ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Математика и теоретическая механика»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.Б.06 МАТЕМАТИКА

Направление подготовки (специальность): 38.03.02 Менеджмент

Профиль образовательной программы: Производственный менеджмент

Форма обучения очная

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.1 Лекция №1 (2 часа).
Тема: «Определители»

1.1.1 Вопросы лекции:

1. Определение определителей второго и третьего порядка.
2. Минор, алгебраическое дополнение.
3. Теорема Лапласа.
4. Свойства определителей.
5. Метод эффективного понижения порядка.

1.1.2 Краткое содержание вопросов:

1. Определение определителей второго и третьего порядка.

ОПР: *Определителем второго порядка* называется число, обозначаемое символом Δ (дельта) $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, где a_{ij} - числа, i – номер строки, j- номер столбца (i=1,2 ; j=1,2) и определяемое равенством $\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Примеры: 1) Числовой определитель

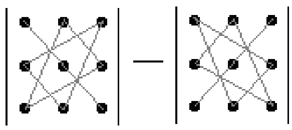
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-1)(-3) = 8 - 3 = 5$$

побочная диагональ главная диагональ

2) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ - функциональный определитель

ОПР: *Определителем третьего порядка* называется число, обозначаемое символом $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, где a_{ij}- числа, i – номер строки, j- номер столбца (i=1,2,3 ; j=1,2,3) и определяемое равенством

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33})$$



Пример: $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 0 - 12 - (0 - 3 + 4) = -13 - 1 = -14$

2. Минор, алгебраическое дополнение.

$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 6 = 8$ – *минор* M_{12}

ОПР: *Минором M_{ij}* элемента a_{ij} определителя называется определитель, полученный из данного в результате вычеркивания i-ой строки и j-го столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}

Пример:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ \cancel{-2} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{vmatrix} \qquad M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6$$

<u>ОПР</u>: <u>*Алгебраическим дополнением* A_{Ij}</u> элемента a_{ij} определителя называется число

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}}$$

<u>Пример:</u> $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(-3-0) = 3$

$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1$

3. Теорема Лапласа.

<u>ТЕОРЕМА ЛАПЛАСА *(о разложении определителя по элементам строки или столбца):*</u> Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{aligned} &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &(= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}) \end{aligned}$$

<u>Пример:</u> $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2A_{21} + 1A_{22} + 0A_{23} = 2(-1)^3 M_{21} + 1(-1)^4 M_{22} + 0 = -2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 + (-1) = -3$

4. Свойства определителей.

1. Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, сохранив нумерацию. Эта операция называется <u>*транспонированием.*</u>

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2. При замене двух строк (столбцов) местами, знак определителя изменится на противоположный.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3. Общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & k \cdot a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & k \cdot a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & k \cdot a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

4. Определитель равен нулю, если:

а) он содержит нулевую строку (столбец);

б) он содержит хотя бы две одинаковые строки (столбца);

в) элементы одной строки (столбца) пропорциональны элементам другой строки (столбца).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

5. Если каждый элемент какого-либо столбца (строки) представляет сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 + a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 + a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 + a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

6. Определитель не изменится, если элементы одной строки (столбца) умножить на одно и то же число $k \neq 0$ и прибавить к соответствующим элементам другой строки (столбца).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \times k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+k\cdot a_{21} & a_{32}+k\cdot a_{22} & a_{33}+k\cdot a_{23} \end{vmatrix}$$

7. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) и соответствующих алгебраических дополнений другой строки (столбца) равна нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13}=0-\textit{строка} \\ a_{13}A_{12}+a_{23}A_{22}+a_{33}A_{32}=0-\textit{столбец} \end{array}$$

5. Метод эффективного понижения порядка.

Замечание: Определители можно вычислять:

а) по определению;

б) по теореме Лапласа;

в) методом эффективного понижения порядка.

г) приведение к треугольному виду

Метод эффективного понижения порядка заключается в накапливании нулей в какой-либо строке (столбце) с помощью 6-го свойства определителей и последующем вычислении его по теореме Лапласа.

Пример:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} \cdot 5 \quad \cdot 7 \quad = \begin{vmatrix} 0 & 13 & 22 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 17 & 34 \end{vmatrix} = (-1)A_{21} = (-1)(-M_{21}) = \begin{vmatrix} 13 & 22 \\ 17 & 34 \end{vmatrix} = 17\begin{vmatrix} 13 & 22 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 34\begin{vmatrix} 13 & 11 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 34(13-11) = 68$$

Приведение к треугольному виду Определитель, у которого все элементы, находящиеся выше или ниже главной диагонали равны нулю, называется определителем *треугольного вида*. Очевидно, что в таком случае определитель равен произведению элементов, стоящих по главной диагонали.

Определители высших порядков определяются аналогично. Для определителей любых порядков остается в силе определения минора и алгебраического дополнения некоторого элемента, свойства определителей.

Пример:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 640$$

1.2 Лекция №2 (2 часа).

Тема: «Матрицы»

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Определение матрицы. Действия над матрицами, их свойства.
2. Обратная матрица.
3. Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования.
4. Билинейные и квадратичные формы.
5. Линейная модель обмена.

1.2.2 Краткое содержание вопросов:

1. Определение матрицы. Действия над матрицами, их свойства.

ОПР: _Матрицей размера $m \times n$_ называется прямоугольная таблица вида $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ..... & ..... & ... & ..... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$, где

a_{ij}-элементы матрицы (числа, функции), i – номер строки, j- номер столбца (i=1,2,…,m ; j=1,2,…,n)

Обозначение: $A_{m\times n} = (a_{ij}) \qquad B_{m\times n} = (b_{ij})$

Частные виды матриц:

1) если m=n, то матрица называется _квадратной_ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 2}$ - квадратная матрица второго порядка

2) если m=1, то $A = (a_{11} \quad a_{12} \quad .... \quad a_{1n})_{1\times n}$ - _строчная_ матрица.

3) если n=1, то $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ .... \\ a_{m1} \end{pmatrix}_{m\times 1}$ - _столбцовая_ матрица.

4) матрица, все элементы которой равны нулю, называется _нулевой_ матрицей $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5) _единичной_ матрицей называется квадратная матрица, у которой по главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю. $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6) матрица называется _треугольной_, если под или над её главной диагональю стоят нули. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$

ОПР: Матрицы одинаковой размерности называются _равными_, если равны элементы, стоящие на соответствующих местах.

Основные операции над матрицами:

1. ОПР: _Суммой (разностью)_ двух матриц одинаковой размерности называется матрица той же размерности, элементы которой равны сумме (разности) элементов, стоящих на одинаковых местах.

$$A_{m\times n} \pm B_{m\times n} = C_{m\times n} \qquad A_{m\times n} = (a_{ij}) \quad i = 1...m$$

$$B_{m\times n} = (b_{ij}) \quad j = 1...n \qquad \boxed{c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}}$$

$$C_{m\times n} = (c_{ij})$$

2. ОПР: _Произведением матрицы А на действительное число_ $k \neq 0$ называется матрица В, каждый элемент которой получен умножением каждого элемента исходной матрицы А на это число k.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad 3A = B \qquad 3A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 0 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix} = B$$

3. ОПР: _Произведением матрицы $A_{m\times k}$ и матрицы $B_{k\times n}$_ называется матрица $C_{m\times n}$, элементы которой c_{ij} равны сумме произведений элементов i-ой строки матрицы А и соответствующих элементов j-го столбца матрицы В.

$$A_{m\times k} \cdot B_{m\times k} = C_{m\times n} \qquad A_{m\times k} = (a_{ip}) \quad i = 1...m \quad p = 1...k$$

$$B_{k\times m} = (b_{pj}) \quad j = 1...n$$

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{p=1}^{k} a_{ip} \cdot b_{pj}} \qquad C_{m\times n} = (c_{ij})$$

Замечание: Матрицы можно перемножать лишь в том случае, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Свойства операций над матрицами:

1. **1.** A+B=B+A
2. **2.** (A+B)+C=A+(B+C)
3. **3.** α (A+B)= α A+ α B, где α - действительное число
4. **4.** A(B+C)=AB+AC
5. **5.** (A+B)C=AC+BC
6. **6.** α (AB)=(α A)B=A(α B)
7. **7.** A(BC)=(AB)C

Замечание: 1) если $\exists$ $A\cdot B$, то $B\cdot A$ может и не существовать. $A_{2\times\underline{3}}\cdot B_{\underline{3}\times 3}$, то $B_{3\times\underline{3}}\cdot A_{\underline{2}\times 3}$-не существует

2) даже если $\exists$ $A\cdot B$ и $\exists$ $B\cdot A$, то в общем виде эти матрицы различные

$A_{2\times 3}=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&3&2\end{pmatrix},\quad B_{3\times 2}=\begin{pmatrix}0&3\\1&5\\-1&1\end{pmatrix},\quad A_{2\times 3}\cdot B_{3\times 2}=C_{2\times 2}=\begin{pmatrix}0&12\\1&17\end{pmatrix},\quad B_{3\times 2}\cdot A_{2\times 3}=D_{3\times 3}=\begin{pmatrix}0&2&-2\\2&16&11\\-2&2&1\end{pmatrix}$- различные размерности.

$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&5\\6&8\end{pmatrix},\quad A\cdot B=\begin{pmatrix}12&21\\24&47\end{pmatrix},\quad B\cdot A=\begin{pmatrix}15&20\\30&44\end{pmatrix}\qquad AB\neq BA$ -одинаковые размерности (это возможно только для квадратных матриц), но сами матрицы различные.

3)

$$A_{n\times n}\cdot E_{n\times n}=E_{n\times n}\cdot A_{n\times n}=A_{n\times n}\qquad \begin{pmatrix}2&3\\-4&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\-4&5\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3\\-4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\-4&5\end{pmatrix}$$

4) Произведение двух ненулевых матриц может быть нулевой матрицей

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\neq O,\quad B=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\neq O, íî \qquad A\cdot B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O$$

4. ОПР: *Целой положительной степенью* A^m $(m>1)$ квадратной матрицы А называется произведение m матриц, равных А, т.е. $A^m=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{m\ \text{ðàç}}$

Замечание: По определению полагают, что: $A^0=E,\quad A^1=A$

Можно доказать, что $A^m\cdot A^k=A^{m+k},\quad (A^m)^k=A^{m\cdot k}$

5. ОПР: Матрица A^t, полученная из матрицы А, с помощью замены местами строк и столбцов с сохранением порядка, называется *транспонированной*.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}_{2\times 3},\quad A^t=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Свойства:

1. $(A^t)^t=A$
2. $(\alpha A)^t=\alpha A^t$, где α - действительное число
3. $(A+B)^t=A^t+B^t$
4. $(AB)^t=B^t\cdot A^t$

2. Обратная матрица.

Пример: $A=\begin{pmatrix}3&4\\5&7\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}7&-4\\-5&3\end{pmatrix}\qquad AC=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E\ u\quad CA=E$ -единичная матрица

Обозначим $C=A^{-1}$

ОПР: Обратной матрицей по отношению к данной называется матрица, которая будучи умноженной на данную матрицу как слева, так и справа дает единичную матрицу. $\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E}$

ТЕОРЕМА (*о существовании и единственности обратной матрицы):* Для квадратной матрицы $A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ .... & .... & ... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$, определитель которой отличен от нуля ($\Delta(A) \neq 0$), существует обратная матрица A^{-1}, причем единственная. $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ..... & ..... & ... & .... \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix}}$ (*), где A_{ij} - алгебраические дополнения для элементов a_{ij} матрицы А, $i = 1...n,\ j = 1...n$

Алгоритм нахождения обратной матрицы:

1) находим $\Delta(A)$, если матрица А невырожденная, т.е. $\Delta(A) \neq 0$, то матрица A^{-1} существует.
2) находим A_{ij} A_{ij} - алгебраические дополнения для элементов a_{ij} матрицы А.
3) составляем A^{-1} по формуле (*).
4) выполняем проверку $AA^{-1} = A^{-1}A = E$

Пример: Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Решение: $\Delta(A) = -9 \neq 0$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\textit{проверка}: \quad AA^{-1} = E$$
$$A^{-1}A = E$$

Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.

