ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические рекомендации для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Направление подготовки *38.03.01 Экономика*
Профиль образовательной программы *Экономика предприятий и организаций*
Форма обучения *заочная*

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1. Организационно-методические данные дисциплины

№ п.п.	Наименование темы	Общий объем часов по видам самостоятельной работы (*из табл. 5.1 РПД*)				
		подготовка курсового проекта (работы)	подготовка реферата/эссе	индивидуальные домашние задания (ИДЗ)	самостоятельное изучение вопросов (СИВ)	подготовка к занятиям (ПкЗ)
1	2	3	4	5	6	7
1	Матрицы и определители			7		12
2	Системы линейных алгебраических уравнений			8	4	8
3	Векторная алгебра			8	2	4
4	Многочлены и комплексные числа			7	2	4
5	Линейные преобразования и квадратичные формы			7		4
6	Элементы аналитической геометрии			8	4	8
7	Неотрицательные матрицы и модели Леонтьева			6		6
8	Линейное программирование			30	4	10

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ВОПРОСОВ

2.1. Миноры, алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.

Для вычисления определителей любого порядка широко применяется теорема разложения определителя по элементам строки (столбца). Перед тем как рассмотреть теорему, введем понятия минора и алгебраического дополнения.

Минором M_{ij} некоторого элемента α_{ij} определителя называется определитель, получаемый из данного вычеркиванием 1 строки и] столбца Так минор, соответствующий элементу a_{12} есть определитель:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Он получается, если вычеркнуть первую строку и второй столбец.

Аналогично M_{13} получится вычеркиванием первой строки и третьего столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется минор этого элемента, умноженный на $(—1)^p$, где $p=i+j$.

Например, если элемент a_{12} находится на пересечении первого столбца и второй строки, то для него p=1+2=3 и алгебраическим дополнением является

$A_{12}=(-1)^3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -(a_{21} \bullet a_{33} - a_{23} \bullet a_{31})$

Теорема о разложении определителя (Теорема Лапласа):

Определитель равен сумме произведений элементов любого столбца (строки) на соответствующие им алгебраические дополнения, т. е.

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{is}$$

(разложение по элементам 1-й строки; 1=1;2;..,;n);

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{sj}A_{sj}$$

(разложение по элементам j-го столбца; j=1;2;...;n);

Например, разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки записывается так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \bullet A_{11} + a_{12} \bullet A_{21} + a_{13} + A_{13}$$

Значение теоремы разложения состоит в том, что позволяет свести вычисление определителей n-го порядка к вычислению определителей (n-1)-го порядка.

2.2. Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.

Элементарными преобразованиями над строками матрицы называются такие преобразования, для которых возможны следующие действия (над строками матриц):

1) перестановка строк;
2) вычеркивание нулевой строки (если она имеется);
3) умножение любой строки на число, отличное от 0;
4) прибавление к одной из строк другой строки, умноженной на любое число, отличное от 0.

Пример: Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ с помощью элементарных преобразований.

Решение: Для того, чтобы получить обратную матрицу с помощью элементарных преобразований нужно приписать к данной матрице через вертикальную черту (слева или справа) единичную матрицу той же размерности. Далее с помощью элементарных преобразований над строками «сдвоенной» матрицы (A\E) приводим матрицу A (левую половину) к единичной матрице, тогда на месте приписанной единичной матрицы , окажется обратная A^{-1}.

$$(A/E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & +6 & +4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

2.3. Применение определителей для нахождения обратной матрицы.

Обратной матрицей по отношению к данной называется матрица, которая будучи умноженной на данную матрицу как слева, так и справа дает единичную матрицу. $\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E}$

ТЕОРЕМА (*о существовании и единственности обратной матрицы):* Для квадратной матрицы $A_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, определитель которой отличен от нуля ($\Delta(A)\neq 0$), существует обратная матрица A^{-1}, причем единственная. $\boxed{A^{-1}=\frac{1}{\Delta(A)}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}}$ (*), где A_{ij} - алгебраические дополнения для элементов a_{ij} матрицы А, $i=1...n,\ j=1...n$

Алгоритм нахождения обратной матрицы:

1) находим $\Delta(A)$, если матрица А невырожденная, т.е. $\Delta(A)\neq 0$, то матрица A^{-1} существует.

2) находим A_{ij} A_{ij} - алгебраические дополнения для элементов a_{ij} матрицы А.

3) составляем A^{-1} по формуле (*).

4) выполняем проверку $AA^{-1}=A^{-1}A=E$

Пример: Найти обратную матрицу для матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Решение: $\Delta(A)=-9\neq 0$

$A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3 \qquad A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-4 \qquad A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=2$

$A_{12}=-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-6 \qquad A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2 \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-1$

$A_{13}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=3 \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1 \qquad A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-4$

$$A^{-1}=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

проверка: $AA^{-1}=E$

$A^{-1}A=E$

2.4. Приведение матрицы к ступенчатому виду.

Определение. Матрица называется ступенчатой, если выполнены следующие условия:

- после нулевой строки идут только нулевые строки;
- опорный элемент в каждой последующей строке расположен правее, чем в предыдущей.

Пример ступенчатой матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема. Любая матрица может быть приведена к ступенчатой матрице при помощи элементарных преобразований первого и второго типов.

Пример. Привести матрицу А к ступенчатому виду при помощи элементарных преобразований первого и второго типов.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение. Для элементарных преобразований будем использовать обозначения, приведенные выше.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix}(-2)\ (-3) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ (-1)\ (-1) \\ \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Это есть ступенчатый вид матрицы A .
Определение. Если у ступенчатой матрицы все опорные элементы равны единице, а под опорными элементами стоят нули, то матрица имеет ступенчатый вид Гаусса.
Пример. Привести матрицу A к ступенчатому виду Гаусса при помощи элементарных преобразований строк.

$$A=\begin{pmatrix}0&2&3\\0&2&1\\1&2&3\\2&1&1\\3&2&1\end{pmatrix}$$

Решение:

$$A=\begin{pmatrix}0&2&3\\0&2&1\\1&2&3\\2&1&1\\3&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\\0&2&3\\0&2&1\\3&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\\3&2&1\\0&2&1\\0&2&3\end{pmatrix}(-2)\ (-3)\ \to$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&5\\0&-4&-8\\0&2&1\\0&2&3\end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-5\\0&1&2\\0&2&1\\0&2&3\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&-3&-5\\0&2&1\\0&2&3\end{pmatrix}(3)\ (-2)\ (-2)\ \to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\\0&0&-3\\0&0&1\end{pmatrix}(3)\ (-1)\ \to\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

2.5. Ранг матрицы

Как было сказано выше, минором матрицы порядка s называется определитель матрицы, образованной из элементов исходной матрицы, находящихся на пересечении каких - либо выбранных *s* строк и *s* столбцов.

__**Определение.**__ В матрице порядка m×n минор порядка r называется **базисным**, если он не равен нулю, а все миноры порядка *r+1* и выше равны нулю, или не существуют вовсе, т.е. *r* совпадает с меньшим из чисел m или n.

Столбцы и строки матрицы, на которых стоит базисный минор, также называются **базисными.**

В матрице может быть несколько различных базисных миноров, имеющих одинаковый порядок.

__**Определение.**__ Порядок базисного минора матрицы называется **рангом** матрицы и обозначается Rg A.

Очень важным свойством элементарных преобразований матриц является то, что они не изменяют ранг матрицы.

__**Определение.**__ Матрицы, полученные в результате элементарного преобразования, называются **эквивалентными.**

Надо отметить, что **равные** матрицы и **эвивалентные** матрицы - понятия совершенно различные.

__**Теорема.**__ *Наибольшее число линейно независимых столбцов в матрице равно числу линейно независимых строк.*

Т.к. элементарные преобразования не изменяют ранг матрицы, то можно существенно упростить процесс нахождения ранга матрицы.

__Пример.__ Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&5\\0&0&0&0&0\\2&0&0&0&11\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&5\\2&0&0&0&11\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&5\\2&11\end{pmatrix},\qquad \begin{vmatrix}1&5\\2&11\end{vmatrix}=11-10=1\neq 0\Rightarrow\ \text{RgA}=2.$$

__Пример:__ Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix}3&5&7\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4&8&12\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix},\qquad \begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=3-2=1\neq 0\Rightarrow\ \text{Rg}=2.$$

__Пример.__ Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix}1&2&1&3&4\\3&4&2&6&8\\1&2&1&3&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&3&4\\3&4&2&6&8\end{pmatrix},\ \begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=4-6=-2\neq 0.\Rightarrow \mathrm{Rg}=2.$$

Если с помощью элементарных преобразований не удается найти матрицу, эквивалентную исходной, но меньшего размера, то нахождение ранга матрицы следует начинать с вычисления миноров наивысшего возможного порядка. В вышеприведенном примере – это миноры порядка 3. Если хотя бы один из них не равен нулю, то ранг матрицы равен порядку этого минора.

2.6. Решение матричных уравнений вида AX=B.

Матричный метод применим к решению систем уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных.

Метод удобен для решения систем невысокого порядка.

Метод основан на применении свойств умножения матриц.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

Составим матрицы: $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{n1}&a_{n2}&\ldots&a_{nn}\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\ldots\\b_n\end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\ldots\\x_n\end{pmatrix}$.

Систему уравнений можно записать: $A\cdot X = B$.

Сделаем следующее преобразование: $A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B$,

т.к. $A^{-1}\cdot A = E$, то $E\cdot X = A^{-1}\cdot B$ $\quad\mathbf{X = A^{-1}\cdot B}$

Для применения данного метода необходимо находить обратную матрицу, что может быть связано с вычислительными трудностями при решении систем высокого порядка.

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}5x-y-z=0\\x+2y+3z=14\\4x+3y+2z=16\end{cases}$$

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0\\14\\16\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}5&-1&-1\\1&2&3\\4&3&2\end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}.

$\Delta = \det A = \begin{vmatrix}5&-1&-1\\1&2&3\\4&3&2\end{vmatrix}=$ 5(4-9) + 1(2 – 12) – 1(3 – 8) = -25 – 10 +5 = -30.

$M_{11}=\begin{vmatrix}2&3\\3&2\end{vmatrix}=-5$; $\quad M_{21}=\begin{vmatrix}-1&-1\\3&2\end{vmatrix}=1$; $\quad M_{31}=\begin{vmatrix}-1&-1\\2&3\end{vmatrix}=-1$;

$M_{12}=\begin{vmatrix}1&3\\4&2\end{vmatrix}=-10$; $\quad M_{22}=\begin{vmatrix}5&-1\\4&2\end{vmatrix}=14$; $\quad M_{32}=\begin{vmatrix}5&-1\\1&3\end{vmatrix}=16$;

$M_{13}=\begin{vmatrix}1&2\\4&3\end{vmatrix}=-5$; $\quad M_{23}=\begin{vmatrix}5&-1\\4&3\end{vmatrix}=19$; $\quad M_{33}=\begin{vmatrix}5&-1\\1&2\end{vmatrix}=11$;

$a_{11}^{-1}=\frac{5}{30}$; $\quad a_{12}^{-1}=\frac{1}{30}$; $\quad a_{13}^{-1}=\frac{1}{30}$;

$a_{21}^{-1}=-\frac{10}{30}$; $\quad a_{22}^{-1}=-\frac{14}{30}$; $\quad a_{23}^{-1}=\frac{16}{30}$;

$a_{31}^{-1}=\frac{5}{30}$; $\quad a_{32}^{-1}=\frac{19}{30}$; $\quad a_{33}^{-1}=-\frac{11}{30}$;

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}&\frac{1}{30}&\frac{1}{30}\\-\frac{1}{3}&-\frac{7}{15}&\frac{8}{15}\\\frac{1}{6}&\frac{19}{30}&-\frac{11}{30}\end{pmatrix};$$

Сделаем проверку:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}5&-1&-1\\1&2&3\\4&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{5}{30}&\frac{1}{30}&\frac{1}{30}\\-\frac{10}{30}&-\frac{14}{30}&\frac{16}{30}\\\frac{5}{30}&\frac{19}{30}&-\frac{11}{30}\end{pmatrix}=\frac{1}{30}\begin{pmatrix}25+10-5&5+14-19&5-16+11\\5-20+15&1-28+57&1+32-33\\20-30+10&4-42+38&4+48-22\end{pmatrix}=E.$$

Находим матрицу X.

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}B=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}&\frac{1}{30}&\frac{1}{30}\\-\frac{1}{3}&-\frac{7}{15}&\frac{8}{15}\\\frac{1}{6}&\frac{19}{30}&-\frac{11}{30}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\14\\16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}0+\frac{14}{30}+\frac{16}{30}\\-\frac{1}{3}0-\frac{98}{15}+\frac{128}{15}\\\frac{1}{6}0+\frac{266}{30}-\frac{176}{30}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

Итого решения системы: x =1; y = 2; z = 3.

Несмотря на ограничения возможности применения данного метода и сложность вычислений при больших значениях коэффициентов, а также систем высокого порядка, метод может быть легко реализован на ЭВМ.

2.7. Системы линейных однородных уравнений. Пространство решений однородной системы, связь его размерности с рангом матрицы.

Система линейных уравнений называется **однородной**, если **свободные члены** во всех уравнениях этой системы равны **нулю**.

Система однородных линейных уравнений всегда совместна, поскольку имеет так называемое **тривиальное решение**, когда **все** неизвестные равны **нулю**: $X = 0$, тогда $A\times 0 = 0$.

Ранги основной и расширенной матриц системы однородных линейных уравнений всегда равны, так как вычеркивание нулевого столбца свободных членов не изменяет ранга матрицы, поэтому по теореме Кронекера-Капели СОЛУ всегда совместна.

Очевидно, что при решении однородных систем наибольший интерес представляет задача о нахождении нетривиальных решений, а такие решения могут иметь только неопределенные системы. Если однородная система _ определенная, то ее единственным решением является тривиальное. Условия, при которых однородная система является определенной или неопределенной, дает следующая теорема.

Теорема. Для того чтобы однородная система имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы A был меньше числа неизвестных, т.е. rangA < n.

Следствие 1. Система n линейных однородных уравнений с n неизвестными тогда и только тогда имеет нетривиальные решения, когда определитель этой системы равен нулю, т.е. detA = 0.

В самом деле, равенство нулю этого определителя означает, что rangA < n и система является неопределенной и, следовательно, имеет нетривиальные решения.

Следствие 2. Если в системе однородных уравнений число уравнений меньше числа неизвестных, то система обязательно имеет нетривиальные решения.

Действительно, в этом случае rangA не может быть равным числу неизвестных, откуда и вытекает справедливость данного утверждения.

Однородная система обладает одним очень важным свойством, которое не имеет места для неоднородных систем уравнений.

Теорема 2. Если $X_1, X_2, \ldots, X_k$ _ решения однородной системы, то всякая линейная комбинация $X = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_kX_k$ также будет решением этой системы.

В развитие этой теоремы рассмотрим вопрос о существовании такой линейно независимой совокупности решений однородной системы, через которую выражались бы все остальные ее решения.

Теорема 3. Если ранг матрицы A однородной системы равен r, т.е. rangA = r, то система имеет n − r линейно независимых решений.

2.8. Фундаментальная система решений однородной системы. Связь между общими решениями однородной и неоднородной систем.

Вернемся к неоднородной системе линейных уравнений

AX = B, (1) , где

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b^1 \\ \dots \\ b^m \end{pmatrix}.$$

. (2)

Система линейных однородных уравнений AX = 0 (3) с матрицей A из системы (1) называется приведенной системой для системы (1).

Оказывается, между решениями систем (1) и (3) существует тесная связь.

Теорема 1. Сумма любого решения неоднородной системы (1) с любым решением ее приведенной системы (3) также является решением неоднородной системы (1).

Теорема 2. Разность двух любых решений неоднородной системы (1) является решением ее приведенной системы (3).

Теорема 3 (о структуре общего решения неоднородной системы). Если $X_1, X_2, \dots, X_{n-r}$ _ любая фундаментальная система приведенной системы (3), а **X** _ любое частное решение неоднородной системы (3), то сумма $X = \underline{\mathbf{X}} + C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_{n-r}X_{n-r}$ (4) при любых произвольных постоянных C_j, j = 1, n − r, является общим решением неоднородной системы (1).

2.9. Системы *n* линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными.

Системой n линейных уравнений с m неизвестными называется система вида
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$
(1), где $a_{ij} \in R$ - коэффициенты при неизвестных, $b_j \in R$-свободные члены, x_j - неизвестные, i=1…m, j=1…n.

Решением системы называется такая совокупность чисел $(x_1 = k_1, x_2 = k_2, \dots, x_n = k_n)$, которая обращают данную СЛУ в систему верных равенств (тождеств).

СЛУ называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение и *несовместной*, если она не имеет решений.

Совместная СЛУ называется *определенной*, если она имеет одно решение и *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

Этот метод применим для систем n линейных уравнений с n неизвестными.
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Введем в рассмотрение матрицы:
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$$
$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot x_1 + & a_{12}\cdot x_2 + & \dots & + a_{1n}\cdot x_n \\ a_{21}\cdot x_1 + & a_{22}\cdot x_2 + & \dots & + a_{2n}\cdot x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\cdot x_1 + & a_{n2}\cdot x_2 + & \dots & + a_{nn}\cdot x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{A \cdot X = B}$ на основании определений произведения и равенства матриц.

$A \cdot X = B$ -матричное уравнение, которое позволяет записать СЛУ (1) в матричном виде.

Чтобы найти X, умножим равенство с обеих сторон <u>слева</u> на A^{-1}

$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$

$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$

$\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$

Получили решение СЛУ (1) в матричной форме.

Пример: $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=2 \\ x_1-x_2+x_3=0 \\ x_1+3x_2-x_3=-2 \end{cases}$

Введем в рассмотрение матрицы: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{\Delta(A)}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots. \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}}$$

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=14$$

$A_{11}=-2$ $A_{21}=11$ $A_{31}=5$

$A_{12}=2$ $A_{22}=-4$ $A_{32}=2$

$A_{13}=4$ $A_{23}=-1$ $A_{33}=-3$

$$A^{-1}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -2 & 11 & 5 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -2 & 11 & 5 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -14 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: (-1;0;1)

2.10. Теорема Кронекера-Капелли.

ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА-КАПЕЛЛИ (критерий совместности СЛУ): Для того, чтобы система m линейных уравнений с n неизвестными (1) была совместной (имела решение) необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы (2) был равен рангу расширенной матрицы (3).

Т.е., если rangA $\neq$ rangB, то система несовместна

если rangA=rangB=r, то система совместна, причем:

1) если r=n (n-число неизвестных), то система имеет единственное решение.

2) если r<n, то система имеет бесчисленное множество решение, зависящих от (n-r) параметров.

Пример: $\begin{cases} x+2y+z+t=5 \\ \quad\;\; y+z+t=3 \\ x+y \qquad\quad\; =2 \end{cases}$

Составим расширенную матрицу:

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)\begin{matrix} (-1) \\ | \\ \lrcorner \end{matrix}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ 1 \\ \lrcorner \end{matrix}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Т.к. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$ - минор второго порядка,

то rangA=2 и rangB=2 r=2 $\Rightarrow$ система совместна

n=4 (x, y, z, t) n>r , n-r=4-2=2 $\Rightarrow$ система имеет бесчисленное множество решений, зависящих от двух параметров.

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$ $\begin{cases} x+2y+z+t=5 \\ \quad\;\; y+z+t=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2-y \\ t=3-y-z \end{cases}$ $\Rightarrow$ $(2-y;\ y;\ z;\ 3-y-z)$ - общее решение (зависит от двух параметров – y и z).

Ответ: $(2-y;\ y;\ z;\ 3-y-z)$

2.11. Правило Крамера и метод Гаусса.

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & |\times a_{21} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & |\times a_{11} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}a_{21}x_1+a_{12}a_{21}x_2=b_1a_{21} \\ a_{11}a_{21}x_1+a_{11}a_{22}x_2=b_2a_{11} \end{cases}(-) \qquad (a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22})x_2=b_1a_{21}-b_2a_{11}$$

$$x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & \mid \times a_{22} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & \mid \times a_{12} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1 a_{22} \\ a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_2 a_{12} \end{cases} (-) \qquad (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}$$

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Заметим: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ - главный определитель СЛУ $(\Delta \neq 0)$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{21} \end{vmatrix} = b_1 a_{21} - a_{12}b_2$ *и* $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1 a_{21}$ - вспомогательные определители СЛУ

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} \end{cases}}$$ - *формулы Крамера*

ТЕОРЕМА КРАМЕРА: Система n линейных уравнений с n неизвестными, определитель которой $\Delta \neq 0$ имеет решение и при этом единственное, определяемое по формулам $\boxed{x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}}$ (*) , где Δ_j $(j = 1...n)$ -определитель, получаемый из определителя системы Δ заменой *j*-го столбца столбцом свободных членов.

Замечание: 1) Если $\Delta \neq 0$, то система (1) имеет единственное решение, которое определяется по формулам (*).

2) Если $\Delta = 0$ и хотя бы один из вспомогательных определителей $\Delta_j \neq 0$, то система (1) не имеет решений.

3) Если $\Delta = 0$ и $\Delta_j = 0$, то система либо имеет множество решений, либо не имеет решений. Нужны дополнительные исследования.

Пример: Решить СЛУ по формулам Крамера $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 14$ $\quad \Delta \neq 0 \Rightarrow$ система имеет единственное решение

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -14 \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 14$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} \\ z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Ответ: (-1;0;1)

В отличие от матричного метода и метода Крамера, метод Гаусса может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных. Суть метода заключается в последовательном исключении неизвестных.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Разделим обе части 1–го уравнения на $a_{11} \neq 0$, затем:

1) умножим на a_{21} и вычтем из второго уравнения

2) умножим на a_{31} и вычтем из третьего уравнения

и т.д.

Получим:

$$\begin{cases} x_1 + d_{12}x_2 + \ldots + d_{1n}x_n = d_1 \\ d_{22}x_2 + d_{23}x_3 + \ldots + d_{2n}x_n = d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{m2}x_2 + d_{m3} + \ldots + d_{mn}x_n = d_m \end{cases}, \quad \text{где } d_{1j} = a_{1j}/a_{11},\ j = 2, 3, \ldots, n+1.$$

$$d_{ij} = a_{ij} - a_{i1}d_{1j} \qquad i = 2, 3, \ldots, n; \qquad j = 2, 3, \ldots, n+1.$$

Далее повторяем эти же действия для второго уравнения системы, потом – для третьего и т.д.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases}, \text{ откуда получаем: } x_3 = 2;\ x_2 = 5;\ x_1 = 1.$$

Пример. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ -5y - 10z = 40 \\ 6z = 18 \end{cases}, \text{ откуда получаем: } z = 3;\ y = 2;\ x = 1.$$

Полученный ответ совпадает с ответом, полученным для данной системы методом Крамера и матричным методом.

