ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Методы оптимальных решений

Направление подготовки: Экономика

Профиль образовательной программы: Финансы и кредит

Форма обучения: очная

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.1 Лекция № 1 (2 часа)
Тема: «Методы оптимизации как средства принятия оптимальных решений»

1.1.1. Вопросы лекции:

1. Основные понятия. Классификация экономико-математических методов.
2. Методы принятия оптимальных решений. Структура модели.

1.1.2. Краткое содержание вопросов:

1. Основные понятия. Классификация экономико-математических методов.

Искусство принятия наилучших решений, основанное на опыте и интуиции, является сущностью любой сферы человеческой деятельности. Человек хорошо или плохо решает все возникающие перед ним задачи. Лицо, принимающее решение, должно всегда выбирать альтернативу с максимально ожидаемой полезностью. Рационализировать процесс принятия решений – это цель общей теории принятия решений, которая как самостоятельная дисциплина сформировалась в начале 60-х годов XX века. Сам процесс принятия решений может быть ненормализованным и формализованным.

Оптимизация – это целенаправленная деятельность, заключающаяся в получении наилучших результатов при соответствующих условиях. Оптимизация решения – это процесс перебора множества факторов, влияющих на результат. Оптимальное решение – это выбранное по какому-либо критерию оптимизации наиболее эффективное из всех альтернативных вариантов решение. В математике оптимизация связана с нахождением оптимума (т.е. максимума или минимума) некоторой функции. В данном контексте *методы оптимизации* будем рассматривать как средства принятия оптимальных решений. Они входят в состав экономико-математических методов.

В составе экономико-математических методов можно выделить следующие разделы:

1) *экономическая кибернетика* (системный анализ экономики, теория экономической информации и теория управляющих систем);

2) *математическая статистика* (выборочный метод, дисперсионный анализ, корреляционный анализ, регрессионный анализ, многомерный статистический анализ, факторный анализ, теория индексов и др.);

3) *математическая экономия* и изучающая те же вопросы с количественной стороны *эконометрия* (теория экономического роста, теория производственных функций, межотраслевые балансы, национальные счета, анализ спроса и потребления, региональный и пространственный анализ, глобальное моделирование и др.);

4) методы принятия оптимальных решений, в том числе исследование операций в экономике;

5) *методы и дисциплины, специфичные отдельно как для централизованно планируемой экономики, так и для рыночной (конкурентной) экономики* (оптимальное планирование, теория оптимального ценообразования, модели монополии, модели индикативного планирования, модели теории фирмы и т.д.). Многие из методов, разработанных для централизованно планируемой экономики, могут оказаться полезными и при экономико-математическом моделировании в условиях рыночной экономики;

6) *методы экспериментального изучения экономических явлений* (математические методы анализа и планирования экономических экспериментов, методы машинной имитации (имитационное моделирование), деловые игры, методы экспертных оценок).

2. Методы принятия оптимальных решений. Структура модели.

Перечисленные выше методы применяются адаптивно к задачам, возникающим в процессе принятия того или иного решения. Остановимся подробнее на четвертом разделе (*методы принятия оптимальных решений*), который является наиболее объемным, включающим в себя такие дисциплины и методы, как: оптимальное (математическое) программирование, методы ветвей и границ, сетевые методы планирования и управления, программно-целевые методы планирования и управления, теорию и методы управления запасами, теорию массового обслуживания, теорию игр, теорию расписаний.

Модель экономической задачи оптимизации состоит из 3-х частей:

I. Целевая функция (критерий оптимальности). Здесь описывается конечная цель, преследуемая при решении задачи. В качестве такой цели может быть или максимум получения каких-либо показателей или минимум затрат.

II. Система ограничений.

Ограничения бывают основные и дополнительные. Основные, как правило, описывают расход основных производственных ресурсов (это консервативная часть модели). В модели они обязательно присутствуют. Дополнительные – могут иметь различный характер, являются изменяемой частью модели и отражают особенность моделирования задачи.

III. Условие неотрицательности переменных величин. А также граничные условия, которые показывают, в каких пределах могут быть значения искомых переменных в оптимальном решении.

1.2 Лекция № 2 (2 часа)
Тема: «Линейное программирование. Основная задача линейного программирования»

1.2.1. Вопросы лекции:

1. Классификация методов линейного программирования.
2. Основная задача линейного программирования и её модель в различных формах записи.
3. Графический метод решения задачи линейного программирования.

1.2.2. Краткое содержание вопросов:

1. Классификация методов линейного программирования.

С чисто математической точки зрения задачи линейного программирования интересны тем, что здесь неприменимы методы нахождения экстремумов с помощью производной.

Под *линейным программированием* понимается линейное планирование, т.е. получение оптимального плана-решения в задачах с линейной структурой.

Задачами линейного программирования называются задачи, в которых линейны как целевая функция, так и ограничения в виде равенств и неравенств и для которых методы математического анализа оказываются непригодными. Линейное программирование представляет собой наиболее часто используемый метод оптимизации.

Методы линейного программирования подразделяются на группы:

1) группа симплексных методов (точные);
2) группа распределительных методов (точные и приближённые).

Точные – методы перебора вариантов решения задачи в итоге дающие оптимальный вариант. Используются при машинном решении задач.

Приближённые – позволяют получить только один из допустимых вариантов решения задачи. Используются для получения первого варианта в точных распределительных методах или для ручного решения задачи.

Каждая группа методов имеет свою базовую задачу. Для группы симплекс-методов базовой является «Основная задача линейного программирования», для группы распределительных методов – «Транспортная задача».

2. Основная задача линейного программирования и её модель в различных формах записи.

Постановка задачи.

Пусть некоторое предприятие имеет m видов производственных ресурсов. Порядковый номер ресурсов – i, т.е. i=1, 2,…, m.

Наличие каждого вида ресурсов известно и обозначается b_i.

Предположим, что предприятие может производить n видов продукции. Порядковый номер продукции – j, т.е. j=1, 2, …, n.

Необходимо определить какое количество единиц продукции каждого вида надо производить (x_j), чтобы получить максимум этой продукции в стоимостном выражении, если известны затраты на производство единицы продукции каждого вида ресурса (a_{ij}) и цена реализации (c_j).

Развернутая форма записи модели.

I. Целевая функция – описывает выход продукции в стоимостном выражении:

$Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\rightarrow\max.$

II. Система основных ограничений – описывает с помощью математической зависимости тот факт, что расходы производственных ресурсов не должны превышать их наличие:

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \le b_1;$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \le b_2;$

…………………………

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n \le b_m.$

III. Условие неотрицательности переменных величин:

$x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ \ldots,\ x_n\ge0.$

<u>*Замечание:*</u> в постановке с выбором другого критерия оптимальности целевая функция может стремиться к минимуму. Кроме того система ограничений может быть смешанной, т.е. содержать не только неравенства (≤,≥), но и равенства.

Структурная форма записи модели.

В такой форме модели даются в специализированной литературе. В этой форме записи отражается структура и тип ограничений, структура функции, какие переменные входят в функцию Z и в ограничения.

I. $Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow\max.$

II. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$, i=1,2,…,m.

III. $x_j\ge0$, j=1,2,…,n.

<u>*Замечание:*</u> одной формулой можно описать ограничения, имеющие одинаковую структуру и тип и включающие в себя одни и те же переменные.

Существуют также векторная, матричная и табличная формы записи модели.

3. Графический метод решения задачи линейного программирования

Графический метод основан на геометрической интерпретации задач линейного программирования и применяется в основном при решении задач *двумерного пространства*, так как довольно трудно, а чаще практически невозможно изобразить графически многогранник решений, который образуется в результате пересечения полупространств. Поэтому, сущность графического метода решения задач линейного программирования рассмотрим на примере задачи, заданной в двумерном пространстве, т.е. ее ограничения содержат две переменные.

1.3 Лекция № 3, 4 (4 часа)
Тема: «Симплексный метод решения задачи линейного программирования»

1.3.1. Вопросы лекции:

1. Общая характеристика симплекс-метода и подготовка модели к решению.
2. Алгоритм симплекс-метода.
3. Особые случаи в симплекс-методе.

1.3.2. Краткое содержание вопросов:

1. Общая характеристика симплекс-метода и подготовка модели к решению.

Весь путь решения задачи симплекс-методом условно можно разбить на три этапа.

I *этап.* Нахождение исходного варианта и исследование его на допустимость, т.е. получение начального опорного решения.

Допустимым вариантом решения задачи будем считать такие значения x_j, при которых выполняются все требования системы ограничений (все неравенства верны и непротиворечивы).

Если исходный вариант допустим, то опорное решение найдено и переходим на второй этап. Иначе, осуществляем перебор вариантов решения задачи до получения допустимого (если такое возможно. Если нет, то задача решения не имеет).

II *этап.* Исследования допустимого варианта на оптимальность.

Оптимальный вариант – это такое значение переменной x_j при котором будут выполняться не только требования системы ограничений, но и требования целевой функции. Если допустимый вариант окажется оптимальным, то задача решена, иначе переходим на третий этап.

III *этап.* Перебор вариантов решения задачи до получения оптимального варианта (если такое возможно. Если нет, то задача не имеет оптимального решения).

Подготовленная модель основной задачи линейного программирования будет выглядеть следующим образом:

I. $Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\rightarrow\max$.

II. $y_1=-a_{11}x_1-a_{12}x_2-\ldots-a_{1n}x_n+b_1$;

$y_2=-a_{21}x_1-a_{22}x_2-\ldots-a_{2n}x_n+b_2$;

……………………………………………

$y_m=-a_{m1}x_1-a_{m2}x_2-\ldots-a_{mn}x_n+b_m$.

III. $x_1\geq0,\ x_2\geq0,\ \ldots,\ x_n\geq0$.

Из этого вида данные заносятся в табличную форму для осуществления решения.

2. Алгоритм симплекс-метода.

I *этап*: получение начального опорного решения.

Для того, чтобы получить исходный вариант достаточно записать подготовленную модель в табличной форме.

Таблица 1 – Симплекс-таблица исходного варианта

свободные переменные

базисные переменные

	$-x_1$	$-x_2$	…	$-x_n$	Свободные члены
y_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
y_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
Z	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_n$	0

Из каждой таблицы можно выписать один вариант решения задачи. Для этого надо помнить, что свободные переменные (верхняя строка таблицы) приравниваются к нулю, а базисные (крайний левый столбец) к соответствующим свободным членам.

Исходный вариант (по таблице 1):

1) основные переменные (x_j): x_1=0, x_2=0,…, x_n=0;

2) дополнительные переменные (y_i): $y_1=b_1$, $y_2=b_2$,…, $y_m=b_m$;

3) Z=0.

Исследуем полученный вариант на допустимость.

Теорема о допустимости: в таблице будет находиться допустимый вариант решения задачи, если среди свободных членов не будет отрицательных (элемент на пересечение столбца свободных членов и строки Z при анализе во внимание не принимается).

Доказательство: свободные члены являются значениями базисных переменных, если среди базисных переменных есть x_j, то они не могут быть отрицательными в силу условия неотрицательности ($x_j \geq 0$). Если в базисе y_i, то оно не должно быть отрицательным так как y_i вводилась как разница между большей и меньшей частью неравенства.

Если вариант допустим, то перейдем на второй этап и исследуем его на оптимальность. Если нет, то попытаемся получить допустимый вариант, выбрав разрешающий элемент по следующему правилу:

- выбор разрешающей строки: среди отрицательных свободных членов (кроме строки Z), выбрать больший по абсолютной величине. Пусть это b_2;

- выбор разрешающего столбца: взять симплексные отношения, поделив свободный член разрешающей строки на каждый её коэффициент:

$$\frac{b_2}{a_{21}}, \frac{b_2}{a_{22}}, \ldots, \frac{b_2}{a_{2n}}.$$

Наименьшее положительное из симплексных отношений укажет на столбец.

Выбирая описанным способом разрешающие элементы, делаем шаги до получения допустимого варианта (если такое возможно).

Предположим, что на каком-то шаге мы получим таблицу с допустимым вариантом, т.е. найдем опорное решение.

II *этап*: исследование допустимого варианта на оптимальность.

Теорема об оптимальности: в таблице будет находиться оптимальный вариант, если среди коэффициентов строки Z не будет отрицательных при $Z \to \max$ и не будет положительных при $Z \to \min$ (элемент на пересечение столбца свободных членов и строки Z при анализе во внимание не принимается).

Если вариант окажется оптимальным, то задача решена, если нет, то переходим на третий этап.

Предположим, что наш допустимый вариант не оптимален.

III *этап:* нахождение оптимального варианта.

Попытаемся получить оптимальный вариант, выбрав разрешающий элемент по следующему правилу:

при $Z \to \max$:

- разрешающий столбец: среди отрицательных коэффициентов строки Z выбрать наибольший по абсолютной величине (например, пусть это c_n);

- разрешающая строка: взять симплексные отношения, поделив свободные члены на соответствующие элементы разрешающего столбца, кроме строки Z:

$$\frac{b_1}{a_{1n}}, \frac{b_2}{a_{2n}}, \ldots, \frac{b_m}{a_{mn}}.$$

Наименьшее положительное из симплексных отношений укажет на строку;

при $Z \to \min$:

- разрешающий столбец: среди положительных коэффициентов строки Z выбрать наибольший (например, пусть это c_1);

- разрешающая строка: взять симплексные отношения, поделив свободные члены на соответствующие элементы разрешающего столбца, кроме строки Z:

$$\frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_2}{a_{21}}, \dots, \frac{b_m}{a_{m1}}.$$

Наименьшее положительное из симплексных отношений укажет на строку.

Выбирая описанным способом разрешающий элемент, делаем шаги до получения оптимального варианта (если такое возможно).

3. Особые случаи в симплекс-методе.

1.Неразрешимость модели (система неравенств не имеет решения).
2.Неограниченность функционала (функция не имеет экстремального значения).
3.Альтернативный оптимум.
4.Случай вырожденности.
5.Смешанная система ограничений.

1.4 Лекция № 5 (2 часа)
Тема: «Целочисленность в линейном программировании»

1.4.1. Вопросы лекции:

1. Постановка и модель целочисленной задачи.
2. Решение целочисленных задач линейного программирования.
3. Некоторые экономические задачи целочисленного программирования.

1.4.2. Краткое содержание вопросов:

1. Постановка и модель целочисленной задачи.

Пусть некоторое предприятие имеет n видов производственных ресурсов. Порядковый номер ресурсов – i, т.е. $i = 1, 2, \dots, m$. Наличие каждого вида ресурсов известно и обозначается b_i. Предположим, что предприятие может производить m видов продукции. Порядковый номер продукции – j, т.е. $j = 1, 2, \dots, n$. Необходимо определить какое количество единиц продукции каждого вида надо производить (x_j), чтобы получить максимум этой продукции в стоимостном выражении, если известно, что затраты на производство единицы продукции каждого вида ресурса равны a_{ij} единиц, а цена реализации – c_j. Единицы производимой продукции должны принимать целые значения. Тогда модель задачи будет выглядеть следующим образом:

I) $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to \max$.

II) $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1$,
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2$,
……………………………
$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m$.

III) $x_j \ge 0$ и x_j – целые, $j = 1, 2, \dots, n$.

2. Решение целочисленных задач линейного программирования.

Иногда задачи целочисленного программирования решают приближенно. Сначала, отбросив условие целочисленности, решают задачу методом линейного программирования, а затем в полученном оптимальном решении округляют переменные до целых чисел. Такой прием можно использовать, если значения переменных достаточно велики и погрешностью округления можно пренебречь. Если значения переменных невелики, то округление может привести к значительному расхождению с оптимальным решением. Поэтому разработаны специальные методы решения целочисленных задач, среди которых можно выделить два направления: методы отсечения (отсекающих плоскостей) и комбинаторные методы.

Представление о комбинаторных методах дает широко используемый на практике метод ветвей и границ. Мы будем рассматривать метод отсекающих плоскостей, который состоит в построении дополнительных ограничений.

К методу отсекающих плоскостей относится аналитический метод решения полностью целочисленных задач – *метод Гомори*. Основная его идея заключается в том, что задача сначала решается без ограничения целочисленности. Если решение получается целочисленным, то задача решена, если нет, то к задаче присоединяют новое дополнительное ограничение, которое называют сечением. Получают новую задачу, для которой множество допустимых решений будет меньше, чем для исходной задачи, но будет содержать все допустимые целочисленные решения.

3. Некоторые экономические задачи целочисленного программирования.

Задача о ранце. Общий вес ранца заранее ограничен. Необходимо определить какие предметы положить в ранец, чтобы общая полезность отобранных предметов была максимальна, если вес каждого предмета известен.

Задача о выборе оборудования. Пусть для приобретения оборудования, размещаемого на производственной площади 38 м^2, фирма выделяет 20 млн. руб. Имеются единицы оборудования двух типов: типа А стоимостью 5 млн. руб., требующее производственную площадь 8 м^2 и имеющее производительность 7 тыс. единиц продукции за смену, и типа Б – стоимостью 2 млн. руб., занимающее площадь 4 м^2, и дающее за смену 3 тыс. единиц продукции. Требуется рассчитать оптимальный вариант приобретения оборудования, обеспечивающий максимум производительности участка.

К задачам целочисленного программирования также относятся:

- *задача оптимального раскроя материалов*: на предприятии производится раскрой нескольких различных партий материалов в заданных количествах единиц одинакового размера в каждой партии. Из материалов всех партий требуется изготовить максимальное число комплектов, в каждый из которых входит несколько различных видов деталей в заданном количестве, если известно, что каждую единицу материала можно раскроить на детали определенным количеством различных способов для получения деталей разного вида;

- *задача о назначениях*. С ее помощью можно получить ответ на вопросы типа: как распределить рабочих по станкам, чтобы общая выработка была наибольшей или затраты на заработную плату наименьшими; как наилучшим образом распределить экипажи самолетов; как назначить людей на различные должности и т.д. Математически такие задачи относятся к транспортным задачам, с той особенностью, что в них объемы наличных и требующихся ресурсов для выполнения каждой работы равны единице ($a_j = b_i = 1$), а все переменные x_{ij} либо равны единице, если i-ый работник назначен на j-ую работу, либо равны нулю в других случаях. Исходные данные задачи о назначениях группируются в таблице, которая называется матрицей оценок, а результаты – в матрице назначений. При решении задачи о назначениях используют алгоритмы и методы решения транспортных задач;

- *задача о коммивояжере*. Она относится к задачам предыдущего вида и может быть сформулирована следующим образом: имеется n городов, пронумерованных числами от 1 до n. Коммивояжер, выезжая из города 1, должен побывать в каждом городе ровно один раз и вернуться в исходный пункт при этом известны расстояния c_{ij} между городами ($i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}, i \neq j$). Требуется найти самый короткий маршрут.

1.5 Лекция № 6 (2 часа)
Тема: «Двойственность в линейном программировании»

1.5.1. Вопросы лекции:

1. Постановка и модель двойственной задачи.
2. Методы решения.
3. Теоремы теории двойственности и ее экономическое содержание.

1.5.2. Краткое содержание вопросов:

1. Постановка и модель двойственной задачи.

Предположим, что некоторое предприятие решило не тратить ресурсы на изготовление продукции, а продать эти ресурсы. Тогда возникает вопрос: по какой цене продавать ресурсы? Цена должна устраивать как продавца, так и покупателя. Интерес покупающей стороны заключается в том, чтобы заплатить за ресурсы как можно меньше, а интерес продающей стороны – в том, чтобы получить за ресурсы не меньше того, что она получила бы за реализованный готовый товар.

Тогда, в так называемой *двойственной модели*, целевая функция будет описывать интерес покупающей стороны, система ограничений – интерес продающей стороны (необходимо оценить ресурсы, которые пошли бы на изготовление единицы продукции и стоимость этих ресурсов ограничить ценой реализованной единицы продукции). Третье условие (неотрицательность переменных величин) будет выполняться в силу того, что цена единицы ресурса не может быть отрицательной. Введя в качестве цены единицы ресурса величину $u_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, m$), ее еще называют *оценкой ресурса* (или двойственной оценкой), получим следующую модель:

I) $F = b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots + b_mu_m \to \min$.

II) $a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m \geq c_1$,
$a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{m2}u_m \geq c_2$,
……………………………
$a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{mn}u_m \geq c_n$.

III) $u_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

2. Методы решения.

Каждая из задач двойственной пары может решаться отдельно. При этом используется как симплексный метод, так и графический (в случае если задача содержит две переменные). Одновременное решение задач реализуется с использованием, так называемой, двойственной симплекс-таблицы.

3. Теоремы теории двойственности и ее экономическое содержание.

В качестве *основной теоремы двойственности* выделяют следующую формулировку: если одна из взаимно двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая также имеет оптимальное решение, при этом соответствующие им оптимальные значения целевых функций равны (т.е. $\max Z = \min F$).

Кроме этого варианта возможны следующие взаимоисключающие случаи: в одной из пары двойственных задач допустимое множество не пусто, а целевая функция на этом множестве не ограничена, то у другой задачи из этой пары будет пустое допустимое множество (т.е. если в одной задаче функционал не ограничен, то задача ей двойственная не имеет решения); обе из рассматриваемых задач имеют пустые допустимые множества (т.е. обе не имеют решения).

С экономической стороны решение прямой задачи дает оптимальный план выпуска продукции, а решение двойственной задачи – оптимальную систему условных (или *двойственных*) *оценок* применяемых ресурсов.

1.6 Лекция № 7, 8, 9 (6 часов)

Тема: «Методы решения задач линейного программирования транспортного типа»

1.6.1. Вопросы лекции:

1. Постановка и модель транспортной задачи в различных формах записи.
2. Алгоритм решения задачи.
3 Приближенные распределительные методы.

1.6.2. Краткое содержание вопросов:

1. Постановка и модель транспортной задачи в различных формах записи.

Пусть имеем m пунктов, в которых находится известное количество однородных грузов (поставщики). Порядковый номер поставщика обозначается i, то есть i=1,2,…,m. Наличие грузов у поставщика b_i. Имеется n пунктов испытывающих потребность в этих грузах (потребителей). Порядковый номер потребителя j=1,2,…,n. Потребность в грузах каждого потребителя a_j. Известна «цена» перевозки единицы груза от каждого поставщика к каждому потребителю (c_{ij}). Необходимо составить план перевозки грузов от поставщиков к потребителю, т.е. определить: какое количество груза необходимо перевезти от каждого поставщика к каждому потребителю (x_{ij}), причем значения x_{ij} должны отвечать следующим требованиям:

- общие затраты на перевозку грузов должны быть минимальными;
- все грузы от поставщиков должны быть вывезены;
- потребности потребителей в грузах должны быть удовлетворены.

I. Целевая функция описывает затраты на перевозку грузов:

$Z=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\ldots+c_{1n}x_{1n}+c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+\ldots+c_{2n}x_{2n}+\ldots +c_{m1}x_{m1}+c_{m2}x_{m2}+\ldots+c_{mn}x_{mn}\to\min.$

II. Система ограничений описывает второе и третье требования для x_{ij} из постановки задачи.

1 группа: условие полного вывоза грузов от поставщиков (сумма грузов, вывезенных от поставщика должна быть равна наличию):

$x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n} = b_1,$
$x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n} = b_2,$
……………………
$x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn} = b_m;$

2 группа: условие удовлетворения потребителя (сумма грузов привезённых потребителю должна быть равна его потребности):

$x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{m1}=a_1,$
$x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{m2}=a_2,$
…………………….
$x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn} = a_n.$

III. Условие неотрицательности переменных величин $x_{11}\geq0$, $x_{12}\geq0$, …, $x_{mn}\geq0$.

Структурная форма записи модели транспортной задачи.

В специализированной литературе модели даются в структурной форме.

I. $Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min.$

II.

1) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i,\ i = 1,2,\ldots m$;

2) $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_j,\ j = 1,2,\ldots n$.

III. $x_{ij}\geq0$ (i = 1,2,…,m, j = 1,2,…,n).

2. Алгоритм решения задачи.

Математическая модель транспортной задачи относится к задачам линейного программирования и может быть решена симплексным методом. Однако ввиду исключительной практической важности этой задачи и специфики ограничений (ограничения заданы в виде уравнений; каждая неизвестная входит лишь в два уравнения; коэффициенты при неизвестных – единицы) для ее решения созданы специальные алгоритмы. Самым распространенным методом решения транспортной задачи является метод потенциалов.

Решение транспортной задачи разбивается на два этапа:

1) определение начального допустимого базисного решения (первого опорного плана) – первоначальное распределение поставок. Достигается посредством распределительных методов;

2) построение последовательных итераций (шагов), улучшающих опорные планы (каждый новый план не должен увеличивать суммарные затраты при $Z \to \min$ и уменьшать при $Z \to \max$). Достигается посредством метода потенциалов.

3 Приближенные распределительные методы.

К приближенным распределительным методам можно отнести метод наилучших цен и метод аппроксимации. Приближенными они называются вследствие того, что полученное при помощи этих методов распределение груза в таблице не требует дополнительной проверки на оптимальность, так как либо сразу оказывается оптимальным, либо максимально к нему приближено.

1.7 Лекция № 10 (2 часа)
Тема: «Балансовые модели»

1.7.1. Вопросы лекции:

1. Схема межотраслевого баланса производства и распределения продукта.
2. Коэффициенты прямых и полных материальных затрат.
3. Межотраслевые балансовые модели в анализе экономических показателей.

1.7.2. Краткое содержание вопросов:

1. Схема межотраслевого баланса производства и распределения продукта.

Принципиальная схема межотраслевого баланса производства и распределения совокупного общественного продукта в стоимостном выражении представлена в таблице.

Таблица – Принципиальная схема межотраслевого баланса (МОБ)

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли					Конечный продукт	Валовой продукт
	1	2	3	…	n		
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	…	x_{1n}	Y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	…	x_{2n}	Y_2	X_2
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	…	x_{3n}	Y_3	X_3
…	…	…	…	…	…	…	…
n	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	…	x_{nn}	Y_n	X_n
Амортизация	c_1	c_2	c_3	…	c_n	$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{n} X_j$	
Оплата труда	v_1	v_2	v_3	…	v_n		
Чистый доход	m_1	m_2	m_3	…	m_n		
Валовой продукт	X_1	X_2	X_3	…	X_n		

В основу этой схемы положено разделение совокупного продукта на две части: промежуточный и конечный продукт. Все народное хозяйство представлено в виде совокупности n отраслей (имеются в виду чистые отрасли), при этом каждая отрасль фигурирует в балансе как производящая и как потребляющая.

2. Коэффициенты прямых и полных материальных затрат.

Величины a_{ij} называются *коэффициентами прямых материальных затрат* и рассчитываются следующим образом:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \quad i = 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, n.$$

Коэффициента прямых материальных затрат a_{ij} *показывают*, какое количество продукции i-й отрасли необходимо (если учитывать только прямые затраты) для производства единицы продукции j-й отрасли.

Коэффициенты полных материальных затрат b_{ij} *показывают*, какое количество продукции i-й отрасли нужно произвести, чтобы с учетом прямых и косвенных затрат этой продукции получить единицу конечной продукции j-й отрасли.

3. Межотраслевые балансовые модели в анализе экономических показателей.

К числу важнейших аналитических возможностей балансового метода относится определение прямых и полных затрат труда на единицу продукции и разработка на этой основе балансовых продуктово-трудовых моделей, исходной моделью при этом служит отчетный межпродуктовый баланс в натуральном выражении. В этом балансе по строкам представлено распределение каждого отдельного продукта на производство других продуктов и конечное потребление (первый и второй квадранты схемы межотраслевого баланса). Отдельной строкой дается распределение затрат живого труда в производстве всех видов продукции; предполагается, что трудовые затраты выражены в единицах труда одинаковой степени сложности.

1.8 Лекция № 11, 12 (4 часа)
Тема: «Функции полезности и спроса. Задача потребительского выбора. Уравнение Слуцкого»

1.8.1. Вопросы лекции:

1. Основные понятия.
2. Функция полезности и ее свойства.
3. Задача потребительского выбора. Функции спроса.
4. Эффекты компенсации. Уравнение Слуцкого. Оценка эластичности спроса.

1.8.2. Краткое содержание вопросов:

1. Основные понятия.

На рынок покупателя толкают потребности. Потребности порождают спрос. *Анализ спроса и потребления – это область экономико-математических исследований, цель которых – научное предвидение материальных потребностей людей и поиск оптимальных путей их удовлетворения.* Разрабатывают также модели, которые связывают спрос и потребление с производством. Совокупность таких моделей образует *систему моделей прогнозирования экономики.*

С категориями спрос и потребление перекликается часто встречающаяся категория – *полезность*. Судить об удовлетворении потребностей членов общества можно по общественной полезности данных благ. Если под *общественной полезностью* понимается объективный результат производственной деятельности как критерия оптимальности, то *субъективная полезность* – это оценка благ, ресурсов, результатов с позиций отдельного потребителя, это его благосостояние, удовлетворение его потребностей.

2. Функция полезности и ее свойства.

Удовлетворение индивидуума применяется как мера предпочтения, как мера сопоставления между затратами и усилиями с одной стороны и результатами – с другой. Полезность принято выражать в виде функции, для которой аргументами являются затраты, усилия, альтернативные потребления благ и т.п. Эта функция получила название **функции полезности**. Полезность благ – это переменная величина, она изменяется с изменением уровней потребления этих благ.

В общей форме функции полезности может быть представлена в виде:

$$u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – факторы, влияющие на полезность u.

Свойства функции полезности.

1. Возрастание потребления одного продукта при постоянном потреблении другого продукта ведет к росту потребительской оценки, т.е.

если $x_1 + \Delta x_1 > x_1$, то $u(x_1 + \Delta x_1, x_2) > u(x_1, x_2)$;

если $x_2 + \Delta x_2 > x_2$, то $u(x_1, x_2 + \Delta x_2) > u(x_1, x_2)$.

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} = u_1' > 0, \quad \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = u_2' > 0.$$

Первые частные производные называются *предельными полезностями продуктов*: u_1' – предельная полезность первого продукта, u_2' – предельная полезность второго продукта. Для предельных полезностей используется также символика $M_1,\ M_2$.

2. Предельная полезность каждого продукта уменьшается, если объем его потребления растет (это свойство предельной полезности называется законом убывающей предельной полезности).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^{\,2}} = u_{11}'' < 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^{\,2}} = u_{22}'' < 0.$$

3. Предельная полезность каждого продукта увеличивается, если растет количество другого продукта. В этом случае продукт, количество которого фиксировано, оказывается относительно дефицитным. Поэтому дополнительная его единица приобретает большую ценность и может быть потреблена более эффективно. Данное свойство справедливо не для всех благ.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = u_{12}'' = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} = u_{21}'' > 0$$

3. Задача потребительского выбора. Функции спроса.

Задача потребительского выбора (задача рационального поведения потребителя на рынке) заключается в выборе такого потребительского набора (x_1, x_2), который максимизирует его функцию полезности при заданном бюджетном ограничении.

Формально *задача потребительского выбора* имеет вид:

I. $u(x_1, x_2) \to \max$.

II. $p_1 x_1 + p_2 x_2 \le I$.

III. $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$.

Где p_1 и p_2 – рыночные цены на первый и второй товар соответственно, I – доход покупателя.