ОПР: *Элементарными преобразованиями* над строками матрицы называются такие преобразования, для которых возможны следующие действия (над строками матриц):

1) перестановка строк;
2) вычеркивание нулевой строки (если она имеется);
3) умножение любой строки на число, отличное от 0;
4) прибавление к одной из строк другой строки, умноженной на любое число, отличное от 0.

Пример: Найти обратную матрицу для матрицы $A=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$ с помощью элементарных преобразований.

Решение: Для того, чтобы получить обратную матрицу с помощью элементарных преобразований нужно приписать к данной матрице через вертикальную черту (слева или справа) единичную матрицу той же размерности. Далее с помощью элементарных преобразований над строками «сдвоенной» матрицы (A\E) приводим матрицу A (левую половину) к единичной матрице, тогда на месте приписанной единичной матрицы , окажется обратная A^{-1}.

$$(A/E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&2&3&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\-1&2&1&0&0&1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&0&1&0\\2&2&3&1&0&0\\-1&2&1&0&0&1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&0&1&0\\0&4&3&1&-2&0\\0&1&1&0&1&1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&0&1&0\\0&1&1&0&1&1\\0&4&3&1&-2&0\end{array}\right)=$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&2&1\\0&1&1&0&1&1\\0&0&+1&-1&+6&+4\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&-4&-3\\0&1&0&1&-5&-3\\0&0&1&-1&6&4\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-4&-3\\0&1&0&1&-5&-3\\0&0&1&-1&6&4\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}$$

3. Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования.

Пусть дана матрица A.

ОПР: Число λ называется *собственным значением* матрицы A, если выполняется равенство

$$\boxed{\Delta(A-\lambda E)=0}$$

ОПР: Вектор $\vec{x}=(x_1;x_2;...;x_n)$, $\vec{x}\neq\vec{0}$ называется *собственным вектором*, соответствующим собственному значению λ, если $(A-\lambda E)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\...\\x_n\end{pmatrix}=\vec{0}$.

Пример: Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A=\begin{pmatrix}1&4\\9&1\end{pmatrix}$.

Решение: 1) $\Delta(A-\lambda E)=0$

$$\left|\begin{pmatrix}1&4\\9&1\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right|=0\qquad\begin{vmatrix}1-\lambda&4\\9&1-\lambda\end{vmatrix}=0\qquad(1-\lambda)^2-36=0$$

$\lambda_1=-5;\quad\lambda_2=7$ - собственные значения матрицы A.

2) $\vec{x_1}=(x_1;x_2);\quad\lambda_1=-5$

$$\begin{pmatrix}1-\lambda&4\\9&1-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix};\qquad\begin{pmatrix}6&4\\9&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}6x_1+4x_2=0\\9x_1+6x_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=c\\x_2=-1{,}5c\end{cases}$$

$\vec{x_1}=(c;-1{,}5c),\quad\forall c\neq0$ - собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1=-5.$

$\vec{x_2}=(x_3;x_4);\quad\lambda_2=7$

$$\begin{pmatrix}-6&4\\9&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-6x_3+4x_4=0\\9x_3-6x_4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_3=d\\x_4=1{,}5d\end{cases}$$

$\vec{x_2}=(d;1{,}5d),\quad\forall d\neq0$- собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_2=7.$

4. Линейная модель обмена.

Рассмотрим модель международной торговли (модель обмена) в виде математической модели.

Пусть имеем n стран - $S_1, S_2, ..., S_n$, национальный доход каждой из которых равен $x_1, x_2, ..., x_n$.

Обозначим через $a_{i\,j}$, $i = 1...n;\ j = 1...n$ долю национального дохода, который страна S_j тратит на покупку товаров у страны S_i.

Будем считать, что весь национальный доход тратится на закупку товаров либо внутри страны, либо на импорт из других стран, т.е. $\sum_{i=1}^{n} a_{i\,j} = 1 \quad (j = 1...n)$.

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется *структурной матрицей торговли*.

Обозначим через $p_i \quad (i = 1...n)$ выручку от внутренней и внешней торговли для страны S_i, тогда

$p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n$.

Очевидно, что выручка от торговли каждой страны должна быть не меньше её национального дохода, т.е. $p_i \geq x_i$. Но $p_i > x_i$ - невозможный случай, т.к. все страны не могут одновременно получать прибыль, поэтому условие $p_i \geq x_i$ примет вид $p_i = x_i$.

Введем вектор национальных доходов страны $\vec{x} = (x_1; x_2; ...; x_n)$, получим матричное уравнение

$A \cdot X = X$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$.

Т.е. задача свелась к отысканию собственного вектора матрицы А, отвечающего собственному значению λ =1.

Пример: Структурная матрица торговли трех стран S_1, S_2, S_3 имеет вид $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$.

Найти национальные доходы для сбалансированной торговли.

Решение: Найдем собственный вектор $\vec{x}$, соответствующий собственному значению λ =1.

$(A - E)X = 0 \qquad \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = 1{,}5c \\ x_2 = 2c \\ x_3 = c \end{cases}$ - метод Гаусса. Т.е.

$\vec{x} = (1{,}5c; 2c; c)$

Таким образом, сбалансированность торговли трех стран достигается при векторе национальных доходов $\vec{x} = (1{,}5c; 2c; c)$, т.е. при соотношении национальных доходов стран $\frac{3}{2} : 2 : 1$ или $3 : 4 : 2$.

1.3 Лекция №3 (2 часа).
Тема: «Системы линейных уравнений»

1.3.1 Вопросы лекции:
1. Решение системы в матричном виде.
2. Решение системы по формулам Крамера.
3. Метод Гаусса. Ранг матрицы. Исследование решения систем. Однородные системы линейных уравнений.

1.3.2 Краткое содержание вопросов:
1. Решение системы в матричном виде.
<u>ОПР:</u> <u>*Системой n линейных уравнений с m неизвестными*</u> называется система вида $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ (1), где $a_{ij} \in R$ - коэффициенты при неизвестных, $b_j \in R$-свободные члены, x_j- неизвестные, i=1…m, j=1…n.

<u>ОПР:</u> <u>*Решением*</u> системы называется такая совокупность чисел $(x_1 = k_1, x_2 = k_2, ..., x_n = k_n)$, которая обращают данную СЛУ в систему верных равенств (тождеств).

<u>ОПР:</u> СЛУ называется <u>*совместной*</u>, если она имеет хотя бы одно решение и <u>*несовместной*</u>, если она не имеет решений.

<u>ОПР:</u> Совместная СЛУ называется <u>*определенной*</u>, если она имеет одно решение и <u>*неопределенной*</u>, если она имеет более одного решения.
Этот метод применим для систем n линейных уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Введем в рассмотрение матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ .... & .... & ... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot x_1 + & a_{12}\cdot x_2 + & ... & + a_{1n}\cdot x_n \\ a_{21}\cdot x_1 + & a_{22}\cdot x_2 + & ... & + a_{2n}\cdot x_n \\ .... & .... & ... & .... \\ a_{n1}\cdot x_1 + & a_{n2}\cdot x_2 + & ... & + a_{nn}\cdot x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{A \cdot X = B}$ на основании определений произведения и равенства матриц.

$A \cdot X = B$-матричное уравнение, которое позволяет записать СЛУ (1) в матричном виде.
Чтобы найти X, умножим равенство с обеих сторон <u>слева</u> на A^{-1}

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

Получили решение СЛУ (1) в матричной форме.

<u>Пример:</u> $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=2 \\ x_1-x_2+x_3=0 \\ x_1+3x_2-x_3=-2 \end{cases}$

Введем в рассмотрение матрицы: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{\Delta(A)}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}}$$

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=14$$

$A_{11}=-2 \quad A_{21}=11 \quad A_{31}=5$

$A_{12}=2 \quad A_{22}=-4 \quad A_{32}=2$

$A_{13}=4 \quad A_{23}=-1 \quad A_{33}=-3$

$$A^{-1}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -2 & 11 & 5 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -2 & 11 & 5 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -14 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: (-1;0;1)

2. Решение системы по формулам Крамера.

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & |\times a_{21} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & |\times a_{11} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}a_{21}x_1+a_{12}a_{21}x_2=b_1a_{21} \\ a_{11}a_{21}x_1+a_{11}a_{22}x_2=b_2a_{11} \end{cases}(-) \qquad (a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22})x_2=b_1a_{21}-b_2a_{11}$$

$$x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & |\times a_{22} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & |\times a_{12} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}a_{22}x_1+a_{12}a_{22}x_2=b_1a_{22} \\ a_{12}a_{21}x_1+a_{12}a_{22}x_2=b_2a_{12} \end{cases}(-) \qquad (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

$$x_1=\frac{a_{22}b_1-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

Заметим: $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ - <u>главный определитель</u> СЛУ $(\Delta\neq 0)$

$\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{21} \end{vmatrix}=b_1a_{21}-a_{12}b_2$ *и* $\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}$ - <u>вспомогательные определители</u> СЛУ

$$\boxed{\begin{cases} x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta} \\ x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta} \end{cases}}$$ - *<u>формулы Крамера</u>*

<u>ТЕОРЕМА КРАМЕРА:</u> Система n линейных уравнений с n неизвестными, определитель которой $\Delta\neq 0$ имеет решение и при этом единственное, определяемое по формулам $\boxed{x_j=\dfrac{\Delta_j}{\Delta}}$ (*) , где Δ_j $(j=1...n)$-определитель, получаемый из определителя системы Δ заменой j-го столбца столбцом свободных членов.

<u>Замечание:</u> 1) Если $\Delta\neq 0$, то система (1) имеет единственное решение, которое определяется по формулам (*).

2) Если $\Delta = 0$ и хотя бы один из вспомогательных определителей $\Delta_j \neq 0$, то система (1) не имеет решений.

3) Если $\Delta = 0$ и $\Delta_j = 0$, то система либо имеет множество решений, либо не имеет решений. Нужны дополнительные исследования.

<u>Пример:</u> Решить СЛУ по формулам Крамера $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 14$ $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ система имеет единственное решение

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -14$ $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$ $\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 14$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} \\ z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Ответ: (-1;0;1)

3. Метод Гаусса. Ранг матрицы. Исследование решения систем. Однородные системы линейных уравнений.

Рассмотрим СЛУ $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ (1)

Метод Гаусса (метод последовательного исключения переменных) заключается в том, что с помощью элементарных преобразований системы переходим к равносильной СЛУ ступенчатого или треугольного вида, из которой последовательно находят все переменные. К элементарным преобразованиям относят: перестановка уравнений, вычеркивание из системы верного равенства, умножение обеих частей одного уравнения на одно и то же число $\neq 0$ и прибавление к соответствующим обеим частям другого уравнения.

Используя метод Гаусса и элементарные преобразования, мы работаем с коэффициентами при неизвестных и свободными членами. Поэтому удобно выписывать расширенную матрицу, соответствующую данной СЛУ и приводить эту матрицу к ступенчатому виду. Использую найденную матрицу записать систему ступенчатого вида, решив которую, найдем решение СЛУ.

