

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ
ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ**

Методы моделирования и прогнозирования в экономике

Направление подготовки: Экономика

Профиль образовательной программы Экономика предприятий
и организаций

Форма обучения: заочная

Содержание

1.	Конспект лекций	3
1.1	Лекция №1 Модели и экономико-математическое моделирование	3
1.2	Лекция №2 Приемы моделирования	6
1.3	Лекция №3 Функции полезности	10
1.4	Лекция №4 Функции спроса	14
1.5	Лекция №5 Производственные функции	18
2.	Методические указания по выполнению лабораторных работ	26
2.1	Лабораторная работа № 1 (ЛР-1) Приемы моделирования	26
2.2	Лабораторная работа №2 (ЛР-2) Моделирование кормового рациона	33
2.3	Лабораторная работа №3 (ЛР-3) Моделирование производства кормов	37
2.4	Лабораторная работа №4 (ЛР-4) Моделирование производственной структуры аграрного предприятия	39
3.	Методические указания по проведению практических занятий	46
3.1	Практическое занятие 1 (ПЗ-1) Моделирование использования средств механизации	46
3.2	Практическое занятие 2 (ПЗ-2) Моделирование посевов и использования удобрений	59

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.1 Лекция №1 (2 часа)

Тема: « Модели и экономико-математическое моделирование»

1.1.1 Вопросы лекции:

1. Принцип аналогии в моделировании. Общее понятие модели.
2. Экономико-математические модели.
3. Этапы моделирования. Линейная экономико-математическая модель.

1.1.2 Краткое содержание вопросов

1. Принцип аналогии в моделировании. Общее понятие модели.

Термин модель происходит от латинского слова *modulus* – образец, норма, мера. Понятие модели основано на принципе аналогии. Рассматривая свойства различных объектов, явлений, процессов, можно обнаружить, что некоторые из них имеют определенное сходство, подобие. Это сходство проявляется либо во внешних формах, либо в структуре, либо в изменении характера поведения при одинаковых воздействиях.

С точки зрения управления хозяйственными процессами наибольший интерес представляют модели, основанные на сходстве поведения систем, подобии их реакций на изменение воздействия. Модель в наиболее общем определении - это некоторый аналог той системы, которой мы должны управлять, основываясь на знаниях из исследования данного аналога. Оригиналом служит реальный объект исследования – то или иное явление, процесс производства и т.д. Модель отображает те свойства исследуемой системы, которые представляют интерес, прежде всего с точки зрения управленческих воздействий на нее, т.е. модель служит средством познания оригинала.

Для решения практических задач недостаточно подобия. Необходима возможность экспериментировать на модели. Это достигается прежде всего упрощением системы, ограничением исследуемых свойств.

Воспроизведение некоторого ограниченного множества существенных свойств поведения системы называют имитацией.

Различают ряд способов имитации:

аналоговый – замена носителей базовых свойств реальной системы другими физическими носителями;

аналитический – замена материальных носителей базовых характеристик исследуемой системы абстрактными математическими соотношениями;

машинный - построение численных моделей поведения систем на основе алгоритмов;

ситуационный - путем отображения свойств, деловых игр.

В зависимости от способа отображения свойств исследуемой системы через те или иные носители все множество моделей можно подразделить на две большие группы: материальные (физические) и абстрактные. По своей природе физические модели могут быть механическими, электрическими, гидравлическими, и т.д. Физические модели строятся на принципах прямой аналогии, когда оригинал и модель могут отличаться лишь масштабами, или косвенной, когда меняются носители базовых свойств.

Моделирование – есть научный метод исследования систем, рассматриваемых как оригиналы, на их аналогах-моделях. Цель моделирования является углубление знаний для распространения этих знаний на систему-оригинал при управлении ее поведением.

По своей сущности научные понятия "модель" и "моделирование" представляют собой категории познания системных свойств исследуемых объектов.

Имитация поведения исследуемых систем есть наиболее общая форма моделирования.

Принцип аналогии состоит именно в получении выводов, суждений об управляемой системе на основе исследования поведения другой системы, сходной в некотором отношении с оригиналом

Формализованное представление закономерностей поведения реальных экономических систем в виде абстрактных математических аналогов – системы уравнений и неравенств – получило название математического моделирования.

2. Экономико-математические модели.

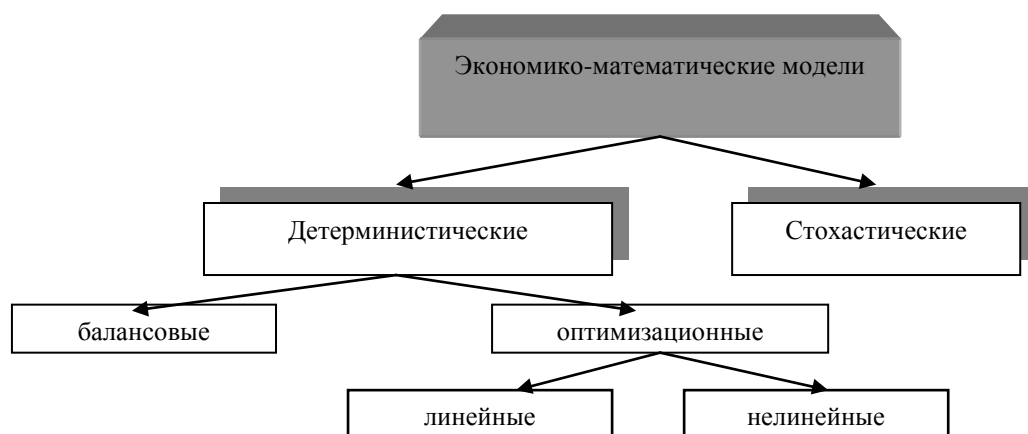
При разработке экономико-математических моделей принимают во внимание наиболее значимые, существенные характеристики управляемых систем, а детали второстепенного характера опускаются.

Модель позволяет имитировать поведение системы в широком диапазоне изменяющихся условий. Отпадает необходимость в дорогостоящих натуральных экспериментах. При исследовании очень сложных систем с большой длительностью протекающих в них процессов моделирование служит единственным средством обоснования управленческих решений на перспективу. Основной эффект моделирования заключается именно в научно обоснованном принятии управленческих решений – в выборе наилучшего (оптимального) варианта развития системы.

Модель всегда проще оригинала. Исследователь стремится воспроизвести прежде всего те свойства системы, которые важны для решения стоящих перед ним задач. Степень достоверности выводов при этом зависит от детализации исходной информации о свойствах системы, глубины проработки и изученности закономерностей поведения этой системы.

Экономико-математическая модель - это концентрированное выражение существенных взаимосвязей и закономерностей процесса функционирования экономической системы в математической форме

В плано-экономической работе используются разнообразные типы моделей, различающиеся целевым назначением, характером задач, степенью охвата явлений, математическим аппаратом и т.д. Существует множество экономико-математических моделей. Возникает необходимость в их классификации.



Все имеющиеся экономико-математические модели делятся на детерминистические и стохастические.

К детерминистическим относятся модели, в которых результат полностью и однозначно определяется набором независимых переменных. Эти модели строятся на основе правил линейной алгебры и представляют собой систему уравнений, совместно решаемых для получения результатов.

Детерминистические модели подразделяются на модели балансовые и модели оптимизационные. Балансовые модели, как правило, характеризуются системой балансовых таблиц, которые обычно имеют форму шахматного баланса и могут быть записаны в виде квадратных матриц. Оптимизационные модели отличаются от балансовых тем, что целью их построения является не столько описание структуры экономической системы, сколько математическое описание условий функционирования.

Оптимизационные модели бывают линейные и нелинейные.

Стохастические модели описывают случайные процессы, подчиняющиеся законам теории вероятности. В этих моделях исходные данные, либо искомым результата выражаются не определенными величинами, а в виде некоторой статической функции распределения этих величин. Изучаемый процесс условно рассматривается как детерминистический, но в модель входят элементы оценки вероятности полученных результатов.

3. Этапы моделирования. Линейная экономико-математическая модель.

Математическое моделирование имеет два существенных преимущества: 1) дает быстрый ответ на поставленный вопрос, на что в реальной обстановке могут потребоваться иногда даже годы; 2) предоставляет возможность широкого экспериментирования, осуществить которое на реальном объекте зачастую просто невозможно.

Содержательная постановка задачи часто оказывается перенасыщенной сведениями, которые совершенно излишни для ее последующей формализации. Чтобы моделирование было успешным, надо учитывать главные свойства моделируемого объекта, пренебрегать его второстепенными свойствами и уметь отделить их друг от друга.

Формализовать постановку задачи, т.е. перевести ее на язык математики, причем с конечным количеством неизвестных и возможных ограничений. При этом необходимо провести различие между теми величинами, значениями которых можно варьировать и выбирать с целью достижения наилучшего результата (*управляемыми переменными*), и величинами, которые фиксированы или определяются внешними факторами. Одни и те же величины, в зависимости от выбранных границ оптимизируемой системы и уровня детализации ее описания, могут оказаться либо управляемыми переменными, либо нет.

Определение тех значений управляемых переменных, которым соответствует наилучшая (*оптимальная*) ситуация, и представляет собой задачу оптимизации.

Модель экономической задачи оптимизации состоит из 3-х частей:

I. Целевая функция (критерий оптимальности). Здесь описывается конечная цель, преследуемая при решении задачи. В качестве такой цели может быть или максимум получения каких-либо показателей или минимум затрат.

II. Система ограничений.

Ограничения бывают основные и дополнительные. Основные, как правило, описывают расход основных производственных ресурсов (это консервативная часть модели). В модели они обязательно присутствуют. Дополнительные – могут иметь различный характер, являются изменяемой частью модели и отражают особенность моделирования задачи.

III. Условие неотрицательности переменных величин. А также граничные условия, которые показывают, в каких пределах могут быть значения искомым переменных в оптимальном решении.

Решение задачи, удовлетворяющее всем ограничениям и граничным условиям, называется *допустимым*. Если математическая модель задачи оптимизации составлена правильно, то задача будет иметь целый ряд допустимых решений. Чтобы из всех возможных решений выбрать только одно, необходимо договориться, по какому признаку мы это будем делать. То есть речь идет о критерии оптимальности, который выбирает

человек, принимающий решение. Таким образом, оптимальное решение – это решение, наилучшее из допустимых с точки зрения выбранного признака.

Однако, следует иметь в виду, что решение не всех оптимизационных проблем сводится к построению математических моделей и соответствующим вычислениям. Это связано с тем, что могут появиться обстоятельства, являющиеся существенными для решения проблемы, но, тем не менее, не поддающиеся математической формализации и, следовательно, не учитываемые в математической модели. Одним из таких обстоятельств является человеческий фактор.

Базовая модель включает следующие элементы: исходные значения ресурсов; переменные величины, значение которых должны определяться в результате моделирования; технико-экономические коэффициенты и нормативы, необходимые для отображения закономерных взаимосвязей ресурсов с выходными показателями; условия (ограничения), описывающие характер и логику взаимосвязей в модели; критерий оптимальности, определяющий качество функционирования исследуемой системы.

Разработка экономико-математической модели осуществляется поэтапно в определенной последовательности.

1. Постановка задачи и обоснование критерия оптимальности.
2. Определение перечня переменных и ограничений.
3. Сбор информации и разработка технико-экономических коэффициентов и констант.
4. Построение модели и ее математическая запись.
5. Кодирование перенесение информации на машинные носители, решение задачи на компьютере.
6. Анализ результатов решения, корректировка модели, повторное решение задачи на компьютере по скорректированной модели.
7. Экономический анализ различных вариантов и выбор проекта плана.

В конкретных условиях в зависимости от характера задачи последовательность этапов моделирования может изменяться.

1.2 Лекция №2 (2 часа)

Тема: «Приемы моделирования»

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Моделирование объемов ресурсов, работ, продукции
2. Моделирование условий с помощью переменных и коэффициентов
3. Моделирование с изменяющимися коэффициентами
4. Приемы сокращения числовой модели

1.2.2. Краткое содержание вопросов

1. Моделирование объемов ресурсов, работ, продукции

Приемы моделирования – это способы отражений в модели условий, зависимостей моделируемой системы.

При решении практических задач возникает множество ситуаций. Многообразие состояний моделируемых систем требует знания широкого арсенала приемов моделирования. Накопление необходимого разнообразия приемов и получение навыков умелого их применения приходят по мере приобретения опыта работы по решению оптимизационных задач. В лекции рассмотрены наиболее распространенные приемы моделирования.

Моделирование объемов ресурсов, работ, продукции.

Запись ограничений с не изменяющимися объемами ресурсов, работ, производимой продукции

Первое и наиболее общее ограничение для любого аграрного производства это условие, что под посевы выращиваемых культур можно отвести пашни не более чем имеется. Это условие записывается так: $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 480$,

где x_1, x_2, x_n - площади посева отдельных сельскохозяйственных культур, 480 – площадь пашни, которую можно занять под посевы.

Пусть, x_2 - площадь озимых, в этом году под озимые можно отвести не более 100 га. В модели это можно отразить как $x_2 \leq 100$.

смысл приема состоит в том, что свободный член неравенства фиксированное число – его величина в процессе решения задачи не изменяется. Этим приемом пользуются при моделировании использования производственных ресурсов, отражении в модели объемов выполняемых работ, количества поставляемой продукции, и во всех других случаях, когда моделируемая величина фиксирована.

Запись ограничений с изменяющимися объемами

На практике встречаются случаи, когда в модели производственных ресурсов, выполняемых работ или количество продукции необходимо отразить не фиксированным числом, а предусмотреть возможность их изменения в определенных пределах. Например: занять под посевы зерновых культур не менее 200 га, но не более 300; произвести не менее 5000 т картофеля, но не более 700 т. Записать эти условия одной строкой, одним линейным неравенством нельзя, здесь можно применять прием двусторонних ограничений. Запись таких условий осуществляется в виде двух ограничений с использованием соотношения типа " $\geq$ " и " $\leq$ ".

В нашем примере можно записать:

$$\text{по посевам зерновых: } \begin{cases} x_1 \geq 200 \\ x_1 \leq 300 \end{cases} \quad \text{по производству картофеля } \begin{cases} x_2 \geq 500 \\ x_2 \leq 700 \end{cases}$$

В тех случаях, когда объем производственных ресурсов, работ или продукции частично не известен и должен быть найден, в процессе решения задачи применяют прием - введение вспомогательной переменной.

Допустим, фермер выращивает пшеницу и картофель на площади x_1, x_2 га соответственно. Ограничение по затратам труда в модели выражено соотношением $30x_1 + 400x_2 \leq 6000$, где $30x_1$ - затраты труда в человеко-часах на возделывание пшеницы; $400x_2$ - на возделывании картофеля, 6000 – запас труда членов хозяйства в человеко-часах. Необходимо в модели отразить привлечение сезонных работников на время уборки картофеля, причем объем привлекаемых трудовых ресурсов находится в процессе решения задачи. Это условие можно записать так: $30x_1 + 400x_2 \leq 6000 + x_3$, где x_3 - вспомогательная переменная, обозначающая объем дополнительно привлекаемых трудовых ресурсов выраженная в человеко-часах. Если преобразовать это выражение получим: $30x_1 + 400x_2 - x_3 \leq 6000$.

2. Моделирование условий с помощью переменных и коэффициентов

Моделирование условий с помощью переменных и коэффициентов.

Запись ограничений с помощью отраженной переменной.

Для моделирования расчетных величин, которые не являются основными переменными, но необходимы для нахождения основных переменных, в модель вводят вспомогательные переменные, которые обычно отражают общее количество и получили название – отраженных переменных.

Пусть в состав стада КРС в хозяйстве входят: x_1 - поголовье коров, x_2 - поголовье нетелей, x_3 - поголовье телок, x_4 - поголовье бычков старше одного года. По условию задачи необходимо выполнить условие, что удельный вес коров в стаде может колебаться в от 40 до 50% общего поголовья стада. Данное требование можно выразить так:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_5 \\ x_1 \geq 0,4x_5 \\ x_1 \leq 0,5x_5 \end{cases},$$

где x_5 - общее поголовье стада крупного рогатого скота. После преобразования

выражения примет вид:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 0,4x_5 \geq 0 \\ x_1 - 0,5x_5 \leq 0 \end{cases}$$

Запись ограничений с помощью коэффициентов пропорциональности

В модели часто приходится отражать соотношения между отдельными переменными и их группами. Это необходимо для моделирования экономических, агротехнических, зоотехнических, биологических и других особенностей производства.

Например в модели необходимо учесть, что в предприятии возможно возделывать сельскохозяйственные культуры по двум схемам севооборотов. Соотношение посевных площадей под этими севооборотами равно 1:2. Это условно может быть сформулировано

в виде равенства: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{2}$, где x_1 - площадь первого севооборота, x_2 - площадь второго

севооборота. Если преобразовать то имеем равенство $2x_1 = x_2$ или $2x_1 - x_2 = 0$.

Этим приемом пользуются при моделировании структуры посевных площадей, структуры стада и рационов кормления животных, баланса кормов, минеральных и органических удобрений.

3. Моделирование с изменяющимися коэффициентами

Запись условий с изменяющимися коэффициентами, числовые значения которых при разработке модели неизвестны.

Обычно в оптимизационных моделях предполагается, что значение технико-экономических коэффициентов всегда известно и их числовые значения на протяжении решения задачи не изменяются. Однако встречаются случаи, когда желательно, чтобы технико-экономические коэффициенты рассчитывались в процессе решения задачи с учетом комплекса факторов, отраженных в модели. Для этого пользуются специальными приемами моделирования, позволяющими отражать условия в модели в такой форме, которая дает возможность рассчитать значения технико-экономических коэффициентов по ходу решения задачи. Расчет ведется методами среднего взвешенного или суммирования и вычитания коэффициентов.

Метод среднего взвешенного коэффициента

Суть приема можно рассмотреть на примере, когда в модель вводится одна и та же отрасль, но с двумя уровнями урожайности и, соответственно, двумя уровнями затрат. В этом случае истинное значение урожайности находится после решения задачи путем определения средневзвешенной величины. Пусть x_1 и x_2 - площадь посева озимой пшеницы при разных уровнях производственных затрат и урожайности, допустим 18 и 25 ц с га соответственно. По каждой из переменных в ограничениях записываются

соответствующие коэффициенты производственных затрат при урожайности 18 и 25 ц с га. При решении задачи возможны три варианта результатов:

$x_1 > 0, x_2 = 0$ - урожайность будет равна 18 ц с га.

$x_1 = 0, x_2 > 0$ - урожайность будет равна 25 ц с га.

$x_1 > 0, x_2 > 0$ - урожайность следует определять как средневзвешенную величину. Допустим в решении $x_1 = 100, x_2 = 250$, урожайность в этом случае будет равна $\frac{18x_1 + 25x_2}{x_1 + x_2} = \frac{18 \cdot 100 + 25 \cdot 250}{100 + 250} = 23$

Метод суммирования коэффициентов.

Моделирование экономических условий с последующим расчетом истинных значений

коэффициентов по методу их суммирования осуществляется с помощью введения

вспомогательной переменной и вспомогательного ограничения.

Известно, что для получения удоя в 20 ц на фуражную корову должно быть затрачено 30 ц кормовых единиц. При скармливании коровам по 38 ц к. ед. удои повысятся до 35 ц. Выход кормов с 1 га кормовой площади составляет 17 ц к. ед. Необходимо рассчитать какой уровень кормления принять оптимальным.