4. Эффекты компенсации. Уравнение Слуцкого. Оценка эластичности спроса.

Если при росте цены на один товар при снижении его спроса, растет спрос на другой товар, то эти товары *взаимозаменяемые*. Наоборот, если спрос на другой товар также падает, то они *взаимодополняемые*. Однако, реальная взаимозаменяемость может искажаться общим снижением благосостояния при росте цены на один из товаров. Первый товар может заменять второй в потреблении, но спрос на него может не расти, поскольку просто снизился доход. Для снятия этого искажения используют понятие *компенсированного изменения цены*, то есть такого, которое сопровождается увеличением дохода потребителя, позволяющим ему поддерживать прежний уровень благосостояния.

В координатной форме уравнение Слуцкого (согласно $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$) примет вид:

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \left[\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right]_{comp} - \left[\frac{\partial x_i}{\partial I}\right] x_j,$$

и может рассматриваться как при разных, так и при совпадающих i и j.

Эластичность спроса по цене показывает степень изменения спроса в ответ на изменение цены на товар и равна:

$$e_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} : \frac{x_i}{p_j}$$

Эластичность спроса по доходу показывает степень изменения спроса в ответ на изменение доходов потребителей и равна:

$$e_{iI} = \frac{\partial x_i}{\partial I} : \frac{x_i}{I}, \quad i=1,n.$$

Выполняется равенство:

$$\sum_{j=1}^{n} e_{ij} + e_{iI} = 0, \quad i=1,n.$$

То есть сумма всех эластичностей спроса по цене и доходу должна равняться нулю.

1.9 Лекция № 13 (2 часа)
Тема: «Производственные функции»

1.9.1. Вопросы лекции:

1. Основные понятия. Свойства производственных функций.
2. Эластичность выпуска.
3. Производственная функция Кобба-Дугласа.
4. Динамическая производственная функция.

1.9.2. Краткое содержание вопросов:

1. Основные понятия. Свойства производственных функций.

Производственными функциями называют соотношение между используемыми производственными ресурсами и выпускаемой продукцией.

В общей форме производственная функция может быть представлена в виде:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где x_1, x_2,..., x_n – значения объемов затрачиваемых или используемых ресурсов; y – объем выпускаемой продукции.

Производственные функции применяются для анализа влияния различных сочетаний факторов на объем выпуска в определенный момент времени (*статический вариант*) и для анализа, а также прогнозирования соотношения объемов факторов и объема выпуска, в разные моменты времени (*динамический вариант*). Также производственные функции используются на различных уровнях экономики – от *фирмы* (предприятия) до народного хозяйства в целом (*агрегированная* производственная функция, в которой выпуском служит показатель совокупного общественного продукта или национального дохода и т.п.).

Свойства производственных функций

Свойства производственных функций рассмотрим на примере функции двух переменных $y = f(x_1, x_2)$, которая имеет область определения $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$:

1) производство невозможно при отсутствии хотя бы одного ресурса, т.е. $f(0, x_2) = f(x_1, 0) = 0$;

2) при увеличении затрат производственных ресурсов выпуск продукции растет $x(1) > x(0) \Rightarrow f(x(1)) > (fx(0))$; если функция дифференцирована, то можно записать $x > 0 \;\; \Rightarrow \;\; \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} > 0 \; (i = 1{,}2),$ или первая частная производная $\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right]$ положительна;

3) по мере увеличения количества одного ресурса при постоянных количествах других предельная эффективность использования этого ресурса не возрастает. Математически это требование для дважды дифференцируемых производственных функций выглядит так: $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_{ii}^2} \leq 0$.

Например, это означает, что рост вооруженности средствами производства приводит к росту выпуска продукции, но темп роста выпуска продукции все время падает (закон убывающей эффективности);

4) производственная функция характеризуется определенной отдачей от расширения масштабов производства. Отдача от расширения масштабов производства характеризует производственную функцию с точки зрения изменения выпуска продукции при пропорциональном изменении затрат ресурсов, которое математически выражается в умножении всех компонент вектора *x* на положительный скаляр *q*. Принято говорить, что скалярная функция является однородной функцией степени *p*, если для любого вектора *x* и любого скаляра *t* она удовлетворяет условию $f(tx) = q^p f(x)$.

2. Эластичность выпуска.

Отношение предельной производительности M_i *i*-го ресурса к его средней производительности A_i называется *эластичностью выпуска* по *i*-му ресурсу (по фактору производства). Символика:

$$E_i = \frac{M_i}{A_i} = \frac{x_i}{f(x)} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}, \; (i = 1{,}2).$$

Сумма $E_1 + E_2 = E_x$ называется *эластичностью производства*. E_i показывает, на сколько процентов увеличится выпуск, если затраты *i*-го ресурса увеличатся на один процент при неизменных объемах другого ресурса.

3. Производственная функция Кобба-Дугласа.

Для моделирования отдельного региона или страны в целом (т.е. для решения задач на макроэкономическом, микроэкономическом уровне) часто используют производственную функцию вида:

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2},$$

где a_0, a_1, a_2, – параметры производственной функции. Это положительные постоянные числа, причем часто a_1 и a_2 таковы, что a_1+a_2=1. Производственная функция данного вида называется *производственной функцией Кобба-Дугласа* по имени двух американских экономистов, предложивших ее использовать в 1929 году.

4. Динамическая производственная функция.

Производственная функция называется *динамической*, если:

1) время t фигурирует в качестве самостоятельной переменной величины (как бы самостоятельного фактора производства), влияющего на объем выпускаемой продукции;

2) параметры производственной функции и ее характеристика f зависят от времени t.

Рассмотрим пример динамической производственной функции: при построении производственной функции научно-технический прогресс (НТП) может быть учтен с помощью введения множителя ТП e^{pt}, где параметр p (p>0) характеризует темп прироста под влиянием НТП:

$$y(t) = e^{pt} f(x_1(t), x_2 t), \text{ где } t = 0, 1, \ldots, T.$$

1.10 Лекция № 14 (2 часа)
Тема: «Системное моделирование как основа оптимального планирования в совокупности задач управления производством»

1.10.1. Вопросы лекции:

1. Задачи оптимизации производства: максимизация прибыли в случаях долговременного и кратковременного промежутков.
2. Понятия управления и оптимального планирования.
3. Системное моделирование в процессе решения задач управления.

1.10.2. Краткое содержание вопросов:

1. Задачи оптимизации производства: максимизация прибыли в случаях долговременного и кратковременного промежутков.

Формально задача максимизации прибыли в определенном временном периоде имеет вид: $PR \to$ max. Такая постановка задачи максимизации прибыли зависит от того, по итогам какого временного промежутка (долговременного (долгосрочного) или кратковременного (краткосрочного)) фирма максимизирует свою прибыль.

В случае долговременного промежутка фирма может свободно выбирать любой вектор затрат $x = (x_1, x_2)$ из пространства затрат, поэтому задача максимизации прибыли в случае долговременного промежутка имеет следующий вид:

$$p_0 f(x_1, x_2) - (p_1 x_1 + p_2 x_2) = PR(x_1, x_2) \to \max$$

при условии, что $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$ (x_1 и x_2 – объемы используемых фирмой ресурсов).

В случае кратковременного промежутка фирма должна учитывать неизбежные лимиты на объемы используемых ею ресурсов, которые формально могут быть записаны в виде нелинейного неравенства: $g(x_1, x_2) \leq b$ (ограничений вида $g(x_1, x_2) \leq b$ может быть несколько). Следовательно, задача максимизации прибыли для краткосрочного промежутка имеет вид задачи математического программирования:

$$p_0 f(x_1, x_2) - (p_1 x_1 + p_2 x_2) = PR(x_1, x_2) \to \max$$

при условии, что $g(x_1, x_2) \leq b$, $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$.

2. Понятия управления и оптимального планирования.

Управление – сознательное целенаправленное воздействие со стороны государства, экономических субъектов на людей и экономические объекты, осуществляемое с целью направить их действия в нужное русло и получить желаемые результаты.

Оптимальное планирование – планирование на основе экономико-математических методов и моделей, позволяющее выбрать из всех возможных и допустимых наилучший план, характеризуемый максимальным значением целевой функции (критерия оптимальности).

3. Системное моделирование в процессе решения задач управления.

Основополагающим в совокупности классификационных признаков является сущность моделируемых экономических процессов. Совокупность всех экономических, производственных, технологических процессов составляет единый объект *системного моделирования*.

Система моделей представляет собой совокупность логически, информационно и алгоритмически связанных моделей, отражающих экономические, организационные и технологические процессы воспроизводства в их объективном существующем единстве. Система моделей используется для принятия эффективных решений по развитию различных сфер производства.

При построении системы моделей следует придерживаться следующих *принципов*:

- принцип развития;
- принцип единства;
- принцип относительной автономности;
- принципы соответствия и адаптации;
- принцип ориентации на выходные показатели;
- принцип необходимого разнообразия;
- принцип взаимного дополнения моделей;
- принцип увязки моделей.

Одна из основных методологических проблем системного моделирования и согласования плановых расчетов на основе применения системы моделей состоит в построении системы критериев оптимальности. *Критерий оптимальности служит экономико-математическим выражением цели развития моделируемой системы*.

1.11 Лекция № 15 (2 часа)
Тема: «Динамическое программирование»

1.11.1. Вопросы лекции:

1. Основные понятия динамического программирования.
2. Общая постановка задачи динамического программирования.
3. Геометрическая интерпретация задачи динамического программирования.

1.11.2. Краткое содержание вопросов:

1. Основные понятия динамического программирования.

В задачах динамического программирования экономический процесс зависит от времени (от нескольких периодов (этапов) времени), поэтому находится ряд оптимальных решений (последовательно для каждого этапа), обеспечивающих оптимальное развитие всего процесса в целом. Задачи динамического программирования называются *многоэтапными* или *многошаговыми.*

Динамическое программирование представляет собой математический аппарат, позволяющий осуществлять оптимальное планирование многошаговых управляемых процессов и процессов, зависящих от времени.

Экономический процесс называется *управляемым,* если можно влиять на ход его развития. *Управлением* называется совокупность решений, принимаемых на каждом этапе для влияния на ход процесса. В экономических процессах управление заключается в распределении и перераспределении средств на каждом этапе. Например, выпуск продукции любым предприятием – управляемый процесс, так как он определяется изменением состава оборудования, объемом поставок сырья, величиной финансирования и т.д. Совокупность решений, принимаемых в начале каждого года планируемого периода по обеспечению предприятия сырьем, замене оборудования, размерам финансирования и т.д., является управлением.

Для большинства задач динамического программирования классические методы анализа или вариационного исчисления оказываются неэффективными. Динамическое программирование, используя поэтапное планирование, позволяет не только упростить решение задач, но и решить те из них, к которым нельзя применить методы математического анализа.

2. Общая постановка задачи динамического программирования.

Пусть некоторая физическая управляемая система S находится в первоначальном состоянии $S_0 \in \tilde{S}_0$ (где $\tilde{S}_0$ – область начальных состояний). С течением времени ее состояние меняется и система приходит в конечное состояние $S_k \in \tilde{S}_k$ (где $\tilde{S}_k$ – область конечных состояний). С процессом изменения состояния системы связан некоторый численный критерий W. Необходимо так организовать процесс, чтобы критерий достиг оптимального значения.

Обозначим множество возможных управлений через U. Тогда задача состоит в том, чтобы из множества возможных управлений U найти такое управление U^*, которое позволит перевести систему S из начального состояния $S_0 \in \tilde{S}_0$ в конечное $S_k \in \tilde{S}_k$ так, что критерий $W(U)$ принимает оптимальное значение W^*.

3. Геометрическая интерпретация задачи динамического программирования.

Состояние физической системы S можно описать числовыми параметрами, например расходом горючего и скоростью, количеством вложенных средств и т. д. Назовем эти параметры *координатами системы;* тогда состояние системы можно изобразить точкой S, а переход из одного состояния S_1 в другое S_2 – траекторией точки S. Управление U означает выбор определенной траектории перемещения точки S из S_1 в S_2, т.е. установление определенного закона движения точки S. Совокупность состояний, в которые может переходить система называется *областью возможных состояний.* В зависимости от числа параметров, характеризующих состояние системы, область возможных состояний системы может быть различной.

Пусть, например, состояние системы S характеризуется одним параметром, – координатой x. Следовательно, областью возможных состояний системы является совокупность значений x, а управлением – закон движения точки S из начального состояния $S_0 \in \tilde{S}_0$ в конечное $S_k \in \tilde{S}_k$ по оси Ox или ее части.

Если состояние системы S характеризуется двумя параметрами (x_1 и x_2), то областью возможных состояний системы служит плоскость x_1Ox_2 или ее часть, а управление изобразится линией на плоскости, по которой точка S перемещается из $S_0 \in \tilde{S}_0$ в $S_k \in \tilde{S}_k$

В общем случае, когда состояние системы описывается n параметрами x_i ($i = 1, 2, ..., n$), областью возможных состояний служит n-мерное пространство, а управление изображается перемещением точки S из какой-то начальной области $\tilde{S}_0$ в конечную $\tilde{S}_k$ по некоторой «траектории» этого пространства.

Таким образом, задаче динамического программирования можно дать следующую *геометрическую интерпретацию*. Из всех траекторий, принадлежащих области возможных состояний системы и соединяющих области $\tilde{S}_0$ и $\tilde{S}_k$, необходимо выбрать такую, на которой критерий W принимает оптимальное значение.

1.12 Лекция № 16 (2 часа)
Тема: «Сетевое планирование и управление»

1.12.1. Вопросы лекции:

1. Особенности и основные этапы сетевого планирования и управления.
2. Основные понятия и определения.
3. Временные параметры событий, работ и путей.
4. Оптимизация сетевых моделей.

1.12.2. Краткое содержание вопросов:

1. Особенности и основные этапы сетевого планирования и управления.

Сетевое Планирование и Управление – это комплекс графических и расчетных методов, организационных мероприятий, обеспечивающих моделирование, анализ и динамическую перестройку плана выполнения сложных проектов и разработок, например, таких как: строительство и реконструкция каких-либо объектов; выполнение научно-исследовательских и конструкторских работ; подготовка производства к выпуску продукции; перевооружение армии; развертывание системы медицинских или профилактических мероприятий.

Характерной особенностью таких проектов является то, что они состоят из ряда отдельных, элементарных *работ*. Они обуславливают друг друга так, что выполнение некоторых работ не может быть начато раньше, чем завершены некоторые другие. Например, укладка фундамента не может быть начата раньше, чем будут доставлены необходимые материалы; эти материалы не могут быть доставлены раньше, чем будут построены подъездные пути; любой этап строительства не может быть начат без составления соответствующей технической документации и т.д.

Сетевое Планирование и Управление включает три основных этапа: структурное планирование; календарное планирование; оперативное управление.

Структурное планирование начинается с разбиения проекта на четко определенные операции, для которых определяется продолжительность. Затем строится сетевой график, который представляет взаимосвязи работ проекта. Это позволяет детально анализировать все работы и вносить улучшения в структуру проекта еще до начала его реализации.

Календарное планирование предусматривает построение календарного графика, определяющего моменты начала и окончания каждой работы и другие временные характеристики сетевого графика. Это позволяет, в частности, выявлять критические операции, которым необходимо уделять особое внимание, чтобы закончить проект в директивный срок. Во время календарного планирования определяются временные характеристики всех работ с целью проведения в дальнейшем *оптимизации* сетевой модели, которая позволит улучшить эффективность использования какого-либо ресурса.

В ходе *оперативного управления* используются сетевой и календарный графики для составления периодических отчетов о ходе выполнения проекта. При этом сетевая модель может подвергаться оперативной корректировке, вследствие чего будет разрабатываться новый календарный план остальной части проекта.

2. Основные понятия и определения.

Основными понятиями сетевых моделей являются понятия «*события»* и «*работы»*.

Работа – это некоторый процесс, приводящий к достижению определенного результата, требующий затрат каких-либо ресурсов и имеющий протяженность во времени.

Событие – это момент времени, когда завершаются одни работы и начинаются другие. Например, фундамент залит бетоном, комплектующие поставлены, отчеты сданы и т.д. Событие представляет собой результат проведенных работ и, в отличие от работ, не имеет протяженности во времени.

3. Временные параметры событий, работ и путей.

К временным *параметрам событий* относятся:

- $T_{р}(i)$ – ранний срок наступления события *i*. Это время, которое необходимо для выполнения всех работ, предшествующих данному событию *i*. Оно равно наибольшей из продолжительности путей, предшествующих данному событию.
- $T_{.}(i)$ – поздний срок наступления события *i*. Это такое время наступления события *i*, превышение которого вызовет аналогичную задержку наступления завершающего события сети. Поздний срок наступления любого события i равен разности между продолжительностью критического пути и наибольшей из продолжительностей путей, следующих за событием *i*.
- $R(i)$ – резерв времени наступления события *i*. Это такой промежуток времени, на который может быть отсрочено наступление события *i* без нарушения сроков завершения проекта в целом. Начальные и конечные события критических работ имеют нулевые резервы событий.

К наиболее важным временным *параметрам работ* относятся:

- $T_{рн}(i,j)$ - ранний срок начала работы;
- $T_{пн}(i,j)$ - поздний срок начала работы;
- $T_{ро}(i,j)$ - ранний срок окончания работы;
- $T_{по}(i,j)$ - поздний срок окончания работы;

4. Оптимизация сетевых моделей.

Методика оптимизации загрузки сетевых моделей по критерию "минимум исполнителей".

При оптимизации использования ресурса рабочей силы чаще всего сетевые работы стремятся организовать таким образом, чтобы:

- количество одновременно занятых исполнителей было минимальным;
- выровнять потребность в людских ресурсах на протяжении срока выполнения проекта.

Методика оптимизации сетевых моделей по критерию "время-затраты"

Целью оптимизации по критерию "Время - затраты" является сокращение времени выполнения проекта в целом. Эта оптимизация имеет смысл только в том случае, когда время выполнения работ может быть уменьшено за счет подключения дополнительных ресурсов, что приводит к повышению затрат на выполнение работ.

1.13 Лекция № 17 (2 часа)
Тема: «Элементы теории игр в задачах моделирования экономических процессов»

1.13.1. Вопросы лекции:

1. Основные положения теории игр.
2. Классификация игр.
3. Свойства решений матричных игр.

1.13.2. Краткое содержание вопросов:

1. Основные положения теории игр.

В последние годы значение теории игр существенно возросло во многих областях экономических и социальных наук. В экономике она применима не только для решения общехозяйственных задач, но и для анализа стратегических проблем предприятий, разработок организационных структур и систем стимулирования.

Игры охватывают, как правило, несколько периодов, в течение которых игроки предпринимают последовательные или одновременные действия. Эти действия обозначаются термином “ход”. Действия могут быть связаны с ценами, объемами продаж, затратами на научные исследования и разработки и т.д. Периоды, в течение которых игроки делают свои ходы, называются этапами игры. Выбранные на каждом этапе ходы в конечном счете определяют “платежи” (выигрыш или убыток) каждого игрока, которые могут выражаться в материальных ценностях или деньгах (преимущественно дисконтированная прибыль).

Еще одним основным понятием данной теории является стратегия игрока. Под ней понимаются возможные действия, позволяющие игроку на каждом этапе игры выбирать из определенного количества альтернативных вариантов такой ход, который представляется ему “лучшим ответом” на действия других игроков. Относительно концепции стратегии следует заметить, что игрок определяет свои действия не только для этапов, которых фактически достигла конкретная игра, но и для всех ситуаций, включая и те, которые могут и не возникнуть в ходе данной игры.

2. Классификация игр.

Классификацию игр можно проводить: по количеству игроков, количеству стратегий, характеру взаимодействия игроков, характеру выигрыша, количеству ходов, состоянию информации и т.д.

В зависимости от количества игроков различают игры двух и n игроков. Первые из них наиболее изучены. Игры трёх и более игроков менее исследованы из-за возникающих принципиальных трудностей и технических возможностей получения решения. Чем больше игроков - тем больше проблем.

По количеству стратегий игры делятся на конечные и бесконечные. Если в игре все игроки имеют конечное число возможных стратегий, то она называется *конечной.* Если же хотя бы один из игроков имеет бесконечное количество возможных стратегий, игра называется *бесконечной.*

По характеру взаимодействия игры делятся на:

1) *бескоалиционные:* игроки не имеют права вступать в соглашения, образовывать коалиции;

2) *коалиционные (*кооперативные) – игроки могут вступать в коалиции.

В кооперативных играх коалиции определены заранее.

По характеру выигрышей игры делятся на: игры с *нулевой суммой* («антагонистические», общий капитал всех игроков не меняется, а перераспределяется между игроками; сумма выигрышей всех игроков равна нулю) и игры с *ненулевой суммой.*

По виду функций выигрыша игры делятся на: матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые, сепарабельные, типа дуэлей и др.

Матричная игра – это конечная игра двух игроков с нулевой суммой, в которой задаётся выигрыш игрока 1 в виде матрицы (строка матрицы соответствует номеру применяемой стратегии игрока 1, столбец – номеру применяемой стратегии игрока 2; на пересечении строки и столбца матрицы находится выигрыш игрока 1, соответствующий применяемым стратегиям). Для матричных игр доказано, что любая из них имеет решение и оно может быть легко найдено путём сведения игры к задаче линейного программирования.

Биматричная игра – это конечная игра двух игроков с ненулевой суммой, в которой выигрыши каждого игрока задаются матрицами отдельно для соответствующего игрока (в каждой матрице строка соответствует стратегии игрока 1, столбец – стратегии игрока 2, на пересечении строки и столбца в первой матрице находится выигрыш игрока 1, во второй матрице – выигрыш игрока 2). Для биматричных игр также разработана теория оптимального поведения игроков, однако решать такие игры сложнее, чем обычные матричные.

Непрерывной считается игра, в которой функция выигрышей каждого игрока является непрерывной в зависимости от стратегий. Доказано, что игры этого класса имеют решения, однако не разработано практически приемлемых методов их нахождения.

Если функция выигрышей является выпуклой, то такая игра называется *выпуклой.* Для них разработаны приемлемые методы решения, состоящие в отыскании чистой оптимальной стратегии (определённого числа) для одного игрока и вероятностей применения чистых оптимальных стратегий другого игрока. Такая задача решается сравнительно легко.

3.Свойства решений матричных игр.

Оптимальные стратегии легко находятся для небольших игр, но вычисления становятся достаточно сложными с ростом числа стратегий. Для поиска оптимальных стратегий используется несколько приемов.

Первый прием состоит в уменьшении размерности игры за счет определения доминирующих строк и столбцов в платежной матрице. Доминирующим столбцом (строкой) называется столбец, в котором все выигрыши не меньше выигрышей в некотором другом столбце.

Свойство 1. Если чистая стратегия одного из игроков содержится в спектре некоторой его оптимальной стратегии, то выигрыш этого игрока в ситуации, образованной данной чистой стратегией и любой оптимальной стратегией другого игрока, равен значению конечной антагонистической игры.

Свойство 2. Ни одна строго доминируемая чистая стратегия игрока не содержится в спектре его оптимальной стратегии (данное свойство вытекает из определения доминируемых стратегий).

Свойство 3. Пусть $G = (X,Y,A)$ – конечная антагонистическая игра, $G' = (X \setminus x',Y,A)$ – подыгра игры G, а x' – чистая стратегия игрока 1 в игре G, доминируемая некоторой стратегией $\bar{x}$, спектр которой не содержит x'. Тогда всякое решение (x^o, y^o, υ) игры G' является решением игры G.

Свойство 4. Пусть $G = (X,Y,A)$ – конечная антагонистическая игра, $G' = (X,Y \setminus y',A)$ – подыгра игры G, а y' – чистая стратегия игрока 2 в игре G, доминируемая некоторой стратегией $\bar{y}$, спектр которой не содержит y'.Тогда всякое решение игры G' является решением G.

Свойство 5. Если для чистой стратегии x' игрока 1 выполнены условия свойства 3, а для чистой стратегии y' игрока 2 выполнены условия свойства 4, то всякое решение игры $G' = (X \setminus x',Y \setminus y',A)$ является решением игры $G = (X,Y,A)$. (Иными словами, решение подматрицы игры является решением матрицы данной игры).

Свойство 6. Тройка (x^o, y^o, υ) является решением игры $G = (X,Y,A)$ тогда и только тогда, когда (x^o, y^o, $\kappa\upsilon + a$) является решением игры $G(X,Y,\kappa A+a)$, где a – любое вещественное число, $\kappa > 0$. (Аффинное преобразование не влияет на результат истинного решения матричной игры)

Свойство 7. Для того, чтобы $x^o = (x_1^o,...,x_i^o,...,x_m^o)$ была *оптимальной смешанной стратегией* матричной игры с матрицей A и ценой игры υ, необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, x_i^o \geq \upsilon \quad (j = \overline{1,n})$.

1.14 Лекция № 18 (2 часа)
Тема: «Моделирование систем массового обслуживания»

1.14.1. Вопросы лекции:

1. Основные элементы и задачи, решаемые в рамках теории массового обслуживания.
2. Классификация систем массового обслуживания.
3. Основные свойства простейшей системы массового обслуживания.
4. Расчет основных характеристик.

1.14.2. Краткое содержание вопросов:

1. Основные элементы и задачи, решаемые в рамках теории массового обслуживания.

Многие экономические задачи связаны с *системами массового обслуживания* (СМО), т.е. такими системами, в которых, с одной стороны, возникают массовые запросы (требования) на выполнение каких-либо услуг, с другой — происходит удовлетворение этих запросов.

СМО включает в себя следующие элементы: *источник требований, входящий поток требований, очередь, обслуживающие устройства (каналы обслуживания), выходящий поток требований.* Методами теории массового обслуживания могут быть решены многие задачи исследования процессов, происходящих в экономике. Так, в организации торговли эти методы позволяют определить оптимальное количество торговых точек данного профиля, численность продавцов, частоту завоза товаров и другие параметры.

Основным признаком систем массового обслуживания является наличие некоторой *обслуживающей системы,* которая предназначена для осуществления действий согласно требованиям поступающих в систему *заявок.* Заявки поступают в систему случайным образом. Поскольку обслуживающая система, как правило, имеет ограниченную пропускную способность, а заявки поступают нерегулярно, то периодически создается очередь заявок в ожидании обслуживания, а иногда обслуживающая система простаивает в ожидании заявок. И то и другое в экономических системах влечет непроизводительные издержки (потери), поэтому при проектировании систем массового обслуживания возникает задача нахождения рациональной пропускной способности системы, при которой достигается приемлемый компромисс между издержками от простоя в ожидании выполнения заявки и простоя системы от недогрузки. Впервые задачи такого типа были решены в работах А. К. Эрланга в начале прошлого века и легли в основу "Теории массового обслуживания", которая успешно развивается в настоящее время.

Таким образом, система массового обслуживания состоит из следующих основных элементов: 1) *блока обслуживания, 2) потока заявок* и *3) очереди* в ожидании обслуживания.

2. Классификация систем массового обслуживания.

Системы массового обслуживания могут быть классифицированы по ряду признаков.

1. В зависимости от условий ожидания начала обслуживания различают:

• СМО с *потерями* (отказами),

• *Ординарность* потока означает практическую невозможность одновременного поступления двух и более требований. Например, достаточно малой является вероятность того, что из группы станков, обслуживаемых бригадой ремонтников, одновременно выйдут из строя сразу несколько станков.

Стационарным называется поток, для которого математическое ожидание числа требований, поступающих в систему в единицу времени (обозначим λ), не меняется во времени. Таким образом, вероятность поступления в систему определенного количества требований в течение заданного промежутка времени Δt зависит от его величины и не зависит от начала его отсчета на оси времени.

Отсутствие последействия означает, что число требований, поступивших в систему до момента *t*, не определяет того, сколько требований поступит в систему за промежуток времени от *t* до $t + \Delta t$.

Важная характеристика СМО — время обслуживания требований в системе. Время обслуживания одного требования является, как правило, случайной величиной и, следовательно, может быть описано законом распределения. Наибольшее распространение в теории и, особенно, в практических приложениях получил *экспоненциальный закон распределения времени обслуживания.* СМО с *ожиданием.*

2. По числу каналов обслуживания СМО делятся на:

• *одноканальные;*

• *многоканальные.*

3. По месту нахождения источника требований СМО делятся на:

• *разомкнутые*, когда источник требования находится вне системы;

• *замкнутые*, когда источник находится в самой системе.

3. Основные свойства простейшей системы массового обслуживания.

Ординарность потока означает практическую невозможность одновременного поступления двух и более требований. Например, достаточно малой является вероятность того, что из группы станков, обслуживаемых бригадой ремонтников, одновременно выйдут из строя сразу несколько станков.

Стационарным называется поток, для которого математическое ожидание числа требований, поступающих в систему в единицу времени (обозначим λ), не меняется во времени. Таким образом, вероятность поступления в систему определенного количества требований в течение заданного промежутка времени Δt зависит от его величины и не зависит от начала его отсчета на оси времени.

Отсутствие последействия означает, что число требований, поступивших в систему до момента *t*, не определяет того, сколько требований поступит в систему за промежуток времени от *t* до $t + \Delta t$.

Важная характеристика СМО – время обслуживания требований в системе. Время обслуживания одного требования является, как правило, случайной величиной и, следовательно, может быть описано законом распределения. Наибольшее распространение в теории и, особенно, в практических приложениях получил *экспоненциальный закон распределения времени обслуживания.*

4. Расчет основных характеристик

1. Вероятность того, что все обслуживающие каналы свободны:

$$P_0 = \left[\sum_{k}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!(1-\alpha/n)} \right]^{-1}.$$

2. Вероятность того, что занято ровно *k* обслуживающих каналов при условии, что общее число требований, находящихся на обслуживании, не превосходит числа обслуживающих аппаратов:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0, \text{ при } 1 \le k \le n.$$

3. Вероятность того, что в системе находится *k* требований в случае, когда их число больше числа обслуживающих каналов:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{n!n^{k-n}} P_0 \text{, при } k \geq n.$$

4. Вероятность того, что все обслуживающие каналы заняты:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{n!(1-\alpha/n)} P_0; \qquad (\alpha/n < 1).$$

5. Среднее время ожидания требованием начала обслуживания в системе (коэффициент простоя очереди):

$$E_1 = \frac{P_n}{\mu(n-a)}; \qquad (\alpha/n < 1)$$

6. Средняя длина очереди:

$$E_2 = \frac{\alpha P_n}{n(1-\alpha/n)} = \frac{\alpha^{n+1}}{n!n(1-\alpha/n)^2} P_0; \qquad (\alpha/n < 1)$$

7. Среднее число свободных от обслуживания каналов:

$$E_3 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{k!} \alpha^k P_0$$

8. Коэффициент простоя каналов:

$$E_{np} = \frac{E_3}{n}.$$

9. Среднее число занятых обслуживанием каналов:

$$E_4 = n - E_3$$

10. Коэффициент загрузки каналов:

$$K_p = \frac{E_4}{n}$$

Вышеописанные характеристики удобно использовать при проектировании СМО. После проведенных вычислений данные по различным полученным вариантам сводят в таблицы. Окончательное решение о выборе дисциплины очереди, количестве каналов их пропускной способности принимается лицом принимающим решение (ЛПР) и может зависеть от множества, в том числе и субъективных факторов.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

2.1 Лабораторная работа № ЛР-1, ЛР-2, ЛР-3, ЛР-4, ЛР-5 (10 часов). Тема: «Симплексный метод решения задачи линейного программирования»

2.1.1 Цель работы: Изучить различные подходы к решению основной задачи линейного программирования.

