ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Методы оптимальных решений

Направление подготовки: Экономика

Профиль образовательной программы: Экономика предприятий и организаций

Форма обучения: заочная

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.1 Лекция № 1 (2 часа)

Тема: «Методы оптимизации как средства принятия оптимальных решений. Линейное программирование. Основная задача линейного программирования. Графический метод решения задач линейного программирования»

Методы оптимизации как средства принятия оптимальных решений

1.1.1. Вопросы лекции:

1. Основные понятия. Классификация экономико-математических методов.
2. Методы принятия оптимальных решений. Структура модели.

1.1.2. Краткое содержание вопросов:

1. Основные понятия. Классификация экономико-математических методов.

Искусство принятия наилучших решений, основанное на опыте и интуиции, является сущностью любой сферы человеческой деятельности. Человек хорошо или плохо решает все возникающие перед ним задачи. Лицо, принимающее решение, должно всегда выбирать альтернативу с максимально ожидаемой полезностью. Рационализировать процесс принятия решений – это цель общей теории принятия решений, которая как самостоятельная дисциплина сформировалась в начале 60-х годов XX века. Сам процесс принятия решений может быть ненормализованным и формализованным.

Оптимизация – это целенаправленная деятельность, заключающаяся в получении наилучших результатов при соответствующих условиях. Оптимизация решения – это процесс перебора множества факторов, влияющих на результат. Оптимальное решение – это выбранное по какому-либо критерию оптимизации наиболее эффективное из всех альтернативных вариантов решение. В математике оптимизация связана с нахождением оптимума (т.е. максимума или минимума) некоторой функции. В данном контексте *методы оптимизации* будем рассматривать как средства принятия оптимальных решений. Они входят в состав экономико-математических методов.

В составе экономико-математических методов можно выделить следующие разделы:

1) *экономическая кибернетика* (системный анализ экономики, теория экономической информации и теория управляющих систем);

2) *математическая статистика* (выборочный метод, дисперсионный анализ, корреляционный анализ, регрессионный анализ, многомерный статистический анализ, факторный анализ, теория индексов и др.);

3) *математическая экономия* и изучающая те же вопросы с количественной стороны *эконометрия* (теория экономического роста, теория производственных функций, межотраслевые балансы, национальные счета, анализ спроса и потребления, региональный и пространственный анализ, глобальное моделирование и др.);

4) методы принятия оптимальных решений, в том числе исследование операций в экономике;

5) *методы и дисциплины, специфичные отдельно как для централизованно планируемой экономики, так и для рыночной (конкурентной) экономики* (оптимальное планирование, теория оптимального ценообразования, модели монополии, модели индикативного планирования, модели теории фирмы и т.д.). Многие из методов, разработанных для централизованно планируемой экономики, могут оказаться полезными и при экономико-математическом моделировании в условиях рыночной экономики;

6) *методы экспериментального изучения экономических явлений* (математические методы анализа и планирования экономических экспериментов, методы машинной имитации (имитационное моделирование), деловые игры, методы экспертных оценок).

2. Методы принятия оптимальных решений. Структура модели.

Перечисленные выше методы применяются адаптивно к задачам, возникающим в процессе принятия того или иного решения. Остановимся подробнее на четвертом разделе (*методы принятия оптимальных решений*), который является наиболее объемным, включающим в себя такие дисциплины и методы, как: оптимальное (математическое) программирование, методы ветвей и границ, сетевые методы планирования и управления, программно-целевые методы планирования и управления, теорию и методы управления запасами, теорию массового обслуживания, теорию игр, теорию расписаний.

Модель экономической задачи оптимизации состоит из 3-х частей:

I. Целевая функция (критерий оптимальности). Здесь описывается конечная цель, преследуемая при решении задачи. В качестве такой цели может быть или максимум получения каких-либо показателей или минимум затрат.

II. Система ограничений.

Ограничения бывают основные и дополнительные. Основные, как правило, описывают расход основных производственных ресурсов (это консервативная часть модели). В модели они обязательно присутствуют. Дополнительные – могут иметь различный характер, являются изменяемой частью модели и отражают особенность моделирования задачи.

III. Условие неотрицательности переменных величин. А также граничные условия, которые показывают, в каких пределах могут быть значения искомых переменных в оптимальном решении.

Линейное программирование. Основная задача линейного программирования. Графический метод решения задач линейного программирования.

1.1.1. Вопросы лекции:

1. Классификация методов линейного программирования.
2. Основная задача линейного программирования и её модель в различных формах записи.
3. Графический метод решения задачи линейного программирования.

1.1.2. Краткое содержание вопросов:

1. Классификация методов линейного программирования.

С чисто математической точки зрения задачи линейного программирования интересны тем, что здесь неприменимы методы нахождения экстремумов с помощью производной.

Под *линейным программированием* понимается линейное планирование, т.е. получение оптимального плана-решения в задачах с линейной структурой.

Задачами линейного программирования называются задачи, в которых линейны как целевая функция, так и ограничения в виде равенств и неравенств и для которых методы математического анализа оказываются непригодными. Линейное программирование представляет собой наиболее часто используемый метод оптимизации.

Методы линейного программирования подразделяются на группы:

1) группа симплексных методов (точные);
2) группа распределительных методов (точные и приближённые).

Точные – методы перебора вариантов решения задачи в итоге дающие оптимальный вариант. Используются при машинном решении задач.

Приближённые – позволяют получить только один из допустимых вариантов решения задачи. Используются для получения первого варианта в точных распределительных методах или для ручного решения задачи.

Каждая группа методов имеет свою базовую задачу. Для группы симплекс-методов базовой является «Основная задача линейного программирования», для группы распределительных методов – «Транспортная задача».

2. Основная задача линейного программирования и её модель в различных формах записи.

Постановка задачи.

Пусть некоторое предприятие имеет m видов производственных ресурсов. Порядковый номер ресурсов – i, т.е. i=1, 2,…, m.

Наличие каждого вида ресурсов известно и обозначается b_i.

Предположим, что предприятие может производить n видов продукции. Порядковый номер продукции – j, т.е. j=1, 2, …, n.

Необходимо определить какое количество единиц продукции каждого вида надо производить (x_j), чтобы получить максимум этой продукции в стоимостном выражении, если известны затраты на производство единицы продукции каждого вида ресурса (a_{ij}) и цена реализации (c_j).

Развернутая форма записи модели.

I. Целевая функция – описывает выход продукции в стоимостном выражении:

$Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\rightarrow\max.$

II. Система основных ограничений – описывает с помощью математической зависимости тот факт, что расходы производственных ресурсов не должны превышать их наличие:

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \le b_1;$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \le b_2;$

…………………………….

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n \le b_m.$

III. Условие неотрицательности переменных величин:

$x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ \ldots,\ x_n\ge0.$

<u>*Замечание:*</u> в постановке с выбором другого критерия оптимальности целевая функция может стремиться к минимуму. Кроме того система ограничений может быть смешанной, т.е. содержать не только неравенства (≤,≥), но и равенства.

Структурная форма записи модели.

В такой форме модели даются в специализированной литературе. В этой форме записи отражается структура и тип ограничений, структура функции, какие переменные входят в функцию Z и в ограничения.

I. $Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow\max.$

II. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$, i=1,2,…,m.

III. $x_j\ge0$, j=1,2,…,n.

<u>*Замечание:*</u> одной формулой можно описать ограничения, имеющие одинаковую структуру и тип и включающие в себя одни и те же переменные.

Существуют также векторная, матричная и табличная формы записи модели.

3. Графический метод решения задачи линейного программирования

Графический метод основан на геометрической интерпретации задач линейного программирования и применяется в основном при решении задач *двумерного пространства*, так как довольно трудно, а чаще практически невозможно изобразить графически многогранник решений, который образуется в результате пересечения полупространств. Поэтому, сущность графического метода решения задач линейного программирования рассмотрим на примере задачи, заданной в двумерном пространстве, т.е. ее ограничения содержат две переменные.

1.2 Лекция № 2 (2 часа)
Тема: «Симплексный метод решения задачи линейного программирования»

1.2.1. Вопросы лекции:

1. Общая характеристика симплекс-метода и подготовка модели к решению.
2. Алгоритм симплекс-метода.
3. Особые случаи в симплекс-методе.

1.2.2. Краткое содержание вопросов:

1. Общая характеристика симплекс-метода и подготовка модели к решению.

Весь путь решения задачи симплекс-методом условно можно разбить на три этапа.

I *этап.* Нахождение исходного варианта и исследование его на допустимость, т.е. получение начального опорного решения.

Допустимым вариантом решения задачи будем считать такие значения x_j, при которых выполняются все требования системы ограничений (все неравенства верны и непротиворечивы).

Если исходный вариант допустим, то опорное решение найдено и переходим на второй этап. Иначе, осуществляем перебор вариантов решения задачи до получения допустимого (если такое возможно. Если нет, то задача решения не имеет).

II *этап.* Исследования допустимого варианта на оптимальность.

Оптимальный вариант – это такое значение переменной x_j при котором будут выполняться не только требования системы ограничений, но и требования целевой функции. Если допустимый вариант окажется оптимальным, то задача решена, иначе переходим на третий этап.

III *этап.* Перебор вариантов решения задачи до получения оптимального варианта (если такое возможно. Если нет, то задача не имеет оптимального решения).

Подготовленная модель основной задачи линейного программирования будет выглядеть следующим образом:

I. $Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\rightarrow\max$.

II. $y_1=-a_{11}x_1-a_{12}x_2-\ldots-a_{1n}x_n+b_1$;

$y_2=-a_{21}x_1-a_{22}x_2-\ldots-a_{2n}x_n+b_2$;

....

$y_m=-a_{m1}x_1-a_{m2}x_2-\ldots-a_{mn}x_n+b_m$.

III. $x_1\geq0$, $x_2\geq0$, …, $x_n\geq0$.

Из этого вида данные заносятся в табличную форму для осуществления решения.

2. Алгоритм симплекс-метода.

I *этап*: получение начального опорного решения.

Для того, чтобы получить исходный вариант достаточно записать подготовленную модель в табличной форме.

Таблица 1 – Симплекс-таблица исходного варианта

свободные переменные

базисные переменные

	$-x_1$	$-x_2$	…	$-x_n$	Свободные члены
y_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
y_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
Z	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_n$	0

Из каждой таблицы можно выписать один вариант решения задачи. Для этого надо помнить, что свободные переменные (верхняя строка таблицы) приравниваются к нулю, а базисные (крайний левый столбец) к соответствующим свободным членам.

Исходный вариант (по таблице 1):

1) основные переменные (x_j): x_1=0, x_2=0,…, x_n=0;

2) дополнительные переменные (y_i): $y_1=b_1$, $y_2=b_2$,…, $y_m=b_m$;

3) Z=0.

Исследуем полученный вариант на допустимость.

Теорема о допустимости: в таблице будет находиться допустимый вариант решения задачи, если среди свободных членов не будет отрицательных (элемент на пересечение столбца свободных членов и строки Z при анализе во внимание не принимается).

Доказательство: свободные члены являются значениями базисных переменных, если среди базисных переменных есть x_j, то они не могут быть отрицательными в силу условия неотрицательности ($x_j \geq 0$). Если в базисе y_i, то оно не должно быть отрицательным так как y_i вводилась как разница между большей и меньшей частью неравенства.

Если вариант допустим, то перейдем на второй этап и исследуем его на оптимальность. Если нет, то попытаемся получить допустимый вариант, выбрав разрешающий элемент по следующему правилу:

- выбор разрешающей строки: среди отрицательных свободных членов (кроме строки Z), выбрать больший по абсолютной величине. Пусть это b_2;

- выбор разрешающего столбца: взять симплексные отношения, поделив свободный член разрешающей строки на каждый её коэффициент:

$$\frac{b_2}{a_{21}}, \frac{b_2}{a_{22}}, \ldots, \frac{b_2}{a_{2n}}.$$

Наименьшее положительное из симплексных отношений укажет на столбец.

Выбирая описанным способом разрешающие элементы, делаем шаги до получения допустимого варианта (если такое возможно).

Предположим, что на каком-то шаге мы получим таблицу с допустимым вариантом, т.е. найдем опорное решение.

II *этап*: исследование допустимого варианта на оптимальность.

Теорема об оптимальности: в таблице будет находиться оптимальный вариант, если среди коэффициентов строки Z не будет отрицательных при $Z \rightarrow \max$ и не будет положительных при $Z \rightarrow \min$ (элемент на пересечение столбца свободных членов и строки Z при анализе во внимание не принимается).

Если вариант окажется оптимальным, то задача решена, если нет, то переходим на третий этап.

Предположим, что наш допустимый вариант не оптимален.

III *этап:* нахождение оптимального варианта.

Попытаемся получить оптимальный вариант, выбрав разрешающий элемент по следующему правилу:

при $Z \rightarrow \max$:

- разрешающий столбец: среди отрицательных коэффициентов строки Z выбрать наибольший по абсолютной величине (например, пусть это c_n);

- разрешающая строка: взять симплексные отношения, поделив свободные члены на соответствующие элементы разрешающего столбца, кроме строки Z:

$$\frac{b_1}{a_{1n}}, \frac{b_2}{a_{2n}}, \ldots, \frac{b_m}{a_{mn}}.$$

Наименьшее положительное из симплексных отношений укажет на строку;

при $Z \rightarrow \min$:

- разрешающий столбец: среди положительных коэффициентов строки Z выбрать наибольший (например, пусть это c_1);

- разрешающая строка: взять симплексные отношения, поделив свободные члены на соответствующие элементы разрешающего столбца, кроме строки Z:

$$\frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_2}{a_{21}}, \ldots, \frac{b_m}{a_{m1}}.$$

Наименьшее положительное из симплексных отношений укажет на строку.