Обозначим через x_1 - поголовье коров, через x_2 - площадь под кормовыми культурами. Тогда кормовой баланс, при минимальном уровне удоя и потреблении кормов можно выразить как: $30x_1 \leq 17x_2$, где $30x_1$ - это потребление кормов, а $17x_2$ - это производство кормов.

Введем дополнительную переменную x_3 , которая выражает потребность в кормах, расходуемых сверх минимального уровня. Тогда баланс кормов будет иметь вид: $30x_1 + x_3 \leq 17x_2$ или $30x_1 - 17x_2 + x_3 \leq 0$. Переменная x_3 должна быть ограничена, поскольку максимальный расход кормов на одну голову составляет 38 ц к.ед. разница соответственно 8 ц к. ед. это можно записать так:

$x_3 \leq (38 - 30)x_1$ или $8x_1 - x_3 \geq 0$. x_3 - величина определяемая, так как может оказаться целесообразным включение в рацион дополнительных кормов. В результате решения этой задачи были получены следующие значения переменных: $x_1 = 20$ - поголовье коров, $x_2 = 40$ га - площадь под кормовыми культурами, $x_3 = 80$ ц. к. ед. - дополнительные корма. Расход кормов на одну голову составит $30 + \frac{80}{20} = 34$ ц к. ед.

До решения задачи было видно, что в модели предусматривается возможное значение этого коэффициента от 30 до 38. По решению задачи расход кормов на одну корову необходимо планировать 34 ц к. ед. Эта величина определилась суммированием минимального уровня 30 ц к. ед. и 4 ц к. ед., что представляет собой превышение сверх минимально-необходимого уровня.

Прием вычитания коэффициентов

Прием, обратный методу их суммирования. Его можно использовать, например, при моделировании случаев, когда капитальные вложения в ту или иную отрасль приводят к снижению норм затрат ресурсов, то есть значение технико-экономических коэффициентов в конечном случае уменьшается. Формально применение этого метода не представляет трудностей. Но фактически он применяется крайне редко из-за недостатка информации. На практике трудно получить достоверные данные о повышении производительности труда, при внедрении того или иного комплекса машин и

механизмов, все методы таких сравнений предусматривают равенство прочих условий, а на практике такого равенства почти не бывает.

4. Приемы сокращения размеров числовой модели.

При реализации моделей с большим количеством переменных и ограничений иногда возникают трудности из-за ограниченных возможностей программы или недостаточной емкости памяти ЭВМ. Поэтому возникает потребность в сокращении размера числовой модели. В этих целях можно использовать прием агрегирования отраслей и видов деятельности или введение ограничений через единичный вектор и другие приемы.

Прием агрегирования заключается в качественном укрупнении показателей, отражающих переменные, что приводит к сокращению количества переменных в модели, а ее размер как бы сжимается. Например, скотоводство можно ввести в модель не в разрезе половозрастных групп КРС, а тремя переменными – основное стадо, молодняк, скот на откорме, или даже одной переменной – поголовье структурных коров. Для этого показателя все поголовье скота переводят в коров, затраты и выход продукции делят на поголовье коров и получают коэффициенты затрат и выхода продукции на структурную голову.

Прием ограничений через единичный вектор состоит в том, что в модель вводится единичный вектор с ограничением, гарантирующим, что в оптимальном плане этот вектор будет присутствовать. Переменные по этому вектору могут означать объем производственного ресурса, выход продукции и т.д. Например, моделируется использование земли в хозяйстве. Пастбища, естественные сенокосы, культурные пастбища в модели можно представить тремя отдельными переменными. но если исходить из предпосылки, что площадь каждого вида угодий известна и должна использоваться полностью, можно избежать этих ограничений, подсчитав по всем видам угодий общие затраты, выход кормов и отразив их через вектор по соответствующим ограничениям модели.

Прием поэтапного решения задачи.

Суть этапного решения состоит в том, что на первом этапе получают информацию, которая является входной на втором этапе и т.д.

Например, при составлении плана-прогноза развития аграрного производства в районе на первом этапе можно оптимизировать параметры типичных хозяйств, на втором – число хозяйств каждого производственного типа, их размещение – объемы производства продукции.

1.3 Лекция №3 (2 часа)

Тема: «Функции полезности»

1.3.1 Вопросы лекции:

1. Определение функции полезности и ее свойства.
2. Решение задачи потребительского выбора.

1.3.2 Краткое содержание вопросов

1. Определение функции полезности и ее свойства.

Потребитель располагает доходом I , который он полностью тратит на приобретение благ. Цены благ считаются заданными. Учитывая структуру цен, доход и собственные предпочтения, потребитель приобретает определенное количество благ и математическая модель такого его поведения называется моделью потребительского

выбора. Рассмотрим модель с двумя видами благ. Такая модель удобна прежде всего возможностью графической интерпретации, сохраняя при этом все принципиальные свойства общей модели.

Рассмотрим потребительские наборы их двух благ. Потребительский набор - это вектор (x_1, x_2) , координата x_1 которого равна количеству единиц первого блага, а координата x_2 равна количеству единиц второго блага. Выбор потребителя характеризуется отношением предпочтения, суть которого состоит в том, что потребитель про каждые два набора может сказать, что, либо один из них более желателен, чем другой, либо потребитель не видит между ними разницы.

На множестве потребительских наборов (x_1, x_2) определена функция $u(x_1, x_2)$, значение которой на потребительском наборе (x_1, x_2) равно потребительской оценке индивидуума для этого набора. Эта функция называется функцией полезности.

Свойства функции полезности:

- 1) Возрастание потребления одного продукта при постоянном потреблении другого продукта ведет к росту потребительской оценки. т.е. если $x_1 + \Delta x_1 > x_1$, то $u(x_1 + \Delta x_1, x_2) > u(x_1, x_2)$.
если $x_2 + \Delta x_2 > x_2$, то $u(x_1, x_2 + \Delta x_2) > u(x_1, x_2)$.

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} = u_1' > 0, \quad \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = u_2' > 0$$

Первые частные производные называются предельными полезностями продуктов: u_1' - предельная полезность первого продукта, u_2' - предельная полезность второго продукта. Для предельных полезностей используется также символика $M_1 u(x_1, x_2)$, $M_2 u(x_1, x_2)$.

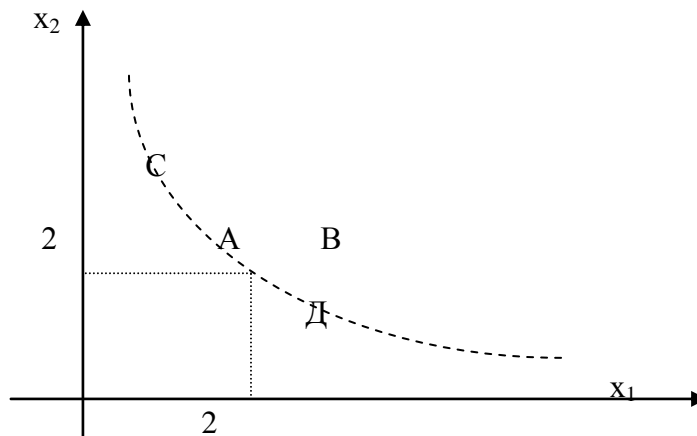
- 2) Предельная полезность каждого продукта уменьшается, если объем его потребления растет (это свойство предельной полезности называется законом убывающей предельной полезности).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = u_{11}'' < 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = u_{22}'' < 0.$$

- 3) Предельная полезность каждого продукта увеличивается, если растет количество другого продукта. В этом случае продукт, количество которого фиксировано, оказывается относительно дефицитным. Поэтому дополнительная его единица приобретает большую ценность и может быть потреблена более эффективно. Данное свойство справедливо не для всех благ.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = u_{12}'' = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} = u_{21}'' > 0$$

Линия, соединяющая потребительские наборы (x_1, x_2) , имеющие один и тот же уровень удовлетворения потребностей индивидуума, называется **линией безразличия**. Линия безразличия есть не что иное, как линия уровня полезности, множество линий безразличия называется картой линий безразличия. Линии безразличия не касаются и не пересекаются. Чем "северо-восточнее" расположена линия безразличия, тем большему уровню удовлетворения потребности она соответствует.



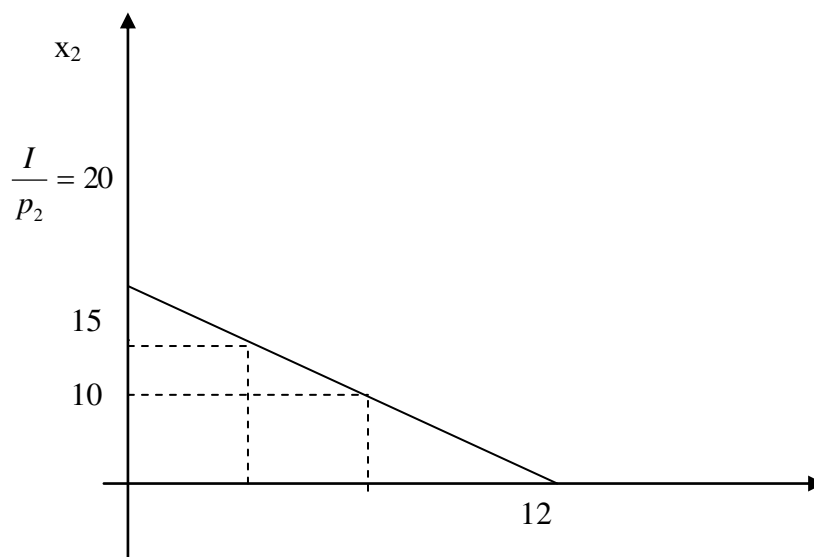
Величина $\frac{dx_2}{dx_1} \approx \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$. Дробь - $\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ принято называть нормой замены первого

продукта вторым на потребительском наборе (x_1, x_2) , а производную - $\frac{dx_2}{dx_1}$ - предельной нормой замены первого продукта вторым.

2. Решение задачи потребительского выбора.

Задача потребительского выбора (задача рационального поведения потребителя на рынке) заключается в выборе такого потребительского набора (x_1, x_2) , который максимизирует его функцию полезности при заданном бюджетном ограничении.

Чтобы понять, как бюджет ограничивает выбор потребителя, рассмотрим ситуацию, когда женщина располагает фиксированным доходом I , который может быть потрачен на два вида товаров – продукты питания и одежду. x_1 – количество продуктов питания, x_2 – количество предметов одежды, p_1 и p_2 – рыночные цены товаров, тогда $p_1 x_1$ – сумма денег, затраченных на питание, а $p_2 x_2$ – на одежду. Все сочетания x_1 и x_2 , при которых сумма затрат меньше или равна доходу будут соответствовать бюджетному ограничению. Если предположить, что расходы равны бюджету, то должно выполняться равенство $p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$, иначе говоря, комбинации продуктов и одежды, которые может приобрести женщина будут лежать на прямой, которая называется бюджетной линией.



$$10 \quad 20 \quad \frac{I}{p_1} = 40 \quad x_1$$

Допустим, доход женщины составляет 400 руб., цена продуктов питания 10 руб. за единицу, а цена одежды 20 руб. за единицу, тогда на эту сумму она могла бы купить 10 единиц продуктов питания и 15 единиц одежды ($10 \cdot 10 + 15 \cdot 20 = 400$) или 20 единиц продуктов питания и 10 единиц одежды ($20 \cdot 10 + 10 \cdot 20 = 400$). Если она решила весь бюджет потратить только на один вид продуктов, то самое большее, что она смогла бы купить - это 40 единиц продуктов питания ($400/10=40$) или 20 единиц одежды.

Бюджетное ограничение означает, что денежные расходы на продукты не могут превышать денежного дохода, т.е. $p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq I$, где p_1 и p_2 - рыночные цены одной единицы первого и второго продуктов, а I - доход индивидуума, который он готов потратить на приобретение первого и второго продуктов.

Формально задача потребительского выбора имеет вид:

$$u(x_1, x_2) \rightarrow \max$$

при условиях $p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq I$,

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

В приведенной постановке задача потребительского выбора является задачей нелинейного программирования.

Набор (x_1, x_2) , максимизирующий функцию полезности, должен обращать бюджетное ограничение в равенство, т.е. $p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$. Графически это означает, что решение задачи потребительского выбора должно лежать на бюджетной прямой. Мы также будем считать, что условие неотрицательности в оптимальной точке будет выполняться автоматически.

Итак, задачу потребительского выбора можно заменить задачей на условный экстремум (экстремум – это минимальное и максимальное значение функции).

$$u(x_1, x_2) \rightarrow \max$$

при условиях $p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$,

для решения этой задачи возможно применение метода Лагранжа, в результате получим систему двух уравнений с двумя неизвестными x_1 и x_2

$$\begin{cases} \frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2}, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = I. \end{cases}$$

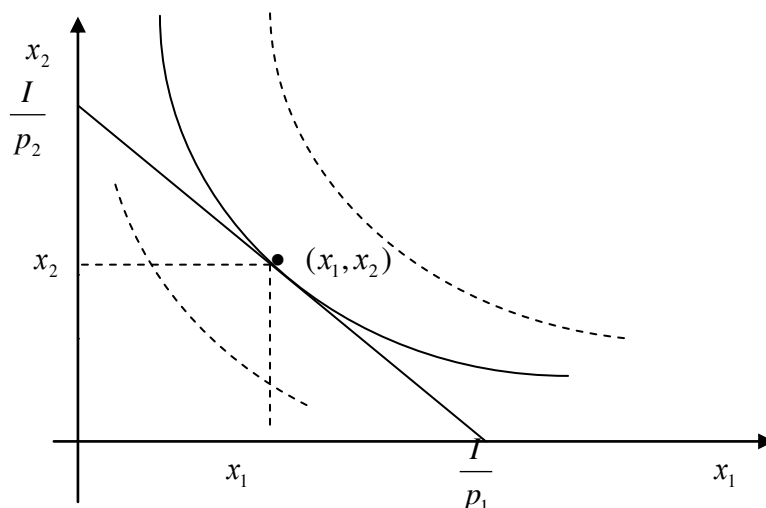
Подставив решение (x_1, x_2) , в левую часть равенства

$$\frac{u_1(x_1, x_2)}{u_2(x_1, x_2)} = \frac{p_1}{p_2},$$

получим, что в точке (x_1, x_2) , локального рыночного равновесия

отношение предельных полезностей равно отношению рыночных цен на эти продукты.

Геометрически решение можно интерпретировать как точку касания линии безразличия функции полезности $u(x_1, x_2)$ с бюджетной прямой $p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$.



Координаты x_1 и x_2 решения задачи потребительского выбора есть функции параметров p_1 , p_2 и I :

$$x_1 = x_1(p_1, p_2, I),$$

$$x_2 = x_2(p_1, p_2, I)$$

полученные функции называются функциями спроса на первый и второй продукт. Важным свойством функций спроса является их однородность относительно цен и дохода, т.е. значение функций спроса инвариантны по отношению к пропорциональным изменениям цен и дохода.

$$x_1(\alpha p_1, \alpha p_2, \alpha I) = x_1(p_1, p_2, I),$$

$$x_2(\alpha p_1, \alpha p_2, \alpha I) = x_2(p_1, p_2, I)$$

для любого числа $\alpha > 0$. Это означает, что если все цены и доход изменятся в одно и тоже число раз, величина спроса на продукт (первый или второй – безразлично) останется неизменной.

1.4 Лекция №4 (2 часа)

Тема: «Функции спроса»

1.4.1 Вопросы лекции:

1. Изменение цен. Изменение дохода.
2. Эффекты компенсации. Уравнение Слуцкого

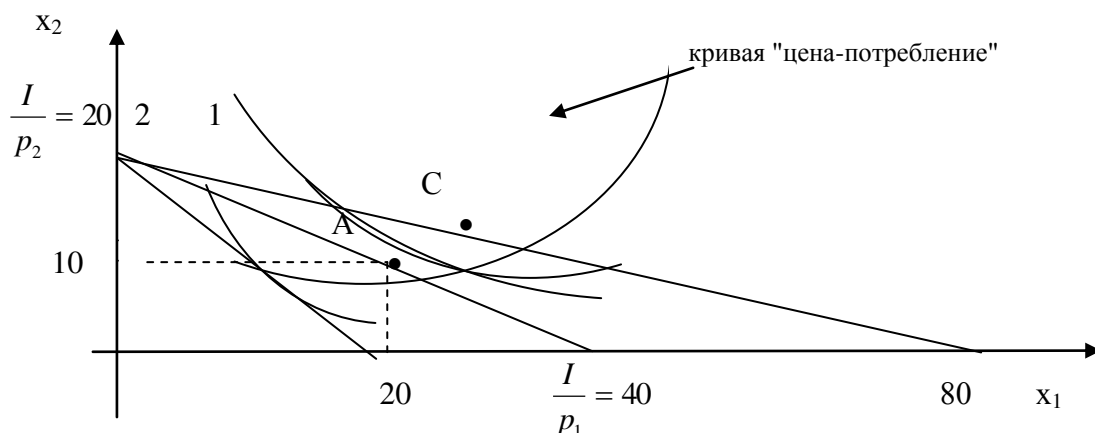
.

1.4.2 Краткое содержание вопросов

1. Изменение цен. Изменение дохода.

Рассмотрим то, как меняется потребление товаров под влиянием изменения цен. Вернемся к задаче рассмотренной в предыдущей лекции про продукты питания и одежду. Напомню, что первоначальная цена продуктов питания (x_1) составляла 10 руб. за единицу, цена одежды (x_2) – 20 руб. за единицу, Доход был равен 400 руб. Решение задачи

потребительского выбора находится в точке А. Здесь потребитель приобретает 20 единиц продуктов питания ($x_1=20$) и 10 единиц одежды ($x_2=10$)



Предположим, что цена на продукты питания возросла и составила 20 руб. Тогда изменился и угол наклона бюджетной линии ($\frac{I}{p_1} = \frac{400}{20} = 20$). Потребитель теперь достигает максимальной полезности в точке В, которая расположена на кривой безразличия 2. так как цена продуктов питания поднялась, покупательная способность (потребитель достигаемая полезность снизилась). Так в точке В покупатель выбирает 10 единиц продуктов питания и 13 единиц одежды. Что произойдет когда цена на продукты питания снизится до 5 рублей? Угол наклона бюджетной линии опять изменится ($\frac{I}{p_1} = \frac{400}{5} = 80$) и потребитель выберет точку С соответствующую более высокому уровню полезности (30 единиц продуктов питания и 15 единиц одежды).

Линия, соединяющая максимально-полезные наборы продуктов при каждом изменении цены называется кривой "цена-потребление".

Итак, при снижении цены на продовольствие достигаемая полезность растет и потребитель покупает больше продуктов питания. Потребление одежды при этом может как расти так и падать.