2.1.2 Задачи работы:

1. Изучить графический метод решения задач линейного программирования.
2. Изучить симплексный метод решения задач линейного программирования.
3. Разобрать особые случаи в симплексном методе.
4. Научиться решению задач линейного программирования в MS Excel. Разобрать экономическую интерпретацию результатов решения задач.
5. Контрольная работа

2.1.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Калькулятор
2. Компьютер
3. Доска

2.1.4 Описание (ход) работы:

1. Изучить графический метод решения задач линейного программирования.

Задача 1

Найти максимальное значение линейной функции:

$$z = 50x_1 + 40x_2$$

при ограничениях

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 5x_2 \le 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{array}\right\}$$

Решение

Построим многоугольник решений (рис.1), для этого в системе координат $x_1 0 x_2$ на плоскости изобразим граничные прямые:

$$2x_1 + 5x_2 = 20\ (l_1)$$
$$8x_1 + 5x_2 = 40\ (l_2)$$
$$5x_1 + 6x_2 = 30\ (l_3)$$
$$x_1 = 0;\ x_2 = 0$$

Эти прямые рекомендуется строить по двум точкам пересечения с осями координат. Например, для l_1 такими точками будут точки $A(0;4)$ и $E(10;0)$.

Взяв какую-нибудь точку (удобнее всего взять начало координат), устанавливаем, какую полуплоскость определяет каждое из неравенств, соответствующее уравнениям граничных прямых (эти полуплоскости на рис.1 показаны стрелками, штриховкой выделяется общая часть (пересечение) указанных полуплоскостей). Многоугольником решений или *областью допустимых решений* данной задачи является ограниченный пятиугольник *OABCD*.

Далее строим одну из линий уровня целевой функции как прямую линию, соответствующую уравнению Z=const. В нашей задаче можно построить прямую $50x_1$ +

$40x_2 = 200$ (l_4). Через точку O проводим прямую, параллельную l_4, ей соответствует уравнение Z=0 или $50x_1 + 40x_2 = 0$. Таким образом, определяем направление движения по линиям уровня целевой функции, соответствующее ее наибыстрейшему возрастанию (на рис.1 это направление отмечено стрелкой на прямой l_4). Осуществляя перемещение прямой l_4 параллельно самой себе в выбранном направлении, получаем, что функция Z принимает максимальное значение на многоугольнике решений в точке C. Этот вывод следует из ***теоремы: если оптимальное решение задачи существует, то оно достигается, по крайней мере, в одной из вершин области допустимых решений.***

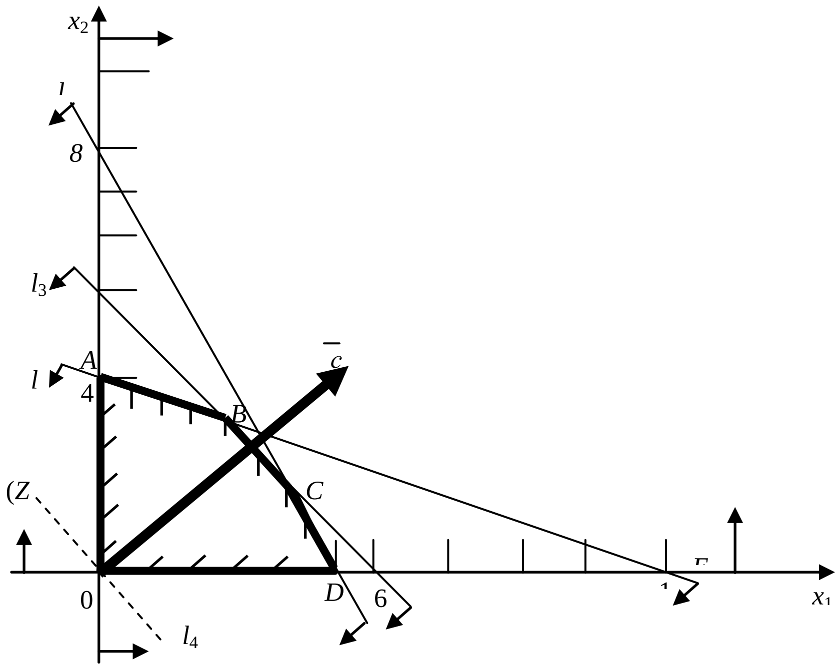


Рисунок 1 – Многоугольник решений

Точка C лежит на пересечении прямых l_2 и l_3 и, следовательно, для определения ее координат нужно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 = 40 \\ 5x_1 + 6x_2 = 30 \end{cases}$$

Подставим найденные значения x_1 и x_2 в функцию Z ($50 \cdot 90/23 + 40 \cdot 40/23$).

Ответ: оптимальное решение задачи $Z_{max} = 6100/23$ при $x_1 = 90/23$; $x_2 = 40/23$.

Задача 2

Найти максимальное значение линейной функции:

$Z = 10x_1 + 3x_2$

при ограничениях

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 \le 33 \\ x_1 + 6x_2 \ge 14 \\ 5x_1 - 4x_2 \ge 2 \\ x_1 - 2x_2 \le 6 \end{array}\right\}$$

Задача 3

Найти минимальное значение линейной функции:

$Z = 10x_1 + 3x_2$

при ограничениях

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 \le 33 \\ x_1 + 6x_2 \ge 14 \\ 5x_1 - 4x_2 \ge 2 \\ x_1 - 2x_2 \le 6 \end{array}\right\}$$

Задача 4

Найти минимальное значение линейной функции:

$Z = 2x_1 + x_2$

при ограничениях

$$\left.\begin{array}{l} -2x_1 + 3x_2 \le 9 \\ x_1 + 2x_2 \ge 8 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{array}\right\}$$

Задача 5

Найти минимальное значение линейной функции:

$Z = 4x_1 - 3x_2$

при ограничениях

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 8 \\ 2x_1 - x_2 \ge 2 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{array}\right\}$$

Задача 6

Найти максимальное значение линейной функции:

$Z = -2x_1 - 4x_2$

при ограничениях

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 \le 6 \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 20 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{array}\right\}$$

Задача 7

Найти максимальное значение линейной функции:

$z = x_1 + x_2$

при ограничениях

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 + 3x_2 \ge 3 \\ x_1 - x_2 \ge -1 \\ 3x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{array}\right\}$$

Решение

В зависимости от вида области допустимых решений и относительного положения линии уровня возможен следующий случай, показанный на рис.2.

Построим многоугольник решений (рис.2), для этого в системе координат $x_1 0 x_2$ на плоскости изобразим граничные прямые:

$$2x_1 + x_2 = 2\ (l_1)$$
$$x_1 + 3x_2 = 3\ (l_2)$$
$$x_1 - x_2 = -1\ (l_3)$$
$$3x_1 - x_2 = 6\ (l_4)$$
$$x_1 + x_2 = 5\ (l_5)$$
$$x_1 = 0;\ x_2 = 0$$

Многоугольником решений или *областью допустимых решений* данной задачи является ограниченный пятиугольник *ABDEF*.

Далее строим одну из линий уровня целевой функции как прямую линию, соответствующую уравнению $Z = \text{const}$.

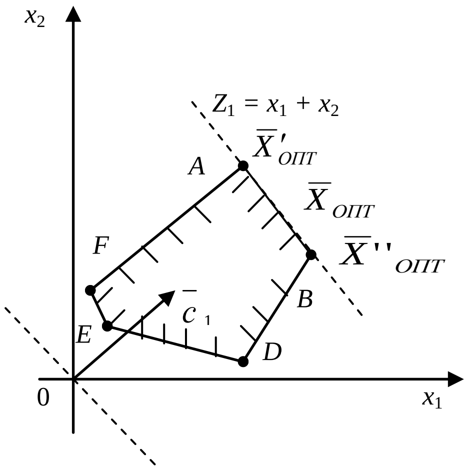


Рисунок 2 – Выпуклый многогранник решений

В зависимости от вида области допустимых решений и относительного положения линии уровня возможен следующий случай, показанный на рис.2.

На рис. 2 максимум достигается в двух вершинах A и B, а следовательно, и в любой точке AB. Произошло это потому, что линия уровня функции Z параллельна стороне AB многоугольника области допустимых решений. Будем в подобных случаях говорить, что задача имеет *альтернативный оптимум.*

Следовательно, для определения координат нужно решить систему уравнений составленную из уравнений прямых, пересекающихся в точке A ($x_1 – x_2 = – 1$ (l_3), $x_1 + x_2 = 5$ (l_5)), либо в точке B ($3x_1 – x_2 = 6$ (l_4), $x_1 + x_2 = 5$ (l_5)):

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1 \ (l_3) \\ x_1 + x_2 = 5 \ (l_5) \end{cases}$$

Ответ: оптимальное решение задачи достигается в любой точке прямой AB, например в точке A: $x_1 = 2$; $x_2 = 3$. Подставляя значения x_1 и x_2 в линейную функцию (2 + 3), получаем $Z_{\max} = 5$.

Итак, *если область допустимых решений есть выпуклый многоугольник* (ограниченная область), *то максимум и минимум линейной функции Z достигаются по крайней мере в одной из вершин этого многоугольника.*

Задача 8

Найти максимальное значение линейной функции:

$Z = x_1 – x_2$

при ограничениях

$$\left.\begin{array}{l} -2x_1 + 3x_2 \le 9 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{array}\right\}$$

Задача 9

Найти минимальное значение линейной функции:

$Z = 2x_1 – 2x_2$

при ограничениях

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 - 4x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ x_1 - x_2 \ge 3 \\ 3x_1 + 3x_2 \le 18 \end{array}\right\}$$

Задача 10

Найти минимальное значение линейной функции:

$Z = –3x_1 – 2x_2$

при ограничениях

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 \geq -6 \\ 4x_1 - x_2 \geq 8 \\ x_1 - 2x_2 \leq 8 \\ 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

Решение.

Построим многоугольник решений (рис.3), для этого в системе координат $x_1 0 x_2$ на плоскости изобразим граничные прямые:

$$3x_1 - 2x_2 = -6\ (l_1)$$
$$4x_1 - x_2 = 8\ (l_2)$$
$$x_1 - 2x_2 = 8\ (l_3)$$
$$3x_1 + x_2 = 9\ (l_4)$$
$$x_1 = 0;\ x_2 = 0$$

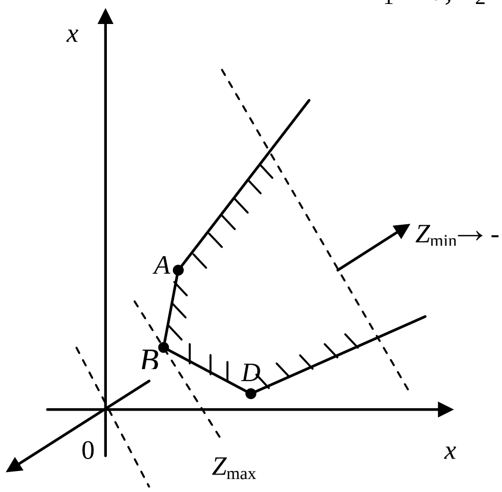


Рисунок 3 – Выпуклый многогранник решений

Пусть теперь область допустимых решений представляет собой неограниченную фигуру (рис. 3). В этой области функция Z достигает максимума в точке В и не имеет минимума ($Z_{min} \to -\infty$).

Задача 11

Найти максимальное значение линейной функции:

$Z = x_1 + 2x_2$

при ограничениях

$$\left.\begin{array}{l} -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

Задача 12

Найти минимальное значение линейной функции:

$Z = -2x_1 + 3x_2$

при ограничениях

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 \geq -6 \\ 4x_1 - x_2 \geq 8 \\ x_1 - 2x_2 \leq 8 \\ 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

Задача 13

Найти максимальное значение линейной функции:

$Z = -2x_1 + 3x_2$

при ограничениях

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 \geq -6 \\ 4x_1 - x_2 \geq 8 \\ x_1 - 2x_2 \leq 8 \\ 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

Задача 14

Найти максимальное значение линейной функции:

$Z = x_1 - x_2$

при ограничениях

$$\left.\begin{array}{l} -2x_1 + 3x_2 \geq 9 \\ x_1 - 2x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

Решение.

Построим многоугольник решений (рис.4). Для этого в системе координат $x_1 0 x_2$ на плоскости изобразим граничные прямые:

$$-2x_1 + 3x_2 = 9\ (l_1)$$
$$x_1 - 2x_2 = 2\ (l_2)$$
$$x_1 + x_2 = 8\ (l_3)$$
$$x_1 = 0,\ x_2 = 0$$

В данном случае (рис.4) не существует ни одной точки. Одновременно принадлежащей всем областям. То есть не существует единой области допустимых значений.

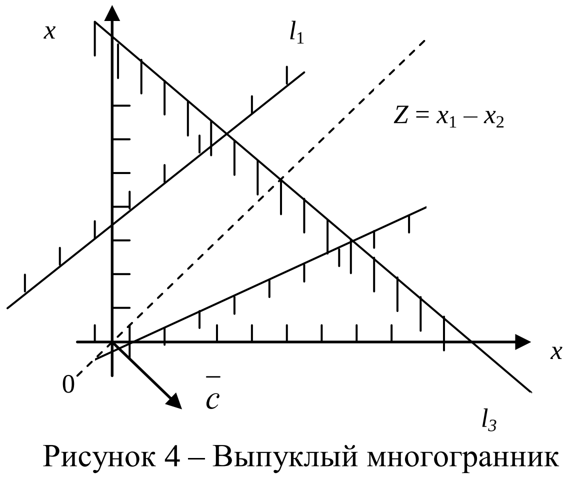


Рисунок 4 – Выпуклый многогранник решений

Таким образом, построение целевой функции не имеет смысла. Задача решения не имеет.

Задача 15

Найти максимальное значение линейной функции:

$Z = 5x_1 + x_2$

при ограничениях

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 \geq 33 \\ x_1 + 6x_2 \leq 14 \\ 5x_1 - 4x_2 \leq 2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 6 \end{array}\right\}$$

Задача 16

Найти минимальное значение линейной функции:

$Z = -x_1 + x_2$

при ограничениях

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 2x_1 \geq 12 \\ 4x_1 + x_2 \leq 4 \end{array}\right\}$$

Ответы

№2 $Z = 129$, $x_1 = 12$, $x_2 = 3$; **№3** $Z = 26$, $x_1 = 2$, $x_2 = 2$; **№4** $Z = 37/7$, $x_1 = 6/7$, $x_2 = 25/7$; **№5** $Z = 2$, $x_1 = 2$, $x_2 = 2$; **№6** $Z = -124/11$, $x_1 = 32/11$, $x_2 = 15/11$; **№8** $Z = 2$ (альтернативный оптимум); **№9** $Z = 6$ (альтернативный оптимум); **№11** $Z = +\infty$; **№12** $Z = -\infty$; **№13** $Z = +\infty$; **№15** Нет оптимального решения; **№16** Нет оптимального решения.

2. Изучить симплексный метод решения задач линейного программирования.

Задача 1

I. Целевая функция:

$Z = 30x_1 + 35x_2 + 136x_3 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 1{,}01x_1 + 1{,}01x_2 + 9{,}45x_3 \leq 136 \\ 0{,}18x_1 + 0{,}19x_2 \leq 21{,}4 \\ 3{,}25x_3 \leq 16{,}25 \\ x_1 \geq 100 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Решение:

Переходим от системы неравенств к системе уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = -1{,}01x_1 - 1{,}01x_2 - 9{,}45x_3 + 136 \\ y_2 = -0{,}18x_1 - 0{,}19x_2 + 21{,}4 \\ y_3 = -3{,}25x_3 + 16{,}25 \\ y_4 = x_1 - 100 \end{cases}$$

Запишем математическую модель в табличной форме:

Таблица 1

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены
$y_1 =$	1,01	1,01	9,45	136
$y_2 =$	0,18	0,19	0	21,4
$y_3 =$	0	0	3,25	16,25
$y_4 =$	–1	0	0	–100
$Z =$	–30	–35	–136	0

Для того, чтобы вести параллельно проверку вычислений необходимо в полученную таблицу 1 добавить столбец $\sum$ (табл. 2)

Выберем разрешающий элемент:

Таблица 2

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены	$\sum_1$
$y_1 =$	1,01	1,01	9,45	136	146,46
$y_2 =$	0,18	0,19	0	21,4	21,59
$y_3 =$	0	0	3,25	16,25	19,5
$y_4 =$	–1	0	0	–100	–99
Z=	–30	–35	–136	0	–171

Сделаем первую итерацию

Таблица 3

	$-y_4$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены	$\sum_1$	$\sum_2$
$y_1 =$	1,01	1,01	9,45	35	38,02	46,47
$y_2 =$	0,18	0,19	0	3,4	3,77	3,77
$y_3 =$	0	0	3,25	16,25	16,25	19,5
$x_1 =$	–1	0	0	100	99	99
$Z =$	–30	–35	–136	3000	2935	2799

Получен допустимый, не вырожденный, но не оптимальный вариант.
Сделаем вторую итерацию

Таблица 4

	$-y_4$	$-x_2$	$-y_1$	Свободные члены	$\sum_1$	$\sum_2$
$x_3 =$	0,11	0,11	0,11	3,7	3,92	4,03
$y_2 =$	0,18	0,19	0	3,4	4,58	3,77
$y_3 =$	–0,35	–0,35	–0,34	4,21	3,52	3,17
$x_1 =$	–1	0	0	100	99	99
$Z =$	–15,46	–20,46	14,39	3503,7	3502,63	3482,17

Получен допустимый, не вырожденный, но не оптимальный вариант.
Сделаем третью итерацию
Таблица 5

	$-y_4$	$-y_2$	$-y_1$	Свободные члены	$\sum_1$	$\sum_2$
$x_3 =$	0,01	–0,58	0,11	1,73		1,27
$x_2 =$	0,95	5,26	0	17,89		24,1
$y_3 =$	–0,02	1,84	–0,34	10,47		11,96
$x_1 =$	–1	0	0	100		99
$Z =$	3,92	107,68	14,39	3869,83		3995,82

Получен допустимый вариант, являющийся оптимальным.
$Z = 3869{,}83$

$$\begin{cases} x_1 = 100 \\ x_2 = 17{,}89 \\ x_3 = 1{,}73 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 10{,}47 \\ y_4 = 0 \end{cases}$$

Рассмотренная нами задача в исходном виде была сформулирована следующим образом:

Продукцией городского молочного завода являются молоко, кефир и сметана. На производство 1 т молока, кефира и сметаны требуется соответственно 1010, 1010 и 9450 кг молока. При этом затраты рабочего времени при разливе 1 т молока и кефира составляют 0,18 и 0,19 машино-ч. На расфасовке 1 т сметаны заняты специальные автоматы в течение 3,25 ч. Всего для производства цельномолочной продукции завод может использовать 136000 кг молока. Основное оборудование может быть занято в течение 21,4 машино-ч, а автоматы по расфасовке сметаны - в течение 16,25 ч. Прибыль от реализации 1 т молока, кефира и сметаны соответственно равна 30, 22 и 136 руб. Завод должен ежедневно производить не менее 100 т молока.

Составьте математическую модель задачи, позволяющую определить объемы выпуска молочной продукции, позволяющие получить наибольшую прибыль.

В результате полученного решения можно сделать вывод, что максимальная прибыль возможна в размере 3869,83 руб. Оптимальный объем выпуска молока – 100 т, кефира – 17,89 т, сметаны – 1,73 т.

Далее рассмотрим задачи для закрепления навыка решения симплексным методом.

Задача 2.

I. Целевая функция:

$Z = 2x_1 + 8x_2 - 5x_3 + 15x_4 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 10x_4 \le 25 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 \le 10 \\ 2x_1 + 10x_2 + 2x_3 - 5x_4 \le 26 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

Задача 3.

I. Целевая функция:

$Z = x_1 - 8x_2 + x_3 + x_4 \longrightarrow \min$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \le 2 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \ge 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \ge 2 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

Задача 4.

I. Целевая функция:

$Z = 50x_1 + 40x_2 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2 \ge 0$

Задача 5.

I. Целевая функция:

$Z = x_1 + 4x_2 + 3x_3 \longrightarrow \min$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 10 \\ 2x_1 - x_2 \ge 6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 12 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

ПРИЛОЖЕНИЕ Решение систем линейных уравнений методом МЖИ (вспомогательный алгоритм)

Метод последовательных исключений, или как его называют также, *метод Жордана – Гаусса* представляет собой совокупность удобных вычислительных алгоритмов, построенных на последовательном применении эквивалентных преобразований системы уравнений. Этот же метод с некоторыми дополнениями лежит в основе симплексного метода решения задач линейного программирования.

Существуют обыкновенные жордановы исключения (ОЖИ) и модифицированные жордановы исключения (МЖИ). Будем рассматривать метод модифицированных жордановых исключений.

Пусть дана система линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 +\ldots+ a_{1s}x_s +\ldots+ a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 +\ldots+ a_{2s}x_s +\ldots+ a_{2n}x_n = b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 +\ldots+ a_{ks}x_s +\ldots+ a_{kn}x_n = b_k \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 +\ldots+ a_{ms}x_s +\ldots+ a_{mn}x_n = b_m \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Условные обозначения:

i – порядковый номер уравнения, $i = 1, 2,\ldots, m$;

j – порядковый номер переменной x, $j = 1, 2,\ldots, n$.

Введем дополнительные переменные y_i по каждой строке, перенеся элементы из левой части в правую с противоположным знаком. Получим систему:

$$\left.\begin{aligned} &y_1 = \alpha_{11}(-x_1) + \alpha_{12}(-x_2) +\ldots+ \alpha_{1s}(-x_s) +\ldots+ \alpha_{1n}(-x_n) + b_1 \\ &y_2 = \alpha_{21}(-x_1) + \alpha_{22}(-x_2) +\ldots+ \alpha_{2s}(-x_s) +\ldots+ \alpha_{2n}(-x_n) + b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &y_k = \alpha_{k1}(-x_1) + \alpha_{k2}(-x_2) +\ldots+ \alpha_{ks}(-x_s) +\ldots+ \alpha_{kn}(-x_n) + b_k \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &y_m = \alpha_{m1}(-x_1) + \alpha_{m2}(-x_2) +\ldots+ \alpha_{ms}(-x_s) +\ldots+ \alpha_{mn}(-x_n) + b_m \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Решать систему будем в табличной форме.

Систему (2) запишем в таблицу МЖИ следующего вида (таблица П1).

Таблица П1 – Исходная таблица

	$-x_1$	$-x_2$	…	$-x_s$	…	$-x_n$	Свободные члены
y_1	α_{11}	α_{12}	…	α_{1s}	…	α_{1n}	b_1
y_2	α_{21}	α_{22}	…	α_{2s}	…	α_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…	…	…
y_k	α_{k1}	α_{k2}	…	α_{ks}	…	α_{kn}	b_k
…	…	…	…	…	…	…	…
y_m	α_{m1}	α_{m2}	…	α_{ms}	…	α_{mn}	b_m

Чтобы решить систему необходимо x_j и y_i поменять местами по алгоритму МЖИ. Выбирая разрешающие элементы, будем проводить расчеты в каждой следующей таблице (таблица П2).

Таблица П2 – Преобразованная таблица

	$-x_1$	$-x_2$	…	$-y_k$	…	$-x_n$	Свободные члены
y_1	β_{11}	β_{12}	…	$\dfrac{-\alpha_{1s}}{\alpha_{ks}}$	…	β_{1n}	β_1

y_2	β_{21}	β_{22}	…	$\frac{-\alpha_{2s}}{\alpha_{ks}}$	…	β_{2n}	β_2
…	…	…	…	…	…	…	…
x_s	$\frac{\alpha_{k1}}{\alpha_{ks}}$	$\frac{\alpha_{k2}}{\alpha_{ks}}$	…	$\frac{1}{\alpha_{ks}}$	…	$\frac{\alpha_{kn}}{\alpha_{ks}}$	$\frac{b_k}{\alpha_{ks}}$
…	…	…	…	…	…	…	…
y_n	β_{m1}	β_{m2}	…	$\frac{-\alpha_{ms}}{\alpha_{ks}}$	…	β_{mn}	β_m

Переход от одной таблицы к другой – шаг МЖИ.

В первой таблице k-ая строка будет называться разрешающей строкой**,** s-ый столбец называется разрешающим столбцом. Коэффициент, который стоит на пересечении α_{ks} – разрешающий элемент. Переменные из левого столбца – базисные. Переменные, оказавшиеся в верхней строке таблицы называются свободными.

Сравнивая первую и вторую таблицы сформулируем правило перехода (алгоритм МЖИ):

1) заполнить свободные и базисные переменные в новой таблице: поменять местами базисную и свободную переменные, оказавшиеся в разрешающих строке и столбце;

2) заполнить клетку, соответствующую разрешающему элементу, взять величину обратную разрешающему элементу;

3) заполнить строку, соответствующую разрешающей; поделить элементы разрешающей строки на разрешающий элемент;

4) заполнить столбец, соответствующий разрешающему: поделить элементы разрешающего столбца на разрешающий элемент с противоположным знаком;

5) оставшиеся клетки таблицы заполняются по выведенной формуле:

$$\beta_{ij} = \frac{\alpha_{ks}\alpha_{ij} - \alpha_{is}\alpha_{kj}}{\alpha_{ks}};$$

где k – номер разрешающей строки;

s – номер разрешающего столбца;

i – номер заполняемой строки;

j – номер заполняемого столбца;

$$\beta_{11} = \frac{\alpha_{ks}\alpha_{11} - \alpha_{is}\alpha_{k1}}{\alpha_{ks}};$$

$$\beta_{n2} = \frac{\alpha_{ks}\alpha_{n2} - \alpha_{is}\alpha_{k2}}{\alpha_{ks}}.$$

Пользоваться для расчета коэффициентов выведенной формулой не удобно, будем ее трактовать как «правило прямоугольника».

Построение прямоугольника.

Для каждой заполняемой клетки строится свой прямоугольник на предыдущей таблице:

3) первую общую для всех прямоугольников вершину ставим в клетке разрешающего элемента;

4) противоположную ей вершину ставим в клетке, соответствующей искомому элементу;

5) диагональ, соединяющая две вершины называется главной;

6) две другие вершины взять в таких клетках, чтобы получился прямоугольник.

Правило прямоугольника

От произведения элементов, стоящих в вершинах по главной диагонали прямоугольника, отнять произведение элементов, стоящих на второй диагонали и разделить на разрешающий элемент.

Для того, чтобы решить систему линейных уравнений, надо делать шаги МЖИ до того, пока все переменные y_i не перейдут из базиса в свободные переменные на место x_i. Перемещать можно в любой последовательности.

Из каждой таблицы МЖИ можно выписать решение системы, для этого надо помнить, что свободные переменные всегда приравниваются к нулю, тогда базисные будут равны соответствующим свободным членам.

Замечания:

1) разрешающий элемент не может быть равен нулю;

2) целесообразно, если возможно, выбирать разрешающий элемент равным единице, так как при этом упрощаются вычисления. Если же это окажется невозможным, то для уменьшения погрешностей при округлении целесообразно выбирать его большим по абсолютной величине.

Рассмотрим решение систем линейных уравнений методом МЖИ на конкретном примере.

Задача 1

Решить систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Решение:

Введем дополнительную переменную y_i по каждой строке, перенеся элементы из левой части в правую с противоположным знаком:

$$\begin{cases} y_1 = -x_1 - 2x_2 + x_3 + 5 \\ y_2 = -3x_1 - 5x_2 - 4x_3 + 7 \\ y_3 = -2x_1 + x_2 - 2x_3 + 1 \end{cases}$$

Запишем полученную систему в таблицу МЖИ:

Таблица 1.1

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены
y_1	1	2	–1	5
y_2	3	5	4	7
y_3	2	–1	2	1

Выберем разрешающий элемент исходя из упрощения вычислений. Пусть это α_{11}=1. Используя алгоритм МЖИ проведем следующие действия.

1) Поменяем местами y_1 и x_1

2) Вместо разрешающего элемента α_{11} запишем ему обратный $1/\alpha_{11}=1/1=1$

3) Элементы разрешающей строки почленно разделим на разрешающий элемент, т.е.: $2/\alpha_{11}=2$; $-1/\alpha_{11}=-1$; $5/\alpha_{11}=5$

4) Элементы разрешающего столбца почленно разделим на $(-\alpha_{11})$, т.е.: $3/(-\alpha_{11}) = -3$; $2/(-\alpha_{11})=-2$

5) Остальные элементы преобразуются с использованием правила прямоугольника, т.е.:

$$\beta_{22} = \frac{1\cdot 5 - 3\cdot 2}{1} = -1 \qquad \beta_{32} = \frac{1\cdot(-1) - 2\cdot 2}{1} = -5$$

$$\beta_{23} = \frac{1\cdot 4 - 3\cdot(-1)}{1} = 7 \qquad \beta_{33} = \frac{1\cdot 2 - 2\cdot(-1)}{1} = 4$$

$$\beta_{24} = \frac{1\cdot 7 - 3\cdot 5}{1} = -8 \qquad \beta_{34} = \frac{1\cdot 1 - 2\cdot 5}{1} = -9$$

Таблица 1.2

	$-y_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены
x_1	1	2	–1	5
y_2	–3	–1	7	–8
y_3	–2	–5	4	–9

В качестве разрешающего элемента выберем α_{22}=–1.

Используем алгоритм МЖИ.

1. Поменяем местами y_2 и x_2

2. Вместо разрешающего элемента α_{22} запишем ему обратный $1/\alpha_{22} = 1/(-1) = -1$

3. Элементы разрешающей строки почленно разделим на разрешающий элемент, т.е.: –3/(–1)=3; 7/(–1)=–7; –8/(–1)=8

4. Элементы разрешающего столбца почленно разделим на ($-\alpha_{22}$), т.е.: 2/1=2; –5/1=-5

5. Остальные элементы преобразуются с использованием правила прямоугольника, т.е.:

$$\beta_{11} = \frac{1\cdot(-1) - 2\cdot(-3)}{-1} = -5 \qquad \beta_{31} = \frac{-2\cdot(-1) - (-5)\cdot(-3)}{-1} = 13$$

$$\beta_{13} = \frac{-1\cdot(-1) - 2\cdot 7}{-1} = 13 \qquad \beta_{33} = \frac{4\cdot(-1) - (-5)\cdot 7}{-1} = -31$$

$$\beta_{14} = \frac{5\cdot(-1) - 2\cdot(-8)}{-1} = -11 \qquad \beta_{34} = \frac{-9\cdot(-1) - (-5)\cdot(-8)}{-1} = 31$$

Таблица 1.3

	$-y_1$	$-y_2$	$-x_3$	Свободные члены
x_1	–5	2	13	–11
x_2	3	–1	–7	8
y_3	13	–5	–31	31

В качестве разрешающего элемента можно взять только α_{33} (т.к. осталось поменять местами только x_3 и y_3). Т.к. все свободные и базисные переменные поменялись местами, тот ответом будут являться числа, стоящие в столбце свободных членов.