Для самостоятельного решения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Ответ: {1, 2, 3, 4}.

2.12. Арифметические векторы и линейные операции над ними.

Арифметическим вектором называется упорядоченная совокупность n чисел.

бозначается $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$;
числа $x_1, x_2, ..., x_n$ называются компонентами арифметического вектора.
Для арифметических векторов определены линейные операции — сложение арифметических векторов и умножение вектора на число:
для любых $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ и любого числа α справедливо:
$x + y = (x_1+ y_1, x_2 +y_2, ..., x_n+ y_n)$; $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$.
Множество арифметических векторов, для которых определены операции сложения и умножения на число называется пространством арифметических векторов Rn.
Вектор $\theta = (0, 0, ..., 0)$ называется нулевым вектором Rn,
а вектор $-x = (-x_1,- x_2, ...,- x_n)$ — противоположным вектором для вектора x в Rn.
Для любых векторов x, y и z из Rn и любых чисел α и β справедливо:
1. $x + y = x + y$, сложение коммутативно;
2. $x + (y + z) = (x + y)+ z$, сложение ассоциативно;
3. $x + \theta = x$;
4. $x + (-x) = \theta$;
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, умножение на число дистрибутивно относительно сложения векторов;
6. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, умножение на число ассоциативно;
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, умножение вектора на число дистрибутивно относительно сложения чисел.
8. $1\cdot x = x$.
Примером пространства арифметических векторов Rn, n = 2, является пространство геометрических радиусов-векторов на плоскости, записанных в координатной форме:
$a = a_1\cdot i + a_2\cdot j = (a_1, a_2)$, $b = b_1\cdot i + b_2\cdot j = (b_1, b_2)$,
$a + b = (a_1+ b_1 , a_2+ b_2)$, $\alpha a = (\alpha a_1, \alpha a_2)$.
Множество квадратных матриц размерности 2, с определенными для них операциями сложения и умножения на число, можно рассматривать как пространство арифметических векторов Rn, n = 4. Действительно.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}, \ \alpha\cdot\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha\cdot a_{11} & \alpha\cdot a_{12} \\ \alpha\cdot a_{21} & \alpha\cdot a_{22} \end{pmatrix}.$$

С другой стороны,

$$\mathbf{a} = (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}), \mathbf{b} = (b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}),$$
$$\mathbf{a}+\mathbf{b} = (a_{11}+b_{11}, a_{12}+b_{12}, a_{21}+b_{21}, a_{22}+b_{22}),$$
$$\alpha\cdot\mathbf{a} = (\alpha\cdot a_{11}, \alpha\cdot a_{12}, \alpha\cdot a_{21}, \alpha\cdot a_{22})$$

Множество Mn многочленов степени не выше n , с определенными для них операциями сложения и умножения на число, можно рассматривать как пространство арифметических векторов Rn+1.

$$P_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n \in \mathbf{M_n} \Leftrightarrow (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{R_{n+1}},$$
$$Q_n(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_n t^n \in \mathbf{M_n} \Leftrightarrow (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbf{R_{n+1}},$$
$$P_n(t) + Q_n(t) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)t + (a_2+b_2)t^2 + \ldots + (a_n+b_n)t^n \in \mathbf{M_n} \Leftrightarrow$$
$$(a_0+b_0, a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n) \in \mathbf{R_{n+1}},$$

Действительно. $\alpha\cdot P_n(t) = \alpha\cdot a_0 + \alpha\cdot a_1 t + \alpha\cdot a_2 t^2 + \ldots + \alpha\cdot a_n t^n \in \mathbf{M_n} \Leftrightarrow (\alpha\cdot a_0, \alpha\cdot a_1, \alpha\cdot a_2, \ldots, \alpha\cdot a_n) \in \mathbf{R_{n+1}}$.
Вектор $a = (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$ − вектор из R4.

2.13. Векторное пространство R^n. Геометрический смысл пространств R^2 и R^3. Линейные пространства общего вида. Линейная зависимость системы векторов и ее геометрический смысл.

Вектором размерности n называется упорядоченный набор из n действительных чисел. Будем записывать вектор в виде $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, где $x_i \quad (i = 1,2,..., n)$ - координаты вектора. Размерность вектора определяется числом его координат и является его отличительной характеристикой. Векторы равны, если они одной размерности и имеют равные соответствующие координаты: (2,3,5) = (2,3,5). Нуль-вектор $\overline{0}$ = (0,0,…,0) не следует путать с числом нуль.

N-мерное векторное пространство R^n определяется как множество всех n-мерных векторов, для которых определены операции умножения на действительные числа и сложение.

Геометрический смысл пространств R^2 и R^3 Множество всех n-мерных арифметических векторов, в которых введены операции: сложение векторов и умножение на число называется арифметическим n-мерным пространством (R^n).

Геометрический смысл имеют лишь пространства R^1, R^2, R3 . Для R^1 – это прямая, для R^2 – плоскость, для R^3 – трехмерное пространство.

При n>3 пространство R^n представляется лишь чисто математическим и не реальным объектом.

Линейные пространства общего вида Ги́льбертово простра́нство — обобщение евклидова пространства, допускающее бесконечную размерность. Названо в честь Давида Гильберта.

Гильбертово пространство есть банахово пространство, норма которого порождена положительно определённым скалярным произведением.

Линейная зависимость системы векторов и ее геометрический смысл Вектор B называется линейной комбинацией векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ векторного пространства Rn, если он равен сумме произведений этих векторов на произвольные действительные числа: $B = \alpha_1A_1 + \alpha_2A_2 + \ldots + \alpha_nA_n$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ – любые действительные числа.

Векторы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются линейно зависимыми, если существует такая линейная комбинация $\alpha_1A_1 + \alpha_2A_2 + \ldots + \alpha_nA_n = 0$, при не равных нулю одновременно αi (i = 1, 2, . . . n), т.е. $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2\neq 0$.

Если же $\alpha_1A_1 + \alpha_2A_2 + \ldots + \alpha_nA_n = 0$ выполняется только при всех $\alpha_i = 0$ (i = 1, 2, . . . n), то векторы называются линейно независимыми.

Свойства:

1. Если среди векторов Ai (i = 1, 2, . . . n) есть нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.
2. Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима.
3. Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов раскладывается в линейную комбинацию остальных векторов.

Геометрический смысл линейной зависимости векторов очевиден для случаев двумерных векторов на плоскости и трехмерных векторов в пространстве: в случае двух векторов, когда один вектор выражается через другой: $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, т.е. эти векторы коллинеарны или, что то же самое, они находятся на параллельных прямых.

4. Любые 2 коллинеарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 2 линейно зависимые векторы коллинеарны: $\vec{b} \parallel \vec{a} \Leftrightarrow \vec{b} = \lambda\vec{a}$

В пространственном случае линейной зависимости трех векторов они параллельны одной плоскости, т.е. компланарны.

5. Любые 3 компланарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 3 линейно зависимые векторы компланарны.

Т.е., достаточно «подправить» соответствующими сомножителями длины этих векторов, чтобы один из них стал суммой двух других (выражался через них).

В пространстве Rn любая система, содержащая m векторов, линейно зависима при m > n.

2.14. Базис и размерность линейного пространства. Координаты вектора в данном базисе. Преобразование координат векторов при замене базиса. Подпространства линейного пространства. Скалярное произведение векторов в R^n.

Говорят, что элемент (вектор) x линейного пространства L линейно выражается через элементы (векторы) $e_1, e_2, \ldots, e_n \in L$, если его можно представить в виде линейной комбинации этих элементов, т.е. представить в виде $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$.

Если любой вектор системы $e_1, e_2, \ldots, e_k$ векторов линейного пространства L линейно выражается через остальные векторы системы, то система векторов называется линейно зависимой.

Система векторов, которая не является линейно зависимой, называется линейно независимой.

Справедливо следующее утверждение: Система $e_1, e_2, \ldots, e_k$ векторов линейного пространства L линейно независима тогда и только тогда, когда из равенства $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = 0$ следует равенство нулю всех коэффициентов $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$.

Если в линейном пространстве L существует линейно независимая система из n векторов, а любая система из (n+1)-го вектора линейно зависима, то число n называется **размерностью пространства** L и обозначается $\dim(L)$. В этом случае пространство L называют n-мерным линейным пространством или n-мерным векторным пространством.

Любая упорядоченная линейно независимая система n векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейного пространства L образует **базис пространства** и любой вектор x€L единственным образом выражается через векторы базиса: $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$.

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называют координатами вектора x в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и обозначают $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. При этом для любых двух произвольных векторов n-мерного линейного пространства $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и произвольного числа α справедливо:
$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$ и $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$.

Это означает, что все n-мерные линейные пространства “устроены” одинаково - как пространство R^n векторов-столбцов из n действительных чисел, т.е. что все они изоморфны пространству R^n.

Линейные пространства X и Y называются изоморфными, если между их элементами можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что если векторам X и X’ из X соответствуют векторы y и y' из Y, то вектору $x + x'$ соответствует вектор $y + y'$ и при любом α вектору $\alpha x \in X$ соответствует вектор $\alpha y \in Y$.

Изоморфизм n-мерных линейных пространств пространству R^n означает, что соотношения между элементами n-мерного линейного пространства и операции с ними можно изучать как соотношения между векторами из R^n и операции с ними и что всякое утверждение относительно векторов из $\mathbb{R}^n$ справедливо для соответствующих элементов любого n-мерного линейного пространства.

Например, доказано, что система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ из R^n

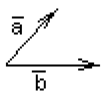
$$e_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ \ldots \\ e_{n1} \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \\ \ldots \\ e_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \quad e_n = \begin{pmatrix} e_{1n} \\ e_{2n} \\ \ldots \\ e_{nn} \end{pmatrix}$$

образует базис в R^n тогда и только тогда, когда отличен от нуля определитель матрицы, со столбцами $e_1, e_2, \ldots, e_n$:

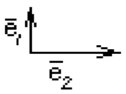
$$\det A = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \ldots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \ldots & e_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e_{n1} & e_{n1} & \ldots & e_{nn} \end{pmatrix} \neq 0$$

Для векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ из L это означает, что они образуют базис в L тогда и только тогда, когда отличен от нуля определитель матрицы, столбцами которой являются компоненты векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

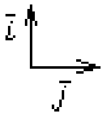
Упорядоченная пара двух ненулевых, не коллинеарных векторов образует _базис_ на плоскости.



$(\vec{a};\vec{b})$ - базис. $\bar{a} \nparallel \bar{b}$, $\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$

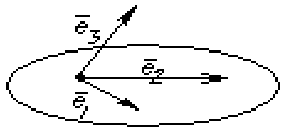


$\bar{e}_1 \perp \bar{e}_2$, $(\vec{e_1}; \vec{e_2})$ - _ортогональный базис_.

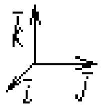


$|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$, $\bar{i} \perp \bar{j}$, $(\vec{i}; \vec{j})$ - _ортонормированный базис_. (ПДСК на плоскости)

ОПР: Упорядоченная система трёх ненулевых, не кокомплонарных векторов образуют _базис_ в пространстве.



$\bar{e}_1 \perp \bar{e}_2 \perp \bar{e}_3$. $(\vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3})$ - ортогональный базис в пространстве.



$\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1$, $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$, $(\vec{i};\ \vec{j}, \vec{k})$ - ортонормированный базис в пространстве.

(ПДСК в пространстве)

<u>*n – мерным вектором*</u> называется упорядоченная совокупность n действительных чисел, записываемых в виде $\vec{a} = (x_1; x_2; ...; x_n)$, где x_i - *i*-ая координата вектора $\vec{a}$.

Понятие n – мерного вектора широко используется в экономике. Например, некоторый набор товаров можно охарактеризовать вектором $\vec{x} = (x_1; x_2; ...; x_n)$, а соответствующие цены – вектором $\vec{y} = (y_1; y_2; ...; y_n)$.

Сумма, разность, умножение вектора на число вводятся аналогично.

<u>*Свойства операций:*</u>

1) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ - переместительное свойство

2) $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ - сочетательное свойство

3) $\alpha \cdot (\beta\ \vec{x}) = \alpha\ \beta\ \vec{x}$, $\alpha, \beta \in R$

4) $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$ - дистрибутивное свойство

5) $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$

6) $\exists\ \vec{0} = (0,0,...0)$ такой, что $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$, для $\forall\ \vec{x}$

7) Для $\forall\ \vec{x}$ $\exists\ -\vec{x}$ - противоположный вектор такой, что $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$

8) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$, для $\forall\ \vec{x}$.

Множество векторов с действительными координатами, в котором определены операции сложения и умножения на число, удовлетворяющие приведенным выше восьми свойствам, называется <u>*векторным пространством*</u>.

Вектор $\vec{b}$ называется <u>*линейной комбинацией*</u> векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$, если его можно представить в виде $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_n\vec{a}_n$, где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in R$.

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называются <u>*линейно зависимыми*</u>, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in R$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, что $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$. В противном случае, векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называются <u>*линейно независимыми.*</u>

<u>*Размерность*</u> пространства – это максимальное число содержащихся в нем линейно независимых векторов.

Совокупность n линейно независимых векторов n – мерного пространства называется <u>*базисом*</u>.

<u>Пример:</u> Доказать, что векторы $\vec{b}_1 = (1;1;0), \vec{b}_2 = (1;-1;1), \vec{b}_3 = (-3;5;-6)$ образуют базис.

Три линейно независимых вектора трехмерного пространства образуют базис. Проверим, являются ли данные векторы линейно независимыми.

Т.е. $\lambda_1\vec{b}_1 + \lambda_2\vec{b}_2 + \lambda_3\vec{b}_3 = \vec{0}$ только тогда, когда все числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ =0.

$\lambda_1(1;1;0) + \lambda_2(1;-1;1) + \lambda_3(-3;5;-6) = (0;0;0)$

$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - 6\lambda_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$ Вектора $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ - лин. независ. и образуют базис 3-мерного пространства.

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих сторон на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi$$

Свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$;
2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, если $\vec{a}\perp\vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$.
3) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;
4) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$;
5) $(m\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(m\vec{b}) = m(\vec{a}\cdot\vec{b})$;

Если рассматривать векторы $\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$; $\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b;$$

Используя полученные равенства, получаем формулу для вычисления угла между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|};$$

Пример. Найти $(5\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a}\perp\vec{b}$.

$10\vec{a}\cdot\vec{a} - 5\vec{a}\cdot\vec{b} + 6\vec{a}\cdot\vec{b} - 3\vec{b}\cdot\vec{b} = 10|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 = 40 - 27 = 13$,

т.к. $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 = 4$, $\vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|^2 = 9$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

Пример. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

Т.е. $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (6, 4, -2)$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 6 + 8 - 6 = 8$:

$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$; $|\vec{b}| = \sqrt{36+16+4} = \sqrt{56}$.

$\cos\varphi = \dfrac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = \dfrac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}} = \dfrac{4}{14} = \dfrac{2}{7}$; $\varphi = \arccos\dfrac{2}{7}$.

Пример. Найти скалярное произведение $(3\vec{a} - 2\vec{b})\cdot(5\vec{a} - 6\vec{b})$, если $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 6$, $\vec{a}\wedge\vec{b} = \pi/3$.

$15\vec{a}\cdot\vec{a} - 18\vec{a}\cdot\vec{b} - 10\vec{a}\cdot\vec{b} + 12\vec{b}\cdot\vec{b} = 15|\vec{a}|^2 - 28|\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{3} + 12|\vec{b}|^2 = 15\cdot 16 - 28\cdot 4\cdot 6\cdot\dfrac{1}{2} +$
$+ 12\cdot 36 = 240 - 336 + 432 = 672 - 336 = 336.$

Пример. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

Т.е. $\vec{a} = (3, 4, 5)$, $\vec{b} = (4, 5, -3)$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 12 + 20 - 15 = 17$:

$|\vec{a}| = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50}$; $|\vec{b}| = \sqrt{16+25+9} = \sqrt{50}$.

$\cos\varphi = \dfrac{17}{\sqrt{50}\sqrt{50}} = \dfrac{17}{50}$; $\varphi = \arccos\dfrac{17}{50}$.

Пример. При каком m векторы $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ перпендикулярны.

$$\vec{a} = (m, 1, 0); \quad \vec{b} = (3, -3, -4)$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3m - 3 = 0; \quad \Rightarrow m = 1.$$

Пример. Найти скалярное произведение векторов $2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}$ и $5\vec{a}+6\vec{b}+7\vec{c}$, если $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$, $\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{a}\wedge\vec{c}=\vec{b}\wedge\vec{c}=\dfrac{\pi}{3}$.

$(2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c})(5\vec{a}+6\vec{b}+7\vec{c})=10\vec{a}\cdot\vec{a}+12\vec{a}\cdot\vec{b}+14\vec{a}\cdot\vec{c}+15\vec{a}\cdot\vec{b}+18\vec{b}\cdot\vec{b}+21\vec{b}\cdot\vec{c}+$
$+20\vec{c}\cdot\vec{a}+24\vec{b}\cdot\vec{c}+28\vec{c}\cdot\vec{c}=10\ \vec{a}\cdot\vec{a}+27\vec{a}\cdot\vec{b}+34\vec{a}\cdot\vec{c}+45\vec{b}\cdot\vec{c}+18\vec{b}\cdot\vec{b}+28\vec{c}\cdot\vec{c}=10+$
$+ 27 + 51 + 135 + 72 + 252 = 547$.

2.15. Евклидово пространство. Длины векторов и угол между векторами в R^n. Ортогональный и ортонормированный базисы в R^n.

Вспомним, как в обычном трехмерном пространстве мы вычисляли скалярное произведение векторов. Если координаты векторов $\mathbf{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ и $\mathbf{b}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ были заданы в ортонормированном базисе, то скалярное произведение (a,b) вычислялось по формуле $\mathbf{ab}=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3$. Аналогичной формулой можно задать и скалярное произведение в n-мерном пространстве. Пусть L - вещественное n-мерное пространство, в котором задан базис. Тогда векторы a и b из L задаются своими координатами: $a=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\ldots+\alpha_ne_n,\quad b=\beta_1e_1+\beta_2e_2+\ldots+\beta_ne_n$.

Скалярное произведение векторов, обозначается оно обычно , задается формулой $(a,b)=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_n\beta_n$. В отличие от обычного трехмерного пространства, где с помощью транспортира и линейки можно измерить угол между векторами и длину вектора, в n-мерном пространстве ни угол между векторами, ни длину вектора измерить невозможно. Поэтому ортонормированным в n-мерном пространстве называется тот базис, в котором скалярное произведение вычисляется по формуле . Если $\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$ - координатные столбцы векторов a и b, то скалярное произведение можно задать формулой $(a,b)=\alpha^{\top}\beta$.

Вещественное линейное пространство, в котором задано скалярное произведение называется **евклидовым пространством**

В трехмерном пространстве модуль вектора равен корню квадратному из скалярного произведения вектора на себя $|\mathbf{a}|=\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$. В евклидовом пространстве модуль вектора определим аналогично $|a|=\sqrt{(a,a)}$, то есть $|a|=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2}$.

В трехмерном пространстве с помощью скалярного произведения определялся угол между векторами. В евклидовом пространстве тоже можно определить угол между векторами. Но угол в n-мерном пространстве не имеет существенного значения, кроме одного случая. В трехмерном пространстве два вектора ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

Два вектора евклидова пространства называются ортогональными , если их скалярное произведение равно нулю.

Вектор $\bar{x}\in E$ называется нормированным или единичным, если $|\bar{x}|=1$.

Если $\bar{x}\neq\bar{0}$, то соответствующими этому вектору нормированными векторами будут $\bar{x}_0=\bar{x}/|\bar{x}|$, $\bar{x}_0'=-\bar{x}/|\bar{x}|$.

Векторы x и y пространства со скалярным произведением L называются ортогональными, если (x,y)=0. В этом случае пишут $x\perp y$.

Процесс ортогонализации Грама--Шмидта позволяет превратить линейно независимую систему векторов в ортонормированную. Вы уже встречались с ним в курсе линейной алгебры. Это обстоятельство позволяет нам сразу перейти к формальному изложению сути дела.

Теорема. Если $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ - счетная система линейно независимых векторов в линейном пространстве со скалярным произведением L, то новые последовательности обладают следующими свойствами:

1) система $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ ортонормирована, т. е. любые два ее вектора ортогональны и каждый вектор имеет единичную длину;

2) для любого $n \in N$ линейная оболочка векторов $z_1, z_2, \ldots, z_n$ совпадает с линейной оболочкой векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2.16. Неравенство Коши-Буняковского. Процесс ортогонализации. Ортогональные дополнения подпространств.…………………………………

Неравенство Коши́ — Буняко́вского связывает норму и скалярное произведение векторов в евклидовом или гильбертовом пространстве. Это неравенство эквивалентно неравенству треугольника для нормы.

Неравенство Коши — Буняковского иногда, особенно в иностранной литературе, называют *неравенством Шварца* и *неравенством Коши — Буняковского — Шварца* («неравенство КБШ»), хотя работы Шварца на эту тему появились только спустя 25 лет после работ Буняковского[1]. Конечномерный случай этого неравенства называется **неравенством Коши** и был доказан Коши в 1821 году.

Пусть дано линейное пространство L со скалярным произведением $\langle x,\ y\rangle$. Пусть $\|x\|$ — норма, порождённая скалярным произведением, то есть $\|x\| \equiv \sqrt{\langle x,\ x\rangle},\ \forall x \in L$. Тогда для любых $x,\ y \in L$ имеем: $|\langle x,\ y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы x и y пропорциональны (коллинеарны).

- В пространстве комплекснозначных квадратично суммируемых последовательностей l^2 неравенство Коши — Буняковского имеет вид:
$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k\right|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2\right),$$
где $\bar{y}_k$ обозначает комплексное сопряжение y_k.