Выбирая описанным способом разрешающий элемент, делаем шаги до получения оптимального варианта (если такое возможно).

3. Особые случаи в симплекс-методе.

1. Неразрешимость модели (система неравенств не имеет решения).
2. Неограниченность функционала (функция не имеет экстремального значения).
3. Альтернативный оптимум.
4. Случай вырожденности.
5. Смешанная система ограничений.

Лекция № 3 (2 часа)
1.3 Тема: «Целочисленность в линейном программировании. Двойственность в линейном программировании»

Целочисленность в линейном программировании

1.3.1. Вопросы лекции:

1. Постановка и модель целочисленной задачи.
2. Решение целочисленных задач линейного программирования.
3. Некоторые экономические задачи целочисленного программирования.

1.3.2. Краткое содержание вопросов:

1. Постановка и модель целочисленной задачи.

Пусть некоторое предприятие имеет n видов производственных ресурсов. Порядковый номер ресурсов – i, т.е. $i = 1, 2, \ldots, m$. Наличие каждого вида ресурсов известно и обозначается b_i. Предположим, что предприятие может производить m видов продукции. Порядковый номер продукции – j, т.е. $j = 1, 2, \ldots, n$. Необходимо определить какое количество единиц продукции каждого вида надо производить (x_j), чтобы получить максимум этой продукции в стоимостном выражении, если известно, что затраты на производство единицы продукции каждого вида ресурса равны a_{ij} единиц, а цена реализации – c_j. Единицы производимой продукции должны принимать целые значения. Тогда модель задачи будет выглядеть следующим образом:

I) $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \max$.

II) $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1$,
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2$,
……………………………
$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m$.

III) $x_j \ge 0$ и x_j – целые, $j = 1, 2, \ldots, n$.

2. Решение целочисленных задач линейного программирования.

Иногда задачи целочисленного программирования решают приближенно. Сначала, отбросив условие целочисленности, решают задачу методом линейного программирования, а затем в полученном оптимальном решении округляют переменные до целых чисел. Такой прием можно использовать, если значения переменных достаточно велики и погрешностью округления можно пренебречь. Если значения переменных невелики, то округление может привести к значительному расхождению с оптимальным решением. Поэтому разработаны специальные методы решения целочисленных задач, среди которых можно выделить два направления: методы отсечения (отсекающих плоскостей) и комбинаторные методы.

Представление о комбинаторных методах дает широко используемый на практике метод ветвей и границ. Мы будем рассматривать метод отсекающих плоскостей, который состоит в построении дополнительных ограничений.

К методу отсекающих плоскостей относится аналитический метод решения полностью целочисленных задач – *метод Гомори*. Основная его идея заключается в том, что задача сначала решается без ограничения целочисленности. Если решение получается целочисленным, то задача решена, если нет, то к задаче присоединяют новое дополнительное ограничение, которое называют сечением. Получают новую задачу, для которой множество допустимых решений будет меньше, чем для исходной задачи, но будет содержать все допустимые целочисленные решения.

3. Некоторые экономические задачи целочисленного программирования.

Задача о ранце. Общий вес ранца заранее ограничен. Необходимо определить какие предметы положить в ранец, чтобы общая полезность отобранных предметов была максимальна, если вес каждого предмета известен.

Задача о выборе оборудования. Пусть для приобретения оборудования, размещаемого на производственной площади 38 м^2, фирма выделяет 20 млн. руб. Имеются единицы оборудования двух типов: типа А стоимостью 5 млн. руб., требующее производственную площадь 8 м^2 и имеющее производительность 7 тыс. единиц продукции за смену, и типа Б – стоимостью 2 млн. руб., занимающее площадь 4 м^2, и дающее за смену 3 тыс. единиц продукции. Требуется рассчитать оптимальный вариант приобретения оборудования, обеспечивающий максимум производительности участка.

К задачам целочисленного программирования также относятся:

- *задача оптимального раскроя материалов*: на предприятии производится раскрой нескольких различных партий материалов в заданных количествах единиц одинакового размера в каждой партии. Из материалов всех партий требуется изготовить максимальное число комплектов, в каждый из которых входит несколько различных видов деталей в заданном количестве, если известно, что каждую единицу материала можно раскроить на детали определенным количеством различных способов для получения деталей разного вида;

- *задача о назначениях*. С ее помощью можно получить ответ на вопросы типа: как распределить рабочих по станкам, чтобы общая выработка была наибольшей или затраты на заработную плату наименьшими; как наилучшим образом распределить экипажи самолетов; как назначить людей на различные должности и т.д. Математически такие задачи относятся к транспортным задачам, с той особенностью, что в них объемы наличных и требующихся ресурсов для выполнения каждой работы равны единице ($a_j = b_i = 1$), а все переменные x_{ij} либо равны единице, если i-ый работник назначен на j-ую работу, либо равны нулю в других случаях. Исходные данные задачи о назначениях группируются в таблице, которая называется матрицей оценок, а результаты – в матрице назначений. При решении задачи о назначениях используют алгоритмы и методы решения транспортных задач;

- *задача о коммивояжере*. Она относится к задачам предыдущего вида и может быть сформулирована следующим образом: имеется n городов, пронумерованных числами от 1 до n. Коммивояжер, выезжая из города 1, должен побывать в каждом городе ровно один раз и вернуться в исходный пункт при этом известны расстояния c_{ij} между городами ($i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, $i \neq j$). Требуется найти самый короткий маршрут.

Двойственность в линейном программировании

1.3.1. Вопросы лекции:

1. Постановка и модель двойственной задачи.
2. Методы решения.
3. Теоремы теории двойственности и ее экономическое содержание.

1.3.2. Краткое содержание вопросов:

1. Постановка и модель двойственной задачи.

Предположим, что некоторое предприятие решило не тратить ресурсы на изготовление продукции, а продать эти ресурсы. Тогда возникает вопрос: по какой цене продавать ресурсы? Цена должна устраивать как продавца, так и покупателя. Интерес покупающей стороны заключается в том, чтобы заплатить за ресурсы как можно меньше, а интерес продающей стороны – в том, чтобы получить за ресурсы не меньше того, что она получила бы за реализованный готовый товар.

Тогда, в так называемой *двойственной модели*, целевая функция будет описывать интерес покупающей стороны, система ограничений – интерес продающей стороны (необходимо оценить ресурсы, которые пошли бы на изготовление единицы продукции и стоимость этих ресурсов ограничить ценой реализованной единицы продукции). Третье условие (неотрицательность переменных величин) будет выполняться в силу того, что цена единицы ресурса не может быть отрицательной. Введя в качестве цены единицы ресурса величину $u_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, ее еще называют *оценкой ресурса* (или двойственной оценкой), получим следующую модель:

I) $F = b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots + b_mu_m \to \min$.

II) $a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m \geq c_1,$

$a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{m2}u_m \geq c_2,$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{mn}u_m \geq c_n.$

III) $u_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m.$

2. Методы решения.

Каждая из задач двойственной пары может решаться отдельно. При этом используется как симплексный метод, так и графический (в случае если задача содержит две переменные). Одновременное решение задач реализуется с использованием, так называемой, двойственной симплекс-таблицы.

3. Теоремы теории двойственности и ее экономическое содержание.

В качестве *основной теоремы двойственности* выделяют следующую формулировку: если одна из взаимно двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая также имеет оптимальное решение, при этом соответствующие им оптимальные значения целевых функций равны (т.е. $\max Z = \min F$).

Кроме этого варианта возможны следующие взаимоисключающие случаи: в одной из пары двойственных задач допустимое множество не пусто, а целевая функция на этом множестве не ограничена, то у другой задачи из этой пары будет пустое допустимое множество (т.е. если в одной задаче функционал не ограничен, то задача ей двойственная не имеет решения); обе из рассматриваемых задач имеют пустые допустимые множества (т.е. обе не имеют решения).

С экономической стороны решение прямой задачи дает оптимальный план выпуска продукции, а решение двойственной задачи – оптимальную систему условных (или *двойственных*) *оценок* применяемых ресурсов.

1.4 Лекция № 4 (2 часа)
Тема: «Методы решения задач линейного программирования транспортного типа»

1.4.1. Вопросы лекции:

1. Постановка и модель транспортной задачи в различных формах записи.
2. Алгоритм решения задачи.
3 Приближенные распределительные методы.

1.4.2. Краткое содержание вопросов:

1. Постановка и модель транспортной задачи в различных формах записи.

Пусть имеем m пунктов, в которых находится известное количество однородных грузов (поставщики). Порядковый номер поставщика обозначается i, то есть i=1,2,…,m. Наличие грузов у поставщика b_i. Имеется n пунктов испытывающих потребность в этих грузах (потребителей). Порядковый номер потребителя j=1,2,…,n. Потребность в грузах каждого потребителя a_j. Известна «цена» перевозки единицы груза от каждого поставщика к каждому потребителю (c_{ij}). Необходимо составить план перевозки грузов от поставщиков к потребителю, т.е. определить: какое количество груза необходимо перевезти от каждого поставщика к каждому потребителю (x_{ij}), причем значения x_{ij} должны отвечать следующим требованиям:

- общие затраты на перевозку грузов должны быть минимальными;
- все грузы от поставщиков должны быть вывезены;
- потребности потребителей в грузах должны быть удовлетворены.

I. Целевая функция описывает затраты на перевозку грузов:

$Z=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\ldots+c_{1n}x_{1n}+c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+\ldots+c_{2n}x_{2n}+\ldots+c_{m1}x_{m1}+c_{m2}x_{m2}+\ldots+c_{mn}x_{mn}\rightarrow\min.$

II. Система ограничений описывает второе и третье требования для x_{ij} из постановки задачи.

1 группа: условие полного вывоза грузов от поставщиков (сумма грузов, вывезенных от поставщика должна быть равна наличию):

$x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n} = b_1,$
$x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n} = b_2,$
……………………
$x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn} = b_m;$

2 группа: условие удовлетворения потребителя (сумма грузов привезённых потребителю должна быть равна его потребности):

$x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{m1}=a_1,$
$x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{m2}=a_2,$
…………………….
$x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn} = a_n.$

III. Условие неотрицательности переменных величин $x_{11}\geq0$, $x_{12}\geq0$, …, $x_{mn}\geq0$.

Структурная форма записи модели транспортной задачи.

В специализированной литературе модели даются в структурной форме.

I. $Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\rightarrow\min.$

II.

1) $\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=b_i,\ i=1,2,\ldots m$;

2) $\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=a_j,\ j=1,2,\ldots n$.

III. $x_{ij}\geq0$ (i = 1,2,…,m, j = 1,2,…,n).

2. Алгоритм решения задачи.

Математическая модель транспортной задачи относится к задачам линейного программирования и может быть решена симплексным методом. Однако ввиду исключительной практической важности этой задачи и специфики ограничений (ограничения заданы в виде уравнений; каждая неизвестная входит лишь в два уравнения; коэффициенты при неизвестных – единицы) для ее решения созданы специальные алгоритмы. Самым распространенным методом решения транспортной задачи является метод потенциалов.

Решение транспортной задачи разбивается на два этапа:

1) определение начального допустимого базисного решения (первого опорного плана) – первоначальное распределение поставок. Достигается посредством распределительных методов;

2) построение последовательных итераций (шагов), улучшающих опорные планы (каждый новый план не должен увеличивать суммарные затраты при $Z \to \min$ и уменьшать при $Z \to \max$). Достигается посредством метода потенциалов.

3 Приближенные распределительные методы.

К приближенным распределительным методам можно отнести метод наилучших цен и метод аппроксимации. Приближенными они называются вследствие того, что полученное при помощи этих методов распределение груза в таблице не требует дополнительной проверки на оптимальность, так как либо сразу оказывается оптимальным, либо максимально к нему приближено.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

2.1 Лабораторная работа № ЛР-1, ЛР-2 (4 часа).
Тема: «Симплексный метод решения задачи линейного программирования»

2.1.1 Цель работы: Изучить различные подходы к решению основной задачи линейного программирования.

2.1.2 Задачи работы:

1. Изучить симплексный метод решения задач линейного программирования.
2. Разобрать особые случаи в симплексном методе.
3. Научиться решению задач линейного программирования в MS Excel. Разобрать экономическую интерпретацию результатов решения задач.

2.1.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Калькулятор
2. Компьютер
3. Доска

2.1.4 Описание (ход) работы:

1. Изучить симплексный метод решения задач линейного программирования.