Это является следствием того, что переменные y вводились как разность между правой и левой частями каждого из уравнений системы, т.е. y_1=y_2=y_3=0. Поэтому, если на последнем этапе восстановить систему, исходя из получившейся таблицы, то будем иметь:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}^{III}(-y_1) + \alpha_{12}^{III}(-y_2) + \alpha_{13}^{III}(-y_3) + b_1^{III} \\ x_2 = \alpha_{21}^{III}(-y_1) + \alpha_{22}^{III}(-y_2) + \alpha_{23}^{III}(-y_3) + b_2^{III} \\ x_3 = \alpha_{31}^{III}(-y_1) + \alpha_{32}^{III}(-y_2) + \alpha_{33}^{III}(-y_3) + b_3^{III} \end{cases}$$

и если y_1=y_2=y_3=0, то

$$x_1 = b_1^{III}$$

$$x_2 = b_2^{III}$$

$$x_3 = b_3^{III}.$$

Поэтому вычислим только элементы, стоящие в столбце свободных членов, предварительно выполнив пункты 1-4 алгоритма. В результате получим таблицу:

Таблица 1.4

	$-y_1$	$-y_2$	$-y_3$	Свободные члены
x_1	14/31	-3/31	13/31	2
x_2	-82/31	4/31	–7/31	1
x_3	13/(–31)	–5/(–31)	1/(–31)	–1

Таким образом, $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=-1$

Покажем, что выбирая за разрешающие элементы другие числа, получим тот же ответ.

Таблица 1.1'

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены
y_1	1	2	–1	5
y_2	3	5	4	7
y_3	2	–1	2	1

Таблица 1.2'

	$-x_1$	$-y_1$	$-x_3$	Свободные члены
x_2	1/2	1/2	–1/2	5/2
y_2	1/2	–5/2	13/2	–11/2
y_3	5/2	1/2	3/2	7/2

Таблица 1.3'

	$-y_3$	$-y_1$	$-x_3$	Свободные члены
x_2	–1/5	2/5	–8/10	18/10
y_2	–1/5	–13/5	31/5	–31/5
x_1	2/5	1/5	3/5	7/5

Таблица 1.4'

	$-y_3$	$-y_1$	$-y_2$	Свободные члены
x_2	–7/31	2/31	4/31	1
x_3	–1/31	–13/31	5/31	–1
x_1	13/31	14/31	–3/31	2

Из приведенных вычислений видно, что менять x_j с y_i можно в любом порядке, но лучше выбрать за разрешающий элемент 1 или (–1) с целью упрощения вычислений. Если решение приводится в десятичных дробях с округлением до сотых долей, то пользуются замечаниями 1 и 2, а если в обыкновенных дробях, то за разрешающий можно принять любое число из возможно допустимых.

Задание: решите самостоятельно следующие системы и проверьте ответы любым известным Вам способом.

Задача 2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

Задача 3

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

Рассмотрим особенности в решении систем линейных уравнений на примерах задача 4 и 7.

Задача 4

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} y_1 = -x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 1 \\ y_2 = -2x_1 - x_2 + 5x_3 - 1 \\ y_3 = -x_1 + x_2 + x_3 - 2 \end{cases}$$

Таблица 4.1

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены
y_1	1	2	–4	–1
y_2	2	1	–5	–1
y_3	1	–1	–1	–2

Таблица 4.2

	$-y_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены
x_1	1	2	–4	–1
y_2	–2	–3	3	1
y_3	–1	–3	3	–1

Таблица 4.3

	$-y_1$	$-x_2$	$-y_2$	Свободные члены
x_1	–5/3	–2	4/3	1/3
x_3	–2/3	–1	1/3	1/3
y_3	1	0	–1	–2

За разрешающий элемент можно выбрать только элемент, стоящий на пересечении y_3 и x_2, но он равен 0. Попробуем восстановить систему по последней таблице:

$$\begin{cases} x_1 = 5/3\, y_1 + 2x_2 - 4/3\, y_2 + 1/3 \\ x_3 = 2/3\, y_1 + x_2 - 1/3\, y_2 + 1/3 \\ y_3 = -y_1 + 0x_2 + y_2 - 2 \end{cases}$$

Рассмотрим последнее уравнение:

Т.к. $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, то $0 = -2$.

Это ложное равенство. Если в системе имеется хотя бы одно неверное равенство, то система решений не имеет. Проанализировав последнюю таблицу, получим *правило*: если разрешающий элемент равен нулю (при этом другой выбрать нельзя, т.к. все замены уже произведены), а свободный член в этой строке отличен от нуля, то система решений не имеет.

Заметим, что исход решения системы не зависит от последовательности выбора разрешающего элемента на каждом этапе.

Ответ: система решений не имеет.

Задача 5

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 4 \end{cases}$$

Задача 6

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$$

Задача 7

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

Решение:

В результате решения получим таблицу.

Таблица 7.1

	$-y_1$	$-x_2$	$-y_3$	Свободные члены
x_1	1/3	–2	–4/3	–3
y_2	–1	0	–1	0
x_3	–1/3	–1	–1/3	–1

Единственно возможный разрешающий элемент равен нулю.

Восстановим систему:

$$\begin{cases} x_1 = -1/3y_1 + 2x_2 + 4/3y_3 - 3 \\ y_2 = y_1 + 0(-x_2) + y_3 + 0 \\ x_3 = 1/3y_1 + x_2 + 1/3y_3 - 1 \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение и при условии, что $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ получим: $0 = 0$, т.е. истинное равенство, а это значит, что система уравнений линейно зависима. Т.е. содержит бесчисленное множество решений, зависящих от параметра. В данном случае параметром будет являться x_2 (при другой последовательности выбора разрешающих элементов параметром может стать или x_1, или x_3).

Таким образом, получим *правило*: если разрешающий элемент равен нулю и свободный член в этой строке также равен нулю, то система имеет бесчисленное множество решений, зависящее от стольких параметров, сколько x-ов не перешло в базис.

Тогда общее решение системы выглядит следующим образом:

$x_1 = 2x_2 - 3$

$x_3 = x_2 - 1$

Ответ: система имеет бесчисленное множество решений зависящих от x_2: $x_1 = 2x_2 - 3$, x_2, $x_3 = x_2 - 1$.

Задача 8

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 6x_4 = - \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Задача 9

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}$$

Заметим, что при получении единственного решения, возможна проверка путем подстановки найденных значений в исходную систему и проверки истинности. В случае отсутствия решений или бесчисленного множества, организация проверки затруднена. Поэтому приведем правило, которое позволяет осуществлять контроль за расчетом таблиц МЖИ:

Правило:

1. В таблице 1 берется дополнительный столбец, обозначаемый Σ_1. Этот столбец заполняется после выбора разрешающего элемента.

В Σ_1 заносятся числа, представляющие собой сумму элементов каждой строки без элементов разрешающего столбца. При этом к величине, полученной в строке, где стоит разрешающий элемент, прибавляется 1 (вне зависимости от значения самого разрешающего элемента).

Пояснения проведем для первого примера решаемого вторым способом.

Таблица 1.1"

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены	Σ_1	
y_1	1	2	–1	5	6	=1+(–1)+5+1
y_2	3	5	4	7	14	=3+4+7
y_3	2	–1	2	1	5	=2+2+1

2. Во всех последующих таблицах МЖИ берется два столбца сумм Σ_1 и Σ_2. Элементы Σ_1 предыдущей таблицы как бы проектируются в столбец Σ_2 новой таблицы в виде чисел, полученных в результате вычислений по алгоритму МЖИ (при этом новый столбец Σ_1 пока остается свободным).

Таблица 1.2"

	$-x_1$	$-y_1$	$-x_3$	Свободные члены	Σ_1	Σ_2
x_2	1/2	1/2	–1/2	5/2		3
y_2	1/2	–5/2	13/2	–11/2		–1
y_3	5/2	1/2	3/2	7/2		8

Таблица МЖИ будет рассчитана верно, если суммы всех без исключения элементов по каждой строке таблицы будут равны соответствующему элементу столбца Σ_2. Т.е.:

1/2 + 1/2 – 1/2 + 5/2 = 3 ист.
1/2 – 5/2 + 13/2 – 11/2 = –1 ист.
5/2 + 1/2 + 3/2 + 7/2 = 8 ист.

Это значит, что переход от таблицы 1.1" к таблице 1.2" осуществлен верно. Далее значения, стоящие в столбце Σ_2 нам не понадобятся.

3. Повторяется последовательность действий, начиная с пункта 1.

Таблица 1.2'''

	$-x_1$	$-y_1$	$-x_3$	Свободные члены	Σ_1	Σ_2	
x_2	1/2	1/2	–1/2	5/2	5/2	3	=1/2–1/2+5/2
y_2	1/2	–5/2	13/2	–11/2	–3/2	–1	= –5/2+13/2–11/2
y_3	5/2	1/2	3/2	7/2	13/2	8	=1/2+3/2+7/2+1

Таблица 1.3''

	$-y_3$	$-y_1$	$-x_3$	Свободные члены	Σ_1	Σ_2	
x_2	–1/5	2/5	–8/10	18/10	2	6/5	= –1/5+2/5+18/10
y_2	–1/5	–13/5	31/5	–31/5	–8	–14/5	= –1/5+13/5–31/5+1
x_1	2/5	1/5	3/5	7/5	2	13/5	= 2/5+1/5+7/5

Таблица 1.4''

	$-y_3$	$-y_1$	$-y_2$	Свободные члены	Σ_1	Σ_2
x_2	–7/31	2/31	4/31	1		30/31
x_3	–1/31	–13/31	5/31	–1		–40/31
x_1	13/31	14/31	–3/31	2		86/31

Таким образом, мы делаем проверку по ходу решения примера, что позволяет вовремя заметить ошибку и устранить ее.

Использование Σ_1 и Σ_2 также дает уверенность в ответе при бесчисленном множестве решений или при отсутствии решений вообще.

Решить системы линейных уравнений с использованием Σ_1 и Σ_2.

Задача 10

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -3 \\ 6x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 2 \\ 5x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

Задача 11

$$\begin{cases} \mathrm{x}_1 + 4\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_4 = 5 \\ 2\mathrm{x}_1 - 3\mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3 + \mathrm{x}_4 = 3 \\ \mathrm{x}_1 + 2\mathrm{x}_3 - \mathrm{x}_4 = 3 \\ 2\mathrm{x}_2 - 3\mathrm{x}_3 + 2\mathrm{x}_4 = 3 \end{cases}$$

Задача 12

$$\begin{cases} 4x_1 - 17x_2 - 6x_3 - 5x_4 = -17 \\ 43x_1 + 24x_2 - x_3 + 3x_4 = 28 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 9 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Ответы

№2 $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$; **№3** $x_1 = 79/15$, $x_2 = -67/15$, $x_3 = -16/15$; **№5** система решений не имеет; **№6** система решений не имеет; **№8** $x_1 = -x_3 + 2x_4 + 3$, $x_2 = 2x_4 - 3$, при x_3 и x_4 – любое число; **№9** $x_1 = x_3 + 4$, $x_2 = -2x_3 - 1$, при x_3 – любое число; **№10** $x_1 = -5/116$, $x_2 = -1/116$, $x_3 = 64/116$; **№11** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$; **№12** $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$.

3. Разобрать особые случаи в симплексном методе.
Задача 6

I. Целевая функция:

$Z = 2x_1 + 3x_2 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 9 \\ x_1 + x_5 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_6 = 8 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Решение:

Переходим от системы неравенств к системе уравнений:

$y_1 = -x_1 - x_2 - x_3 + 5$

$y_2 = -x_1 - x_2 - x_4 + 9$

$y_3 = -x_1 - x_5 + 4$

$y_4 = -x_1 - 2x_2 - x_6 + 8$

Запишем математическую модель в табличной форме. Разрешающий элемент выбирается произвольно, но в базис должен перейти y_i, который необходимо вычеркнуть.

Таблица 6

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$	Свободные члены	Σ_1
y_1	1	1	1	0	0	0	5	8
y_2	1	1	0	1	0	0	9	11
y_3	1	0	0	0	1	0	4	5
y_4	1	2	0	0	0	1	8	11
Z	–2	–3	0	0	0	0	0	–3

Сделаем первую итерацию

Таблица 7

	$-y_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$	Свободные члены	Σ_1	Σ_2
x_1	1	1	1	0	0	0	5	6	8
y_2	–1	0	–1	1	0	0	4	4	3
y_3	–1	–1	–1	0	1	0	–1	–1	–3
y_4	–1	1	–1	0	0	1	3	4	3
Z	2	–1	2	0	0	0	10	12	13

Сделаем вторую итерацию

Таблица 8

	$-y_4$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$	Свободные члены	Σ_1	Σ_2
x_1	–1	2	0	0	–1	2	3	2
y_2	0	–1	1	0	0	4	4	4
y_3	1	–2	0	1	1	2	2	3
x_2	1	–1	0	0	1	3	3	4
Z	1	1	0	0	1	13	15	16

Сделаем третью итерацию

Таблица 9

	$-x_3$	$-y_2$	$-x_5$	$-x_6$	Свободные члены	Σ_1	Σ_2
x_1	2	0	0	–1	2		3
x_4	–1	1	0	0	4		4
y_3	–2	0	1	1	2		2
x_2	–1	0	0	1	3		3
Z	1	0	0	1	13		15

Получен допустимый вариант, являющийся оптимальным.

$Z = 13$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 4 \\ x_5 = 0 \\ x_6 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 2 \\ y_4 = 0 \end{cases}$$

Далее рассмотрим задачи для закрепления навыка решения симплексным методом смешанных систем ограничений.

Задача 7

I. Целевая функция:

$Z = 290x_1 + 200x_2 + 270x_3 + 210x_4 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 30 \\ x_2 + x_4 = 36 \\ 1/3x_1 + 2/9x_2 \le 15 \\ 1/2x_3 + 1/4x_4 \le 12 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

Задача 7 в исходном виде была сформулирована следующим образом:

Дворец культуры заказал двум ателье пошить 30 мужских и 36 женских концертных костюма. Производительность первого ателье по пошиву мужских и женских костюмов составляет соответственно 3 и 4,5 шт./день, а второго ателье - 2 и 4 шт./день. Фонд рабочего времени первой мастерской составляет 15 дней, а второй мастерской - 12 дней. Цены первого ателье за 1 женский и мужской костюм составляет 200 и 290 руб. штука, цены второго ателье составляют соответственно 210 и 270 руб.

Составьте математическую модель задачи, позволяющую дворцу культуры оптимально распределить заказ между ателье, с целью минимизировать затраты на пошив костюмов.

Задача 8

I. Целевая функция:

$Z = 2x_1 + 4x_3 \longrightarrow \min$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \ge 5 \\ x_1 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 - 4x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \ge 6 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

Рассмотрим подробно решение задач, имеющих случай вырожденности на примере задачи 9.

Задача 9

I. Целевая функция:

$Z = -x_1 + 10x_2 + 4x_3 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 \le 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ 2x_1 \ge x_2 + x_3 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

Решение:

Переходим от системы неравенств к системе уравнений:

$y_1 = -x_1 - x_3 + 1$

$y_2 = -2x_1 - x_2 - x_3 + 2$

$y_3 = 2x_1 - x_2 - x_3$

Запишем математическую модель в табличной форме. Выберем разрешающий элемент.

Таблица 10

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены	Σ_1
y_1	1	0	1	1	3
y_2	2	1	1	2	5
y_3	–2	1	1	0	0
Z	1	–10	–4	0	–3

Вариант допустимый. Исследуем данный вариант на вырожденность. В данной симплекс-таблице находится вырожденный вариант, так как среди свободных членов (кроме строки Z), появился ноль. Выбираем разрешающий элемент.

Сделаем первую итерацию

Таблица 11

	$-x_1$	$-y_3$	$-x_3$	Свободные члены	Σ_1	Σ_2
y_1	1	0	1	1	2	3
y_2	4	–1	0	2	2	5
x_2	–2	1	1	0	2	0
Z	–19	10	6	0	16	–3

Сделаем вторую итерацию

Таблица 12

	$-y_2$	$-y_3$	$-x_3$	Свободные члены	Σ_1	Σ_2
y_1	–1/4	1/4	1	1/2		3/2
x_1	1/4	–1/4	0	1/2		1/2
x_2	1/2	1/2	1	1		3
Z	19/4	21/4	6	19/2		51/2

Получен допустимый вариант, являющийся оптимальным.

$Z = 19/2$

$$\begin{cases} x_1 = 1/2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 1/2 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

Далее рассмотрим задачи имеющих случай вырожденности.

Задача 10

I. Целевая функция:

$Z = 5x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 4x_4 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2{,}5x_3 + x_4 \le 75 \\ 0{,}5x_1 + x_2 + 0{,}2x_3 + 0{,}1x_4 \le 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3x_3 + 4x_4 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

Задача 11

I. Целевая функция:

$Z = x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \le 15 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 20 \\ 4x_1 + 4x_2 \ge 2x_3 + 3x_4 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

Рассмотрим подробно решение задач, имеющих случай неразрешимости модели (система неравенств не имеет решения) на примере задачи 12.

Задача 12

I. Целевая функция:

$Z = x_1 + 0{,}2x_2 + x_3 \longrightarrow \min$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \le 2 \\ -x_1 - 2x_2 \ge 5 \\ 2x_2 + 3x_3 \le 1 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

Решение:

Переходим от системы неравенств к системе уравнений:

$y_1 = –0{,}1x_1 – 0{,}2x_2 + 2$

$y_2 = – x_1 – 2x_2 – 5$

$y_3 = –2x_1 – 3x_3 + 1$

Запишем математическую модель в табличной форме. Выберем разрешающий элемент:

Таблица 13

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены	Σ_1
y_1	0,1	0,2	0	2	
y_2	1	2	0	–5	
y_3	2	0	3	1	
Z	–1	–0,2	–1	0	

Исследуем полученный вариант на допустимость. В таблице находиться недопустимый вариант решения задачи, потому что среди свободных членов имеется отрицательный элемент. При выборе разрешающего элемента получается, что среди симплексных отношений нет наименьшего положительного. Следовательно, в данной задаче невозможно найти допустимый вариант. С экономической точки зрения это значит, что ограничения модели являются взаимоисключающими, противоречащими друг другу требованиями. Задача не имеет решения.

Далее рассмотрим задачи имеющих случай неразрешимости модели (система неравенств не имеет решения).

Задача 13

I. Целевая функция:

$Z = 12x_1 + 14x_2 + 10x_3 + 8x_4 \longrightarrow \min$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \le -10 \\ x_1 + 3x_2 + 0{,}5x_3 \le 5 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_4 \le 3 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

Задача 14

I. Целевая функция:

$Z = 25x_1 + 20x_2 + 30x_3 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} -10x_1 - 8x_2 - 15x_3 \ge 100 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 20 \\ 0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}25x_3 \le 5 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

Рассмотрим подробно решение задач, имеющих случай неограниченности функционала (функция не имеет экстремального значения) на примере задачи 15.

Задача 15

I. Целевая функция:

$Z = -2x_1 - x_3 \longrightarrow \min$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 \le 5 \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 \le 2 \\ 6x_2 - 8x_3 \le 8 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

Решение:

Переходим от системы неравенств к системе уравнений:

$y_1 = x_1 + x_2 + x_3 + 5$

$y_2 = 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 2$

$y_3 = -6x_2 + 8x_3 + 8$

Запишем математическую модель в табличной форме. Выберем разрешающий элемент:

Таблица 14

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены	Σ_1
y_1	–1	–1	–1	5	
y_2	–3	1	–4	2	
y_3	0	6	–8	8	
Z	2	0	1	0	

Исследуем полученный вариант на допустимость. В таблице находиться допустимый вариант решения задачи, потому что среди свободных членов нет отрицательных элементов.

Исследуем полученный вариант на оптимальность. В таблице находиться неоптимальный вариант, так как коэффициенты строки Z положительные ($Z \to \min$) (элемент на пересечение столбца свободных членов и строки Z при анализе во внимание не принимается). Выбираем разрешающий элемент.

При выборе разрешающего элемента получается, что среди симплексных отношений нет наименьшего положительного. Следовательно в данной задаче невозможно найти оптимальный вариант. С экономической точки зрения речь о идее неограниченности какого-либо вида ресурса. Задача не имеет оптимального решения.

Далее рассмотрим задачи имеющих случай неограниченности функционала (функция не имеет экстремального значения).

Задача 16

I. Целевая функция:

$Z = 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 25 \\ x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_2 - x_3 \leq 10 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Задача 17

I. Целевая функция:

$Z = 8x_1 + x_2 + 10x_3 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 15 \\ 3x_1 + x_2 \leq 20 \\ 6x_2 - 11x_3 \leq 7 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Ответы

№2 $Z = 36$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0{,}8$, $y_1 = 20$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$; **№3** $Z = 2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$; **№4** $Z = 265\frac{5}{23}$, $x_1 = 3\frac{21}{23}$, $x_2 = 1\frac{17}{23}$, $y_1 = 3\frac{11}{23}$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$; **№5** $Z = 12$, $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$, $y_1 = 4$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$; **№7** $Z = 16260$, $x_1 = 30$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 36$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 5$, $y_4 = 3$; **№8** $Z = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 13$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$, $y_1 = 10$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, $y_4 = 22$; **№10** $Z = 127{,}27$, $x_1 = 18{,}18$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 9{,}09$, $y_1 = 29{,}55$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$; **№11** $Z = 57{,}86$, $x_1 = 3{,}21$, $x_2 = 3{,}21$, $x_3 = 0$, $x_4 = 8{,}57$, $y_1 = 0$, $y_2 = 5$, $y_3 = 0$; **№13** решения нет; **№14** решения нет; **№16** решения нет; **№17** решения нет.

4. Научиться решению задач линейного программирования в MS Excel. Разобрать экономическую интерпретацию результатов решения задач.

Чтобы решить задачу, используя табличный редактор MS Excel необходимо:

- Открыть табличный редактор (Пуск $\longrightarrow$ Программы $\longrightarrow$ MS Excel);
- Запишем числовую модель задачи на рабочий лист (рисунок 1.1). Для этого необходимо выбрать ячейки в которых будут находиться переменные. Допустим $x_1 \to$C1 $x_2 \to$C2 (выбор ячеек произволен).

В ячейке A1 запишем целевую функцию $Z = 2x_1 + 3x_2$: A1: =2 · C1+3 · C2
Примечание: запись формул всегда начинается со знака «=».
В ячейку B1 запишем левую часть 1-го ограничения ($1x_1 + 3x_2$)
B1: = C1 + 3 · C2
В ячейку B2 запишем левую часть 2-го ограничения ($1x_1 + 1x_2$)
B2: = C1 + C2

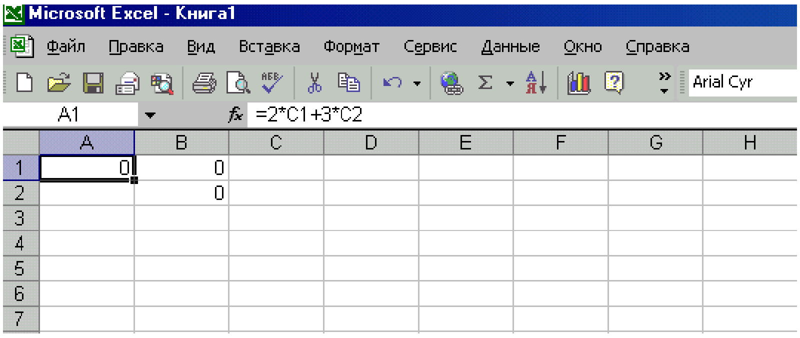


Рисунок 1.1 – Запись числовой модели на рабочем листе MS Excel

– После как числовая модель записана, необходимо установить курсор в ячейку A1 (в ней расположена целевая функция). Выбираем вкладку «Сервис» → «Поиск решения…», при этом откроется диалоговое окно функции «Поиск решения».

– В открывшемся окне необходимо установить целевую ячейку, а поскольку у вас курсор стоял на ячейке A1, то значение целевой ячейки будет правильным. В противном случае установите в ручную адрес целевой ячейки (в данном случае программа использует абсолютные адреса т.е. ячейка A1 имеет абсолютный адрес $A$1) (рисунок 1.2).

– Установите маркер в положение, соответствующие критерию оптимальности: максимальному или минимальному значению.

– В окне «Изменяя ячейки» нужно указать адреса ячеек соответствующие переменным. Для этого необходимо выделить диапазон ячейки с C1 по C2 (рисунок 1.2).

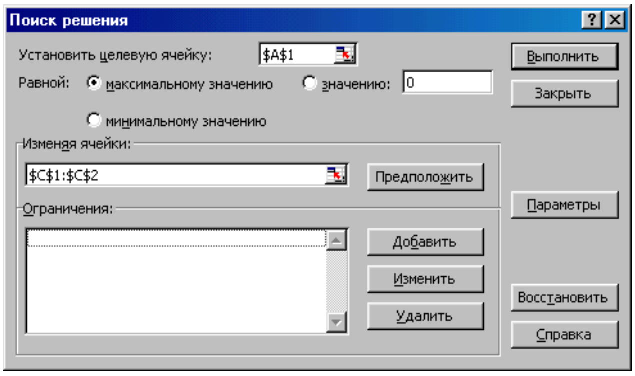


Рисунок 1.2 – Работа в диалоговом окне «Поиск решения»

– В окне «Ограничения» активировать кнопку «Добавить». Откроется окно «Добавить ограничения» (рисунок 1.3). Вводим первое ограничение: в окне «Ссылка на ячейку» указывают адрес ячейки, где находится левая часть 1-го ограничения - $B$1, затем выбирают знак ограничения « $\le$ » и значение – 300.

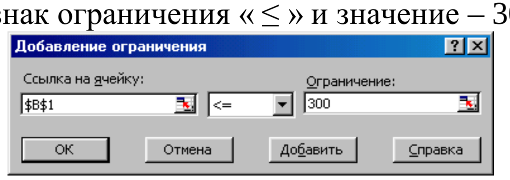


Рисунок 1.3 – Диалоговое окно «Добавление ограничения»

– Активируем клавишу «добавить» и аналогично вводим второе ограничение. Затем вводим условие неорицательности. Для этого в окне «Ссылка на ячейку» указываем диапазон ячеек, в которых находятся переменные ($C$1:$C$2). После добавления всех ограничений выбираем «ОК». Программа возвращается в диалоговое окно «Поиск решения». Ввод числовой модели закончен (рисунок 1.4).

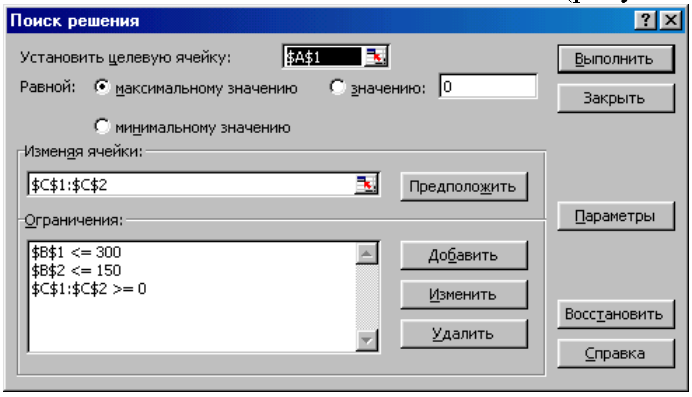


Рисунок 1.4 – Завершение ввода числовой модели в диалоговом окне «Поиск решения»

– Выбираем команду «Выполнить». На экране появится окно «Результаты поиска решения» (рисунок 1.5). Если модель составлена правильно и имеет решение, в открывшемся окне будет сообщение: «Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены». В окне «Тип отчета» выберите «Результаты» и нажмите «ОК».

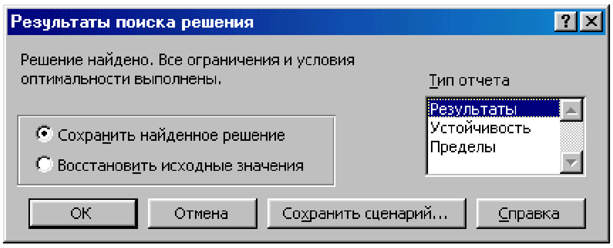


Рисунок 1.5 – Окно «Результаты поиска решения»

Результат решения задачи представлен в «Отчете по результатам» (рисунок 1.6). Решение задачи окончено.

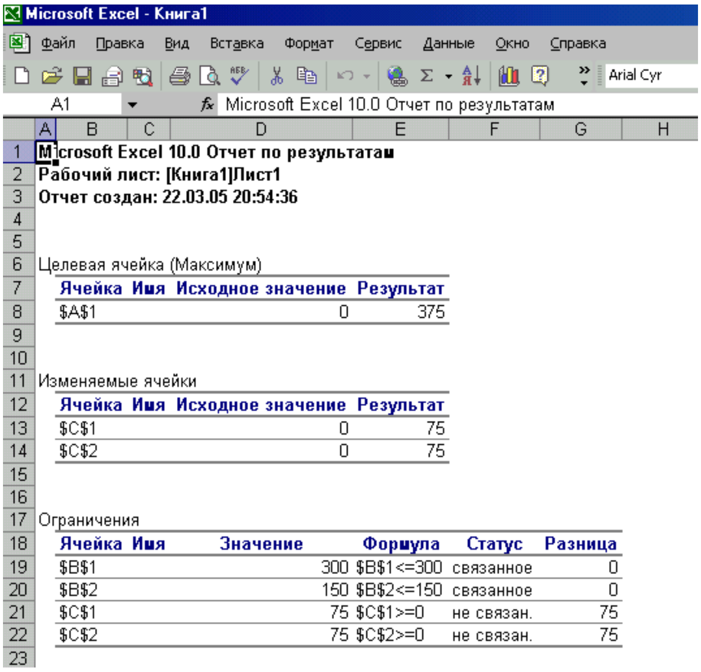


Рисунок 1.6 – Отчет по результатам

– Решение задачи окончено, результаты можно распечатать.

Примечание

Если поиск не может найти оптимальное решение, в диалоговом окне **Результаты поиска решения** выводится одно из следующих сообщений.

Поиск не может улучшить текущее решение. Все ограничения выполнены.

В процессе поиска решения нельзя найти такой набор значений влияющих ячеек, который был бы лучше текущего решения. Приблизительное решение найдено, но либо дальнейшее уточнение невозможно, либо погрешность, заданная в диалоговом окне **Параметры поиска решения** слишком высока. Измените погрешность на меньшее число и запустите процедуру поиска решения снова.

Поиск остановлен (истекло заданное на поиск время).

Время, отпущенное на решение задачи, исчерпано, но достичь удовлетворительного решения не удалось. Чтобы при следующем запуске процедуры поиска решения не повторять выполненные вычисления, установите переключатель **Сохранить найденное решение** или **Сохранить сценарий**.

Поиск остановлен (достигнуто максимальное число итераций).

Произведено разрешенное число итераций, но достичь удовлетворительного решения не удалось. Увеличение числа итераций может помочь, однако следует рассмотреть результаты, чтобы понять причины остановки. Чтобы при следующем запуске процедуры поиска решения не повторять выполненные вычисления, установите переключатель **Сохранить найденное решение** или нажмите кнопку **Сохранить сценарий**.