<u>Пример:</u> Решить СЛУ методом Гаусса $\begin{cases} x + 2y + 5z = -9 \\ x - y + 3z = 2 \\ 3x - 6y - z = 25 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -2 & 25 \end{array}\right) (-1)\,(-3) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right) (-4) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = -9 \\ -3y - 2z = 11 \\ -8z = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = -1 \end{cases}$$

Ответ: (2;-3;-1)

Достоинством метода Гаусса по сравнению с другими в том, что он позволяет однозначно установить совместна система или нет, а в случае совместности, найти её решение (единственное или бесконечное множество).

<u>ОПР:</u> <u>*Рангом матрицы А*</u> (rangA) называется наивысший порядок отличного от нуля минора матрицы А.

Пример: $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ $\quad \Delta(A)=0 \quad M_{33}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow \quad rangA=2$

С каждой системой можно связать две матрицы:

$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n}\\ .... & .... & ... & ....\\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn}\end{pmatrix}$ (2) –основная матрица и $B=\left(\begin{array}{cccc|c}a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2\\ .... & .... & ... & .... & ...\\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} & b_m\end{array}\right)$ (3) – расширенная матрица.

ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА-КАПЕЛЛИ (критерий совместности СЛУ): Для того, чтобы система m линейных уравнений с n неизвестными (1) была совместной (имела решение) необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы (2) был равен рангу расширенной матрицы (3).

Т.е., если rangA$\neq$rangB, то система несовместна

если rangA=rangB=r, то система совместна, причем:

1) если r=n (n-число неизвестных), то система имеет единственное решение.

2) если r<n, то система имеет бесчисленное множество решение, зависящих от (n-r) параметров.

Пример: $\begin{cases}x+2y+z+t=5\\ \quad\;\; y+z+t=3\\ x+y \qquad\quad\; =2\end{cases}$

Составим расширенную матрицу:

$B=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2\end{array}\right)(-1) = \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3\end{array}\right)1 = \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$ Т.к. $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$ - минор второго порядка,

то rangA=2 и rangB=2 r=2 $\Rightarrow$ система совместна

n=4 (x, y, z, t) n>r , n-r=4-2=2 $\Rightarrow$ система имеет бесчисленное множество решений, зависящих от двух параметров.

$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3\end{array}\right)$ $\begin{cases}x+2y+z+t=5\\ \quad\;\; y+z+t=3\end{cases}$ $\begin{cases}x=2-y\\ t=3-y-z\end{cases}$ $\Rightarrow$ $(2-y;\, y;\, z;\, 3-y-z)$ - общее решение (зависит от двух параметров – y и z).

Ответ: $(2-y;\, y;\, z;\, 3-y-z)$

Однородные системы линейных уравнений (ОСЛУ).

ОПР: СЛУ, свободные члены которой равны нулю, называется *однородной системой линейных уравнений* $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=0\\ ....\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=0\end{cases}$

Замечание: В ОСЛУ ранг основной матрицы всегда равен рангу расширенной матрицы, т.к. расширенная матрица отличается от основной только нулевым столбцом $\Rightarrow$ ОСЛУ всегда совместна. (0;0;...;0) - очевидно решение ОСЛУ (тривиальное решение).

ТЕОРЕМА: ОСЛУ имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $r<n$, где r- ранг основной и расширенной матрицы, n- число неизвестных.

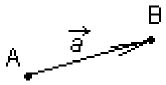
Пример: $\begin{cases}x+2y+3z+4t=0\\ 2x+4y-z \qquad =0\\ x+2y+10z+12t=0\\ x+2y+6z+4t=0\end{cases}$ Ответ: (- 2y – 4t; y; 0; t)

1.4 Лекция №4 (2 часа).
Тема: «Векторы»

1.4.1 Вопросы лекции:
1. Действия над векторами в геометрической и координатной форме, их свойства.
2. Длина вектора.
3. Признаки коллинеарности и компланарности векторов.
4. Деление отрезка в данном отношении.
5. Скалярное произведение векторов.
6. Проекция вектора на ось, ее свойства.

1.4.2 Краткое содержание вопросов:
1. Действия над векторами в геометрической и координатной форме, их свойства.

ОПР: *Вектором* называется направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ с начальной тачкой А и конечной точкой В, который можно перемещать параллельно самому себе.



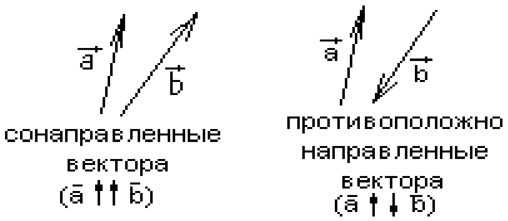
Обозначение: $\vec{a} = \overline{AB}$

ОПР: *Длиной (модулем)* вектора $\overrightarrow{AB}$ называется число, равное длине отрезка, изображающего вектор (Обозначение: $\left|\overline{AB}\right|$ или $\left|\overline{a}\right|$).

ОПР: Вектор называется *нулевым*, если его начало совпадает с концом (Обозначение: $\overline{0} = \overline{AA}$ u $\left|\overline{0}\right| = 0$).

ОПР: Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным* (Обозначение: $\overline{e}$ u $\left|\overline{e}\right| = 1$).

ОПР: Векторы, лежащие на одной или на параллельных прямых, называются *коллинеарными* ($\overline{a} \parallel \overline{b}$).



Замечание: Нулевой вектор $\overline{0}$ считается коллинеарным (сонаправленным) любому вектору.

ОПР: Векторы, лежащие на одной или на параллельных плоскостях, называются *комплонарными*.

ОПР:Единичный вектор, одинаково направленный с вектором $\overline{a}$,называется *орт-вектором* вектора $\overline{a}$.

$\overline{a_0}$ - орт-вектор. $\left|\overline{a_0}\right| = 1$ u $\overline{a_0} \parallel \overline{a}$

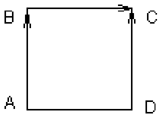
ОПР: Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются *равными*, если они коллинеарны, сонаправленны и имеют одинаковую длину.

$\overline{a} = \overline{b}$: 1) $\overline{a} \parallel \overline{b}$

2) $\vec a \uparrow\uparrow \vec b$

3) $\left|\overline{a}\right| = \left|\overline{b}\right|$

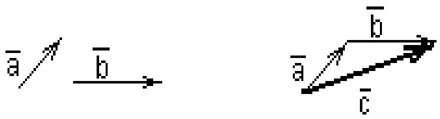
Пример: ABCD – квадрат



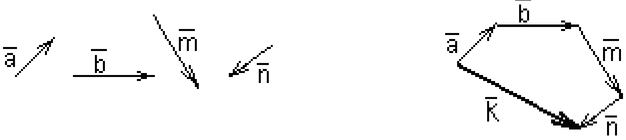
1) $\overline{AB} \neq \overline{BC}$; 2) $\overline{CD} \neq \overline{AB}$ - они противоположно направлены, но $\overline{CD} = -\overline{AB}$; 3) $\overline{DC} = \overline{AB}$

<u>Действия над векторами:</u>

1.ОПР: *Суммой* двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется новый вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом первого слагаемого вектора, а конец – с концом второго, при условии, что начало вектора $\overline{b}$ лежит в конце вектора $\overline{a}$.



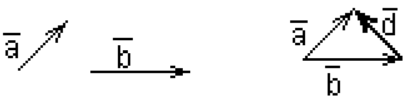
$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ - *правило треугольника*



$\vec{k} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{m} + \vec{n}$ - *правило многоугольника*

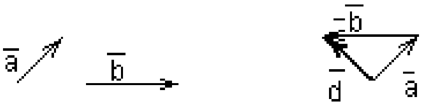
$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ - *правило параллелограмма*

2. ОПР: *Разностью* векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется новый вектор $\vec{c}$, начало которого лежит в конце вычитаемого вектора $\overline{b}$, а конец – в конце уменьшаемого вектора $\overline{a}$, при условии, что векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ имеют общее начало.



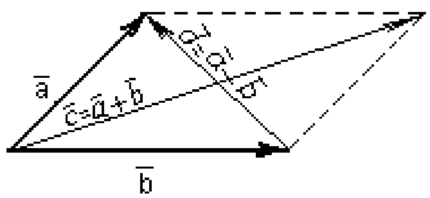
$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$

На разность векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ можно смотреть как на сумму векторов $\overline{a}$ и $-\overline{b}$:



$\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b})$

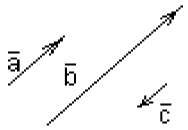
Очевидно, в параллелограмме, построенном на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, одна диагональ представляет собой вектор суммы $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, а другая – вектор разности $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$



3. ОПР: *Произведением вектора* $\overline{a}$ *на число* λ называется новый вектор $\overline{b}$, который удовлетворяет условиям: 1) $\overline{b} \parallel \overline{a}$, причем $\overline{b} \uparrow\uparrow \overline{a}$, если $\lambda > 0$

$\overline{b} \uparrow\downarrow \overline{a}$, если $\lambda < 0$.

2) $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$



$\vec{b} = 2\cdot\vec{a}$ $\qquad \vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a}$

Если $|\lambda| > 1$, то вектор $\overline{a}$ «растягивается» в λ раз.

Если $|\lambda| < 1$, то вектор $\overline{a}$ «сжимается» в λ раз.

Если λ =0, то $0\cdot\vec{a} = \vec{0}$

<u>ОПР</u>: <u>*Противоположным вектором*</u> $-\vec{a}$ называется произведение вектора $\overline{a}$ на число (-1), т.е. $-\vec{a}$=(-1) $\overline{a}$.

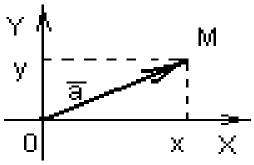
<u>*Основные свойства линейных операций над векторами:*</u>

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ 3) $\lambda(\alpha\vec{a})=(\lambda\alpha)\vec{a}$ 5) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ 4) $(\lambda+\alpha)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\alpha\vec{a}$

2. Длина вектора.

Перенесем вектор $\overline{a}$ параллельно самому себе так, чтобы его начало совпало с началом координат.

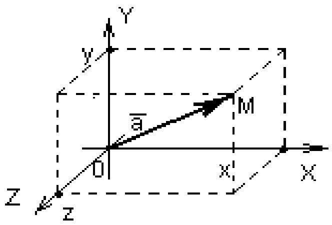


$\overline{a}$ - <u>*радиус-вектор*</u> $\qquad \vec{a}=(x;y)$ - два числа на плоскости

<u>Замечание</u>: Даны координаты начала и конца вектора $A(x_1;y_1)$ *и* $B(x_2;y_2)$. Для того, чтобы найти <u>*координаты вектора*</u>, нужно из координат конца вектора вычесть координаты начала.

$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;y_2-y_1)$

<u>ОПР</u>: <u>*Координатами*</u> вектора $\overline{a}$ называются координаты конечной точки его радиус-вектора.



$\vec{a}=(x;y;z)$ - три числа в пространстве

В соответствии с данными определениями, нетрудно показать, что для векторов $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ *и* $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$

$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, то $\vec{c}=(x_1+x_2;y_1+y_2;z_1+z_2)$

$\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$, то $\vec{d}=(x_1-x_2;y_1-y_2;z_1-z_2)$

$\vec{b}=\lambda\cdot\vec{a}$, то $\vec{b}=(\lambda\cdot x_1;\lambda\cdot y_1;\lambda\cdot z_1)$

На рисунке видно, что длину вектора можно найти по теореме Пифагора из ΔOMx

$\boxed{|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}}$ или $\boxed{|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

<u>Замечание:</u> <u>*Расстояние между двумя точками*</u> $A(x_1;y_1)$ *и* $B(x_2;y_2)$ можно находить как длину вектора $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;y_2-y_1)$. Поэтому

$$\boxed{d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

<u>ОПР:</u> Два вектора называются <u>*равными*</u>, если равны их соответствующие координаты.