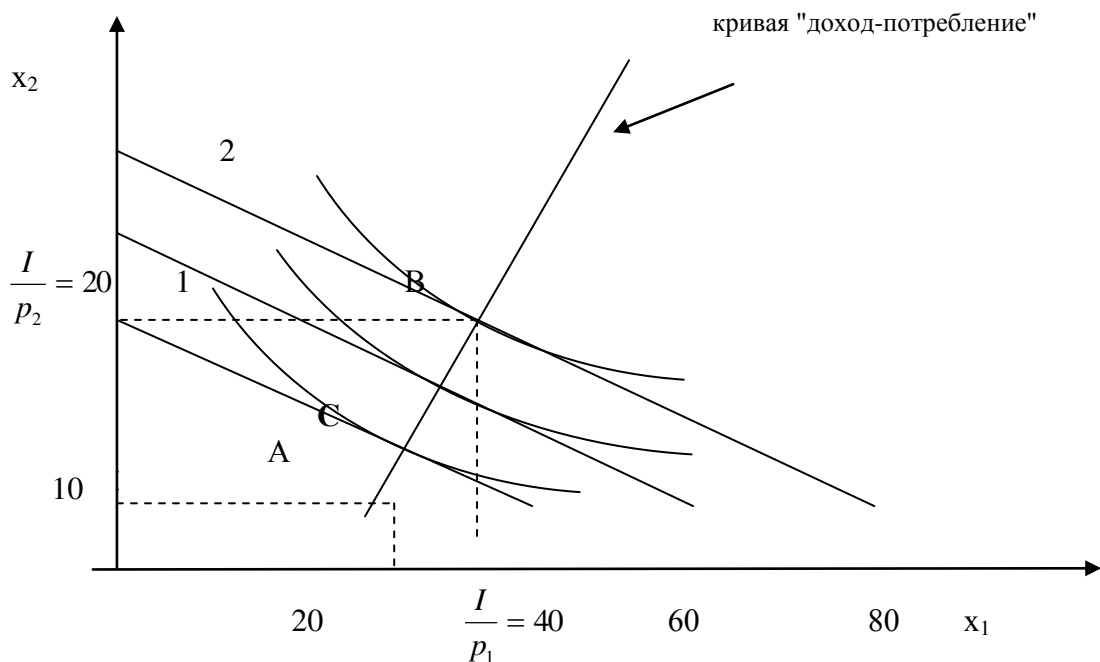
Кривая спроса (функция спроса задается как функция параметров $x_1(p_1, p_2, I)$, $x_2(p_1, p_2, I)$) обладает двумя важными свойствами:

1) Уровень полезности меняется по мере нашего движения вдоль кривой. Чем ниже цена товара, тем выше уровень полезности.

2) В каждой точке на кривой спроса потребитель максимизирует полезность, отвечая условию, что предельная норма замещения одежды продуктами питания равна соотношению цен продуктов питания и одежды $\frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2}$. Другими словами, в каждой

точке кривой спроса можно определить сколько готов заплатить потребитель за дополнительную единицу того или иного продукта.

Мы рассмотрели пример изменения потребительского выбора при изменении цены на один из продуктов. Рассмотрим, как влияет изменение дохода на потребительский выбор.



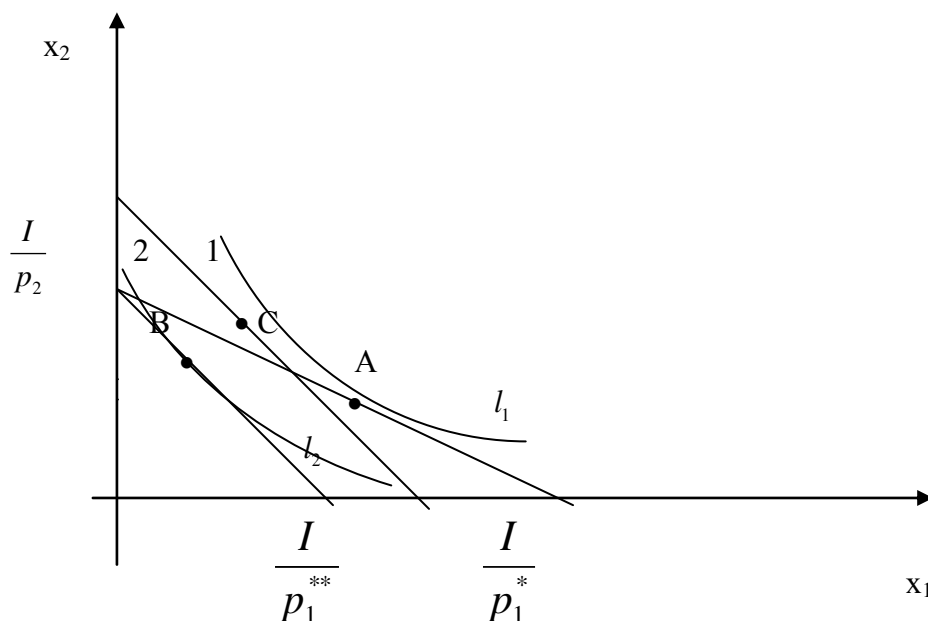
Пусть первоначально доход потребителя равнялся 400 руб., тогда максимизирующий полезность потребительский набор находится в точке А (20 единиц продуктов питания и 10 единиц одежды). Доход потребителя изменился и составил 800 руб. Тогда бюджетная линия сместилась вправо параллельно первоначальной бюджетной линии. Оптимальный выбор потребителя теперь находится в точке В, где он приобретает 30 единиц продуктов питания и 21 единицу одежды. Если доход потребителя составит 600 руб., то его выбор переместится в точку С.

Можно продолжить перебирать варианты изменения дохода и соответственно спроса на товары. Все возможные решения будут находиться на кривой "доход-потребление". Кривая "доход-потребление" движется на "северо-восток", потому что потребление как продовольствия так и одежды увеличивается с ростом дохода.

***Если кривая "доход-потребление" имеет положительный угловой коэффициент (с ростом дохода растет потребление), то такой товар называется нормальным. в ряде случаев спрос падает по мере роста дохода. Такие товары называются "низкокачественными".

2. Эффекты компенсации. Уравнение Слуцкого.

Перекрестные функции спроса от цен характеризуют такие свойства товара, как взаимозаменяемость и взаимодополняемость. Если при росте цены на один товар при снижении его спроса, растет спрос на другой товар, то эти товары взаимозаменяемые. Наоборот, если спрос на другой товар также падает, то они взаимодополняемы. Заметим, что реальная взаимозаменяемость может искажаться общим снижением благосостояния при росте цены на один из товаров. Первый товар может заменять второй в потреблении, но спрос на него может не расти, поскольку просто снизился доход. Для снятия этого искажения используют понятие компенсированного изменения цены, то есть такого, которое сопровождается увеличением дохода потребителя, позволяющим ему поддерживать прежний уровень благосостояния.



Пусть цена первого блага повысилась с P_1^* до P_1^{**} , тогда бюджетная линия l_1 изменит свое положение, и перейдет в l_2 . Точка А линии безразличия 1, касающаяся бюджетного ограничения l_1 , будет заменена новой точкой оптимума В, где новая линия безразличия 2 касается новой бюджетной линии l_2 . Если мы хотим компенсировать потребителю потерю благосостояния, то увеличим его доход так, чтобы новая бюджетная прямая l_3 , (параллельная l_2) коснулась в некоторой точке С прежней линии безразличия 1.

Направленный отрезок АС показывает "эффект замены" при росте цены, то есть изменение структуры спроса при условии поддержания прежнего уровня благосостояния. Направленный отрезок СВ отражает "эффект дохода", то есть изменение потребительского спроса при сохранении соотношения цен благ и изменении уровня дохода. Общий результат роста цены (при отсутствии компенсации) выражается направленным отрезком АВ.

Одним из основных в теории потребительского выбора является уравнение Слуцкого, опубликованное российским математиком Е.Е.Слуцким в 1915 году. Это уравнение позволяет увязать действие эффекта замены и эффекта дохода с результирующим изменением спроса. Уравнение Слуцкого имеет следующий вид:

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \left[\frac{\partial x_i}{\partial p_j} \right]_{comp} - \left[\frac{\partial x_i}{\partial I} \right] x_j,$$

где первое слагаемое в правой части описывает действие эффекта замены, второе – действие эффекта дохода, слева записано результирующее воздействие на спрос, складывающееся из изменения структуры спроса и общего его изменения при изменении уровня реального дохода.

Для ценных (нормальных ?) товаров величина $\left[\frac{\partial x_i}{\partial I} \right] > 0$, т.е. спрос растет при

росте дохода. В этом случае, согласно уравнению Слуцкого, $\frac{\partial x_i}{\partial p_j} < \left[\frac{\partial x_i}{\partial p_j} \right]_{comp}$: если

спрос растет, то он растет больше при наличии компенсации, если он падает, то в меньшей степени.

Уравнение Слуцкого может рассматриваться как при разных, так и при совпадающих i и j .

Рассмотрим теперь более подробно эластичности функции спроса. Эластичность спроса

по цене равна $e_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} \cdot \frac{x_i}{p_j}$, Эластичность спроса по доходу $e_{II} = \frac{\partial x_i}{\partial I} \cdot \frac{x_i}{I}$.

Выполняется равенство $\sum_j e_{ij} + e_{II} = 0$, то есть сумма всех эластичностей спроса по цене и доходу должна равняться 0.

1.5 Лекция №5 (2 часа)

Тема: «Производственные функции»

1.5.1 Вопросы лекции:

1. Основные понятия
2. Формальные свойства производственных функций
3. Предельные и средние значения производственной функции

1.5.2 Краткое содержание вопросов

1. Основные понятия

Производственными функциями называют соотношение между используемыми производственными ресурсами и выпускаемой продукцией.

Производственные функции предназначены для моделирования процесса производства некоторой хозяйственной единицы: отдельной фирмы, отрасли или всей экономики государства в целом.

С помощью производственных функций решают задачи:

оценки отдачи ресурсов в производственном процессе;

прогнозирование экономического роста;

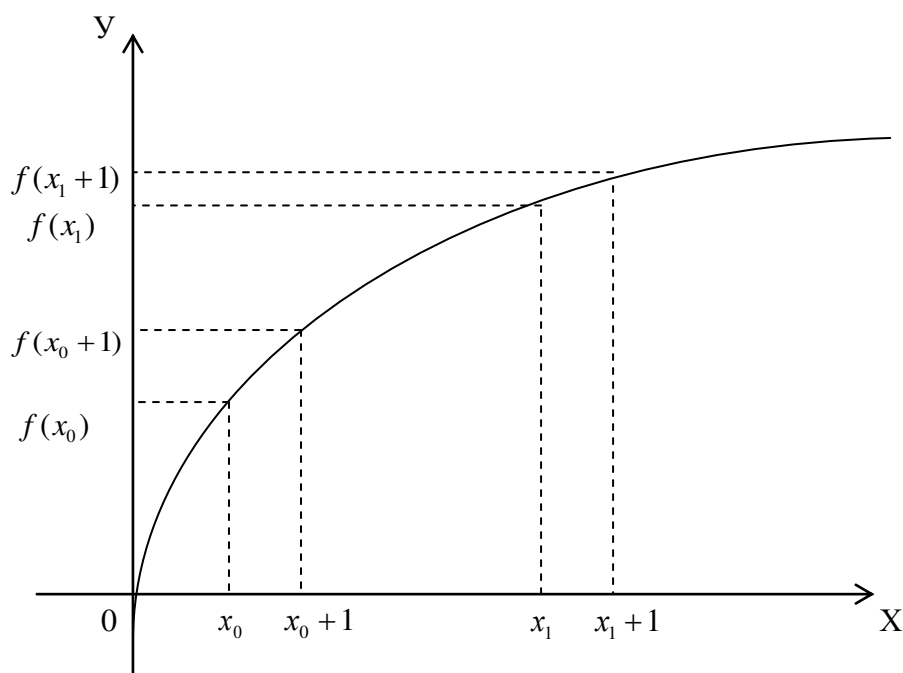
разработки вариантов плана развития производства;

оптимизации функционирования хозяйственной единицы при условии заданного критерия и ограничений по ресурсам.

Производственная функция одной переменной. Возьмем производственную

функцию F в виде $F(x) = a_1 x^{a_2}$, где x - величина затрачиваемого ресурса (например, рабочего времени), $F(x)$ - объем выпускаемой продукции (например, число готовых холодильников). Величины a_1 и a_2 - параметры производственной функции (вектор параметров есть двумерный вектор (a_1, a_2)). Здесь a_1 и a_2 - положительные числа и число $a_2 \leq 1$. Данная функция является функцией одной переменной x . В связи с этим

производственная функция называется одноресурсной или однофакторной. Ее область определения - множество неотрицательных действительных чисел т.е. $x \geq 0$. График производственной функции $y = a_1 x^{a_2}$ выглядит следующим образом.



На графике видно, что с ростом величины затрачиваемого ресурса x объем выпуска y растет, однако при этом каждая дополнительная единица ресурса дает все меньше прирост объема y выпускаемой продукции. Отмеченное обстоятельство (рост объема y и уменьшение прироста объема y с ростом величины x) отражает фундаментальное положение экономической теории (хорошо подтверждаемое практикой), называемое законом убывающей эффективности. Производственная функция $y = a_1 x^{a_2}$ является типичным представителем широкого класса однофакторных производственных функций.

Производственная функция нескольких переменных - это функция, независимые переменные $x_1, \dots, x_n$ которой принимают значения объемов затрачиваемых или используемых ресурсов (число переменных n равно числу ресурсов), а значение функции имеет смысл величин объемов выпуска:

$$y = f(x, a).$$

Подчеркнем еще раз, что в данной формуле величина y - скалярная, x и a - векторные величины т.е. $x = (x_1, \dots, x_n)$ (под вектором понимается упорядоченный набор чисел). В связи с этим производственную функцию называют многоресурсной или многофакторной. По экономическому смыслу $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$, следовательно, областью определения многофакторной производственной функции $f(x) = (x_1, \dots, x_n)$ является множество n -мерных векторов x , все координаты $x_1, \dots, x_n$ которых неотрицательные числа. Для отдельного предприятия,

выпускающего однородный продукт, производственная функция $f(x) = (x_1, \dots, x_n)$ может связывать объем выпуска (в натуральном или стоимостном выражении) с затратами рабочего времени по различным видам трудовой деятельности, различных видов сырья, комплектующих изделий, энергии, основного капитала. Производственные функции такого типа характеризуют действующую технологию предприятия.

При построении производственной функции для региона или страны в целом в качестве величины годового выпуска Y (на макроуровне обозначают большой буквой) чаще берут совокупный продукт региона или страны, исчисляемый обычно в неизменных, а не в текущих ценах, в качестве ресурсов рассматривают основной капитал ($x_1 (= K)$ - объем используемого в течение года основного капитала) живой труд ($x_2 (= L)$ - количество единиц затрачиваемого в течении года живого труда), исчисляемые обычно в стоимостном выражении. Строят двухфакторную производственную функцию $f(x) = (x_1, x_2)$ или $Y = f(K, L)$. От двухфакторных производственных функций переходят к трехфакторным. В качестве третьего фактора иногда вводят объемы используемых природных ресурсов. Кроме того, если производственная функция строится по данным временных рядов, то в качестве особого фактора роста производства может быть включен технический прогресс.

Производственная функция $y = (x_1, x_2)$ называется *статической* если ее параметры и ее характеристика f не зависят от времени t , хотя объемы ресурсов и объемы выпуска могут зависеть от времени t , т.е. могут иметь представление в виде временных рядов: $x_1(0), x_1(1), \dots, x_1(T)$; $x_2(0), x_2(1), \dots, x_2(T)$; $y(0), y(1), \dots, y(T)$;

$y(t) = f(x_1(t), x_2(t))$. Здесь t – номер года, $t=0, 1, \dots, T$. $t=0$ – базовый год временного промежутка, охватывающий годы $1, 2, \dots, T$.

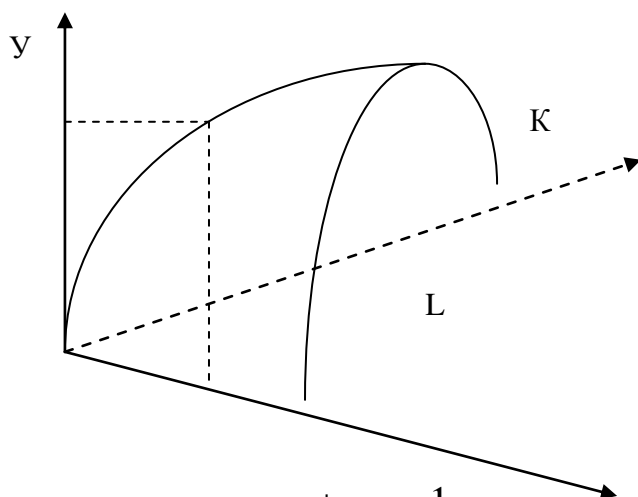
Пример Для моделирования отдельного региона или страны в целом (т.е. для решения задач на макроэкономическом, микроэкономическом уровне) часто используют

производственную функцию вида $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$, где a_0, a_1, a_2 - параметры

производственной функции. Это положительные постоянные числа (часто a_1 и a_2 таковы, что $a_1 + a_2 = 1$). Производственная функция данного вида называется производственной функцией Кобба-Дугласа по имени двух американских экономистов, предложивших ее использовать в 1929 году. Производственная функция Кобба-Дугласа активно применяется для решения разнообразных теоретических и прикладных задач благодаря своей структурной простоте. В данной модели $x_1 = K$ равно объему используемого основного капитала (объему используемых основных фондов – в отечественной терминологии), $x_2 = L$ - затратам живого труда, тогда производственная функция Кобба-Дугласа приобретает вид часто используемый в литературе:

$y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$ или если выполняется равенство $a_1 + a_2 = 1$, то

$Y = b K^\alpha, L^{\alpha-1}$ Графиком двухфакторной производственной функции будет являться поверхность в трехмерном пространстве.



При выполнении равенства $a_1 + a_2 = 1$ модель Кобба-Дугласа можно записать несколько в ином виде:

$$\frac{Y}{L} = \frac{a_0 K^{a_1} L^{a_2}}{L} = \frac{a_0 K^{a_1}}{L^{1-a_2}} = \frac{a_0 K^{a_1}}{L^{a_1}} = a_0 \left[\frac{K}{L} \right]^{a_1}, \text{ т.е. } \frac{Y}{L} = a_0 \left[\frac{K}{L} \right]^{a_1}$$

Дроби $\frac{Y}{L} = z$ и $\frac{K}{L} = k$ называются соответственно производительностью труда и

капиталовооруженностью труда. Используя новые символы, получим $z = a_0 k^{a_1}$, т.е. из двухфакторной производственной функции Кобба-Дугласа получим формально однофакторную производственную функцию Кобба-Дугласа. В связи с тем, что $0 < a_1 < 1$, из последней формулы следует, что производительность труда Z растет медленнее его капиталовооруженности. Однако этот вывод справедлив для случая статической производственной функции Кобба-Дугласа в рамках существующей технологии и

ресурсов. Отметим, что дробь $\frac{Y}{K}$ называется производительностью капитала или

капиталоотдачей, обратные дроби $\frac{K}{Y}$ и $\frac{L}{Y}$ называются соответственно капиталоемкостью и трудоемкостью выпуска.

Производственная функция называется динамической, если:

- 1) время T фигурирует в качестве самостоятельной переменной величины (как бы самостоятельного фактора производства), влияющего на объем выпускаемой продукции;
- 2) параметры производственной функции и ее характеристика F зависят от времени T .

При построении производственной функции НТП может быть учтен с помощью введения множителя НТП e^{pt} , где параметр $p(p>0)$ характеризует темп прироста под влиянием НТП:

$$y(t) = e^{pt} f(x_1(t), x_2(t)) \text{ где } (t = 0, 1, \dots, T).$$

Эта простейший пример динамической производственной функции; она включает нейтральный, то есть не материализованный в одном из факторов, технический прогресс. В более сложных случаях технический прогресс может воздействовать непосредственно на производительность труда или капитала (капиталоотдачу): $Y(t) = f(A(t) \cdot L(t), K(t))$ или $Y(t) = f(A(t) \cdot K(t), L(t))$. Он называется, соответственно, трудосберегающим или капиталосберегающим НТП

Пример На основании данных по экономике СССР (динамики национального дохода, численности занятых в материальном производстве и объеме основных фондов), опубликованных за 1960-1985 гг., макроэкономической производственной функции Кобба-Дугласа без учета НТП и с учетом НТП. Без учета НТП функция имеет вид $Y = 1,022 K^{0,5382} L^{0,4618}$, с учетом НТП $Y = 1,038 e^{0,0294t} K^{0,9749} L^{0,2399}$.

