ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические рекомендации для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Направление подготовки Экономика
Профиль образовательной программы Экономика предприятий и организаций
Форма обучения очная

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1. Организационно-методические данные дисциплины

№ п.п.	Наименование темы	Общий объем часов по видам самостоятельной работы (*из табл. 5.1 РПД*)				
		подготовка курсового проекта (работы)	подготовка реферата/эссе	индивидуальные домашние задания (ИДЗ)	самостоятельное изучение вопросов (СИВ)	подготовка к занятиям (ПкЗ)
1	2	3	4	5	6	7
1	Матрицы и определители					12
2	Системы линейных алгебраических уравнений				4	8
3	Векторная алгебра				2	4
4	Многочлены и комплексные числа				2	4
5	Линейные преобразования и квадратичные формы					4
6	Элементы аналитической геометрии				4	8
7	Неотрицательные матрицы и модели Леонтьева					6
8	Линейное программирование				4	10

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ВОПРОСОВ

2.1. Системы линейных однородных уравнений. Пространство решений однородной системы, связь его размерности с рангом матрицы.

Система линейных уравнений называется **однородной**, если **свободные члены** во всех уравнениях этой системы равны **нулю**.

Система однородных линейных уравнений всегда совместна, поскольку имеет так называемое **тривиальное решение**, когда **все** неизвестные равны **нулю**: $X = 0$, тогда $A \times 0 = 0$.

Ранги основной и расширенной матриц системы однородных линейных уравнений всегда равны, так как вычеркивание нулевого столбца свободных членов не изменяет ранга матрицы, поэтому по теореме Кронекера-Капели СОЛУ всегда совместна.

Очевидно, что при решении однородных систем наибольший интерес представляет задача о нахождении нетривиальных решений, а такие решения могут иметь только неопределенные системы. Если однородная система _ определенная, то ее единственным решением является тривиальное. Условия, при которых однородная система является определенной или неопределенной, дает следующая теорема.

Теорема. Для того чтобы однородная система имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы А был меньше числа неизвестных, т.е. $\mathrm{rang}A < n$.
Следствие 1. Система n линейных однородных уравнений с n неизвестными тогда и только тогда имеет нетривиальные решения, когда определитель этой системы равен нулю, т.е. $\det A = 0$.
В самом деле, равенство нулю этого определителя означает, что $\mathrm{rang}A < n$ и система является неопределенной и, следовательно, имеет нетривиальные решения.
Следствие 2. Если в системе однородных уравнений число уравнений меньше числа неизвестных, то система обязательно имеет нетривиальные решения.
Действительно, в этом случае rangA не может быть равным числу неизвестных, откуда и вытекает справедливость данного утверждения.
Однородная система обладает одним очень важным свойством, которое не имеет места для неоднородных систем уравнений.
Теорема 2. Если $X_1, X_2, \ldots, X_k$ _ решения однородной системы, то всякая линейная комбинация $X = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_kX_k$ также будет решением этой системы.
В развитие этой теоремы рассмотрим вопрос о существовании такой линейно независимой совокупности решений однородной системы, через которую выражались бы все остальные ее решения.
Теорема 3. Если ранг матрицы А однородной системы равен r, т.е. $\mathrm{rang}A = r$, то система имеет $n - r$ линейно независимых решений.

2.2 Фундаментальная система решений однородной системы. Связь между общими решениями однородной и неоднородной систем.

Вернемся к неоднородной системе линейных уравнений
$AX = B$, (1) , где

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^m & \ldots & a_n^m \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \ldots \\ x^n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b^1 \\ \ldots \\ b^m \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Система линейных однородных уравнений $AX = 0$ (3) с матрицей А из системы (1) называется приведенной системой для системы (1).
Оказывается, между решениями систем (1) и (3) существует тесная связь.
Теорема 1. Сумма любого решения неоднородной системы (1) с любым решением ее приведенной системы (3) также является решением неоднородной системы (1).
Теорема 2. Разность двух любых решений неоднородной системы (1) является решением ее приведенной системы (3).
Теорема 3 (о структуре общего решения неоднородной системы). Если $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ _ любая фундаментальная система приведенной системы (3), а $\underline{\mathbf{X}}$ _ любое частное решение неоднородной системы (3), то сумма $X = \underline{\mathbf{X}} + C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_{n-r}X_{n-r}$ (4) при любых произвольных постоянных C_j, $j = 1, n - r$, является общим решением неоднородной системы (1).