Задача 1

I. Целевая функция:

$Z = 30x_1 + 35x_2 + 136x_3 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 1{,}01x_1 + 1{,}01x_2 + 9{,}45x_3 \le 136 \\ 0{,}18x_1 + 0{,}19x_2 \le 21{,}4 \\ 3{,}25x_3 \le 16{,}25 \\ x_1 \ge 100 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

Решение:

Переходим от системы неравенств к системе уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = -1{,}01x_1 - 1{,}01x_2 - 9{,}45x_3 + 136 \\ y_2 = -0{,}18x_1 - 0{,}19x_2 + 21{,}4 \\ y_3 = -3{,}25x_3 + 16{,}25 \\ y_4 = x_1 - 100 \end{cases}$$

Запишем математическую модель в табличной форме:

Таблица 1

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены
$y_1 =$	1,01	1,01	9,45	136
$y_2 =$	0,18	0,19	0	21,4
$y_3 =$	0	0	3,25	16,25
$y_4 =$	–1	0	0	–100
$Z =$	–30	–35	–136	0

Для того, чтобы вести параллельно проверку вычислений необходимо в полученную таблицу 1 добавить столбец ∑ (табл. 2)

Выберем разрешающий элемент:

Таблица 2

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены	$\sum_1$
$y_1 =$	1,01	1,01	9,45	136	146,46
$y_2 =$	0,18	0,19	0	21,4	21,59
$y_3 =$	0	0	3,25	16,25	19,5
$y_4 =$	–1	0	0	–100	–99
Z=	–30	–35	–136	0	–171

Сделаем первую итерацию

Таблица 3

	$-y_4$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены	$\sum_1$	$\sum_2$
$y_1 =$	1,01	1,01	9,45	35	38,02	46,47
$y_2 =$	0,18	0,19	0	3,4	3,77	3,77
$y_3 =$	0	0	3,25	16,25	16,25	19,5
$x_1 =$	–1	0	0	100	99	99
$Z =$	–30	–35	–136	3000	2935	2799

Получен допустимый, не вырожденный, но не оптимальный вариант.

Сделаем вторую итерацию

Таблица 4

	$-y_4$	$-x_2$	$-y_1$	Свободные члены	$\sum_1$	$\sum_2$
$x_3 =$	0,11	0,11	0,11	3,7	3,92	4,03
$y_2 =$	0,18	0,19	0	3,4	4,58	3,77
$y_3 =$	–0,35	–0,35	–0,34	4,21	3,52	3,17
$x_1 =$	–1	0	0	100	99	99
$Z =$	–15,46	–20,46	14,39	3503,7	3502,63	3482,17

Получен допустимый, не вырожденный, но не оптимальный вариант.

Сделаем третью итерацию

Таблица 5

	$-y_4$	$-y_2$	$-y_1$	Свободные члены	$\sum_1$	$\sum_2$
$x_3 =$	0,01	–0,58	0,11	1,73		1,27
$x_2 =$	0,95	5,26	0	17,89		24,1
$y_3 =$	–0,02	1,84	–0,34	10,47		11,96
$x_1 =$	–1	0	0	100		99
$Z =$	3,92	107,68	14,39	3869,83		3995,82

Получен допустимый вариант, являющийся оптимальным.

$Z = 3869{,}83$

$$\begin{cases} x_1 = 100 \\ x_2 = 17{,}89 \\ x_3 = 1{,}73 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 10{,}47 \\ y_4 = 0 \end{cases}$$

Рассмотренная нами задача в исходном виде была сформулирована следующим образом:

Продукцией городского молочного завода являются молоко, кефир и сметана. На производство 1 т молока, кефира и сметаны требуется соответственно 1010, 1010 и 9450 кг молока. При этом затраты рабочего времени при разливе 1 т молока и кефира составляют 0,18 и 0,19 машино-ч. На расфасовке 1 т сметаны заняты специальные автоматы в течение 3,25 ч. Всего для производства цельномолочной продукции завод может использовать 136000 кг молока. Основное оборудование может быть занято в течение 21,4 машино-ч, а автоматы по расфасовке сметаны - в течение 16,25 ч. Прибыль от реализации 1 т молока, кефира и сметаны соответственно равна 30, 22 и 136 руб. Завод должен ежедневно производить не менее 100 т молока.

Составьте математическую модель задачи, позволяющую определить объемы выпуска молочной продукции, позволяющие получить наибольшую прибыль.

В результате полученного решения можно сделать вывод, что максимальная прибыль возможна в размере 3869,83 руб. Оптимальный объем выпуска молока – 100 т, кефира – 17,89 т, сметаны – 1,73 т.

Далее рассмотрим задачи для закрепления навыка решения симплексным методом.

Задача 2.

I. Целевая функция:

$Z = 2x_1 + 8x_2 - 5x_3 + 15x_4 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 10x_4 \le 25 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 \le 10 \\ 2x_1 + 10x_2 + 2x_3 - 5x_4 \le 26 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

Задача 3.

I. Целевая функция:

$Z = x_1 - 8x_2 + x_3 + x_4 \longrightarrow \min$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \le 2 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \ge 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \ge 2 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

Задача 4.

I. Целевая функция:

$Z = 50x_1 + 40x_2 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2 \ge 0$

Задача 5.

I. Целевая функция:

$Z = x_1 + 4x_2 + 3x_3 \longrightarrow \min$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 10 \\ 2x_1 - x_2 \ge 6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 12 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

ПРИЛОЖЕНИЕ Решение систем линейных уравнений методом МЖИ (вспомогательный алгоритм)

Метод последовательных исключений, или как его называют также, *метод Жордана – Гаусса* представляет собой совокупность удобных вычислительных алгоритмов, построенных на последовательном применении эквивалентных преобразований системы уравнений. Этот же метод с некоторыми дополнениями лежит в основе симплексного метода решения задач линейного программирования.

Существуют обыкновенные жордановы исключения (ОЖИ) и модифицированные жордановы исключения (МЖИ). Будем рассматривать метод модифицированных жордановых исключений.

Пусть дана система линейных уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 +\ldots+ a_{1s}x_s +\ldots+ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 +\ldots+ a_{2s}x_s +\ldots+ a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 +\ldots+ a_{ks}x_s +\ldots+ a_{kn}x_n = b_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 +\ldots+ a_{ms}x_s +\ldots+ a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \quad (1)$$

Условные обозначения:

i – порядковый номер уравнения, $i = 1, 2,\ldots, m$;

j – порядковый номер переменной x, $j = 1, 2,\ldots, n$.

Введем дополнительные переменные y_i по каждой строке, перенеся элементы из левой части в правую с противоположным знаком. Получим систему:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \alpha_{11}(-x_1) + \alpha_{12}(-x_2) +\ldots+ \alpha_{1s}(-x_s) +\ldots+ \alpha_{1n}(-x_n) + b_1 \\ y_2 = \alpha_{21}(-x_1) + \alpha_{22}(-x_2) +\ldots+ \alpha_{2s}(-x_s) +\ldots+ \alpha_{2n}(-x_n) + b_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ y_k = \alpha_{k1}(-x_1) + \alpha_{k2}(-x_2) +\ldots+ \alpha_{ks}(-x_s) +\ldots+ \alpha_{kn}(-x_n) + b_k \\ \ldots\ldots\ldots \\ y_m = \alpha_{m1}(-x_1) + \alpha_{m2}(-x_2) +\ldots+ \alpha_{ms}(-x_s) +\ldots+ \alpha_{mn}(-x_n) + b_m \end{array}\right\} \quad (2)$$

Решать систему будем в табличной форме.

Систему (2) запишем в таблицу МЖИ следующего вида (таблица П1).

Таблица П1 – Исходная таблица

	$-x_1$	$-x_2$	…	$-x_s$	…	$-x_n$	Свободные члены
y_1	α_{11}	α_{12}	…	α_{1s}	…	α_{1n}	b_1
y_2	α_{21}	α_{22}	…	α_{2s}	…	α_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…	…	…
y_k	α_{k1}	α_{k2}	…	α_{ks}	…	α_{kn}	b_k
…	…	…	…	…	…	…	…
y_m	α_{m1}	α_{m2}	…	α_{ms}	…	α_{mn}	b_m

Чтобы решить систему необходимо x_j и y_i поменять местами по алгоритму МЖИ. Выбирая разрешающие элементы, будем проводить расчеты в каждой следующей таблице (таблица П2).

Таблица П2 – Преобразованная таблица

	$-x_1$	$-x_2$	…	$-y_k$	…	$-x_n$	Свободные члены
y_1	β_{11}	β_{12}	…	$\frac{-\alpha_{1s}}{\alpha_{ks}}$	…	β_{1n}	β_1
y_2	β_{21}	β_{22}	…	$\frac{-\alpha_{2s}}{\alpha_{ks}}$	…	β_{2n}	β_2
…	…	…	…	…	…	…	…
x_s	$\frac{\alpha_{k1}}{\alpha_{ks}}$	$\frac{\alpha_{k2}}{\alpha_{ks}}$	…	$\frac{1}{\alpha_{ks}}$	…	$\frac{\alpha_{kn}}{\alpha_{ks}}$	$\frac{b_k}{\alpha_{ks}}$
…	…	…	…	…	…	…	…
y_n	β_{m1}	β_{m2}	…	$\frac{-\alpha_{ms}}{\alpha_{ks}}$	…	β_{mn}	β_m

Переход от одной таблицы к другой – шаг МЖИ.

В первой таблице k-ая строка будет называться разрешающей строкой**,** s-ый столбец называется разрешающим столбцом. Коэффициент, который стоит на пересечении α_{ks} – разрешающий элемент. Переменные из левого столбца – базисные. Переменные, оказавшиеся в верхней строке таблицы называются свободными.

Сравнивая первую и вторую таблицы сформулируем правило перехода (алгоритм МЖИ):

1) заполнить свободные и базисные переменные в новой таблице: поменять местами базисную и свободную переменные, оказавшиеся в разрешающих строке и столбце;

2) заполнить клетку, соответствующую разрешающему элементу, взять величину обратную разрешающему элементу;

3) заполнить строку, соответствующую разрешающей; поделить элементы разрешающей строки на разрешающий элемент;

4) заполнить столбец, соответствующий разрешающему: поделить элементы разрешающего столбца на разрешающий элемент с противоположным знаком;

5) оставшиеся клетки таблицы заполняются по выведенной формуле:

$$\beta_{ij} = \frac{\alpha_{ks}\alpha_{ij} - \alpha_{is}\alpha_{kj}}{\alpha_{ks}};$$

где k – номер разрешающей строки;

s – номер разрешающего столбца;

i – номер заполняемой строки;

j – номер заполняемого столбца;

$$\beta_{11} = \frac{\alpha_{ks}\alpha_{11} - \alpha_{is}\alpha_{k1}}{\alpha_{ks}};$$

$$\beta_{n2} = \frac{\alpha_{ks}\alpha_{n2} - \alpha_{is}\alpha_{k2}}{\alpha_{ks}}.$$

Пользоваться для расчета коэффициентов выведенной формулой не удобно, будем ее трактовать как «правило прямоугольника».

Построение прямоугольника.

Для каждой заполняемой клетки строится свой прямоугольник на предыдущей таблице:

3) первую общую для всех прямоугольников вершину ставим в клетке разрешающего элемента;

4) противоположную ей вершину ставим в клетке, соответствующей искомому элементу;

5) диагональ, соединяющая две вершины называется главной;

6) две другие вершины взять в таких клетках, чтобы получился прямоугольник.

Правило прямоугольника

От произведения элементов, стоящих в вершинах по главной диагонали прямоугольника, отнять произведение элементов, стоящих на второй диагонали и разделить на разрешающий элемент.

Для того, чтобы решить систему линейных уравнений, надо делать шаги МЖИ до того, пока все переменные y_i не перейдут из базиса в свободные переменные на место x_i. Перемещать можно в любой последовательности.

Из каждой таблицы МЖИ можно выписать решение системы, для этого надо помнить, что свободные переменные всегда приравниваются к нулю, тогда базисные будут равны соответствующим свободным членам.

Замечания:

1) разрешающий элемент не может быть равен нулю;

2) целесообразно, если возможно, выбирать разрешающий элемент равным единице, так как при этом упрощаются вычисления. Если же это окажется невозможным, то для уменьшения погрешностей при округлении целесообразно выбирать его большим по абсолютной величине.

Рассмотрим решение систем линейных уравнений методом МЖИ на конкретном примере.

Задача 1

Решить систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Решение:

Введем дополнительную переменную y_i по каждой строке, перенеся элементы из левой части в правую с противоположным знаком:

$$\begin{cases} y_1 = -x_1 - 2x_2 + x_3 + 5 \\ y_2 = -3x_1 - 5x_2 - 4x_3 + 7 \\ y_3 = -2x_1 + x_2 - 2x_3 + 1 \end{cases}$$

Запишем полученную систему в таблицу МЖИ:

Таблица 1.1

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены
y_1	1	2	–1	5
y_2	3	5	4	7
y_3	2	–1	2	1

Выберем разрешающий элемент исходя из упрощения вычислений. Пусть это $\alpha_{11}=1$. Используя алгоритм МЖИ проведем следующие действия.