Значения целевой ячейки не сходятся.

Значение целевой ячейки неограниченно увеличивается (или уменьшается), даже если все ограничения соблюдены. Возможно следует в задаче снять одно ограничение или сразу несколько. Изучите процесс расхождения решения, проверьте ограничения и запустите задачу снова.

Поиск не может найти подходящего решения.

В процессе поиска решения нельзя сделать итерацию, которая удовлетворяла бы всем ограничениям при заданной точности. Вероятно, ограничения противоречивы. Исследуйте лист на предмет возможных ошибок в формулах ограничений или в выборе ограничений.

Поиск остановлен по требованию пользователя.

Нажата кнопка **Стоп** в диалоговом окне **Текущее состояние поиска решения** после прерывания поиска решения в процессе выполнения итераций.

Условия для линейной модели не удовлетворяются.

Установлен флажок **Линейная модель**, однако итоговый пересчет порождает такие значения, которые не согласуются с линейной моделью. Это означает, что решение недействительно для данных формул листа. Чтобы проверить линейность задачи, установите флажок **Автоматическое масштабирование** и повторно запустите задачу. Если это сообщение опять появится на экране, снимите флажок **Линейная модель** и снова запустите задачу.

При поиске решения обнаружено ошибочное значение в целевой ячейке или в ячейке ограничения.

При пересчете значений ячеек обнаружена ошибка в одной формуле или в нескольких сразу. Найдите целевую ячейку или ячейку ограничения, порождающие ошибку, и измените их формулы так, чтобы они возвращали подходящее числовое значение.

Набрано неверное имя или формула в окне **Добавить ограничение** или в окне **Изменить ограничение**, либо в поле **Ограничение** было задано целое или двоичное ограничение. Чтобы ограничить значения ячейки множеством целых чисел выберите оператор **целого** ограничения в списке условных операторов. Чтобы установить двоичное ограничение, выберите оператор для **двоичного** ограничения.

Интерпретация результатов задачи

Полученные значения в ячейках, содержащих формулы целевой функции или ограничений, являются результатом расчета целевой функции и соответствующих ограничений.

Результат, полученный в ячейке А1 означает прибыль, полученную от производства продукции.

Ячейки С1, С2 указывают нам на количество произведенной продукции.

В ячейке В1 записано 1-ое ограничение, характеризующее расход сырья $С_1$ на производство всех видов продукции. При этом получился результат равный 300, разница равна 0, что указывает на полный расход сырья данного вида.

В ячейке В2 записано второе ограничение, характеризующее расход сырья $С_2$ на производство продукции $П_1$ и $П_2$. Результат равен 150, разница равна 0, что полностью соответствует заданному ограничению (т.е. сырье $С_2$ израсходовано полностью).

Значение ячеек С1, С2 превышают 0, т.е. условие неотрицательности переменных выполнено.

Ответ

Максимальная прибыль возможна в размере 375 единиц.

Объем выпуска продукции: $П_1$ – 75 штук, $П_2$ – 75 штук.

Сырье С1 иС2 израсходовано полностью, условие неотрицательности выполнено.

5. Контрольная работа……….

(Варианты заданий представлены в ФОС дисциплины)

2.2 Лабораторная работа № ЛР-6 (2 часа).
Тема: «Целочисленное программирование»

2.2.1 Цель работы: Изучить методы решения задач целочисленного программирования.

2.2.2 Задачи работы:

1. Разобрать постановку и модель задачи.
2. Научиться решению целочисленных задач.

2.2.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Калькулятор
2. Компьютер
3. Доска

2.2.4 Описание (ход) работы:

1. Разобрать постановку и модель задачи.

Целочисленное программирование – это разновидность линейного программирования, подразумевающая, что искомые значения должны быть целыми числами.

Постановка целочисленной задачи звучит также, как и постановка основной задачи линейного программирования и добавляется только одно условие – целочисленность x_j.

Пусть некоторое предприятие имеет n видов производственных ресурсов. Порядковый номер ресурсов – i, т.е. $i = 1, 2, \ldots, m$. Наличие каждого вида ресурсов известно и обозначается b_i. Предположим, что предприятие может производить m видов продукции. Порядковый номер продукции – j, т.е. $j = 1, 2, \dots, n$. Необходимо определить какое количество единиц продукции каждого вида надо производить (x_j), чтобы получить максимум этой продукции в стоимостном выражении, если известно, что затраты на производство единицы продукции каждого вида ресурса равны a_{ij} единиц, а цена реализации – c_j. Единицы производимой продукции должны принимать целые значения. Тогда модель задачи будет выглядеть следующим образом:

I) $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to \max$.

II) $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1$,

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2$,

……………………………

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m$.

III) $x_j \ge 0$ и x_j – целые, $j = 1, 2, \dots, n$.

Методы решения задач линейного программирования не гарантируют целочисленности решения.

2. Научиться решению целочисленных задач.

Предположим, что на каком-то шаге мы получили таблицу с оптимальным вариантом решения задачи (таблица 1).

Таблица 1 – Оптимальный вариант для исходной задачи без ограничения по целочисленности

	$-x_1$	$-y_1$	…	$-x_n$	Свободные члены
x_2	a_{11}'	a_{12}'	…	a_{1n}'	b_1'
y_2	a_{21}'	a_{22}'	…	a_{2n}	b_2'
…	…	…	…	…	…
y_m	a_{m1}'	a_{m2}'	…	a_{mn}'	b_m'
Z	c_1'	c_2'	…	c_n'	Q

$b_i \ge 0$, $c_j \ge 0$.

Предположим, что в полученном оптимальном варианте среди переменных x_j есть дробное значение. Составим дополнительное ограничение по целочисленности этой переменной.

Обозначим через β_{ij} целое число, не превосходящие коэффициенты и свободный член в строке, в которой находится переменная x_j с дробным значением.

Для каждого коэффициента и свободного члена составим разность $\alpha_{ij} = a_{ij} - \beta_{ij}$ (если само a_{ij} целое, то $\beta_{ij} = a_{ij}$ и $\alpha_{ij} = 0$).

Очевидно, что все значения $\alpha_{ij} \ge 0$.

Возьмем α_{ij} в качестве коэффициентов нового дополнительного ограничения:

$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}y_1 + \dots + \alpha_{in}x_n \ge \alpha_i$

Запишем это дополнительное ограничение в виде равенства введя дополнительную переменную $s_i \ge 0$:

$s_i = \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \dots + \alpha_{in}x_n - \alpha_i$.

Далее составляется расширенная симплекс-таблица, т.е. в таблицу с оптимальным вариантом вводится дополнительная строка, в которой записывается дополнительное ограничение (таблица 2), после чего вычисления продолжаются.

Таблица 2 – Вариант решения для исходной задачи с добавленным ограничением

	$-x_1$	$-y_1$	…	$-x_n$	Свободные члены
x_2	a_{11}'	a_{12}'	…	a_{1n}'	b_1'
y_2	a_{21}'	a_{22}'	…	a_{2n}'	b_2'

…	…	…	…	…	…
y_m	a_{m1}'	a_{m2}'	…	a_{mn}'	b_m'
s_i	$-\alpha_{i1}$	$-\alpha_{i2}$	…	$-\alpha_{in}$	$-\alpha_i$
Z	c_1'	c_2'	…	c_n'	Q

Далее задача решается симплекс-методом с получением допустимого и оптимального варианта. В случае необходимости в таблицу вводятся еще ограничения.

Замечание: при работе с линейными целочисленными задачами оптимизации необходимо иметь ввиду: 1) условие целочисленности распространяется только на основные переменные x_j, а дополнительные переменные (остаток ресурсов) и целевая функция (выход продукции в стоимостном выражении) не обязательно должны принимать целые значения; 2) условие целочисленности может только «ухудшить» результат решения задачи; 3) существует ряд задач, которые без дополнительных ограничений сразу являются целочисленными или вовсе не могут быть решены с условием целочисленности, но из постановки задачи это сложно увидеть заранее.

Задача 1

I. Целевая функция:

$Z = 4x_1 + 5x_2 + x_3 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 + 4x_2 \le 11 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \le 13 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

x_1, x_2, x_3 – целые

Решение:

Переходим от системы неравенств к системе уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = -3x_1 - 2x_2 + 10 \\ y_2 = -x_1 - 4x_2 + 11 \\ y_3 = -3x_1 - 3x_2 - x_3 + 13 \end{cases}$$

Запишем математическую модель в табличной форме:

Таблица 1

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены
y_1	3	2	0	10
y_2	1	4	0	11
y_3	3	3	1	13
Z	–4	–5	–1	0

Вариант допустимый, но не оптимальный. Выберем разрешающий элемент.

Сделаем первую итерацию

Таблица 2

	$-x_1$	$-y_2$	$-x_3$	Свободные члены
y_1	5/2	–1/2	0	9/2
x_2	1/4	1/4	0	11/4
y_3	9/4	–3/4	1	19/4
Z	–11/4	5/4	-1	55/4

Сделаем вторую итерацию

Таблица 3

	$-y_1$	$-y_2$	$-x_3$	Свободные члены
x_1	2/5	–1/5	0	9/5
x_2	–1/10	3/10	0	23/10
y_3	–9/10	–3/10	1	7/10
Z	11/10	7/10	–1	187/10

Сделаем третью итерацию

Таблица 4

	$-y_1$	$-y_2$	$-y_3$	Свободные члены
x_1	0,4	–0,2	0	1,8
x_2	–0,1	0,3	0	2,3
x_3	–0,9	–0,3	1	0,7
Z	0,2	0,4	1	19,4

Получен допустимый вариант, являющийся оптимальным.

Первый оптимальный вариант:

$Z = 19,4$

$\begin{cases} x_1 = 1,8 \\ x_2 = 2,3 \\ x_3 = 0,7 \end{cases}$ $\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}$

Вариант оптимальный, но не целочисленный.

Составим дополнительные ограничения по целочисленности x_3.

Так число, не превышающее (–0,9) и при этом наиболее близкое к нему и к тому же целое – это (–1). Поэтому:

$\alpha_{31} = –0,9 – (–1) = 0,1$

Далее аналогично:

$\alpha_{32} = –0,3 – (–1) = 0,7$

$\alpha_{33} = 1 – 1 = 0$

$\alpha_{3св.} = 0,7 – 0 = 0,7$

Таким образом, мы получили дополнительные ограничения:

$0,1y_1 + 0,7y_2 + 0y_3 \geq 0,7$

То есть $s_3 = 0,1y_1 + 0,7y_2 + 0y_3 – 0,7$

Добавим в таблицу 4 дополнительное ограничение s_3 и получим таблицу 5. Далее решаем симплекс методом.

Таблица 5

	$-y_1$	$-y_2$	$-y_3$	Свободные члены
x_1	0,4	–0,2	0	1,8
x_2	–0,1	0,3	0	2,3
x_3	–0,9	–0,3	1	0,7
s_3	–0,1	–0,7	0	–0,7
Z	0,2	0,4	1	19,4

Вариант не допустимый.

Таблица 5

	$-y_1$	$-s_3$	$-y_3$	Свободные члены
x_1	3/7	–7/2	0	2
x_2	–1/7	3/7	0	2
x_3	–6/7	–3/7	1	1
y_2	1/7	–10/7	0	1
Z	1/7	4/7	1	19

После преобразования получаем оптимальный целочисленный вариант.

Второй оптимальный вариант:

$Z = 19$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 1 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

Далее рассмотрим задачи для закрепления навыка решения симплексным методом с учетом целочисленности.

Задача 2

I. Целевая функция:

$Z = x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 7 \\ x_1 + 3x_2 \le 7 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2 \ge 0$

x_1, x_2 – целые

Задача 3

I. Целевая функция:

$Z = 2x_1 + x_2 + x_3 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 16 \\ x_1 + x_2 \le 7 \\ 3x_1 + 2x_3 \ge 18 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

x_1, x_2, x_3 – целые

Задача 4

I. Целевая функция:

$Z = 110x_1 + 90x_2 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 10 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_2 \le 5 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2 \ge 0$

x_1, x_2 – целые

Задача 5

I. Целевая функция:

$Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 25 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 15 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

x_1, x_2, x_3 – целые

Задача 6

I. Целевая функция:

$Z = x_1 - x_2 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 3 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

x_1, x_2, x_3, x_4 – целые

Ответы

№2 1-ый: $Z = 21/4$, $x_1 = 7/4$, $x_2 = 7/4$; 2-ой: $Z = 2$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$; **№3** 1-ый: $Z = 18{,}5$, $x_1 = 7$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4{,}5$; 2-ой: $Z = 17$, $x_1 = 6$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$; **№4** 1-ый: $Z = 1100/3$, $x_1 = 10/3$, $x_2 = 0$; 2-ой: $Z = 330$, $x_1 = 3$, $x_2 = 0$; **№5** 1-ый: $Z = 22{,}5$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 7{,}5$; 2-ой: $Z = 21$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 7$; **№6** 1-ый: $Z = 22{,}5$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 7{,}5$; 2-ой: целочисленности нет.

2.3 Лабораторная работа № ЛР-7 (2 часа).
Тема: «Двойственность в линейном программировании»

2.3.1 Цель работы: Изучить методы решения двойственных задач линейного программирования.

2.3.2 Задачи работы:

1. Разобрать постановку и модель двойственной задачи. Понятие двойственности.
2. Научиться решению двойственных задач.

2.3.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Калькулятор
2. Компьютер
3. Доска

2.3.4 Описание (ход) работы:

1. Разобрать постановку и модель двойственной задачи. Понятие двойственности.

Алгоритм составления двойственной задачи:

1) тип экстремума целевой функции меняется;

2) каждому ограничению исходной задачи ставится в соответствие переменная двойственной задачи;

3) свободные члены исходной задачи становятся коэффициентами при переменных в целевой функции двойственной задачи;

4) каждый столбец коэффициентов в системе ограничений формирует ограничение двойственной задачи, при этом тип неравенства меняется; коэффициенты при переменных в целевой функции исходной задачи становятся свободными членами в соответствующих неравенствах двойственной задачи.

Рассмотрим конкретный пример построения двойственной модели:

исходная задача:	двойственная задача:
I) $Z = 6x_1 + 4x_2 \to \max$.	I) $F = 8u_1 + 6u_2 \to \min$.
II) $2x_1 + 4x_2 \le 8$,	II) $2u_1 + 2u_2 \ge 6$,
$2x_1 + x_2 \le 6$.	$4u_1 + u_2 \ge 4$.
III) $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.	III) $u_1 \ge 0, u_2 \ge 0$.

Следует отметить, что:

- математические модели пары двойственных задач могут быть симметричными и несимметричными. В несимметричных двойственных задачах система ограничений исходной задачи задается в виде равенств, а двойственной – в виде неравенств, причем в последней переменные могут быть и отрицательными. В симметричных задачах система ограничений как исходной, так и двойственной задачи задается неравенствами, причем на двойственные переменные налагается условие неотрицательности. Чаще рассматриваются симметричные взаимодвойственные задачи;

- каждая из задач двойственной пары формально является самостоятельной задачей линейного программирования и может решаться независимо от другой. Однако, использование симплексного метода решения одной из двойственных задач двойственной пары автоматически приводит к решению другой задачи. Наглядным обоснованием данного положения может служить возможность использования двойственной симплекс-таблицы для отыскания искомых значений целевых функций.

2. Научиться решению двойственных задач.

Задача 1

Для прямой задачи постройте двойственную ей, и найдите оптимальные решения этих задач.

I. Целевая функция:

$Z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \longrightarrow \min$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 \ge 4 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

Решение

Двойственная задача имеет вид:

I. Целевая функция:

$F = 4u_1 + 6u_2 \longrightarrow \max;$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 4u_1 + 5u_2 \le 4 \\ 3u_1 + u_2 \le 2 \\ -u_1 + 2u_2 \le 3 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$u_1, u_2 \ge 0.$

Переходим от системы неравенств к системе уравнений:

$$\begin{cases} V_1 = -4u_1 - 5u_2 + 4 \\ V_2 = -3u_1 - u_2 + 2 \\ V_3 = u_1 - 2u_2 + 3 \end{cases}$$

Решая ее на основе составления симплекс-таблиц имеем:

Таблица 1

		y_1	y_2	Z
		$-u_1$	$-u_2$	Свободные члены
x_1	V_1	4	5	4
x_2	V_2	3	1	2
x_3	V_3	–1	2	3
Свободные члены	F	–4	–6	0

Таблица 2

		y_1	x_1	Z
		$-u_1$	$-V_1$	Свободные члены
y_2	u_2	4/5	1/5	4/5
x_2	V_2	11/5	–1/5	6/5
x_3	V_3	-13/5	–2/5	7/5
Свободные члены	F	4/5	6/5	24/5

Получен допустимый вариант, являющийся оптимальным для двойственной задачи:

$F(u) = 24/5$

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 4/5 \end{cases} \qquad \begin{cases} V_1 = 0 \\ V_2 = 6/5 \\ V_3 = 7/5 \end{cases}$$

На основании соответствия между переменными запишем оптимальное решение исходной задачи:

$Z(x) = 24/5$

$$\begin{cases} x_1 = 6/5 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 4/5 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

Заметим, что для решения исходной задачи симплекс-методом потребовалось бы выполнить не менее двух итераций. Решение же двойственной задачи найдено за одну итерацию.

При решении двойственных задач могут встретиться следующие случаи:

а) обе задачи разрешимы;

б) области допустимых решений обеих задач пустые;

в) одна задача имеет неограниченную область допустимых решений, вторая – пустую.

Задача 2

Для прямой задачи постройте двойственную ей, и найдите оптимальные решения этих задач.

I. Целевая функция:

$Z = 6x_1 + 4x_2 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 8 \\ 2x_1 + x_2 \le 6 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2 \ge 0$

Решение

Двойственная задача имеет вид:

I. Целевая функция:

$F = 8u_1 + 6u_2 \longrightarrow \min$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 2u_1 + 2u_2 \geq 6 \\ 4u_1 + u_2 \geq 4 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$u_1, u_2 \geq 0$.

Графическое решение исходной задачи приведено на рис.1, а двойственной – на рис.2. Максимальное значение функции $Z = 56/3$ исходной задачи достигается в точке $X = (8/3;2/3)$, т.е. при $x_1 = 8/3$ и $x_2 = 2/3$. Минимальное значение функции $F = 56/3$ двойственной задачи достигается в точке $U = (1/3;8/3)$, т.е. при $u_1 = 1/3$ и $u_2 = 8/3$.

Рис.1

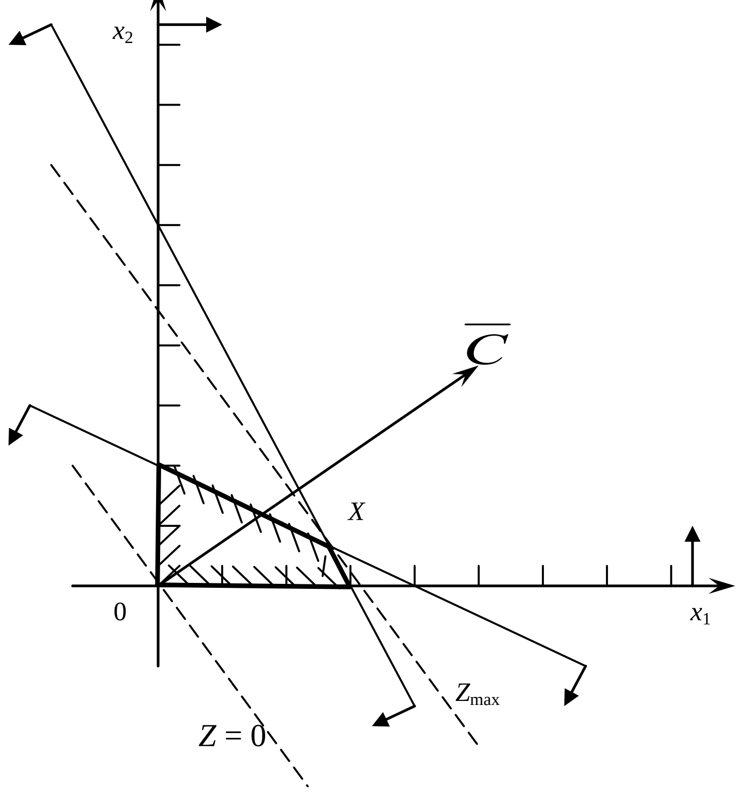
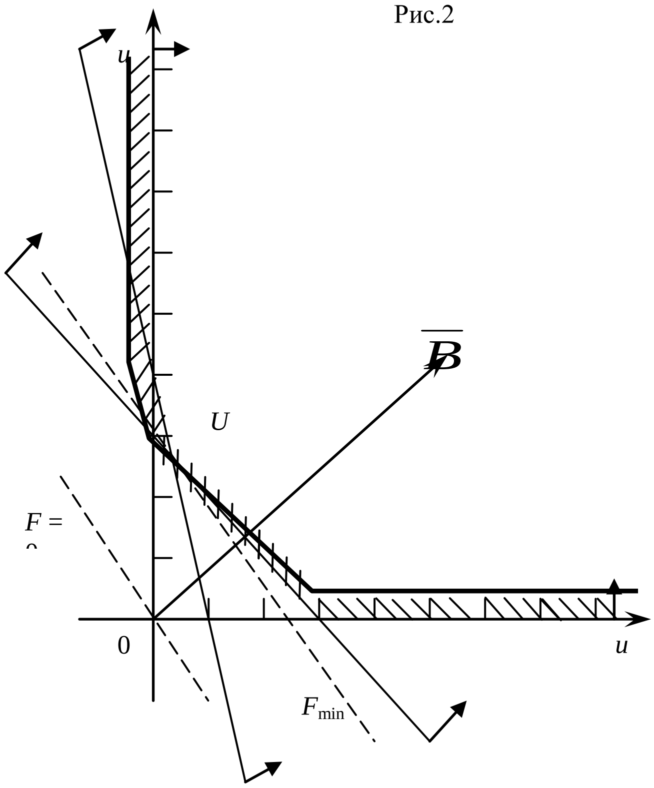


Рис.2



Далее рассмотрим задачи для закрепления навыка построения двойственных им и решения их симплексным и графическим методом.

Задача 3

Для прямой задачи постройте двойственную ей, и найдите оптимальные решения этих задач графическим методом.

I. Целевая функция:

$Z = 6x_1 + 3x_2 \longrightarrow \min$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 \geq 3 \\ -2x_1 + x_2 \leq -2 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2 \geq 0$

Задача 4

Для прямой задачи постройте двойственную ей, и найдите оптимальные решения этих задач любым способом.

I. Целевая функция:

$Z = 6x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ x_1 - 3x_2 \leq -6 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2 \geq 0$

Задача 5

Для прямой задачи постройте двойственную ей, и найдите оптимальные решения этих задач любым способом.

I. Целевая функция:

$Z = 4x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \leq 3 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2 \geq 0$

Задача 6

Для прямой задачи постройте двойственную ей, и найдите оптимальные решения этих задач любым способом.

I. Целевая функция:

$Z = 5x_1 - 8x_2 \longrightarrow \min$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 - x_2 \geq 1 \\ x_1 + 3x_2 \leq 10 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2 \geq 0$

Задача 7

Для прямой задачи постройте двойственную ей, и найдите оптимальные решения этих задач любым способом.

I. Целевая функция:

$Z = 5x_1 + 6x_2 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 9x_2 \le 45 \\ 3x_1 + 3x_2 \le 19 \\ 2x_1 + x_2 \le 10 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2 \ge 0$

Ответы

№3 нет решения; **№4** нет решения; **№5** $Z_{max} = 18$, $x_1 = 3$, $x_2 = 3$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$; $F_{min} = 18$, $u_1 = 2$, $u_2 = 2$, $u_3 = 0$, $V_1 = 0$, $V_2 = 0$; **№6** $Z_{min} = 2$, $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 5$; $F_{max} = 2$, $u_1 = 1$, $u_2 = 7$, $u_3 = 0$, $V_1 = 0$, $V_2 = 0$; **№7** $Z_{max} = 35$, $x_1 = 3$, $x_2 = 10/3$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 2/3$; $F_{min} = 35$, $u_1 = 1/4$, $u_2 = 5/4$, $u_3 = 0$, $V_1 = 0$, $V_2 = 0$.

2.4 Лабораторная работа № ЛР-8, ЛР-9, ЛР-10, ЛР-11 (8 часов). Тема: «Методы решения задач линейного программирования транспортного типа»

2.4.1 Цель работы: Изучить методы решения задач линейного программирования транспортного типа

2.4.2 Задачи работы:

1. Письменный опрос.
2. Изучить постановку и модель транспортной задачи.
3. Научиться решать транспортную задачу методом потенциалов.
4. Научиться решению транспортных задач в MS Excel.
5. Разобрать экономическую интерпретацию результатов решения задач.
6. Контрольная работа

2.4.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Калькулятор
2. Компьютер
3. Доска

2.4.4 Описание (ход) работы:

1. Письменный опрос.

Контроль проводится в письменном виде в форме коллоквиума. В варианте предусмотрено два вопроса, которые группируются в случайном порядке из перечня контрольных вопросов пунктов *6.1.1.1.* и *6.1.2.1.* РПД.

2. Изучить постановку и модель транспортной задачи.

(Опора на конспекты лекций)

3. Научиться решать транспортную задачу методом потенциалов.

Метод потенциалов решения транспортной задачи линейного программирования с нахождением опорного плана методом Северо-западного угла.

Задача 1

Составить план перевозки картофеля из 3 совхозов 3 магазинам так, чтобы сумма расстояний на перевозку была минимальной. Наличие картофеля (в тоннах), потребность магазинов и расстояние от совхоза до магазина (в километрах) приведены в таблице 1.

Таблица 1

Совхоз	Магазин			Запасы
	1	2	3	
1	2	8	7	300
2	6	9	3	360
3	5	2	1	180
Потребности	210	450	310	840 / 970

Дано: b_i – наличие груза у i-го поставщика (i = 1, 2, 3)

a_j – потребность j-го потребителя (j = 1, 2, 3, 4)

Возможности поставщиков:

$$\sum_{i=1}^{3} b_i = 840$$

Возможности потребителей:

$$\sum_{j=1}^{3} a_j = 970$$

$$\sum_{j=1}^{3} a_j \geq \sum_{i=1}^{3} b_i \quad \rightarrow \quad \left| \sum_{j=1}^{3} a_j - \sum_{i=1}^{3} b_i \right| = 130$$

Задача открытого типа, чтобы закрыть, нужно ввести фиктивного потребителя с потребностью $b_4 = 130$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} \end{pmatrix}$$

x_{ij} – количество груза, перевозимого от i-го поставщика к j-му потребителю.

$$Z = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = a_j \ (j = 1, 2, 3) \qquad \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = b_i \ (i = 1, 2, 3, 4)$$

Условие вывоза:

$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 300$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 360$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 180$

$x_{41} + x_{42} + x_{43} = 130$

Условие удовлетворения потребностей:

$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 210$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 450$

$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 310$

$Z = 2x_{11} + 8x_{12} + 7x_{13} + 6x_{21} + 9x_{22} + 3x_{23} + 5x_{31} + 2x_{32} + 1x_{33} + 10x_{14} + 10x_{15} + 10x_{24} \rightarrow \min$

Получаем исходный вариант методом Северо-западного угла.

Таблица 2

Совхоз	Магазин			Запасы
	1	2	3	
1	2 210	8 90	7	300
2	6	– 9 360	+ 3 0	360
3	5	2 α = 5	1 180	180
4ф	10	+ 10 α = 6	– 10 130	130
Потребности	210	450	310	970 970

$Z_{факт} = 2 \cdot 210 + 8 \cdot 90 + 9 \cdot 360 + 1 \cdot 180 = 420 + 720 + 3240 + 180 = 4560$

Исследование на вырожденность. Вариант будет невырожденным, если число заполненных клеток N равно сумме поставщиков и потребителей за вычетом единицы: $N = m + n - 1$.

N = 5

$n + m - 1 = 3 + 3 - 1 = 6$,

т.е. $N < m + n - 1$ – вариант вырожденный, следовательно, его необходимо пополнить, проставив в недостающем числе клеток ноль. Поскольку этим дополнительным клеткам будут отвечать нулевые перевозки, то общий баланс и суммарная стоимость перевозок плана при этом не изменится. Однако проводить пополнение плана, выбирая клетки произвольно, нельзя. Необходимо учитывать условие ацикличности.

Поставим ноль в клетку (2,3).

Исследуем на оптимальность, для этого:

1) Составим систему уравнений относительно потенциалов для заполненных клеток таблицы: условие: $v_j - u_i = c_{ij}$.

для клетки (1,1) $v_1 - u_1 = c_{11} = 2$

для клетки (1,2) $v_2 - u_1 = c_{12} = 8$

для клетки (2,2) $v_2 - u_2 = c_{22} = 9$

для клетки (2,3) $v_3 - u_2 = c_{23} = 3$

для клетки (3,3) $v_3 - u_3 = c_{33} = 1$

для клетки (4,3) $v_3 - u_4 = c_{43} = 10$

Как правило $u_1 = 0$, тогда получаем:

$v_1 = 2$ $\quad u_2 = -1$

$v_2 = 8$ $\quad u_3 = 1$

$v_3 = 2$ $\quad u_4 = -8$.

2) С помощью найденных потенциалов проверим выполнение неравенства $v_j - u_i \le c_{ij}$ для свободных клеток и вычислим

$$\alpha = \left| (v_j - u_i) - c_{ij} \right|$$

для тех из них, для которых это неравенство невыполняется.

для клетки (1,3) $\quad v_3 - u_1 \le c_{13}$

$2 - 0 \le 7$ $\quad$ верно

для клетки (2,1) $\quad v_1 - u_2 \le c_{21}$

$2 - (-1) \le 6$ $\quad$ верно

для клетки (3,1) $v_1 - u_3 \leq c_{31}$

$2 - 1 \leq 5$ верно

для клетки (3,2) $v_2 - u_3 \leq c_{32}$

$8 - 1 \leq 2$ неверно $\alpha_{32} = 5$

для клетки (4,1) $v_1 - u_4 \leq c_{41}$

$2 - (-8) \leq 10$ верно

для клетки (4,2) $v_2 - u_4 \leq c_{42}$

$8 - (-8) \leq 10$ неверно $\alpha_{42} = 6$

Получаем: $\alpha_{32} = 5$; $\alpha_{42} = 6$.

Существуют плохие клетки, следовательно, вариант представленный в таблице 1 не оптимальный. Для улучшения плана перевозок в таблице строится цикл перераспределения объектов перевозок. Цикл представляет собой замкнутую ломаную линию, которая начинается в той свободной клетке, где условие оптимальности нарушается наиболее сильно. В рассматриваемом примере такой клеткой является клетка (4,2), где α наибольшее ($\alpha_{42} = 6$).

При построении цикла можно проходить как через занятые, так и через свободные клетки таблицы, но повороты можно делать только в занятых клетках под прямым углом. Построим по указанным правилам цикл в таблице 2. Данный цикл показывает, что для улучшения плана перевозок, т.е. для уменьшения общей стоимости перевозок, необходимо изменить объем перевозок в тех клетках, где находятся вершины (углы поворота) цикла.