3. Признаки коллинеарности и компланарности векторов.

<u>ТЕОРЕМА *(признак коллинеарности векторов в координатной форме*):</u> Для того, чтобы два ненулевых вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их соответствующие координаты были пропорциональны.

$\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)\qquad \vec{a}\neq\vec{0}$

$\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)\qquad \vec{b}\neq\vec{0}\qquad \vec{a}\parallel\vec{b}\iff\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$

<u>Доказательство:</u> 1) необходимость: дано: $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ *и* $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$ и $\bar{a}\parallel\bar{b}$

доказать: $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$

доказательство: $\bar{a}\parallel\bar{b}\qquad\Rightarrow\vec{a}=\lambda\cdot\vec{b}\Rightarrow$

$(x_1;y_1;z_1)=(\lambda\cdot x_2;\lambda\cdot y_2;\lambda\cdot z_2)$

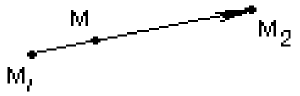
$$\begin{cases}x_1=\lambda\ x_2\\ y_1=\lambda\ y_2\\ z_1=\lambda\ z_2\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{x_1}{x_2}=\lambda\\ \dfrac{y_1}{y_2}=\lambda\\ \dfrac{z_1}{z_2}=\lambda\end{cases}\Rightarrow\qquad \frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$$

2) достаточность – самостоятельно.

<u>ТЕОРЕМА *(признак компланарности векторов в координатной форме*):</u> Для того, чтобы три ненулевых вектора были компланарными необходимо и достаточно, чтобы определитель 3-го порядка, составленный из координат этих векторов был равен 0.

$$\vec{a}=(x_1;y_1;z_1),\quad \vec{b}=(x_2;y_2;z_2),\quad \vec{c}(x_3;y_3;z_3):\qquad \begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}=0$$

4. Деление отрезка в данном отношении.



Пусть $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и точка $M(x;y;z)\in[M_1M_2]$- внутренняя точка, причем $\dfrac{|M_1M|}{|MM_2|}=\lambda$ $(\lambda\neq0)$- точка M делит отрезок $[M_1M_2]$ в отношении λ. Тогда координаты точки M определяются формулами:

$$\boxed{x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}}$$

<u>Следствие:</u>

Если M-середина отрезка $[M_1M_2]$, то $\dfrac{|M_1M|}{|MM_2|}=\dfrac{|M_1M|}{|M_1M|}=\lambda=1$, то

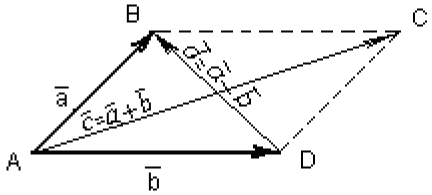
$\boxed{x=\dfrac{x_1+x_2}{2};\quad y=\dfrac{y_1+y_2}{2};\quad z=\dfrac{z_1+z_2}{2}}$-координаты середины отрезка.

5. Скалярное произведение векторов.

<u>ОПР:</u> <u>*Скалярным произведением*</u> $\vec{a}\cdot\vec{b}$ <u>*двух векторов*</u> $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ называется <u>число</u>, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними

$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a};\hat{}\,\vec{b})}$ - в геометрической форме.

Запишем скалярное произведение в координатной форме:



Рассмотрим ΔABD: пусть $\vec{a}=(x_1;y_1)$ *и* $\vec{b}=(x_2;y_2)$, $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2;y_1-y_2)$

$|\vec{d}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a};\hat{}\,\vec{b})$ - теорема косинусов.

$\Rightarrow |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a};\hat{}\,\vec{b})=\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{d}|^2)$, причем

$|\vec{a}|^2=x_1^2+y_1^2$, $|\vec{b}|^2=x_2^2+y_2^2$, $|\vec{d}|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$

тогда: (вывод самостоятельно)

$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2}$ - в координатной форме.

<u>ОПР:</u> <u>*Скалярное произведение*</u> двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.

<u>Следствие:</u> Угол между векторами определяется по формуле:

$\boxed{\cos(\vec{a};\hat{}\,\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}}$ - геометрической форме $\boxed{\cos(\vec{a};\hat{}\,\vec{b})=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}}$ - в координатной форме.

<u>Замечание:</u> Данные формулы справедливы и для векторов в пространстве.

<u>Пример:</u> Дано: $\vec{a}=(2;-1;-2)$, $\vec{b}=(8;-4;0)$

Найти: а) $\vec{c}=2\vec{a}$; $\vec{d}=\vec{b}-\vec{a}$; б) $|\vec{c}|$, $|\vec{d}|$ в) $\vec{c}\cdot\vec{d}$ г) $(\vec{c};\hat{}\,\vec{d})$

Решение:

а) $\vec{c}=2\vec{a}=(4;-2;-4)$; $\vec{d}=\vec{b}-\vec{a}=(8;-4;0)-(2;-1;-2)=(6;-3;2)$

б) $|\vec{c}|=\sqrt{4^2+(-2)^2+(-4)^2}=6$, $|\vec{d}|=\sqrt{36+9+4}=7$

в) $\vec{c}\cdot\vec{d}=4\cdot6+(-2)(-3)+(-4)2=22$

г) $\cos(\vec{c};\hat{}\,\vec{d})=\frac{22}{6\cdot7}\approx0{,}52\Rightarrow$ $(\vec{c};\hat{}\,\vec{d})=\arccos0{,}52\approx58^0$

<u>*Свойства скалярного произведения:*</u>

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ - переместительный закон умножения.

2) $(\lambda\vec{a})\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$ - сочетательный закон относительно числового множителя.

3) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ - распределительное свойство относительно суммы.
Свойства 1-3 дают право при умножении векторов переставлять сомножители и объединять числовые коэффициенты векторных сомножителей.

4) $\vec{a}\cdot\vec{a}=(\vec{a})^2=\left|\vec{a}\right|^2$ - скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

<u>Доказательство:</u> $\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cos(\vec{a};\hat{\ }\vec{a})=\left|\vec{a}\right|^2\cos 0=\left|\vec{a}\right|^2$

если $\vec{a}\neq 0,\quad \vec{b}\neq 0\quad и\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=0\quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}$ перпендикулярен $\vec{b}$

<u>Доказательство:</u> 1) необходимость: дано: $\vec{a}\neq 0,\quad \vec{b}\neq 0\quad и\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

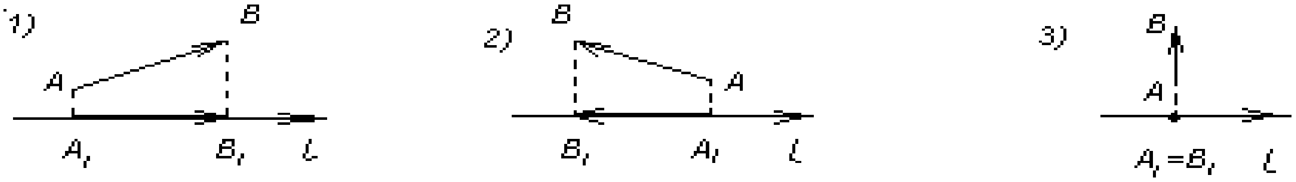
доказать: $\vec{a}$ перпендикулярен $\vec{b}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos(\vec{a};\hat{\ }\vec{b})=0$, причем $\left|\vec{a}\right|\neq 0,\quad \left|\vec{b}\right|\neq 0\quad\Rightarrow\quad \cos(\vec{a};\hat{\ }\vec{b})=0\Rightarrow\quad \vec{a}$ перпендикулярен $\vec{b}$

2) достаточность: самостоятельно.

6. Проекция вектора на ось, ее свойства.

Рассмотрим ось l на плоскости.



Геометрическая проекция $\overrightarrow{AB}$ на ось l (фигура):

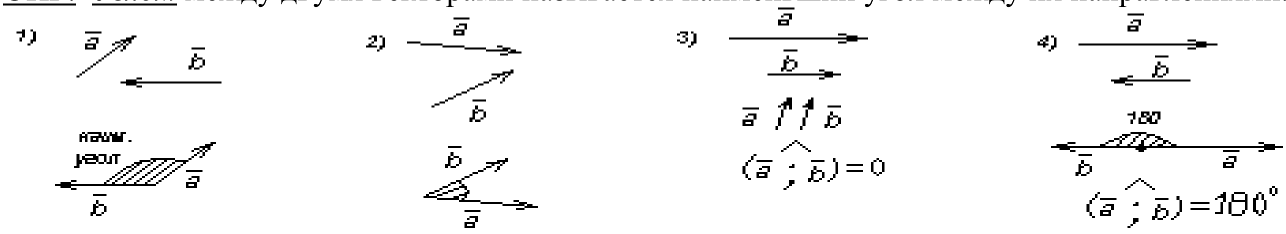
1) $\overrightarrow{A_1B_1}\uparrow\uparrow l$ 2) $\overrightarrow{A_1B_1}\uparrow\downarrow l$ 3) точка

Алгебраическая проекция $\overrightarrow{AB}$ на ось l (число):

1) $+\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$ 2) $-\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$ 3) 0

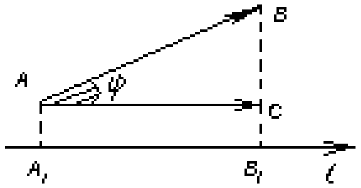
<u>ОПР:</u> <u>*Алгебраической проекцией*</u> (проекцией) вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется положительное число, совпадающее с длиной вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}\uparrow\uparrow l$ (одинаково направлены); отрицательное число, совпадающее с длиной вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$, если $\overrightarrow{A_1B_1}\uparrow\downarrow l$; 0- если $\overrightarrow{AB}$ перпендикулярен l.

<u>ОПР:</u> <u>*Углом*</u> между двумя векторами называется наименьший угол между их направлениями.



<u>*Свойства проекции:*</u>

1) Пусть $(\overrightarrow{AB};\hat{\ }l)=\varphi,\quad 0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$



Проекция $\overrightarrow{AB}$ на ось l равна $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$ записывается как $Пр_l\,\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$

Рассмотрим ΔABC - прямоугольный: $\cos\varphi = \dfrac{\left|\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| \Rightarrow$ $\boxed{Пр_l\,\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\varphi}$

Данная формула справедлива и для $\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ - доказательство самостоятельно.

Замечание: $\cos(\vec{a};\wedge\,\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \Rightarrow \quad Пр_{\vec{b}}\,\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} \Rightarrow \quad \boxed{Пр_{\vec{b}}\,\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}}$ -*проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$*

2) $Пр_l(\vec{a}+\vec{b}) = Пр_l\,\vec{a} + Пр_l\,\vec{b}$, $\quad Пр_l(\vec{a}-\vec{b}) = Пр_l\,\vec{a} - Пр_l\,\vec{b}$

3) $Пр_l\lambda\cdot\vec{a} = \lambda\cdot Пр_l\,\vec{a}$

1.5 Лекция №5 (2 часа).
Тема: «Векторное пространство векторов»

1.5.1 Вопросы лекции:
1. Базис векторного пространства.
2. Разложение вектора по базису.
3. Переход к новому базису.

1.5.2 Краткое содержание вопросов:
1. Базис векторного пространства.

ОПР: Вектор $\vec{b}$ называется *линейной комбинацией* векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \overrightarrow{a_n}$, если его можно представить в виде $\vec{b} = \lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + ... + \lambda_n\overrightarrow{a_n}$, где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in R$.