Выделение существенных видов ресурсов (факторов производства) и выбор аналитической формы функции называется спецификацией.

Преобразование реальных и экспертных данных в модельную информацию, т.е. расчет численных значений параметров на базе статистических данных с помощью регрессионного и корреляционного анализа, называют параметризацией.

Проверка истинности (адекватности) функции называют ее верификацией.

2. Формальные свойства производственных функций

Производственная функция $f(x_1, x_2)$ имеющая область определения $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ имеет следующие свойства.

1. Производство невозможно при отсутствии хотя бы одного ресурса, т.е.

$$f(0, x_2) = f(x_1, 0) = 0$$

2. При увеличении затрат производственных ресурсов выпуск продукции растет. $x(1) > x(0) \Rightarrow f(x(1)) > f(x(0))$, если функция дифференцируема, то можно записать

$$x > 0 \Rightarrow \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} > 0 \quad (i = 1, 2), \quad x = (x_1, x_2) \text{ или первая частная производная}$$

$$\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \right] \text{ положительна.}$$

3. По мере увеличения количества одного ресурса при постоянных количествах других предельная эффективность использования этого ресурса не возрастает. Математически это требование для дважды дифференцируемых производственных

функций выглядит так. $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \leq 0$. В нашем примере рассмотренном ранее это

означает, что рост вооруженности средствами производства приводит к росту выпуска продукции, но темп роста выпуска продукции все время падает (закон убывающей эффективности).

4. Производственная функция характеризуется определенной отдачей от расширения масштабов производства. Отдача от расширения масштабов производства характеризует производственную функцию с точки зрения изменения выпуска продукции при пропорциональном изменении затрат ресурсов, которое математически выражается в умножении всех компонент вектора x на положительный скаляр t . Принято говорить, что скалярная функция является однородной функцией степени δ (дельта), если для любого вектора x и любого скаляра t она удовлетворяет условию $f(tx) = t^\delta f(x)$

Математически четвертое предположение состоит в требовании однородности производственной функции. Если $\delta > 1$, то говорят, что производственная функция характеризуется возрастающей отдачей от расширения масштабов производства; если $\delta = 1$ - постоянной отдачей (наиболее часто встречающийся случай), а при $\delta < 1$ - убывающей отдачей.

Пример

Возьмем производственную функцию $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$, $a_1 + a_2 = 1$. Для нее выполняются все четыре свойства.

1. при $x_1 = 0$ $y = a_0 0^{a_1} x_2^{a_2} = 0$ при $x_2 = 0$ $y = a_0 x_1^{a_1} 0^{a_2} = 0$

2. $a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} < a_0 (x_1 + 1)^{a_1} x_2^{a_2}$ или

$$a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} < a_0 x_1^{a_1} (x_2 + 1)^{a_2}$$

Первая частная производная положительна.

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = a_0 x_2^{a_2} a_1 x_1^{a_1-1} \geq 0$$

3. $y_{x_1}^{\partial} = a_0 x_2^{a_2} a_1 (a_1 - 1) x_1^{a_1-2} \leq 0$ Вторая частная производная не положительна т.к.
 $a_0 \geq 0, 0 \leq a_1 \leq 1$

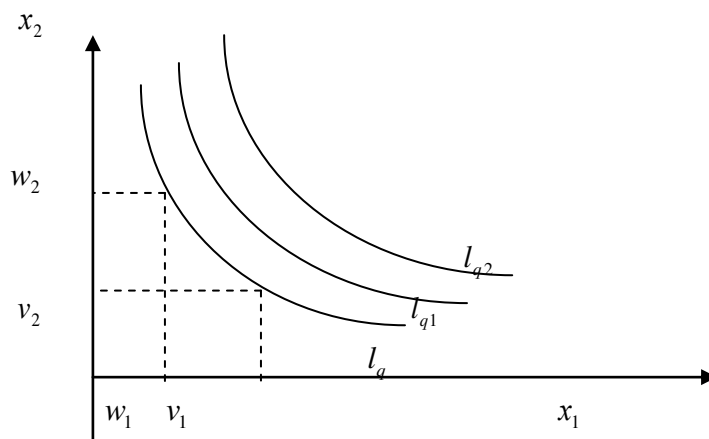
4. $a_0 (tx_1)^{a_1} (tx_2)^{a_2} = t^{a_1+a_2} (a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2})$.

Если рассмотреть линейную производственную функцию $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$ для нее свойства 1 и 4 не выполняются.

3. Предельные и средние значения производственной функции

Возможность взаимного замещения ресурсов означает, что одно и то же количество продукта y может быть произведено при различных сочетаниях ресурсов. Совокупность таких сочетаний ресурсов, при которых может быть произведено определенное количество продукции q , называется изоквантой.

Различные наборы (v_1, v_2) и (w_1, w_2) затрачиваемых ресурсов, принадлежащие одной и той же изокванте l_q (т.е. $q = f(v_1, v_2) = f(w_1, w_2)$), дают один и тот же объем выпуска q .



Свойства изоквант:

1. Изокванты не пересекаются друг с другом.
2. Изокванта l_q разбивает пространства ресурсов на два множества, в одном из которых $q_0 < q$, в другом $q_1 > q$, причем граница между этими множествами проходит по изокванте l_q .

3. Большему выпуску продукции соответствует изокванта, более удаленная от начала координат.
4. Изокванты не имеют общих точек с осями координат.

Средней производительностью i -го ресурса (фактора производства) или средним выпуском по i -му ресурсу (фактору производства) называют отношение значения функции к величине i -го ресурса. Символика:

$$A_i = \frac{f(x)}{x_i}, \text{ где } (i = 1, 2) \text{ или } f(x) = f(x_1, x_2)$$

В случае двухфакторной производственной функции Кобба-Дугласа для средних производительностей $\frac{Y}{K}$ и $\frac{Y}{L}$ основного капитала и труда были использованы соответственно термины капиталотдача и производительность труда.

Предельной (маржинальной) производительностью i -го ресурса (фактора производства) или предельным выпуском по i -му ресурсу (фактору производства) называют первую частную производную функции $f(x) = f(x_1, x_2)$. Символика

$$M_i = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \text{ Предельная производительность показывает, на сколько единиц}$$

увеличивается объем выпуска y , если объем затрат x_i i -го ресурса вырастает на одну единицу при неизменных объемах другого затрачиваемого ресурса.

Найдем средние (A_1, A_2) и предельные (M_1, M_2) значения для производственной функции Кобба-Дугласа.

$$1. A_1 = \frac{f(x)}{x_1} = a_0 x_1^{a_1-1} x_2^{a_2}; A_2 = \frac{f(x)}{x_2} = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2-1}$$

$$2. M_1 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = a_0 a_1 x_1^{a_1-1} x_2^{a_2} = a_1 A_1; M_2 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = a_2 A_2;$$

$$\frac{M_1}{A_1} = a_1 \leq 1 \Rightarrow M_1 \leq A_1 \quad \text{и} \quad \frac{M_2}{A_2} = a_2 \leq 1 \Rightarrow M_2 \leq A_2 \quad \text{т.е. предельная}$$

производительность i -го ресурса не больше средней производительности этого ресурса. Это положение обычно выполняется и для других производственных функций.

Отношение предельной производительности M_i i -го ресурса к его средней производительности A_i называется эластичностью выпуска по i -му ресурсу (по фактору производства). Символика:

$$E_i = \frac{M_i}{A_i} = \frac{x_i}{f(x)} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2).$$

Сумма $E_1 + E_2 = E_x$ называется эластичностью производства.

E_i показывает, на сколько процентов увеличится выпуск, если затраты i -го ресурса увеличатся на один процент при неизменных объемах другого ресурса..

Рассчитаем для производственной функции Кобба-Дугласа эластичность каждого ресурса и эластичность выпуска (E_1, E_2, E_x).

Имеем : $E_1 = a_1$, $E_2 = a_2$, $E_x = E_1 + E_2 = a_1 + a_2$

Предельной нормой замены (замещения) i -го ресурса (фактора производства) j -м называется выражение:

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i} \quad (i, j = 1, 2)$$

при постоянной y . i – номер заменяемого ресурса, j – номер замещающего ресурса или

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}}$$

Для двухфакторной производственной функции справедливо равенство:

$$R_{12} = \frac{E_1}{E_2} \frac{x_2}{x_1}, \text{ т.е. предельная норма замены первого ресурса вторым равна}$$

отношению эластичностей выпуска по первому и второму ресурсам, умноженному на отношение объема второго ресурса к объему первого ресурса.

Для производственной функции Кобба-Дугласа $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$ запишем предельную норму замены первого ресурса вторым R_{12} и предельную норму замены второго ресурса первым R_{21} .

$$R_{12} = \left[\frac{\partial f(x)}{x_1} \right] / \left[\frac{\partial f(x)}{x_2} \right] = \frac{a_0 x_2^{a_2} a_1 x_1^{a_1-1}}{a_0 x_1^{a_1} a_2 x_2^{a_2-1}} = \frac{a_1}{a_2} \frac{x_2}{x_1}, \quad R_{21} = \frac{a_2}{a_1} \frac{x_1}{x_2}.$$

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

2.1 Лабораторная работа № 1 (2 часа)

Тема: «Приемы моделирования»

2.1.1 Цель работы: Изучить приемы моделирования особенности их применения

2.1.2 Задачи работы:

1. Построение модели и ее математическая запись. Символика обозначений
2. Использование табличного редактора Excel для решения задач линейного программирования

2.1.3 Описание (ход) работы:

Упражнения

Задача 1

Для производства продукции типа P_1 и P_2 предприятие использует два вида сырья: C_1 и C_2 . Данные об условиях производства приведены в таблице.

Сырье	Расход сырья на единицу продукции, кг/ед.		Количество сырья, кг
	P_1	P_2	
C_1	1	3	300
C_2	1	1	150
Прибыль на единицу продукции, тыс. руб.	2	3	-

Составить план производства по критерию максимум прибыли.

Решение

1. Состав переменных

- x_1 – количество (единиц) продукции P_1 ;
 x_2 – количество (единиц) продукции P_2 .

2. Числовая модель

I. Целевая функция. Критерий оптимальности получение максимума прибыли от производственной деятельности. Следовательно,

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

II. Основные ограничения

В таблице представлены данные по расходу основных производственных ресурсов (сырье C_1 и C_2) на производство продукции P_1 и P_2 . Используя данные таблицы, составим ограничения:

$$1x_1 + 3x_2 \leq 300$$

$$1x_1 + 1x_2 \leq 150$$

III. Условие неотрицательности переменных

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

3. Общий вид экономико-математической модели

$$\text{I. } Z = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max$$

$$\text{II. } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$$

$$\text{III. } x_j \geq 0, (j=1, 2)$$

4. Структурная форма экономико-математической модели

$$\text{I. } Z = \sum_{j=1}^2 c_j x_j \rightarrow \max$$

$$\text{II. } \sum_{j=1}^2 a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i=1,2$$

$$\text{III. } x_j \geq 0, \quad j=1,2$$

5. Решение задачи с использованием табличного редактора MS Excel

Чтобы решить задачу, используя табличный редактор MS Excel необходимо:

- Открыть табличный редактор (Пуск → Программы → MS Excel);
- Запишем числовую модель задачи на рабочий лист (рисунок 1.1). Для этого необходимо выбрать ячейки в которых будут находиться переменные. Допустим $x_1 \rightarrow C1$ $x_2 \rightarrow C2$ (выбор ячеек произволен).

В ячейке A1 запишем целевую функцию $Z = 2x_1 + 3x_2$: A1: =2*C1+3*C2

Примечание: запись формул всегда начинается со знака «=».

В ячейку B1 запишем левую часть 1-го ограничения ($1x_1 + 3x_2$)

B1: =C1+3*C2

В ячейку B2 запишем левую часть 2-го ограничения ($1x_1 + 1x_2$)

B2:=C1+C2

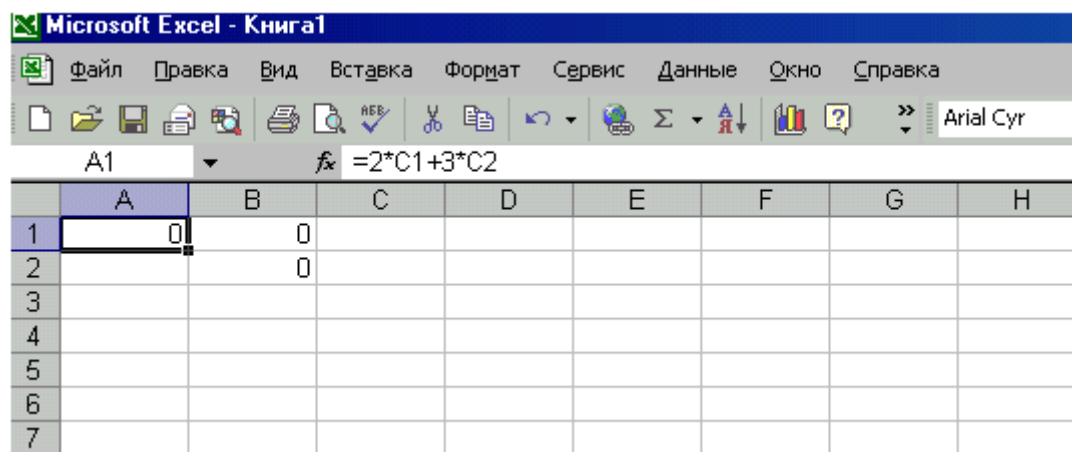


Рисунок 1.1 – Запись числовой модели на рабочем листе MS Excel

- После как числовая модель записана, необходимо установить курсор в ячейку A1 (в ней расположена целевая функция). Выбираем вкладку «Сервис» → «Поиск решения...», при этом откроется диалоговое окно функции «Поиск решения».
- В открывшемся окне необходимо установить целевую ячейку, а поскольку у вас курсор стоял на ячейке A1, то значение целевой ячейки будет правильным. В противном случае установите в ручную адрес целевой ячейки (в данном случае программа использует абсолютные адреса т.е. ячейка A1 имеет абсолютный адрес

\$A\$1) (рисунок 1.2).

- Установите маркер в положение, соответствующие критерию оптимальности: максимальному или минимальному значению.
- В окне «Изменяя ячейки» нужно указать адреса ячеек соответствующие переменным. Для этого необходимо выделить диапазон ячеек с C1 по C2 (рисунок 1.2).

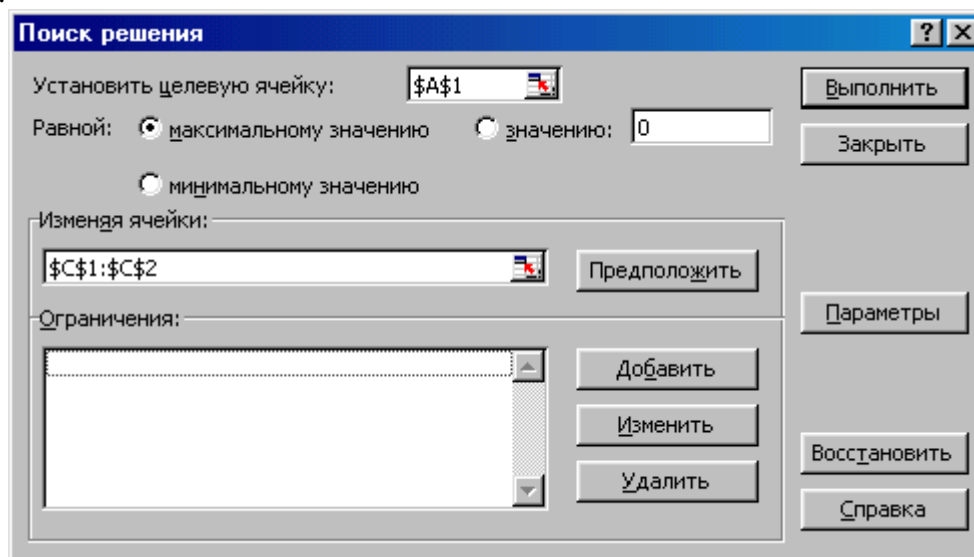


Рисунок 1.2 – Работа в диалоговом окне «Поиск решения»

- В окне «Ограничения» активировать кнопку «Добавить». Откроется окно «Добавить ограничения» (рисунок 1.3). Вводим первое ограничение: в окне «Ссылка на ячейку» указывают адрес ячейки, где находится левая часть 1-го ограничения - \$B\$1, затем выбирают знак ограничения « $\leq$ » и значение – 300.

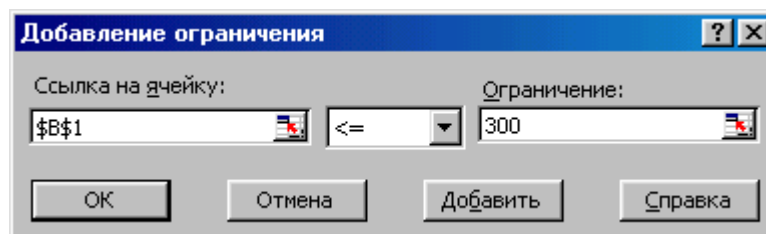


Рисунок 1.3 – Диалоговое окно «Добавление ограничения»

- Активируем клавишу «добавить» и аналогично вводим второе ограничение. Затем вводим условие неотрицательности. Для этого в окне «Ссылка на ячейку» указываем диапазон ячеек, в которых находятся переменные (\$C\$1:\$C\$2). После добавления всех ограничений выбираем «ОК». Программа возвращается в диалоговое окно «Поиск решения». Ввод числовой модели закончен (рисунок 1.4).

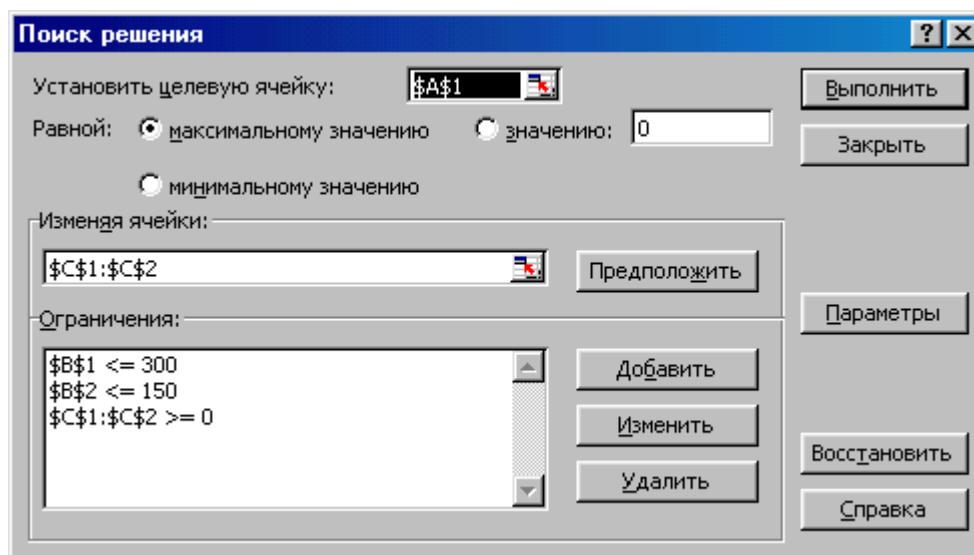


Рисунок 1.4 – Завершение ввода числовой модели в диалоговом окне «Поиск решения»

- Выбираем команду «Выполнить». На экране появится окно «Результаты поиска решения» (рисунок 1.5). Если модель составлена правильно и имеет решение, в открывшемся окне будет сообщение: «Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены». В окне «Тип отчета» выберите «Результаты» и нажмите «ОК».