2.3. Неравенство Коши-Буняковского. Процесс ортогонализации. Ортогональные дополнения подпространств…………………………………

Неравенство Коши́ — Буняко́вского связывает норму и скалярное произведение векторов в евклидовом или гильбертовом пространстве. Это неравенство эквивалентно неравенству треугольника для нормы.

Неравенство Коши — Буняковского иногда, особенно в иностранной литературе, называют *неравенством Шварца* и *неравенством Коши — Буняковского — Шварца* («неравенство КБШ»), хотя работы Шварца на эту тему появились только спустя 25 лет после работ Буняковского[1]. Конечномерный случай этого неравенства называется **неравенством Коши** и был доказан Коши в 1821 году.

Пусть дано линейное пространство L со скалярным произведением $\langle x,\ y\rangle$. Пусть $\|x\|$ — норма, порождённая скалярным произведением, то есть $\|x\| \equiv \sqrt{\langle x,\ x\rangle},\ \forall x \in L$. Тогда для любых $x,\ y \in L$ имеем: $|\langle x,\ y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы x и y пропорциональны (коллинеарны).

- В пространстве комплекснозначных квадратично суммируемых последовательностей l^2 неравенство Коши — Буняковского имеет вид:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k\right|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2\right),$$

где $\bar{y}_k$ обозначает комплексное сопряжение y_k.

- В пространстве комплексных квадратично интегрируемых функций $L^2(X,\ \mathcal{F},\ \mu)$ неравенство Коши — Буняковского имеет вид:

$$\left|\int\limits_X f(x)\overline{g(x)}\,\mu(dx)\right|^2 \leqslant \left(\int\limits_X |f(x)|^2\ \mu(dx)\right) \cdot \left(\int\limits_X |g(x)|^2\ \mu(dx)\right).$$

- В пространстве случайных величин с конечным вторым моментом $L^2(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ неравенство Коши — Буняковского имеет вид:

$\mathrm{cov}^2(X,\ Y) \leqslant \mathrm{D}[X] \cdot \mathrm{D}[Y]$, где cov обозначает ковариацию, а D — дисперсию.

Пусть L - евклидово (унитарное) пространство, подпространство $M \subset L$. Вектор $X \in L$ называется **ортогональным к подпространству** $M \subset L$, если для всех $Y \in M$ $(X,Y)=0$.

Множество всех векторов X ортогональных к подпространству M **называется ортогональным дополнением** M и обозначается $M^{\perp}$.

Очевидно, $M^{\perp}$ является подпространством пространства L, причем для размерности подпространств $M,\ M^{\perp}$ и размерность пространства L связаны соотношением

$$\dim(M^{\perp}) + \dim(M) = \dim(L).$$

Действительно, выберем базис $e_1, e_2, \ldots, e_k$ подпространства M, дополним его до базиса L, получим $E = \langle e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n \rangle$. Ортогонализируем данный базис методом Грамма-Шмидта, получим: $\Sigma = \langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, \sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_n \rangle$ - базис пространства L,

$\Sigma_1 = \langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k \rangle$ - базис подпространства M, $\Sigma_2 = \langle \sigma_{k+1}, \sigma_{k+2}, \ldots, \sigma_n \rangle$ - базис подпространства ортогонального дополнения $M^{\perp}$.

Говорят, что пространство L является прямой ортогональной суммой своих подпространств M и $M^{\perp}$: $L = M \oplus M^{\perp}$

Пусть Ek _ подпространство некоторого евклидова пространства En.

Вектор a $\in$ En называется ортогональным подпространству Ek $\subset$ En, если он ортогонален любому вектору x из подпространства Ek.

Для того чтобы вектор z был ортогонален k-мерному подпространству Ek, достаточно, чтобы он был ортогонален векторам любого базиса $\vec{e}_j,\ j=\overline{1,n},$ из Ek:

$(\vec{z}, \vec{e}_j) = 0, \quad j = \overline{1,k}.$ (1)

Действительно, любой вектор x из Ek можно представить линейной комбинации

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{e}_j.$$

Отсюда с учетом (1) следует ортогональность вектора z и любого x $\in$ Ek:

$$(\vec{z}, \vec{x}) = \left(\vec{z}, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (\vec{z}, \vec{e}_j) = 0.$$

Два подпространства Ek и El евклидова пространства En называются взаимно ортогональными, если каждый вектор из Ek ортогонален каждому вектору из El (будем писать Ek $\perp$ El).