ОПР: Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \overrightarrow{a_n}$ называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in R$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, что $\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + ... + \lambda_n\overrightarrow{a_n} = \vec{0}$.
В противном случае, векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \overrightarrow{a_n}$ называются *линейно независимыми.*

ОПР: *Размерность* пространства – это максимальное число содержащихся в нем линейно независимых векторов.
ОПР: Совокупность n линейно независимых векторов n – мерного пространства называется *базисом*.

Пример: Доказать, что векторы $\vec{b}_1 = (1;1;0), \vec{b}_2 = (1;-1;1), \overrightarrow{b_3} = (-3;5;-6)$ образуют базис.

Три линейно независимых вектора трехмерного пространства образуют базис. Проверим, являются ли данные векторы линейно независимыми.

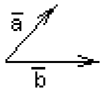
Т.е. $\lambda_1\overrightarrow{b_1} + \lambda_2\overrightarrow{b_2} + \lambda_3\overrightarrow{b_3} = \vec{0}$ только тогда, когда все числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ =0.

$\lambda_1(1;1;0) + \lambda_2(1;-1;1) + \lambda_3(-3;5;-6) = (0;0;0)$

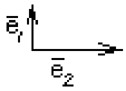
$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2-3\lambda_3=0 \\ \lambda_1-\lambda_2+5\lambda_3=0 \\ \lambda_2-6\lambda_3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1=0 \\ \lambda_2=0 \\ \lambda_3=0 \end{cases}$$
Вектора $\vec{b_1},\vec{b_2},\vec{b_3}$ - лин. независ. и образуют базис 3-мерного пространства.

3.5 Базис и размерность линейных пространств.

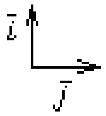
<u>ОПР:</u> Упорядоченная пара двух ненулевых, не коллинеарных векторов образует <u>*базис*</u> на плоскости.



$(\vec{a};\vec{b})$ - базис. $\bar{a}\nparallel\bar{b}$, $\bar{a}\neq\bar{0}$, $\bar{b}\neq\bar{0}$



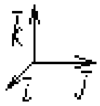
$\bar{e}_1\perp\bar{e}_2$, $(\vec{e_1};\vec{e_2})$ - <u>*ортогональный базис*</u>.



$\left|\vec{i}\right|=\left|\vec{j}\right|=1$, $\bar{i}\perp\bar{j}$, $(\vec{i};\vec{j})$ - <u>*ортонормированный базис*</u>. (ПДСК на плоскости)

<u>ОПР:</u> Упорядоченная система трёх ненулевых, не кокомплонарных векторов образуют <u>*базис*</u> в пространстве.

$\bar{e}_1\perp\bar{e}_2\perp\bar{e}_3$. $(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$ - ортогональный базис в пространстве.



$\left|\vec{i}\right|=\left|\vec{j}\right|=\left|\vec{k}\right|=1$, $\bar{i}\perp\bar{j}\perp\bar{k}$, $(\vec{i};\vec{j},\vec{k})$ - ортонормированный базис в пространстве.

(ПДСК в пространстве)

<u>ОПР:</u> <u>*n – мерным вектором*</u> называется упорядоченная совокупность n действительных чисел, записываемых в виде $\vec{a}=(x_1;x_2;...;x_n)$, где x_i - i-ая координата вектора $\vec{a}$.

Понятие n – мерного вектора широко используется в экономике. Например, некоторый набор товаров можно охарактеризовать вектором $\vec{x}=(x_1;x_2;...;x_n)$, а соответствующие цены – вектором $\vec{y}=(y_1;y_2;...;y_n)$.

Сумма, разность, умножение вектора на число вводятся аналогично.

<u>*Свойства операций:*</u>

1) $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$ - переместительное свойство

2) $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$ - сочетательное свойство

3) $\alpha\cdot(\beta\,\vec{x})=\alpha\,\beta\,\vec{x}$, $\alpha,\beta\in R$

4) $\alpha(\vec{x}+\vec{y})=\alpha\vec{x}+\alpha\vec{y}$ - дистрибутивное свойство

5) $(\alpha+\beta)\vec{x}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{x}$

6) $\exists$ $\vec{0}=(0,0,...0)$ такой, что $\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$, для $\forall\,\vec{x}$

7) Для $\forall\,\vec{x}$ $\exists$ $-\vec{x}$ - противоположный вектор такой, что $\vec{x}+(-\vec{x})=\vec{0}$

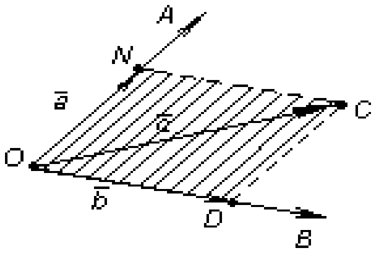
8) $1\cdot\vec{x}=\vec{x}$, для $\forall\,\vec{x}$.

ОПР: Множество векторов с действительными координатами, в котором определены операции сложения и умножения на число, удовлетворяющие приведенным выше восьми свойствам, называется *векторным пространством*.

2. Разложение вектора по базису.

Рассмотрим векторы $\overline{a} \nparallel \overline{b}$, $\overline{a} \neq \overline{0}$, $\overline{b} \neq \overline{0}$ и вектор $\vec{\tilde{n}}$, причем $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$ - компланарные.

Построим на векторах $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$ параллелограмм ONCD.



$$\overline{OC} = \overline{ON} + \overline{OD}$$
$$\overline{ON} \uparrow\uparrow \overline{OA} \Rightarrow \overline{ON} = \alpha \cdot \overline{OA}$$
$$\overline{OD} \uparrow\uparrow \overline{OB} \Rightarrow \overline{OD} = \beta \cdot \overline{OB}$$
$$\overline{OC} = \alpha \cdot \overline{OA} + \beta \cdot \overline{OB}$$

$\boxed{\overline{c} = \alpha \cdot \overline{a} + \beta \cdot \overline{b}}$ - *линейная комбинация векторов* $\vec{a}$ è $\vec{b}$

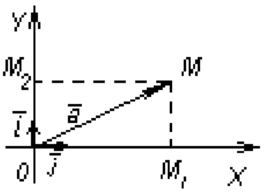
ТЕОРЕМА: Если вектора $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ образуют базис, то любой вектор $\vec{\tilde{n}}$, компланарный с векторами $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$, может быть представлен в виде линейной комбинации векторов базиса.

Равенство $\overline{c} = \alpha \cdot \overline{a} + \beta \cdot \overline{b}$ означает, что $\vec{\tilde{n}}$ разложен по базисным векторам $\vec{a}$ è $\vec{b}$, причем коэффициенты α è β - числа, которые являются координатами вектора $\vec{\tilde{n}}$ в базисе $(\vec{a};\vec{b})$. Аналогично и для вектора в пространстве.

ТЕОРЕМА: Если вектора $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ образуют базис пространства, то любой вектор $\vec{a}$ раскладывается по ним единственным образом

$\vec{a} = \alpha_1\vec{e_1} + \alpha_2\vec{e_2} + \alpha_3\vec{e_3}$, причем $\vec{a} = (\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3)$

Рассмотрим ПДСК на плоскости и вектор $\vec{a}(x;y)$



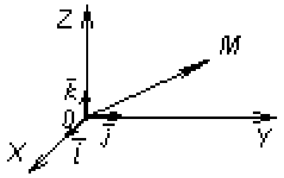
$$\overline{OM} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2}$$
$$\overline{OM_1} \uparrow\uparrow \overline{i} \Rightarrow \overline{OM_1} = x \cdot \overline{i}$$
$$\overline{OM_2} \uparrow\uparrow \overline{j} \Rightarrow \overline{OM_2} = y \cdot \overline{j}$$

$\boxed{\overline{OM} = x \cdot \overline{i} + y \cdot \overline{j}}$ - вектор $\overrightarrow{OM}$ представлен в виде линейной комбинации векторов $\vec{i}$ *и* $\vec{j}$

Равенство $\overline{OM} = x \cdot \overline{i} + y \cdot \overline{j}$ означает, что $\overrightarrow{OM}$ разложен по ортонормированному базису (декартову), где x и y- коэффициенты разложения являются координатами вектора $\overrightarrow{OM}$ в этом базисе.

ТЕОРЕМА: Любой вектор плоскости может быть разложен по ортонормированному базису $(\vec{i};\ \vec{j})$ единственным образом.

ТЕОРЕМА: Любой вектор пространства может быть разложен по ортонормированному базису $(\vec{i};\ \vec{j}, \vec{k})$ единственным образом.

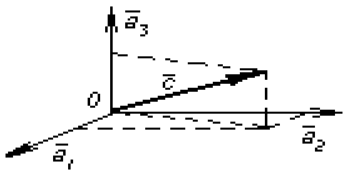


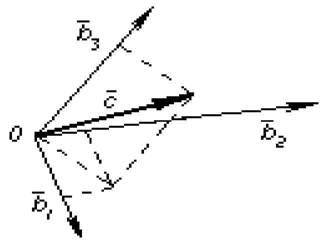
$\overline{OM} = x\cdot\bar{i} + y\cdot\bar{j} + z\cdot\bar{k}$

<u>Замечание:</u> На плоскости и в пространстве существует бесконечное множество базисов и один и тот же вектор можно разложить по этим базисным векторам, где коэффициенты разложения будут являться координатами вектора в выбранном базисе.
2. Разложение вектора по базису.
3. Переход к новому базису.

3. Переход к новому базису.

Пусть в пространстве R имеются два базиса: старый $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ и новый $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$





Один и тот же вектор $\vec{c}$ имеет различные координаты в различных базисах.

Пусть в старом базисе $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ вектор $\vec{c} = (c_1; c_2; c_3)$. Найдем координаты вектора $\vec{c}$ в новом базисе $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$.

Пусть $\vec{b}_1 = (b_{11}; b_{12}; b_{13})$, $\vec{b}_2 = (b_{21}; b_{22}; b_{23})$, $\vec{b}_3 = (b_{31}; b_{32}; b_{33})$. Обозначим неизвестные координаты вектора $\vec{c} = (x; y; z)$ относительно нового базиса $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$.

Разложим вектор $\vec{c}$ по векторам базиса $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$:

$$\vec{\tilde{n}} = x\cdot\vec{b}_1 + y\cdot\vec{b}_2 + z\cdot\vec{b}_3$$

$$(c_1; c_2; c_3) = x\cdot(b_{11}; b_{12}; b_{13}) + y\cdot(b_{21}; b_{22}; b_{23}) + z\cdot(b_{31}; b_{32}; b_{33})$$

$$\begin{cases} b_{11}x + b_{12}y + b_{13}z = c_1 \\ b_{21}x + b_{22}y + b_{23}z = c_2 \\ b_{31}x + b_{32}y + b_{33}z = c_3 \end{cases}$$

Решая систему трех уравнений с тремя неизвестными x, y, z, найдем искомые координаты.

<u>Пример:</u> Продолжение. Вектор $\vec{\tilde{n}} = (4; -4; 5)$ задан в базисе $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Найти координаты вектора $\vec{c}$ в базисе $\vec{b}_1 = (1;1;0)$, $\vec{b}_2 = (1;-1;1)$, $\vec{b}_3 = (-3;5;-6)$.

Решение: 1) $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ - базис.