- В пространстве комплексных квадратично интегрируемых функций $L^2(X,\ \mathcal{F},\ \mu)$ неравенство Коши — Буняковского имеет вид:
$$\left|\int\limits_X f(x)\overline{g(x)}\mu(dx)\right|^2 \leqslant \left(\int\limits_X |f(x)|^2\ \mu(dx)\right) \cdot \left(\int\limits_X |g(x)|^2\ \mu(dx)\right).$$
    - В пространстве случайных величин с конечным вторым моментом $L^2(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ неравенство Коши — Буняковского имеет вид:

$\mathrm{cov}^2(X,\ Y) \leqslant \mathrm{D}[X] \cdot \mathrm{D}[Y]$, где cov обозначает ковариацию, а D — дисперсию.

Пусть L - евклидово (унитарное) пространство, подпространство $M \subset L$. Вектор $X \in L$ называется **ортогональным к подпространству** $M \subset L$, если для всех $Y \in M$ $(X, Y) = 0$.

Множество всех векторов X ортогональных к подпространству M **называется ортогональным дополнением** M и обозначается $M^{\perp}$.

Очевидно, $M^{\perp}$ является подпространством пространства L, причем для размерности подпространств $M,\ M^{\perp}$ и размерность пространства L связаны соотношением

$$\dim(M^{\perp}) + \dim(M) = \dim(L).$$

Действительно, выберем базис $e_1, e_2, \dots, e_k$ подпространства M, дополним его до базиса L, получим $E = \langle e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$. Ортогонализируем данный базис методом Грамма-Шмидта, получим: $\Sigma = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n \rangle$ - базис пространства L,

$\Sigma_1 = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k \rangle$ - базис подпространства M, $\Sigma_2 = \langle \sigma_{k+1}, \sigma_{k+2}, \dots, \sigma_n \rangle$ - базис подпространства ортогонального дополнения $M^{\perp}$.

Говорят, что пространство L является прямой ортогональной суммой своих подпространств M и $M^{\perp}$: $L = M \oplus M^{\perp}$

Пусть Ek _ подпространство некоторого евклидова пространства En.

Вектор a $\in$ En называется ортогональным подпространству Ek $\subset$ En, если он ортогонален любому вектору x из подпространства Ek.

Для того чтобы вектор z был ортогонален k-мерному подпространству Ek, достаточно, чтобы он был ортогонален векторам любого базиса $\vec{e}_j,\ j = \overline{1, n},$ из Ek:

$$(\vec{z}, \vec{e}_j) = 0, \quad j = \overline{1, k}. \qquad (1)$$

Действительно, любой вектор x из Ek можно представить линейной комбинации

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{e}_j.$$

Отсюда с учетом (1) следует ортогональность вектора z и любого x $\in$ Ek:

$$(\vec{z}, \vec{x}) = \left(\vec{z}, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (\vec{z}, \vec{e}_j) = 0.$$

Два подпространства Ek и El евклидова пространства En называются взаимно ортогональными, если каждый вектор из Ek ортогонален каждому вектору из El (будем писать Ek $\perp$ El).

Лемма 1. Для того чтобы подпространства Ek и El евклидова пространства En были взаимно ортогональными, необходимо и достаточно, чтобы все базисные векторы одного подпространства были ортогональны всем базисным векторам другого.

Лемма 2. Два взаимно ортогональных подпространства пересекаются только по нулевому вектору.

Подпространство El, образованное всевозможными векторами из Ek, ортогональными к подпространству Ek, называется ортогональным дополнением подпространства Ek и обозначается El = $E^{\perp}{}_k$.

Теорема 1. Евклидово пространство En является прямой суммой любого своего подпространства и его ортогонального дополнения

2.17. Основные понятия, связанные с многочленами. Схема Горнера и корни многочленов. Теорема Безу. Разложение правильной дроби на сумму элементарных дробей.

Схема Го́рнера - алгоритм вычисления значения многочлена, записанного в виде суммы мономов, при заданном значении переменной. Метод Горнера позволяет найти корни многочлена, а также вычислить производные полинома в заданной точке. Схема Горнера также является простым алгоритмом для деления многочлена на бином вида x − c.

Задан многочлен P(x):

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Пусть требуется вычислить значение данного многочлена при фиксированном значении x = x0. Представим многочлен P(x) в следующем виде:

$$P(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots x(a_{n-1} + a_n x) \ldots)).$$

Определим следующую последовательность:

$$b_n = a_n \quad b_{n-1} = a_{n-1} + b_n x \quad \ldots \; b_i = a_i + b_{i+1} x \; \ldots \; b_0 = a_0 + b_1 x$$

Искомое значение $P(x_0) = b_0$.

<u>Использование схемы Горнера для деления многочлена на бином</u>

При делении многочлена $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ на x − c получается многочлен $b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1}$ с остатком b_n.

При этом коэффициенты результирующего многочлена удовлетворяют рекуррентным соотношениям:

$b_0 = a_0$, $b_k = a_k + cb_{k-1}$.

Таким же образом можно определить кратность корня (использовать схему Горнера для нового полинома). Так же схему можно использовать для нахождения коэффициентов при разложении полинома по степеням x - c: $P(x) = A_0 + A_1(x-c) + A_2(x-c)^2 + \cdots + A_n(x-c)^n$

Теорема Безу утверждает, что остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x - a$ равен $P(a)$.

Предполагается, что коэффициенты многочлена содержатся в некотором коммутативном кольце с единицей (например, в поле вещественных или комплексных чисел). Следствия:

- Число a является корнем многочлена $p(x)$ тогда и только тогда, когда $p(x)$ делится без остатка на двучлен $x - a$ (отсюда, в частности, следует, что множество корней многочлена $P(x)$ тождественно множеству корней соответствующего уравнения $P(x) = 0$).
- Свободный член многочлена делится на любой целый корень многочлена с целыми коэффициентами (если старший коэффициент равен 1, то все рациональные корни являются и целыми).
- Пусть α — целый корень приведенного многочлена A(x) с целыми коэффициентами. Тогда для любого целого k число A(k) делится на α-k.

Классическим примером применения метода неопределённых коэффициентов является разложение правильной рациональной дроби в комплексной или вещественной области на элементарные дроби.

Пусть p(z) и q(z) — многочлены с комплексными коэффициентами, причём степень многочлена p(z) меньше степени многочлена q(z), коэффициент при старшем члене многочлена q(z) равен 1, zi $i \in \{1, .., k\}$ — корни многочлена q(z) с кратностями αi, следовательно, $q(z) = (z-z_1)^{\alpha_1}(z-z_2)^{\alpha_2}..(z-z_k)^{\alpha_k}$

Функция p / q представима, и притом единственным образом, в виде суммы элементарных дробей

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\alpha_i}\frac{A_{i,j}}{(z-z_i)^j},$$

где $A_{i,j}$ — неизвестные пока комплексные числа (их число равно степени q). Для их отыскания обе части равенства приводят к общему знаменателю. После его отбрасывания и приведения в правой части подобных членов получается равенство, которое сводится к системе линейных уравнений относительно $A_{i,j}$.

Примечание. Нахождение неизвестных можно упростить, если q(z) имеет некратные корни zj. После умножения на z − zj последнего равенства и подстановки z = zj непосредственно получаем значение соответствующего коэффициента

$$A_j = \frac{p(z_j)}{\prod\limits_{i \neq j}(z_j - z_i)^{\alpha_i}}.$$

Основная теорема алгебры утверждает, что всякий отличный от константы многочлен с комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один корень в поле комплексных чисел.

Эквивалентная формулировка теоремы следующая: поле комплексных чисел алгебраически замкнуто.

Немедленным следствием из теоремы является то, что любой многочлен степени n над полем комплексных чисел имеет в нём ровно n корней, с учётом кратности корней.

2.18. НОД многочленов и алгоритм Евклида……………..

Делители многочлена Делитель многочлена *f(x)* - многочлен *g(x)*, такой, что *f(x) = g(x)q(x)*.

Наибольший общий делитель двух многочленов Наибольший общий делитель многочленов *f(x)* и *g(x)* - такой их общий делитель *d(x)*, который делится на любой другой их общий делитель.

Алгоритм Евклида (алгоритм последовательного деления) нахождения наибольшего общего делителя многочленов *f(x)* и *g(x)*

$$f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x),$$
$$g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x),$$
$$r_1(x) = r_2(x)q_3(x) + r_3(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$r_{k-3}(x) = r_{k-2}(x)q_{k-1}(x) + r_{k-1}(x),$$
$$r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x)q_k(x) + r_k(x),$$
$$r_{k-1}(x) = r_k(x)q_{k+1}(x).$$

Тогда $r_k(x)$ - наибольший общий делитель *f(x)* и *g(x)*.

Алгоритм Евклида позволяет найти наибольший общий делитель двух многочленов, т.е. многочлен наибольшей степени, на который делятся без остатка оба данных многочлена. Алгоритм основан на том факте, что для любых двух многочленов от одного переменного, $f(x)$ и $g(x)$, существуют такие многочлены $q(x)$ и $r(x)$, называемые соответственно частное и остаток, что

$$f(x) = g(x)\cdot q(x) + r(x), \quad (*)$$

при этом степень остатка меньше степени делителя, многочлена $g(x)$, и, кроме того, по данным многочленам $f(x)$ и $g(x)$ частное и остаток находятся однозначно. Если в равенстве (*) остаток $r(x)$ равен нулевому многочлену (нулю), то говорят, что многочлен $f(x)$ делится на $g(x)$ без остатка. Алгоритм состоит из последовательного деления с остатком сначала первого данного многочлена, $f(x)$, на второй, $g(x)$:

$$f(x) = g(x)\cdot q_1(x) + r_1(x), \quad (1)$$

затем, если $r_1(x) \neq 0$, – второго данного многочлена, $g(x)$, на первый остаток – на многочлен $r_1(x)$:

$$g(x) = r_1(x)\cdot q_2(x) + r_2(x), \quad (2)$$

далее, если $r_2(x) \neq 0$, – первого остатка, $r_1(x)$, на второй остаток, $r_2(x)$:

$$r_1(x) = r_2(x)\cdot q_3(x) + r_3(x), \quad (3)$$

затем, если $r_3(x) \neq 0$, – второго остатка на третий:

$$r_2(x) = r_3(x)\cdot q_4(x) + r_4(x), \quad (4)$$

и т.д. Поскольку на каждом этапе степень очередного остатка уменьшается, процесс не может продолжаться бесконечно, так что на некотором этапе мы обязательно придем к ситуации, когда очередной, $n + 1$-й остаток r_{n+1} равен нулю:

$$r_{n-2}(x) = r_{n-1}(x)\cdot q_n(x) + r_n(x), \qquad (n)$$

$$r_{n-1}(x) = r_n(x)\cdot q_{n+1}(x) + r_{n+1}(x), \qquad (n+1)$$

$$r_{n+1}(x) = 0. \qquad (n+2)$$

Тогда последний не равный нулю остаток r_n и будет наибольшим общим делителем исходной пары многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Действительно, если в силу равенства $(n + 2)$ подставить 0 вместо $r_{n+1}(x)$ в равенство $(n + 1)$, затем – полученное равенство $r_{n-1}(x) = r_n(x)\cdot q_{n+1}(x)$ вместо $r_{n-1}(x)$ – в равенство (n), получится, что $r_{n-2}(x) = r_n(x)\cdot q_{n+1}(x)\, q_n(x) + r_n(x)$, т.е. $r_{n-2}(x) = r_n(x)(\, q_{n+1}(x)\, q_n(x) + 1)$, и т.д. В равенстве (2) после подстановки получим, что $g(x) = r_n(x)\cdot Q(x)$, и, наконец, из равенства (1) – что $f(x) = r_n(x)\cdot S(x)$, где Q и S – некоторые многочлены. Таким образом, $r_n(x)$ – общий делитель двух исходных многочленов, а то, что он наибольший (т.е. наибольшей возможной степени), следует из процедуры алгоритма. Если наибольший общий делитель двух многочленов не содержит переменную (т.е. является числом), исходные многочлены $f(x)$ и $g(x)$ называются *взаимно-простыми*.

2.19. Комплексные числа и действия над ними. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы

записи комплексных чисел. Корни *n*-ой степени из комплексного числа. Формулировка основной теоремы алгебры.

Определение. **Комплексным числом** *z* называется выражение $z = a + ib$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, которая определяется соотношением:

$$i^2 = -1; \qquad i = \sqrt{-1}.$$

При этом число a называется **действительной частью** числа z ($a = Re\ z$), а b- **мнимой частью** ($b = Im\ z$).

Если $a = Re\ z = 0$, то число z будет чисто мнимым, если $b = Im\ z = 0$, то число z будет действительным.

Определение. Числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ называются **комплексно – сопряженными.**

Определение. Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части:

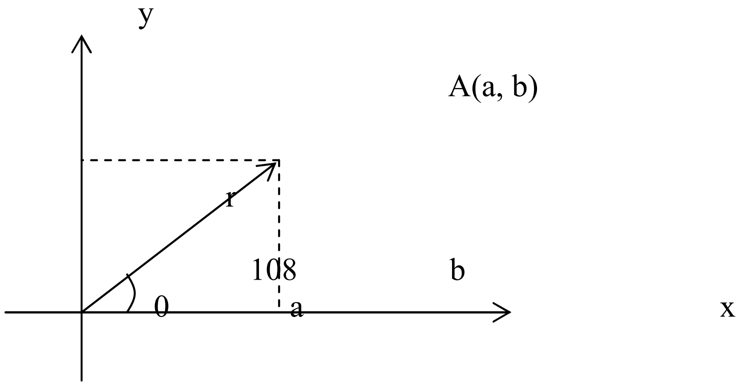
$$a_1 = a_2; \qquad b_1 = b_2;$$

Определение. Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части.

$$a = b = 0.$$

Понятие комплексного числа имеет геометрическое истолкование. Множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел за счет включения множества мнимых чисел. Комплексные числа включают в себя все множества чисел, которые изучались ранее. Так натуральные, целые, рациональные, иррациональные, действительные числа являются, вообще говоря, частными случаями комплексных чисел.

Если любое действительное число может быть геометрически представлено в виде точки на числовой прямой, то комплексное число представляется точкой на плоскости, координатами которой будут соответственно действительная и мнимая части комплексного числа. При этом горизонтальная ось будет являться действительной числовой осью, а вертикальная - мнимой осью.



С помощью подобного геометрического представления можно представлять числа в так называемой тригонометрической форме.

Из геометрических соображений видно, что $a = r\cos\varphi$; $b = r\sin\varphi$. Тогда комплексное число можно представить в виде: $z = a + ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Такая форма записи называется **тригонометрической формой записи комплексного числа.**

При этом величина r называется **модулем** комплексного числа, а угол наклона φ - **аргументом** комплексного числа.

$$r = |z|; \qquad \varphi = Arg\, z.$$

Из геометрических соображений видно: $r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\varphi = Arg\, z = arctg\dfrac{b}{a}$;

Очевидно, что комплексно – сопряженные числа имеют одинаковые модули и противоположные аргументы.

$$|z| = |\bar{z}|; \qquad Arg\, z = -Arg\, \bar{z}.$$

<u>Действия с комплексными числами.</u>

Основные действия с комплексными числами вытекают из действий с многочленами.

1) **Сложение и вычитание.**

$$z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$$

2) **Умножение.**

$$z = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 + i^2 b_1b_2$$

$$z = z_1 z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2)$$

В тригонометрической форме:

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

С случае комплексно – сопряженных чисел:

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2.$$

3) **Деление.**

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy$$

$$z = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + i(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2} \qquad z = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

В тригонометрической форме: $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

4) **Возведение в степень.**

Из операции умножения комплексных чисел следует, что

$$z^2 = zz = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

В общем случае получим: $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, где n – целое положительное число.

Это выражение называется **формулой Муавра.**

5) **Извлечение корня из комплексного числа.**

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

Возводя в степень, получим:

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Отсюда: $\rho = \sqrt[n]{r}; \qquad n\psi = \varphi + 2\pi k; \qquad k \in Z.$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

Таким образом, корень n – ой степени из комплексного числа имеет n различных значений.

Показательная форма комплексного числа.

Рассмотрим показательную функцию $w = e^z; \qquad z = x + iy.$

Можно показать, что функция w может быть записана в виде:

$$w = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

Данное равенство называется **уравнением Эйлера.** Для комплексных чисел будут справедливы следующие свойства:

1) $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1}e^{z_2};$

2) $e^{z_1 - z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}};$

3) $(e^z)^m = e^{mz};$ где m – целое число.

Если в уравнении Эйлера показатель степени принять за чисто мнимое число ($x=0$), то получаем: $e^{iy} = \cos y + i\sin y$

Для комплексно – сопряженного числа получаем: $e^{-iy} = \cos y - i\sin y$

Из этих двух уравнений получаем:

$$\begin{cases} \cos y = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \\ \sin y = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \end{cases}$$

Этими формулами пользуются для нахождения значений степеней тригонометрических функций через функции кратных углов.

Если представить комплексное число в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

и воспользуемся формулой Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$$z = re^{i\varphi}$$

Полученное равенство и есть **показательная форма комплексного числа.**

2.20. Линейные преобразования пространства R^n. Линейные операторы. Ядро и образ линейного оператора. Матрица линейного оператора.

Оператор A, действующий в линейных пространствах X, Y называется линейным оператором, если $A(u+v) = A(u) + A(v)$ и $A(\alpha u) = \alpha A(u)$ для любых $u, v \in X$ и для любого числа α.

Если пространства X и Y совпадают, то говорят, что оператор действует в пространстве X. В дальнейшем ограничимся рассмотрением линейных операторов, действующих в линейном пространстве X.

Рассмотрим линейный оператор A, действующий в конечномерном линейном пространстве X. Доказано, что образ $Im(A)$ линейного оператора — линейное пространство. Размерность образа линейного оператора называется рангом оператора, обозначается $Rg(A) = r = dim(Im(A))$.

Ядром линейного оператора называется множество элементов из X, образом которых является нулевой элемент. Ядро оператора обозначают $Ker(A)$: $Ker(A) = \{x \in X : A(x) = \mathbf{0}\}$. Ядро линейного оператора — линейное пространство; размерность ядра линейного оператора называется дефектом оператора, обозначается $Def(A)$: $d = Def(A) = dim(Ker(A))$.

Для линейного оператора, действующего в n-мерном линейном пространстве X, справедливы следующие утверждения:

- сумма ранга и дефекта оператора равно размерности пространства, в котором действует оператор: $Def(A) + Rg(a) = n$;
- ранг оператора равен рангу его матрицы;
- ядро оператора совпадает с множеством решений линейной однородной системы с матрицей A, размерность пространства решений этой системы равна дефекту оператора, а ее фундаментальная система решений образует базис в ядре оператора;
- столбцы, входящие в базисный минор матрицы оператора образуют базис в образе оператора.

Сформулированные утверждения позволяют описать структуру образа и ядра линейного оператора, заданного матрицей, используя язык матричных преобразований и общей теории линейных систем.

Матрица, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ столбцами которой являются координаты образов базисных векторов, называется **матрицей линейного оператора** в заданном базисе.

2.21. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов. Собственные значения квадратных матриц.

Пусть А- линейный оператор, действующий в линейном пространстве.

Число λ называется собственным значением, а ненулевой вектор X -соответствующим собственным вектором линейного оператора А, если они связаны между собой соотношением $Ax = \lambda x$.

Пусть А- матрица оператора в некотором базисе.

Собственные значения оператора и соответствующие им собственные векторы связаны соотношением $(A - \lambda E)x = 0$, где E— единичная матрица, а 0 —нулевой элемент пространства X. Это означает, что собственный вектор оператора является ненулевым решением линейной однородной системы $(A - \lambda E)\,x = 0$, которое существует тогда и только тогда, когда $\det(A - \lambda E) = 0$.

Следовательно, собственные значения линейного оператора могут быть вычислены как корни уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$, а собственные векторы - как решения соответствующих однородных систем.

Уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ называется характеристическим уравнением оператора, а многочлен $\det(A - \lambda E)$ – характеристическим многочленом оператора.

Для собственных значений и собственных векторов линейного оператора справедливы следующие утверждения:

- многочлен оператора, действующего в n-мерном линейном пространстве является многочленом n-й степени относительно λ;
- линейный оператор, действующий в n-мерном линейном пространстве имеет не более n различных собственных значений;
-собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы;
-если линейный оператор, действующий в n-мерном линейном пространстве X, имеет n различных собственных значений, то собственные векторы оператора образуют базис в пространстве X; этот базис называют собственным базисом оператора;
-матрица оператора в базисе из его собственных векторов имеет диагональную форму с собственными значениями на диагонали.

Пусть дана матрица A. Число λ называется <u>*собственным значением*</u> матрицы A, если выполняется равенство $\boxed{\Delta(A - \lambda E) = 0}$

Вектор $\vec{x} = (x_1; x_2; ...; x_n)$, $\vec{x} \neq \vec{0}$ называется <u>*собственным вектором*</u>, соответствующим собственному значению λ, если $(A - \lambda E)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{0}$.

<u>Пример:</u> Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение: 1) $\Delta(A - \lambda E) = 0$

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 9 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (1-\lambda)^2 - 36 = 0$$

$\lambda_1 = -5;\quad \lambda_2 = 7$ - собственные значения матрицы A.

2) $\vec{x_1} = (x_1; x_2);\quad \lambda_1 = -5$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 9 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 = 0 \\ 9x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = -1{,}5c \end{cases}$$

$\vec{x_1} = (c; -1{,}5c)$, $\forall c \neq 0$ - собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = -5$.

$\vec{x_2} = (x_3; x_4);\quad \lambda_2 = 7$

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -6x_3 + 4x_4 = 0 \\ 9x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = d \\ x_4 = 1{,}5d \end{cases}$$

$\vec{x_2} = (d; 1{,}5d)$, $\forall d \neq 0$ - собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 7$.

Рассмотрим модель международной торговли (модель обмена) в виде математической модели.

Пусть имеем n стран - $S_1, S_2, ..., S_n$, национальный доход каждой из которых равен $x_1, x_2, ..., x_n$.

Обозначим через a_{ij} , $i = 1...n;\ j = 1...n$ долю национального дохода, который страна S_j тратит на покупку товаров у страны S_i.

Будем считать, что весь национальный доход тратится на закупку товаров либо внутри страны, либо на импорт из других стран, т.е. $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad (j = 1...n)$.

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется _структурной матрицей торговли_.

Обозначим через $p_i \quad (i = 1...n)$ выручку от внутренней и внешней торговли для страны S_i, тогда $p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n$.