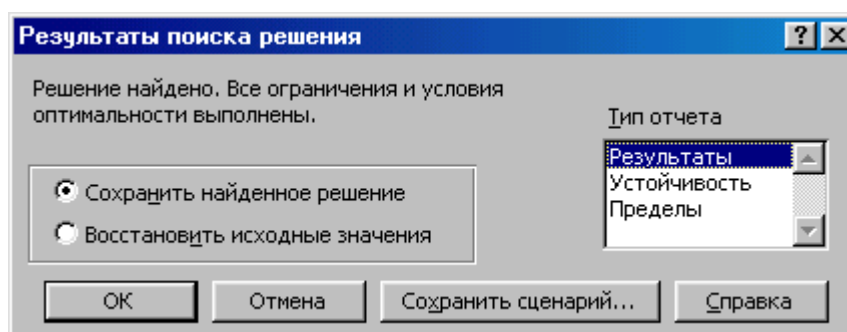


Рисунок 1.5 – Окно «Результаты поиска решения»

Результат решения задачи представлен в «Отчете по результатам» (рисунок 1.6).
Решение задачи окончено.

Microsoft Excel - Книга1								
Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка								
A1 Microsoft Excel 10.0 Отчет по результатам								
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 10.0 Отчет по результатам							
2	Рабочий лист: [Книга1]Лист1							
3	Отчет создан: 22.03.05 20:54:36							
4								
5								
6	Целевая ячейка (Максимум)							
7	Ячейка Имя Исходное значение Результат							
8	\$A\$1 0 375							
9								
10								
11	Изменяемые ячейки							
12	Ячейка Имя Исходное значение Результат							
13	\$C\$1 0 75							
14	\$C\$2 0 75							
15								
16								
17	Ограничения							
18	Ячейка Имя Значение Формула Статус Разница							
19	\$B\$1 300 \$B\$1<=300 связанное 0							
20	\$B\$2 150 \$B\$2<=150 связанное 0							
21	\$C\$1 75 \$C\$1>=0 не связан. 75							
22	\$C\$2 75 \$C\$2>=0 не связан. 75							
23								

Рисунок 1.6 – Отчет по результатам

- Решение задачи окончено, результаты можно распечатать.

Примечание

Если поиск не может найти оптимальное решение, в диалоговом окне **Результаты поиска решения** выводится одно из следующих сообщений.

Поиск не может улучшить текущее решение. Все ограничения выполнены.

В процессе поиска решения нельзя найти такой набор значений влияющих ячеек, который был бы лучше текущего решения. Приблизительное решение найдено, но либо дальнейшее уточнение невозможно, либо погрешность, заданная в диалоговом окне **Параметры поиска решения** слишком высока. Измените погрешность на меньшее число и запустите процедуру поиска решения снова.

Поиск остановлен (истекло заданное на поиск время).

Время, отпущенное на решение задачи, исчерпано, но достичь удовлетворительного решения не удалось. Чтобы при следующем запуске процедуры поиска решения не повторять выполненные вычисления, установите переключатель **Сохранить найденное решение** или **Сохранить сценарий**.

Поиск остановлен (достигнуто максимальное число итераций).

Произведено разрешенное число итераций, но достичь удовлетворительного решения не удалось. Увеличение числа итераций может помочь, однако следует рассмотреть результаты, чтобы понять причины остановки. Чтобы при следующем запуске процедуры поиска решения не повторять выполненные вычисления, установите переключатель **Сохранить найденное решение** или нажмите кнопку **Сохранить сценарий**.

Значения целевой ячейки не сходятся.

Значение целевой ячейки неограниченно увеличивается (или уменьшается), даже если все ограничения соблюдены. Возможно следует в задаче снять одно ограничение или сразу несколько. Изучите процесс расхождения решения, проверьте ограничения и запустите задачу снова.

Поиск не может найти подходящего решения.

В процессе поиска решения нельзя сделать итерацию, которая удовлетворяла бы всем ограничениям при заданной точности. Вероятно, ограничения противоречивы. Исследуйте лист на предмет возможных ошибок в формулах ограничений или в выборе ограничений.

Поиск остановлен по требованию пользователя.

Нажата кнопка **Стоп** в диалоговом окне **Текущее состояние поиска решения** после прерывания поиска решения в процессе выполнения итераций.

Условия для линейной модели не удовлетворяются.

Установлен флажок **Линейная модель**, однако итоговый пересчет порождает такие значения, которые не согласуются с линейной моделью. Это означает, что решение недействительно для данных формул листа. Чтобы проверить линейность задачи, установите флажок **Автоматическое масштабирование** и повторно запустите задачу. Если это сообщение опять появится на экране, снимите флажок **Линейная модель** и снова запустите задачу.

При поиске решения обнаружено ошибочное значение в целевой ячейке или в ячейке ограничения.

При пересчете значений ячеек обнаружена ошибка в одной формуле или в нескольких сразу. Найдите целевую ячейку или ячейку ограничения, порождающие ошибку, и измените их формулы так, чтобы они возвращали подходящее числовое значение.

Набрано неверное имя или формула в окне **Добавить ограничение** или в окне **Изменить ограничение**, либо в поле **Ограничение** было задано целое или двоичное ограничение. Чтобы ограничить значения ячейки множеством целых чисел выберите оператор **целого** ограничения в списке условных операторов. Чтобы установить двоичное ограничение, выберите оператор для **двоичного** ограничения.

Интерпретация результатов задачи

Полученные значения в ячейках, содержащих формулы целевой функции или ограничений, являются результатом расчета целевой функции и соответствующих ограничений.

Результат, полученный в ячейке A1 означает прибыль, полученную от производства продукции.

Ячейки C1, C2 указывают нам на количество произведенной продукции.

В ячейке B1 записано 1-ое ограничение, характеризующее расход сырья C₁ на производство всех видов продукции. При этом получился результат равный 300, разница равна 0, что указывает на полный расход сырья данного вида.

В ячейке B2 записано второе ограничение, характеризующее расход сырья C₂ на производство продукции П₁ и П₂. Результат равен 150, разница равна 0, что полностью соответствует заданному ограничению (т.е. сырье C₂ израсходовано полностью).

Значение ячеек C1, C2 превышают 0, т.е. условие неотрицательности переменных выполнено.

Ответ

Максимальная прибыль возможна в размере 375 единиц.

Объем выпуска продукции: П₁ - 75 штук, П₂ - 75 штук.

Сырье C1 и C2 израсходовано полностью, условие неотрицательности выполнено.

1. Состав переменных

x_1 – количество продукции Π_1 , единиц;

x_2 – количество продукции Π_2 , единиц.

2. Числовая модель

I. $Z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$

II. $1x_1 + 3x_2 \leq 300$

$1x_1 + 1x_2 \leq 150$

III. $x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

3. Общий вид экономико-математической модели

I. $Z = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max$

II. $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$

III. $x_j \geq 0, (j=1, 2)$

4. Структурная форма экономико-математической модели

I. $Z = \sum_{j=1}^2 c_j x_j \rightarrow \max$

II. $\sum_{j=1}^2 a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2$

III. $x_j \geq 0, \quad j = 1, 2$

5. Ответ: максимальная прибыль возможна в размере 375 единиц;
 объем выпуска продукции: Π_1 - 75 штук, Π_2 - 75 штук;
 сырье С1 и С2 израсходовано полностью,
 условие неотрицательности выполнено.

Задача 2

Для выпуска четырех видов продукции требуются затраты сырья, рабочего времени и оборудования. Исходные данные приведены в таблице.

Тип ресурса	Нормы затрат ресурсов на единицу продукции				Наличие ресурсов
	1	2	3	4	
Сырье	3	5	2	4	60
Рабочее время	22	14	18	30	400
Оборудование	10	14	8	16	128
Прибыль на единицу продукции	30	25	8	16	

Необходимо формулировать экономико-математическую модель задачи на максимум прибыли и найти оптимальный план выпуска продукции.

Задача 3

Для выпуска четырех видов продукции P_1, P_2, P_3, P_4 на предприятии используют три вида сырья S_1, S_2 и S_3 . объемы выделенного сырья, нормы расхода сырья и прибыль на

единицу продукции при изготовлении каждого вида продукции приведены в таблице. Требуется определить план выпуска продукции, обеспечивающий наибольшую прибыль.

Составим экономико-математическую модель задачи оптимального использования ресурсов на максимум прибыли. В качестве неизвестных примем выпуска продукции j -го вида x_j ($j = 1, 2, 3, 4$).

Вид сырья	Запасы сырья	Вид продукции			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	35	4	2	2	3
S_2	30	1	1	2	3
S_3	40	3	1	2	1
Прибыль		14	10	14	11

Задача 4

Фабрика выпускает три вида тканей, причем суточное плановое задание составляет не менее 90 м тканей первого вида, 70 м – второго и 60 м – третьего. Суточные ресурсы следующие: 780 единиц производственного оборудования, 850 единиц сырья, 790 единиц электроэнергии, расход которых на один метр ткани представлен в таблице.

Ресурсы	Ткани		
	I	II	III
Оборудование	2	3	4
Сырье	1	4	5
Электричество	3	4	2

Цена за один метр ткани вида I равна 80 денежным единицам, II – 70 денежным единицам, III – 60 денежным единицам.

Необходимо определить, сколько метров ткани каждого вида следует выпустить, чтобы общая стоимость выпускаемой продукции была максимальной.

Задача 5

На основании информации, приведенной в таблице, составить план производства, максимизирующий объем прибыли.

Ресурсы	Затраты ресурсов на единицу продукции		Наличие ресурсов
	A	B	
Труд	2	4	2000
Сырье	4	1	1400
Оборудование	2	1	800
Прибыль на единицу продукции	40	60	

2.2 Лабораторная работа №3 (2 часа)

Тема: «Моделирование кормового рациона»

2.2.1 Цель работы: Изучить особенности построения модели кормового рациона и ее решения

2.2.2 Задачи работы:

1. Постановка задачи

2. Структурная модель

2.2.3 Описание (ход) работы:

4. Анализ и экономическая интерпретация полученных результатов

цель задачи можно выразить следующим образом: из имеющихся в сельскохозяйственном предприятии кормов составить такой рацион кормления, который полностью отвечал бы требованиям животных по содержанию в нем питательных веществ, соотношению отдельных видов и групп кормов и одновременно был самым дешевым для хозяйства. Критерием оптимальности чаще всего служит показатель минимум стоимости (себестоимости) рациона.

Основными переменными в экономико-математической задаче являются корма, имеющиеся в хозяйстве, а также корма, кормовые и минеральные добавки, которые хозяйство может приобрести. Единица измерения этих переменных являются весовые единицы – кг, ц в зависимости от периода, на который составляется, - сутки, год.

В экономико-экономической задаче, кроме основных, могут быть также вспомогательные переменные. Они чаще всего выражают суммарное количество кормовых единиц или переваримого протеина в рационе. С помощью этих переменных записывают условия по структуре рациона (удельному весу отдельных групп кормов).

Основные ограничения необходимы для записи условий по балансу питательных веществ. Техничко-экономические коэффициенты в этих ограничениях обозначают содержание соответствующих питательных веществ в единице корма. Константы (объемы ограничений) показывают количество питательных веществ, которое должно содержаться в рационе.

С помощью дополнительных ограничений в задаче записывают условия по соотношению отдельных групп кормов в рационе и отдельных видов кормов внутри групп.

С помощью вспомогательных ограничений записывают условия по суммарному количеству кормовых единиц и переваримого протеина. Техничко-экономические коэффициенты по основным переменным (так же, как и в основных ограничениях) отражают содержание питательных веществ в единице корма или кормовых добавок, по вспомогательным переменным минус 1. Константами в этих ограничениях являются нули.

Задача

Составить рацион для молочных коров весом 500 кг, с суточным удоем 10 кг так, чтобы стоимость рациона была минимальной. Исходные данные представлены в таблицах 1.2 и 1.3.

Таблица 1.2 - Потребность в питательных элементах

Питательные элементы	Затраты питательных элементов на поддержание жизни	Затраты питательных элементов на 1 кг молока
Кормовые единицы, кг	5	0,5
Протеин, г	300	70
Кальций, г	20	3
Фосфор, г	10	4
Каротин, мг	150	25

Таблица 1.3 - Питательность и себестоимость 1 кг корма

Показатели	Концентрик	Сочные	Грубые	Минеральн
------------	------------	--------	--------	-----------

	ованные			ые и прочие
Кормовые единицы, кг	1,0	0,2	0,4	-
Протеин, г	100	10	20	-
Кальций, г	5	1	2	100
Фосфор, г	5	1	2	200
Каротин, мг	2	10	5	5
Себестоимость, руб.	5	2	3	5

Физиологические ограничения: дача сочных кормов в сутки не более 30 кг.

Экономические требования: дача концентрированных кормов в размере не менее 200 г, на каждый кг молока суточного удоя.

Решение

Расчет рациона производится на 1 животное, исходя из средних физиологических характеристик животных.

1. Состав переменных

x_1 – количество концентрированных кормов, кг;

x_2 – количество сочных, кг;

x_3 – количество грубых, кг;

x_4 – количество минеральных и прочих кормов, кг.

2. Числовая модель

I. Целевая функция должна выражать стоимость рациона. Причем стоимость должна быть минимальной, следовательно

$$Z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 \rightarrow \min$$

II. Основные ограничения

Первый вид ограничения будет выражать суточную потребность животных в кормовых единицах. Количество кормовых единиц, получаемых животным из концентрированных кормов составит $1,0 x_1$, из сочных соответственно $0,2 x_2$, из грубых – $0,4 x_3$. Минеральные корма не содержат кормовые единицы. Следовательно животное в день может получить из различных видов кормов $1,0x_1 + 0,2x_2 + 0,4x_3$ кг кормовых единиц.

Потребность животного в кормовых единицах в сутки составит 10 кг ($5 + 0,5 \cdot 10$, т.к. 5 кг тратится на поддержание жизни, $0,5 \cdot 10$ кг необходимо для производства молока). Тогда ограничение по содержанию кормовых единиц в суточном рационе животного будет иметь вид:

$$1,0x_1 + 0,2x_2 + 0,4x_3 \geq 10$$

Аналогично составляем ограничения по содержанию других питательных веществ:

$$\text{по протеину: } 100x_1 + 10x_2 + 20x_3 \geq 1000$$

$$\text{по кальцию: } 5x_1 + 1,0x_2 + 2x_3 + 100x_4 \geq 50$$

$$\text{по фосфору: } 5x_1 + 1,0x_2 + 2x_3 + 200x_4 \geq 50$$

$$\text{по каротину: } 2,0x_1 + 10x_2 + 5x_3 + 5x_4 \geq 400$$

Дополнительные ограничения

Условие, что суточная норма сочных кормов не должна превышать 30 кг будет иметь вид: $x_2 \leq 30$.

Условие, что на каждый 1 кг суточного удоя должно приходиться не менее 200 г концентрированных кормов, будет иметь вид: $x_1 \geq 2$.

III. Условие неотрицательности переменных

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

$$x_4 \geq 0$$

3. Общий вид экономико-математической модели

$$I. Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \rightarrow \min$$

$$II. a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \geq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \geq b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \geq b_3$$

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \geq b_4$$

$$a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 \geq b_5$$

$$x_2 \leq b_6$$

$$x_1 \geq b_7$$

$$III. x_j \geq 0, \quad j=2,3,4.$$

4. Структурная форма экономико-математической модели

$$I. Z = \sum_{j=1}^4 c_j x_j \rightarrow \min$$

$$II. \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i=1,2$$

$$\sum_{j=1}^4 a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i=3, \dots, 5$$

$$x_j \leq b_i, \quad j=2, i=6$$

$$x_j \geq b_i, \quad j=1, i=7$$

$$III. x_j \geq 0, \quad j=2,3,4$$

Ответ

Оптимальный рацион для коров 500 кг и суточный удой 10 кг, концентрированные – 3,26 кг, сочные – 30,00 кг, грубые - 18,70 кг, минеральные - 0 кг. Минимальная стоимость рациона 132,39 руб.

Содержание кормовых единиц в рационе превышает минимально допустимую норму на 6,74 кг, кальция – на 33,7 г, фосфора – 33,7 г, содержание протеина и каротина в рационе строго соответствует норме.

Количество сочных кормов в рационе составило 30 кг, что соответствует максимальной норме. Количество концентратов превысило минимальный уровень (2кг) на 1,26 кг.

Минеральные вещества не вошли в рацион животных, потребность в минеральных веществах (кальций, фосфор) удовлетворяется другими, более экономически эффективными кормами.

2.3 Лабораторная работа №3 (2 часа)

Тема: «Моделирование производства кормов»

2.3.1 Цель работы: Изучить особенности построения числовой модели производства кормов

2.3.2 Описание (ход) работы:

1. Постановка задачи
2. Структурная модель
3. Исходная информация

2.3.3 Описание (ход) работы:

1. Постановка задачи

Создание прочной кормовой базы – важнейшая проблема хозяйства. Одним из основных путей ее решения является внедрение оптимальной структуры кормопроизводства. Разработка экономико-математической модели предусматривает расчет площадей кормовых культур с учетом требований севооборота, экономических и технологических условий и задач, стоящих перед хозяйством.

Критерием оптимальности данной задачи является минимум посевной площади кормовых культур. Кроме того, могут использоваться критерии минимизации материально-денежных или трудовых затрат на кормопроизводство.

Возможны различные постановки задачи в зависимости от предъявляемых к ней требований. В частности, допустима постановка задачи при заданных рационах и с их оптимизацией в процессе ее решения.

Установим перечень неизвестных показателей плана кормопроизводства, которые должны быть определены в процессе решения задачи.

Составными элементами кормовой базы, как известно, являются: 1) производство кормов на пашне, 2) производство кормов на естественных угодьях, 3) покупные корма, 4) отходы товарных отраслей.

В соответствии с этим в процессе решения задачи и следует определить состав и долю каждой из перечисленных групп кормов.

Далее необходимо выяснить, какие условия влияют на состав кормовой базы, какие требования, взаимосвязи необходимо предусмотреть в модели, чтобы план являлся оптимальным с математической и с экономической точки зрения. Все условия, которые должны быть учтены при разработке экономико-математической модели оптимизации плана кормопроизводства, можно разбить на три группы: зоотехнические, агротехнические и экономические.

Зоотехнические условия включают требования:

сбалансированности кормления животных по важнейшим элементам питания (кормовым единицам, переваримому протеину и др.);

разнообразия кормов, то есть подбора таких рационов, которые отвечают биологическим потребностям животных;

равномерности поступления зеленых кормов в летний период.

Агротехнические условия требуют учета особенностей выращивания кормовых культур, их требований к предшественникам и т. д.

Экономические условия предусматривают учет объема наличных ресурсов, выделенных на кормопроизводство, возможностей покупки кормов, производственного направления и перспектив развития хозяйства.

2. Структурная модель

Переменные задачи. В процессе решения данной задачи определяются:

1. Посевные площади возделываемых в хозяйстве кормовых культур (га).
2. Площади естественных кормовых угодий по видам (га).
3. Количество покупных кормов и минеральных добавок по видам (ц).