2) $\vec{c} = (x; y; z)_{\{\vec{b}\}}$, тогда $\vec{\tilde{n}} = x\cdot\vec{b}_1 + y\cdot\vec{b}_2 + z\cdot\vec{b}_3$

$$(4; -4; 5) = x(1;1;0) + y(1;-1;1) + z(-3;5;-6)$$

$$\begin{cases} x + y - 3z = 4 \\ x - y + 5z = -4 \\ y - 6z = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0{,}5 \\ y = 2 \\ z = -0{,}5 \end{cases}$$

$\vec{\tilde{n}} = 0{,}5\cdot\vec{b}_1 + 2\cdot\vec{b}_2 - 0{,}5\cdot\vec{b}_3$ - разложение по векторам базиса.

$\vec{c} = (0{,}5; 2; -0{,}5)_{\{\vec{b}\}}$ - координаты вектора в новом базисе.

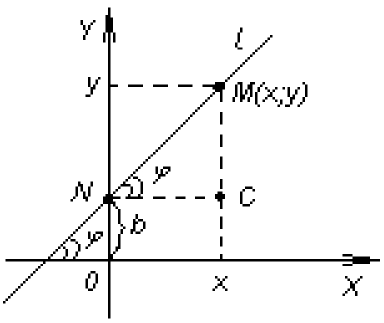
1.6 Лекция №6 (2 часа).
Тема: «Уравнение прямой линии на плоскости. Способы задания прямой»

1.6.1 Вопросы лекции:
1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
2. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с угловым коэффициентом.
3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.
4. Уравнение прямой в отрезках.
5. Угол между двумя прямыми.
6. Условие параллельности и перпендикулярности прямых.

1.6.2 Краткое содержание вопросов:
1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
В аналитической геометрии геометрические образы (точка, прямая, кривые, поверхности) и их расположение на плоскости и в пространстве изучается аналитически, т.е. методом алгебры. В аналитической геометрии это стало возможно с того времени, как впервые французский математик Рене Декарт (1596-1650) ввел в понятие ПДСК. С её помощью стало возможно изобразить пространство в виде осей (x, y, z). Всякий геометрический образ рассматривается как множество точек, обладающих некоторым, присущим только им свойством. Эти свойства выражаются уравнениями и неравенствами.
<u>ОПР:</u> <u>*Уравнением*</u>, соответствующим данному множеству точек на плоскости или в пространстве, называется равенство, которому удовлетворяют координаты точек этого множества и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих этому множеству.
Любую линию можно выразить уравнением, но не всякое уравнение выражает линию.
$x^2 + y^2 = 0$ - этому уравнению соответствует точка (0;0).
$x^2 + y^2 + 3 = 0$
Чтобы убедиться лежит ли точка $M(a;b)$ на данной линии, нужно проверить удовлетворяют ли координаты этой точки данному уравнению.

Уравнение прямой линии на плоскости
В общем случае уравнение линии может быть записано в виде $F(x,y)=0$ или $y = f(x)$, где $F(x,y)$ и $f(x)$ - некоторые функции. Если точка $M(x;y)$ перемещается по линии, то её координаты изменяясь, удовлетворяют уравнению этой линии. Поэтому координаты точки М называют <u>*текущими координатами*</u>.
<u>ОПР:</u> Уравнение $F(x,y)=0$ называется <u>*уравнением прямой линии*</u>, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на прямой, и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой прямой.
<u>ОПР:</u> <u>*Углом наклона*</u> прямой l к оси X называется угол между этой прямой и положительным направлением оси X.
<u>ОПР:</u> Угловым коэффициентом прямой l называется тангенс угла наклона между прямой и положительным направлением оси X.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом



$(\widehat{l;OX}) = \varphi$, $M(x;y) \in l$
$NC = x$
$MC = y - b$
ΔMNC – прямоугольный: $tg\,\varphi = \frac{MC}{NC} = \frac{y-b}{x}$
$tg\,\varphi = \frac{y-b}{x}$ $\quad \frac{y-b}{x} = k$

$$\boxed{y = k \cdot x + b} \quad (1)$$

2. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с угловым коэффициентом

Пусть прямая l проходит через точку $M_1(x_1;y_1)$.

Подставим координаты точки M_1 в уравнение (1): $y_1 = kx_1 + b \quad \Rightarrow b = y_1 - kx_1$

Подставим найденное b в уравнение (1): $y = kx + y_1 - kx_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y - y_1 = k(x - x_1)}$ (2)

3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

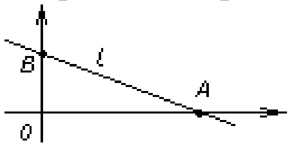
Пусть $M_1(x_1;y_1) \in l$ и $M_2(x_2;y_2) \in l$. Подставим в уравнение (2) координаты точки M_2:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$ (3) – *формула углового коэффициента*

Подставим (3) в (2):

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$$ (4)

4. Уравнение прямой в отрезках



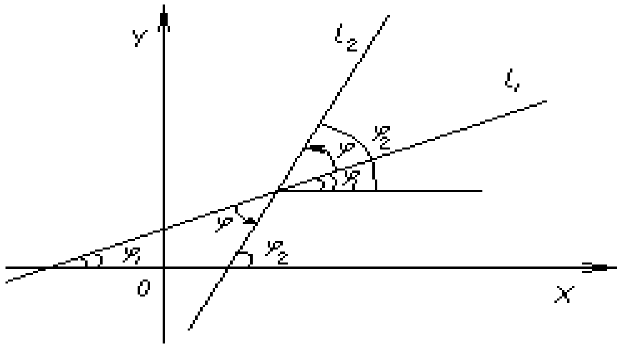
точка $A\ (a;0) \in l$
точка $B\ (0;b) \in l$

Т.е. прямая проходит через две точки. Подставим их координаты в уравнение (4):

$$\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{b} = \frac{x-a}{-a} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$ (5)

5. Угол между двумя прямыми

Дано: $l_1: \quad y = k_1 x + b_1$
$l_2: \quad y = k_2 x + b_2$



$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$tg\,\varphi = tg\,(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$tg\,\varphi = \frac{tg\,\varphi_2 - tg\,\varphi_1}{1 + tg\,\varphi_2 \cdot tg\,\varphi_1}$$

$$\begin{array}{l} tg\,\varphi_1 = k_1 \\ tg\,\varphi_2 = k_2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \boxed{tg\,\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}}$$ (6)

ОПР: *Углом между двумя прямыми* называется угол поворота одной прямой по отношению к другой против хода часовой стрелки.

$$\varphi = arctg\,\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$$

6. Условие параллельности и перпендикулярности прямых

- Если $l_1 \parallel l_2$, то $\varphi = 0$

$$tg\,0^0 = 0 \quad \Rightarrow \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad k_2 - k_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_1 = k_2}$$ (7)

Если прямые параллельны, то их угловые коэффициенты равны.

Обратное утверждение тоже справедливо:

Если $k_2 = k_1$, то $k_2 - k_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0$

- Если $l_1 \perp l_2$, то $\varphi = 90^0$ $\quad tg\,90^0$ - не существует. Рассмотрим $ctg\,90^0 = 0$

$$ctg\,\varphi = \frac{1}{tg\,\varphi} \qquad ctg\,90^0 = \frac{1}{\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}} = \frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + k_1 k_2 = 0$$

$\boxed{k_1 k_2 = -1}$ (8) –*<u>Если прямые перпендикулярны, то произведение их угловых коэффициентов равно -1.</u>*

$\boxed{k_2 = -\dfrac{1}{k_1}}$ (8’) - *<u>Если прямые перпендикулярны, то их угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку.</u>*

Обратное утверждение тоже справедливо.

<u>Пример:</u> Определить какие из данных прямых $l_1 : x - y + 1 = 0,\quad l_2 : 2y = 2x + 10,\quad l_3 : y = -x$ параллельны, перпендикулярны, пересекаются.

1.7 Лекция №7 (2 часа).

Тема: «Уравнение прямой линии на плоскости. Способы задания прямой»

1.7.1 Вопросы лекции:

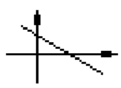
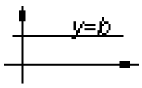
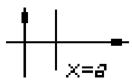
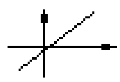
1. Общее уравнение прямой, его частные случаи.
2. Расстояние от точки до прямой.
3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с нормальным вектором.
4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с направляющим вектором.
5. Задачи по теме прямая линия на плоскости.

1.7.2 Краткое содержание вопросов:

1. Общее уравнение прямой, его частные случаи

<u>ТЕОРЕМА:</u> В ПДСК любая прямая задается уравнением первой степени $\boxed{Ax + By + C = 0}$ (9), где $A \neq 0$ или $B \neq 0$.

Обратное утверждение тоже верно, т.е. уравнение (9) при произвольных коэффициентах *A, B и C* ($A \neq 0$ или $B \neq 0$) определяет некоторую прямую в ПДСК.

Общее уравнение прямой	Уравнение прямой с угловым коэффициентом	Расположение прямой на плоскости
1) $A \neq 0,\ B \neq 0,\ C \neq 0$ $Ax + By + C = 0$	$y = kx + b$	$L \cap OX$ и $L \cap OY$ 
2) $A = 0,\ B \neq 0,\ C \neq 0$ $By + C = 0$	$y = -\dfrac{C}{B};\quad y = b$	$L // OX$ 
3) $A \neq 0,\ B = 0,\ C \neq 0$ $Ax + C = 0$	$x = -\dfrac{C}{A};\quad x = a$	$L // OY$ 
4) $A \neq 0,\ B \neq 0,\ C = 0$ $Ax + By = 0$	$y = -\dfrac{A}{B}x;\quad y = k \cdot x$	$O(0;0) \in L$ – проходит через начало координат. 
5) $A = 0,\ B \neq 0,\ C = 0$ $By = 0;\quad y = 0$	$y = 0$	ось ОХ
6) $A \neq 0,\ B = 0,\ C = 0$ $Ax = 0;\quad x = 0$	$x = 0$	ось ОУ

$Ax+By+C=0$

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B} \qquad \boxed{k=-\frac{A}{B}} \qquad \boxed{b=-\frac{C}{B}} \quad (10)$$

$y=kx+b$

Точка пересечения прямых

$$\begin{matrix} l_1: \\ l_2: \end{matrix}\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases} \quad (11)$$

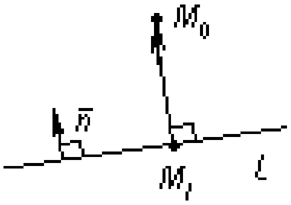
Чтобы найти точку пересечения прямых l_1 и l_2 нужно решить систему, составленную из уравнений этих прямых.

<u>Пример:</u> Даны координаты точек $A(1;3),\ B(2;-1),\ C(0;1),\ D(4;1)$. Найти точку пересечения прямых AD и BC.

2. Расстояние от точки до прямой

<u>ОПР:</u> Вектор $\vec{n}$, перпендикулярный к прямой l, называется <u>*нормальным вектором*</u> прямой l.