Очевидно, что выручка от торговли каждой страны должна быть не меньше её национального дохода, т.е. $p_i \geq x_i$. Но $p_i > x_i$ - невозможный случай, т.к. все страны не могут одновременно получать прибыль, поэтому условие $p_i \geq x_i$ примет вид $p_i = x_i$.

Введем вектор национальных доходов страны $\vec{x} = (x_1; x_2; ...; x_n)$, получим матричное уравнение

$A \cdot X = X$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$.

Т.е. задача свелась к отысканию собственного вектора матрицы А, отвечающего собственному значению λ=1.

Пример: Структурная матрица торговли трех стран S_1, S_2, S_3 имеет вид $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$.

Найти национальные доходы для сбалансированной торговли.

Решение: Найдем собственный вектор $\vec{x}$, соответствующий собственному значению λ=1.

$(A - E)X = 0 \qquad \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = 1{,}5c \\ x_2 = 2c \\ x_3 = c \end{cases}$ - метод Гаусса. Т.е. $\vec{x} = (1{,}5c; 2c; c)$

Таким образом, сбалансированность торговли трех стран достигается при векторе национальных доходов $\vec{x} = (1{,}5c; 2c; c)$, т.е. при соотношении национальных доходов стран $\frac{3}{2} : 2 : 1$ или $3 : 4 : 2$.

2.22. Квадратичные формы, их матрицы в данном базисе. Приведение квадратичной формы к нормальному виду методом Лагранжа. Приведение квадратичной формы к каноническому виду при помощи ортогонального преобразования. Закон инерции квадратичных форм. Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы

Квадратичная форма — функция на векторном пространстве задаваемая однородным квадратным многочленом от координат.

Пусть L есть векторное пространство над полем K и $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$— базис в L.

Функция Q из L в K называется квадратичной формой если её можно представить в виде

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

где $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i$ а a_{ij} -элементы поля K.

Матрицу (a_{ij}) называют матрицей квадратичной формы в данном базисе.

В случае если характеристика поля K не равна 2, можно считать, что матрица квадратичной формы симметрична, то есть $a_{ij} = a_{ji}$.

Нормальным видом квадратичной формы называется такой канонический вид, в котором коэффициенты при квадратах неизвестных (не считая нулевых) равны ± 1.

Метод Лагранжа — метод приведения квадратичной формы к каноническому виду, указанный в 1759 году Лагранжем.

Данный метод состоит в последовательном выделении в квадратичной форме полных квадратов. Пусть $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ есть данная квадратичная форма. Возможны два случая:

1. хотя бы один из коэффициентов a_{ii} при квадратах отличен от нуля. Не нарушая общности, будем считать $a_{11} \neq 0$ (этого всегда можно добиться соответствующей перенумерацией переменных);
2. все коэффициенты $a_{ii} = 0, i = 1, 2, ..., n$, но есть коэффициент $a_{ij}, i \neq j$, отличный от нуля (для определённости пусть будет $a_{12} \neq 0$).

В первом случае преобразуем квадратичную форму следующим образом:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = (a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + ... + 2a_{1n}x_1x_n) + f_1(x_2, x_3, ..., x_n) =$$

$$= \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n)^2 - \frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n)^2 + f_1(x_2, x_3, ..., x_n) == \frac{1}{a_{11}}y_1^2 + f_2(x_2, x_3, ..., x_n)$$

, где $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n$, а через $f_2(x_2, x_3, ..., x_n)$ обозначены все остальные слагаемые.

$f_2(x_2, ..., x_n)$ представляет собой квадратичную форму от n-1 переменных $x_2, x_3, ..., x_n$. С ней поступают аналогичным образом и так далее.

Заметим, что $y_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1}$.

Второй случай заменой переменных $x_1 = y_1 + y_2, x_2 = y_1 - y_2, x_3 = y_3, ..., x_n = y_n$ сводится к первому.

Квадратичная форма называется канонической (имеет канонический вид), если коэффициенты $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$, то есть, если матрица квадратичной формы диагональная и следовательно

$$f(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 .,$$

где не все коэффициенты a_{ii} равны нулю.

Существует ортогональное преобразование n-мерного евклидова пространства, приводящее квадратичную форму к каноническому виду.

Алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду состоит в следующем:

-находим собственные значения матрицы квадратичной формы и записываем её канонический вид в виде суммы квадратов, коэффициентами при которых являются собственные значения матрицы;

-если нужно указать вид преобразования, то находим собственные векторы матрицы, нормируем их, и записываем матрицу перехода от исходного ортонормированного базиса к базису, составленному из найденных собственных векторов.

Закон инерции квадратичных форм. Приводя квадратичную форму к сумме квадратов: $A(\bar{x}, \bar{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a'_i (x'_i)^2$, вобще говоря, будем получать различные коэффициенты при квадратах.

Однако, справедлива следующая теорема, которая носит название "закон инерции квадратичных форм".

Теорема. Если квадратичная форма $A(\bar{x}, \bar{x})$ приводится к сумме квадратов в двух различных базисах, то число членов с положительными коэффициентами и число членов с отрицательными коэффициентами в обоих случаях одни и те же.

Теорема (критерий Сильвестра). Для того чтобы квадратичная форма $f(\vec{x})$ была положительно определённой, необходимо и достаточно чтобы все угловые миноры матрицы квадратичной формы были положительны,то есть, чтобы

$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ..., \Delta_n > 0.$

Здесь $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ -угловые миноры матрицы квадратичной формы.

Следствие. Для того чтобы квадратичная форма $f(\vec{x})$ была отрицательно определённой, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров матрицы квадратичной формы чередовались следующим образом: $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, ..., (-1)^n \Delta_n > 0.$

2.23. Прямая и гиперплоскость в *n*-мерном пространстве. Угол между гиперплоскостями. Расстояние от точки до гиперплоскости.

Пусть в n-мерном пространстве дана точка А ($a_1, a_2, \ldots, a_n$) и ненулевой вектор u_0=($a_1, a_2, \ldots, a_n$). Этими данными определено множество π^t, состоящее из всех точек М, являющихся концевыми точками всевозможных векторов вида t_{u0}, где t- произвольное число из поля к, приложенных к точке А. Так, определенное множество π^t называется *прямой*, проходящей через точку А в пространстве R^n и имеющей (или несущей на себе) направляющий вектор u_0.

В N-мерном пространстве существуют подпространства всех размерностей k < N, часто называемые *гиперплоскостями* или k-плоскостями, где k — размерность подпространства. Термин «гиперплоскость» используется также в узком смысле для обозначения подпространства размерности N–1 (коразмерности 1). Одномерное подпространство по аналогии с обычной геометрией называется прямой, двумерное подпространство — плоскостью. Название «плоскость» подчёркивает тот факт, что объект находится внутри пространства большей размерности, то есть является подпространством. Например, в 4-пространстве обычное трёхмерное пространство является 3-плоскостью.

2.24 Угловые точки выпуклых многогранных областей. Выпуклая оболочка системы точек в R^n.

Среди геометрических понятий, связанных с R^n, важную роль в приложениях (особенно экономических) играет понятие выпуклого множества. Множество М R^n называется выпуклым, если вместе с любыми двумя точками А и В оно содержит весь отрезок АВ. Рис.1 показывает различие между выпуклыми и невыпуклыми множествами в R^2 (т. е. на обычной плоскости).

Рис. 1

Наиболее важным примером выпуклого множества в R^n является полупространство.

Пересечение нескольких полупространств в R^n называется выпуклой многогранной областью в R^n. Выпуклая многогранная область в R^n задается с помощью системы из нескольких линейных неравенств. На рис. 2 изображены примеры выпуклых многогранных областей. В этом случае вместо «многогранных» более естественно говорить «многоугольных».

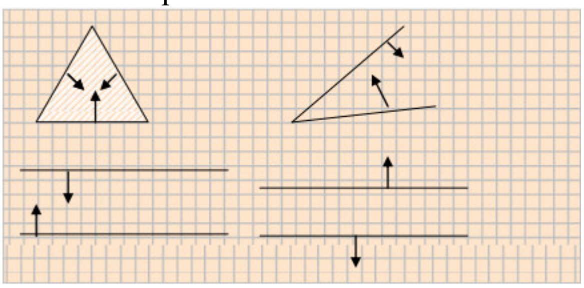


Рис. 2

Ограниченная выпуклая многогранная область называется выпуклым многогранником.

Угловые точки выпуклых многогранных областей. Рассмотрим выпуклую многоугольную область S на плоскости. Как правило, такие области имеют вершины или угловые точки. Уточним понятие вершины. Точка M выпуклой многогранной области S называется вершиной или угловой точкой области если не существует представления M в виде $M = sM_1 + (1-s)M_2$, где $M_1 \in S, M_2 \in M$ и $0 < s < 1$. Из определения следует, что для точек выпуклой многоугольной области, которые не являются вершинами, найдется отрезок, проходящий через эту точку и целиком содержащийся в области (см. рис. 3).

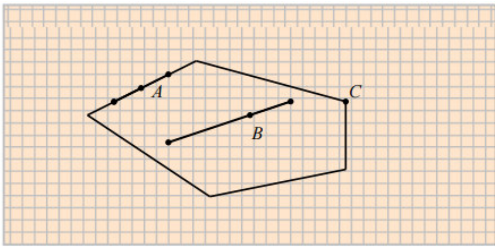


Рис. 3

Для области, изображенной на рис.3, точки A и B не являются вершинами, точка C -вершина. В случае многоугольной области для любой вершины найдутся две граничные прямые, проходящие через вершину, для которых вершина является их единственной общей точкой. Для выпуклой многогранной области в трехмерном пространстве для любой вершины найдутся, по крайней мере, три граничные плоскости с единственной общей точкой, которая является вершиной.

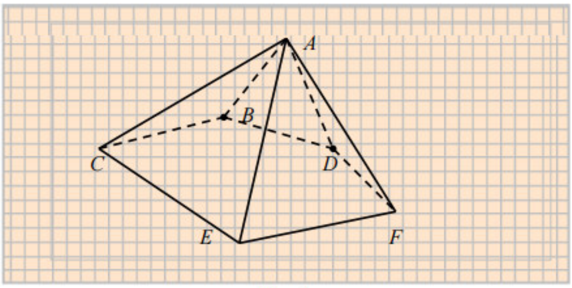


Рис. 4

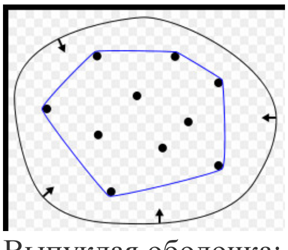
На рис. 4 через вершину A проходят пять граничных плоскостей, но достаточно взять любые три из них, чтобы единственным образом определить еѐ.

Выпуклой оболочкой множества X называется наименьшее выпуклое множество, содержащее X. «Наименьшее множество» здесь означает наименьший элемент по отношению к вложению множеств, то есть такое выпуклое множество, содержащее данную фигуру, что оно содержится в любом другом выпуклом множестве, содержащем данную фигуру.

Обычно выпуклая оболочка определяется для подмножеств векторного пространства над вещественными числами (в частности в евклидовом пространстве) и на соответствующих аффинных пространствах.

Выпуклая оболочка множества X обычно обозначается $\operatorname{Conv} X$.

Представьте себе доску, в которую вбито — но не по самую шляпку — много гвоздей. Возьмите верёвку, свяжите на ней скользящую петлю (лассо) и набросьте её на доску, а потом затяните. Верёвка окружает все гвозди, но касается она только некоторых, самых внешних. Те гвозди, которых она касается, составляют *выпуклую оболочку* для всей группы гвоздей.



Выпуклая оболочка: пример с лассо

2.25. Выпуклые множества в пространстве R^n. Полупространства, выпуклые многогранные области. Системы линейных неравенств и их геометрический смысл.

Множество R$\in R^n$ называется выпуклым, если:

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in D \quad \forall x, y \in D; \alpha \in [0,1],$$

Т.е. вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и весь отрезок, соединяющий эти точки.

К простейшим свойствам выпуклых множеств относятся:

1. Если D_i, $i \in I$, - некоторые выпуклые множества из R^n, то их пересечение $D = \bigcap_{i \in I} D_i$, если оно непустое, также является выпуклым множеством.
2. Пусть D_i, $i \in \overline{1,m}$ - некоторые выпуклые множества из R^n, а a_i, $i \in \overline{1,m}$ – любые числа. Тогда множество $D = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i D_i = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^i,\ x^i \in D_i\}$ является выпуклым.
3. Если D – выпуклое множество, $\{x^i\}_{i=\overline{1,m}} \subset D,\ \alpha_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1,$, то $\alpha_1 x^1 + \ldots + \alpha_m x^m \in D.$

Полупространство, ограниченное гиперплоскостью α — это геометрическая фигура в пространстве, для которой выполняется следующее:

1. Эта фигура включает в себя плоскость α, но не сводится к ней.
2. Любой отрезок, ограниченный произвольными точками этой фигуры A и B, не принадлежащими α, не имеет пересечений с плоскостью α.
3. Любой отрезок, ограниченный произвольными точками этой фигуры A и B, где A принадлежит α, а B — нет, имеет пересечение с плоскостью α.

Выпуклая область на плоскости — часть плоскости, обладающая тем свойством, что отрезок, соединяющий две ее любые точки, содержится в ней целиком . Через каждую точку ее границы можно провести опорную прямую, которая не рассекает эту область.

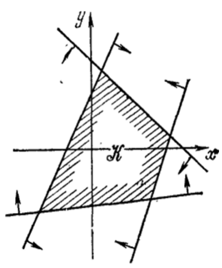
Эти понятия переносятся с двумерного пространства (плоскости) на многомерное. Напр., роль опорной прямой по отношению к n-мерному выпуклому многограннику в нем играет опорная гиперплоскость.

К выпуклым множествам относятся все n-мерное пространство R_n, или множество точек ($x_1 \ldots x_n$) в n-мерном пространстве, удовлетворяющих условию: $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, или r-окрестность любой n-мерной точки и др. Пересечение выпуклых множеств является выпуклым множеством.

Выпуклые многогранники и выпуклые многогранные конусы принадлежат к числу наиболее распространенных понятий математической экономики. В линейном и выпуклом программировании используются обязательно выпуклые области изменения переменных (допустимые множества по теоретико-множественной терминологии, многогранники — по геометрической) и выпуклые целевые функции.

Системы линейных неравенств и их геометрический смысл: Пусть дана система неравенств с двумя неизвестными x и y.

$$a_1x+b_1y+c_1 \geq 0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2 \geq 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_mx+b_my+c_m \geq 0.$$



Первое неравенство системы определяет на координатной плоскости xOy некоторую полуплоскость П1, второе – полуплоскость П2 и т.д. Если пара чисел x, y удовлетворяет всем неравенствам системы, то соответствующая точка M(x, y) принадлежит всем полуплоскостям П1,П2,...,Пm одновременно. Другими словами, точка M принадлежит пересечению (общей части) указанных полуплоскостей. Легко видеть, что пересечение конечного числа полуплоскостей есть некоторая многоугольная область.

Пример. Вдоль контура области изображены штрихи, идущие внутрь области. Они одновременно указывают, с какой стороны от данной прямой лежит соответствующая полуплоскость; то же самое указано и с помощью стрелок.

2.26. Собственные значения и собственные векторы неотрицательных матриц.

Определение: Пусть L – заданное n- мерное линейное пространство. Ненулевой вектор $\bar{x} \in L$ называется **собственным вектором** линейного преобразования А, если существует такое число λ, что выполняется равенство: $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$.

При этом число λ называется **собственным значением (характеристическим числом)** линейного преобразования А, соответствующего вектору $\bar{x}$.

Определение: Если линейное преобразование А в некотором базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, то собственные значения линейного преобразования А можно найти как корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ уравнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Это уравнение называется **характеристическим уравнением,** а его левая часть- **характеристическим многочленом** линейного преобразования А.

Следует отметить, что характеристический многочлен линейного преобразования не зависит от выбора базиса.

Рассмотрим частный случай. Пусть А – некоторое линейное преобразование плоскости, матрица которого равна $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Тогда преобразование А может быть задано формулами:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}; \qquad \begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$ в некотором базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}$.

Если преобразование А имеет собственный вектор с собственным значением λ, то $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$.

$$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = \lambda x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

Т.к. собственный вектор $\bar{x}$ ненулевой, то x_1 и x_2 не равны нулю одновременно. Т.к. данная система однородна, то для того, чтобы она имела нетривиальное решение, определитель системы должен быть равен нулю. В противном случае по правилу Крамера система имеет единственное решение – нулевое, что невозможно.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

Полученное уравнение является **характеристическим уравнением линейного преобразования А**.

Таким образом, можно найти собственный вектор $\bar{x}$ (x_1, x_2) линейного преобразования А с собственным значением λ, где λ - корень характеристического уравнения, а x_1 и x_2 – корни системы уравнений при подстановке в нее значения λ.

Понятно, что если характеристическое уравнение не имеет действительных корней, то линейное преобразование А не имеет собственных векторов.

Следует отметить, что если $\bar{x}$ - собственный вектор преобразования А, то и любой вектор ему коллинеарный – тоже собственный с тем же самым собственным значением λ.

Действительно, $A(k\bar{x}) = kA\bar{x} = k\lambda\bar{x} = \lambda(k\bar{x})$. Если учесть, что векторы имеют одно начало, то эти векторы образуют так называемое **собственное направление** или **собственную прямую**.

Т.к. характеристическое уравнение может иметь два различных действительных корня λ_1 и λ_2, то в этом случае при подстановке их в систему уравнений получим бесконечное количество решений. (Т.к. уравнения линейно зависимы). Это множество решений определяет две **собственные прямые**.

Если характеристическое уравнение имеет два равных корня $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то либо имеется лишь одна собственная прямая, либо, если при подстановке в систему она превращается в систему вида: $\begin{cases} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \end{cases}$. Эта система удовлетворяет любым значениям x_1 и x_2. Тогда все векторы будут собственными, и такое преобразование называется **преобразованием подобия**.

Пример. Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования с матрицей A = $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Запишем линейное преобразование в виде: $\begin{matrix} x_1' = \lambda x_1 = 5x_1 + 4x_2 \\ x_2' = \lambda x_2 = 2x_1 + 3x_2 \end{matrix}$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 15 - 3\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 8 = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0;$$

Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 7$; $\lambda_2 = 1$;

Для корня $\lambda_1 = 7$: $\begin{cases} (5-7)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + (3-7)x_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$

Из системы получается зависимость: $x_1 - 2x_2 = 0$. Собственные векторы для первого корня характеристического уравнения имеют координаты: ***(t; 0,5t)*** где *t*- параметр.

Для корня $\lambda_2 = 1$: $\begin{cases} (5-1)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + (3-1)x_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$

Из системы получается зависимость: $x_1 + x_2 = 0$. Собственные векторы для второго корня характеристического уравнения имеют координаты: ***(t; -t)*** где *t*- параметр.

Полученные собственные векторы можно записать в виде:

$$\vec{u}_1 = t(\vec{e}_1 + 0{,}5\vec{e}_2); \quad \vec{u}_2 = t(\vec{e}_1 - \vec{e}_2).$$

Пример. Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования с матрицей A = $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Запишем линейное преобразование в виде: $\begin{matrix} x_1' = \lambda x_1 = 6x_1 - 4x_2 \\ x_2' = \lambda x_2 = 4x_1 - 2x_2 \end{matrix}$ $\quad \begin{cases} (6-\lambda)x_1 - 4x_2 = 0 \\ 4x_1 - (2+\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -4 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(6-\lambda)(2+\lambda) + 16 = -12 - 6\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 16 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0;$$

Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$;

Получаем: $\begin{cases} (6-2)x_1 - 4x_2 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$

Из системы получается зависимость: $x_1 - x_2 = 0$. Собственные векторы для первого корня характеристического уравнения имеют координаты: ***(t; t)*** где *t*- параметр.

Собственный вектор можно записать: $\vec{u} = (\vec{e}_1 + \vec{e}_2)t$.

Рассмотрим другой частный случай. Если $\bar{x}$ - собственный вектор линейного преобразования А, заданного в трехмерном линейном пространстве, а x_1, x_2, x_3 – компоненты этого вектора в некотором базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, то $x_1' = \lambda x_1$; $x_2' = \lambda x_2$; $x_3' = \lambda x_3$, где λ - собственное значение (характеристическое число) преобразования А.

Если матрица линейного преобразования А имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ то } \begin{cases} \lambda x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \lambda x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \lambda x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

Характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$

Раскрыв определитель, получим кубическое уравнение относительно λ. Любое кубическое уравнение с действительными коэффициентами имеет либо один, либо три действительных корня.

Тогда любое линейное преобразование в трехмерном пространстве имеет собственные векторы.

Пример. Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования А, матрица линейного преобразования А = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 = 1\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 3\cdot x_3 \\ x_2' = \lambda x_2 = 1\cdot x_1 + 5\cdot x_2 + 1\cdot x_3 \\ x_3' = \lambda x_3 = 3\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 1\cdot x_3 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1 - \lambda)((5 - \lambda)(1 - \lambda) - 1) - (1 - \lambda - 3) + 3(1 - 15 + 3\lambda) = 0$$
$$(1 - \lambda)(5 - 5\lambda - \lambda + \lambda^2 - 1) + 2 + \lambda - 42 + 9\lambda = 0$$
$$(1 - \lambda)(4 - 6\lambda + \lambda^2) + 10\lambda - 40 = 0$$
$$4 - 6\lambda + \lambda^2 - 4\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 + 10\lambda - 40 = 0$$
$$-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 36 = 0$$
$$-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 2\lambda^2 - 36 = 0$$
$$-\lambda^2(\lambda + 2) + 9(\lambda^2 - 4) = 0$$
$$(\lambda + 2)(-\lambda^2 + 9\lambda - 18) = 0$$

Собственные значения: $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 6$;

1) Для $\lambda_1 = -2$: $\begin{cases} (1+2)x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

Если принять $x_1 = 1$, то $\begin{cases} 7x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x_2 = 0$; $x_3 = -1$;

Собственные векторы: $\vec{u}_1 = (\vec{e}_1 - \vec{e}_3)\cdot t.$

2) Для $\lambda_2 = 3$: $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

Если принять $x_1 = 1$, то $\begin{cases} 2x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x_2 = -1$; $x_3 = 1$;

Собственные векторы: $\vec{u}_2 = (\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3)\cdot t.$

3) Для $\lambda_3 = 6$: $\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$

Если принять $x_1 = 1$, то $\begin{cases} -x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 - 5x_3 = -3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x_2 = 2$; $x_3 = 1$;

Собственные векторы: $\vec{u}_3 = (\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3)\cdot t.$

Пример. Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования А, матрица линейного преобразования А = $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 & -4 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-(3 + \lambda)((1 - \lambda)(2 - \lambda) - 2) + 2(4 - 2\lambda - 2) - 4(2 - 1 + \lambda) = 0$$
$$-(3 + \lambda)(2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 2) + 2(2 - 2\lambda) - 4(1 + \lambda) = 0$$
$$-(3 + \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda) + 4 - 4\lambda - 4 - 4\lambda = 0$$
$$-3\lambda^2 + 9\lambda - \lambda^3 + 3\lambda^2 - 8\lambda = 0$$
$$-\lambda^3 + \lambda = 0$$
$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = 1; \quad \lambda_3 = -1;$$

Для $\lambda_1 = 0$: $\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -2x_3 \\ x_1 + x_2 = -2x_3 \end{cases}$

Если принять $x_3 = 1$, получаем $x_1 = 0$, $x_2 = -2$

Собственные векторы $\vec{u}_1 = (0 \cdot \vec{e}_1 - 2 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3) \cdot t$, где t – параметр.