1) Поменяем местами y_1 и x_1

2) Вместо разрешающего элемента α_{11} запишем ему обратный $1/\alpha_{11}=1/1=1$

3) Элементы разрешающей строки почленно разделим на разрешающий элемент, т.е.: $2/\alpha_{11}=2$; $-1/\alpha_{11}=-1$; $5/\alpha_{11}=5$

4) Элементы разрешающего столбца почленно разделим на $(-\alpha_{11})$, т.е.: $3/(-\alpha_{11}) = -3$; $2/(-\alpha_{11})=-2$

5) Остальные элементы преобразуются с использованием правила прямоугольника, т.е.:

$$\beta_{22} = \frac{1 \cdot 5 - 3 \cdot 2}{1} = -1 \qquad \beta_{32} = \frac{1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2}{1} = -5$$

$$\beta_{23} = \frac{1 \cdot 4 - 3 \cdot (-1)}{1} = 7 \qquad \beta_{33} = \frac{1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1)}{1} = 4$$

$$\beta_{24} = \frac{1 \cdot 7 - 3 \cdot 5}{1} = -8 \qquad \beta_{34} = \frac{1 \cdot 1 - 2 \cdot 5}{1} = -9$$

Таблица 1.2

	$-y_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены
x_1	1	2	–1	5
y_2	–3	–1	7	–8
y_3	–2	–5	4	–9

В качестве разрешающего элемента выберем α_{22}=–1.

Используем алгоритм МЖИ.

1. Поменяем местами y_2 и x_2

2. Вместо разрешающего элемента α_{22} запишем ему обратный $1/\alpha_{22} = 1/(-1) = -1$

3. Элементы разрешающей строки почленно разделим на разрешающий элемент, т.е.: –3/(–1)=3; 7/(–1)=–7; –8/(–1)=8

4. Элементы разрешающего столбца почленно разделим на ($-\alpha_{22}$), т.е.: 2/1=2; –5/1=-5

5. Остальные элементы преобразуются с использованием правила прямоугольника, т.е.:

$$\beta_{11} = \frac{1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-3)}{-1} = -5 \qquad \beta_{31} = \frac{-2 \cdot (-1) - (-5) \cdot (-3)}{-1} = 13$$

$$\beta_{13} = \frac{-1 \cdot (-1) - 2 \cdot 7}{-1} = 13 \qquad \beta_{33} = \frac{4 \cdot (-1) - (-5) \cdot 7}{-1} = -31$$

$$\beta_{14} = \frac{5 \cdot (-1) - 2 \cdot (-8)}{-1} = -11 \qquad \beta_{34} = \frac{-9 \cdot (-1) - (-5) \cdot (-8)}{-1} = 31$$

Таблица 1.3

	$-y_1$	$-y_2$	$-x_3$	Свободные члены
x_1	–5	2	13	–11
x_2	3	–1	–7	8
y_3	13	–5	–31	31

В качестве разрешающего элемента можно взять только α_{33} (т.к. осталось поменять местами только x_3 и y_3). Т.к. все свободные и базисные переменные поменялись местами, тот ответом будут являться числа, стоящие в столбце свободных членов.

Это является следствием того, что переменные y вводились как разность между правой и левой частями каждого из уравнений системы, т.е. y_1=y_2=y_3=0. Поэтому, если на последнем этапе восстановить систему, исходя из получившейся таблицы, то будем иметь:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}^{III}(-y_1) + \alpha_{12}^{III}(-y_2) + \alpha_{13}^{III}(-y_3) + b_1^{III} \\ x_2 = \alpha_{21}^{III}(-y_1) + \alpha_{22}^{III}(-y_2) + \alpha_{23}^{III}(-y_3) + b_2^{III} \\ x_3 = \alpha_{31}^{III}(-y_1) + \alpha_{32}^{III}(-y_2) + \alpha_{33}^{III}(-y_3) + b_3^{III} \end{cases}$$

и если y_1=y_2=y_3=0, то

$$x_1 = b_1^{III}$$

$$x_2 = b_2^{III}$$

$$x_3 = b_3^{III}.$$

Поэтому вычислим только элементы, стоящие в столбце свободных членов, предварительно выполнив пункты 1-4 алгоритма. В результате получим таблицу:

Таблица 1.4

	$-y_1$	$-y_2$	$-y_3$	Свободные члены
x_1	14/31	-3/31	13/31	2
x_2	-82/31	4/31	–7/31	1
x_3	13/(–31)	–5/(–31)	1/(–31)	–1

Таким образом, x_1=2, x_2=1, x_3=–1

Покажем, что выбирая за разрешающие элементы другие числа, получим тот же ответ.

Таблица 1.1'

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены
y_1	1	2	–1	5
y_2	3	5	4	7
y_3	2	–1	2	1

Таблица 1.2'

	$-x_1$	$-y_1$	$-x_3$	Свободные члены
x_2	1/2	1/2	–1/2	5/2
y_2	1/2	–5/2	13/2	–11/2
y_3	5/2	1/2	3/2	7/2

Таблица 1.3'

	$-y_3$	$-y_1$	$-x_3$	Свободные члены
x_2	–1/5	2/5	–8/10	18/10
y_2	–1/5	–13/5	31/5	–31/5
x_1	2/5	1/5	3/5	7/5

Таблица 1.4'

	$-y_3$	$-y_1$	$-y_2$	Свободные члены
x_2	–7/31	2/31	4/31	1
x_3	–1/31	–13/31	5/31	–1
x_1	13/31	14/31	–3/31	2

Из приведенных вычислений видно, что менять x_j с y_i можно в любом порядке, но лучше выбрать за разрешающий элемент 1 или (–1) с целью упрощения вычислений. Если решение приводится в десятичных дробях с округлением до сотых долей, то пользуются замечаниями 1 и 2, а если в обыкновенных дробях, то за разрешающий можно принять любое число из возможно допустимых.

Задание: решите самостоятельно следующие системы и проверьте ответы любым известным Вам способом.

Задача 2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

Задача 3

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

Рассмотрим особенности в решении систем линейных уравнений на примерах задача 4 и 7.

Задача 4

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} y_1 = -x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 1 \\ y_2 = -2x_1 - x_2 + 5x_3 - 1 \\ y_3 = -x_1 + x_2 + x_3 - 2 \end{cases}$$

Таблица 4.1

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены
y_1	1	2	–4	–1
y_2	2	1	–5	–1
y_3	1	–1	–1	–2

Таблица 4.2

	$-y_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены
x_1	1	2	–4	–1
y_2	–2	–3	3	1
y_3	–1	–3	3	–1

Таблица 4.3

	$-y_1$	$-x_2$	$-y_2$	Свободные члены
x_1	–5/3	–2	4/3	1/3
x_3	–2/3	–1	1/3	1/3
y_3	1	0	–1	–2

За разрешающий элемент можно выбрать только элемент, стоящий на пересечении y_3 и x_2, но он равен 0. Попробуем восстановить систему по последней таблице:

$$\begin{cases} x_1 = 5/3\ y_1 + 2x_2 - 4/3\ y_2 + 1/3 \\ x_3 = 2/3\ y_1 + x_2 - 1/3\ y_2 + 1/3 \\ y_3 = -y_1 + 0x_2 + y_2 - 2 \end{cases}$$

Рассмотрим последнее уравнение:

Т.к. $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, то $0 = -2$.

Это ложное равенство. Если в системе имеется хотя бы одно неверное равенство, то система решений не имеет. Проанализировав последнюю таблицу, получим *правило*: если разрешающий элемент равен нулю (при этом другой выбрать нельзя, т.к. все замены уже произведены), а свободный член в этой строке отличен от нуля, то система решений не имеет.

Заметим, что исход решения системы не зависит от последовательности выбора разрешающего элемента на каждом этапе.

Ответ: система решений не имеет.

Задача 5

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 4 \end{cases}$$

Задача 6

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$$

Задача 7

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

Решение:

В результате решения получим таблицу.

Таблица 7.1

	$-y_1$	$-x_2$	$-y_3$	Свободные члены
x_1	1/3	–2	–4/3	–3
y_2	–1	0	–1	0
x_3	–1/3	–1	–1/3	–1

Единственно возможный разрешающий элемент равен нулю.

Восстановим систему:

$$\begin{cases} x_1 = -1/3y_1 + 2x_2 + 4/3y_3 - 3 \\ y_2 = y_1 + 0(-x_2) + y_3 + 0 \\ x_3 = 1/3y_1 + x_2 + 1/3y_3 - 1 \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение и при условии, что $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ получим: $0 = 0$, т.е. истинное равенство, а это значит, что система уравнений линейно зависима. Т.е. содержит бесчисленное множество решений, зависящих от параметра. В данном случае параметром будет являться x_2 (при другой последовательности выбора разрешающих элементов параметром может стать или x_1, или x_3).

Таким образом, получим *правило*: если разрешающий элемент равен нулю и свободный член в этой строке также равен нулю, то система имеет бесчисленное множество решений, зависящее от стольких параметров, сколько x-ов не перешло в базис.

Тогда общее решение системы выглядит следующим образом:

$x_1 = 2x_2 - 3$

$x_3 = x_2 - 1$

Ответ: система имеет бесчисленное множество решений зависящих от x_2: $x_1 = 2x_2 - 3$, x_2, $x_3 = x_2 - 1$.

Задача 8

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 6x_4 = - \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Задача 9

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}$$

Заметим, что при получении единственного решения, возможна проверка путем подстановки найденных значений в исходную систему и проверки истинности. В случае отсутствия решений или бесчисленного множества, организация проверки затруднена. Поэтому приведем правило, которое позволяет осуществлять контроль за расчетом таблиц МЖИ:

Правило:

1. В таблице 1 берется дополнительный столбец, обозначаемый Σ_1. Этот столбец заполняется после выбора разрешающего элемента.

В Σ_1 заносятся числа, представляющие собой сумму элементов каждой строки без элементов разрешающего столбца. При этом к величине, полученной в строке, где стоит разрешающий элемент, прибавляется 1 (вне зависимости от значения самого разрешающего элемента).

Пояснения проведем для первого примера решаемого вторым способом.

Таблица 1.1"

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены	Σ_1	
y_1	1	2	–1	5	6	=1+(–1)+5+1
y_2	3	5	4	7	14	=3+4+7
y_3	2	–1	2	1	5	=2+2+1

2. Во всех последующих таблицах МЖИ берется два столбца сумм Σ_1 и Σ_2. Элементы Σ_1 предыдущей таблицы как бы проектируются в столбец Σ_2 новой таблицы в виде чисел, полученных в результате вычислений по алгоритму МЖИ (при этом новый столбец Σ_1 пока остается свободным).

Таблица 1.2"

	$-x_1$	$-y_1$	$-x_3$	Свободные члены	Σ_1	Σ_2
x_2	1/2	1/2	–1/2	5/2		3
y_2	1/2	–5/2	13/2	–11/2		–1
y_3	5/2	1/2	3/2	7/2		8

Таблица МЖИ будет рассчитана верно, если суммы всех без исключения элементов по каждой строке таблицы будут равны соответствующему элементу столбца Σ_2. Т.е.:

$$1/2 + 1/2 - 1/2 + 5/2 = 3 \text{ ист.}$$
$$1/2 - 5/2 + 13/2 - 11/2 = -1 \text{ ист.}$$
$$5/2 + 1/2 + 3/2 + 7/2 = 8 \text{ ист.}$$

Это значит, что переход от таблицы 1.1" к таблице 1.2" осуществлен верно. Далее значения, стоящие в столбце Σ_2 нам не понадобятся.

3. Повторяется последовательность действий, начиная с пункта 1.

Таблица 1.2'''

	$-x_1$	$-y_1$	$-x_3$	Свободные члены	Σ_1	Σ_2	
x_2	1/2	1/2	–1/2	5/2	5/2	3	=1/2–1/2+5/2
y_2	1/2	–5/2	13/2	–11/2	–3/2	–1	= –5/2+13/2–11/2
y_3	5/2	1/2	3/2	7/2	13/2	8	=1/2+3/2+7/2+1

Таблица 1.3"

	$-y_3$	$-y_1$	$-x_3$	Свободные члены	Σ_1	Σ_2	
x_2	–1/5	2/5	–8/10	18/10	2	6/5	= –1/5+2/5+18/10
y_2	–1/5	–13/5	31/5	–31/5	–8	–14/5	= –1/5+13/5–31/5+1
x_1	2/5	1/5	3/5	7/5	2	13/5	= 2/5+1/5+7/5

Таблица 1.4"

	$-y_3$	$-y_1$	$-y_2$	Свободные члены	Σ_1	Σ_2
x_2	–7/31	2/31	4/31	1		30/31
x_3	–1/31	–13/31	5/31	–1		–40/31
x_1	13/31	14/31	–3/31	2		86/31

Таким образом, мы делаем проверку по ходу решения примера, что позволяет вовремя заметить ошибку и устранить ее.

Использование Σ_1 и Σ_2 также дает уверенность в ответе при бесчисленном множестве решений или при отсутствии решений вообще.

Решить системы линейных уравнений с использованием Σ_1 и Σ_2.

Задача 10

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -3 \\ 6x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 2 \\ 5x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

Задача 11

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_4 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Задача 12

$$\begin{cases} 4x_1 - 17x_2 - 6x_3 - 5x_4 = -17 \\ 43x_1 + 24x_2 - x_3 + 3x_4 = 28 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 9 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Ответы

№2 $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$; **№3** $x_1 = 79/15$, $x_2 = -67/15$, $x_3 = -16/15$; **№5** система решений не имеет; **№6** система решений не имеет; **№8** $x_1 = -x_3 + 2x_4 + 3$, $x_2 = 2x_4 - 3$, при x_3 и x_4 – любое число; **№9** $x_1 = x_3 + 4$, $x_2 = -2x_3 - 1$, при x_3 – любое число; **№10** $x_1 = -5/116$, $x_2 = -1/116$, $x_3 = 64/116$; **№11** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$; **№12** $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$.