$l: Ax+By+C=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n}=(A;B)$



$M_0(x_0;y_0)\notin l$
$M_0M_1\perp l$
$M_1\in l$

Найти: $|M_1M_0|$

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_1M_0}: M_0(x_0;y_0)$-по условию. Пусть $M_1(x_1;y_1)$-не известны $\Rightarrow \overrightarrow{M_1M_0}(x_0-x_1;y_0-y_1)$

$l: Ax+By+C=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n}=(A;B)$ - нормальный вектор прямой l

$$\vec{n}\parallel\overrightarrow{M_1M_0} \qquad \vec{n}\cdot\overrightarrow{M_1M_0}=|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|\cdot\underbrace{\cos(\vec{n};\hat{\ }\overrightarrow{M_1M_0})}_{0^0 \ или \ 180^0}$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_1M_0}=|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|\cdot(\pm1)$$

$$\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_1M_0}\right|=|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right| \quad \Rightarrow \quad \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_1M_0}\right|}{|\vec{n}|}$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_1M_0}=A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)=Ax_0+By_0-Ax_1-By_1=Ax_0+By_0+C$$

$$т.к.\ Ax_1+By_1+C=0\Rightarrow C=-Ax_1-By_1$$

$$|\vec{n}|=\sqrt{A^2+B^2}$$

$$\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$\boxed{d(M_0;l)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$$ - расстояние от точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямой $l: Ax+By+C=0$

3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с нормальным вектором

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_1M_0}: M_0(x_0;y_0)$-по условию. Пусть $M(x;y)$ принадлежит прямой и ее координаты не известны $\Rightarrow \overrightarrow{M_0M}(x-x_0;y-y_0)$

$\vec{n} = (A;B)$ - нормальный вектор прямой

Тогда

$\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$

$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$

4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с направляющим вектором

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_1M_0} : M_0(x_0; y_0)$ -по условию. Пусть $M(x;y)$ принадлежит прямой и ее координаты не известны $\Rightarrow \overrightarrow{M_0M}(x - x_0; y - y_0)$

$\vec{p} = (\alpha;\beta)$ - направляющий вектор прямой

Тогда $\vec{p} \parallel \overrightarrow{M_0M} \Leftrightarrow$ их координаты пропорциональны, получим:

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}$$

5. Задачи по теме прямая линия на плоскости

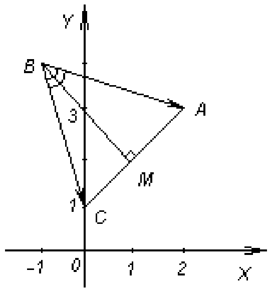
Пример: Дано: $\Delta ABC : A(2;3), B(-1;4), C(0;1)$

Требуется: 1) составить уравнение высоты, проведенной из вершины А на медиану из вершины В. Найти длину медианы.

2) найти внутренний угол В треугольника АВС.

Решение:

1) Уравнение $h_A - ?$



$h_A \perp BM \quad \Rightarrow \quad k_{h_A} = -\frac{1}{k_{BM}}; \quad k_{BM} = \frac{y_M - y_B}{x_M - y_B}; \quad B(-1;4), \quad M(?)$

$M(1;2) - середина \quad [AC]$

$k_{BM} = \frac{2-4}{1+1} = -1 \Rightarrow \quad k_{h_A} = -\frac{1}{-1} = 1$

$h_A : \quad k_{h_A} = 1$ *и проходит через точку* $A(2;3) \Rightarrow$

$y - y_0 = k(x - x_0)$

$y - 3 = 1(x - 2)$

$x - y + 1 = 0 -$ *уравнение высоты из вершины А намедиану из вершины В (если прямые перпендикулярны* $\Rightarrow k_1k_2 = -1$*).*

В нашем случае высота совпадает со стороной Δ.

$B(-1;4), \quad M(1;2)$

$|BM| = \sqrt{(1+1)^2 + (2-4)^2} = 2\sqrt{2}$

2) I *сп*: $\cos B = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}$

$\overrightarrow{BA} = (3;-1), \quad \overrightarrow{BC} = (1;-3)$

$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{10}; \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{10}; \quad \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 3 + 3 = 6$

$\cos B = \frac{3}{5}$

II *сп*: $tgB = \frac{k_{AB} - k_{BC}}{1 + k_{AB}k_{BC}}$

$k_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{3-4}{2+1} = -\frac{1}{3}; \quad k_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{1-4}{0+1} = -3$

$tgB = \frac{-1+9}{3 \cdot 2} = \frac{4}{3} \Rightarrow \angle B = 53^0$

Пример: Дано: $\Delta ABC : A(-1;2), B(5;-1), C(-4;-5)$

Найти: 1) уравнение медианы AE

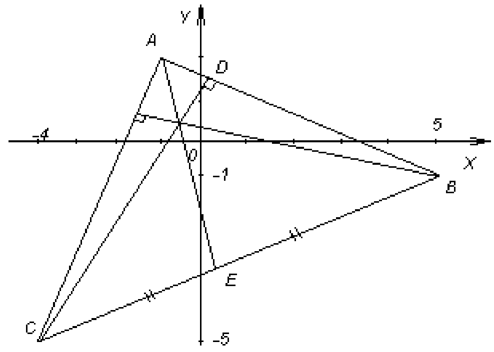
2) уравнение высоты CD

3) длину высоты CD

Решение:

1) $E - середина\ [CB],\quad E(\frac{1}{2};-3)$

$$AE: \frac{x - x_A}{x_E - x_A} = \frac{y - y_A}{y_E - y_A}; \quad \frac{x+1}{0{,}5+1} = \frac{y-2}{-3-2}; \quad AE: 10x + 3y + 4 = 0$$



2) $CD \perp AB \Rightarrow k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}}$

$$k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \quad k_{CD} = 2$$

$CD: k_{CD} = 2$ *и проходит через* $C(-4;-5)$

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$CD: 2x - y + 3 = 0$$

3) Длину CD найдем как расстояние от C до AB.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

AB проходит через точки A(-1;2) и B(5;-1):

$$AB: x + 2y - 3 = 0$$

$$d = \frac{|-4-10-3|}{\sqrt{1+4}} = \frac{17}{\sqrt{5}}$$

1.8 Лекция №8 (2 часа).

Тема: «Линии второго порядка»

1.8.1 Вопросы лекции:

1. Окружность. Каноническое уравнение окружности, его исследование.
2. Эллипс. Каноническое уравнение эллипса, его исследование.
3. Гипербола. Каноническое уравнение гиперболы, его исследование.
4. Парабола. Каноническое уравнение параболы, его исследование.

1.8.2 Краткое содержание вопросов:

1. Окружность. Каноническое уравнение окружности, его исследование

ОПР: Уравнение вида $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, где A,B,C,D,E,F- некоторые действительные числа и хотя бы одно из чисел A,B или C отлично от 0, определяет *линию второго порядка* на плоскости.

Линии второго порядка: окружность, эллипс, парабола, гипербола.

Окружность и её каноническое уравнение.

ОПР: *Окружностью* с центром в точке C и радиусом R называется множество точек плоскости M, равноудаленных от точки C на расстояние R.

т. $C(x_0; y_0)$– центр окружности

Возьмем любую т. $M(x; y)$ – текущая точка

$\boxed{|CM| = R}$ – *геометрическое уравнение окружности*

Рассмотрим $\overrightarrow{CM} = (x - x_0; y - y_0)$

$$|\overrightarrow{CM}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$$

$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2}$ - каноническое уравнение окружности с центром в точке $C(x_0;y_0)$ и радиусом R.

Пример: $(x-1)^2+(y+3)^2=25$ - уравнение окружности с центром в точке $C(1;-3)$ и радиусом $R=5$.

$$x_0=1,\ y_0=-3,\ R=\sqrt{25}=5$$

$$x^2+y^2-2x+6y-15=0$$ - общее уравнение окружности

Пример: $x^2+y^2=3$ - окружность с центром в точке $C(0;0)$ и радиусом $R=\sqrt{3}$

$$(x-0)^2+(y-0)^2=(\sqrt{3})^2$$

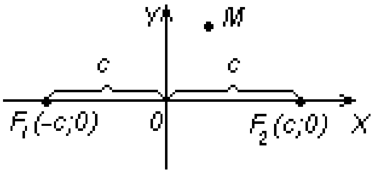
$\boxed{x^2+y^2=R^2}$ - уравнение окружности с центром в точке $C(0;0)$ и радиусом R.

Пример: Найти координаты центра и радиус окружности, заданной общим уравнением $x^2+y^2+6x-y-1=0$

Ответ: $\tilde{N}(-3;\frac{1}{2})$ è $R=\frac{\sqrt{41}}{2}$

2. Эллипс. Каноническое уравнение эллипса, его исследование

ОПР: *Эллипсом* называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек (называемых *фокусами*) есть величина постоянная, больше чем расстояние между фокусами.



$|MF_1|+|MF_2|=const$
$|MF_1|+|MF_2|>|F_1F_2|$
т. $M(x;y)$ – текущая точка
$|F_1F_2|=2c$ – фокусное расстояние

Обозначим *const* за *2a*, причем *a>c*

const = 2a $\Rightarrow$ $\boxed{|MF_1|+|MF_2|=2a}$ - геометрическое уравнение эллипса.

$$\sqrt{(-\tilde{n}-x)^2+(0-y)^2}+\sqrt{(c-x)^2+(0-y)^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4cx \quad |:4$$

$$a^2((x-c)^2+y^2)=(a^2-xc)^2$$

$$\underline{a^2x^2}+\underline{\underline{a^2c^2}}+a^2y^2=\underline{\underline{a^4}}+\underline{c^2x^2}$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

$$a>c\Rightarrow\quad a^2-c^2\neq 0,\qquad \underline{\underline{a^2-c^2=b^2}}$$

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \quad |:a^2b^2$$

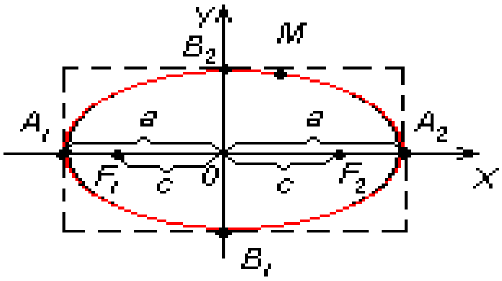
$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$ - каноническое уравнение эллипса, где $\boxed{c^2=a^2-b^2}$

Исследуем форму эллипса по его каноническому уравнению:

1) O(0;0) не принадлежит эллипсу. Т.к. в уравнение эллипса переменные входят в четной степени (x^2 и y^2), то эллипс симметричен относительно осей координат. Поэтому точка O(0;0) – центр эллипса

2) $\frac{x^2}{a^2}\geq 0$ *и* $\frac{y^2}{b^2}\geq 0\Rightarrow$ $\frac{x^2}{a^2}\leq 1$ *и* $\frac{y^2}{b^2}\leq 1$

$$\left.\begin{array}{lll} x^2 \le a^2 & \Rightarrow & -a \le x \le a \\ y^2 \le b^2 & \Rightarrow & -b \le y \le b \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A_1(-a;0),\ A_2(a;0),\ B_1(0;-b),\ B_2(0;b)$$ - вершины эллипса.



Если $a > b$, *то* A_1A_2 – большая ось, $|A_1A_2| = 2a$

B_1B_2 – малая ось, $|B_1B_2| = 2b$

$A_1O,\ \ OA_2$ – большие полуоси, $|A_1O| = |OA_2| = a$

$B_1O,\ \ OB_2$ – малые полуоси, $|B_1O| = |OB_2| = b$

ОПР: *Эксцентриситетом* эллипса (ε) называют отношение длин полу фокусного расстояния (c) к большей полуоси (a). Эксцентриситет показывает степень деформации эллипса.