2.27. Теорема Фробениуса-Перрона. Число и вектор Фробениуса, их свойства.

Теорема Фробениуса-Перрона: Пусть A — квадратная матрица, со строго положительными вещественными элементами, тогда справедливы утверждения:

1) наибольшее по модулю собственное число является вещественным и строго положительным;
2) это собственное значение является простым корнем характеристического многочлена;
3) соответствующий собственной вектор имеет строго положительные координаты;
4) собственное значение удовлетворяет неравенствам.

$$\min_i \sum_j a_{ij} \leqslant r \leqslant \max_i \sum_j a_{ij}.$$

Число и вектор Фробениуса, их свойства. Собственным вектором матрицы A называется такой ненулевой вектор $x \in R^n$, что $Ax = \lambda x$, где λ- некоторый скаляр, называемый собственным числом матрицы A , соответствующим собственному вектору x. Неотрицательный собственный вектор неотрицательной неразложимой матрицы A называется вектором Фробениуса матрицы A , а соответствующее ему собственное число - числом Фробениуса матрицы A.

Неразложимая матрица A называется устойчивой, если для любого x последовательность $\{\overline{A}^k x\}_{k=1}^{\infty}$ сходится, где $\overline{A}^k$- k-ая степень матрицы $\overline{A} = \lambda_A^{-1} A$, λ_A- число Фробениуса для матрицы A.

Предельной точкой этой последовательности при $x \geq 0$ и $x \neq 0$ является вектор $\left(\|x\| / \|x_A\| \right) \cdot x_A$, где $\bar{x} = x_A$- вектор Фробениуса для матрицы A .

2.28. Продуктивность неотрицательных матриц.

Определение 1. Матрица $D = \left\| d_{ij} \right\|_{i,j=\overline{1,n}}$, удовлетворяющая условию $d_{ij} \leq 0$; при всех $i \neq j$, называется продуктивной, если существует $\vec{x} \geq 0$ такой, что $D\vec{x} > 0$.

Определение 2. Матрица $D = \left\| d_{ij} \right\|_{i,j=\overline{1,n}}$, удовлетворяющая условию $d_{ij} \leq 0$; при всех $i \neq j$, называется прибыльной, если существует $\vec{p} \geq 0$ такой, что $D^T\vec{p} > 0$.

Теорема 1. Пусть матрица удовлетворяет условию $d_{ij} \leq 0$ при всех $i \neq j$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. существует $\vec{x} \geq 0$ такой, что $D\vec{x} > 0$ (продуктивность);
2. для любого $\vec{\omega} \geq 0$ существует $\vec{x} \geq 0$ такой, что $D\vec{x} = \vec{\omega}$;
3. последовательные главные миноры матрицы D положительны;
4. все главные миноры матрицы D положительны;
5. существует $\vec{p} \geq 0$ такой что $D^T\vec{p} > 0$ (прибыльность);
6. для любого $\vec{\pi} \geq 0$ существует $\vec{p} \geq 0$ такой, что $D^T\vec{p} = \vec{\pi}$;
7. последовательные главные миноры матрицы D^T положительные;
8. все главные миноры матрицы D^T положительны;
9. матрица D неотрицательно обратима, т.е. существует D-1 ≥ 0.

Теорема 2. Пусть A - неотрицательная квадратная матрица. Тогда:

1. Если матрица (ρE - A) неотрицательно обратима, то $\rho > 0$ и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\rho^{k+1}}$ сходится и его сумма равна (ρE - A)-1.

2. Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\rho^{k+1}}$ сходится и ρ > 0, то матрица (ρE - A) неотрицательно обратима.

2.29 Понятие о взаимно-двойственных задачах линейного программирования. Основные теоремы двойственности. Двойственность в экономико-математических моделях.

Предположим, что задача линейного программирования задана в следующем виде:

$$L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max \text{ (или min)}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, & (\ge b_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, & (\ge b_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. & (\ge b_m) \end{cases} \left| \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_m \end{array} \right.$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$$

Составим другую задачу линейного программирования, число переменных которой равно числу ограничений данной задачи, т.е. m. Обозначим их вектором $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$.

Эта задача имеет вид:

$$F(Y) = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min \text{ (или max)}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1, & (\le c_1) \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2, & (\le c_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{nm}y_m \ge c_m. & (\le c_m) \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0, \ldots, y_m \ge 0$$

Вторая задача называется **двойственной**, или **сопряженной** для первой, а первая – **прямой**, или **основной**.

Если для второй задачи составить двойственную задачу, то получим первую. Таким образом, сформулированные задачи составляют пару взаимно двойственных, или взаимно сопряженных задач линейного программирования.

Отметим особенности пары взаимно двойственных задач.

1) Если **основная** задача – задача на **максимум** (минимум), то система ограничений должна состоять из неравенств вида £ (³), и в таком случае ***двойственная*** задача должна быть задачей на ***минимум*** (максимум), а ее система ограничений должна состоять из неравенств вида ³ (£), т.е. **неравенств противоположного смысла.**

2) В основной задаче все переменные должны быть **неотрицательными**.

3) **Коэффициентами** целевой функции $F(Y)$ двойственной задачи являются **свободные члены** системы ограничений основной задачи, и их число равно m.

4) Основная матрица системы ограничений двойственной задачи получается **транспонированием** матрицы системы ограничений основной задачи.

5) **Свободными членами** системы ограничений двойственной задачи являются **коэффициенты** целевой функции $L(X)$ основной задачи.

6) Все переменные двойственной задачи **неотрицательные**.

Предположим теперь, что основная задача задана в **ослабленной форме**, т.е. среди ее переменных имеются переменные произвольного знака (на них не наложено требование неотрицательности), а система ограничений содержит неравенства противоположных направлений и, возможно, равенства. Построение двойственной задачи в таком случае основано на следующих правилах.

1) Все неравенства системы ограничений основной задачи следует привести **к одному направлению**: ³ в задаче на минимум или £ в задаче на максимум.

2) Если в системе ограничений основной задачи имеется **равенство (уравнение)**, то та переменная y_i, которая соответствует этому i –му ограничению-равенству, может быть произвольного знака.. Запишем это соответствие так:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i \quad \to \quad y_i \in R.$$

3) Если на некоторую переменную x_j основной задачи **не наложено условие неотрицательности**, то соответствующее ей ограничение двойственной задачи является равенством

$$x_j \in R \quad \to \quad a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + ... + a_{mj}y_m = c_j$$

Для основной задачи линейного программирования и двойственной к ней задаче справедливы следующие теоремы.

Теорема (соответствия) Если одна из пары двойственных задач линейного программирования **имеет решение**, то и другая задача имеет решение, и при этом значения целевых функций этих задач равны: $L(X\text{ опт}) = F(Y\text{опт})$.

Теорема (критерий оптимальности) Произвольное допустимое базисное решение одной задачи из пары двойственных задач **оптимально** тогда и только тогда, когда система ограничений двойственной задачи совместна.

Теорема (неограниченности) Если **целевая функция** одной из пары двойственных задач **неограниченна** снизу (сверху), то ***система ограничений*** другой задачи этой пары ***несовместна***.

Если основная задача линейного программирования допускает экономическую интерпретацию, то аналогичную интерпретацию можно придать и двойственной задаче.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЗАНЯТИЯМ

3.1 Практические занятия по теме «Матрицы и определители».

При подготовке к занятиям необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Действия над матрицами, их свойства
2. Правило вычисления определителей второго порядка.
3. Способы и правила вычисления определителя третьего порядка.
4. Понятия минора и алгебраического дополнения. Теорема Лапласа.
5. Алгоритм нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.
6. Применение определителей для нахождения обратной матрицы. Алгоритм нахождение обратной матрицы.
7. Способы нахождения ранга матрицы

3.2 Практические занятия по теме «Системы линейных алгебраических уравнений».

При подготовке к занятиям необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Решение матричных уравнений вида АХ = В.
2. Алгоритм решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.
3. Теорема Кронекера-Капелли для исследования систем.
4. Алгоритм решение систем линейных алгебраических уравнений методом Крамера и метод Гаусса.

3.3 Практические занятия по теме «Векторная алгебра».

При подготовке к занятиям необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Векторы и линейные операции над ними. Свойства.
2. Линейная зависимость системы векторов и ее геометрический смысл.
3. Координаты вектора в данном базисе. Преобразование координат векторов при замене базиса.
4. Скалярное произведение векторов. Свойства.
5. Координаты вектора в ортогональном базисе.

3.4 Практические занятия по теме «Многочлены и комплексные числа».

При подготовке к занятиям необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Алгоритм разложение правильной дроби на сумму элементарных дробей.
2. Комплексные числа и действия над ними. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа.
3. Алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексных чисел. Корни n-ой степени из комплексного числа. Формулировка основной теоремы алгебры.

3.5 Практические занятия по теме «Линейные преобразования и квадратичные формы».

При подготовке к занятиям необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Линейные преобразования пространства R^n. Линейные операторы. Матрица линейного оператора.
2. Алгоритм нахождения собственных значений и собственных векторов линейных операторов.
3. Квадратичные формы, их матрицы в данном базисе. Приведение квадратичной формы к нормальному виду методом Лагранжа. Приведение квадратичной формы к каноническому виду при помощи ортогонального преобразования.

3.6 Практические занятия по теме «Элементы аналитической геометрии».

При подготовке к занятиям необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Различные виды уравнений прямой и гиперплоскости в n-мерном пространстве. Угол между гиперплоскостями. Расстояние от точки до гиперплоскости.
2. Различные виды уравнений прямой на плоскости и в пространстве.
3. Различные виды уравнений плоскости в трехмерном пространстве.
4. Классификация кривых второго порядка. Эллипс, гипербола и парабола, их свойства и канонические уравнения.
5. Классификация поверхностей второго порядка. Эллипсоиды, параболоиды и гиперболоиды, их канонические уравнения.

3.7 Практические занятия по теме «Неотрицательные матрицы и модели Леонтьева».

При подготовке к занятиям необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Модель многоотраслевой экономики Леонтьева.
2. Продуктивные модели Леонтьева. Различные критерии продуктивности модели Леонтьева.

3.8 Практические занятия по теме «Линейное программирование».

При подготовке к занятиям необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Стандартная и каноническая формы записи задач линейного программирования.
2. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования в случае двух переменных. Графический метод решения.
3. Алгоритм решение задачи линейного программирования методом перебора вершин.
4. Алгоритм симплекс-метода.
5. Алгоритм нахождение исходного допустимого базиса.
6. Метод искусственного базиса.
7. Алгоритм решения транспортная задача.

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ

Индивидуальное домашнее задание выполняется в виде контрольной работы. Работа выполняется по вариантам. Для выполнения контрольной работы студент должен изучить все разделы дисциплины.

4.1 Номера задач контрольной работы

Последние две цифры учебного шифра	Номера задач								
01 21 41 61 81	1	21	41	61	81	101	121	141	161
02 22 42 62 82	2	22	42	62	82	102	122	142	162
03 23 43 63 83	3	23	43	63	83	103	123	143	163
04 24 44 64 84	4	24	44	64	84	104	124	144	164
05 25 45 65 85	5	25	45	65	85	105	125	145	165
06 26 46 66 86	6	26	46	66	86	106	126	146	166
07 27 47 67 87	7	27	47	67	87	107	127	147	167
08 28 48 68 88	8	28	48	68	88	108	128	148	168
09 29 49 69 89	9	29	49	69	89	109	129	149	169
10 30 50 70 90	10	30	50	70	90	110	130	150	170
11 31 51 71 91	11	31	51	71	91	111	131	151	171
12 32 52 72 92	12	32	52	72	92	112	132	152	172
13 33 53 73 93	13	33	53	73	93	113	133	153	173
14 34 54 74 94	14	34	54	74	94	114	134	154	174
15 35 55 75 95	15	35	55	75	95	115	135	155	175
16 36 56 76 96	16	36	56	76	96	116	136	156	176
17 37 57 77 97	17	37	57	77	97	117	137	157	177
18 38 58 78 98	18	38	58	78	98	118	138	158	178
19 39 59 79 99	19	39	59	79	99	119	139	159	179
20 40 60 80 00	20	40	60	80	100	120	140	160	180

4.2 Условия задач контрольной работы

В задачах 1 – 20 решить систему линейных уравнений: а) методом Гаусса, б) по формулам Крамера.

1. $\begin{cases} 5x-4y+3z=6 \\ x+4y+9z=-2 \\ -x-3y+7z=15 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} 2x-y+3z=4 \\ 4x+7y-2z=-6 \\ x-8y+5z=1 \end{cases}$; 3. $\begin{cases} 2x-4y+9z=28 \\ 7x+3y-6z=-1 \\ 7x+9y-9z=5 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} -3x+5y-6z=-5 \\ 2x-3y+5z=8 \\ x+4y-z=1 \end{cases}$; 5. $\begin{cases} 2x+4y+3z=-10 \\ 3x-2y+4z=3 \\ -x+5y-2z=5 \end{cases}$; 6. $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-3y+2z=2 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$;

7. $\begin{cases} x+7y-2z=3 \\ 3x+5y+z=5 \\ 2x-5y+5z=4 \end{cases}$; 8. $\begin{cases} 3x-9y+8z=5 \\ 2x-5y+5z=4 \\ 2x-y+z=-4 \end{cases}$; 9. $\begin{cases} 4x-7y+3z=10 \\ 2x+9y-z=8 \\ -x+6y-3z=3 \end{cases}$;

10. $\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ 4x-y+5z=6 \\ x-2y+4z=9 \end{cases}$; 11. $\begin{cases} 4x+2y-z=-12 \\ x+7y-5z=-9 \\ -2x+5y-6z=-8 \end{cases}$; 12. $\begin{cases} x+3y-2z=-5 \\ x+9y-4z=-1 \\ -2x+6y-3z=6 \end{cases}$;

13. $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x+4y+3z=2 \\ -3x+y+2z=0 \end{cases}$; 14. $\begin{cases} 5x+8y-z=6 \\ x+2y+3z=10 \\ 2x-3y+2z=22 \end{cases}$; 15. $\begin{cases} x+2y+4z=31 \\ 5x+y+2z=29 \\ 3x-y+z=10 \end{cases}$;

16. $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$; 17. $\begin{cases} x+y+2z=-1 \\ 2x-y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-2 \end{cases}$; 18. $\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 2x+3y+z=1 \\ 2x+y+3z=11 \end{cases}$;

19. $\begin{cases} 4x-3y+2z=9 \\ 2x+5y-3z=4 \\ 5x+6y-2z=18 \end{cases}$; 20. $\begin{cases} 3x-y+z=4 \\ 2x-5y-3z=-17 \\ x+y-z=0 \end{cases}$.

В задачах 21 – 40 приведены данные об исполнении баланса за отчетный период. 1) Доказать продуктивность модели Леонтьева. 2) Найти вектор конечного продукта, если валовой выпуск первой отрасли увеличится на $30\,\%$, а второй – на $20\,\%$. 3) Вычислить вектор валового выпуска, если конечное потребление продуктов первой отрасли уменьшится на $10\,\%$, а второй – сохранится на прежнем уровне.

№	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	y_1	y_2	x_1	x_2
21	100	90	60	30	210	110	400	200
22	240	210	160	140	350	400	800	700
23	50	60	70	90	90	140	200	300
24	110	140	180	70	250	450	500	700
25	90	160	120	60	350	220	600	400
26	80	120	140	60	200	100	400	300
27	60	80	120	100	160	280	300	500
28	45	55	30	20	200	50	300	100
29	100	200	150	240	200	410	500	800
30	100	40	50	30	110	120	250	200
31	200	60	150	80	240	170	500	400
32	90	70	60	140	140	150	300	350
33	300	90	180	45	210	225	600	450
34	300	250	180	100	350	220	900	500
35	300	140	210	240	260	150	700	600
36	70	60	140	125	220	235	350	500
37	120	100	80	50	180	120	400	250
38	180	150	60	200	270	240	600	500
39	200	240	160	210	360	230	800	600
40	140	180	350	270	380	280	700	900

В задачах 41 – 60 указаны необходимые характеристики производства трех видов продукции с использованием сырья трех типов. На изготовление единицы продукции первого вида расходуется a_{11} вес. ед. сырья s_1, a_{21} вес. ед. сырья s_2 и a_{31} вес. ед. сырья s_3. На изготовление единицы продукции второго вида расходуется a_{12}, a_{22} и a_{32} вес. ед. сырья s_1, s_2 и s_3 соответственно. Аналогично на изготовление единицы продукции третьего вида расходуется a_{13},

a_{23} и a_{33} вес. ед. сырья s_1, s_2 и s_3. Запас сырья первого типа составляет b_1, второго – b_2 и третьего – b_3 вес. ед. Определить объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья.

№	a_{11}	a_{21}	a_{31}	a_{12}	a_{22}	a_{32}	a_{13}	a_{23}	a_{33}	b_1	b_2	b_3
41	6	2	3	5	4	2	1	7	3	1050	870	610
42	3	5	4	7	4	1	2	8	6	790	1230	820
43	4	5	3	1	8	2	2	1	6	300	600	410
44	6	2	5	5	3	4	2	1	2	1520	690	1300
45	3	7	6	5	1	3	1	2	4	1450	1750	2050
46	5	6	4	1	2	5	1	3	4	550	840	1010
47	9	5	2	2	1	3	3	2	6	410	240	460
48	7	6	2	8	2	1	1	5	2	610	660	260
49	2	4	5	5	3	1	7	4	1	1930	1610	1120
50	3	5	7	1	4	6	5	1	2	940	920	1400
51	2	6	5	3	1	2	8	4	1	1490	1430	1110
52	7	6	8	5	1	4	1	2	3	1650	1150	2000
53	9	7	6	4	1	7	5	3	1	1360	860	980
54	5	2	5	4	9	1	3	6	8	580	890	730
55	4	3	8	2	5	2	5	6	1	1160	1410	1240
56	5	6	7	3	1	2	4	1	3	940	540	880
57	2	3	4	6	5	1	7	4	3	500	370	230
58	4	3	7	1	2	5	5	6	3	1170	1340	1510
59	6	4	7	5	1	3	1	2	4	2950	1600	3300
60	3	2	5	5	6	1	1	7	3	890	1620	910

В задачах 61 – 80 даны вершины треугольника ABC. Найти: а) уравнения сторон треугольника и их угловые коэффициенты; б) периметр треугольника ABC; в) наименьший из углов $\Delta\, ABC$; г) уравнение медианы AM; д) уравнение высоты CD и ее длину; е) уравнение окружности, для которой высота CD есть диаметр. Сделать рисунок.

61. $A(-5;0)$, $B(7;9)$, $C(5;-5)$; 62. $A(-7;2)$, $B(5;11)$, $C(3;-3)$;
63. $A(-5;-3)$, $B(7;6)$, $C(5;-8)$; 64. $A(-6;-2)$, $B(6;7)$, $C(4;-7)$;
65. $A(-8;-4)$, $B(4;5)$, $C(2;-9)$; 66. $A(0;-1)$, $B(12;8)$, $C(10;-6)$;
67. $A(-6;1)$, $B(6;10)$, $C(4;-4)$; 68. $A(-2;-4)$, $B(10;5)$, $C(8;-9)$;
69. $A(-3;0)$, $B(9;9)$, $C(7;-5)$; 70. $A(-9;-2)$, $B(3;7)$, $C(1;-7)$;
71. $A(-5;2)$, $B(7;-7)$, $C(5;7)$; 72. $A(-7;5)$, $B(5;-4)$, $C(3;10)$;
73. $A(-7;1)$, $B(5;-8)$, $C(3;6)$; 74. $A(0;3)$, $B(12;-6)$, $C(10;8)$;
75. $A(-8;4)$, $B(4;-5)$, $C(2;9)$; 76. $A(-2;2)$, $B(10;-7)$, $C(8;7)$;
77. $A(1;2)$, $B(13;-7)$, $C(11;7)$; 78. $A(-4;1)$, $B(8;-8)$, $C(6;6)$;
79. $A(-7;-1)$, $B(5;-10)$, $C(3;4)$; 80. $A(-3;3)$, $B(9;-6)$, $C(7;8)$.

В задачах 81 – 100 даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Требуется: а) записать векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ в системе орт $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ и найти модули этих векторов; б) найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; в) составить уравнение грани ABC; г) составить уравнение высоты DO.

81. $A(1;2;1)$, $B(-1;5;1)$, $C(-1;2;7)$, $D(1;5;9)$.
82. $A(2;3;2)$, $B(0;6;2)$, $C(0;3;8)$, $D(2;6;10)$.
83. $A(0;3;2)$, $B(-2;6;2)$, $C(-2;3;8)$, $D(0;6;10)$.
84. $A(2;1;2)$, $B(0;4;2)$, $C(0;1;8)$, $D(2;4;10)$.