2. Разобрать особые случаи в симплексном методе.

Задача 6

I. Целевая функция:

$Z = 2x_1 + 3x_2 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 9 \\ x_1 + x_5 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_6 = 8 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0$

Решение:

Переходим от системы неравенств к системе уравнений:

$y_1 = -x_1 - x_2 - x_3 + 5$

$y_2 = -x_1 - x_2 - x_4 + 9$

$y_3 = -x_1 - x_5 + 4$

$y_4 = -x_1 - 2x_2 - x_6 + 8$

Запишем математическую модель в табличной форме. Разрешающий элемент выбирается произвольно, но в базис должен перейти y_i, который необходимо вычеркнуть.

Таблица 6

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$	Свободные члены	Σ_1
y_1	1	1	1	0	0	0	5	8
y_2	1	1	0	1	0	0	9	11
y_3	1	0	0	0	1	0	4	5
y_4	1	2	0	0	0	1	8	11
Z	–2	–3	0	0	0	0	0	–3

Сделаем первую итерацию

Таблица 7

	$-y_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$	Свободные члены	Σ_1	Σ_2
x_1	1	1	1	0	0	0	5	6	8
y_2	–1	0	–1	1	0	0	4	4	3
y_3	–1	–1	–1	0	1	0	–1	–1	–3
y_4	–1	1	–1	0	0	1	3	4	3
Z	2	–1	2	0	0	0	10	12	13

Сделаем вторую итерацию

Таблица 8

	$-y_4$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$	Свободные члены	Σ_1	Σ_2
x_1	–1	2	0	0	–1	2	3	2
y_2	0	–1	1	0	0	4	4	4
y_3	1	–2	0	1	1	2	2	3
x_2	1	–1	0	0	1	3	3	4
Z	1	1	0	0	1	13	15	16

Сделаем третью итерацию

Таблица 9

	$-x_3$	$-y_2$	$-x_5$	$-x_6$	Свободные члены	Σ_1	Σ_2
x_1	2	0	0	–1	2		3
x_4	–1	1	0	0	4		4
y_3	–2	0	1	1	2		2
x_2	–1	0	0	1	3		3
Z	1	0	0	1	13		15

Получен допустимый вариант, являющийся оптимальным.

$Z = 13$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 4 \\ x_5 = 0 \\ x_6 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 2 \\ y_4 = 0 \end{cases}$$

Далее рассмотрим задачи для закрепления навыка решения симплексным методом смешанных систем ограничений.

Задача 7

I. Целевая функция:

$Z = 290x_1 + 200x_2 + 270x_3 + 210x_4 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 30 \\ x_2 + x_4 = 36 \\ 1/3x_1 + 2/9x_2 \le 15 \\ 1/2x_3 + 1/4x_4 \le 12 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

Задача 7 в исходном виде была сформулирована следующим образом:

Дворец культуры заказал двум ателье пошить 30 мужских и 36 женских концертных костюма. Производительность первого ателье по пошиву мужских и женских костюмов составляет соответственно 3 и 4,5 шт./день, а второго ателье - 2 и 4 шт./день. Фонд рабочего времени первой мастерской составляет 15 дней, а второй мастерской - 12 дней. Цены первого ателье за 1 женский и мужской костюм составляет 200 и 290 руб. штука, цены второго ателье составляют соответственно 210 и 270 руб.

Составьте математическую модель задачи, позволяющую дворцу культуры оптимально распределить заказ между ателье, с целью минимизировать затраты на пошив костюмов.

Задача 8

I. Целевая функция:

$Z = 2x_1 + 4x_3 \longrightarrow \min$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 5 \\ x_1 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 - 4x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq 6 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Рассмотрим подробно решение задач, имеющих случай вырожденности на примере задачи 9.

Задача 9

I. Целевая функция:

$Z = -x_1 + 10x_2 + 4x_3 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 \leq 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ 2x_1 \geq x_2 + x_3 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Решение:

Переходим от системы неравенств к системе уравнений:

$y_1 = -x_1 - x_3 + 1$

$y_2 = -2x_1 - x_2 - x_3 + 2$

$y_3 = 2x_1 - x_2 - x_3$

Запишем математическую модель в табличной форме. Выберем разрешающий элемент.

Таблица 10

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены	Σ_1
y_1	1	0	1	1	3
y_2	2	1	1	2	5
y_3	–2	1	1	0	0
Z	1	–10	–4	0	–3

Вариант допустимый. Исследуем данный вариант на вырожденность. В данной симплекс-таблице находится вырожденный вариант, так как среди свободных членов (кроме строки Z), появился ноль. Выбираем разрешающий элемент.

Сделаем первую итерацию

Таблица 11

	$-x_1$	$-y_3$	$-x_3$	Свободные члены	Σ_1	Σ_2
y_1	1	0	1	1	2	3
y_2	4	–1	0	2	2	5
x_2	–2	1	1	0	2	0
Z	–19	10	6	0	16	–3

Сделаем вторую итерацию

Таблица 12

	$-y_2$	$-y_3$	$-x_3$	Свободные члены	Σ_1	Σ_2
y_1	–1/4	1/4	1	1/2		3/2
x_1	1/4	–1/4	0	1/2		1/2
x_2	1/2	1/2	1	1		3
Z	19/4	21/4	6	19/2		51/2

Получен допустимый вариант, являющийся оптимальным.

$Z = 19/2$

$$\begin{cases} x_1 = 1/2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 1/2 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

Далее рассмотрим задачи имеющих случай вырожденности.

Задача 10

I. Целевая функция:

$Z = 5x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 4x_4 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2{,}5x_3 + x_4 \leq 75 \\ 0{,}5x_1 + x_2 + 0{,}2x_3 + 0{,}1x_4 \leq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 3x_3 + 4x_4 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Задача 11

I. Целевая функция:

$Z = x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 15 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 20 \\ 4x_1 + 4x_2 \geq 2x_3 + 3x_4 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Рассмотрим подробно решение задач, имеющих случай неразрешимости модели (система неравенств не имеет решения) на примере задачи 12.

Задача 12

I. Целевая функция:

$Z = x_1 + 0{,}2x_2 + x_3 \longrightarrow \min$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 2 \\ -x_1 - 2x_2 \geq 5 \\ 2x_2 + 3x_3 \leq 1 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Решение:

Переходим от системы неравенств к системе уравнений:

$y_1 = -0{,}1x_1 - 0{,}2x_2 + 2$

$y_2 = -x_1 - 2x_2 - 5$

$y_3 = -2x_1 - 3x_3 + 1$

Запишем математическую модель в табличной форме. Выберем разрешающий элемент:

Таблица 13

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены	Σ_1
y_1	0,1	0,2	0	2	
→ y_2	1	2	0	–5	
y_3	2	0	3	1	
Z	–1	–0,2	–1	0	

Исследуем полученный вариант на допустимость. В таблице находиться недопустимый вариант решения задачи, потому что среди свободных членов имеется отрицательный элемент. При выборе разрешающего элемента получается, что среди симплексных отношений нет наименьшего положительного. Следовательно, в данной задаче невозможно найти допустимый вариант. С экономической точки зрения это значит, что ограничения модели являются взаимоисключающими, противоречащими друг другу требованиями. Задача не имеет решения.

Далее рассмотрим задачи имеющих случай неразрешимости модели (система неравенств не имеет решения).

Задача 13

I. Целевая функция:

$Z = 12x_1 + 14x_2 + 10x_3 + 8x_4 \longrightarrow \min$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq -10 \\ x_1 + 3x_2 + 0{,}5x_3 \leq 5 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_4 \leq 3 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Задача 14

I. Целевая функция:

$Z = 25x_1 + 20x_2 + 30x_3 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} -10x_1 - 8x_2 - 15x_3 \geq 100 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 20 \\ 0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}25x_3 \leq 5 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Рассмотрим подробно решение задач, имеющих случай неограниченности функционала (функция не имеет экстремального значения) на примере задачи 15.

Задача 15

I. Целевая функция:

$Z = -2x_1 - x_3 \longrightarrow \min$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 \leq 5 \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 \leq 2 \\ 6x_2 - 8x_3 \leq 8 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Решение:

Переходим от системы неравенств к системе уравнений:

$y_1 = x_1 + x_2 + x_3 + 5$

$y_2 = 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 2$

$y_3 = -6x_2 + 8x_3 + 8$

Запишем математическую модель в табличной форме. Выберем разрешающий элемент:

Таблица 14

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены	Σ_1
y_1	–1	–1	–1	5	
y_2	–3	1	–4	2	
y_3	0	6	–8	8	
Z	2	0	1	0	

Исследуем полученный вариант на допустимость. В таблице находиться допустимый вариант решения задачи, потому что среди свободных членов нет отрицательных элементов.

Исследуем полученный вариант на оптимальность. В таблице находиться неоптимальный вариант, так как коэффициенты строки Z положительные ($Z \to \min$) (элемент на пересечение столбца свободных членов и строки Z при анализе во внимание не принимается). Выбираем разрешающий элемент.

При выборе разрешающего элемента получается, что среди симплексных отношений нет наименьшего положительного. Следовательно в данной задаче невозможно найти оптимальный вариант. С экономической точки зрения речь о идее неограниченности какого-либо вида ресурса. Задача не имеет оптимального решения.

Далее рассмотрим задачи имеющих случай неограниченности функционала (функция не имеет экстремального значения).

Задача 16

I. Целевая функция:

$Z = 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 25 \\ x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_2 - x_3 \leq 10 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Задача 17

I. Целевая функция:

$Z = 8x_1 + x_2 + 10x_3 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 15 \\ 3x_1 + x_2 \leq 20 \\ 6x_2 - 11x_3 \leq 7 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Ответы

№2 $Z = 36$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0{,}8$, $y_1 = 20$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$; **№3** $Z = 2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$; **№4** $Z = 265\frac{5}{23}$, $x_1 = 3\frac{21}{23}$, $x_2 = 1\frac{17}{23}$, $y_1 = 3\frac{11}{23}$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$; **№5** $Z = 12$, $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$, $y_1 = 4$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$; **№7** $Z = 16260$, $x_1 = 30$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 36$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 5$, $y_4 = 3$; **№8** $Z = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 13$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$, $y_1 = 10$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, $y_4 = 22$; **№10** $Z = 127{,}27$, $x_1 = 18{,}18$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 9{,}09$, $y_1 = 29{,}55$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$; **№11** $Z = 57{,}86$, $x_1 = 3{,}21$, $x_2 = 3{,}21$, $x_3 = 0$, $x_4 = 8{,}57$, $y_1 = 0$, $y_2 = 5$, $y_3 = 0$; **№13** решения нет; **№14** решения нет; **№16** решения нет; **№17** решения нет.

3. Научиться решению задач линейного программирования в MS Excel. Разобрать экономическую интерпретацию результатов решения задач.

Чтобы решить задачу, используя табличный редактор MS Excel необходимо:

– Открыть табличный редактор (Пуск ⟶ Программы ⟶ MS Excel);

– Запишем числовую модель задачи на рабочий лист (рисунок 1.1). Для этого необходимо выбрать ячейки в которых будут находиться переменные. Допустим x_1→C1 x_2→C2 (выбор ячеек произволен).

В ячейке A1 запишем целевую функцию $Z = 2x_1 + 3x_2$: A1: =2 · C1+3 · C2

Примечание: запись формул всегда начинается со знака «=».

В ячейку B1 запишем левую часть 1-го ограничения ($1x_1 + 3x_2$)

B1: = C1 + 3 · C2

В ячейку B2 запишем левую часть 2-го ограничения ($1x_1 + 1x_2$)

B2: = C1 + C2

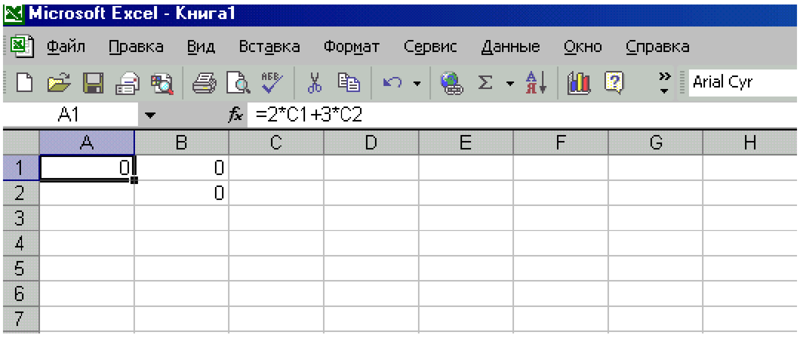

Рисунок 1.1 – Запись числовой модели на рабочем листе MS Excel

– После как числовая модель записана, необходимо установить курсор в ячейку A1 (в ней расположена целевая функция). Выбираем вкладку «Сервис» → «Поиск решения…», при этом откроется диалоговое окно функции «Поиск решения».

– В открывшемся окне необходимо установить целевую ячейку, а поскольку у вас курсор стоял на ячейке A1, то значение целевой ячейки будет правильным. В противном случае установите в ручную адрес целевой ячейки (в данном случае программа использует абсолютные адреса т.е. ячейка A1 имеет абсолютный адрес $A$1) (рисунок 1.2).

– Установите маркер в положение, соответствующие критерию оптимальности: максимальному или минимальному значению.