Лемма 1. Для того чтобы подпространства Ek и El евклидова пространства En были взаимно ортогональными, необходимо и достаточно, чтобы все базисные векторы одного подпространства были ортогональны всем базисным векторам другого.

Лемма 2. Два взаимно ортогональных подпространства пересекаются только по нулевому вектору.

Подпространство El, образованное всевозможными векторами из Ek, ортогональными к подпространству Ek, называется ортогональным дополнением подпространства Ek и обозначается El = $E^{\perp}{}_{k}$.

Теорема 1. Евклидово пространство En является прямой суммой любого своего подпространства и его ортогонального дополнения

2.4. НОД многочленов и алгоритм Евклида……………

Делители многочлена Делитель многочлена $f(x)$ - многочлен $g(x)$, такой, что $f(x) = g(x)q(x)$.

Наибольший общий делитель двух многочленов Наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$ - такой их общий делитель $d(x)$, который делится на любой другой их общий делитель.

Алгоритм Евклида (алгоритм последовательного деления) нахождения наибольшего общего делителя многочленов *f(x)* и *g(x)*

$$
\begin{gathered}
f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x), \\
g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x), \\
r_1(x) = r_2(x)q_3(x) + r_3(x), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
r_{k-3}(x) = r_{k-2}(x)q_{k-1}(x) + r_{k-1}(x), \\
r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x)q_k(x) + r_k(x), \\
r_{k-1}(x) = r_k(x)q_{k+1}(x).
\end{gathered}
$$

Тогда $r_k(x)$ - наибольший общий делитель $f(x)$ и $g(x)$.

Алгоритм Евклида позволяет найти наибольший общий делитель двух многочленов, т.е. многочлен наибольшей степени, на который делятся без остатка оба данных многочлена. Алгоритм основан на том факте, что для любых двух многочленов от одного переменного, $f(x)$ и $g(x)$, существуют такие многочлены $q(x)$ и $r(x)$, называемые соответственно частное и остаток, что

$$f(x) = g(x)\cdot q(x) + r(x), \quad (*)$$

при этом степень остатка меньше степени делителя, многочлена $g(x)$, и, кроме того, по данным многочленам $f(x)$ и $g(x)$ частное и остаток находятся однозначно. Если в равенстве (*) остаток $r(x)$ равен нулевому многочлену (нулю), то говорят, что многочлен $f(x)$ делится на $g(x)$ без остатка. Алгоритм состоит из последовательного деления с остатком сначала первого данного многочлена, $f(x)$, на второй, $g(x)$:

$$f(x) = g(x)\cdot q_1(x) + r_1(x), \quad (1)$$

затем, если $r_1(x) \neq 0$, – второго данного многочлена, $g(x)$, на первый остаток – на многочлен $r_1(x)$:

$$g(x) = r_1(x)\cdot q_2(x) + r_2(x), \quad (2)$$

далее, если $r_2(x) \neq 0$, – первого остатка, $r_1(x)$, на второй остаток, $r_2(x)$:

$$r_1(x) = r_2(x)\cdot q_3(x) + r_3(x), \quad (3)$$

затем, если $r_3(x) \neq 0$, – второго остатка на третий:

$$r_2(x) = r_3(x)\cdot q_4(x) + r_4(x), \quad (4)$$

и т.д. Поскольку на каждом этапе степень очередного остатка уменьшается, процесс не может продолжаться бесконечно, так что на некотором этапе мы обязательно придем к ситуации, когда очередной, n + 1-й остаток r_{n+1} равен нулю:

$$r_{n-2}(x) = r_{n-1}(x)\cdot q_n(x) + r_n(x), \qquad (n)$$

$$r_{n-1}(x) = r_n(x)\cdot q_{n+1}(x) + r_{n+1}(x), \qquad (n+1)$$

$$r_{n+1}(x) = 0. \qquad (n+2)$$

Тогда последний не равный нулю остаток r_n и будет наибольшим общим делителем исходной пары многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Действительно, если в силу равенства $(n + 2)$ подставить 0 вместо $r_{n+1}(x)$ в равенство $(n + 1)$, затем – полученное равенство $r_{n-1}(x) = r_n(x)\cdot q_{n+1}(x)$ вместо $r_{n-1}(x)$ – в равенство (n), получится, что $r_{n-2}(x) = r_n(x)\cdot q_{n+1}(x)\, q_n(x) + r_n(x)$, т.е. $r_{n-2}(x) = r_n(x)(\, q_{n+1}(x)\, q_n(x) + 1)$, и т.д. В равенстве (2) после подстановки получим, что $g(x) = r_n(x)\cdot Q(x)$, и, наконец, из равенства (1) – что $f(x) = r_n(x)\cdot S(x)$, где Q и S – некоторые многочлены. Таким образом, $r_n(x)$ – общий делитель двух исходных многочленов, а то, что он наибольший (т.е. наибольшей возможной степени), следует из процедуры алгоритма. Если наибольший общий делитель двух многочленов не содержит переменную (т.е. является числом), исходные многочлены $f(x)$ и $g(x)$ называются *взаимно-простыми*.

2.5 Угловые точки выпуклых многогранных областей. Выпуклая оболочка системы точек в R^n.

Среди геометрических понятий, связанных с R^n, важную роль в приложениях (особенно экономических) играет понятие выпуклого множества. Множество М R^n называется выпуклым, если вместе с любыми двумя точками А и В оно содержит весь отрезок АВ. Рис.1 показывает различие между выпуклыми и невыпуклыми множествами в R^2 (т. е. на обычной плоскости).

Рис. 1

Наиболее важным примером выпуклого множества в R^n является полупространство.

Пересечение нескольких полупространств в R^n называется выпуклой многогранной областью в R^n. Выпуклая многогранная область в R^n задается с помощью системы из нескольких линейных неравенств. На рис. 2 изображены примеры выпуклых многогранных областей. В этом случае вместо «многогранных» более естественно говорить «многоугольных».

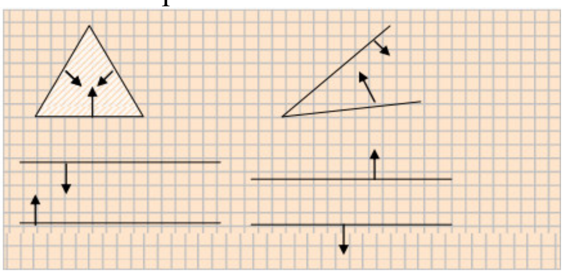


Рис. 2

Ограниченная выпуклая многогранная область называется выпуклым многогранником.

Угловые точки выпуклых многогранных областей. Рассмотрим выпуклую многоугольную область S на плоскости. Как правило, такие области имеют вершины или угловые точки. Уточним понятие вершины. Точка М выпуклой многогранной области S называется вершиной или угловой точкой области если не существует представления М в виде $M = sM_1 + (1-s)M_2$, где $M_1 \in S, M_2 \in M$ и $0 < s < 1$. Из определения следует, что для точек выпуклой многоугольной области, которые не являются вершинами, найдется отрезок, проходящий через эту точку и целиком содержащийся в области (см. рис. 3).

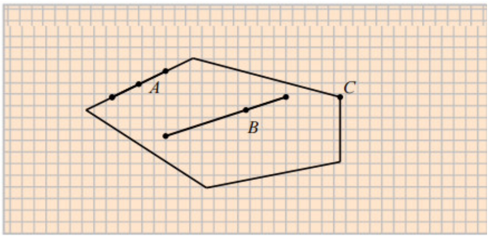


Рис. 3

Для области, изображенной на рис.3, точки A и B не являются вершинами, точка C -вершина. В случае многоугольной области для любой вершины найдутся две граничные прямые, проходящие через вершину, для которых вершина является их единственной общей точкой. Для выпуклой многогранной области в трехмерном пространстве для любой вершины найдутся, по крайней мере, три граничные плоскости с единственной общей точкой, которая является вершиной.

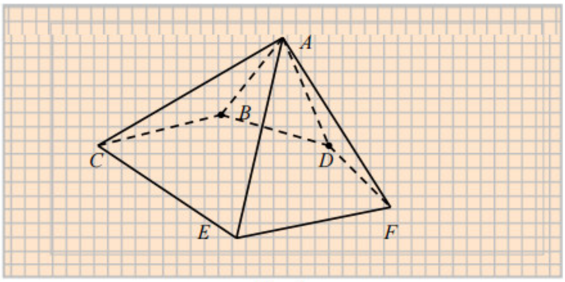


Рис. 4

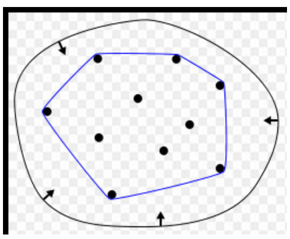
На рис. 4 через вершину A проходят пять граничных плоскостей, но достаточно взять любые три из них, чтобы единственным образом определить её.