85. $A(2;3;0)$, $B(0;6;0)$, $C(0;3;6)$, $D(2;6;8)$.
86. $A(2;2;1)$, $B(0;5;1)$, $C(0;2;7)$, $D(2;5;9)$.
87. $A(1;3;1)$, $B(-1;6;1)$, $C(-1;3;7)$, $D(1;6;9)$.
88. $A(1;2;2)$, $B(-1;5;2)$, $C(-1;2;8)$, $D(1;5;10)$.
89. $A(2;3;1)$, $B(0;6;1)$, $C(0;3;7)$, $D(2;6;9)$.
90. $A(2;2;2)$, $B(0;5;2)$, $C(0;2;8)$, $D(2;5;10)$.
91. $A(1;3;2)$, $B(-1;6;2)$, $C(-1;3;8)$, $D(1;6;10)$.
92. $A(0;1;2)$, $B(-2;4;2)$, $C(-2;1;8)$, $D(0;4;10)$.
93. $A(0;3;0)$, $B(-2;6;0)$, $C(-2;3;6)$, $D(0;6;8)$.
94. $A(2;1;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;1;6)$, $D(2;4;8)$.
95. $A(0;2;1)$, $B(-2;5;1)$, $C(-2;2;7)$, $D(0;5;9)$.
96. $A(1;1;1)$, $B(-1;4;1)$, $C(-1;1;7)$, $D(1;4;9)$.
97. $A(1;2;0)$, $B(-1;5;0)$, $C(-1;2;6)$, $D(1;5;8)$.
98. $A(0;1;0)$, $B(-2;4;0)$, $C(-2;1;6)$, $D(0;4;8)$.
99. $A(0;1;1)$, $B(-2;4;1)$, $C(-2;1;7)$, $D(0;4;9)$.
100. $A(0;2;0)$, $B(-2;5;0)$, $C(-2;2;6)$, $D(0;5;8)$.

В задачах 101 – 120 доказать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

101. $\vec{a}(5;4;1), \vec{b}(-3;5;2), \vec{c}(2;-1;3), \vec{d}(7;23;4)$.
102. $\vec{a}(2;-1;4), \vec{b}(-3;0;-2), \vec{c}(4;5;-3), \vec{d}(0;11;-14)$.
103. $\vec{a}(-1;1;2), \vec{b}(2;-3;-5), \vec{c}(-6;3;-1), \vec{d}(28;-19;-7)$.
104. $\vec{a}(1;3;4), \vec{b}(-2;5;0), \vec{c}(3;-2;-4), \vec{d}(13;-5;-4)$.
105. $\vec{a}(1;-1;1), \vec{b}(-5;-3;1), \vec{c}(2;-1;0), \vec{d}(-15;-10;5)$.
106. $\vec{a}(3;1;2), \vec{b}(-7;-2;-4), \vec{c}(-4;0;3), \vec{d}(16;6;15)$.
107. $\vec{a}(-3;0;1), \vec{b}(2;7;-3), \vec{c}(-4;3;5), \vec{d}(-16;33;13)$.
108. $\vec{a}(5;1;2), \vec{b}(-2;1;-3), \vec{c}(4;-3;5), \vec{d}(15;-15;24)$.
109. $\vec{a}(0;2;-3), \vec{b}(4;-3;-2), \vec{c}(-5;-4;0), \vec{d}(-19;-5;-4)$.
110. $\vec{a}(3;-1;2), \vec{b}(-2;3;1), \vec{c}(4;-5;-3), \vec{d}(-3;2;-3)$.
111. $\vec{a}(5;3;1), \vec{b}(-1;2;-3), \vec{c}(3;-4;2), \vec{d}(-9;34;-20)$.
112. $\vec{a}(3;1;-3), \vec{b}(-2;4;1), \vec{c}(1;-2;5), \vec{d}(1;12;-20)$.
113. $\vec{a}(6;1;-3), \vec{b}(-3;2;1), \vec{c}(-1;-3;4), \vec{d}(15;6;-17)$.
114. $\vec{a}(4;2;3), \vec{b}(-3;1;-8), \vec{c}(2;-4;5), \vec{d}(-12;14;-31)$.
115. $\vec{a}(-2;1;3), \vec{b}(3;-6;2), \vec{c}(-5;-3;-1), \vec{d}(31;-6;22)$.
116. $\vec{a}(1;3;6), \vec{b}(-3;4;-5), \vec{c}(1;-7;2), \vec{d}(-2;17;5)$.
117. $\vec{a}(7;2;1), \vec{b}(5;1;-2), \vec{c}(-3;4;5), \vec{d}(26;11;1)$.
118. $\vec{a}(3;5;4), \vec{b}(-2;7;-5), \vec{c}(6;-2;1), \vec{d}(6;-9;22)$.
119. $\vec{a}(5;3;2), \vec{b}(2;-5;1), \vec{c}(-7;4;-3), \vec{d}(36;1;15)$.
120. $\vec{a}(11;1;2), \vec{b}(-3;3;4), \vec{c}(-4;-2;7), \vec{d}(-5;11;-15)$.

В задачах 121 – 140 решить графическим методом решить задачу линейного программирования (ЗЛП).

Задача № 121	Задача № 122	Задача № 123	Задача № 124
$z = x_1 + x_2$ $x_1 - 3x_2 \le 1$ $-21x_1 + 14x_2 \le 4$ $-84x_1 + 15x_2 \le -10$ $-23x_1 - 15x_2 \le -12$ $16x_1 + 19x_2 \le 26$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$	$z = 3x_1 + 10x_2$ $x_1 - 10x_2 \le 5$ $-x_1 + 2x_2 \le 7$ $-15x_1 + 8x_2 \le -49$ $-34x_1 - 15x_2 \le -14$ $x_1 + 2x_2 \le 29$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$	$z = 10x_1 + 15x_2$ $2x_1 - 12x_2 \le 4$ $-8x_1 + 16x_2 \le 23$ $-4x_1 + x_2 \le -6$ $-14x_1 - 6x_2 \le -24$ $3x_1 + 10x_2 \le 9$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$	$z = 12x_1 + 6x_2$ $4x_1 - 10x_2 \le 2$ $-5x_1 + 10x_2 \le 19$ $-84x_1 + 15x_2 \le -30$ $-11x_1 - 14x_2 \le -9$ $9x_1 + 10x_2 \le 30$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$
Задача № 125	**Задача № 126**	**Задача № 127**	**Задача № 128**
$z = 10x_1 + 7x_2$ $x_1 - 6x_2 \le 3$ $-8x_1 + 15x_2 \le 17$ $-106x_1 + 19x_2 \le -44$ $-11x_1 - 7x_2 \le -3$ $2x_1 + 4x_2 \le 28$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$	$z = 3x_1 + 14x_2$ $x_1 - 2x_2 \le 2$ $-27x_1 + 18x_2 \le 3$ $-22x_1 + 12x_2 \le -4$ $-23x_1 - 15x_2 \le -12$ $x_1 + x_2 \le 20$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$	$z = 4x_1 + 5x_2$ $x_1 - 11x_2 \le 6$ $-5x_1 + 10x_2 \le 18$ $-34x_1 + 6x_2 \le -49$ $-5x_1 - 6x_2 \le -9$ $x_1 + 2x_2 \le 7$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$	$z = x_1 + 11x_2$ $4x_1 - 9x_2 \le 5$ $-4x_1 + 8x_2 \le 11$ $-106x_1 + 19x_2 \le -8$ $-14x_1 - 18x_2 \le -17$ $6x_1 + 7x_2 \le 27$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$
Задача № 129	**Задача № 130**	**Задача № 131**	**Задача № 132**
$z = 7x_1 + 10x_2$ $x_1 - 7x_2 \le 7$ $-14x_1 + 9x_2 \le 3$ $-90x_1 + 16x_2 \le -4$ $-18x_1 - 8x_2 \le -23$ $2x_1 + 4x_2 \le 21$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$	$z = 7x_1 + 3x_2$ $3x_1 - 19x_2 \le 7$ $-3x_1 + 6x_2 \le 2$ $-41x_1 + 11x_2 \le -8$ $-13x_1 - 17x_2 \le -12$ $3x_1 + 10x_2 \le 16$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$	$z = 5x_1 + 11x_2$ $x_1 - 2x_2 \le 8$ $-21x_1 + 14x_2 \le 11$ $-9x_1 + 5x_2 \le -4$ $-13x_1 - 17x_2 \le -25$ $x_1 + 2x_2 \le 11$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$	$z = 7x_1 + 6x_2$ $8x_1 - 19x_2 \le 9$ $-4x_1 + 7x_2 \le 13$ $-34x_1 + 9x_2 \le -19$ $-13x_1 - 17x_2 \le -22$ $2x_1 + 2x_2 \le 8$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$
Задача № 133	**Задача № 134**	**Задача № 135**	**Задача № 136**
$z = 7x_1 + 13x_2$ $3x_1 - 19x_2 \le 3$ $-23x_1 + 15x_2 \le 19$ $-45x_1 + 12x_2 \le -4$ $-7x_1 - 9x_2 \le -2$ $10x_1 + 18x_2 \le 16$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$	$z = 10x_1 + 7x_2$ $5x_1 - 18x_2 \le 7$ $-2x_1 + 4x_2 \le 8$ $-52x_1 + 14x_2 \le -49$ $-20x_1 - 9x_2 \le -28$ $x_1 + 4x_2 \le 13$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$	$z = 15x_1 + 10x_2$ $x_1 - 2x_2 \le 2$ $-8x_1 + 8x_2 \le 14$ $-22x_1 + 6x_2 \le -10$ $-8x_1 - 5x_2 \le -5$ $x_1 + x_2 \le 24$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$	$z = 10x_1 + x_2$ $2x_1 - 17x_2 \le 7$ $-9x_1 + 18x_2 \le 20$ $-15x_1 + 8x_2 \le -36$ $-3x_1 - 4x_2 \le -8$ $x_1 + x_2 \le 16$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$
Задача № 137	**Задача № 138**	**Задача № 139**	**Задача № 140**
$z = 3x_1 + 10x_2$ $x_1 - 10x_2 \le 5$ $-x_1 + 2x_2 \le 7$ $-15x_1 + 8x_2 \le -49$ $-34x_1 - 15x_2 \le -14$ $x_1 + 2x_2 \le 29$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$	$z = x_1 + 11x_2$ $4x_1 - 9x_2 \le 5$ $-4x_1 + 8x_2 \le 11$ $-106x_1 + 19x_2 \le -8$ $-14x_1 - 18x_2 \le -17$ $6x_1 + 7x_2 \le 27$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$	$z = 7x_1 + 10x_2$ $x_1 - 7x_2 \le 7$ $-14x_1 + 9x_2 \le 3$ $-90x_1 + 16x_2 \le -4$ $-18x_1 - 8x_2 \le -23$ $2x_1 + 4x_2 \le 21$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$	$z = 5x_1 + 11x_2$ $x_1 - 2x_2 \le 8$ $-21x_1 + 14x_2 \le 11$ $-9x_1 + 5x_2 \le -4$ $-13x_1 - 17x_2 \le -25$ $x_1 + 2x_2 \le 11$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$

В задачах 141 – 160 привести ЗЛП к канонической форме и решить её табличным симплекс-методом.

Задача № 141	Задача № 142	Задача № 143
$maxZ = x1 - 13\,x2 - 11\,x3$ $14\,x1 + 29\,x2 + 15\,x3 \le 2493$ $15\,x1 + 19\,x2 + 21\,x3 \le 742$ $12\,x1 + 19\,x2 + 8\,x3 \le 916$	$maxZ = 10\,x1 + 13\,x2 - 14\,x3$ $3\,x1 + 5\,x2 + 14\,x3 \le 1895$ $7\,x1 + 11\,x2 + 11\,x3 \le 2297$ $5\,x1 + 16\,x2 + 11\,x3 \le 1675$	$maxZ = 2\,x1 - 12\,x2 + x3$ $5\,x1 + 26\,x2 + 3\,x3 \le 1937$ $22\,x1 + 22\,x2 + 23\,x3 \le 827$ $x1 + 4\,x2 + 28\,x3 \le 1029$
Задача № 144	Задача № 145	Задача № 146
$maxZ = 15\,x1 + 15\,x2 - 12\,x3$ $9\,x1 + 9\,x2 + 14\,x3 \le 2994$ $14\,x1 + 21\,x2 + 3\,x3 \le 637$ $17\,x1 + 25\,x2 + 24\,x3 \le 683$	$maxZ = 15\,x1 + 5\,x2 - 15\,x3$ $11\,x1 + 21\,x2 + 2\,x3 \le 322$ $5\,x1 + 29\,x2 + 6\,x3 \le 458$ $20\,x1 + 12\,x2 + 17\,x3 \le 1997$	$maxZ = 11\,x1 + 6\,x2 + x3$ $14\,x1 + 22\,x2 + 17\,x3 \le 2075$ $15\,x1 + 20\,x2 + 28\,x3 \le 1170$ $8\,x1 + 11\,x2 + 26\,x3 \le 1800$
Задача № 147	Задача № 148	Задача № 149
$maxZ = 14\,x1 + x2 + 7\,x3$ $26\,x1 + 6\,x2 + x3 \le 1942$ $29\,x1 + 28\,x2 + 28\,x3 \le 1188$ $26\,x1 + 3\,x2 + 29\,x3 \le 2450$	$maxZ = 14\,x1 + 15\,x2 - 12\,x3$ $5\,x1 + 21\,x2 + 20\,x3 \le 219$ $8\,x1 + 20\,x2 + 6\,x3 \le 1008$ $4\,x1 + 10\,x2 + 29\,x3 \le 2080$	$maxZ = 6\,x1 - 14\,x2 + 7\,x3$ $11\,x1 + 3\,x2 + 7\,x3 \le 1819$ $20\,x1 + 28\,x2 + 27\,x3 \le 734$ $2\,x1 + 12\,x2 + 24\,x3 \le 1504$
Задача № 150	Задача № 151	Задача № 152
$maxZ = 11\,x1 - 7\,x2 - 5\,x3$ $16\,x1 + 25\,x2 + 20\,x3 \le 432$ $19\,x1 + 18\,x2 + 26\,x3 \le 657$ $19\,x1 + 3\,x2 + 17\,x3 \le 2372$	$maxZ = 9\,x1 - 14\,x2 + 10\,x3$ $2\,x1 + 26\,x2 + 21\,x3 \le 2648$ $18\,x1 + 24\,x2 + 21\,x3 \le 304$ $5\,x1 + 15\,x2 + 14\,x3 \le 1682$	$maxZ = 7\,x1 + 7\,x2 + 15\,x3$ $3\,x1 + 30\,x2 + 24\,x3 \le 131$ $24\,x1 + 11\,x2 + 23\,x3 \le 2645$ $15\,x1 + 18\,x2 + 14\,x3 \le 1200$
Задача № 153	Задача № 154	Задача № 155
$maxZ = x1 - 13\,x2 - 11\,x3$ $14\,x1 + 29\,x2 + 15\,x3 \le 2493$ $15\,x1 + 19\,x2 + 21\,x3 \le 742$ $12\,x1 + 19\,x2 + 8\,x3 \le 916$	$maxZ = 10\,x1 + 13\,x2 - 14\,x3$ $3\,x1 + 5\,x2 + 14\,x3 \le 1895$ $7\,x1 + 11\,x2 + 11\,x3 \le 2297$ $5\,x1 + 16\,x2 + 11\,x3 \le 1675$	$maxZ = 2\,x1 - 12\,x2 + x3$ $5\,x1 + 26\,x2 + 3\,x3 \le 1937$ $22\,x1 + 22\,x2 + 23\,x3 \le 827$ $x1 + 4\,x2 + 28\,x3 \le 1029$
Задача № 156	Задача № 157	Задача № 158
$maxZ = 15\,x1 + 15\,x2 - 12\,x3$ $9\,x1 + 9\,x2 + 14\,x3 \le 2994$ $14\,x1 + 21\,x2 + 3\,x3 \le 637$ $17\,x1 + 25\,x2 + 24\,x3 \le 683$	$maxZ = 11\,x1 + 6\,x2 + x3$ $15\,x1 + 20\,x2 + 28\,x3 \le 1170$ $8\,x1 + 11\,x2 + 26\,x3 \le 1800$ $14\,x1 + 22\,x2 + 17\,x3 \le 2075$	$maxZ = 14\,x1 + 15\,x2 - 12\,x3$ $5\,x1 + 21\,x2 + 20\,x3 \le 219$ $8\,x1 + 20\,x2 + 6\,x3 \le 1008$ $4\,x1 + 10\,x2 + 29\,x3 \le 2080$
Задача № 159	Задача № 160	
$maxZ = 6\,x1 - 14\,x2 + 7\,x3$ $11\,x1 + 3\,x2 + 7\,x3 \le 1819$ $20\,x1 + 28\,x2 + 27\,x3 \le 734$ $2\,x1 + 12\,x2 + 24\,x3 \le 1504$	$maxZ = 11\,x1 - 7\,x2 - 5\,x3$ $19\,x1 + 3\,x2 + 17\,x3 \le 2372$ $19\,x1 + 18\,x2 + 26\,x3 \le 657$ $16\,x1 + 25\,x2 + 20\,x3 \le 432$	

В задачах 161 – 180 решить транспортную задачу, исходные данные которой таковы:

161.

$a_i \backslash b_j$	11	7	8	4
9	2	5	8	1
16	8	3	9	2
5	7	4	6	3

162.

$a_i \backslash b_j$	10	10	5	8	7
7	4	6	8	3	2
13	5	3	4	6	4
20	3	2	5	7	5

163.

a_i \ b_j	100	200	200	300
100	1	3	4	1
200	5	2	2	7
400	4	4	3	6
200	7	2	5	3

164.

a_i \ b_j	200	400	400	800
200	1	6	9	3
400	3	2	2	4
600	4	5	4	7
200	1	4	3	9

165.

a_i \ b_j	300	200	300	100
300	3	4	3	1
200	2	3	5	6
100	1	2	3	3
200	4	5	7	9

166.

a_i \ b_j	200	300	400	200
200	1	3	4	2
200	1	2	4	1
300	3	4	5	9
300	6	3	7	6

167.

a_i \ b_j	10	15	15	10	10
5	3	4	5	4	6
10	14	5	7	1	5
15	2	6	6	3	4
10		7	4	7	2

168.

a_i \ b_j	30	90	60	90	30
30	1	3	4	3	1
60	9	5	2	4	8
90	3	4	7	4	3
60	5	7	2	6	6

169.

a_i \ b_j	5	10	15	15	15
10	2	1	3	5	7
5	4	3	4	4	3
5	5	2	3	6	2
10	3	6	5	2	4
15	1	9	7	3	4

170.

a_i \ b_j	5	5	10	10	5
5	3	4	6	5	13
5	6	3	7	6	10
10	10	5	2	2	6
15	9	4	4	9	5
10	4	6	2	3	4

171.

a_i \ b_j	200	200	100	200
200	5	2	1	1
300	1	3	4	4
200	4	2	3	1
200	4	3	5	2
100	3	2	4	2

172.

a_i \ b_j	100	200	200	100	200
100	2	3	4	2	5
200	3	1	1	3	1
300	4	3	3	5	4
200	5	1	2	6	7
100	2	9	8	7	6

173.

a_i \ b_j	10	30	30	30	40
10	3	1	3	4	3
30	5	1	2	2	6
60	2	3	4	1	1
10	6	2	5	3	2
60	3	7	4	4	1

174.

a_i \ b_j	20	20	40	40	40
20	4	5	2	4	3
40	3	1	3	5	2
80	2	7	6	8	6
40	3	3	1	4	9
20	1	6	9	2	7

175.

a_i \ b_j	1000	500	1500	2000
500	3	1	2	5
1500	1	3	4	2
500	3	6	5	6
1500	2	8	5	7
500	4	3	9	8

176.

a_i \ b_j	200	400	100	200	100
200	1	7	12	2	5
100	2	3	8	4	7
200	3	5	4	6	9
400	4	4	3	8	2
400	5	3	7	10	1

177.

a_i \ b_j	50	25	50	75
25	3	1	8	1
50	2	5	2	3
75	9	4	6	5
25	7	3	10	3
75	4	6	7	4

178.

a_i \ b_j	20	30	20	20	10
20	1	5	1	1	5
30	4	2	6	7	9
10	3	4	5	6	5
30	4	2	3	3	6
30	6	2	3	5	4

179.

a_i \ b_j	150	200	200	400
150	1	4	7	2
300	3	6	3	9
250	4	8	12	2
150	1	5	9	13

180.

a_i \ b_j	40	60	40	60	20
20	3	3	4	2	3
40	1	2	1	5	3
60	4	8	2	9	12
40	5	7	1	3	6

4.3 Решение типовых задач контрольной работы

Типовая задача (1-20). Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} x + y - 2z = -2 \\ 2x - y + 3z = 13 \\ 3x + 2y - z = 5 \end{cases}$ двумя способами: а) методом Гаусса; б) по формулам Крамера.

Решение. а) Решаем методом Гаусса.

Запишем расширенную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду. Для этого первую строку матрицы умножим на (-2) и сложим со второй; ее же умножим на (-3) и сложим с третьей. Затем поменяем местами вторую и третью строки. После вторую строку матрицы умножаем на (-3) и складываем с третьей:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \end{array}\right)\cdot(-2)\cdot(-3) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 7 & 17 \\ 0 & -1 & 5 & 11 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 5 & 11 \\ 0 & -3 & 7 & 17 \end{array}\right)\cdot(-3) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & -16 \end{array}\right).$$

От матрицы ступенчатого вида перейдем к соответствующей системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} x + y - 2z = -2 \\ \quad -y + 5z = 11 \\ \qquad -8z = -16 \end{cases}.$$

Из последнего равенства находим значение z и, подставляя его в первое и второе уравнения, находим остальные неизвестные:

$$\begin{cases} x + y - 4 = -2 \\ \quad -y + 10 = 11 \\ \qquad z = 2 \end{cases}, \text{ т.е. } \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}.$$

Итак, решением системы уравнений является набор чисел $(3; -1; 2)$.

б) Решим эту же систему по формулам Крамера. Составим и вычислим главный определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{11} + 1\cdot A_{12} + (-2)\cdot A_{13} = = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot M_{11} + 1\cdot(-1)^{1+2}\cdot M_{12} + (-2)\cdot(-1)^{1+3}\cdot M_{13} =$$

$$= M_{11} - M_{12} - 2M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = ((-1)\cdot(-1) - 2\cdot 3) - (2\cdot(-1) - 3\cdot 3) -$$

$$- 2\cdot(2\cdot 2 - 3\cdot(-1)) = (1-6) - (-2-9) - 2\cdot(4+3) = -5 + 11 - 14 = -8.$$

Итак, $\Delta = -8$.