– В окне «Изменяя ячейки» нужно указать адреса ячеек соответствующие переменным. Для этого необходимо выделить диапазон ячейки с C1 по C2 (рисунок 1.2).

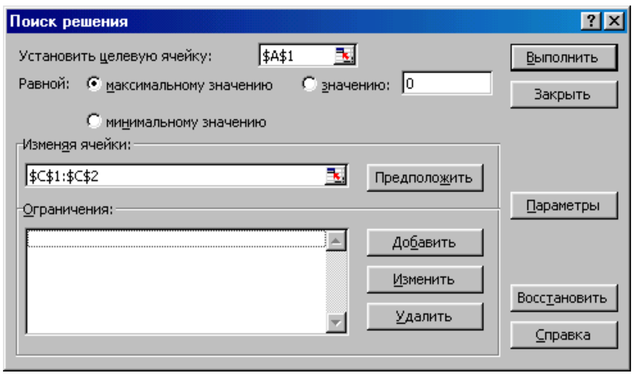

Рисунок 1.2 – Работа в диалоговом окне «Поиск решения»

– В окне «Ограничения» активировать кнопку «Добавить». Откроется окно «Добавить ограничения» (рисунок 1.3). Вводим первое ограничение: в окне «Ссылка на ячейку» указывают адрес ячейки, где находится левая часть 1-го ограничения - $B$1, затем выбирают знак ограничения « ≤ » и значение – 300.

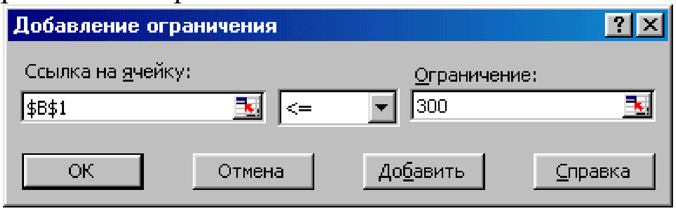

Рисунок 1.3 – Диалоговое окно «Добавление ограничения»

– Активируем клавишу «добавить» и аналогично вводим второе ограничение. Затем вводим условие неорицательности. Для этого в окне «Ссылка на ячейку» указываем диапазон ячеек, в которых находятся переменные ($C$1:$C$2). После добавления всех ограничений выбираем «ОК». Программа возвращается в диалоговое окно «Поиск решения». Ввод числовой модели закончен (рисунок 1.4).

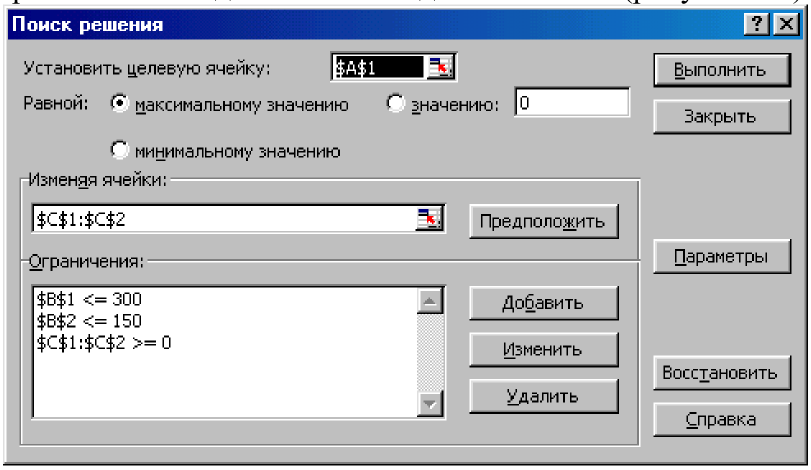

Рисунок 1.4 – Завершение ввода числовой модели в диалоговом окне «Поиск решения»

– Выбираем команду «Выполнить». На экране появится окно «Результаты поиска решения» (рисунок 1.5). Если модель составлена правильно и имеет решение, в открывшемся окне будет сообщение: «Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены». В окне «Тип отчета» выберите «Результаты» и нажмите «ОК».

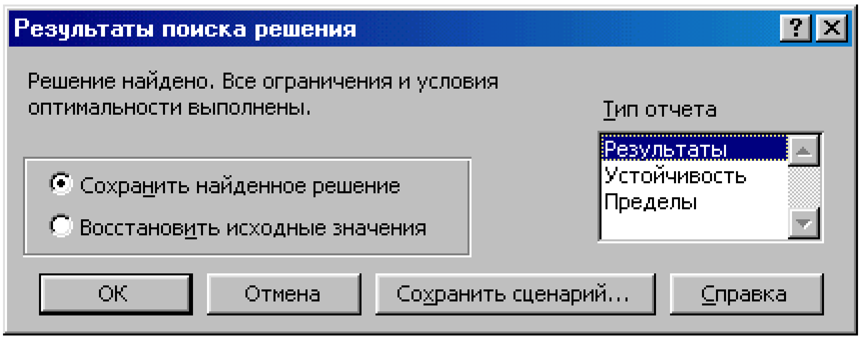

Рисунок 1.5 – Окно «Результаты поиска решения»

Результат решения задачи представлен в «Отчете по результатам» (рисунок 1.6). Решение задачи окончено.

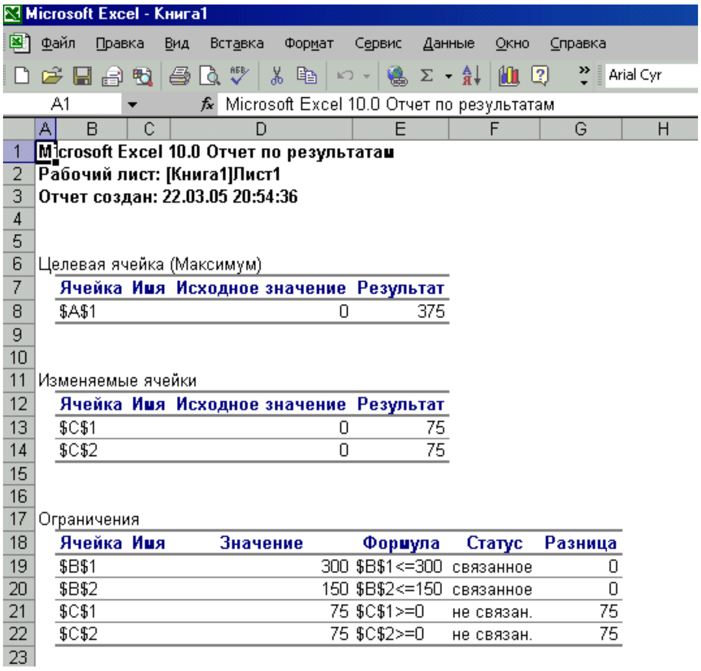

Рисунок 1.6 – Отчет по результатам

– Решение задачи окончено, результаты можно распечатать.

Примечание

Если поиск не может найти оптимальное решение, в диалоговом окне **Результаты поиска решения** выводится одно из следующих сообщений.

Поиск не может улучшить текущее решение. Все ограничения выполнены.

В процессе поиска решения нельзя найти такой набор значений влияющих ячеек, который был бы лучше текущего решения. Приблизительное решение найдено, но либо дальнейшее уточнение невозможно, либо погрешность, заданная в диалоговом окне **Параметры поиска решения** слишком высока. Измените погрешность на меньшее число и запустите процедуру поиска решения снова.

Поиск остановлен (истекло заданное на поиск время).

Время, отпущенное на решение задачи, исчерпано, но достичь удовлетворительного решения не удалось. Чтобы при следующем запуске процедуры поиска решения не повторять выполненные вычисления, установите переключатель **Сохранить найденное решение** или **Сохранить сценарий**.

Поиск остановлен (достигнуто максимальное число итераций).

Произведено разрешенное число итераций, но достичь удовлетворительного решения не удалось. Увеличение числа итераций может помочь, однако следует рассмотреть результаты, чтобы понять причины остановки. Чтобы при следующем запуске процедуры поиска решения не повторять выполненные вычисления, установите переключатель **Сохранить найденное решение** или нажмите кнопку **Сохранить сценарий**.

Значения целевой ячейки не сходятся.

Значение целевой ячейки неограниченно увеличивается (или уменьшается), даже если все ограничения соблюдены. Возможно следует в задаче снять одно ограничение или сразу несколько. Изучите процесс расхождения решения, проверьте ограничения и запустите задачу снова.

Поиск не может найти подходящего решения.

В процессе поиска решения нельзя сделать итерацию, которая удовлетворяла бы всем ограничениям при заданной точности. Вероятно, ограничения противоречивы. Исследуйте лист на предмет возможных ошибок в формулах ограничений или в выборе ограничений.

Поиск остановлен по требованию пользователя.

Нажата кнопка **Стоп** в диалоговом окне **Текущее состояние поиска решения** после прерывания поиска решения в процессе выполнения итераций.

Условия для линейной модели не удовлетворяются.

Установлен флажок **Линейная модель**, однако итоговый пересчет порождает такие значения, которые не согласуются с линейной моделью. Это означает, что решение недействительно для данных формул листа. Чтобы проверить линейность задачи, установите флажок **Автоматическое масштабирование** и повторно запустите задачу. Если это сообщение опять появится на экране, снимите флажок **Линейная модель** и снова запустите задачу.

При поиске решения обнаружено ошибочное значение в целевой ячейке или в ячейке ограничения.

При пересчете значений ячеек обнаружена ошибка в одной формуле или в нескольких сразу. Найдите целевую ячейку или ячейку ограничения, порождающие ошибку, и измените их формулы так, чтобы они возвращали подходящее числовое значение.

Набрано неверное имя или формула в окне **Добавить ограничение** или в окне **Изменить ограничение**, либо в поле **Ограничение** было задано целое или двоичное ограничение. Чтобы ограничить значения ячейки множеством целых чисел выберите оператор **целого** ограничения в списке условных операторов. Чтобы установить двоичное ограничение, выберите оператор для **двоичного** ограничения.

Интерпретация результатов задачи

Полученные значения в ячейках, содержащих формулы целевой функции или ограничений, являются результатом расчета целевой функции и соответствующих ограничений.

Результат, полученный в ячейке А1 означает прибыль, полученную от производства продукции.

Ячейки С1, С2 указывают нам на количество произведенной продукции.

В ячейке В1 записано 1-ое ограничение, характеризующее расход сырья C_1 на производство всех видов продукции. При этом получился результат равный 300, разница равна 0, что указывает на полный расход сырья данного вида.

В ячейке В2 записано второе ограничение, характеризующее расход сырья C_2 на производство продукции $П_1$ и $П_2$. Результат равен 150, разница равна 0, что полностью соответствует заданному ограничению (т.е. сырье C_2 израсходовано полностью).

Значение ячеек С1, С2 превышают 0, т.е. условие неотрицательности переменных выполнено.

Ответ

Максимальная прибыль возможна в размере 375 единиц.

Объем выпуска продукции: $П_1$ – 75 штук, $П_2$ – 75 штук.

Сырье С1 иС2 израсходовано полностью, условие неотрицательности выполнено.

2.2 Лабораторная работа № ЛР-3, ЛР-4 (4 часа).
Тема: «Методы решения задач линейного программирования транспортного типа»

2.2.1 Цель работы: Изучить методы решения задач линейного программирования транспортного типа

2.2.2 Задачи работы:

1. Изучить постановку и модель транспортной задачи.
2. Научиться решать транспортную задачу методом потенциалов.
3. Научиться решению транспортных задач в MS Excel.

2.2.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:
1. Калькулятор
2. Компьютер
3. Доска

2.2.4 Описание (ход) работы:

1. Изучить постановку и модель транспортной задачи.
(Опора на конспекты лекций)

2. Научиться решать транспортную задачу методом потенциалов.
Метод потенциалов решения транспортной задачи линейного программирования с нахождением опорного плана методом Северо-западного угла.

Задача 1

Составить план перевозки картофеля из 3 совхозов 3 магазинам так, чтобы сумма расстояний на перевозку была минимальной. Наличие картофеля (в тоннах), потребность магазинов и расстояние от совхоза до магазина (в километрах) приведены в таблице 1.

Таблица 1

Совхоз	Магазин			Запасы
	1	2	3	
1	2	8	7	300
2	6	9	3	360
3	5	2	1	180
Потребности	210	450	310	840 / 970

Дано: b_i – наличие груза у i-го поставщика (i = 1, 2, 3)

a_j – потребность j-го потребителя (j = 1, 2, 3, 4)

Возможности поставщиков:

$$\sum_{i=1}^{3} b_i = 840$$

Возможности потребителей:

$$\sum_{j=1}^{3} a_j = 970$$

$$\sum_{j=1}^{3} a_j \geq \sum_{i=1}^{3} b_i \quad \rightarrow \quad \left| \sum_{j=1}^{3} a_j - \sum_{i=1}^{3} b_i \right| = 130$$

Задача открытого типа, чтобы закрыть, нужно ввести фиктивного потребителя с потребностью b_4 = 130

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} \end{pmatrix}$$

x_{ij} – количество груза, перевозимого от i-го поставщика к j-му потребителю.

$$Z = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = a_j \ (j = 1, 2, 3) \qquad \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = b_i \ (i = 1, 2, 3, 4)$$

Условие вывоза:

$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 300$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 360$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 180$

$x_{41} + x_{42} + x_{43} = 130$

Условие удовлетворения потребностей:

$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 210$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 450$

$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 310$

$Z = 2x_{11} + 8x_{12} + 7x_{13} + 6x_{21} + 9x_{22} + 3x_{23} + 5x_{31} + 2x_{32} + 1x_{33} + 10x_{14} + 10x_{15} + 10x_{24} \to \min$

Получаем исходный вариант методом Северо-западного угла.