Выпуклой оболочкой множества X называется наименьшее выпуклое множество, содержащее X. «Наименьшее множество» здесь означает наименьший элемент по отношению к вложению множеств, то есть такое выпуклое множество, содержащее данную фигуру, что оно содержится в любом другом выпуклом множестве, содержащем данную фигуру.

Обычно выпуклая оболочка определяется для подмножеств векторного пространства над вещественными числами (в частности в евклидовом пространстве) и на соответствующих аффинных пространствах.

Выпуклая оболочка множества X обычно обозначается $\operatorname{Conv} X$.

Представьте себе доску, в которую вбито — но не по самую шляпку — много гвоздей. Возьмите верёвку, свяжите на ней скользящую петлю (лассо) и набросьте её на доску, а потом затяните. Верёвка окружает все гвозди, но касается она только некоторых, самых внешних. Те гвозди, которых она касается, составляют *выпуклую оболочку* для всей группы гвоздей.



Выпуклая оболочка: пример с лассо

2.6 Понятие о взаимно-двойственных задачах линейного программирования. Основные теоремы двойственности. Двойственность в экономико-математических моделях.

Предположим, что задача линейного программирования задана в следующем виде:

$$L(X)=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n \rightarrow \max \text{ (или min)}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n \le b_1, & (\ge b_1) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n \le b_2, & (\ge b_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n \le b_m. & (\ge b_m) \end{cases} \left| \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_m \end{array} \right.$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0$$

Составим другую задачу линейного программирования, число переменных которой равно числу ограничений данной задачи, т.е. m. Обозначим их вектором $Y=(y_1, y_2, ..., y_m)$.

Эта задача имеет вид:

$$F(Y)=b_1y_1+b_2y_2+...+b_my_m \rightarrow \min \text{ (или max)}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1+a_{21}y_2+...+a_{m1}y_m \ge c_1, & (\le c_1) \\ a_{12}y_1+a_{22}y_2+...+a_{m2}y_m \ge c_2, & (\le c_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+...+a_{nm}y_m \ge c_m. & (\le c_m) \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0, ..., y_m \ge 0$$

Вторая задача называется **двойственной**, или **сопряженной** для первой, а первая – **прямой**, или **основной**.

Если для второй задачи составить двойственную задачу, то получим первую. Таким образом, сформулированные задачи составляют пару взаимно двойственных, или взаимно сопряженных задач линейного программирования.

Отметим особенности пары взаимно двойственных задач.

1) Если **основная** задача – задача на **максимум** (минимум), то система ограничений должна состоять из неравенств вида £ (³), и в таком случае ***двойственная*** задача должна быть задачей на ***минимум*** (максимум), а ее система ограничений должна состоять из неравенств вида ³ (£), т.е. **неравенств противоположного смысла.**

2) В основной задаче все переменные должны быть **неотрицательными**.

3) **Коэффициентами** целевой функции $F(Y)$ двойственной задачи являются **свободные члены** системы ограничений основной задачи, и их число равно m.

4) Основная матрица системы ограничений двойственной задачи получается **транспонированием** матрицы системы ограничений основной задачи.

5) **Свободными членами** системы ограничений двойственной задачи являются **коэффициенты** целевой функции $L(X)$ основной задачи.

6) Все переменные двойственной задачи **неотрицательные**.

Предположим теперь, что основная задача задана в **ослабленной форме**, т.е. среди ее переменных имеются переменные произвольного знака (на них не наложено требование неотрицательности), а система ограничений содержит неравенства противоположных направлений и, возможно, равенства. Построение двойственной задачи в таком случае основано на следующих правилах.

1) Все неравенства системы ограничений основной задачи следует привести **к одному направлению**: ³ в задаче на минимум или £ в задаче на максимум.

2) Если в системе ограничений основной задачи имеется **равенство (уравнение)**, то та переменная y_i, которая соответствует этому i –му ограничению-равенству, может быть произвольного знака.. Запишем это соответствие так:

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+...+a_{in}x_n=b_i \quad \rightarrow \quad y_i \in R.$$

3) Если на некоторую переменную x_j основной задачи **не наложено условие неотрицательности**, то соответствующее ей ограничение двойственной задачи является равенством

$$x_j \in R \quad \rightarrow \quad a_{1j}y_1+a_{2j}y_2+...+a_{mj}y_m=c_j$$

Для основной задачи линейного программирования и двойственной к ней задаче справедливы следующие теоремы.