Обозначим номера переменных, входящих в первую группу, через множество A_1 ; соответственно номера переменных, входящих во вторую и третью группы, – A_2 и A_3 . Множество, включающее номера всех переменных задачи, обозначим A .

Критерий оптимизации имеет следующий вид:

$$\sum_{j \in A} c_j x_j \rightarrow \min,$$

где c_j – коэффициент, характеризующий затраты пашни, материально-денежных средств или труда в расчете на единицу измерения переменных.

Ограничения задачи. Система ограничений экономико-математической модели оптимизации плана кормопроизводства представляет выраженные в математическом виде зоотехнические, агротехнические и экономические условия.

Важнейшей задачей кормопроизводства является обеспечение потребностей животных основными элементами питания. Это требование вводим в модель в виде следующего неравенства:

$$\sum_{j \in A} v_{ij} x_j \geq Q_i, (i \in I_1),$$

где i – индекс элемента питания (кормовые единицы, переваримый протеин и т. д.);
 j – индекс переменной;
 v_{ij} – содержание i -го вида элемента питания в j -м виде корма в расчете на принятую единицу измерения;
 x_j – объем производства j -го вида корма;
 Q_i – общая потребность животноводства в i -м элементе питания;
 I_1 – множество, включающее номера ограничений по балансам основных элементов питания

В соответствии с биологическими требованиями скота и птицы кормовой баланс должен быть не только полноценным по питательности, но и разнообразным по составу кормов. Это требование отражается в балансах отдельных групп кормов (концентрированные, грубые, сочные, зеленые и др.).

Алгебраическое выражение соответствующих ограничений имеет следующий вид:

$$\sum_{j \in A} v_{ij} x_j \geq D_i, (i \in I_2),$$

где D_i – общая потребность животноводства в i -й группе кормов;
 I_2 – множество, включающее номера ограничений по балансам отдельных групп кормов.

Ограничения этой группы, как правило, вводят в модель в кормовых единицах. В отличие от остальных групп ограничение по зеленым кормам желательно дифференцировать по месяцам пастбищного периода, что позволит отыскать план, гарантирующий равномерное поступление зеленой массы в соответствии с потребностью:

$$\sum_{j \in A} v_{ijt} x_j \geq P_{it}, (i \in I_3),$$

где t – индекс месяца пастбищного периода;
 P_{it} – общая потребность в зеленых кормах в t -й период, корм. ед.;
 v_{ijt} – содержание питательных веществ в зеленом корме j -й культуры, используемой в t -й период;

I_3 – множество, включающее номера ограничений по зеленому конвейеру.

Оптимальная структура кормопроизводства должна определяться с учетом агротехнических и биологических особенностей отдельных кормовых культур, их требований к предшественникам и технологии производства. Взаимосвязь отдельных культур или их групп выражается следующим неравенством:

$$\sum_{j \in A_1} q'_{ij} x'_j - \sum_{j \in A_1} q''_{ij} x''_j \leq 0, (i \in I_1),$$

где x'_j, x''_j – площади кормовых культур, связанных между собой технологической зависимостью;

q'_j, q''_j – коэффициенты взаимосвязи культур;

I_4 – множество, включающее номера ограничений по агротехническим особенностям кормовых культур.

Если одним из элементов кормовой базы являются покупные корма, их объем должен быть ограничен в соответствии с планом приобретения хозяйством (в натуре или стоимостном выражении):

$$x_j \leq B_j, (j \in A_3),$$

где B_j – максимальный объем покупки j -го вида корма.

Важный источник получения кормов — естественные и улучшенные кормовые угодья. Однако, учитывая, что площади этих угодий ограничены, в модель необходимо ввести соответствующие неравенства.

Модель может быть дополнена группой ограничений по наличию и использованию производственных ресурсов, выделенных на кормопроизводство (труда техники средств и др.).

3. Исходная информация.

Для разработки экономико-математической модели по оптимизации кормопроизводства необходимо иметь следующую информацию:

1. Перечень кормовых культур, возделываемых в хозяйстве, их урожайность;
2. поголовье скота и птицы, научно обоснованные нормы кормления по основным элементам питания и группам кормов;
3. Перечень и объем кормов, приобретаемых со стороны;
4. Количество побочной продукции и отходов, которое может быть использовано на корм с посевов товарных сельскохозяйственных культур;
5. Нормативные данные: содержание питательных веществ в 1 ц основной и побочной продукции, нормы потерь кормов при уборке, хранении, переработке и перевозках, стоимость единицы покупаемых кормов и др.;
6. Площадь пашни и естественных кормовых угодий по видам;
7. Допустимые в соответствии с экономическими условиями хозяйства объемы производства отдельных кормов, нормы потребления и выход зеленых кормов в пастбищный период по месяцам.

2.4 Лабораторная работа №4 (2 часа)

Тема: «Моделирование производственной структуры аграрного предприятия»

2.4.1 Цель работы: Изучить особенности построения числовой модели производственной структуры аграрного предприятия

2.4.3 Описание (ход) работы:

1. Особенности постановки и формализации задачи.
2. Структурная модель.

2.4.3 Описание (ход) работы:

Экономико-математическая модель оптимизации производственной структуры – одна из основных в системе моделей оптимального планирования сельскохозяйственного производства.

Оптимальная специализация и сочетание отраслей в сельскохозяйственных предприятиях предполагает такие количественные соотношения между отдельными отраслями, которые позволяют эффективно использовать землю, труд и технику, то есть получить максимум продукции при данных ресурсах и обеспечить минимум затрат на единицу продукции.

В качестве критерия оптимальности чаще других выступает чистый доход.

Формализуем задачу. Введем условные обозначения:

Индексация:

- j – номер отрасли в хозяйстве ($j = 1 \dots n$);
- J – множество, элементы которого номера отраслей;
- J_1 – множество, элементы которого номера отраслей в растениеводстве;
- J_2 – множество, элементы которого номера отраслей в животноводстве;
- i – номер ограничения;
- I_1 – множество, элементы которого – номера ограничений по использованию сельскохозяйственных угодий;
- I_2 – множество, элементы которого – номера ограничений по использованию трудовых ресурсов;
- I_3 – множество, элементы которого номера ограничений по определению оптимальных объемов производственных затрат;
- I_4 – множество, элементы которого – номера ограничений по органическим удобрениям;
- I_5 – множество, элементы которого – номера ограничений по кормовым ресурсам;
- I_6 – множество, элементы которого – номера ограничений по гарантированным объемам производства;
- I_7 – множество, элементы которого – номера ограничений, учитывающих агробиологические особенности производства.

Известные величины:

a_{ij} – коэффициенты затрат i -го вида ресурсов на единицу измерения по j -тому виду деятельности;

V_{ij} – коэффициенты выхода продукции i -го вида в расчете на единицу j -го вида деятельности;

B_i – объемы производственного ресурса i -го вида;

$V_{ij} = q_{ij} d_j$ по кормовым культурам, где

q_{ij} – содержание i -го вида питательного вещества в единице j -го корма;

d_j – доля продукции j -й культуры используемая на корма;

Q_i – гарантированный объем производства i -го вида продукции;

C_j – денежное выражение товарной продукции, получаемой в расчете на единицу измерения j -го вида деятельности;

c_i – цена реализации продукции на особых условиях поставки;

W'_{ij}, W''_{ij} – коэффициенты связки, для отражения агробиологических особенностей производства.

Например: размещение посевов по предшественникам.

Переменные величины:

x_j – искомое значение размеров отраслей и интенсивности j -го вида деятельности;

$\bar{x}_i$ – искомое значение производственных затрат.

2. Структурная модель

Требуется найти:

$$C = \sum_{j=1}^n c_j x_j - \bar{x}_i \rightarrow \max \quad (1)$$

(где i при $\bar{x}_i$ принадлежит I_3)

При условиях:

1. Использование сельскохозяйственных угодий.

$$\sum_{j \in J_1} a_{ij} x_j \leq B_i \quad \text{где } i \in I_1 \quad (2)$$

Условия этого вида гарантируют, что земельных ресурсов потребуется не больше чем их имеется. a_{ij} – равно 1, если x_j измеряется в га, или обратному показателю урожайности, если x_j измеряется в ц.

Обычно ограничения этой группы учитывают несколько условий – использование пашни различного качества, сенокосов и пастбищ различной продуктивности, орошаемых и неорошаемых земель.

2. Использование трудовых ресурсов

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq v_i \quad \text{где } i \in I_2 \quad (3)$$

Это условие обычно представляется несколькими ограничениями по наиболее напряженным периодам работ и в целом на весь период.

Иногда возникает необходимость в определении целесообразности привлечения в отдельные периоды дополнительных трудовых ресурсов. Тогда вводится переменная, искомое значение которой – количество привлекаемых ресурсов труда в отдельные периоды.

3. Производственные затраты:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \bar{x}_i \quad \text{где } i \in I_3 \quad (4)$$

или после преобразования:
$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - \bar{x}_i = 0$$

С помощью этих ограничений можно определить оптимальную структуру и объемы производственных затрат всех видов. Однако в целевой функции представлены только суммарные денежно-материальные затраты.

4. Использование органических удобрений:

$$\sum_{j \in J_1} a_{ij} x_j \leq \sum_{j \in J_2} v_{ij} x_j \quad \text{где } i \in I_4 \quad (5)$$

Левая часть ограничений представляет собой расход органических удобрений в растениеводческих отраслях, а правая – объем его выхода в отраслях животноводства. Ограничения этого вида гарантируют, что органических удобрений потребуется растениеводству не больше, чем будет их получено в животноводстве.

после преобразования:
$$\sum_{j \in J_1} a_{ij} x_j - \sum_{j \in J_2} v_{ij} x_j \leq 0$$

5. Производство и использование кормов.

Обычно ограничения по этим условиям формируют оптимальный кормовой баланс для каждого вида животных и птицы. Модель этого процесса рассматривается в отдельной лекции.

Часто в модель предусматривают только балансирование по отдельным видам питательных веществ.

$$\sum_{j \in J_2} a_{ij} x_j \leq \sum_{j \in J_i} v_{ij} x_j + b_i \quad \text{где } i \in I_5 \quad (6)$$

где b_i – наличие кормов в хозяйстве.

В левой части показан расход кормов в животноводстве.

В правой части ограничения представлен объем производства кормов и их наличие в хозяйстве.

Производство кормов можно показать и более детально. Если вместо v_{ij} записать их значения $q_{ij} d_j$, то $\sum_{j \in J_i} q_{ij} d_j x_j$ – объем производства кормов в питательном веществе, например, производство белка.

В целом условие предусматривает, что животноводству потребуется кормов не больше, чем будет произведено растениеводством плюс наличный объем кормов.

После преобразования:
$$\sum_{j \in J_2} a_{ij} x_j - \sum_{j \in J_i} v_{ij} x_j + b_i \leq 0$$

6. Гарантированные объемы производства. Объемы производства сельскохозяйственной продукции, обеспечивающие выполнение договорных обязательств и внутрихозяйственную потребность, минимально допустимый уровень концентрации поголовья скота и птицы и т.д.
$$\sum_{j=1}^n v_{ij} x_j \geq Q_i \quad \text{где } i \in I_6 \quad (7)$$

В правой части показан гарантированный объем производства продукции и реализация продукции сельского хозяйства. В левой части – производство этой продукции.

7. Условия по соотношению размеров производства по отдельным видам деятельности. Запись условий по агробиологическим особенностям производства, условия севооборотов, размещение культур по предшественникам, зеленый конвейер, повторные посевы и т.п.

$$\sum_{j \in J} W'_{ij} x_j \leq \sum_{j \in J} W''_{ij} x_j \quad \text{где } i \in I_7 \quad (8)$$

$$8. \text{ Условия неотрицательности переменных } x_{ij} \geq 0; \quad \bar{x}_i \geq 0 \quad (9)$$

Здесь приведены основные типы ограничений задачи оптимизации производственной структуры. При решении конкретных задач все они включаются в модель, однако, кроме этого требуется в модели отразить и специфику предприятия, его производственное направление, стратегию ведения хозяйства, особенности местных условий. Например, модель зернового хозяйства и модель специализированного молочного хозяйства требуют разной инфраструктуры.

Задача 7

Определить оптимальное сочетание отраслей сельского хозяйства: растениеводства и животноводства, таким образом, чтобы получить максимальный выход товарной

продукции (в качестве товарной - выступает продукция отрасли животноводства). Вся продукция отрасли растениеводства идет на корм скоту.

Производственные ресурсы:

пашня – 8000 га

трудовые ресурсы – 7500 ч. дн

энергоресурсы – 1000 тр. смен

Урожайность зерновых 10 ц/га (содержание кормовых единиц в 1 ц – 1,2 ц к.ед.),

урожайность кукурузы на силос 150 ц/га (содержание кормовых единиц в 1ц – 0,2 ц к.ед.).

Годовой удой 1 коровы 2500 кг, годовой прирост 1 свиньи 0,9 ц.

Таблица 1.4 - Удельные затраты производственных ресурсов

Показатели	Затраты труда, чел. дн.	Энергетические ресурсы, тр. смены	Расход кормовых единиц на 1ц продукции, ц к.ед
На 1 га зерновых	2	0,4	-
На 1 га кукурузы	20	4,0	-
На 1 ц молока	0,1	0,01	1,2
На 1 ц прироста живой массы свиней	1,5	0,02	7,0

Цена реализации 1 ц продукции:

зерна – 8 руб.,

силоса – 1 руб.,

молока – 18 руб.,

прирост свиней – 120 руб.

Валовое производство продукции животноводства равно произведению продуктивности животных (прирост живой массы от 1 головы, удой от 1 коровы) на поголовье.

Задача 8

Определить оптимальное сочетание отраслей сельского хозяйства: растениеводства и животноводства так, чтобы получить максимальный выход товарной продукции (в качестве товарной - выступает продукция отрасли животноводства – мясо КРС и свиней, молоко; продукция отрасли растениеводства – зерно). На корм идет 20% валового сбора зерна и весь силос.

Производственные ресурсы:

пашня – 10000 га,

трудовые ресурсы – 85000 ч. дн,

энергоресурсы – 15000 тр. смен,

пастбища – 1500 га.

Урожайность зерновых 20 ц/га (содержание кормовых единиц в 1 ц – 1,2 ц к.ед.),

кукурузы на силос - 150 ц/га (содержание кормовых единиц в 1ц – 0,2 ц к.ед.). С 1 га

естественных пастбищ возможно получение 5 ц к.ед. Годовой удой 1 коровы 2500 кг, прирост живой массы 1 коровы – 2,5 ц, свиньи – 0,9 ц.

Таблица 1.5 - Удельные затраты производственных ресурсов

Показатели	Затраты труда, чел. дн.	Энергетические ресурсы, тр. смены	Расход кормовых единиц на 1ц продукции, ц к.ед
На 1 га зерновых	2,1	0,4	-
На 1 га кукурузы	20	4,0	-

На 1 ц молока	0,1	0,01	1,2
На 1 ц прироста живой массы КРС	2,0	0,01	5,0
На 1 ц прироста живой массы свиней	1,5	0,02	7,0
На 1 га естественных пастбищ	0,8	0,01	-

Цена реализации 1 ц продукции: зерна – 8 руб., силоса – 1 руб., молока – 16 руб., прироста КРС – 120 руб., прироста свиней – 80 руб.

Продать государству: зерна не менее 2600 ц, молока не менее – 800 ц, мяса – 150 ц.

Задача 9

Определить оптимальное сочетание отраслей сельского хозяйства: растениеводства и животноводства таким образом, чтобы получить максимальный выход товарной продукции (в качестве товарной - выступает продукция отрасли животноводства – мясо КРС и свиней, молоко; продукция отрасли растениеводства – зерно).

Производственные ресурсы: пашня – 10000 га,

трудовые ресурсы – 85000 ч. дн,

энергоресурсы – 15000 тр. смен,

пастбища – 1500 га.

Возможная распашка естественных пастбищ до 400 га.

Урожайность зерновых 20 ц/га (содержание кормовых единиц в 1 ц – 1,2 ц к.ед.), кукурузы на силос - 150 ц/га (содержание кормовых единиц в 1ц – 0,2 ц к.ед.). С 1 га естественных пастбищ возможно получение 5 ц к.ед. Годовой удой 1 коровы 2500 кг, прирост живой массы 1 коровы – 2,5 ц, свиньи – 0,9 ц. Содержание кормовых единиц в 1ц молока, которое идет на корм - 0,4 ц к.ед.

Таблица 1.6 - Удельные затраты производственных ресурсов

Показатели	Затраты труда, чел. дн.	Энергетические ресурсы, тр. смены	Расход кормовых единиц на 1ц продукции, ц к.ед
На 1 га зерновых	2,1	0,4	-
На 1 га кукурузы	20	4,0	-
На 1 ц молока	0,1	0,01	1,2
На 1 ц прироста живой массы КРС	2,0	0,01	5,0
На 1 ц прироста живой массы свиней	1,5	0,02	7,0
На 1 га естественных пастбищ	0,8	0,01	-
На 1 га освоения пастбищ	1,5	1,2	-

Структура использования продукции:

- а) зерна: продажа государству – 40%,
на корм скоту – 50%,
прочая реализация – 10%.

б) молока: продажа государству – 80%,
на корм скоту – 10%,
прочая реализация – 10%.

в) мяса: продажа государству – 90%,
на внутривоспроизводственные нужды – 10 %.

Планировать продажу продукции государству не менее: зерна – 12000 ц, молока – 1200 ц, мяса – 800 т.

Цена реализации государству 1 ц продукции : зерна – 8 руб., молока – 18 руб.,
прироста КРС – 180 руб., прироста свиней – 120 руб.

Прочая цена реализации 1 ц продукции : зерна – 9 руб., молока – 19 руб., прироста
КРС – 190 руб., прироста свиней – 130 руб.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

3.1 Практическое занятие 6 (2 часа)

Тема: «Моделирование использования средств механизации»

3.1.1 Задание для работы:

1. Освоить этапы построения модели транспортной задачи
2. Построение модели и ее математическая запись. Символика обозначений
3. Использование табличного редактора Excel для решения задач транспортного типа
4. Анализ и экономическая интерпретация полученных результатов.

3.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

Среди проблем, для исследования которых успешно применяется линейное программирование, важное значение имеет так называемая транспортная задача.

Общая постановка этой задачи применительно к экономической проблеме экономии издержек производства формулируется так: имеется несколько пунктов назначения (предприятий, потребителей); требуется перевезти некоторое количество однородного товара из различных пунктов отправления в несколько пунктов назначения; каждый из поставщиков может выделить только определенное количество единиц товара и каждому потребителю требуется также определенное количество единиц этого товара; известны расстояния или стоимости перевозки единицы товара от каждого поставщика к каждому потребителю. Задача состоит в том, чтобы найти такие маршруты перевозок, из всех возможных связей поставщиков и потребителей, при которых общие транспортные расходы были минимальными.

Транспортная задача может быть решена с помощью одного из распределительных методов. С помощью алгоритма транспортной задачи решаются многие экономические задачи, не имеющие характера перевозок, но условия которых укладываются в модель транспортной задачи (распределение посевных площадей, составление различных смесей, размещение предприятий, раскрой материалов и т.д.).

В общей постановке транспортная задача выглядит следующим образом.

Имеется n пунктов отправления с запасами b_i единиц груза в каждом. Имеется m пунктов назначения с потребностями в грузах a_j . Стоимость перевозки одной единицы груза по соответствующему маршруту равна c_{ij} .