Порядок изменения объемов перевозок в вершинах цикла определяется следующим образом. В вершинах цикла расставляются знаки «+» и «–», причем в начале цикла ставится знак «+», в следующей «–», в следующей за ней вершине «+» и т.д. То есть, получаем чередование знаков «+» и «–». Направление движения при расстановке знаков от свободной клетки безразлично, так как количество вершин цикла является четной величиной. Наличие знака «+» в вершине цикла показывает, что объем перевозок необходимо увеличить. Увеличение и уменьшение объемов перевозок в вершинах цикла производится на одинаковую величину, которая выбирается равной наименьшему из объемов перевозок в тех клетках, где в вершине цикла стоит знак «–».

В итоге получаем новый вариант в таблице 3. Следующие шаги поиска оптимального варианта совершаются по аналогии вышеизложенного.

Таблица 3

Совхоз	Магазин			Запасы
	1	2	3	
1	2 210	8 90	7	300
2	6	– 9 230	+ 3 130	360
3	5	+ 2 α = 5	– 1 180	180
4ф	10	10 130	10	130
Потребности	210	450	310	970 / 970

$Z_{факт} = 2{\cdot}210 + 8{\cdot}90 + 9{\cdot}230 + 3{\cdot}130 + 1{\cdot}180 = 420 + 720 + 2070 + 390 + 180 = 3780$

Исследование на вырожденность. N = 6 $n + m - 1 = 3 + 3 - 1 = 6$, т.е. $N = m + n - 1$ – вариант невырожденный.

Исследуем на оптимальность, для этого:

1) Составим систему уравнений относительно потенциалов для заполненных клеток таблицы: условие: $v_j - u_i = c_{ij}$.

для клетки (1,1) $v_1 - u_1 = c_{11} = 2$
для клетки (1,2) $v_2 - u_1 = c_{12} = 8$
для клетки (2,2) $v_2 - u_2 = c_{22} = 9$
для клетки (2,3) $v_3 - u_2 = c_{23} = 3$
для клетки (3,3) $v_3 - u_3 = c_{33} = 1$
для клетки (4,2) $v_2 - u_4 = c_{42} = 10$

Как правило $u_1 = 0$, тогда получаем:

$v_1 = 2$ $u_2 = -1$
$v_2 = 8$ $u_3 = 1$
$v_3 = 2$ $u_4 = -2$.

2) С помощью найденных потенциалов проверим выполнение неравенства $v_j - u_i \le c_{ij}$ для свободных клеток и вычислим

$\alpha = \left| (v_j - u_i) - c_{ij} \right|$

для тех из них, для которых это неравенство невыполняется.

для клетки (1,3) $v_3 - u_1 \le c_{13}$
$2 - 0 \le 7$ верно
для клетки (2,1) $v_1 - u_2 \le c_{21}$
$2 - (-1) \le 6$ верно
для клетки (3,1) $v_1 - u_3 \le c_{31}$
$2 - 1 \le 5$ верно
для клетки (3,2) $v_2 - u_3 \le c_{32}$
$8 - 1 \le 2$ неверно $\alpha_{32} = 5$
для клетки (4,1) $v_1 - u_4 \le c_{41}$
$2 - (-2) \le 10$ верно
для клетки (4,3) $v_3 - u_4 \le c_{43}$
$8 - (-2) \le 10$ верно

Получаем: $\alpha_{32} = 5$.

Существуют плохие клетки, следовательно, вариант представленный в таблице 1 не оптимальный. Для улучшения плана перевозок в таблице строится цикл перераспределения объектов перевозок. Цикл представляет начинается в той свободной клетке, где условие оптимальности нарушается наиболее сильно. В рассматриваемом примере такой клеткой является клетка (3,2), где α наибольшее ($\alpha_{32} = 5$).

В итоге получаем новый вариант в таблице 4. Следующие шаги поиска оптимального варианта совершаются по аналогии вышеизложенного.

Таблица 4

Совхоз	Магазин			Запасы
	1	2	3	
1	2 210	8 90	7	300
2	6	9 50	3 310	360
3	5	2 180	1	180
4ф	10	10 130	10	130
Потребности	210	450	310	970 / 970

$Z_{\text{факт}} = 2 \cdot 210 + 8 \cdot 90 + 9 \cdot 50 + 3 \cdot 310 + 2 \cdot 130 = 420 + 720 + 450 + 910 + 360 = 2860$

Исследование на вырожденность.

N = 6

$n + m - 1 = 3 + 3 - 1 = 6$,

т.е. $N = m + n - 1$ – вариант невырожденный.

Исследуем на оптимальность, для этого:

1) Составим систему уравнений относительно потенциалов для заполненных клеток таблицы: условие: $v_j - u_i = c_{ij}$.

для клетки (1,1) $v_1 - u_1 = c_{11} = 2$

для клетки (1,2) $v_2 - u_1 = c_{12} = 8$

для клетки (2,2) $v_2 - u_2 = c_{22} = 9$

для клетки (2,3) $v_3 - u_2 = c_{23} = 3$

для клетки (3,2) $v_2 - u_3 = c_{32} = 2$

для клетки (4,2) $v_2 - u_4 = c_{42} = 10$

Как правило $u_1 = 0$, тогда получаем:

$v_1 = 2$ $\quad u_2 = -1$

$v_2 = 8$ $\quad u_3 = 6$

$v_3 = 7$ $\quad u_4 = -2$.

2) С помощью найденных потенциалов проверим выполнение неравенства $v_j - u_i \le c_{ij}$ для свободных клеток и вычислим

$$\alpha = \left| (v_j - u_i) - c_{ij} \right|$$

для тех из них, для которых это неравенство невыполняется.

для клетки (1,3)	$v_3 - u_1 \le c_{13}$	
	$7 - 0 \le 7$	верно
для клетки (2,1)	$v_1 - u_2 \le c_{21}$	
	$2 - (-1) \le 6$	верно
для клетки (3,1)	$v_1 - u_3 \le c_{31}$	
	$2 - 6 \le 5$	верно
для клетки (3,3)	$v_3 - u_3 \le c_{33}$	
	$7 - 6 \le 1$	верно
для клетки (4,1)	$v_1 - u_4 \le c_{41}$	
	$2 - (-2) \le 10$	верно
для клетки (4,3)	$v_3 - u_4 \le c_{43}$	
	$7 - (-2) \le 10$	верно

Вариант оптимален.

Ответ: $Z_{\min} = 2860$

$$A = \begin{pmatrix} 210 & 90 & 0 \\ 0 & 50 & 310 \\ 0 & 180 & 0 \end{pmatrix}$$

В результате полученного решения можно сделать вывод, что минимальная сумма расстояний на перевозку будет равна 2860 км, если 1-ый совхоз перевезет 1-му и 2-му магазинам соответственно 210 т и 90 т картофеля, 2-ой совхоз 2-му и 3-му магазинам перевезет соответственно 50 т и 310 т картофеля, а 3-ий совхоз 2-му магазину – 180 т картофеля. Причем из 2-му магазину недопоставят 130 т картофеля.

Далее рассмотрим задачи для закрепления навыка решения транспортных задач.

Задача 2

Найти оптимальное решение задачи:

$b_1 = 100$ $\quad a_1 = 140$

$b_2 = 150$ $\quad a_2 = 170$

$b_3 = 130$ $\quad a_3 = 230$

$b_4 = 200$

$b_5 = 180$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 8 \\ 6 & 3 & 2 \\ 8 & 9 & 3 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Решить на max.

Задача 3
Найти оптимальное решение задачи:

$b_1 = 1500$ $a_1 = 800$
$b_2 = 1000$ $a_2 = 1200$
$b_3 = 2000$ $a_3 = 1400$
$a_4 = 1100$

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 15 & 16 \\ 17 & 15 & 14 & 13 \\ 15 & 14 & 13 & 16 \end{pmatrix}$$

Решить на min.

Задача 4
Найти оптимальное решение задачи:

$b_1 = 6$ $a_1 = 4$
$b_2 = 8$ $a_2 = 6$
$b_3 = 10$ $a_3 = 8$
$a_4 = 8$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 8 & 5 \\ 2 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Решить на min.

Задача 5
Найти оптимальное решение задачи:

$b_1 = 200$ $a_1 = 150$
$b_2 = 180$ $a_2 = 130$
$b_3 = 190$ $a_3 = 150$
$a_4 = 140$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Решить на max.

Задача 6
Найти оптимальное решение задачи:

$b_1 = 500$ $a_1 = 150$
$b_2 = 300$ $a_2 = 350$
$b_3 = 100$ $a_3 = 200$
$a_4 = 100$
$a_5 = 100$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Решить на min.

Задача 7
Найти оптимальное решение задачи:

$b_1 = 150$ $a_1 = 200$
$b_2 = 250$ $a_2 = 100$
$b_3 = 50$ $a_3 = 250$
$b_4 = 100$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 6 & 7 & 6 \\ 8 & 9 & 7 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Решить на min.

Задача 8
Найти оптимальное решение задачи:

$b_1 = 130$ $a_1 = 130$
$b_2 = 55$ $a_2 = 75$
$b_3 = 80$ $a_3 = 65$
$b_4 = 65$ $a_4 = 60$
$b_5 =135$ $a_5 = 75$
$a_6 = 60$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 8 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 9 & 8 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 6 & 11 \\ 3 & 5 & 4 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Решить на min.

Ответы

$$\text{№2 } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 150 \\ 110 & 0 & 0 \\ 30 & 170 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \end{pmatrix} \qquad Z = 4270$$

$$\text{№3 } A = \begin{pmatrix} 300 & 1200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1000 \\ 500 & 0 & 1400 & 100 \end{pmatrix} \qquad Z = 58600$$

$$\text{№4 } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad Z = 78$$

$$\text{№5 } A = \begin{pmatrix} 70 & 130 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 150 & 30 \\ 80 & 0 & 0 & 110 \end{pmatrix} \qquad Z = 4500$$

$$\text{№6 } A = \begin{pmatrix} 50 & 250 & 0 & 100 & 100 \\ 0 & 100 & 200 & 0 & 0 \\ 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Z = 2300$$

$$\text{№7 } A = \begin{pmatrix} 150 & 0 & 0 \\ 50 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 50 \\ 0 & 100 & 0 \end{pmatrix} \qquad Z = 3100$$

$$\text{№8 } A = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 0 & 0 & 20 & 60 \\ 0 & 0 & 55 & 0 & 0 & 0 \\ 55 & 25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 55 & 0 \\ 75 & 0 & 0 & 60 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Z = 1495$$

4. Научиться решению транспортных задач в MS Excel.

Для решения данной задачи в Excel необходимо:

1) под запись целевой функции отвести ячейку A1;

2) под запись ограничений – ячейки столбца B (количество ячеек совпадает с количеством ограничений): B1, B2, B3, B4, B5, B6;

3) под запись искомых переменных отвести ячейки столбцов C, D, E (количество потребителей совпадает с количеством столбцов,

количество поставщиков – с количеством строк).

Примечание: искомые переменные x_{ij} будут находиться в следующих ячейках:

($x_{11} \to$ C1 $x_{12} \to$ D1 $x_{13} \to$ E1

$x_{21} \to$ C2 $x_{22} \to$ D2 $x_{23} \to$ E2

$x_{31} \to$ C3 $x_{31} \to$ D2 $x_{33} \to$ E3).

Порядок выполнения работы:

1. Ввести в ячейку A1 формулу целевой функции (рисунок 3.1):

=15*C1+17*D1+23*E1+

+ 9*C2+19*D2 + 8*E2+

+24*C3+21*D3+32*E3;

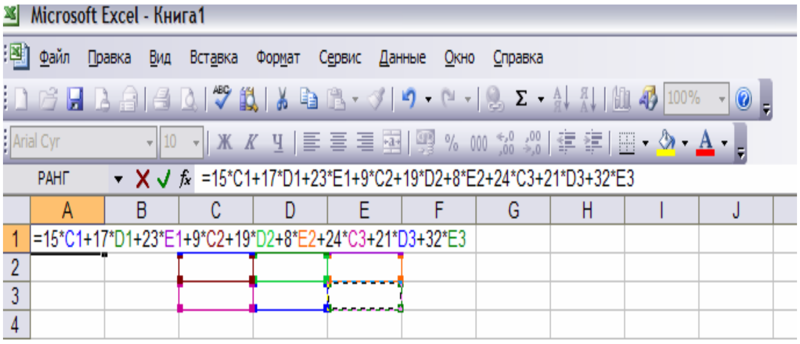


Рисунок 3.1 – Ввод целевой функции в Excel

2. а) Ввести в ячейку B1 левую часть 1-го ограничения: = C1+D1+E1 (рисунок 3.2)

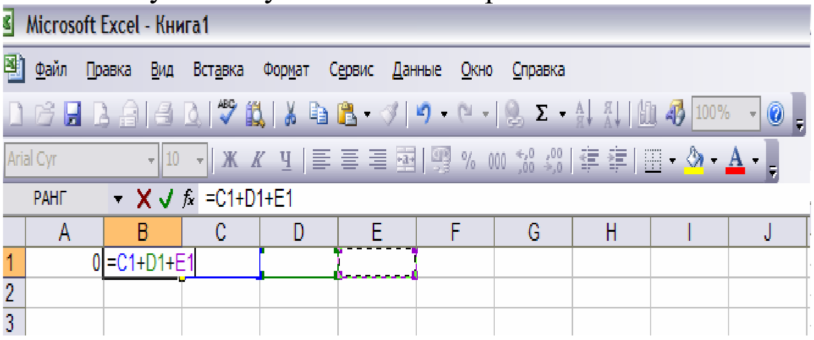


Рисунок 3.2 – Ввод ограничений в Excel

б) Ввести в ячейку B2 левую часть 2-го ограничения:
= C2+D2+E2
в) Ввести в ячейку B3 левую часть 3-го ограничения:
= C3+D3+E3
г) Ввести в ячейку B4 левую часть 4-го ограничения:
= C1+C2+C3
д) Ввести в ячейку B5 левую часть 5-го ограничения:
= D1+D2+D3
е) Ввести в ячейку B6 левую часть 6-го ограничения:
= E1+E2+E3

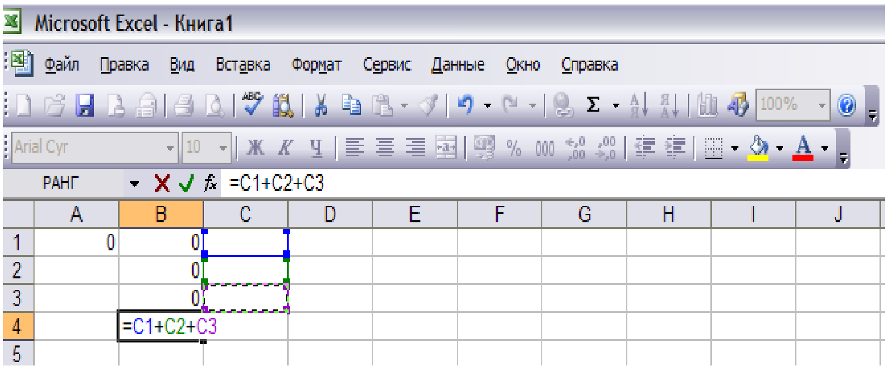


Рисунок 3.3 – Ввод ограничений в Excel

3. На панели инструментов выбрать опцию "Сервис", а в ней вкладку "Поиск решения"

Примечание

Если "Поиск решения" отсутствует, нужно выполнить команду "Сервис"–"Надстройки". В окне диалога "Надстройки" нужно установить флажок напротив строки "Поиск решения".

4. В окне диалога "Поиск решения" в поле ввода "Установить целевую ячейку" нужно ввести ссылку на ячейку A1. Необходимо выбрать способ адресации ячеек в абсолютной системе координат (т.е. указать не A1, а $A$1). Также нужно поступать с другими переменными.

5. В окне диалога "Поиск решения" нужно установить переключатель (рисунок 3.4).

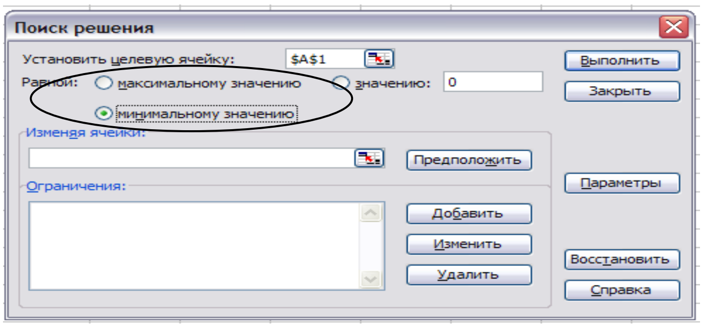


Рисунок 3.4 – Работа в диалоговом окне «Поиск решения»

6. В поле ввода "Изменяя ячейки" нужно указать ссылки на ячейки, содержащие искомые переменные, т.е. диапазон ячеек $C$1 : $E$3 (рисунок 3.5).

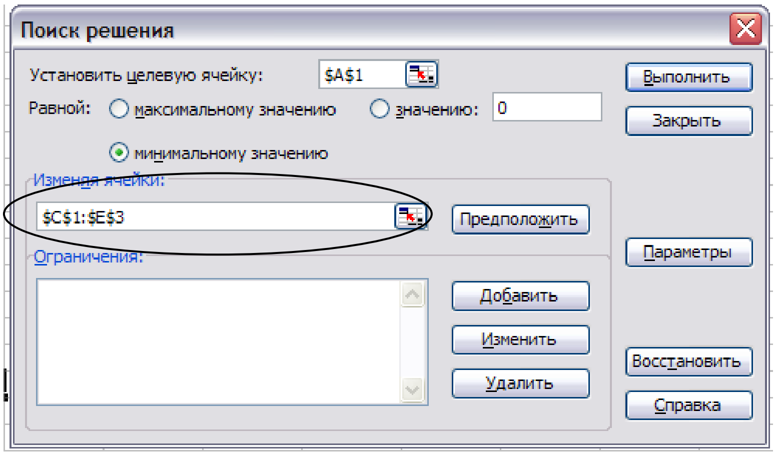


Рисунок 3.5 – Поле ввода ячеек, обозначающих искомые переменные

7. В поле ввода "Ограничения" при нажатии кнопки "Добавить" появляется окно диалога "Добавить ограничения". В поле ввода "Ссылка на ячейку" вводится $B$1. В поле ввода "Ограничение" вводится = и число 900. При помощи кнопки "Добавить" таким же образом вводятся все остальные ограничения (ячейки $B$2:$B$6) (рисунок 3.6).

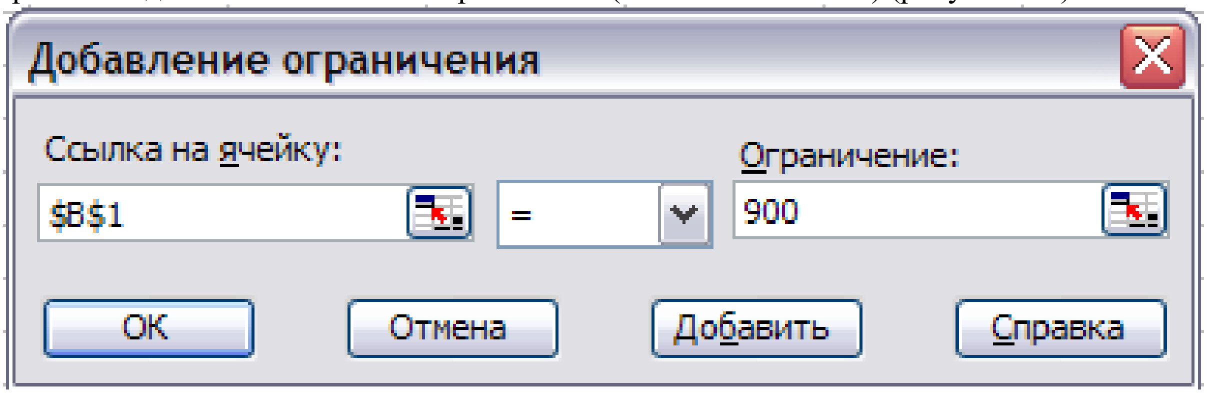


Рисунок 3.6 – Диалоговое окно «Добавление ограничения»

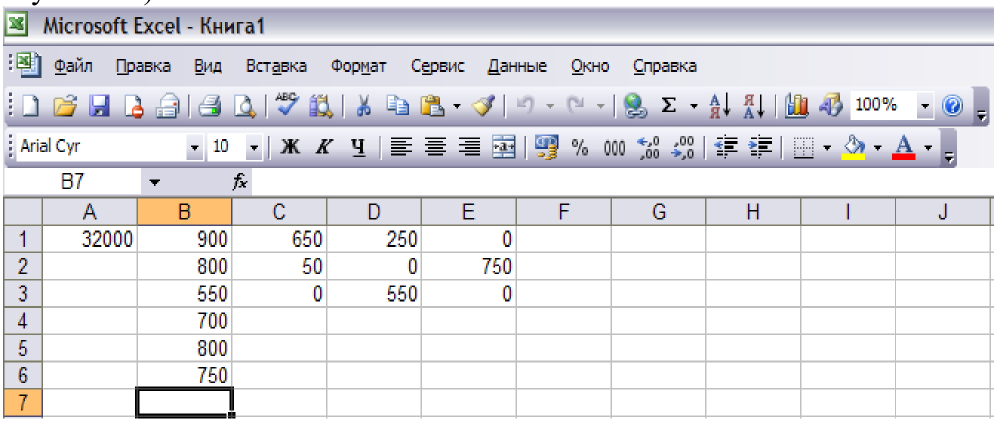
8. Для ввода ограничений на неотрицательность искомых переменных в окне диалога "Добавить ограничения" в поле ввода "Ссылка на ячейку" нужно ввести ссылку на

ячейку $C$1, а в поле ввода "Ограничения" нужно ввести >= и число 0. При помощи кнопки "Добавить" таким же образом вводятся условия неотрицательности оставшихся искомых переменных. Либо выделяется диапазон ячеек $C$1: $E$3 и задается >= и число 0. После ввода последнего ограничения нажмите «ОК».

Примечание

Если в задаче имеется условие целочисленности искомых переменных, то в диалоговом окне «Добавление ограничений» в поле ввода "Ссылка на ячейку" нужно ввести ссылку на ячейку $C$1, а в поле ввода знака ограничения нужно ввести «цел». При помощи кнопки "Добавить" таким же образом вводятся условия целочисленности оставшихся искомых переменных. Либо выделяется диапазон ячеек $C$1: $E$3 и задается «цел». После ввода последнего ограничения нажмите «ОК».

9. После нажатия кнопки "Выполнить" Excel рассчитывает результат и открывает окно диалога "Результаты поиска решения". В этом диалоге в окне "Тип отчета" нужно выбрать "Результаты" и нажать Ok. Перед листом, где записана постановка задачи, будет вставлен лист "Отчет по результатам 1", а на экране будет выдан результат решения задачи (рисунок 3.7).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	32000	900	650	250	0					
2		800	50	0	750					
3		550	0	550	0					
4		700								
5		800								
6		750								
7										

Рисунок 3.7 – Результаты решения задачи

5. Разобрать экономическую интерпретацию результатов решения задач.

Интерпретация результатов задачи

Полученные значения в ячейках, содержащих формулы целевой функции и ограничений, являются результатом расчета целевой функции и соответствующих ограничений.

Результат, полученный в ячейке А1, означает общую сумму объема грузоперевозок в ткм.

Ячейки В1, В2, В3 показывают выполнение условия полного вывоза груза от поставщика. Ячейки В4, В5, В6 показывают выполнение условия полного удовлетворения потребностей потребителя.

Значения ячеек в диапазоне $C$1: $E$3 показывают количество груза (в т), перевезенного от соответствующего поставщика, соответствующему потребителю. Значения данного диапазона превышают 0, следовательно условие неотрицательности искомых переменных выполнено.

Ответ. Оптимальные перевозки грузов предусматривают перевозку от 1-го поставщика 1-му потребителю 650 т, от 1-го поставщика 2-му потребителю – 250 т, от 2-го поставщика 1-му потребителю – 50 т, а 3-му потребителю – 750 т. 3-й поставщик отвезет свой груз только 2-му потребителю в количестве 550 т. Минимальный объем перевозок составит 32000 т км.

5. Контрольная работа

(Варианты заданий представлены в ФОС дисциплины)

2.5 Лабораторная работа № ЛР-12, ЛР-13 (4 часа).
Тема: «Балансовые модели»

2.5.1 Цель работы: Изучить методы решения балансовых моделей

2.5.2 Задачи работы:

1. Разобрать экономический смысл показателей и математических зависимостей, применяемых при составлении схемы баланса.
2. Разобрать решение балансовых моделей в MS Excel.
3. Научиться давать экономическую интерпретацию результатов решения задач.

2.5.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Калькулятор
2. Компьютер
3. Доска

2.5.4 Описание (ход) работы:

1. Разобрать экономический смысл показателей и математических зависимостей, применяемых при составлении схемы баланса.

Задача 1

Закончите составление схемы отчетного баланса по имеющимся данным.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Конечный продукт $У_i$	Валовой продукт X_i
	1	2		
1	20		30	
2	60	10		
Условно чистая продукция Z_j		70		
Валовой продукт X_j	100			

Решение

1) если $i = j$, то $X_j = X_i$ $\Rightarrow$ если $i = j = 1$, то $X_j = X_i = 100$.

2) $X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i$ $\Rightarrow$ $x_{12} = X_1 - У_1 - x_{11}$, $x_{12} = 100 - 30 - 20 = 50$.

3) $X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + Z_j$ $\Rightarrow$ $X_2 = \sum_{i=1}^{2} x_{i2} + Z_2$, $X_2 = 50 + 10 + 70 = 130$,

$\Rightarrow$ $Z_1 = X_1 - \sum_{i=1}^{2} x_{i1}$, $Z_1 = 100 - (20 + 60) = 20$.

4) $X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i$ $\Rightarrow$ $Y_2 = X_2 - \sum_{j=1}^{2} x_{2j}$, $Y_2 = 130 - (60 + 10) = 60$.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Конечный продукт $У_i$	Валовой продукт X_i
	1	2		
1	20	**50**	30	**100**
2	60	10	**60**	**130**
Условно чистая продукция Z_j	**20**	70		
Валовой продукт X_j	100	**130**		

Задача 2

Закончите составление схемы отчетного баланса по имеющимся данным.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Конечный продукт	Валовой продукт
	1	2		
1		176		370
2	222			457
Условно чистая продукция	74	245		
Валовой продукт				

Задача 3

Закончите составление схемы отчетного баланса по имеющимся данным.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Конечный продукт	Валовой продукт
	1	2		
1		100		
2	55			450
Условно чистая продукция	215	185		
Валовой продукт	300			

Задача 4

Закончите составление схемы отчетного баланса по имеющимся данным.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечный продукт	Валовой продукт
	1	2	3		
1	15	33	50		
2	28		27	233	315
3	15	17		121	
Условно чистая продукция	230		76		
Валовой продукт			172		

Задача 5

Закончите составление схемы отчетного баланса по имеющимся данным.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечный продукт	Валовой продукт
	1	2	3		
1				712	
2	103	57			1100
3	200	78	35	675	988
Условно чистая продукция	645	853	700		
Валовой продукт	1015				

2. Разобрать решение балансовых моделей в MS Excel.

Задача 6

Используя данные баланса, определите объемы производства валовой продукции, коэффициенты прямых и полных материальных затрат.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Конечный продукт
	1	2	
1	90	100	60
2	50	110	40

Решение

1) определяем объемы производства валовой продукции (X_i) по формуле:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i, \qquad i = 1, ..., n.$$

$X_1 = 90 + 100 + 60 = 250$; $X_2 = 50 + 110 + 40 = 200$.

2) вычислим коэффициенты прямых затрат (a_{ij})по формуле

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \quad i = 1,..., n, \ j = 1, ..., n.$$

$$a_{11} = 90 : 250 = 0{,}36; \qquad a_{12} = 100 : 200 = 0{,}5;$$
$$a_{21} = 50 : 250 = 0{,}2; \qquad a_{22} = 110 : 200 = 0{,}55.$$

3) Рассчитаем матрицу полных материальных затрат по формуле:

$$B = (E - A)^{-1}$$

а) найдем матрицу $E - A$

$$E - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}36 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}64 & -0{,}5 \\ -0{,}2 & 0{,}45 \end{bmatrix};$$

б) рассчитаем определитель матрицы

Определителем квадратной матрицы 2-го порядка А называется число $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$. Определитель обозначается $\Delta(A)$ или $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

$\Delta(E - A) = 0{,}64 \cdot 0{,}45 - (-0{,}5) \cdot (-0{,}2) = 0{,}288 - 0{,}1 = 0{,}188$.

в) вместо каждого элемента матрицы поставим его *алгебраическое дополнение*: $\begin{bmatrix} 0{,}45 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}64 \end{bmatrix}$.

Алгебраическим дополнением некоторого элемента определителя называется *минор* этого элемента, умноженный на $(-1)^s$, где s – сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент.

Минором некоторого элемента определителя называется определитель, получаемый из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент;

г) полученную матрицу транспонируем

$$\begin{bmatrix} 0{,}45 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}64 \end{bmatrix},$$

д) каждый элемент полученной матрицы делим на определитель исходной матрицы и получаем матрицу обратную данной:

$$B = (E - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 2{,}39 & 2{,}66 \\ 1{,}06 & 3{,}40 \end{bmatrix}.$$

В качестве проверки можно рассчитать матрицу X.

$$X = BY = \begin{bmatrix} 2{,}39 & 2{,}66 \\ 1{,}06 & 3{,}40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 60 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 \\ 200 \end{bmatrix},$$

$X_1 = 2{,}39 \cdot 60 + 2{,}66 \cdot 40 = 249{,}8$;

$X_2 = 1{,}06 \cdot 60 + 3{,}40 \cdot 40 = 199{,}6$.

Выполненные расчеты, возможно провести с использованием специализированных программ или более широко распространенных инструментов, таких как Excel.

Рассмотрим решение этого примера в среде Excel. При этом будут использованы такие функции как МОБР (расчет обратной матрицы) и МУМНОЖ (умножение матриц).

Решение

Заносим исходные данные на рабочий лист Excel (рисунок 1).

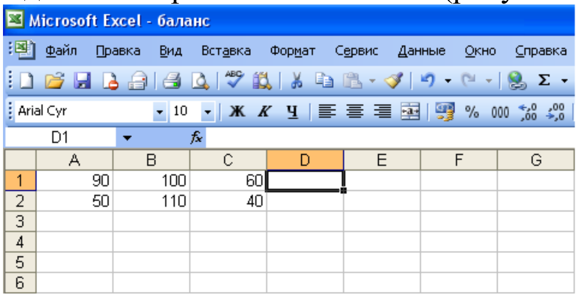


Рисунок 1 – Исходные данные

1) определяем объемы производства валовой продукции (X_i) по формуле:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Для этого в ячейку D1 заносим формулу: =СУММА(A1:C1), в ячейку D2: =СУММА(A2:C2) (рисунок 2).