Теорема (соответствия) Если одна из пары двойственных задач линейного программирования **имеет решение**, то и другая задача имеет решение, и при этом значения целевых функций этих задач равны: $L(X\text{ опт }) = F(Y\text{опт })$.
Теорема (критерий оптимальности) Произвольное допустимое базисное решение одной задачи из пары двойственных задач **оптимально** тогда и только тогда, когда система ограничений двойственной задачи совместна.
Теорема (неограниченности) Если **целевая функция** одной из пары двойственных задач **неограниченна** снизу (сверху), то ***система ограничений*** другой задачи этой пары ***несовместна***.

Если основная задача линейного программирования допускает экономическую интерпретацию, то аналогичную интерпретацию можно придать и двойственной задаче.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЗАНЯТИЯМ

3.1 Практические занятия по теме «Матрицы и определители».

При подготовке к занятиям необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Действия над матрицами, их свойства
2. Правило вычисления определителей второго порядка.
3. Способы и правила вычисления определителя третьего порядка.
4. Понятия минора и алгебраического дополнения. Теорема Лапласа.
5. Алгоритм нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.
6. Применение определителей для нахождения обратной матрицы. Алгоритм нахождение обратной матрицы.
7. Способы нахождения ранга матрицы

3.2 Практические занятия по теме «Системы линейных алгебраических уравнений».

При подготовке к занятиям необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Решение матричных уравнений вида АХ = В.
2. Алгоритм решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.
3. Теорема Кронекера-Капелли для исследования систем.
4. Алгоритм решение систем линейных алгебраических уравнений методом Крамера и метод Гаусса.

3.3 Практические занятия по теме «Векторная алгебра».

При подготовке к занятиям необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Векторы и линейные операции над ними. Свойства.
2. Линейная зависимость системы векторов и ее геометрический смысл.
3. Координаты вектора в данном базисе. Преобразование координат векторов при замене базиса.
4. Скалярное произведение векторов. Свойства.
5. Координаты вектора в ортогональном базисе.

3.4 Практические занятия по теме «Многочлены и комплексные числа».

При подготовке к занятиям необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Алгоритм разложение правильной дроби на сумму элементарных дробей.
2. Комплексные числа и действия над ними. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа.
3. Алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексных чисел. Корни n-ой степени из комплексного числа. Формулировка основной теоремы алгебры.

3.5 Практические занятия по теме «Линейные преобразования и квадратичные формы».

При подготовке к занятиям необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Линейные преобразования пространства R^n. Линейные операторы. Матрица линейного оператора.
2. Алгоритм нахождения собственных значений и собственных векторов линейных операторов.
3. Квадратичные формы, их матрицы в данном базисе. Приведение квадратичной формы к нормальному виду методом Лагранжа. Приведение квадратичной формы к каноническому виду при помощи ортогонального преобразования.

3.6 Практические занятия по теме «Элементы аналитической геометрии».

При подготовке к занятиям необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Различные виды уравнений прямой и гиперплоскости в n-мерном пространстве. Угол между гиперплоскостями. Расстояние от точки до гиперплоскости.
2. Различные виды уравнений прямой на плоскости и в пространстве.
3. Различные виды уравнений плоскости в трехмерном пространстве.
4. Классификация кривых второго порядка. Эллипс, гипербола и парабола, их свойства и канонические уравнения.
5. Классификация поверхностей второго порядка. Эллипсоиды, параболоиды и гиперболоиды, их канонические уравнения.

3.7 Практические занятия по теме «Неотрицательные матрицы и модели Леонтьева».

При подготовке к занятиям необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Модель многоотраслевой экономики Леонтьева.
2. Продуктивные модели Леонтьева. Различные критерии продуктивности модели Леонтьева.

3.8 Практические занятия по теме «Линейное программирование».

При подготовке к занятиям необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Стандартная и каноническая формы записи задач линейного программирования.
2. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования в случае двух переменных. Графический метод решения.
3. Алгоритм решение задачи линейного программирования методом перебора вершин.
4. Алгоритм симплекс-метода.
5. Алгоритм нахождение исходного допустимого базиса.
6. Метод искусственного базиса.
7. Алгоритм решения транспортная задача.