Для записи модели транспортной задачи примем следующие обозначения:

b_i - наличие груза у i -го поставщиков ($i = 1, 2, 3, \dots, m$);

a_j - потребность j -го потребителя ($j = 1, 2, 3, \dots, n$);

c_{ij} – стоимость перевозки единицы груза от i -го поставщика к j -му потребителю.

Матрица $(c_{ij})_{m \times n}$ называется матрицей тарифов (издержек или транспортных расходов).

Планом транспортной задачи называется матрица $X = (x_{ij})_{m \times n}$, где каждое число x_{ij} обозначает количество единиц груза, которое надо доставить из i -го пункта отправления в j -й пункт назначения. Матрица X называется еще матрицей перевозок. Чаще всего матрицы тарифов и перевозок совмещают в одну двойную матрицу (таблица 3.1).

Таблица 3.1 – Общий вид транспортной матрицы

Поставщики	Потребители					Запасы, [ед.прод.]
	1	2	3	...	n	
1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	...	c_{1n}	b_1

	x_{11}	x_{12}	x_{13}		x_{1n}	
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	...	c_{2n} x_{2n}	b_2
3	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	...	c_{3n} x_{3n}	b_3
...	...	...	...	...	...	...
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{m3} x_{m3}	...	c_{mn} x_{mn}	b_n
Потребность в грузе [ед.прод.]	a_1	a_2	a_3	...	a_n	

Этапы построения модели транспортной задачи

1. Проверка сбалансированности задачи.
2. Определение переменных.
3. Построение сбалансированной транспортной матрицы.
4. Задание целевой функции.
5. Задание ограничений.
6. Решение задачи в Excel.
7. Анализ результатов решения задачи.

Исходные параметры модели транспортной задачи

- a) m – количество пунктов отправления, n – количество пунктов назначения.
- b) b_i – запас продукции в пункте отправления ($i = 1, 2, 3, \dots, m$);
- c) a_j – спрос на продукцию в пункте назначения ($j = 1, 2, 3, \dots, n$);
- d) c_{ij} – тариф (стоимость) перевозки единицы продукции из i -го пункта отправления в j -ый пункт назначения.

Если наличие грузов и потребности равны между собой, то задача является закрытой (сбалансированной)

$$\sum_{j=1}^n a_j = \sum_{i=1}^m b_i. \quad (3.1)$$

Если наличие грузов и потребностей не совпадают между собой, задача является открытой (несбалансированной)

$$\sum_{j=1}^n a_j \neq \sum_{i=1}^m b_i. \quad (3.2)$$

В случае, когда суммарные запасы превышают суммарные потребности, необходим дополнительный фиктивный пункт потребления, который будет формально потреблять существующий излишек запасов, то есть

$$a_{\phi} = \sum_{i=1}^m b_i - \sum_{j=1}^n a_j. \quad (3.3)$$

Если суммарные потребности превышают суммарные запасы, то необходим дополнительный фиктивный пункт отправления, формально восполняющий существующий недостаток продукции в пунктах отправления:

$$b_{\phi} = \sum_{j=1}^n a_j - \sum_{i=1}^m b_i. \quad (3.4)$$

Искомые параметры модели транспортной задачи

1. x_{ij} – количество продукции, перевозимой из i -го пункта отправления в j -ый пункт назначения. Если по условию задачи введен фиктивный поставщик или потребитель, то необходимо ввести фиктивные переменные, которые обозначаются x_{ij} .

2. $F(X)$ – транспортные расходы на перевозку всей продукции [руб.].

Задача сводится к тому, чтобы отыскать неотрицательные значения x_{ij} , при которых:

I. Целевая функция стремится к минимуму

$$F(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min. \quad (3.5)$$

Введение фиктивного потребителя или отправителя повлечет необходимость формального задания *фиктивных* тарифов c_{ij}^{ϕ} (реально не существующих) для фиктивных перевозок. Поскольку нас интересует определение наиболее выгодных *реальных* перевозок, то необходимо предусмотреть, чтобы при решении задачи (при нахождении опорных планов) *фиктивные* перевозки не рассматривались до тех пор, пока не будут определены все реальные перевозки. Для этого надо фиктивные перевозки сделать невыгодными, то есть дорогими, чтобы при поиске решения задачи их рассматривали в самую последнюю очередь. Таким образом, величина фиктивных тарифов должна превышать максимальный из реальных тарифов, используемых в модели, то есть

$$c_{ij}^{\phi} > \max c_{ij} \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}). \quad (3.6)$$

II. Необходимо выполнение следующих основных условий:

от каждого поставщика можно вывести столько груза, сколько у него имеется, то есть сумма искомых перевозок от каждого поставщика равна наличию у них груза (условия вывоза всех грузов из пунктов отправления)

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = b_i; \quad (3.7)$$

каждому потребителю можно перевезти необходимое ему количество груза, то есть сумма искомых объемов перевозок равна потребности потребителей (условия полного удовлетворения потребностей потребителей)

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = a_j; \quad (3.8)$$

III. Условия неотрицательности переменных, исключающие обратные перевозки

$$\forall x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}). \quad (3.9)$$

Ограничения модели (3.7, 3.8, 3.9) могут быть выполнены только при сбалансированной задаче.

Если условие задачи таково, что в результате ее решения искомые переменные должны будут иметь целые значения, то необходимо введение дополнительного условия целочисленности:

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ, НА ОСНОВЕ СТАНДАРТНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Кроме основных условий, в транспортных задачах может встретиться ряд дополнительных, ограничивающих количественные связи между отдельными потребителями и поставщиками. Характер этих ограничений и способы решения задачи при наличии дополнительных ограничений заключаются в следующем.

1. Полное отсутствие связи между поставщиком и потребителем, то есть $x_{ij} = 0$. Это означает, что в данной клетке матрицы искомый объем перевозок должен быть равен нулю. Оценка переменной завышается на большую величину, обычно обозначаемую буквой М, и «попадание» груза в эту клетку нежелательно, так как целевая функция всегда стремится к минимуму.

2. Наличие частной заранее фиксированной связи между поставщиками и потребителями, то есть $x_{ij} = q$, искомый объем перевозок от i -го поставщика к j -му потребителю должен быть строго равен q . До начала решения задачи от соответствующего поставщика и потребителя вычитается величина q , затем в соответствующую клетку пересечения поставщика и потребителя записывается завышенная оценка М и задача решается обычным методом.

3. $x_{ij} > q$, то есть искомый объем перевозок от i -го поставщика к j -му потребителю должен быть не меньше величины q . До начала решения от соответствующего поставщика и потребителя вычитается величина q , затем задача решается обычным путем.

Модель транспортной задачи позволяет решать любые задачи, в которых параметры имеют одинаковые единицы измерения. Такие модели называются однопродуктовыми. К ним можно отнести задачу оптимизации использования машинно-тракторного парка в отдельные агротехнические сроки, задачу оптимального размещения посевов сельскохозяйственных культур по участкам с различным плодородием почв и т.д.

Упражнения

Задача 1

Требуется перевезти одноименный груз из трех пунктов отправления в три пункта назначения. Количество грузов, подлежащих отправлению с каждого склада, потребности в них каждого потребителя и расстояния в километрах от каждого пункта отправления в каждый пункт назначения приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2 – Расстояния перевозки, км

Поставщики	Потребители			Наличие грузов, т
	1	2	3	
1	15	17	23	900
2	9	19	8	800
3	24	21	32	550
Потребность в грузах, т	700	800	750	2250

Нужно определить, из какого пункта отправления следует удовлетворять спрос потребителей, чтобы общая сумма объема перевозок (ткм) была минимальной.

Решение:

1. Проверка сбалансированности задачи

Просуммируем наличие грузов у поставщиков

$$\sum_{i=1}^3 b_i = 900 + 800 + 550 = 2250$$

Просуммируем потребности потребителей в грузах

$$\sum_{j=1}^3 a_j = 700 + 800 + 750 = 2250$$

$\sum_{i=1}^3 b_i = \sum_{j=1}^3 a_j$, следовательно, задача сбалансированная (закрытого типа).

2. Определение переменных

Обозначим через x_{ij} [т] количество грузов, которые будут перевезены от i -го поставщика j -му потребителю.

3. I. Целевая функция

Формальная целевая функция имеет вид:

$$\begin{aligned} F(X) = & 15x_{11} + 17x_{12} + 23x_{13} + \\ & + 9x_{21} + 19x_{22} + 8x_{23} + \\ & + 24x_{31} + 21x_{32} + 32x_{33} \rightarrow \min \end{aligned}$$

II. Основные ограничения

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 900, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 800, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 550, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 700, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 800, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 750. \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности

$$\forall x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,3})$$

4. Модель задачи в общем виде:

$$\begin{aligned} \text{I. } F(X) = & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + \\ & + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + \\ & + c_{31}x_{31} + c_{32}x_{32} + c_{33}x_{33} \rightarrow \min \end{aligned}$$

$$\text{II. } \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = b_1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = b_2, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = b_3, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = a_1, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = a_2, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = a_3. \end{cases}$$

$$\text{III. } \forall x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,3})$$

5. Модель задачи в структурной форме:

$$\text{I. } F(x) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min ,$$

$$II. \begin{cases} \sum_{j=1}^3 x_{ij} = b_i, & i = \overline{1,3} \\ \sum_{i=1}^3 x_{ij} = a_j, & j = \overline{1,3} \end{cases},$$

$$III. \forall x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,3}).$$

6. Для решения данной задачи в Excel необходимо:

- 1) под запись целевой функции отвести ячейку A1;
- 2) под запись ограничений – ячейки столбца В (количество ячеек совпадает с количеством ограничений): B1, B2, B3, B4, B5, B6;
- 3) под запись искомых переменных отвести ячейки столбцов С, D, Е (количество потребителей совпадает с количеством столбцов, количество поставщиков – с количеством строк).

**Примечание:* искомые переменные x_{ij} будут находиться в следующих ячейках:

$(x_{11} \rightarrow C1 \quad x_{12} \rightarrow D1 \quad x_{13} \rightarrow E1$
 $x_{21} \rightarrow C2 \quad x_{22} \rightarrow D2 \quad x_{23} \rightarrow E2$
 $x_{31} \rightarrow C3 \quad x_{32} \rightarrow D2 \quad x_{33} \rightarrow E3).$

Порядок выполнения работы:

1. Ввести в ячейку A1 формулу целевой функции (рисунок 3.1):
 $=15*C1+17*D1+23*E1+$
 $+ 9*C2+19*D2 + 8*E2+$
 $+24*C3+21*D3+32*E3;$

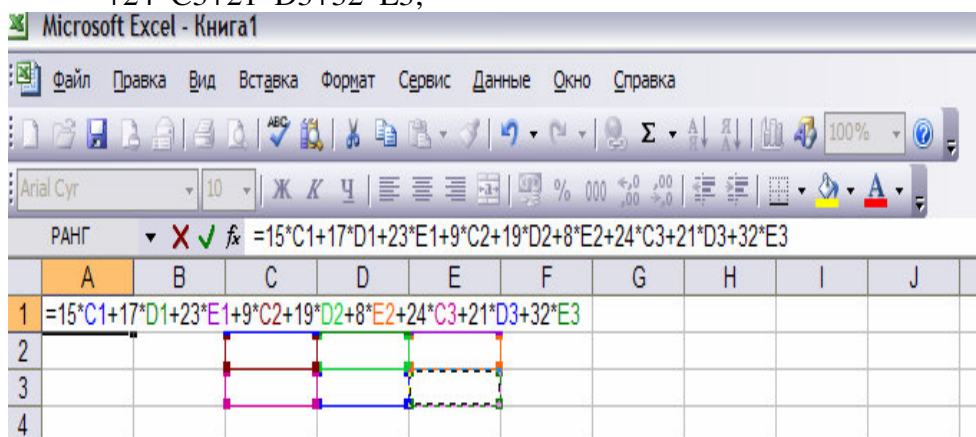
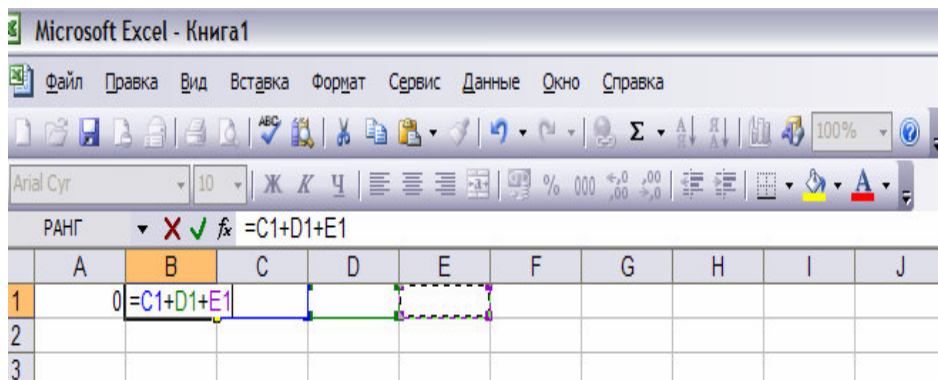


Рисунок 3.1 – Ввод целевой функции в Excel

2. а) Ввести в ячейку B1 левую часть 1-го ограничения: $= C1+D1+E1$ (рисунок 3.2)



$= C2+D2+E2$

- в) Ввести в ячейку B3 левую часть 3-го ограничения:

= C3+D3+E3

г) Ввести в ячейку B4 левую часть 4-го ограничения:

= C1+C2+C3

д) Ввести в ячейку B5 левую часть 5-го ограничения:

= D1+D2+D3

е) Ввести в ячейку B6 левую часть 6-го ограничения:

= E1+E2+E3

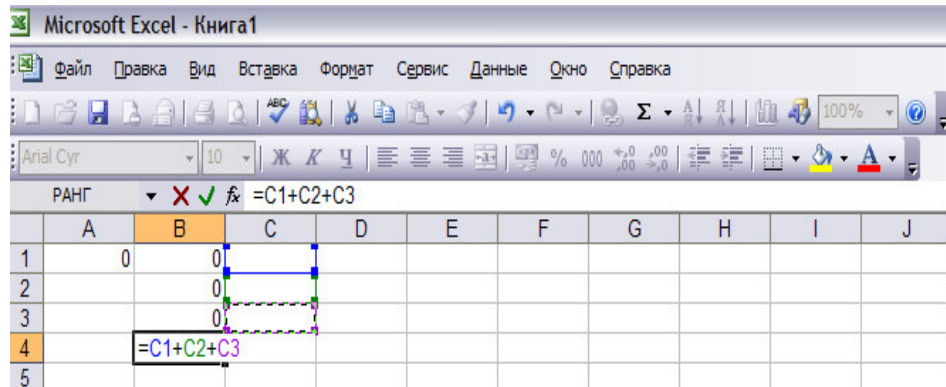


Рисунок 3.3 – Ввод ограничений в Excel

3. На панели инструментов выбрать опцию "Сервис", а в ней вкладку "Поиск решения"

Примечание

Если "Поиск решения" отсутствует, нужно выполнить команду "Сервис"– "Надстройки". В окне диалога "Надстройки" нужно установить флажок напротив строки "Поиск решения".

4. В окне диалога "Поиск решения" в поле ввода "Установить целевую ячейку" нужно ввести ссылку на ячейку A1. Необходимо выбрать способ адресации ячеек в абсолютной системе координат (т.е. указать не A1, а \$A\$1). Также нужно поступать с другими переменными.

5. В окне диалога "Поиск решения" нужно установить переключатель (рисунок 3.4).

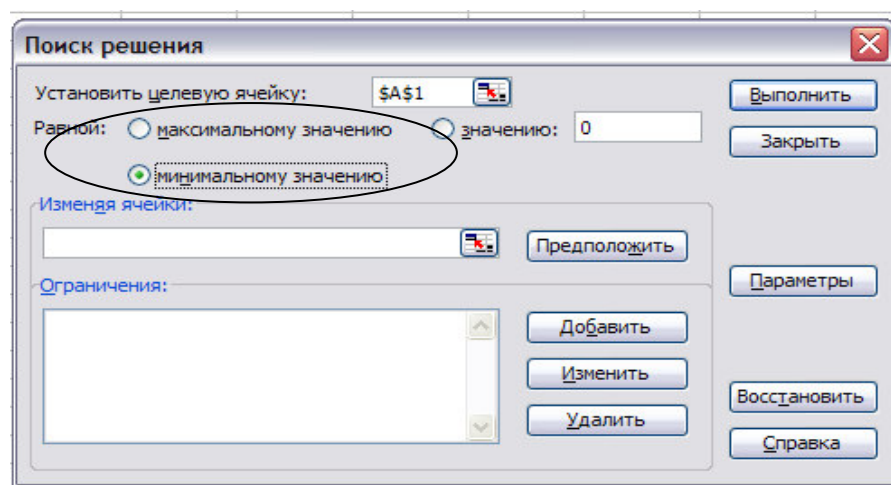


Рисунок 3.4 – Работа в диалоговом окне «Поиск решения»

6. В поле ввода "Изменяя ячейки" нужно указать ссылки на ячейки, содержащие искомые переменные, т.е. диапазон ячеек \$C\$1: \$E\$3 (рисунок 3.5).

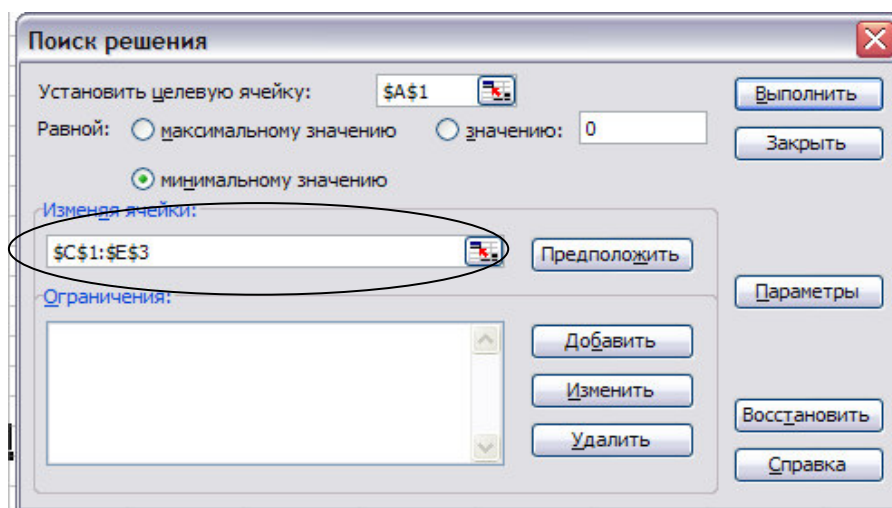


Рисунок 3.5 – Поле ввода ячеек, обозначающих искомые переменные

7. В поле ввода "Ограничения" при нажатии кнопки "Добавить" появляется окно диалога "Добавить ограничения". В поле ввода "Ссылка на ячейку" вводится \$B\$1. В поле ввода "Ограничение" вводится = и число 900. При помощи кнопки "Добавить" таким же образом вводятся все остальные ограничения (ячейки \$B\$2:\$B\$6) (рисунок 3.6).