Составим: $\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 13 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2\cdot A_{11} + 1\cdot A_{12} + (-2)\cdot A_{13} = -2\cdot M_{11} - M_{12} - 2\cdot M_{13} =$

$$= -2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 13 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -2\cdot(1-6) - (-13-15) - 2\cdot(26-(-5)) =$$

$$= 10 + 28 - 62 = -24.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 13 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{11} + (-2)\cdot A_{12} + (-2)\cdot A_{13} = M_{11} + 2M_{12} - 2M_{13} =$$

$$= \begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -28 - 22 + 58 = 8.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 13 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{11} + 1\cdot A_{12} - 2\cdot A_{13} = M_{11} - M_{12} - 2M_{13} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 13 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -31 + 29 - 14 = -16.$$

Находим значения неизвестных:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-24}{-8} = 3; \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{8}{-8} = -1; \; z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-16}{-8} = 2.$$

Получаем: $(3; -1; 2)$.

Ответ: $(3; -1; 2)$.

Типовая задача (21-40). В таблице приведены данные об исполнении баланса за отчетный период:

Отрасль		Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск
		Отрасль 1	Отрасль 2		
Производство	Отрасль 1	30	20	50	100
	Отрасль 2	40	60	100	200

1) Доказать продуктивность модели Леонтьева. 2) Найти вектор конечного продукта, если валовой выпуск первой отрасли увеличится на $30\,\%$, а второй – на $20\,\%$. 3) Вычислить вектор валового выпуска, если конечное потребление продуктов первой отрасли уменьшится на $10\,\%$, а второй – сохранится на прежнем уровне.

Решение.

В данной задаче рассматриваются две отрасли промышленности, каждая из которых производит свою продукцию (валовой выпуск). Часть продукции идет на внутрипроизводственное потребление данной и другой отраслями, а другая часть (конечный продукт) предназначена для личного и общественного потребления.

Обозначим:

$x_{ij}\ (i, j = 1,2)$ – объем продукции $i-й$ отрасли, потребляемой $j-й$ отраслью в процессе производства;

$a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$ – коэффициенты прямых затрат, показывающие затраты продукции $i-й$ отрасли на производство единицы продукции $j-й$ отрасли.

Тогда матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – матрица прямых затрат.

Введем в рассмотрение вектор – столбцы:

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ – вектор валового выпуска;

$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ – вектор конечного продукта.

Так как продукция каждой отрасли используется другой отраслью и потребителями, то имеют место соотношения баланса в матричной форме:

$$X = A \cdot X + Y$$

Это уравнение межотраслевого баланса вместе с описанием носит название модели Леонтьева.

По условию задачи имеем: $x_{11} = 30, x_{12} = 20, x_{21} = 40, x_{22} = 60$, $x_1 = 100, x_2 = 200$, $y_1 = 50, y_2 = 100$.

Тогда:

вектор валового выпуска $X = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$;

вектор конечного продукта $Y = \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \end{pmatrix}$.

Найдем коэффициенты прямых затрат:

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = \frac{30}{100} = 0{,}3; \quad a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = \frac{20}{200} = 0{,}1;$$

$$a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} = \frac{40}{100} = 0{,}4; \quad a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = \frac{60}{200} = 0{,}3.$$

Таким образом, матрица прямых затрат имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix}$.

Матрица прямых затрат A с неотрицательными коэффициентами называется продуктивной, если для любого вектора $Y \geq 0$ существует единственное решение $X \geq 0$. В этом случае и модель Леонтьева называется продуктивной.

Критерий продуктивности: максимум сумм элементов столбцов матрицы A не превосходит единицы, причем хотя бы для одного из столбцов сумма элементов строго меньше единицы.

Полученная матрица $A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix}$ – продуктивна, так как все ее элементы неотрицательны и $\max\{0{,}3 + 0{,}4;\, 0{,}1 + 0{,}3\} = \max\{0{,}7;\, 0{,}4\} = 0{,}7 < 1$. Следовательно, и модель Леонтьева продуктивна.

б) Первоначальный вектор валового выпуска $X = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$. После увеличения валового выпуска первой отрасли на $30\ \%$, а второй – на $20\ \%$, получаем новый вектор:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 100 + 0{,}3 \cdot 100 \\ 200 + 0{,}2 \cdot 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130 \\ 240 \end{pmatrix}.$$

Из уравнения межотраслевого баланса $X = A \cdot X + Y$ следует $Y = (E - A) \cdot X$, где $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица второго порядка.

Найдем матрицу $E - A$:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}1 \\ -0{,}4 & 0{,}7 \end{pmatrix}.$$

Тогда соответствующий вектор конечного продукта равен:

$$Y_1 = (E - A) \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}1 \\ -0{,}4 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 130 \\ 240 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 \cdot 130 - 0{,}1 \cdot 240 \\ -0{,}4 \cdot 130 + 0{,}7 \cdot 240 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 67 \\ 116 \end{pmatrix}.$$

Итак, конечный продукт первой отрасли увеличится до 67 усл. ед., второй отрасли – до 116 усл. ед.

в) Первоначальный вектор конечного продукта $Y = \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \end{pmatrix}$. После уменьшения конечного потребления первой отрасли на $10\ \%$ и сохранение потребления второй отрасти на прежнем уровне, получаем новый вектор:

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 50 - 0{,}1 \cdot 50 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Из уравнения межотраслевого баланса $X = A \cdot X + Y$ следует $X = (E - A)^{-1} \cdot Y$, где $(E - A)^{-1}$ – матрица полных затрат.

$$|E - A| = \begin{vmatrix} 0{,}7 & -0{,}1 \\ -0{,}4 & 0{,}7 \end{vmatrix} = 0{,}7 \cdot 0{,}7 - (-0{,}1) \cdot (-0{,}4) = 0{,}45.$$

Так как $\left|E-A\right|=0{,}45\neq 0$, то для матрицы $E-A$ существует обратная, которая находится по формуле:

$$\left(E-A\right)^{-1}=\frac{1}{\left|E-A\right|}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}.$$

Вычислим алгебраические дополнения:

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 0{,}7=0{,}7$; $\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot(-0{,}1)=0{,}1$;

$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot(-0{,}4)=0{,}4$; $\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot 0{,}7=0{,}7$.

Таким образом, матрица полных затрат имеет вид:

$$\left(E-A\right)^{-1}=\frac{1}{0{,}45}\cdot\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}1\\ 0{,}4 & 0{,}7\end{pmatrix}.$$

Соответствующий вектор валового выпуска находится следующим образом:

$$X_2=\left(E-A\right)^{-1}\cdot Y_2=\frac{1}{0{,}45}\cdot\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}1\\ 0{,}4 & 0{,}7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}45\\ 100\end{pmatrix}=\frac{1}{0{,}45}\cdot\begin{pmatrix}41{,}5\\ 88\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}92{,}2\\ 195{,}6\end{pmatrix},$$

т.е. валовой выпуск первой отрасли необходимо уменьшить до 92,2 усл. ед., а второй – до 195,6 усл. ед.

Ответ: б) $Y_1=\begin{pmatrix}67\\ 116\end{pmatrix}$; в) $X_2\approx\begin{pmatrix}92{,}2\\ 195{,}6\end{pmatrix}$.

Типовая задача (41-60). Предприятие выпускает три вида продукции, используя сырье трех типов s_1, s_2, s_3. На изготовление единицы продукции первого вида расходуется 2 вес. ед. сырья s_1, 3 вес. ед. сырья s_2 и 7 вес. ед. сырья s_3. На изготовление единицы продукции второго вида расходуется 1, 5 и 6 вес. ед. сырья s_1, s_2 и s_3 соответственно. Аналогично на изготовление единицы продукции третьего вида расходуется 4, 2 и 1 вес. ед. сырья s_1, s_2 и s_3. Запас сырья первого типа составляет 1230, второго – 1690 и третьего – 2470 вес. ед. Определить объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья.

Решение.

Необходимые характеристики производства запишем в таблицу:

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
s_1	2	1	4	1230
s_2	3	5	2	1690
s_3	7	6	1	2470

Пусть x_1, x_2, x_3 – неизвестные объемы выпуска продукции каждого вида. Тогда в соответствии с расходом сырья запишем систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases}2x_1+x_2+4x_3=1230\\ 3x_1+5x_2+2x_3=1690\\ 7x_1+6x_2+x_3=2470\end{cases}.$$

Решаем полученную систему любым способом, например, методом Крамера. Составим и вычислим главный определитель системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1 & 4\\ 3 & 5 & 2\\ 7 & 6 & 1\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}5 & 2\\ 6 & 1\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 7 & 1\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix}3 & 5\\ 7 & 6\end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot(5-12)-1\cdot(3-14)+\cdot(18-35)=-14+11-68=-71.$$

Так как главный определитель отличен от нуля, то система линейных уравнений имеет единственное решение.

Вычислим определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, полученные из главного определителя путем замены соответствующего столбца на столбец свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1230 & 1 & 4 \\ 1690 & 5 & 2 \\ 2470 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 1230 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1690 & 2 \\ 2470 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 1690 & 5 \\ 2470 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 1230 \cdot (-7) - (-3250) + 4 \cdot 2210 = -8610 + 3250 - 8840 = -14200 .$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1230 & 4 \\ 3 & 1690 & 2 \\ 7 & 2470 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1690 & 2 \\ 2470 & 1 \end{vmatrix} - 1230 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1690 \\ 7 & 2470 \end{vmatrix} = -10650 .$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1230 \\ 3 & 5 & 1690 \\ 7 & 6 & 2470 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1690 \\ 6 & 2470 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1690 \\ 7 & 2470 \end{vmatrix} + 1230 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = -12070$$

Значения неизвестных объемов выпуска продукции находим по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-14200}{-71} = 200; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-10650}{-71} = 150; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-12070}{-71} = 170 .$$

Сделаем проверку:

$$\begin{cases} 2 \cdot 200 + 150 + 4 \cdot 170 = 1230 \\ 3 \cdot 200 + 5 \cdot 150 + 2 \cdot 170 = 1690 \\ 7 \cdot 200 + 6 \cdot 150 + 170 = 2470 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1230 = 1230 \\ 1690 = 1690 \\ 2470 = 2470 \end{cases}$$

Следовательно, предприятие изготавливает 200 изделий первого вида, 150 изделий второго и 170 изделий третьего вида продукции.

Ответ: $(200; 150; 170)$.

Типовая задача (61-80). Даны вершины треугольника ABC: $A(-2; 5)$, $B(10; -4)$, $C(8; 10)$. Найти: а) уравнения сторон треугольника и их угловые коэффициенты; б) периметр треугольника ABC; в) наименьший из углов $\Delta\, ABC$; г) уравнение медианы AM; д) уравнение высоты CD и ее длину; е) уравнение окружности, для которой высота CD есть диаметр. Сделать общий рисунок.

Решение.

а) Уравнение прямой, проходящей через точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, имеет вид:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} .$$

Подставляя в формулу соответствующие координаты точек A и B, находим уравнение стороны AB.

$$\frac{y - 5}{-4 - 5} = \frac{x - (-2)}{10 - (-2)} ,$$

$$\frac{y - 5}{-9} = \frac{x + 2}{12} ,$$

$$\frac{y - 5}{-3} = \frac{x + 2}{4} ,$$

$$4y - 20 = -3x - 6 ,$$

$3x + 4y - 14 = 0$ – уравнение стороны AB.

Чтобы найти угловой коэффициент прямой AB (k_{AB}), решим полученное уравнение относительно y:

$$4y = -3x + 14 ,$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{14}{4}, \text{ откуда } k_{AB} = -\frac{3}{4} .$$

Аналогично подставляя в формулу координаты точек A и C, находим уравнение стороны AC.

$$\frac{y-5}{10-5}=\frac{x+2}{8+2},$$
$$\frac{y-5}{5}=\frac{x+2}{10},$$
$$\frac{y-5}{1}=\frac{x+2}{2},$$
$$x+2=2y-10,$$

$x-2y+12=0$ – уравнение стороны AC; $k_{AC}=\frac{1}{2}$.

Аналогично находим уравнение стороны BC: $7x+y-66=0$; $k_{BC}=-7$.

б) Периметр треугольника равен сумме длин всех сторон, т. е.

$$P_{ABC}=|AB|+|AC|+|BC|.$$

Длину стороны AB вычисляем как расстояние между точками $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ по формуле:

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Подставляем соответствующие координаты точек A и B:

$$|AB|=\sqrt{(10-(-2))^2+(-4-5)^2}=\sqrt{144+81}=\sqrt{225}=15.$$

Аналогично вычисляем длины двух других сторон:

$$|AC|=\sqrt{(8-(-2))^2+(10-5)^2}=\sqrt{100+25}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}.$$
$$|BC|=\sqrt{(8-10)^2+(10-(-4))^2}=\sqrt{4+196}=\sqrt{200}=10\sqrt{2}.$$

Таким образом,

$$P_{ABC}=15+5\sqrt{5}+10\sqrt{2}.$$

в) Меньший угол треугольника лежит против меньшей стороны. У нас $|AC|<|BC|<|AB|$, поэтому угол B, лежащий против стороны AC, является наименьшим.

Если даны две прямые, угловые коэффициенты которых соответственно k_1 и k_2, то угол α между этими прямыми определяется по формуле:

$$tg\alpha=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right|.$$

Искомый угол B образован прямыми AB и BC, угловые коэффициенты, которых найдены ранее в пункте 1). Для определения угла B положим $k_1=k_{AB}=-\frac{3}{4}$ и $k_2=k_{BC}=-7$. Применяя формулу, получим:

$$tgB=\left|\frac{-7-\left(-\frac{3}{4}\right)}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot(-7)}\right|=\left|\frac{-\frac{25}{4}}{\frac{25}{4}}\right|=|-1|=1;\text{ откуда } \angle B=arctg1=45^o.$$

г) Для нахождения координат точки M - середины отрезка BC воспользуемся формулами деления отрезка пополам:

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{2};\ y_M=\frac{y_B+y_C}{2}.$$

Подставив координаты точек B и C в уравнения, получим:

$$x_M=\frac{10+8}{2}=9;\ y_M=\frac{-4+10}{2}=3,\ \text{т.е. } M(9;3).$$

Далее воспользуемся формулой для составления уравнения прямой, проходящей через две данные точки $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$. Для точек $A(-2;5)$ и $M(9;3)$ получаем равенство

$$\frac{y-5}{3-5}=\frac{x-(-2)}{9-(-2)},$$

$$\frac{y-5}{-2}=\frac{x+2}{11},$$

$$11y-55=-2x-4,$$

$2x+11y-51=0$ - уравнение медианы AM.

д) Высота CD перпендикулярна стороне AB. Известно, что если две прямые взаимно перпендикулярны, то их угловые коэффициенты обратные по величине и противоположны по знаку, т.е.

$$k_{CD}=-\frac{1}{k_{AB}}=-\frac{1}{-\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}, \text{ так как } k_{AB}=-\frac{3}{4}.$$

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_0;y_0)$ с данным угловым коэффициентом k, имеет вид:

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

Подставив координаты точки $C(8;10)$ и найденный угловой коэффициент $k_{CD}=\frac{4}{3}$, получим искомое уравнение высоты CD:

$$y-10=\frac{4}{3}(x-8),$$

$$3y-30=4x-32,$$

$4x-3y-2=0$ – уравнение высоты CD.

Для нахождения длины высоты CD определим сначала координаты точки D – точки пересечения высоты CD и стороны AB. Решая совместно систему уравнений AB и CD:

$$\begin{cases}3x+4y-14=0\\4x-3y-2=0\end{cases}, \text{ находим } \begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}, \text{ т.е. } D(2;2).$$

Длину высоты CD определяем по формуле (2).

$$|CD|=\sqrt{(2-8)^2+(2-10)^2}=\sqrt{100}=10.$$

е) Уравнение окружности с центром в точке $E(a;b)$ и радиусом R имеет вид:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Так как высота CD является диаметром окружности, то радиус равен половине длины высоты:

$$R=\frac{1}{2}|CD|=\frac{1}{2}\cdot 10=5.$$

Центр окружности является серединой высоты CD. Для нахождения координат центра воспользуемся формулами деления отрезка пополам:

$$x_E=\frac{x_C+x_D}{2};\quad y_E=\frac{y_C+y_D}{2}.$$

Подставив координаты точек C и D в уравнения, получим:

$$x_E=\frac{8+2}{2}=5;\quad y_E=\frac{10+2}{2}=6, \text{ т.е. } E(5;6).$$

Таким образом, уравнение окружности имеет вид:

$$(x-5)^2+(y-6)^2=25.$$

На рисунке 1 в декартовой прямоугольной системе координат xOy изображен треугольник ABC, медиана AM, высота CD, окружность с центром в точке E.

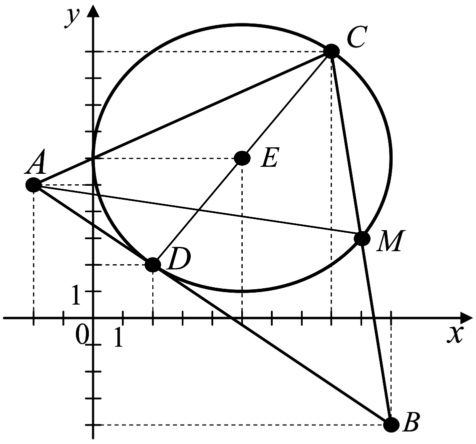


Рис. 1

Ответ: а) $AB: 3x+4y-14=0$, $k_{AB}=-\dfrac{3}{4}$; $AC: x-2y+12=0$, $k_{AC}=\dfrac{1}{2}$; $BC: 7x+y-66=0$; $k_{BC}=-7$; б) $P_{ABC}=15+5\sqrt{5}+10\sqrt{2}$; в) $\angle B=45^o$; г) $AM: 2x+11y-51=0$; д) $CD: 4x-3y-2=0$, $|CD|=10$; е) $(x-5)^2+(y-6)^2=25$.

Типовая задача (81-100). Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: $A(2;1;0)$, $B(3;-1;2)$, $C(13;3;10)$, $D(0;1;4)$. Требуется: а) записать векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ в системе орт $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ и найти модули этих векторов; б) найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; в) составить уравнение грани ABC; г) составить уравнение высоты DO.

Решение.

а) Произвольный вектор $\vec{a}$ может быть представлен в системе орт $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ следующей формулой:

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы, направления которых совпадают с положительными направлениями осей Ox, Oy, Oz; a_x, a_y, a_z – координаты вектора $\vec{a}$ в прямоугольной системе координат. В координатной форме вектор $\vec{a}$ записывают так:

$$\vec{a}(a_x; a_y; a_z).$$

Если даны точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то координаты вектора $\vec{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ находятся по формулам:

$$a_x=x_2-x_1,\ a_y=y_2-y_1,\ a_z=z_2-z_1.$$

Таким образом,

$$\vec{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}. \qquad (7)$$

Подставляя в (7) координаты точек A и B, будем иметь:

$$\overrightarrow{AB}=(3-2)\vec{i}+(-1-1)\vec{j}+(2-0)\vec{k}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k},$$

$$\overrightarrow{AB}(1;-2;2).$$

Чтобы найти вектор $\overrightarrow{AC}$, подставим в (7) координаты точек A и C:

$$\overrightarrow{AC}=(13-2)\vec{i}+(3-1)\vec{j}+(10-0)\vec{k}=11\vec{i}+2\vec{j}+10\vec{k},$$

$$\overrightarrow{AC}(11;2;10).$$

Подставив в (7) координаты точек A и D, находим вектор $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AD} = (0-2)\vec{i} + (1-1)\vec{j} + (4-0)\vec{k} = -2\vec{i} + 4\vec{k}\,.$$

Модуль вектора $\vec{a}$, заданного координатами a_x, a_y, a_z, вычисляется по формуле

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \qquad (8)$$

Применяя (8), находим модули найденных векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3\,,$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{11^2 + 2^2 + 10^2} = \sqrt{225} = 15\,,$$

$$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{5}\,.$$

б) Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними, т.е.:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos(\widehat{\vec{a};\vec{b}})\,,$$

откуда

$$\cos(\widehat{\vec{a};\vec{b}}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}\,.$$

Таким образом, косинус угла между двумя векторами равен их скалярному произведению, деленному на произведение их модулей.

Итак,

$$\cos\varphi = \cos(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}\,. \qquad (9)$$

Известно, что скалярное произведение двух векторов, заданных своими координатами, равно сумме произведений одноименных координат. Так как $\overrightarrow{AB}(1;-2;2)$ и $\overrightarrow{AC}(11;2;10)$, то скалярное произведение

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 1\cdot 11 + (-2)\cdot 2 + 2\cdot 10 = 27\,.$$

Применяя (9), имеем:

$$\cos\varphi = \cos(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}) = \frac{27}{3\cdot 15} = \frac{3}{5}\,,\ \text{откуда}\ \angle\varphi = \arccos\frac{3}{5}\,.$$

в) Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $A(x_1\,;y_1\,;z_1)$, $B(x_2\,;y_2\,;z_2)$, $C(x_3\,;y_3\,;z_3)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0\,. \qquad (10)$$

Подставив в данное уравнение координаты точек $A(2;1;0)$, $B(3;-1;2)$ и $C(13;3;10)$, получим:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-0 \\ 3-2 & -1-1 & 2-0 \\ 13-2 & 3-1 & 10-0 \end{vmatrix} = 0\,,\ \text{или}\ \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 1 & -2 & 2 \\ 11 & 2 & 10 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Разложим определитель по элементам первой строки:

$$(x-2)\cdot\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} - (y-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 11 & 10 \end{vmatrix} + z\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$(x-2)\cdot(-24) - (y-1)\cdot(-12) + z\cdot 24 = 0\,.$$

Сократив на (-12) и преобразовав, получим уравнение грани ABC:

$$2x-y-2z-3=0,$$

где $(2;-1;-2)$ – нормальный вектор грани ABC.

г) Канонические уравнения прямой в пространстве имеют вид:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{k}, \tag{11}$$

где $(x_0;y_0;z_0)$ – координаты точки, через которую проходит прямая, $(m;n;k)$ – координаты направляющего вектора прямой. По условию высота проходит через точку $D(0;1;4)$ и перпендикулярна грани ABC, поэтому направляющим вектором высоты является нормальный вектор ABC.

Подставив в уравнение (11) координаты точки D и заменив $(m;n;k)$ на вектор $(2;-1;-2)$, получим:

$$\frac{x-0}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-4}{-2},$$

$$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-4}{-2} \text{ – уравнение высоты } DO.$$

Типовая задача (101-120). Доказать, что векторы $\vec{a}(3;-1;0)$, $\vec{b}(2;3;1)$ и $\vec{c}(-1;4;3)$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}(2;3;7)$ в этом базисе.