Таблица 2

Совхоз	Магазин			Запасы
	1	2	3	
1	2 210	8 90	7	300
2	6	– 9 360	+ 3 0	360
3	5	2 α = 5	1 180	180
4ф	10	+ 10 α = 6	– 10 130	130
Потребности	210	450	310	970 / 970

$Z_{факт} = 2 \cdot 210 + 8 \cdot 90 + 9 \cdot 360 + 1 \cdot 180 = 420 + 720 + 3240 + 180 = 4560$

Исследование на вырожденность. Вариант будет невырожденным, если число заполненных клеток N равно сумме поставщиков и потребителей за вычетом единицы: $N = m + n - 1$.

N = 5

$n + m - 1 = 3 + 3 - 1 = 6$,

т.е. $N < m + n - 1$ – вариант вырожденный, следовательно, его необходимо пополнить, проставив в недостающем числе клеток ноль. Поскольку этим дополнительным клеткам будут отвечать нулевые перевозки, то общий баланс и суммарная стоимость перевозок плана при этом не изменится. Однако проводить пополнение плана, выбирая клетки произвольно, нельзя. Необходимо учитывать условие ацикличности.

Поставим ноль в клетку (2,3).

Исследуем на оптимальность, для этого:

1) Составим систему уравнений относительно потенциалов для заполненных клеток таблицы: условие: $v_j - u_i = c_{ij}$.

для клетки (1,1) $v_1 - u_1 = c_{11} = 2$

для клетки (1,2) $v_2 - u_1 = c_{12} = 8$

для клетки (2,2) $v_2 - u_2 = c_{22} = 9$

для клетки (2,3) $v_3 - u_2 = c_{23} = 3$

для клетки (3,3) $v_3 - u_3 = c_{33} = 1$

для клетки (4,3) $v_3 - u_4 = c_{43} = 10$

Как правило $u_1 = 0$, тогда получаем:

$v_1 = 2$ $\quad u_2 = -1$

$v_2 = 8$ $\quad u_3 = 1$

$v_3 = 2$ $\quad u_4 = -8$.

2) С помощью найденных потенциалов проверим выполнение неравенства $v_j - u_i \leq c_{ij}$ для свободных клеток и вычислим

$$\alpha = \left| (v_j - u_i) - c_{ij} \right|$$

для тех из них, для которых это неравенство невыполняется.

для клетки (1,3)	$v_3 - u_1 \leq c_{13}$		
	$2 - 0 \leq 7$	верно	
для клетки (2,1)	$v_1 - u_2 \leq c_{21}$		
	$2 - (-1) \leq 6$	верно	
для клетки (3,1)	$v_1 - u_3 \leq c_{31}$		
	$2 - 1 \leq 5$	верно	
для клетки (3,2)	$v_2 - u_3 \leq c_{32}$		
	$8 - 1 \leq 2$	неверно	$\alpha_{32} = 5$
для клетки (4,1)	$v_1 - u_4 \leq c_{41}$		
	$2 - (-8) \leq 10$	верно	
для клетки (4,2)	$v_2 - u_4 \leq c_{42}$		
	$8 - (-8) \leq 10$	неверно	$\alpha_{42} = 6$

Получаем: $\alpha_{32} = 5$; $\alpha_{42} = 6$.

Существуют плохие клетки, следовательно, вариант представленный в таблице 1 не оптимальный. Для улучшения плана перевозок в таблице строится цикл перераспределения объектов перевозок. Цикл представляет собой замкнутую ломаную линию, которая начинается в той свободной клетке, где условие оптимальности нарушается наиболее сильно. В рассматриваемом примере такой клеткой является клетка (4,2), где α наибольшее ($\alpha_{42} = 6$).

При построении цикла можно проходить как через занятые, так и через свободные клетки таблицы, но повороты можно делать только в занятых клетках под прямым углом. Построим по указанным правилам цикл в таблице 2. Данный цикл показывает, что для улучшения плана перевозок, т.е. для уменьшения общей стоимости перевозок, необходимо изменить объем перевозок в тех клетках, где находятся вершины (углы поворота) цикла.

Порядок изменения объемов перевозок в вершинах цикла определяется следующим образом. В вершинах цикла расставляются знаки «+» и «–», причем в начале цикла ставится знак «+», в следующей «–», в следующей за ней вершине «+» и т.д. То есть, получаем чередование знаков «+» и «–». Направление движения при расстановке знаков от свободной клетки безразлично, так как количество вершин цикла является четной величиной. Наличие знака «+» в вершине цикла показывает, что объем перевозок необходимо увеличить. Увеличение и уменьшение объемов перевозок в вершинах цикла производится на одинаковую величину, которая выбирается равной наименьшему из объемов перевозок в тех клетках, где в вершине цикла стоит знак «–».

В итоге получаем новый вариант в таблице 3. Следующие шаги поиска оптимального варианта совершаются по аналогии вышеизложенного.

Таблица 3

Совхоз	Магазин			Запасы
	1	2	3	
1	2 210	8 90	7	300
2	6	– 9 230	+ 3 130	360
3	5	+ 2 α = 5	– 1 180	180
4ф	10	10 130	10	130
Потребности	210	450	310	970 / 970

$Z_{\text{факт}} = 2\cdot210 + 8\cdot90 + 9\cdot230 + 3\cdot130 + 1\cdot180 = 420 + 720 + 2070 + 390 + 180 = 3780$

Исследование на вырожденность. N = 6 $n + m - 1 = 3 + 3 - 1 = 6$,

т.е. $N = m + n - 1$ – вариант невырожденный.

Исследуем на оптимальность, для этого:

1) Составим систему уравнений относительно потенциалов для заполненных клеток таблицы: условие: $v_j - u_i = c_{ij}$.

для клетки (1,1) $v_1 - u_1 = c_{11} = 2$

для клетки (1,2) $v_2 - u_1 = c_{12} = 8$

для клетки (2,2) $v_2 - u_2 = c_{22} = 9$

для клетки (2,3) $v_3 - u_2 = c_{23} = 3$

для клетки (3,3) $v_3 - u_3 = c_{33} = 1$

для клетки (4,2) $v_2 - u_4 = c_{42} = 10$

Как правило $u_1 = 0$, тогда получаем:

$v_1 = 2$ $u_2 = -1$

$v_2 = 8$ $u_3 = 1$

$v_3 = 2$ $u_4 = -2$.

2) С помощью найденных потенциалов проверим выполнение неравенства $v_j - u_i \le c_{ij}$ для свободных клеток и вычислим

$\alpha = \left| (v_j - u_i) - c_{ij} \right|$

для тех из них, для которых это неравенство невыполняется.

для клетки (1,3) $v_3 - u_1 \le c_{13}$

$2 - 0 \le 7$ верно

для клетки (2,1) $v_1 - u_2 \le c_{21}$

$2 - (-1) \le 6$ верно

для клетки (3,1) $v_1 - u_3 \le c_{31}$

$2 - 1 \le 5$ верно

для клетки (3,2) $v_2 - u_3 \le c_{32}$

$8 - 1 \le 2$ неверно $\alpha_{32} = 5$

для клетки (4,1) $v_1 - u_4 \le c_{41}$

$2 - (-2) \le 10$ верно

для клетки (4,3) $v_3 - u_4 \le c_{43}$

$8 - (-2) \le 10$ верно

Получаем: $\alpha_{32} = 5$.

Существуют плохие клетки, следовательно, вариант представленный в таблице 1 не оптимальный. Для улучшения плана перевозок в таблице строится цикл перераспределения объектов перевозок. Цикл представляет начинается в той свободной клетке, где условие оптимальности нарушается наиболее сильно. В рассматриваемом примере такой клеткой является клетка (3,2), где α наибольшее ($\alpha_{32} = 5$).

В итоге получаем новый вариант в таблице 4. Следующие шаги поиска оптимального варианта совершаются по аналогии вышеизложенного.

Таблица 4

Совхоз	Магазин			Запасы
	1	2	3	
1	2 210	8 90	7	300
2	6	9 50	3 310	360
3	5	2 180	1	180
4ф	10	10 130	10	130
Потребности	210	450	310	970 970

$Z_{\text{факт}}$ = 2·210 + 8·90 + 9·50 + 3·310 + 2·130 = 420 + 720 + 450 +910 + 360 = 2860

Исследование на вырожденность.

N = 6

$n + m - 1 = 3 + 3 - 1 = 6$,

т.е. $N = m + n - 1$ – вариант невырожденный.

Исследуем на оптимальность, для этого:

1) Составим систему уравнений относительно потенциалов для заполненных клеток таблицы: условие: $v_j - u_i = c_{ij}$.

для клетки (1,1) $v_1 - u_1 = c_{11} = 2$

для клетки (1,2) $v_2 - u_1 = c_{12} = 8$

для клетки (2,2) $v_2 - u_2 = c_{22} = 9$

для клетки (2,3) $v_3 - u_2 = c_{23} = 3$

для клетки (3,2) $v_2 - u_3 = c_{32} = 2$

для клетки (4,2) $v_2 - u_4 = c_{42} = 10$

Как правило $u_1 = 0$, тогда получаем:

$v_1 = 2$ $\quad u_2 = -1$

$v_2 = 8$ $\quad u_3 = 6$

$v_3 = 7$ $\quad u_4 = -2$.

2) С помощью найденных потенциалов проверим выполнение неравенства $v_j - u_i \le c_{ij}$ для свободных клеток и вычислим

$$\alpha = \left| (v_j - u_i) - c_{ij} \right|$$

для тех из них, для которых это неравенство невыполняется.

для клетки (1,3) $\quad v_3 - u_1 \le c_{13}$

$7 - 0 \le 7$ верно

для клетки (2,1) $\quad v_1 - u_2 \le c_{21}$

$2 - (-1) \le 6$ верно

для клетки (3,1) $\quad v_1 - u_3 \le c_{31}$

$2 - 6 \le 5$ верно

для клетки (3,3) $\quad v_3 - u_3 \le c_{33}$

$7 - 6 \le 1$ верно

для клетки (4,1) $\quad v_1 - u_4 \le c_{41}$

$2 - (-2) \le 10$ верно

для клетки (4,3) $v_3 - u_4 \le c_{43}$

$7 - (-2) \le 10$ верно

Вариант оптимален.

Ответ: $Z_{\min} = 2860$

$$A = \begin{pmatrix} 210 & 90 & 0 \\ 0 & 50 & 310 \\ 0 & 180 & 0 \end{pmatrix}$$

В результате полученного решения можно сделать вывод, что минимальная сумма расстояний на перевозку будет равна 2860 км, если 1-ый совхоз перевезет 1-му и 2-му магазинам соответственно 210 т и 90 т картофеля, 2-ой совхоз 2-му и 3-му магазинам перевезет соответственно 50 т и 310 т картофеля, а 3-ий совхоз 2-му магазину – 180 т картофеля. Причем из 2-му магазину недопоставят 130 т картофеля.

Далее рассмотрим задачи для закрепления навыка решения транспортных задач.

Задача 2

Найти оптимальное решение задачи:

$b_1 = 100$ $a_1 = 140$

$b_2 = 150$ $a_2 = 170$

$b_3 = 130$ $a_3 = 230$

$b_4 = 200$

$b_5 = 180$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 8 \\ 6 & 3 & 2 \\ 8 & 9 & 3 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Решить на max.

Задача 3

Найти оптимальное решение задачи:

$b_1 = 1500$ $a_1 = 800$

$b_2 = 1000$ $a_2 = 1200$

$b_3 = 2000$ $a_3 = 1400$

$a_4 = 1100$

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 15 & 16 \\ 17 & 15 & 14 & 13 \\ 15 & 14 & 13 & 16 \end{pmatrix}$$

Решить на min.

Задача 4

Найти оптимальное решение задачи:

$b_1 = 6$ $a_1 = 4$

$b_2 = 8$ $a_2 = 6$

$b_3 = 10$ $a_3 = 8$

$a_4 = 8$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 8 & 5 \\ 2 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Решить на min.

Задача 5

Найти оптимальное решение задачи:

$b_1 = 200$ $a_1 = 150$

$b_2 = 180$ $a_2 = 130$

$b_3 = 190$ $a_3 = 150$

$a_4 = 140$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Решить на max.

Задача 6

Найти оптимальное решение задачи:

$b_1 = 500$ $a_1 = 150$
$b_2 = 300$ $a_2 = 350$
$b_3 = 100$ $a_3 = 200$
$a_4 = 100$
$a_5 = 100$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Решить на min.

Задача 7

Найти оптимальное решение задачи:

$b_1 = 150$ $a_1 = 200$
$b_2 = 250$ $a_2 = 100$
$b_3 = 50$ $a_3 = 250$
$b_4 = 100$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 6 & 7 & 6 \\ 8 & 9 & 7 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Решить на min.