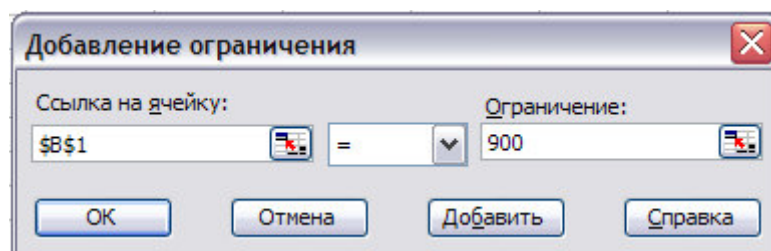


Рисунок 3.6 – Диалоговое окно «Добавление ограничения»

8. Для ввода ограничений на неотрицательность искомых переменных в окне диалога "Добавить ограничения" в поле ввода "Ссылка на ячейку" нужно ввести ссылку на ячейку \$C\$1, а в поле ввода "Ограничения" нужно ввести >= и число 0. При помощи кнопки "Добавить" таким же образом вводятся условия неотрицательности оставшихся искомых переменных. Либо выделяется диапазон ячеек \$C\$1: \$E\$3 и задается >= и число 0. После ввода последнего ограничения нажмите «ОК».

Примечание

Если в задаче имеется условие целочисленности искомых переменных, то в диалоговом окне «Добавление ограничений» в поле ввода "Ссылка на ячейку" нужно ввести ссылку на ячейку \$C\$1, а в поле ввода знака ограничения нужно ввести «цел». При помощи кнопки "Добавить" таким же образом вводятся условия целочисленности оставшихся искомых переменных. Либо выделяется диапазон ячеек \$C\$1: \$E\$3 и задается «цел». После ввода последнего ограничения нажмите «ОК».

После нажатия кнопки "Выполнить" Excel рассчитывает результат и открывает окно диалога "Результаты поиска решения". В этом диалоге в окне "Тип отчета" нужно выбрать "Результаты" и нажать Ok. Перед листом, где записана постановка задачи, будет вставлен лист "Отчет по результатам 1", а на экране будет выдан результат решения задачи (рисунок 3.7).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	32000	900	650	250	0					
2		800	50	0	750					
3		550	0	550	0					
4		700								
5		800								
6		750								
7										

Рисунок 3.7 – Результаты решения задачи

Интерпретация результатов задачи

Полученные значения в ячейках, содержащих формулы целевой функции и ограничений, являются результатом расчета целевой функции и соответствующих ограничений.

Результат, полученный в ячейке A1, означает общую сумму объема грузоперевозок в ткм.

Ячейки B1, B2, B3 показывают выполнение условия полного вывоза груза от поставщика. Ячейки B4, B5, B6 показывают выполнение условия полного удовлетворения потребностей потребителя.

Значения ячеек в диапазоне \$C\$1: \$E\$3 показывают количество груза (в т), перевезенного от соответствующего поставщика, соответствующему потребителю. Значения данного диапазона превышают 0, следовательно условие неотрицательности искомых переменных выполнено.

Ответ

Оптимальные перевозки грузов предусматривают перевозку от 1-го поставщика 1-му потребителю 650 т, от 1-го поставщика 2-му потребителю – 250 т, от 2-го поставщика 1-му потребителю – 50 т, а 3-му потребителю – 750 т. 3-й поставщик отвезет свой груз только 2-му потребителю в количестве 550 т. Минимальный объем перевозок составит 32000 т км.

Порядок оформления задачи

1. Проверка сбалансированности задачи

$$\sum_{i=1}^3 b_i = 900 + 800 + 550 = 2250$$

$$\sum_{j=1}^3 a_j = 700 + 800 + 750 = 2250$$

$$\sum_{i=1}^3 b_i = \sum_{j=1}^3 a_j, \text{ задача закрытого типа}$$

2. Состав переменных

x_{ij} – количество продукции (т), перевозимой из i -го пункта отправления в j -ый пункт назначения

3. Числовая модель

$$\begin{aligned}
& F(X) = 15x_{11} + 17x_{12} + 23x_{13} + \\
& \underline{I.} \quad + 9x_{21} + 19x_{22} + 8x_{23} + \\
& \quad + 24x_{31} + 21x_{32} + 32x_{33} \rightarrow \min \\
& \text{II.} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 900, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 800, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 550, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 700, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 800, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 750. \end{array} \right. \\
& \text{III.} \quad \forall x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,3}).
\end{aligned}$$

4. Общий вид экономико-математической модели

$$\begin{aligned}
& \text{I.} \quad F(X) = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + \\
& \quad + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + \\
& \quad + c_{31}x_{31} + c_{32}x_{32} + c_{33}x_{33} \rightarrow \min \\
& \text{II.} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} = b_1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = b_2, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = b_3, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = a_1, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = a_2, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = a_3. \end{array} \right. \\
& \text{III.} \quad \forall x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,3}).
\end{aligned}$$

5. Структурная форма экономико-математической модели

$$\begin{aligned}
& \text{I.} \quad F(x) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \\
& \text{II.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^3 x_{ij} = b_i, \quad i = \overline{1,3} \\ \sum_{i=1}^3 x_{ij} = a_j, \quad j = \overline{1,3} \end{array} \right., \\
& \text{III.} \quad \forall x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,3}).
\end{aligned}$$

6. Ответ: Минимальный объем перевозок составит 32000 т км. При этом матрица грузоперевозок будет выглядеть следующим образом:

$$X = \begin{pmatrix} 650 & 250 & 0 \\ 50 & 0 & 750 \\ 0 & 550 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 2

Составить план перевозки картофеля из 3 хозяйств 4 магазинам так, чтобы сумма расстояний на перевозку была минимальной. Наличие картофеля, потребность магазинов и расстояние от хозяйств до магазинов приведены в таблице 3.3.

Таблица 3.3 – Расстояния перевозок, км

Хозяйства	Магазин				Запасы, т
	1	2	3	4	
1	8	6	9	2	280
2	4	5	4	5	520
3	3	4	6	4	400
Потребности, т	300	250	340	210	

Задача 3

Составьте план перевозок нефтепродуктов из 3-х пунктов отправления в 4 пункта назначения. План должен обеспечить минимальные транспортные издержки и полностью удовлетворить спрос потребителей на нефтепродукты. Запас, потребности и стоимость перевозки 1т нефтепродуктов приведены в таблице 3.4.

Таблица 3.4 – Стоимость перевозок, руб.

Пункт отправления	Пункты назначения				Запасы, т
	1	2	3	4	
1	9	7	5	3	175
2	1	2	4	6	125
3	8	10	12	1	140
Потребности, т	180	110	60	40	

Задача 4

Четырем предприятиям необходимо сырье в количестве 110, 100, 80 и 40 т соответственно. Запасы сырья сосредоточены в трех пунктах хранения в количестве 90, 100 и 140 т соответственно. Известна матрица С расстояний между пунктами хранения и предприятиями. Нужно составить план перевозок сырья так, чтобы общий объем перевозок (т-км) был минимальным.

$$C = \begin{pmatrix} 20 & 40 & 60 & 100 \\ 10 & 30 & 70 & 40 \\ 40 & 80 & 130 & 70 \end{pmatrix}$$

Задача 7

Требуется перевезти однородный груз из трех пунктов отправления в три пункта назначения. Качество груза, подлежащих отправлению с каждого склада, потребности в

нем каждого потребителя и расстояния перевозки от каждого пункта отправления до каждого пункта назначения приведены в таблице 3.8.

Таблица 3.8 – Расстояние перевозок, км

Поставщики	Потребители			Наличие, т
	1	2	3	
I	15	17	23	900
II	9	19	8	800
III	24	21	32	550
Потребность, т	500	700	650	

Необходимо составить оптимальный план перевозок, так чтобы объем транспортных работ (т км) был минимальным. При этом обязательна поставка от первого поставщика первому потребителю установлена в количестве 300т, второй поставщик должен поставить второму потребителю не менее 200т, а первый поставщик третьему – не более 400т.

Задача 8

Необходимо составить оптимальный план проведения весенне-полевых работ, для имеющейся техники в хозяйстве. Объем работ в гектарах мягкой пахоты, производительность имеющейся техники за период (гектары мягкой пахоты), затраты на единицу работы представлены в таблице 3.9.

Таблица 3.9 – Затраты на 1 га мягкой пахоты, руб.

Виды работ	Марки тракторов				Объем работ, га м. п.
	ДТ-75М	МТЗ-821	Т-4А	ДТ-175С	
Раннее боронование зяби	5,5	5,7	5,8	5,9	210
Предпосевная культивация	4,8	5,0	5,7	6,0	1000
Посев яровых зерновых	5,5	5,7	5,8	5,9	75
Боронование озимой пшеницы	5,1	6,5	6,4	7,0	135
Прикатывание	М	5,4	5,3	5,6	40
Объем работ, га м. п.	470	400	270	320	

Затраты на проведение весенне-полевых работ должны быть минимальными.

Ответы

$$\text{№2 } X = \begin{pmatrix} 0 & 70 & 0 & 210 & 0 \\ 0 & 80 & 340 & 0 & 100 \\ 300 & 100 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F(x) = 3900$$

$$\begin{aligned}
\text{№3 } X &= \begin{pmatrix} 0 & 110 & 60 & 0 & 5 \\ 125 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 55 & 0 & 0 & 40 & 45 \end{pmatrix} & F(x) &= 1675 \\
\text{№4 } X &= \begin{pmatrix} 10 & 0 & 80 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 100 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix} & F(x) &= 14800 \\
\text{№6 } X &= \begin{pmatrix} 4503 & 981 & 2884 & 0 & 817 \\ 0 & 0 & 0 & 2800 & 2783 \\ 0 & 1114 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 65 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & F(x) &= 330608,2 \\
\text{№7 } X &= \begin{pmatrix} 300 & 500 & 51 & 49 \\ 1 & 200 & 599 & 0 \\ 199 & 0 & 0 & 351 \end{pmatrix} & F(x) &= 27550 \\
\text{№8 } X &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 210 \\ 335 & 400 & 232 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 75 \\ 135 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 38 & 2 \end{pmatrix} & F(x) &= 7711
\end{aligned}$$

3.1.3 Результаты и выводы:

Общая постановка этой задачи применительно к экономической проблеме экономии издержек производства формулируется так: имеется несколько пунктов назначения (предприятий, потребителей); требуется перевезти некоторое количество однородного товара из различных пунктов отправления в несколько пунктов назначения; каждый из поставщиков может выделить только определенное количество единиц товара и каждому потребителю требуется также определенное количество единиц этого товара; известны расстояния или стоимости перевозки единицы товара от каждого поставщика к каждому потребителю. Задача состоит в том, чтобы найти такие маршруты перевозок, из всех возможных связей поставщиков и потребителей, при которых общие транспортные расходы были минимальными.

Определение потребности в технике состоит в выборе такого состава МТП и такого плана его использования, при котором обеспечивается выполнение всех заданных объемов работ в положенные сроки с минимальными общими затратами.

Здесь выделяется три момента:

- потребность хозяйства в технике для выполнения заданного объема работ;
- требование выполнения работ в срок;
- требование выполнения работ с min затратами.

В условиях конкретного хозяйства встречаются три варианта постановки задачи оптимизации состава МТП.

1. Задача определения оптимального состава МТП при условии, что в хозяйстве полностью отсутствуют машины, то есть задача комплектования парка, или наиболее целесообразного его приобретения.

Такая постановка возникает у всех вновь образованных хозяйств.

2. Задача определения оптимального состава МТП при условии, что некоторый парк машин в хозяйстве уже имеется, то есть задача **доукомплектования** имеющегося парка.

Это самый распространенный вариант задачи, так как и техника постоянно совершенствуется, производство тоже не стоит на месте. Парк стареет и физически отслужившие машины требуют замены новыми.

3. Задача определения плана наилучшего использования имеющегося в хозяйстве парка машин, при условии, что хозяйство не имеет возможности закупать новые машины. Отслужившие срок машины можно списывать.

3.2 Практическое занятие 2(2 часа)

Тема: «Моделирование посевов и использования удобрений»

3.2.1 Задание для работы:

1. Моделирование размещения посевов по участкам земли различного плодородия.
2. Моделирование севооборотов.
3. Моделирование использования минеральных удобрений

3.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Моделирование размещения посевов по участкам земли различного плодородия.

Задача оптимизации структуры посевных площадей может рассматриваться и как составная часть планирования производства предприятия, где она моделируется во взаимосвязи с животноводством и как самостоятельная задача. Разработка самостоятельной задачи оптимизации структуры посевных площадей имеет практический смысл, когда рассматривается задача размещения посевов по участкам земли различного плодородия, размещение зерновых культур в зерновом севообороте, кормовых культур в кормовом севообороте и.д.

Рассмотрим отдельные постановки задачи размещения и структуры посевов.

Для определения оптимального размещения посевов по отдельным участкам земли различного плодородия может быть применен распределительный метод. Задачу можно разработать на основе транспортной задачи.

Сформулировать задачу можно так: требуется разместить посевы сельскохозяйственных культур по участкам земли так, чтобы посевные площади по всем культурам равнялись плановым объемам, все пашни должны быть заняты под посев при этом стоимость валовой продукции была бы максимальной.

В качестве критерия оптимальности в этой задаче можно принять максимум стоимости валовой продукции сельского хозяйства, чистый доход, прибыль.

Введем условные обозначения:

m – число участков земли;

i – номер участков земли;

n – число культур;

j – номера культур;

S_i – площадь i -го участка;

S_j – площадь отведенная под j -ю культуру;

c_{ij} – стоимость j -й продукции с одного гектара i -го;

x_{ij} - площадь посева j-й культуры на ii-том участке.

Структурная модель задачи:

$$C = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \max$$

при условиях:

1. Первое условие обеспечивает, что площадь посева всех культур на каждом участке будет равна его площади.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = S_i, \text{ где } i=1 \dots m.$$

2. Второе условие гарантирует, что под каждую культуру будет отведена плановая площадь.

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = S_j, \text{ где } j=1 \dots n.$$

3. Третье условие обеспечивает равенство имеющейся земли и площади посевов всех сельскохозяйственных культур.

$$\sum_{i=1}^m S_i = \sum_{j=1}^n S_j$$

1. Условие неотрицательности переменных:

$$x_{ij} \geq 0$$

Числовая модель составляется по типу транспортной задачи, то есть заполняется платежная матрица, по строкам размещаются участки, а по столбцам культуры. Задача имеет практический смысл решения лишь тогда, когда фактически имеются участки различного плодородия.

2. Моделирование севооборотов.

Уточним понятие севооборота. Под севооборотом понимают площадь земли с обоснованным чередованием культур во времени и пространстве.

Стоит задача: определить площадь севооборотов хозяйства, которая обеспечивала бы размещение плановых посевных площадей на севооборотной площади и позволяла получить максимальный экономический эффект.

За критерий оптимальности можно принять максимум прибыли, чистого дохода, валового дохода, стоимости валовой продукции.

Формализация задачи.

n – количество севооборотов различных видов, введение которых возможно в данных условиях;

j – номера севооборотов;

i – номера культур;

m – количество культур;

x_j - площадь J-го севооборота в гектарах;

C_j - прибыль, чистый или валовой доход, стоимость валовой продукции с одного гектара в j-том севообороте;

β_{ij} - доля посевов I-й культуры в j-том севообороте;

S_i - общая заданная площадь посева I-й культуры;

S – площадь пашни в хозяйстве.

Структурная модель:

$$C = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

при условиях:

1. первое условие обеспечивает посев плановой площади по каждой культуре

$$\sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_j = S_i, \text{ где } i=1 \dots m$$

2. Второе условие предусматривает, что для вводимых севооборотов потребуется площади пашни не больше, чем ее имеется в хозяйстве.

$$\sum_{j=1}^n x_j \leq S$$

3. Условие неотрицательности переменных

$$x_{ij} \geq 0.$$

3. Моделирование использования минеральных удобрений

Пусть в хозяйстве имеется некоторое количество минеральных удобрений, требуется найти такой план их использования, который обеспечивал бы максимальную прибавку урожая.

По сути речь идет о распределении между культурами.

Формализуем задачу:

a_{ij} - норма внесения действующего вещества i -го вида для получения единицы прибавки урожая j -й культуры;

B_k - количество удобрений k -го вида (в натуре), имеющееся в хозяйстве ($k=1 \dots K$);

q_{ik} - содержание i -го действующего вещества в единице k -го удобрения;

c_j - цена единицы j -й продукции;

x_j - количество полученной прибавки j -й продукции за счет внесения минеральных удобрений;

Q_j - максимально-возможный объем прибавки j -ой продукции за счет внесения минеральных удобрений – при данной площади посева j -й культуры.

Целевая функция.

$$C = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

Так максимизируется прибавка урожая в денежном выражении:

При условиях:

1. Расход действующего вещества i -го вида для получения всей прибавки урожая по j -й культуре не должны превышать наличия действующего вещества i -го вида в k -том удобрении

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq \sum_{k=1}^K q_{ik} e_k$$

По сути ограничения данного вида сводят баланс по действующему веществу. Это прежде всего баланс азота, калия, фосфора и т.п.

2. Нижний и верхний пределы изменения переменной

$$0 \leq x_j \leq Q_j.$$

Эффективность удобрений зависит не только от культуры, под которую оно вносится, но и от характера удобряемого участка, то есть от наличия действующего вещества в почке.

Доказана зависимость прибавки урожая от способа внесения удобрений.

Рассмотрим модель с этими ограничениями.

Пусть p – номера, а P – количество способов внесения минеральных удобрений.

r – номера, а R – количество участков земли, отличающихся по содержанию питательных элементов в почве.

Модель имеет вид:

$$C = \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^R \sum_{p=1}^P c_{jrp} x_{jrp} \rightarrow \max$$

При условии:

$$1. \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^R \sum_{p=1}^P a_{ij} x_{jrp} \leq \sum_{k=1}^K q_{ik} e_k$$

$$2. 0 \leq x_{jrp} \leq Q_{jrp}$$

Нетрудно заметить, что введение ограничений по учету способов внесения минеральных удобрений, характера удобряемого участка не усложнили модель. Два типа ограничений остались, возросло лишь число индексов. Естественно, потребуется новая входная информация, но заметно возрастает и выходная информация, будучи получены новые, более ценные сведения. Здесь в качестве примера показано, как учесть дополнительные условия в модели. По такому же принципу можно учесть сроки внесения минеральных удобрений.

Задача 6

Необходимо разместить сорта озимой пшеницы по предшественникам таким образом, чтобы сбор озимой ржи был максимальным.

Символ M указывает на отсутствие данных урожайности i -го сорта по соответствующему j -му предшественнику (клетки с этим символом являются запретными).

Таблица 3.7 – Урожайность озимой ржи, ц/га

Сорта озимой	Предшественники	ц/га
--------------	-----------------	------

пшеницы	Чистый пар	Кукуруза, убранный в стадии молочной- восковой спелости	Однолетние травы на зеленый корм	Бобовые культуры	Стерневые посевы	
Безостая 1	30,7	13,6	18,4	18,9	16,1	9185
Одесская 16	26,5	<i>М</i>	16,8	19,2	15,2	5583
Белоцерковская 198	<i>М</i>	14,4	14,1	<i>М</i>	16,5	1114
Мичуринка	16,8	10,8	<i>М</i>	<i>М</i>	<i>М</i>	65
Всего, га	4503	2160	2884	2800	3600	

3.2.3 Результаты и выводы:

Задача оптимизации структуры посевных площадей может рассматриваться и как составная часть планирования производства предприятия, где она моделируется во взаимосвязи с животноводством и как самостоятельная задача. Разработка самостоятельной задачи оптимизации структуры посевных площадей имеет практический смысл, когда рассматривается задача размещения посевов по участкам земли различного плодородия, размещение зерновых культур в зерновом севообороте, кормовых культур в кормовом севообороте и.д.