-го вида ресурс B_3 вообще не используется, а на производство продукции 2-го вида не используется ресурс B_4.

Выручка, получаемая предприятием от продажи единицы продукции первого и второго вида, составляет соответственно 2 и 3 рубля.

Необходимо составить такой план производства продукции первого и второго вида, при котором выручка предприятия от ее реализации будет максимальной.

2. Стандартная и каноническая формы записи задач линейного программирования.

Провести устный опрос теоретического материала.

Привести к каноническому виду общую задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 7, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \ge 3, \\ x_1 - x_2 + 9x_3 = 16, \\ x_1 \ge 0, \end{cases}$$
$$L(X) = x_1 + x_2 - x_3 \to \max$$

3. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования в случае двух переменных. Графический метод решения.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Решить графическим способом следующую задачу линейного программирования:

$$z = x - 3y \to \min; \quad \begin{cases} 2x + 4y \ge 30, \\ 7x - 3y \le 37, \\ 5x - 7y \ge -27, \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

2. Решить графическим способом следующую задачу (*Выбор оптимального рациона питания*). Детская молочная кухня в суточный рацион питания для одного трехмесячного ребенка включает два продукта питания: смесь № 5 и В-рис, причем смеси № 5 должно войти в дневной рацион не более 400 г. Стоимость 100 г смеси № 5 составляет 0,7 руб., В-риса — 0,9 руб. Содержание питательных веществ в 100 г продукта, минимальные нормы потребления указаны в таблице 3. Определить оптимальный рацион питания, стоимость которого будет наименьшей.

4. Решение задачи линейного программирования методом перебора вершин.

Провести устный опрос теоретического материала.

Решить предыдущую задачу *методом перебора вершин*

2.1.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Задачи линейного программирования», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Задачи линейного программирования», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

2.4 Практическое занятие №4 (2 часа).
Тема: «Симплекс-метод решения задач линейного программирования»

2.4.1 Задание для работы:

1. Алгоритм симплекс-метода.
2. Нахождение исходного допустимого базиса.
3. Метод искусственного базиса.

2.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Алгоритм симплекс-метода.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Решить задачу линейного программирования на минимум, если начальная симплекс-таблица имеет следующий вид:
$$\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ z \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 10 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 & -9 \end{pmatrix}.$$

2. Составить симплекс-таблицу для задачи. На АООТ «Балтекс» для выпуска глянцевой ткани, ткани «Турист» и курточной ткани используются ткацкие станки двух типов: станки гидравлические и станки ткацкие бесчелночные (коротко: СГ и СТБ) с различной производительностью. Для изготовления указанных видов ткани используются нити и красители. Ресурсы времени работы станков, нитей и красителей ограничены. В таблице 13 указаны ежемесячные ресурсы времени работы станков в тысячах станко-часов, нитей и красителей в килограммах, производительность станков в метрах на час, нормы расхода нитей и красителей в килограммах на тысячу метров каждого вида ткани и цена 1 м ткани. Требуется организовать выпуск продукции так, чтобы ежемесячная выручка предприятия была максимальной.

2. Нахождение исходного допустимого базиса.

Провести устный опрос теоретического материала.

Найти исходный допустимый базис сформулированной выше задачи.

3. Метод искусственного базиса.

Провести устный опрос теоретического материала.

Решить сформулированную выше задачу методом искусственного базиса.

2.4.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Симплекс-метод решения задач линейного программирования», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Симплекс-метод решения задач линейного программирования», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала и навыки применения современного математического инструментария для решения экономических задач.

2.5 Практическое занятие №5 (2 часа).
Тема: «Транспортная задача»

2.5.1 Задание для работы:

1. Понятие о взаимно-двойственных задачах линейного программирования. Основные теоремы двойственности. Двойственность в экономико-математических моделях.

2. Транспортная задача.

2.5.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Понятие о взаимно-двойственных задачах линейного программирования. Основные теоремы двойственности. Двойственность в экономико-математических моделях.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Используя двойственность, найти решение следующей задачи линейного программирования: $z = 6y_1 + 133\ y_2 - 41\ y_3 \to \min$; $\begin{cases} -10\ y_1 + 7y_2 + 3y_3 \geq 1, \\ 4y_1 + 7y_2 - 11\ y_3 \geq 20, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0. \end{cases}$.

2. Исходная задача $Z(X) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18, \\ 2x_1 + x_2 \leq 16, \\ x_2 \leq 5, \\ 3x_1 \leq 21, \end{cases} \qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

имеет оптимальное решение $X^* = (6;\ 4;\ 0;\ 0;\ 1;\ 3)$ и значение целевой функции $Z(X^*) = 24 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4$, для которой $\max\ Z(X^*) = 24$. Составить двойственную задачу и найти её оптимальное решение, целевую функцию оптимального решения и её минимум.

2. Транспортная задача.

Провести устный опрос теоретического материала.

Автотранспортное предприятие получило заказ на укомплектование трех строящихся объектов стройматериалами, производимыми на двух заводах. На первом заводе подготовлено к отправке 120 т стройматериалов, на втором — 180 т. На первый объект необходимо доставить 70 т строительных материалов. Второй и третий объекты нуждаются в получении 140 и 90 т указанного материала.

Матрицей $\begin{pmatrix} 8 & 12 & 5 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ задано:

а) доход от перевозки одной тонны стройматериалов с каждого завода к каждому строящемуся объекту;

б) стоимость перевозки одной тонны стройматериалов с каждого завода к каждому строящемуся объекту.

Составить оптимальный план перевозок,

а) максимизирующий доход;

б) минимизирующий стоимость.

2.5.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Транспортная задача», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Транспортная задача», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала и навыки применения современного математического инструментария для решения экономических задач.