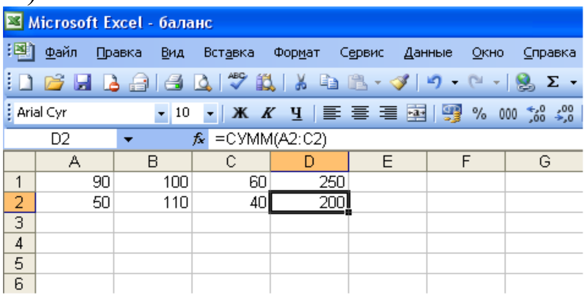


Рисунок 2 – Расчет X_i

2) вычислим коэффициенты прямых затрат (a_{ij}) по формуле

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \quad i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, n.$$

Для этого в ячейки A3 и B3 переносим значения X_i , рассчитанные в столбце D (можно набрать с клавиатуры, можно использовать функцию «Правка → специальная вставка… → вставить значения, транспонировать»,).

В ячейку E1 записываем формулу: =A1/A$3, копируем эту формулу в диапазоне E1:F2. Результатом будет являться матрица коэффициентов прямых A (рисунок 3).

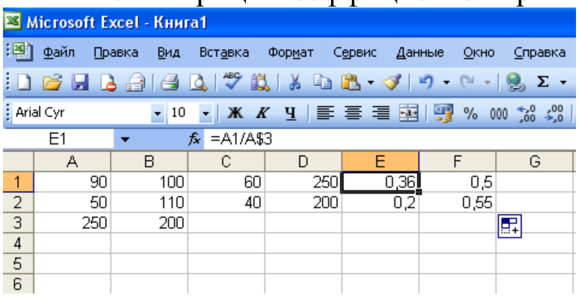


Рисунок 3 – Расчет матрицы коэффициентов прямых затрат

3) Рассчитаем матрицу полных материальных затрат по формуле:

$B = (E - A)^{-1}$

а) найдем матрицу (E – A) (рисунок 4), в диапазоне A6:B7 запишем единичную матрицу и в диапазоне C6:D7 матрицу A. В ячейку E6 запишем формулу: =A1-C1, копируем эту формулу в диапазоне E6:F7, результатом является матрица ($E - A$).

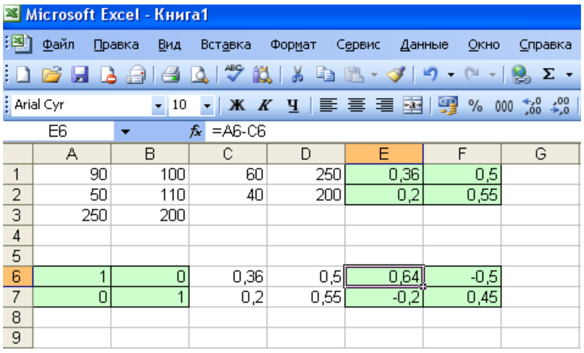


Рисунок 6.4 – Расчет матрицы ($E - A$)

б) найдем матрицу обратную ($E - A$), для этого на листе Excel выделим диапазон G6:H7. Дадим команду «Вставка → Функция…». В открывшемся окне «Мастер функций» необходимо выбрать категорию «Математические», из математических – МОБР (рисунок 5).

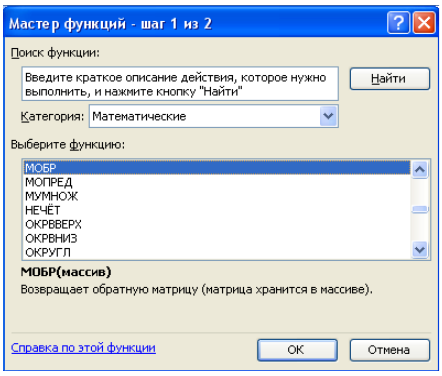


Рисунок 5 – Окно «Мастер функций»

Нажмите ОК. Откроется окно « Аргументы функции». Необходимо задать массив в котором находится матрица ($E - A$). Вводим массив E6:F7 (рисунок 6).

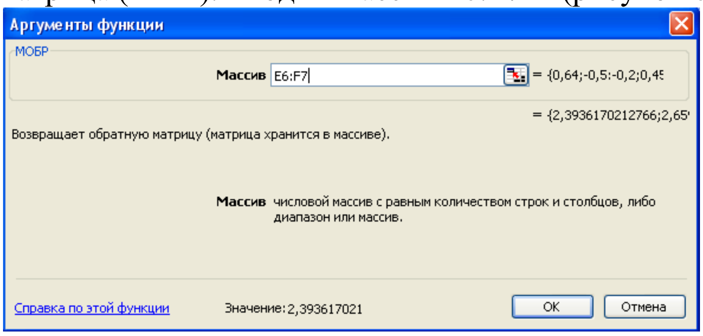


Рисунок 6 – Ввод данных, при расчете обратной матрицы

Для отображения результата в виде матрицы, нажмите Shift+Ctrl+Enter (если нажать ОК, то в ячейке G6 будет одно число). Массив G6:H7 будет содержать искомую матрицу $B=(E - A)^{-1}$ (рисунок 7).

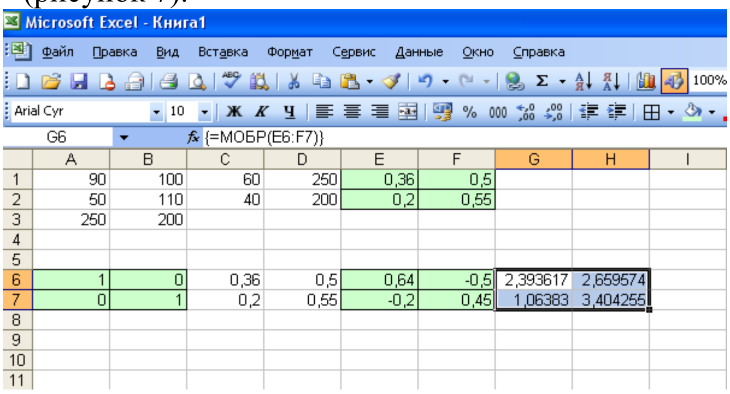


Рисунок 7 – Результат расчета обратной матрицы

В качестве проверки можно рассчитать матрицу X. Матрица X рассчитывается по формуле $X = BY$. Введем в диапазон I6:I7 матрицу Y. Выделим диапазон J6:J7, выберем команду «Вставка → Функция…». В открывшемся окне «Мастер функций» выберем категорию «Математические» и из них МУМНОЖ (рисунок 8).

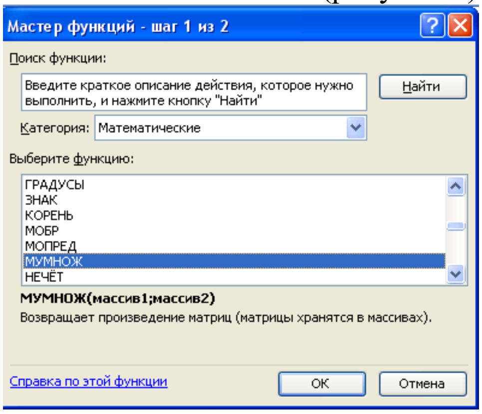


Рисунок 8 – Окно «Мастер функций»

Нажмите ОК. Откроется окно «Аргументы функции». Необходимо указать массивы, в которых находятся перемножаемые матрицы (порядок ввода массивов имеет значение), в нашем примере это массивы G6:H7 и I6:I7 (рисунок 9).

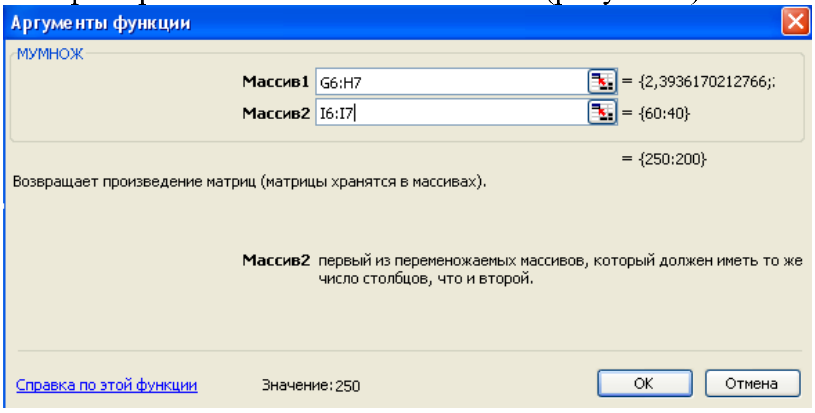


Рисунок 9 – Ввод данных, при перемножении матриц

После окончания ввода данных нажмите Shift+Ctrl+Enter. Массив J6:J7 будет содержать искомую матрицу X (рисунок 10).

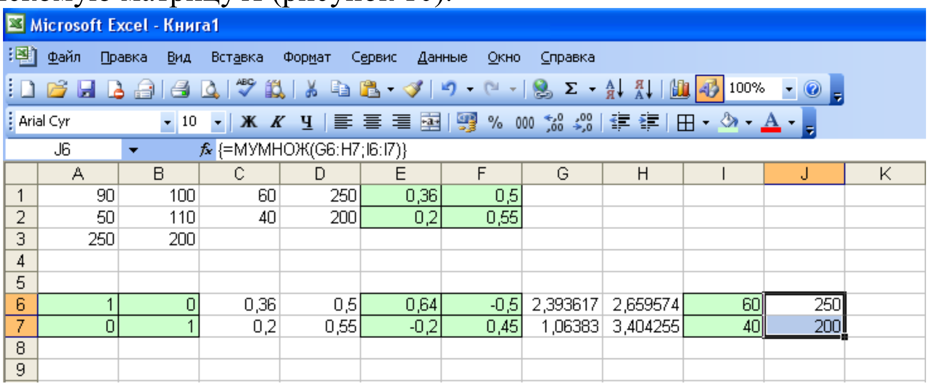


Рисунок 10 – Результат расчета матрицы X

Задача 7

Используя данные баланса, определите объемы производства валовой продукции, коэффициенты прямых и полных материальных затрат.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Конечный продукт
	1	2	
1	10	17	23
2	20	15	35

Задача 8

Используя данные баланса, определите объемы производства валовой продукции, коэффициенты прямых и полных материальных затрат.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Конечный продукт
	1	2	
1	70	45	25
2	25	30	40

Задача 9

Используя коэффициенты прямых материальных затрат и объемы конечного продукта по отраслям рассчитать коэффициенты полных материальных затрат и объемы производства валовой продукции.

$$A=\begin{pmatrix}0{,}22 & 0{,}54\\ 0{,}38 & 0{,}26\end{pmatrix},\ У=\begin{pmatrix}20\\ 17\end{pmatrix}.$$

Задача 10

Используя коэффициенты прямых материальных затрат и объемы конечного продукта по отраслям рассчитать коэффициенты полных материальных затрат и объемы производства валовой продукции.

$$A=\begin{pmatrix}0{,}36 & 0{,}15\\ 0{,}40 & 0{,}25\end{pmatrix},\ У=\begin{pmatrix}70\\ 50\end{pmatrix}.$$

Задача 11

На основании данных, приведенных в нижеследующих таблицах, рассчитать коэффициенты прямых и полных материальных затрат.

а)

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечный продукт
	1	2	3	
1	50	60	80	60
2	25	90	40	105
3	25	60	40	85

б)

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечный продукт
	1	2	3	
1	40	18	25	71
2	16	9	25	36
3	40	45	50	115

в)

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечный продукт
	1	2	3	
1	18	36	25	61
2	45	90	25	20
3	36	36	50	30

Задача 12

Даны коэффициенты прямых материальных затрат и объемы конечной продукции в межотраслевом балансе для трех отраслей.

$$A=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2\\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4\end{pmatrix},\ У=\begin{pmatrix}50\\ 40\\ 30\end{pmatrix}.$$

Требуется рассчитать коэффициенты полных материальных затрат и найти объемы валовой продукции отраслей.

Задача 13

Даны коэффициенты прямых материальных затрат и объемы конечной продукции в межотраслевом балансе для трех отраслей.

$$A=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2\\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3\\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2\end{pmatrix},\quad У=\begin{pmatrix}40\\ 15\\ 10\end{pmatrix}.$$

Требуется рассчитать коэффициенты полных материальных затрат и найти объемы валовой продукции отраслей.

Задача 14

На основе данных задачи 12 восстановите схему межотраслевого материального баланса.

Задача 15

На основе данных задачи 13 восстановите схему межотраслевого материального баланса.

Задача 16

Межотраслевой баланс производства и распределения продукции представлен в таблице.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция	Валовая продукция
	1	2	3		
1	232,6	51,0	291,8	200,0	775,3
2	155,1	255,0	0,0	100,0	510,1
3	232,6	51,0	145,9	300,0	729,6
Условно чистая продукция	155,0	153,1	291,9		
Валовая продукция	775,3	510,1	729,6		

Заданы затраты живого труда (трудовые ресурсы) в трех отраслях: L_1 = 1160, L_2 = 460, L_3 = 875 в некоторых единицах измерения трудовых затрат. Требуется определить коэффициенты прямой и полной трудоемкости.

Решение

1) находим коэффициенты прямой трудоемкости

$$t_j=\frac{L_j}{X_j}\quad\Rightarrow\quad t_1=\frac{1160}{775{,}3}=1{,}5;\qquad t_2=\frac{460}{510{,}1}=0{,}9;\qquad t_3=\frac{875}{729{,}6}=1{,}2.$$

2) рассчитываем матрицу коэффициентов полных материальных затрат

$$B=(E-A)^{-1}\quad\Rightarrow\quad B=\begin{pmatrix}2{,}041 & 0{,}612 & 1{,}020\\ 0{,}816 & 2{,}245 & 0{,}408\\ 0{,}867 & 0{,}510 & 1{,}684\end{pmatrix}.$$

3) находим коэффициенты полной трудоемкости

$$T=tB\Rightarrow\quad T=(1{,}5;0{,}9;1{,}2)\cdot\begin{pmatrix}2{,}041 & 0{,}612 & 1{,}020\\ 0{,}816 & 2{,}245 & 0{,}408\\ 0{,}867 & 0{,}510 & 1{,}684\end{pmatrix}=(4{,}84;3{,}55;3{,}92).$$

Расчет элементов матрицы T :
$$\begin{aligned}&1{,}5\cdot 2{,}041+0{,}9\cdot 0{,}816+1{,}2\cdot 0{,}867=4{,}84;\\ &1{,}5\cdot 0{,}612+0{,}9\cdot 2{,}245+1{,}2\cdot 0{,}510=3{,}55;\\ &1{,}5\cdot 1{,}020+0{,}9\cdot 0{,}408+1{,}2\cdot 1{,}684=3{,}92.\end{aligned}$$

Задача 17

По данным межотраслевого баланса, представленного в таблице и затратам живого труда $L_1 = 80$, $L_2 = 45$, $L_3 = 90$, определить коэффициенты прямой и полной трудоемкости.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция	Валовая продукция
	1	2	3		
1	18	7	5	21	51
2	6	8	2	20	36
3	3	15	14	23	55

Задача 18

По данным межотраслевого баланса, представленного в таблице и затратам живого труда $L_1 = 300$, $L_2 = 290$, $L_3 = 450$, определить коэффициенты прямой и полной трудоемкости.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция	Валовая продукция
	1	2	3		
1	90	56	64	240	450
2	45	85	210	310	650
3	83	98	101	518	800

Задача 19

По данным межотраслевого баланса, представленного в таблице и стоимости основных производственных фондов $Ф_1 = 1250$, $Ф_2 = 1700$, $Ф_3 = 1010$, определить коэффициенты прямой и полной фондоемкости.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция	Валовая продукция
	1	2	3		
1	180	210	115	405	748
2	250	80	170	620	1120
3	112	87	35	276	510

Задача 20

По данным межотраслевого баланса, представленного в таблице и стоимости основных производственных фондов $Ф_1 = 83$, $Ф_2 = 58$, $Ф_3 = 75$, определить коэффициенты прямой и полной фондоемкости.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция	Валовая продукция
	1	2	3		
1	9	5	6	37	57
2	4	7	1	23	35
3	11	8	6	45	70

Задача 21

По данным схемы межотраслевого баланса и затрат труда $L_1 = 1160$, $L_2 = 460$, $L_3 = 875$ составить схему межотраслевого баланса труда.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция	Валовая продукция
	1	2	3		
1	232,6	51,0	291,8	200,0	775,3
2	155,1	255,0	0,0	100,0	510,1
3	232,6	51,0	145,9	300,0	729,6
Условно чистая продукция	155,0	153,1	291,9		
Валовая продукция	775,3	510,1	729,6		

Решение

1) находим коэффициенты прямой трудоемкости

$$t_j = \frac{L_j}{X_j} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{1160}{775{,}3} = 1{,}5; \qquad t_2 = \frac{460}{510{,}1} = 0{,}9; \qquad t_3 = \frac{875}{729{,}6} = 1{,}2.$$

2) Умножая первую, вторую и третью строки первого и второго квадрантов межотраслевого материального баланса, на соответствующие коэффициенты прямой трудоемкости, получаем схему межотраслевого баланса труда (в трудовых измерителях)

$$l_{ij} = x_{ij} t_i$$

$$l_{11} = 232{,}6 \cdot 1{,}5 = 348{,}9, \; l_{12} = 51{,}0 \cdot 1{,}5 = 76{,}5, \; l_{13} = 291{,}8 \cdot 1{,}5 = 437{,}7,$$

$$l_{y1} = 200 \cdot 1{,}5 = 300,$$

$$l_{21} = 155{,}1 \cdot 0{,}9 = 139{,}6, \quad l_{22} = 255{,}0 \cdot 0{,}9 = 229{,}5, \quad l_{23} = 0{,}0 \cdot 0{,}9 = 0,$$

$$l_{y2} = 100 \cdot 0{,}9 = 90,$$

$$l_{31} = 232{,}6 \cdot 1{,}2 = 279{,}1, \quad l_{32} = 51{,}0 \cdot 1{,}2 = 61{,}2, \; l_{33} = 145{,}9 \cdot 1{,}2 = 175{,}1,$$

$$l_{y3} = 300 \cdot 1{,}2 = 360.$$

Межотраслевой баланс затрат труда

Отрасль	Межотраслевые затраты овеществленного труда			Затраты труда на конечную продукцию	Затраты труда в отраслях
	1	2	3		
1	348,9	76,5	437,7	300,0	1163,0
2	139,6	229,5	0,0	90,0	459,1
3	279,1	61,2	175,1	360,0	875,5

Незначительные расхождения между данными таблицы и исходными данными вызваны погрешностями округления при вычислении.

Задача 22

По данным схемы межотраслевого баланса и затрат труда $L_1 = 2950$, $L_2 = 3100$, $L_3 = 1500$ составить схему межотраслевого баланса труда.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция	Валовая продукция
	1	2	3		
1	830	715	390	1980	3915
2	650	817	235	1200	2902
3	350	185	148	737	1420

Задача 23

По данным схемы межотраслевого баланса и затрат труда $L_1 = 100$, $L_2 = 102$, $L_3 = 163$ составить схему межотраслевого баланса труда.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция	Валовая продукция
	1	2	3		
1	15	22	12	31	80
2	17	13	23	15	68
3	35	15	10	37	97

Задача 24

По данным схемы межотраслевого баланса и стоимости основных производственных фондов каждой из отраслей $Ф_1 = 1053$, $Ф_2 = 1200$, $Ф_3 = 3090$, составить схему межотраслевого баланса производственных фондов.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция	Валовая продукция
	1	2	3		
1	250	345	127	682	1404
2	101	485	320	809	1715
3	713	305	513	1044	2575

Задача 25

По данным схемы межотраслевого баланса и стоимости основных производственных фондов каждой из отраслей $Ф_1 = 809$, $Ф_2 = 673$, $Ф_3 = 1005$, составить схему межотраслевого баланса производственных фондов.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция	Валовая продукция
	1	2	3		
1	310	218	415	790	1733
2	98	170	53	315	636
3	436	275	119	710	1540

Задача 26

На основании схемы отчетного баланса и стоимости основных производственных фондов отчетного периода $Ф_1 = 40$, $Ф_2 = 12$, $Ф_3 = 38$ определите, сколько потребуется капитальных вложений для производства конечного продукта в размере $Y_1 = 45$, $Y_2 = 36$, $Y_3 = 15$.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечный продукт
	1	2	3	
1	30	45	18	20
2	15	18	27	23
3	28	8	13	47

Задача 27

На основании схемы отчетного баланса и трудовых затрат отчетного периода $L_1 = 290$, $L_2 = 204$, $L_3 = 56$, определите сколько потребуется привлечь трудовых затрат для производства конечного продукта в размере $Y_1 = 200$, $Y_2 = 250$, $Y_3 = 190$.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечный продукт
	1	2	3	
1	155	230	175	185
2	250	180	137	215
3	50	168	80	150

Ответы

№2 $x_{11} = 74$, $x_{22} = 36$, $У_1 = 120$, $У_2 = 199$.

№3 $x_{11} = 30$, $x_{22} = 165$, $У_1 = 170$, $У_2 = 230$.

№4 $X_1 = 288$, $У_1 = 190$, $x_{22} = 27$, $x_{33} = 19$, $Z_2 = 238$.

№5 $x_{11} = 67$, $x_{12} = 112$, $x_{13} = 118$, $x_{23} = 135$, $У_2 = 805$.

№7 $X_1 = 50$, $X_2 = 70$, $A = \begin{pmatrix} 0{,}200 & 0{,}243 \\ 0{,}400 & 0{,}214 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1{,}479 & 0{,}457 \\ 0{,}752 & 1{,}505 \end{pmatrix}$.

№8 $X_1 = 140$, $X_2 = 95$, $A = \begin{pmatrix} 0{,}500 & 0{,}474 \\ 0{,}172 & 0{,}316 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2{,}626 & 1{,}820 \\ 0{,}660 & 1{,}920 \end{pmatrix}$.

№9 $B=\begin{pmatrix}1{,}989 & 1{,}452\\1{,}022 & 2{,}097\end{pmatrix}$, $X_1\approx 64{,}462$, $X_2\approx 56{,}075$.

№10 $B=\begin{pmatrix}1{,}786 & 0{,}357\\0{,}952 & 1{,}524\end{pmatrix}$, $X_1\approx 142{,}857$, $X_2\approx 142{,}857$.

№11 а) $A=\begin{pmatrix}0{,}200 & 0{,}231 & 0{,}381\\0{,}100 & 0{,}346 & 0{,}190\\0{,}100 & 0{,}231 & 0{,}190\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1{,}464 & 0{,}829 & 0{,}883\\0{,}301 & 1{,}838 & 0{,}573\\0{,}267 & 0{,}626 & 1{,}507\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}0{,}260 & 0{,}222 & 0{,}100\\0{,}104 & 0{,}105 & 0{,}100\\0{,}260 & 0{,}523 & 0{,}200\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1{,}515 & 0{,}525 & 0{,}255\\0{,}249 & 1{,}292 & 0{,}193\\0{,}655 & 1{,}015 & 1{,}459\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}0{,}129 & 0{,}200 & 0{,}164\\0{,}321 & 0{,}500 & 0{,}164\\0{,}257 & 0{,}200 & 0{,}329\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1{,}677 & 0{,}925 & 0{,}636\\1{,}426 & 3{,}004 & 1{,}083\\1{,}067 & 1{,}250 & 2{,}057\end{pmatrix}$.

№12 $B=\begin{pmatrix}1{,}681 & 0{,}619 & 0{,}487\\1{,}239 & 2{,}035 & 0{,}885\\0{,}973 & 0{,}885 & 2{,}124\end{pmatrix}$, $X_1\approx 123{,}451$, $X_2\approx 169{,}912$, $X_3\approx 147{,}788$.

№13 $B=\begin{pmatrix}1{,}833 & 1{,}000 & 8{,}333\\0{,}528 & 1{,}500 & 0{,}694\\0{,}361 & 0{,}500 & 1{,}528\end{pmatrix}$, $X_1\approx 96{,}667$, $X_2\approx 50{,}556$, $X_3\approx 37{,}222$.

№14

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			$У_i$	X_i
	1	2	3		
1	24,690	33,982	14,779	50	123,451
2	49,381	50973	29,558	40	169,912
3	24,690	33,982	59,115	30	147,788
Z_j	24,690	50973	44,336		
X_j	123,451	169,912	147,788		

№15

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			$У_i$	X_i
	1	2	3		
1	29,000	20,222	7,444	40	96,667
2	19,333	5,056	11,167	15	50,556
3	9,667	10,111	7,444	10	37,222
Z_j	38,667	15,167	11,167		
X_j	96,667	50,556	37,222		

№17 $t_1 = 1{,}57$, $t_2 = 1{,}25$, $t_3 = 1{,}64$, $T = (3{,}391;\ 3{,}890;\ 2{,}803)$.
№18 $t_1 = 0{,}67$, $t_2 = 0{,}45$, $t_3 = 0{,}56$, $T = (1{,}166;\ 0{,}805;\ 0{,}989)$.
№19 $f_1 = 1{,}67$, $f_2 = 1{,}52$, $f_3 = 1{,}98$, $F = (4{,}283;\ 2{,}854;\ 4{,}183)$.
№20 $f_1 = 1{,}46$, $f_2 = 1{,}66$, $f_3 = 1{,}07$, $F = (2{,}088;\ 3{,}040;\ 1{,}863)$.
№22

Отрасль	Межотраслевые затраты труда			Затраты труда на конечную продукцию	Затраты труда в отраслях
	1	2	3		
1	622,50	536,25	292,50	1485,00	2936,25
2	695,50	874,19	251,45	1284,00	3105,14
3	371,00	196,10	156,88	781,22	1505,20

№23

Отрасль	Межотраслевые затраты труда			Затраты труда на конечную продукцию	Затраты труда в отраслях
	1	2	3		
1	18,75	27,50	15,00	38,75	100
2	25,50	19,50	34,50	22,50	102
3	58,80	25,20	16,80	62,16	163

№24

Отрасль	Стоимость межотраслевых производственных фондов			Стоимость производственных фондов на конечную продукцию	Стоимость производственных фондов
	1	2	3		
1	187,50	258,75	95,25	511,50	1053,00
2	70,70	339,5	224,00	566,30	1200,50
3	855,60	366,00	615,60	1252,8	3090,00

№25

Отрасль	Стоимость межотраслевых производственных фондов			Стоимость производственных фондов на конечную продукцию	Стоимость производственных фондов
	1	2	3		
1	145,70	102,46	195,05	371,30	815,51
2	103,88	180,20	56,18	333,90	674,16
3	283,40	178,75	77,35	461,50	1001,00

№26 $\Phi_1 = 53{,}560$, $\Phi_2 = 14{,}115$, $\Phi_3 = 28{,}324$.
№27 $L_1 = 334{,}204$, $L_2 = 238{,}706$, $L_3 = 67{,}090$.

3. Научиться давать экономическую интерпретацию результатов решения задач.

Балансовые модели, как статические, так и динамические, широко применяются при экономико-математическом моделировании экономических систем и процессов. В основе создания этих моделей лежит *балансовый метод*, т.е. метод взаимного сопоставления имеющихся материальных, трудовых и финансовых ресурсов и потребностей в них.

Межотраслевой баланс (МОБ, метод «затраты–выпуск») – это экономико-математическая балансовая модель, характеризующая межотраслевые производственные взаимосвязи в экономике страны. Характеризует связи между выпуском продукции в одной отрасли и затратами, расходованием продукции всех участвующих отраслей, необходимых для обеспечения этого выпуска. Межотраслевой баланс составляется в денежной и натуральной формах.

Межотраслевой баланс представлен в виде системы линейных уравнений. Под *балансовой моделью* понимают систему уравнений, которые удовлетворяют требованиям соответствия наличия ресурса и его использования. Можно также указать такие примеры балансового соответствия, как соответствие наличия рабочей силы и количества рабочих мест, платежеспособного спроса населения и предложения товаров и услуг и т.д. При этом соответствие понимается либо как равенство, либо менее жестко – как достаточность ресурсов для покрытия потребности и, следовательно, наличие некоторого резерва.

Важнейшие виды балансовых моделей:

- частные материальные, трудовые и финансовые балансы для народного хозяйства и отдельных отраслей;

- межотраслевые балансы;
- матричные техпромфинпланы предприятий и фирм.

Основу информационного обеспечения балансовых моделей в экономике составляет матрица коэффициентов затрат ресурсов по конкретным направлениям их использования. Например, в модели межотраслевого баланса такую роль играет так называемая *технологическая матрица* – таблица межотраслевого баланса, составленная из коэффициентов (нормативов) прямых затрат на производство единицы продукции в натуральном выражении. По многим причинам исходные данные реальных хозяйственных объектов не могут быть использованы в балансовых моделях непосредственно, поэтому подготовка информации для ввода в модель является весьма серьезной проблемой. Так, при построении модели межотраслевого баланса используется специфическое понятие чистой (или технологической) отрасли, т.е. условной отрасли, объединяющей все производство данного продукта независимо от ведомственной (административной) подчиненности и форм собственности предприятий и фирм. Переход от хозяйственных отраслей к чистым отраслям требует специального преобразования реальных данных хозяйственных объектов, например, агрегирования отраслей, исключения внутриотраслевого оборота и др.

2.6 Лабораторная работа № ЛР-14 №, ЛР-15 (4 часа).
Тема: «Функции полезности и спроса. Задача потребительского выбора. Уравнение Слуцкого»

2.6.1 Цель работы: Изучить общие понятия функции полезности и спроса, научиться решать задачу потребительского выбора и вести расчет ряда показателей

2.6.2 Задачи работы:
1. Разобрать общие понятия функции полезности и задач потребительского выбора.
2. Научиться решению задачи потребительского выбора.
3. Изменение цен. Изменение дохода.
4. Эффекты компенсации. Уравнение Слуцкого.
5. Письменный опрос.

2.6.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:
1. Калькулятор
2. Доска

2.6.4 Описание (ход) работы:

1. Разобрать общие понятия функции полезности и задач потребительского выбора.

(Опора на конспекты лекций)

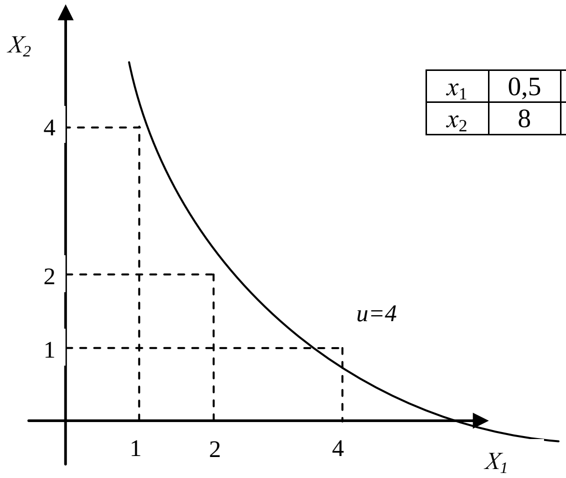
2. Научиться решению задачи потребительского выбора.

Задача 1

Для функции полезности $u = x_1 \cdot x_2$ построить несколько кривых безразличия.