Решение.

Базисом в пространстве называется система трех некомпланарных векторов. Три вектора $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$, $\vec{c}(x_3;y_3;z_3)$ являются некомпланарными, если определитель, составленный из координат данных векторов отличен от нуля, т.е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}\neq 0.$$

Подставим координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в определитель:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}=22\neq 0.$$

Так как значение определителя отлично от нуля, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис, и вектор $\vec{d}$ линейно выражается через базисные векторы:

$$\vec{d}=x\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}+z\cdot\vec{c}.$$

Запишем данное равенство в координатной форме:

$(2;3;7)=x\cdot(3;-1;0)+y\cdot(2;3;1)+z\cdot(-1;4;3)$.

Сравнивая одноименные координаты:

$$\begin{cases} 2=x\cdot 3+y\cdot 2+z\cdot(-1) \\ 3=x\cdot(-1)+y\cdot 3+z\cdot 4 \\ 7=x\cdot 0+y\cdot 1+z\cdot 3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 3x+2y-z=2 \\ -x+3y+4z=3. \\ y+3z=7 \end{cases}$$

Решаем полученную систему по формулам Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}=22,\ \Delta_x=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix}=66,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -44, \ \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 66$$

Находим:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{66}{22} = 3, \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-44}{22} = -2, \ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{66}{22} = 3.$$

Поэтому $\vec{d}(3; -2; 3)$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

О т в е т : $\vec{d}(3; -2; 3)$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Типовая задача (121-140). Решить графическим методом решить задачу линейного программирования (ЗЛП).

$$Z(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2 \geq 0, & (1) \\ 3x_1 - 2x_2 - 6 \leq 0, & (2) \\ 2x_1 + x_2 - 2 \geq 0, & (3) \\ x_2 \leq 3, & (4) \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Р е ш е н и е :

Строим область допустимых решений задачи. Нумеруем ограничения задачи. В прямоугольной декартовой системе координат (рис. 2) строим прямую $x_1 - x_2 + 2 = 0$ (L_1), соответствующую ограничению (1). Находим, какая из двух полуплоскостей, на которые эта прямая делит всю координатную плоскость, является областью решений неравенства (1). Для этого достаточно координаты какой-либо точки, не лежащей на прямой, подставить в неравенство. Так как прямая L_1 не проходит через начало координат, подставляем координаты точки O (0, 0) в первое ограничение 1*0-1*0 + 2 $\geq$ 0. Получаем строгое неравенство 2 $\geq$ 0. Следовательно, точка O лежит в полуплоскости решений. Таким образом, стрелки на концах прямой L_1 должны быть направлены в полуплоскость, содержащую точку O. Аналогично строим прямые $3x_1 - 2x_2 - 6 = 0$ (L_2), $2x_1 + x_2 - 2 = 0$ (L_3), $x_2 = 3$ (L_4) и области решений ограничений (2), (3) и (4). Находим общую часть полуплоскостей решений, учитывая при этом условия неотрицательности; полученную область допустимых решений отметим на рис. 2 штриховкой.

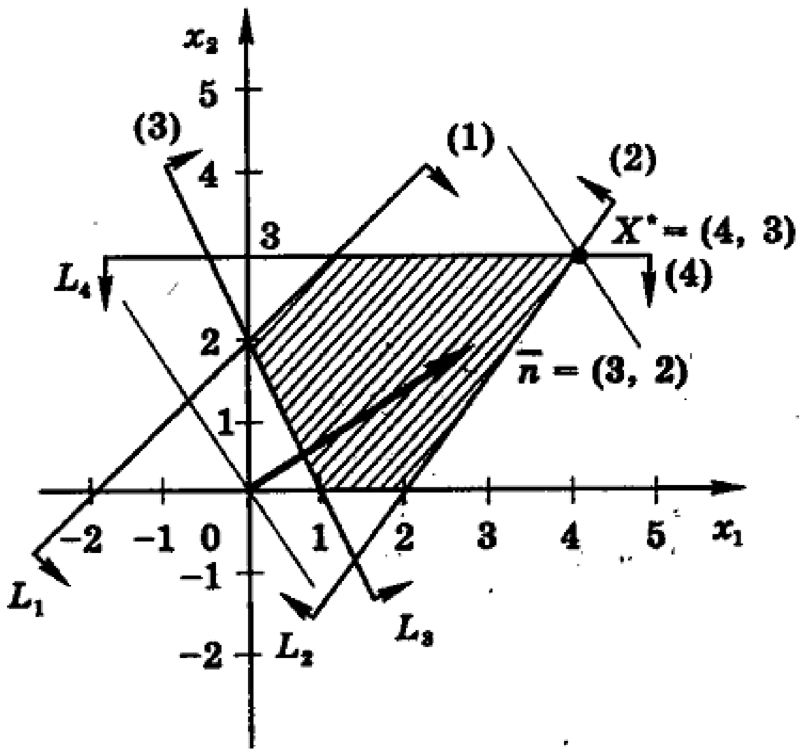


Рис. 2

Строим нормаль линий уровня $n = (3, 2)$ и одну из этих линий, например $3x_1 + 2x_2 = 0$. Так как решается задача на отыскание максимума целевой функции, то линию уровня перемещаем в направлении нормали до опорной прямой. Эта прямая проходит через точку X^* пересечения прямых, ограничивающих область допустимых решений и соответствующих неравенствам (2) и (4). Определяем координаты точки $X^* = L_2 \cap L_4$. Решая систему

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 6 = 0, \\ \qquad\quad x_2 = 3, \end{cases}$$

Получаем $X^* = (4, 3)$. Вычисляем $Z(X^*) = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 18$.

Ответ: $\max Z(X) = 18$ при $X^* = (4, 3)$.

$$Z(X) = 4x_1 + 2x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge 0, & (1) \\ 2x_1 + x_2 \ge 6, & (2) \\ x_1 + 2x_2 \ge 16, & (3) \\ x_1 \qquad \le 0, & (4) \\ x_1 - x_2 \le 0. & (5) \end{cases}$$

Решение:

Строим область допустимых решений, нормаль линий уровня $n = (4, 2)$ и одну из линий уровня, имеющую общие точки с этой областью (рис. 3). Перемещаем линию уровня в направлении, противоположном направлению нормали n, так как решается задача на отыскание минимума функции. Нормаль линий уровня $n = (4, 2)$ и нормаль $n_2 = (2, 1)$ граничной прямой L_2, в направлении которой перемещаются линии уровня, параллельны, так как их координаты пропорциональны (4:2 = 2:1). Следовательно, опорная прямая совпадает с граничной прямой L_2 области допустимых решений и проходит через две угловые точки этой области X^*_1 и X^*_2. Задача имеет бесконечное множество оптимальных решений, являющихся точками отрезка $[X^*_1, X^*_2]$. Эти точки $X^*_2 = L_1 \cap L_2$, находим, решая соответствующие системы уравнений:

$$+\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6, & (L_2) \\ x_1 - x_2 = 0 & (L_5) \end{cases}$$
$$3x_1 \qquad = 6;$$
$$x_1^* = 2, \quad x_2^* = 2;$$
$$X_1^* = (2, 2);$$

$$+\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 0, & (L_1) \\ 2x_1 + x_2 = 6 & (L_2) \end{cases}$$
$$3x_1 \qquad = 6;$$
$$x_1^* = 1, \quad x_2^* = 4;$$
$$X_2^* = (1, 4).$$

Вычисляем

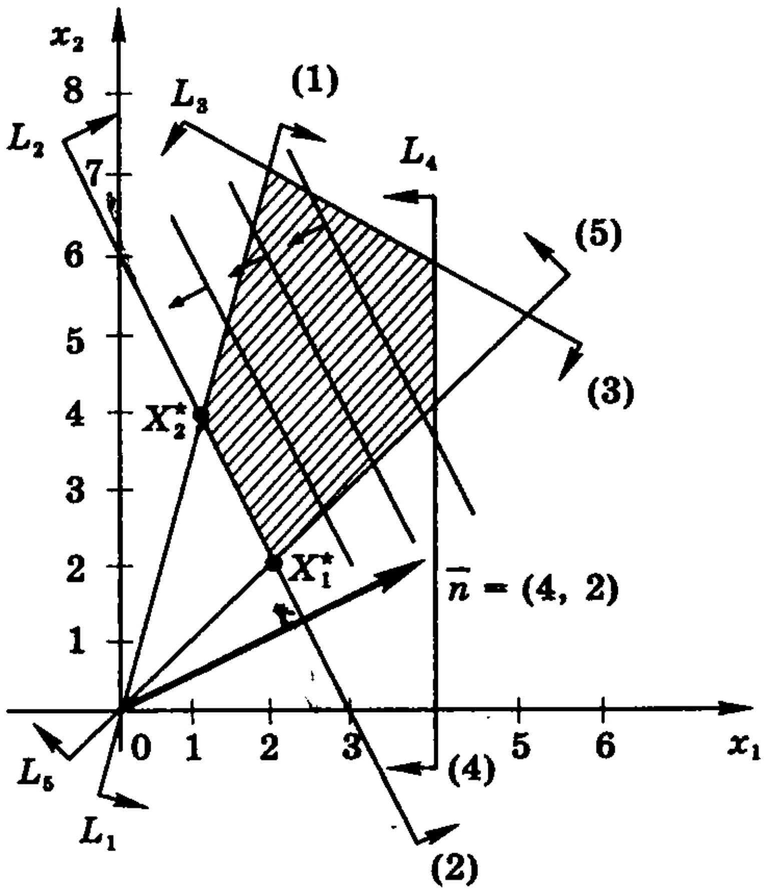


Рис. 3

О т в е т : min $Z(X) = 12$ при $X^* = (1-t)\,X^*_1 + tX^*_2$, $0 \le t \le 1$.

Типовая задача (141-160). Привести задачу линейного программирования к канонической форме и решить её табличным симплекс-методом.

$$\begin{cases} \max Z = 3x_1 + 4x_2 \\ x_1 + x_2 \le 550 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 1200 \\ 12x_1 + 30x_2 \le 9600 \\ x_j \ge 0 \end{cases}$$

Р е ш е н и е :

введём дополнительные пременные: $\begin{cases} \max Z = 3x_1 + 4x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 550 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 1200 \\ 12x_1 + 30x_2 + x_5 = 9600 \\ x_j \ge 0 \end{cases}$ Получили ЗЛП в каноническом виде (эквивалентную исходной), система ограничений которой представлена в предпочтительном виде. Заполним симплексную таблицу (добавив столбец с номером итерации “№” и симплексными отношениями “СО”). Для упрощения понимания в левом верхнем углу ячеек таблицы 4 (нулевой итерации) записаны условные обозначения, использовавшиеся при изложении теоретического материала.

Таблица 4 – Симплексная таблица на нулевой итерации.

№	БП	$c_Б$	A_0	x_1 c_1 3	x_2 c_2 4	x_3 c_3 0	x_4 c_4 0	x_5 c_5 0	CO
0	x_3	c_3 0	b_3 550	a_{11} 1	a_{12} 1	a_{13} 1	a_{14} 0	a_{15} 0	550
	x_4	c_4 0	b_4 1200	a_{21} 2	a_{22} 3	a_{23} 0	a_{24} 1	a_{25} 0	400
	x_5	c_5 0	b_5 9600	a_{31} 12	a_{32} **30**	a_{33} 0	a_{34} 0	a_{35} 1	320
	z_j-c_j		Δ_0 0	Δ_1 -3	Δ_2 -4	Δ_3 0	Δ_4 0	Δ_5 0	

Видно, что *начальный опорный план не является оптимальным для задачи на максимум* (содержит отрицательные оценки), поэтому осуществляется переход к новому базису (первой итерации).

$$\min(\Delta_j) = \min(-3,-4,0,0,0) = -4 \Rightarrow j_0 = 2;$$

$$\min_{(a_{i_0 j}>0)}(b_i / a_{ij_0}) = \min(550,400,320) = 320 \Rightarrow i_0 = 3;$$

$$a_{i_0 j_0} = a_{32} = 30 \underset{\text{замена в БП}}{\Rightarrow} \mathrm{x}_2 \leftrightarrow x_5$$

Симплексная таблица на первой итерации – таблица 5.

Таблица 5 – Симплексная таблица на первой итерации.

№	БП	$c_Б$	A_0	x_1 3	x_2 4	x_3 0	x_4 0	x_5 0
1	x_3	0	230	3/5	0	1	0	-1/30
	x_4	0	240	**4/5**	0	0	1	-0.1
	x_2	4	320	2/5	1	0	0	1/30
	z_j-c_j		1280	-7/5	0	0	0	2/15
	$\Delta_{КВ}$		1280	-7/5	0	0	0	2/15

Строка i_0 и столбец j_0 заполняются в соответствии с пунктами с). и d). плана перехода к следующей итерации. Пример: элемент b_3^1 (прямоугольник с диагональю b_3^0–a_{32}^0) вычисляется по формуле

$$b_3^1 = b_3^0 - (b_5^0 \cdot a_{12}^0) / a_{32}^0 = 550 - (9600 \cdot 1)/30 = 230\,.$$

Остальные элементы таблицы вычисляются аналогично. Контроль вычислений приведён в строке $\Delta_{КВ}$.

Например: $\Delta_5^1 = (c_Б)^T A_{0j} - c_j = 0 \cdot (-\frac{1}{30}) + 0 \cdot (-0.1) + 4 \cdot \frac{1}{30} - 0 = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}\,.$

Опорный план нехудший ($[Z^1(x)=1280] > [Z^1(x)=0]$), но и не оптимальный – переход к следующей итерации. На 1-ой итерации разрешающий элемент a_{21}=4/5, соответственно при переходе ко второй итерации x_1 вводится в базис на место x_4 (таблица 6).

Таблица 6 – Симплексная таблица на второй итерации.

№	БП	$c_Б$	A_0	x_1 3	x_2 4	X_3 0	x_4 0	x_5 0
2	x_3	0	50	0	0	1	-3/4	**1/24**
	x_1	3	300	1	0	0	5/4	-1/8
	x_2	4	200	0	1	0	-0.5	1/12

	z_j-c_j	1700	0	0	0	7/4	-1/24
	$\Delta_{кв}$	1700	0	0	0	7/4	-1/24

Разрешающий элемент a_{15}=1/24, соответственно вводится в базис x_5 на место x_3 и осуществляется переход к следующей итерации (таблица 7).

Таблица 7 – Симплексная таблица на третьей итерации.

№	БП	$c_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
				3	4	0	0	0
3	x_5	0	1200	0	0	24	-18	1
	x_1	3	450	1	0	3	-1	0
	x_2	4	100	0	1	-2	1	0
	z_j-c_j		1750	0	0	1	1	0
	$\Delta_{кв}$		1750	0	0	1	1	0

Оптимальный план найден $\boldsymbol{x}^*(x_1=450, x_2=100, x_3=0, x_4=0, x_5=1200)$, соответственно оптимальный план исходной задачи $\boldsymbol{x}^*(x_1=450, x_2=100)$, а max$Z$(450,100)=1750.

О т в е т : оптимальный план исходной задачи $\boldsymbol{x}^*(x_1=450, x_2=100)$, а max$Z$(450,100)=1750.

Типовая задача (161-180). Решить транспортную задачу, исходные данные которой таковы:

b_j / a_i	200	200	300	400
200	4	3	2	1
300	2	3	5	6
500	6	7	9	12

Р е ш е н и е :

1. Проверяем выполнение необходимого и достаточного условия разрешимости задачи. Находим суммарные запасы поставщиков и суммарные запросы потребителей:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 200 + 300 + 500 = 1000 \qquad \sum_{j=1}^{4} b_j = 200 + 200 + 300 + 400 = 1100$$

Задача с неправильным балансом. Вводим четвертого, фиктивного поставщика с запасами a_4 = 1100 – 1000 = 100 и нулевыми стоимостями перевозок единиц груза (табл. 14).

2. Находим начальное опорное решение методом минимальной стоимости. Полученное решение X_1 имеет $m + n - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$ базисных переменных. Вычисляем значение целевой функции на этом опорном решении:

$Z(X_1)$ = 1 · 200 + 2 · 200 + 3 · 100 + 7 · 100 + 9 · 300 + + 12 · 100 + 0 · 100 = 5300.

Таблица 14

b_j / a_i	200	200	300	400
200	4	3	2	1 200
300	2 200	3 100	5	6
500	6	7 100	9 300	10 100
100	0	0	0	0 100

3. Для проверки оптимальности опорного решения необходимо найти потенциалы. По признаку оптимальности в каждой занятой опорным решением клетке таблицы транспортной задачи сумма потенциалов равна стоимости ($u_i + v_j = c_{ij}$ при $x_{ij} > 0$). Записываем систему уравнений для нахождения потенциалов и решаем ее:

$$\begin{cases} u_1 + \upsilon_4 = 1, \\ u_2 + \upsilon_1 = 2, \\ u_2 + \upsilon_2 = 3, \\ u_3 + \upsilon_2 = 7, \\ u_3 + \upsilon_3 = 9, \\ u_3 + \upsilon_4 = 12, \\ u_4 + \upsilon_4 = 0. \end{cases}$$

Система состоит из семи уравнений и имеет восемь переменных. Система неопределенная. Одному из потенциалов задаем значение произвольно: пусть $u_3 = 0$. Остальные потенциалы находятся однозначно:

$$\begin{aligned} &\upsilon_3 = 0; \\ &\upsilon_2 = 7 - u_3 = 7 - 0 = 7; \\ &\upsilon_3 = 9 - u_3 = 9 - 0 = 9; \\ &\upsilon_4 = 12 - u_3 = 12 - 0 = 12; \\ &\upsilon_1 = 1 - u_4 = 1 - 12 = -11; \\ &\upsilon_4 = 0 - u_4 = 0 - 12 = -12; \\ &\upsilon_2 = 3 - u_2 = 3 - 7 = -4; \\ &\upsilon_1 = 2 - u_2 = 2 - (-4) = 6. \end{aligned}$$

Значения потенциалов записываем в таблицу рядом с запасами или запросами соответствующих поставщиков и потребителей (табл. 15).

Система уравнений для нахождения потенциалов достаточно проста, обычно ее решают устно. Любой неизвестный потенциал, соответствующий занятой клетке, равен находящейся в этой клетке стоимости минус известный потенциал, соответствующий этой же клетке.

Таблица 15

X_1		$v_1 = 6$	$v_2 = 7$	$v_3 = 9$	$v_4 = 12$
	a_i \ b_j	200	200	300	400
$u_1 = -11$	200	4 –	3 –	2 –	1 200
$u_2 = -4$	300	2 200	– 3 100	5 0	+ 6 2
$u_3 = 0$	500	6 0	+ 7 100	9 300	12 100 –
$u_4 = -12$	100	0 –	0 –	0 –	0 100

4. Проверяем опорное решение X_1 на оптимальность. С этой целью вычисляем оценки Δ_{ij} для всех незаполненных клеток таблицы (для всех занятых клеток $\Delta_{ij} = 0$):

$\Delta_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = -11 + 6 - 4 = -9 < 0;$ $\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = -11 + 7 - 3 = -7 < 0;$

$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = -11 + 9 - 2 = -4 < 0;$ $\Delta_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = -4 + 9 - 5 = 0;$

$\Delta_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = -4 + 12 - 6 = 2 > 0;$ $\Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 0 + 6 - 6 = 0;$

$\Delta_{41} = u_4 + v_1 - c_{41} = -12 + 6 - 0 = -6 < 0;$ $\Delta_{42} = u_4 + v_2 - c_{42} = -12 + 7 - 0 = -5 < 0.$

$\Delta_{43} = u_4 + v_3 - c_{43} = -12 + 9 - 0 = -3 < 0.$

Положительные оценки записываем в левые нижние углы соответствующих клеток таблицы, вместо отрицательных ставим знак «–».

Начальное опорное решение не является оптимальным, так как имеется положительная оценка $\Delta_{24} = 2$.

5. Переходим к новому опорному решению. Для клетки (2, 4) с положительной оценкой строим цикл. Ставим в эту клетку знак «+», присоединяем ее к занятым клеткам и, применяя метод вычеркивания, находим цикл (2, 4), (3, 4), (3, 2), (2, 2). Цикл изображен в табл.

6. В угловых точках цикла расставляем поочередно знаки «+» и «–», начиная с «+» в клетке (2, 4). В клетки, отмеченные знаком «+», добавляется груз θ, а из клеток, отмеченных знаком «–», убавляется такой же по величине груз. Определяем величину груза θ, перераспределяемого по циклу. Она равна значению наименьшей из перевозок в клетках цикла, отмеченных знаком «–»:

$$\theta = \min_{"-"} \{100, 100\} = 100$$

Осуществляем сдвиг по циклу на величину θ = 100. Получаем второе опорное решение X_2 (табл. 16).

Таблица 16

X_2		$v_1 = 2$	$v_2 = 3$	$v_3 = 5$	$v_4 = 6$
	a_i \ b_j	200	200	300	400
$u_1 = -5$	200	4 –	3 –	2 –	1 200
$u_2 = 0$	300	2 200	3 0	5 0	6 100
$u_3 = 4$	500	6 0	7 200	9 300	12 –
$u_4 = -6$	100	0 –	0 –	0 –	0 100

Находим для этого решения потенциалы. Вычисляем оценки:

$\Delta_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = -5 + 2 - 4 = -7 < 0$; $\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = -5 + 3 - 3 = -5 < 0$;

$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = -5 + 5 - 2 = -2 < 0$; $\Delta_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = 0 + 5 - 5 = 0$;

$\Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 4 + 2 - 6 = 0$; $\Delta_{34} = u_3 + v_4 - c_{34} = 4 + 6 - 12 = -2 < 0$;

$\Delta_{41} = u_4 + v_1 - c_{41} = -6 + 2 - 0 = -4 < 0$; $\Delta_{42} = u_4 + v_2 - c_{42} = -6 + 3 - 0 = -3 < 0$.

$\Delta_{43} = u_4 + v_3 - c_{43} = -6 + 5 - 0 = -1 < 0$.

Все оценки неположительные. Следовательно, решение является оптимальным. Вычисляем значение целевой функции на этом решении:

$Z(X_2) = 1 \cdot 200 + 2 \cdot 200 + 6 \cdot 100 + 7 \cdot 200 + 9 \cdot 300 + 0 \cdot 100 = 5200.$

О т в е т : min $Z(X) = 5200$ при $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 200 \\ 200 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 200 & 300 & 0 \end{pmatrix}$.