Задача 8

Найти оптимальное решение задачи:

$b_1 = 130$ $a_1 = 130$
$b_2 = 55$ $a_2 = 75$
$b_3 = 80$ $a_3 = 65$
$b_4 = 65$ $a_4 = 60$
$b_5 =135$ $a_5 = 75$
$a_6 = 60$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 8 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 9 & 8 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 6 & 11 \\ 3 & 5 & 4 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Решить на min.

Ответы

№2 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 150 \\ 110 & 0 & 0 \\ 30 & 170 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \end{pmatrix}$ $Z = 4270$

№3 $A = \begin{pmatrix} 300 & 1200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1000 \\ 500 & 0 & 1400 & 100 \end{pmatrix}$ $Z = 58600$

№4 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ $Z = 78$

№5 $A = \begin{pmatrix} 70 & 130 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 150 & 30 \\ 80 & 0 & 0 & 110 \end{pmatrix}$ $Z = 4500$

№6 $A = \begin{pmatrix} 50 & 250 & 0 & 100 & 100 \\ 0 & 100 & 200 & 0 & 0 \\ 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $Z = 2300$

№7 A = $\begin{pmatrix} 150 & 0 & 0 \\ 50 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 50 \\ 0 & 100 & 0 \end{pmatrix}$ $Z = 3100$

№8 A = $\begin{pmatrix} 0 & 50 & 0 & 0 & 20 & 60 \\ 0 & 0 & 55 & 0 & 0 & 0 \\ 55 & 25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 55 & 0 \\ 75 & 0 & 0 & 60 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $Z = 1495$

3. Научиться решению транспортных задач в MS Excel.

Для решения данной задачи в Excel необходимо:

1) под запись целевой функции отвести ячейку A1;

2) под запись ограничений – ячейки столбца B (количество ячеек совпадает с количеством ограничений): B1, B2, B3, B4, B5, B6;

3) под запись искомых переменных отвести ячейки столбцов C, D, E (количество потребителей совпадает с количеством столбцов,

количество поставщиков – с количеством строк).

Примечание: искомые переменные x_{ij} будут находиться в следующих ячейках:

($x_{11} \to$ C1 $x_{12} \to$ D1 $x_{13} \to$ E1

$x_{21} \to$ C2 $x_{22} \to$ D2 $x_{23} \to$ E2

$x_{31} \to$ C3 $x_{31} \to$ D2 $x_{33} \to$ E3).

Порядок выполнения работы:

1. Ввести в ячейку A1 формулу целевой функции (рисунок 3.1):

=15*C1+17*D1+23*E1+

+ 9*C2+19*D2 + 8*E2+

+24*C3+21*D3+32*E3;

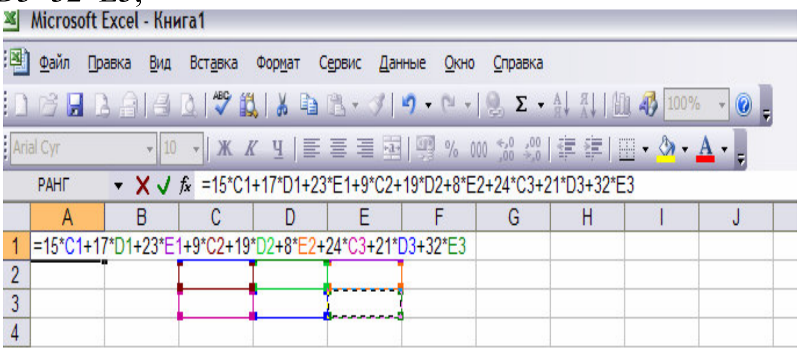

Рисунок 3.1 – Ввод целевой функции в Excel

2. а) Ввести в ячейку B1 левую часть 1-го ограничения: = C1+D1+E1 (рисунок 3.2)

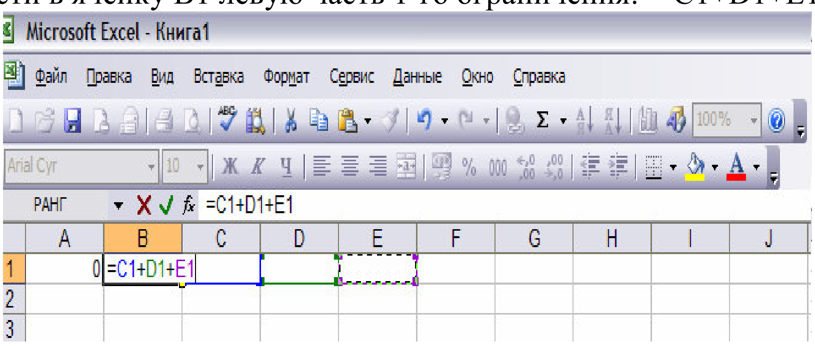

Рисунок 3.2 – Ввод ограничений в Excel

б) Ввести в ячейку B2 левую часть 2-го ограничения:

= C2+D2+E2

в) Ввести в ячейку B3 левую часть 3-го ограничения:

= C3+D3+E3

г) Ввести в ячейку B4 левую часть 4-го ограничения:

= C1+C2+C3

д) Ввести в ячейку B5 левую часть 5-го ограничения:

= D1+D2+D3

е) Ввести в ячейку B6 левую часть 6-го ограничения:

= E1+E2+E3

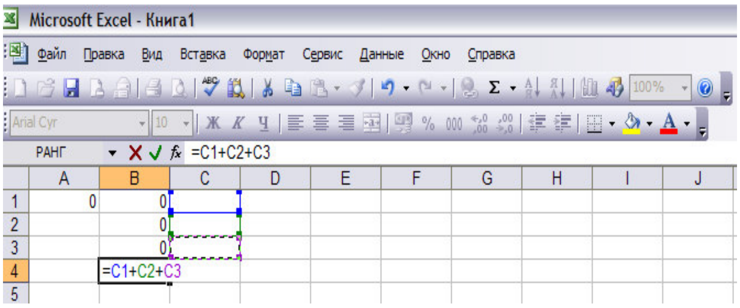

Рисунок 3.3 – Ввод ограничений в Excel

3. На панели инструментов выбрать опцию "Сервис", а в ней вкладку "Поиск решения"

Примечание

Если "Поиск решения" отсутствует, нужно выполнить команду "Сервис"–"Надстройки". В окне диалога "Надстройки" нужно установить флажок напротив строки "Поиск решения".

4. В окне диалога "Поиск решения" в поле ввода "Установить целевую ячейку" нужно ввести ссылку на ячейку A1. Необходимо выбрать способ адресации ячеек в абсолютной системе координат (т.е. указать не A1, а $A$1). Также нужно поступать с другими переменными.

5. В окне диалога "Поиск решения" нужно установить переключатель (рисунок 3.4).

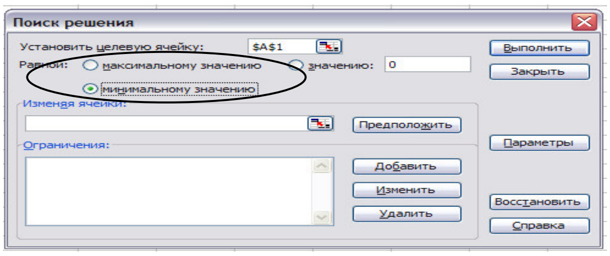

Рисунок 3.4 – Работа в диалоговом окне «Поиск решения»

6. В поле ввода "Изменяя ячейки" нужно указать ссылки на ячейки, содержащие искомые переменные, т.е. диапазон ячеек $C$1 : $E$3 (рисунок 3.5).

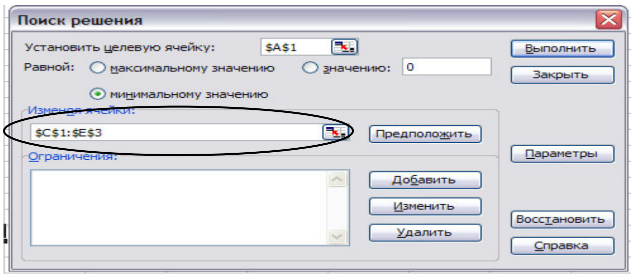

Рисунок 3.5 – Поле ввода ячеек, обозначающих искомые переменные

7. В поле ввода "Ограничения" при нажатии кнопки "Добавить" появляется окно диалога "Добавить ограничения". В поле ввода "Ссылка на ячейку" вводится $B$1. В поле ввода "Ограничение" вводится = и число 900. При помощи кнопки "Добавить" таким же образом вводятся все остальные ограничения (ячейки $B$2:$B$6) (рисунок 3.6).

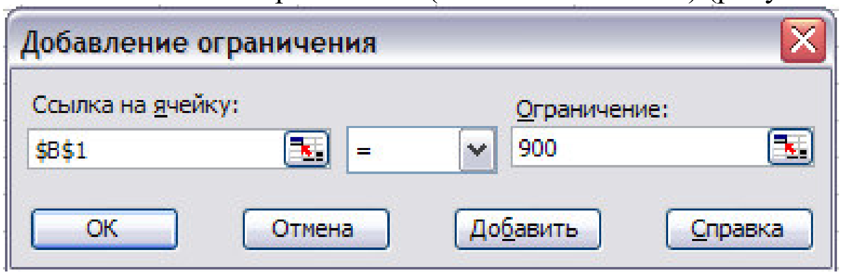

Рисунок 3.6 – Диалоговое окно «Добавление ограничения»

8. Для ввода ограничений на неотрицательность искомых переменных в окне диалога "Добавить ограничения" в поле ввода "Ссылка на ячейку" нужно ввести ссылку на ячейку $C$1, а в поле ввода "Ограничения" нужно ввести >= и число 0. При помощи кнопки "Добавить" таким же образом вводятся условия неотрицательности оставшихся искомых переменных. Либо выделяется диапазон ячеек $C$1: $E$3 и задается >= и число 0. После ввода последнего ограничения нажмите «ОК».

Примечание

Если в задаче имеется условие целочисленности искомых переменных, то в диалоговом окне «Добавление ограничений» в поле ввода "Ссылка на ячейку" нужно ввести ссылку на ячейку $C$1, а в поле ввода знака ограничения нужно ввести «цел». При помощи кнопки "Добавить" таким же образом вводятся условия целочисленности оставшихся искомых переменных. Либо выделяется диапазон ячеек $C$1: $E$3 и задается «цел». После ввода последнего ограничения нажмите «ОК».

9. После нажатия кнопки "Выполнить" Excel рассчитывает результат и открывает окно диалога "Результаты поиска решения". В этом диалоге в окне "Тип отчета" нужно выбрать "Результаты" и нажать Ok. Перед листом, где записана постановка задачи, будет вставлен лист "Отчет по результатам 1", а на экране будет выдан результат решения задачи (рисунок 3.7).

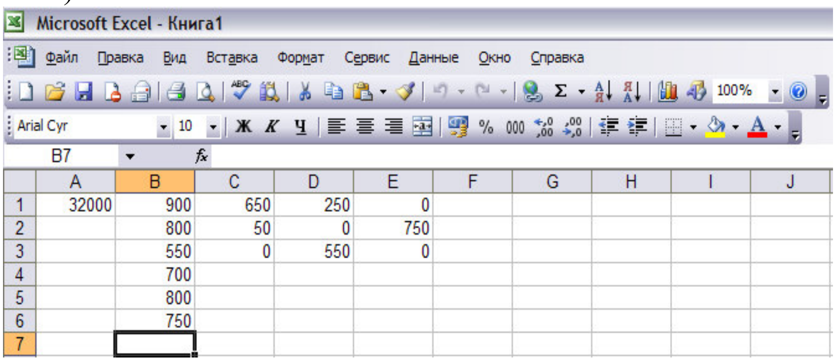

Рисунок 3.7 – Результаты решения задачи

Интерпретация результатов задачи

Полученные значения в ячейках, содержащих формулы целевой функции и ограничений, являются результатом расчета целевой функции и соответствующих ограничений.

Результат, полученный в ячейке A1, означает общую сумму объема грузоперевозок в ткм.

Ячейки B1, B2, B3 показывают выполнение условия полного вывоза груза от поставщика. Ячейки B4, B5, B6 показывают выполнение условия полного удовлетворения потребностей потребителя.

Значения ячеек в диапазоне $C$1: $E$3 показывают количество груза (в т), перевезенного от соответствующего поставщика, соответствующему потребителю. Значения данного диапазона превышают 0, следовательно условие неотрицательности искомых переменных выполнено.

Ответ. Оптимальные перевозки грузов предусматривают перевозку от 1-го поставщика 1-му потребителю 650 т, от 1-го поставщика 2-му потребителю – 250 т, от 2-го поставщика 1-му потребителю – 50 т, а 3-му потребителю – 750 т. 3-й поставщик отвезет свой груз только 2-му потребителю в количестве 550 т. Минимальный объем перевозок составит 32000 т км.

2.3 Лабораторная работа № ЛР-5 (2 часа).
Тема: «Итоговое обзорное занятие»

2.3.1 Цель работы: обобщить полученные знания, подвести итог изучения дисциплины

2.3.2 Задачи работы:

1. Закрепление решения задач.
2. Тестирование.

2.3.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Компьютер
2. Калькулятор
2. Доска

2.3.4 Описание (ход) работы:

1. Закрепление решения задач.

Подводятся итоги изучения дисциплины. При необходимости повторяется материал, вызвавший вопросы.

2. Тестирование.

Организуется пробное тестирование для самопроверки усвоенных знаний на основе тестовых заданий, представленных в ФОС дисциплины.