Решение

По определению кривой безразличия $u = const$, тогда из заданного уравнения функции полезности $u = x_1 \cdot x_2$, необходимо выразить одну переменную через другую. Допустим, выразим x_2 через x_1 : $x_2 = \dfrac{u}{x_1}$. Данное уравнение выражает общий вид линии безразличия. Поскольку в задаче не указано, какому уровню должны соответствовать линии безразличия, уровень безразличия выбираем произвольно, например $u = 4$, тогда уравнение линии безразличия имеет вид $x_2 = \dfrac{4}{x_1}$. Выбираем произвольно несколько точек.



x_1	0,5	1	2	4	8
x_2	8	4	2	1	0,5

Рисунок 2 – Построение линии безразличия

Аналогично строятся линии безразличия любого уровня полезности.

Задача 2

Для функции полезности $u = \sqrt{x_1 x_2}$ постройте несколько кривых безразличия.

Задача 3

Для функции полезности $u = x_1^{2/3} x_2^{1/2}$ постройте несколько кривых безразличия.

Задача 4

Для функции полезности $u = x_1^{3/4} x_2^{1/4}$ постройте несколько кривых безразличия.

Задача 5

Для функции полезности $u = x_1^{1/2} x_2^{1/3}$ найти: а) предельные полезности в общем виде; б) предельные полезности в точках (1,1), (1,2), (2,1); в) проверить убывание предельных полезностей.

Решение

а) $M_1 = u_1' = \dfrac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}$, $\quad M_2 = u_2' = \dfrac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}$.

$$M_1 = u_1' = (x_1^{1/2} x_2^{1/3})'_{x_1} = \frac{x_2^{1/3}}{2x_1^{1/2}},\ M_2 = u_2' = (x_1^{1/2} x_2^{1/3})'_{x_2} = \frac{x_1^{1/2}}{3x_2^{2/3}};$$

б) в точке (1,1)

$$M_1 = \frac{x_2^{1/3}}{2x_1^{1/2}} = \frac{1^{1/3}}{2\cdot 1^{1/2}} = \frac{1}{2} = 0{,}5,\ M_2 = \frac{x_1^{1/2}}{3x_2^{2/3}} = \frac{1^{1/2}}{3\cdot 1^{2/3}} = \frac{1}{3} = 0{,}33;$$

в точке (1,2)

$$M_1 = \frac{x_2^{1/3}}{2x_1^{1/2}} = \frac{2^{1/3}}{2\cdot 1^{1/2}} = 0{,}63,\ M_2 = \frac{x_1^{1/2}}{3x_2^{2/3}} = \frac{1^{1/2}}{3\cdot 2^{2/3}} = 0{,}21;$$

в точке (2,1)

$$M_1 = \frac{x_2^{1/3}}{2x_1^{1/2}} = \frac{1^{1/3}}{2\cdot 2^{1/2}} = 0{,}35,\ M_2 = \frac{x_1^{1/2}}{3x_2^{2/3}} = \frac{2^{1/2}}{3\cdot 1^{2/3}} = 0{,}47;$$

в) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^{\ 2}} = u_{11}^{//} < 0, \qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^{\ 2}} = u_{22}^{//} < 0.$

$$u_{11}^{//} = ((x_1^{1/2} x_2^{1/3})_{x_1}^{/})_{x_1}^{/} = \left(\frac{x_2^{1/3}}{2x_1^{1/2}}\right)_{x_1}^{/} = -\frac{x_2^{1/3}}{4x_1^{3/2}},$$

$-\dfrac{x_2^{1/3}}{4x_1^{3/2}} < 0$ - предельная полезность 1-го товара убывает;

$$u_{22}^{//} = ((x_1^{1/2} x_2^{1/3})_{x_2}^{/})_{x_2}^{/} = \left(\frac{x_1^{1/2}}{3x_2^{2/3}}\right)_{x_2}^{/} = -\frac{2x_1^{1/2}}{9x_2^{5/3}},$$

$-\dfrac{2x_1^{1/2}}{9x_2^{5/3}} < 0$ - предельная полезность 2-го товара убывает.

Задача 6

Для функции полезности $u = \sqrt{x_1 x_2}$ найти предельные полезности в общем виде и в точках (1,1), (1,2), (2,1). Проверьте убывание предельных полезностей.

Задача 7

Для функции полезности $u = x_1^{2/3} x_2^{1/2}$ найти предельные полезности в общем виде и в точках (1,1), (1,2), (2,1). Проверьте убывание предельных полезностей.

Задача 8

Для функции полезности $u = x_1^{3/4} x_2^{1/4}$ найти предельные полезности в общем виде и в точках (1,1), (1,2), (2,1). Проверьте убывание предельных полезностей.

Задача 9

Решить задачу потребительского выбора, если функция полезности задана формулой $u = x_1 \cdot x_2$, цены на товары соответственно равны $p_1 = 4$, $p_2 = 6$, доход $I = 40$.

Решение

Формально задача потребительского выбора имеет вид:

$$u(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 \to \max,$$

при условиях $p_1 x_1 + p_2 x_2 \le I$, $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$.

Для решения этой задачи возможно применение метода Лагранжа, в результате получим систему двух уравнений с двумя неизвестными x_1 и x_2

$$\begin{cases} \dfrac{u_1^{/}}{u_2^{/}} = \dfrac{p_1}{p_2}, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = I \end{cases} \qquad u_1^{/} = (x_1 \cdot x_2)_{x_1}^{/} = x_2 \quad u_2^{/} = (x_1 \cdot x_2)_{x_2}^{/} = x_1.$$

Подставляем в систему значения производных.

$$\begin{cases}\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{p_1}{p_2},\\ p_1x_1+p_2x_2=I.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2\cdot p_2=x_1\cdot p_1,\\ p_1x_1+p_2x_2=I.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1p_1+x_1p_1=I,\\ p_2x_2+p_2x_2=I.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{I}{2p_1},\\ x_2=\dfrac{I}{2p_2}.\end{cases}$$

$x_1=\dfrac{I}{2p_1}$ – функция спроса на 1-ый товар,

$x_2=\dfrac{I}{2p_2}$ – функция спроса на 2-ый товар.

Подставив значения цен и дохода, находим значения x_1 и x_2:

$x_1=\dfrac{I}{2p_1}=\dfrac{40}{2\cdot 4}=5$, $x_2=\dfrac{I}{2p_2}=\dfrac{40}{2\cdot 6}=3{,}33$.

Задача 10

Решить задачу потребительского выбора, если функция полезности задана формулой $u=\sqrt{x_1x_2}$, цены на товары соответственно равны $p_1=4$, $p_2=1$, доход $I=40$.

Задача 11

Решить задачу потребительского выбора, если функция полезности задана формулой $u=x_1^{3/4}x_2^{1/4}$, цены на товары соответственно равны $p_1=10$, $p_2=5$, доход $I=60$. Изобразите графически решение задачи.

Задача 12

Решить задачу потребительского выбора, если функция полезности задана формулой $u=x_1^{1/2}x_2^{2/3}$, цены на товары соответственно равны $p_1=10$, $p_2=5$, доход $I=60$. Изобразите графически решение задачи.

Ответы

№2 Уравнение линии безразличия $x_2=\dfrac{u^2}{x_1}$. **№3** Уравнение линии безразличия $x_2=\dfrac{u^2}{x_1^{4/3}}$.

№4 Уравнение линии безразличия $x_2=\dfrac{u^4}{x_1^3}$. **№6** $M_1=\dfrac{x_2^{1/2}}{2x_1^{1/2}}$, $M_2=\dfrac{x_1^{1/2}}{2x_2^{1/2}}$; при (1,1) $M_1=0{,}5$, $M_2=0{,}5$; при (1,2) $M_1=0{,}71$, $M_2=0{,}35$; при (2,1) $M_1=0{,}35$, $M_2=0{,}71$; $u_{11}^{//}=-\dfrac{x_2^{1/2}}{4x_1^{3/2}}$, $u_{22}^{//}=-\dfrac{x_1^{1/2}}{4x_2^{3/2}}$. **№7** $M_1=\dfrac{2x_2^{1/2}}{3x_1^{1/3}}$, $M_2=\dfrac{x_1^{2/3}}{2x_2^{1/2}}$; при (1,1), $M_1=0{,}66$, $M_2=0{,}5$; при (1,2) $M_1=0{,}94$, $M_2=0{,}35$; при (2,1) $M_1=0{,}53$, $M_2=0{,}79$; $u_{11}^{//}=-\dfrac{2x_2^{1/2}}{9x_1^{4/3}}$, $u_{22}^{//}=-\dfrac{x_1^{2/3}}{4x_2^{3/2}}$. **№8** $M_1=\dfrac{3x_2^{1/4}}{4x_1^{1/4}}$, $M_2=\dfrac{x_1^{3/4}}{4x_2^{3/4}}$; при (1,1), $M_1=0{,}75$, $M_2=0{,}25$; при (1,2) $M_1=0{,}89$, $M_2=0{,}15$; при

(2,1) $M_1 = 0{,}69$, $M_2 = 0{,}42$; $u''_{11} = -\dfrac{3x_2^{1/4}}{16x_1^{5/4}}$, $u''_{22} = -\dfrac{3x_1^{3/4}}{16x_2^{7/4}}$. **№10** $x_1 = 5$, $x_2 = 20$. №11 $x_1 = 4{,}5$, $x_2 = 3$; уравнение линии безразличия $x_2 = \dfrac{282{,}6}{x_1^3}$, уравнение бюджетной линии $x_2=12 - 2x_1$.

№12 $x_1 \approx 2{,}57$, $x_2 \approx 6{,}86$; уравнение линии безразличия $x_2 \approx \dfrac{5{,}8}{x_1^{3/4}}$, уравнение бюджетной линии $x_2 = 12\text{-}2x_1$.

3. Разобрать зависимости изменения цен и изменения дохода.
(Опора на конспекты лекций)

4. Научиться вести расчет компенсационного эффекта на основе уравнения Слуцкого.

Задача 1

Функция спроса на товар x_1 задана формулой $\dfrac{I}{2p_1}$. Как изменится спрос на 1-й товар при изменении цены (p_1) и наличии компенсации?

Решение

Данная задача решается при помощи уравнения Слуцкого, т.е. из уравнения $\dfrac{\partial x_i}{\partial p_j} = \left[\dfrac{\partial x_i}{\partial p_j}\right]_{comp} - \left[\dfrac{\partial x_i}{\partial I}\right]x_j$ найдем $\left[\dfrac{\partial x_i}{\partial p_j}\right]_{comp}$.

В нашем случае $i=1$, $j = 1$.

Тогда $\dfrac{\partial x_1}{\partial p_1} = \left[\dfrac{\partial x_1}{\partial p_1}\right]_{comp} - \left[\dfrac{\partial x_1}{\partial I}\right]x_1 \quad \Rightarrow \quad \left[\dfrac{\partial x_1}{\partial p_1}\right]_{comp} = \dfrac{\partial x_1}{\partial p_1} + \left[\dfrac{\partial x_1}{\partial I}\right]x_1$

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \left(\frac{I}{2p_1}\right)'_{p_1} = -\frac{I}{2p_1^2}, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial I} = \left(\frac{I}{2p_1}\right)'_{I} = \frac{1}{2p_1},$$

$$\left[\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right]_{comp} = -\frac{I}{2p_1^2} + \frac{1}{2p_1}x_1 = -\frac{I}{2p_1^2} + \frac{1}{2p_1}\cdot\frac{I}{2p_1} = -\frac{2I}{4p_1^2} + \frac{I}{4p_1^2} = -\frac{I}{4p_1^2}.$$

Задача 2

Функция спроса на товар x_1 задана формулой $\dfrac{2I}{3p_1}$. Как изменится спрос на 1-й товар при изменении цены (p_1) и наличии компенсации?

Задача 3

Функция спроса на 1-ый товар задана формулой $\dfrac{2I}{3p_1}$, на 2-ой товар $\dfrac{I}{3p_2}$, необходимо рассчитать:

а) как изменится спрос на 1-ый товар при изменении цены на 1-ый товар и сохранении прежнего уровня благосостояния;

б) как изменится спрос на 1-ый товар при изменении цены на 2-ой товар и сохранении прежнего уровня благосостояния;

в) как изменится спрос на 2-ой товар при изменении цены на 1-ый товар и сохранении прежнего уровня благосостояния;

г) как изменится спрос на 2-ой товар при изменении цены на 2-ой товар и сохранении прежнего уровня благосостояния.

Задача 4

Рассчитаем эластичность спроса по ценам и эластичность спроса по доходу для функции спроса $x_1 = \dfrac{I}{2p_1}$.

Решение

$$e_{11} = \frac{\partial x_1}{\partial p_1} : \frac{x_1}{p_1} = \left(\frac{I}{2p_1}\right)'_{p_1} : \frac{I}{2p_1 \cdot p_1} = -\frac{I}{2p_1^2} : \frac{I}{2p_1^2} = -1$$

$$e_{12} = \frac{\partial x_1}{\partial p_2} : \frac{x_1}{p_2} = \left(\frac{I}{2p_1}\right)'_{p_2} : \frac{I}{2p_1 \cdot p_2} = 0 : \frac{I}{2p_1 p_2} = 0$$

$$e_{1I} = \frac{\partial x_1}{\partial I} : \frac{x_1}{I} = \left(\frac{I}{2p_1}\right)'_{I} : \frac{I}{2p_1 \cdot I} = \frac{1}{2p_1} : \frac{1}{2p_1} = 1$$

$$\sum_j e_{ij} + e_{iI} = e_{11} + e_{12} + e_{1I} = -1 + 0 + 1 = 0$$

Задача 5

Рассчитаем эластичность спроса по ценам и эластичность спроса по доходу для функции спроса $x_1 = \dfrac{3I}{7p_1}$.

Задача 6

Рассчитаем эластичность спроса по ценам и эластичность спроса по доходу для функции спроса $x_1 = \dfrac{4I}{7p_1}$.

Задача 7

Функция полезности задана формулой $u = x_1^{2/3} x_2^{1/3}$. Рассчитаем эластичность спроса по ценам и эластичность спроса по доходу для функции спроса на первый товар.

Рекомендации к решению

1. Необходимо найти функцию спроса на 1-ый товар. Это можно сделать решив задачу потребительского выбора (см. решение задачи 9).

2. Зная как формируется спрос на первый товар, по используемым ранее формулам рассчитываем эластичности (см решение задачи 16).

Задача 8

Равнозначно ли воздействие на потребительский спрос увеличение дохода в *K* раз и сокращение в *K* раз всех цен? Сделайте выводы для рассматриваемой модели.

а) $u = x_1 \cdot x_2$

б) $u = x_1^{1/2} \cdot x_2^{2/3}$

Ответы

№2 $\left[\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right]_{comp} = -\frac{2I}{9p_1^2}$. **№3** а) $\left[\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right]_{comp} = -\frac{2I}{9p_1^2}$; б) $\left[\frac{\partial x_1}{\partial p_2}\right]_{comp} = \frac{2I}{9p_1p_2}$; в) $\left[\frac{\partial x_2}{\partial p_1}\right]_{comp} = \frac{2I}{9p_1p_2}$; г) $\left[\frac{\partial x_2}{\partial p_2}\right]_{comp} = -\frac{2I}{9p_2^2}$. **№5** $e_{11} = -1$, $e_{12} = 0$, $e_{1I} = 1$. **№6** $e_{11} = -1$, $e_{12} = 0$, $e_{1I} = 1$. **№7** $x_1 = \frac{2I}{3p_1}$, $e_{11} = -1$, $e_{12} = 0$, $e_{1I} = 1$. **№8** а) да; б) да.

5. Письменный опрос

Контроль проводится в письменном виде в форме коллоквиума. В варианте предусмотрено два вопроса, которые группируются в случайном порядке из перечня контрольных вопросов пунктов *6.1.3.1.* и *6.1.4.1.* РПД.

2.7 Лабораторная работа № ЛР-16 (2 часа).
Тема: «Производственные функции»

2.7.1 Цель работы: Изучить общие понятия производственных функций и научиться вести расчет ряда показателей

2.7.2 Задачи работы:

1. Разобрать основные понятия и свойства.
2. Научиться вести расчет эластичности выпуска и решать задачи с производственной функцией Кобба-Дугласа.

2.7.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Калькулятор
2. Доска

2.7.4 Описание (ход) работы:

1. Разобрать основные понятия и свойства.

(Опора на конспекты лекций)

2. Научиться вести расчет эластичности выпуска и решать задачи с производственной функцией Кобба-Дугласа.

Задача 1

Производственная функция имеет вид $y = 5 \cdot x^{\frac{1}{2}}$, где *y* – объем выпускаемой продукции, *x* – величина затрачиваемого ресурса. Определить в общем виде среднюю и предельную производительность ресурса, рассчитать эластичность выпуска. Найти значение средней и предельной производительности ресурса в точках *x* = 1; *x* = 4; *x* = 9; *x* = 16. Рассчитать в этих точках эластичность выпуска.

Решение

$$Ax = \frac{f(x)}{x} = \frac{5*x^{1/2}}{x} = \frac{5}{\sqrt{x}};\ M_x = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = (5*x^{1/2})' = 5*\frac{1}{2}x^{(\frac{1}{2}-1)} = \frac{5}{2\sqrt{x}};$$

$$E_x = \frac{M_x}{A_x} = \frac{5}{2\sqrt{x}} : \frac{5}{\sqrt{x}} = \frac{5 * \sqrt{x}}{2\sqrt{x} * 5} = \frac{1}{2}$$

при $x = 1$ $A_x = \frac{5}{\sqrt{x}} = \frac{5}{\sqrt{1}} = \frac{5}{1} = 5$, $M_x = \frac{5}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2\sqrt{1}} = \frac{5}{2 \cdot 1} = 2{,}5$, $E_x = \frac{1}{2}$;

при $x = 4$ $A_x = \frac{5}{\sqrt{x}} = \frac{5}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2} = 2{,}5$, $M_x = \frac{5}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2\sqrt{4}} = \frac{5}{2 \cdot 2} = 1{,}25$, $E_x = \frac{1}{2}$;

при $x = 16$ $A_x = \frac{5}{\sqrt{x}} = \frac{5}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4} = 1{,}25$, $M_x = \frac{5}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2\sqrt{16}} = \frac{5}{2 \cdot 4} = 0{,}625$, $E_x = \frac{1}{2}$.

Задача 2

Производственная функция имеет вид $y = 3 \cdot x^{\frac{1}{3}}$, где y – объем выпускаемой продукции, x – величина затрачиваемого ресурса. Определить в общем виде среднюю и предельную производительность ресурса, рассчитать эластичность выпуска. Найти значение средней и предельной производительности ресурса в точках $x = 8$; $x = 27$; $x = 64$. Рассчитать в этих точках эластичность выпуска.

Задача 3

Производственная функция имеет вид $y = 0{,}9L + 1{,}8K$, где L – затраты труда, K – затраты капитала (затраты основных производственных фондов). Определить среднюю и предельную производительность ресурсов, рассчитать эластичность выпуска по ресурсам и эластичность производства при фиксированных значениях $L_1 = 3$, $K_1 = 3{,}5$; $L_2 = 4$, $K = 3$; $L_3 = 5$, $K_3 = 2{,}5$. Построить изокванты при фиксированном выпуске $y = 2{,}7$; $y = 6{,}3$; $y = 9$.

Решение

Средняя и предельная производительность ресурсов, эластичность выпуска по ресурсам и эластичность производства при фиксированных значениях рассчитывается по формулам (см. решение задачи 1).

По определению изокванты $y = q = const$ $\Rightarrow$ из уравнения производственной функции $y = 0{,}9L + 1{,}8K$ необходимо выразить одну переменную через другую (т.к. y = const). Допустим, выразим L через K: $L = \frac{y}{0.9} - 2K$.

Данное уравнение выражает общий вид изокванты.

Изокванта уровня $y = 2{,}7$ имеет вид $L = 3 - 2K$. Если в данное уравнение произвольно подставить значения K, то можно построить линию, которая будет являться изоквантой уровня производства $y = 2{,}7$. При уровне производства $y = 6{,}3$, уравнение изокванты имеет вид $L = 7 - 2K$.

При $y = 9$, изокванта – $L = 10 - 2K$.

Задача 4

Производственная функция имеет вид $y = L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{3}{4}}$, где L – затраты труда, K – затраты капитала (затраты основных производственных фондов). Определить среднюю и предельную производительность ресурсов, при фиксированных значениях $L_1 = 2$; $K_1 = 32$; $L_2 = 40{,}5$; $K_2 = 0{,}5$. Рассчитать эластичность выпуска по ресурсам и эластичность производства Построить изокванты при фиксированном выпуске $y = 2$; $y = 3$.

Задача 5

Производственная функция имеет вид $y = L^{\frac{1}{3}} K^{\frac{1}{2}}$, где L – затраты труда, K – затраты капитала (затраты основных производственных фондов). Определить среднюю и предельную производительность ресурсов, при фиксированных значениях $L_1 = 27$; $K_1 = 9$; $L_2 = 64$; $K_2 = 16$. Рассчитать эластичность выпуска по ресурсам и эластичность производства. Построить изокванты при фиксированном выпуске $y = 1$; $y = 2$; $y = 3$.

Задача 6

Производственная функция есть функция Кобба-Дугласа. Чтобы увеличить выпуск продукции на 3%, надо увеличить фонды на 6% или численность рабочих на 9%. Средняя производительность одного работника за месяц 1 млн. руб., а всего работников 1000. Основные фонды оценивались на 10 млрд. руб. Какой вид имеет производственная функция, чему равна средняя фондоотдача.

Решение

Функция Кобба-Дугласа имеет вид $y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$. Требуется найти параметры уравнения a_0, a_1, a_2 и A_K.

Эластичность выпуска по i-му ресурсу (E_i) показывает, на сколько процентов увеличится выпуск, если затраты i-го ресурса увеличатся на один процент при неизменных объемах другого ресурса, $E_K = 3\% : 6\% = \dfrac{1}{2}$.

$E_K = \dfrac{M_K}{A_K}$ $\qquad M_K = \dfrac{\partial y}{\partial K} = (a_0 K^{a_1} L^{a_2})'_K = a_0 L^{a_2} a_1 K^{(a_1-1)}$,

$A_K = \dfrac{y}{K} = \dfrac{a_0 K^{a_1} L^{a_2}}{K} = a_0 K^{(a_1-1)} L^{a_2}$, $\qquad E_K = \dfrac{a_0 a_1 K^{(a_2-1)} L^{a_2}}{a_0 K^{(a_1-1)} L^{a_2}} = a_1$, т.е.

$E_K = a_1 = \dfrac{1}{2}$. $A_K = \dfrac{y}{K} = \dfrac{a_0 K^{a_1} L^{a_2}}{K} = a_0 K^{(a_1-1)} L^{a_2}$

Аналогично определяем $a_2 = \dfrac{1}{3}$.

Средняя производительность одного работника $A_L = \dfrac{Y}{L} = 1\,000\,000 \Rightarrow$ $Y = 1\,000\,000 * L$, т.к $L = 1000$ $Y = 1\,000\,000 * 1000 = 10^9$. По условию задачи $K = 10^{10}$, подставляем значения в формулу $10^9 = a_0 * \left(10^{10}\right)^{\frac{1}{2}} * \left(10^3\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow a_0 = 1000$.

Производственная функция будет иметь вид $Y = 1000 * K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{3}}$, Средняя фондоотдача $A_K = \dfrac{Y}{K} = \dfrac{10^9}{10^{10}} = 0{,}1$.

Задача 7

Производственная функция есть функция Кобба-Дугласа. Чтобы увеличить выпуск продукции на 1%, надо увеличить фонды на 3% или численность рабочих на 3%. Один работник за месяц производит продукции на 10 млн. руб., а всего работников 1000. Основные фонды оценивались на 1 млрд. руб. Какой вид имеет производственная функция, чему равна средняя фондоотдача.

Задача 8

Производственная функция есть функция Кобба-Дугласа. Чтобы увеличить выпуск продукции на 2%, надо увеличить фонды на 5% или численность рабочих на 5%. Один работник за месяц производит продукции на 1 млн. руб., а всего работников 32. Основные фонды оценивались на 10 млрд. руб. Какой вид имеет производственная функция, чему равна средняя фондоотдача.

Задача 9

Производственная функция есть функция Кобба-Дугласа. Чтобы увеличить выпуск продукции на 1%, надо увеличить фонды на 2% или численность рабочих на 4%. Один работник за месяц производит продукции на 10 млн. руб., а всего работников 625. Основные фонды оценивались на 100 млн. руб. Какой вид имеет производственная функция, чему равна средняя фондоотдача.

Задача 10

Производственная функция имеет вид $y = 0{,}9L + 1{,}8K$, рассчитать предельную норму замены труда капиталом (R_{KL}) и предельную норму замены капитала трудом (R_{KL}).

Решение:

$$R_{LK} = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial L}}{\dfrac{\partial y}{\partial K}} = \frac{\left(0{,}9L + 1{,}8K\right)'_L}{\left(0{,}9L + 1{,}8K\right)'_K} = \frac{0{,}9}{1{,}8} = 0{,}5$$

$$R_{KL} = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial K}}{\dfrac{\partial y}{\partial L}} = \frac{\left(0{,}9L + 1{,}8K\right)'_K}{\left(0{,}9L + 1{,}8K\right)'_L} = \frac{1{,}8}{0{,}9} = 2$$

Задача 11

Производственная функция имеет вид $y = L^{\frac{1}{3}} K^{\frac{1}{2}}$, рассчитать предельную норму замены труда капиталом (R_{LK}) и предельную норму замены капитала трудом (R_{KL}).

Задача 12

Производственная функция имеет вид $y = L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{3}{4}}$, рассчитать предельную норму замены труда капиталом (R_{LK}) и предельную норму замены капитала трудом (R_{KL}).

Задача 13

Производственная функция имеет вид $y = L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}$, рассчитать предельную норму замены труда капиталом (R_{LK}) и предельную норму замены капитала трудом (R_{KL}).

Задача 14

Производственная функция имеет вид $y = L^{\frac{1}{3}} K^{\frac{2}{3}}$, рассчитать предельную норму замены труда капиталом (R_{KL}) и предельную норму замены капитала трудом (R_{KL}).

Ответы

№2 $Ax = \dfrac{3}{x^{2/3}}$, $M_x = \dfrac{1}{x^{2/3}}$, $E_x = \dfrac{1}{3}$; при $x = 8$ $A_x = \dfrac{3}{4}$, $M_x = \dfrac{1}{4}$; при $x = 27$ $A_x = \dfrac{1}{3}$, $M_x = \dfrac{1}{9}$; при $x = 64$ $A_x = \dfrac{3}{16}$, $M_x = \dfrac{1}{16}$. **№3** $A_L = 0{,}9 + 1{,}8\dfrac{K}{L}$, $A_K = 1{,}8 + 0{,}9\dfrac{L}{K}$, $M_L = 0{,}9$, $M_K = 1{,}8$; $E_L = \dfrac{L}{L+2K}$, $E_K = \dfrac{2K}{2K+L}$, $E = 1$; при $L = 3$; $K = 3{,}5$; $E_L = \dfrac{7}{15} \approx 0{,}467$; $E_K = 0{,}7$; $E = \dfrac{7}{6} \approx 1{,}167$; при $L = 4$; $K = 3$; $E_L = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$; $E_K = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$; $E = 1{,}15$; при $L = 5$; $K = 2{,}5$; $E_L = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$; $E_L = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$; $E = 1$. **№4** $A_L = \left(\dfrac{K}{L}\right)^{\frac{3}{4}}$, $A_K = \left(\dfrac{L}{K}\right)^{\frac{1}{4}}$, $M_L = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{K}{L}\right)^{\frac{3}{4}}$, $M_K = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{L}{K}\right)^{\frac{1}{4}}$; при $L = 2$; $K = 32$; $A_L = 8$, $A_K = \dfrac{1}{2}$, $M_L = 32$, $M_K = \dfrac{3}{8}$; при $L = 40{,}5$, $K = 0{,}5$, $A_L = \dfrac{1}{27}$, $A_K = 3$, $M_L = \dfrac{1}{108}$, $M_K = \dfrac{9}{4}$; $E_L = \dfrac{1}{4}$; $E_K = \dfrac{3}{4}$; $E = 1$; уравнения изоквант при $y = 2$ $L = \dfrac{16}{K^3}$, при $y = 3$ $L = \dfrac{81}{K^3}$. **№5** $A_L = \dfrac{K^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{2}{3}}}$, $A_K = \dfrac{L^{\frac{1}{3}}}{K^{\frac{1}{2}}}$, $M_L = \dfrac{K^{\frac{1}{2}}}{3L^{\frac{2}{3}}}$, $M_K = \dfrac{L^{\frac{1}{3}}}{2K^{\frac{1}{2}}}$, при $L = 27$, $K = 9$ $A_L = \dfrac{1}{3}$, $A_K = 1$, $M_L = \dfrac{1}{9}$, $M_K = \dfrac{1}{2}$; при $L = 64$, $K = 16$ $A_L = \dfrac{1}{4}$, $A_K = 1$, $M_L = \dfrac{1}{12}$, $M_K = \dfrac{1}{2}$; $E_L = \dfrac{1}{3}$; $E_K = \dfrac{1}{2}$; $E = \dfrac{5}{6}$; уравнения изоквант: при $y = 1$ $L = \dfrac{1}{K^{3/2}}$, при $y = 2$ $L = \dfrac{8}{K^{3/2}}$, при $y = 3$. **№7** $y = 10^6 \cdot L^{\frac{1}{3}} \cdot K^{\frac{1}{3}}$; $A_K = 10$. **№8** $y = 800 \cdot L^{\frac{2}{5}} \cdot K^{\frac{2}{5}}$; $A_K = 0{,}0032$. **№9** $y = 125000 \cdot L^{\frac{1}{4}} \cdot K^{\frac{1}{2}}$; $A_K = 62{,}5$. **№11** $R_{LK} = \dfrac{2K}{3L}$, $R_{KL} = \dfrac{3L}{2K}$. **№12** $R_{LK} = \dfrac{K}{3L}$, $R_{KL} = \dfrac{3L}{K}$. **№13** $R_{LK} = \dfrac{K}{L}$, $R_{KL} = \dfrac{L}{K}$. **№14** $R_{LK} = \dfrac{K}{2L}$, $R_{KL} = \dfrac{2L}{K}$.

2.8 Лабораторная работа № ЛР-17 (2 часа).
Тема: «Функции полезности. Функции спроса. Производственные функции»

2.8.1 Цель работы: закрепить навыки решения задач по теме «Производственные функции. Функции полезности. Функции спроса»

2.8.2 Задачи работы:

1. Контрольная работа.

2.8.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Калькулятор

2.8.4 Описание (ход) работы:

1. Контрольная работа.
(Варианты заданий представлены в ФОС дисциплины)

2.9 Лабораторная работа № ЛР-18 (2 часа).
Тема: «Итоговое обзорное занятие»

2.9.1 Цель работы: обобщить полученные знания, подвести итог изучения дисциплины

2.9.2 Задачи работы:
1. Устный опрос.

2.9.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:
1. Компьютер
2. Доска

2.9.4 Описание (ход) работы:

1. Устный опрос.
Подразумевается заслушивание докладов студентов по выбранным ими темам сопровождаемых (по желанию) слайдами на компьютерах. Подводятся итоги изучения дисциплины.