$\boxed{\varepsilon = \dfrac{c}{a}}$, $\quad \underline{\underline{0 < \varepsilon < 1}}$

Пример: Построить эллипс и найти его основные параметры по уравнению

$25x^2 + 16y^2 = 400 \quad | \ 400$

$\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

$a^2 = 16 \qquad |a| = 4$ – *малая полуось*

$b^2 = 25 \qquad |b| = 5$ – *большая полуось*

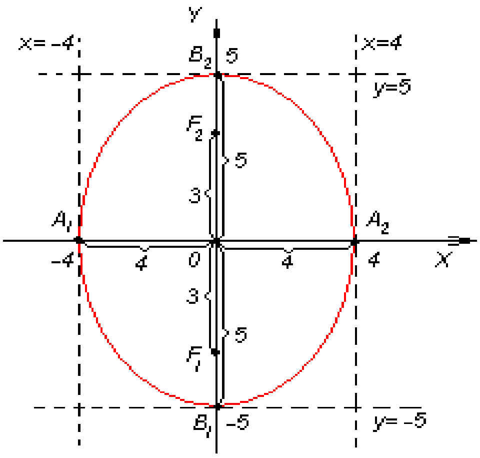
$c^2 = b^2 - a^2, \qquad$ *т.к.* $a < b$

$c^2 = 25 - 16 = 9 \qquad |c| = 3$

$F_1(0;-3),\quad F_2(0;3)$ – *фокусы эллипса*

$A_1(-4;0),\quad A_2(0;4),\quad B_1(0;-5),\quad B_2(0;5)$ – *вершины эллипса*

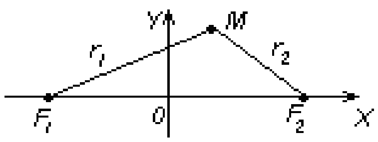
$\varepsilon = \dfrac{c}{b} \quad (a < b) \qquad \varepsilon = \dfrac{3}{5}$ – *эксцентрис итет эллипса*



3. Гипербола. Каноническое уравнение гиперболы, его исследование

ОПР: *Гиперболой* называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами.

Рассмотрим ПДСК:



Пусть $F_1(-c;0)$ *и* $F_2(c;0)$ – *фокусы гиперболы*

$OF_1 = OF_2$

Рассмотрим точку $M(x;y) \in$ *гиперболе*

$|F_1F_2| = 2c$ – *фокусное расстояние*

$\big|\,|MF_1| - |MF_2|\,\big| = const$

$|MF_1| + |MF_2| < |F_1F_2|$

Обозначим $const$ *за* $2a$

$2a < 2c \qquad \underline{\underline{a < c}}$

$\boxed{\big|\,|MF_1| - |MF_2|\,\big| = 2a}$ - геометрическое уравнение гиперболы.

Числа $|F_1M|$ u $|F_2M|$ называются ***фокальными радиусами*** точки М, обозначим их r_1 u r_2.

По определению точка М принадлежит гиперболе, если $|r_1 - r_2| = 2a \Rightarrow \quad r_1 - r_2 = \pm 2a$

$$\left.\begin{matrix} M(x;y) \\ F_1(-c;0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad |F_1M| = r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}$$

$$\left.\begin{matrix} M(x;y) \\ F_2(c;0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad |F_2M| = r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a$$

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2$$

$$\pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4cx - 4a^2 \quad |:4$$

$$a^2((x-c)^2 + y^2) = c^2x^2 - 2ca^2x + a^4$$

$$\underline{a^2x^2} + \underline{\underline{a^2c^2}} + a^2y^2 = \underline{\underline{a^4}} + \underline{c^2x^2}$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

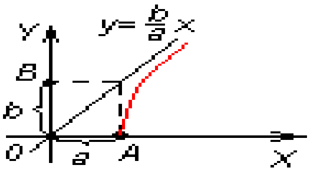
$$\underline{\underline{c^2 - a^2 = b^2}}, \quad m.k. \quad a < c \Rightarrow \quad c^2 - a^2 > 0 \Rightarrow \quad b > 0$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad |:a^2b^2$$

$\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$ - каноническое уравнение гиперболы, где $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$

Исследуем форму гиперболы в 1 четверти, т.е. $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1; \qquad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2); \qquad y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}; \quad m.k. \quad y \ge 0$$



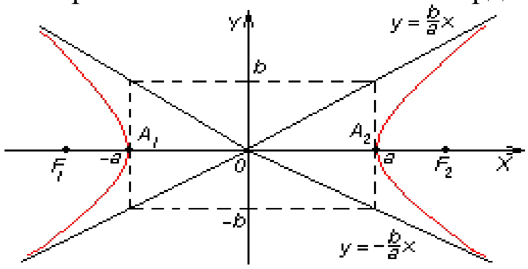
1) $x^2 - a^2 \ge 0; \qquad |x| > a; \qquad x \ge a \Rightarrow \quad 0 \le x < a$ – точек гиперболы нет.

2) Если $x=a$, то $\quad y = \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = 0;$ точка А(a ;0) принадлежит гиперболе.

3) Если $x>a$, то $y>0$, т.е. если x возрастает, то y – возрастает и наоборот.

4) Рассмотрим уравнение $y = \dfrac{b}{a}x$ - прямая, $k = \dfrac{b}{a}$ и проходит через точку O(0;0)

Можно доказать, что гипербола, простираясь в бесконечность, неограниченно приближается к прямой $y = \dfrac{b}{a}x$, но никогда её не пересекает. Т.к. x и y входят в уравнение параболы в четной степени, то график симметричен относительно осей координат. Достроим гиперболу.



$\boxed{y = \dfrac{b}{a}x}$ u $\boxed{y = -\dfrac{b}{a}x}$ - ***асимптоты гиперболы***

$A_1(-a;0), \quad A_2(a;0)$ – вершины гиперболы

$F_1(-c;0),\quad F_2(c;0)$ – фокусы гиперболы $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$

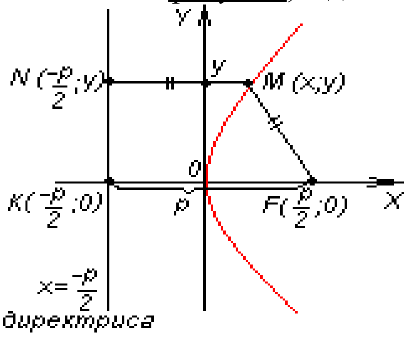
$A_1O,\quad OA_2$ – действительные полуоси, $|A_1O| = |OA_2| = a$

$B_1O,\quad OB_2$ – мнимые полуоси, $|B_1O| = |OB_2| = b$

Замечание: Уравнение гиперболы, асимптотами которой являются оси координат, имеет вид $\boxed{y = \dfrac{m}{x}}$, где m- некоторое действительное число.

4. Парабола. Каноническое уравнение параболы, его исследование

ОПР: *Параболой* называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой *фокусом*, и данной прямой, называемой *директрисой*.



$|FK| = p$

т. $M(x;y)$ - лежит на параболе

$\Rightarrow \boxed{|MN| = |MF|}$ – геометрическое уравнение параболы

Введем ПДСК так, чтобы ось OX проходила через точки K и F, а ось OY – через середину KF.

Тогда: $\boxed{F(\frac{p}{2};0)}$ - фокус $\quad K(-\frac{p}{2};0) \quad M(x;y), \quad N(-\frac{p}{2};y)$

$$\sqrt{(x+\frac{p}{2})^2 + (y-y)^2} = \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + (y-0)^2}$$

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2}$$

$\boxed{y^2 = 2px}$ - каноническое уравнение параболы, где p – параметр. Заметим, <u>*p>0*</u>, т.к. p – расстояние между фокусом и директрисой $\boxed{x = -\frac{p}{2}}$.

Исследование формы кривой:

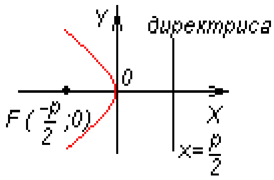
1) точка O(0;0) принадлежит параболе. $y^2 \geq 0,\ p > 0 \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow$ O(0;0) является вершиной параболы.

2) т.к. в уравнение параболы y входит в четной степени, то парабола симметрична относительно оси OX.

<u>*Частные случаи:*</u>

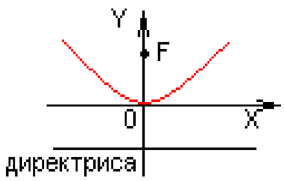
1) $y^2 = -2px$ - парабола с вершиной в точке O(0;0), ветви направлены влево, симметрична относительно оси OX.

$F(-\frac{p}{2};0)$ - фокус, $\quad x = \frac{p}{2}$ - директриса



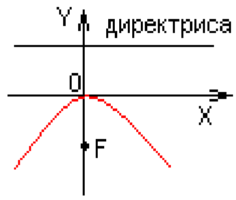
2) $x^2 = 2py$ - парабола с вершиной в точке O(0;0), ветви направлены вверх, симметрична относительно оси OY.

$F(0;\frac{p}{2})$ - фокус, $\quad y = -\frac{p}{2}$ - директриса



3) $x^2 = -2py$ - парабола с вершиной в точке O(0;0), ветви направлены вниз, симметрична относительно оси OY.

$F(0;-\frac{p}{2})$ - фокус, $y = \frac{p}{2}$ - директриса



Замечание: Уравнения вида $(y-y_0)^2 = \pm 2p(x-x_0)$ и $(x-x_0)^2 = \pm 2p(y-y_0)$ определяют параболу с вершиной в точке $C(x_0;y_0)$.

1.9 Лекция №9 (2 часа).

Тема: «Плоскость и прямая в пространстве»

1.9.1 Вопросы лекции:

1. Общее уравнение плоскости, его частные случаи.
2. Способы задания плоскости.
3. Уравнение прямой в пространстве.
4. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

1.9.2 Краткое содержание вопросов:

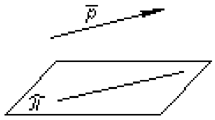
1. Общее уравнение плоскости, его частные случаи

ОПР: *Поверхностью* в пространстве называется множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению вида: $f(x,y,z) = 0$.

ТЕОРЕМА: Уравнение $Ax + By + Cz = 0$, где *A, B и C* – некоторые действительные числа (не обращаются одновременно в 0), задает в пространстве поверхность.

Обратное утверждение тоже верно: Любую поверхность в пространстве можно задать уравнением вида $Ax + By + Cz = 0$.

ОПР: *Направляющим вектором* $\vec{p}$ плоскости называется вектор, лежащий в этой плоскости или в плоскости, параллельной ей.



Замечание: Можно доказать, что направляющий вектор имеет координаты $\boxed{\vec{p} = (-B;A;0)}$

ТЕОРЕМА: Для того, чтобы вектор $\vec{p} = (\alpha;\beta;\gamma)$ был направляющим для плоскости $Ax + By + Cz = 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$

Расположение плоскости	Условие	Общее уравнение плоскости
1) Проходит через начало координат.	$D = 0$	$Ax + By + Cz = 0$
2) $\pi \parallel OX$	$A = 0$	$By + Cz + D = 0$
3) $\pi \parallel OY$	$B = 0$	$Ax + Cz + D = 0$
4) $\pi \parallel OZ$	$C = 0$	$Ax + By + D = 0$
5) π проходит через ось OX	$A = 0;\quad D = 0$	$By + Cz = 0$
6) π проходит через ось OY	$B = 0;\quad D = 0$	$Ax + Cz = 0$
7) π проходит через ось OZ	$C = 0;\quad D = 0$	$Ax + By = 0$
8) $\pi \parallel$ плоскости XOY	$A = 0;\quad B = 0$	$Cz + D = 0 \qquad (z = h)$
9) $\pi \parallel$ плоскости YOZ	$B = 0;\quad C = 0$	$Ax + D = 0 \qquad (x = h)$

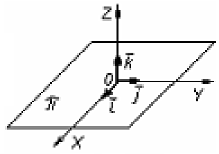
10) $\pi \parallel$ плоскости XOZ	$A=0;\quad C=0$	$By+D=0 \qquad (y=h)$
11) π совпадает с плоскостью XOУ	$A=0;\quad B=0;\quad D=0$	$Cz=0, \qquad z=0$
12) π совпадает с плоскостью УOZ	$B=0;\quad C=0;\quad D=0$	$Ax=0, \qquad x=0$
13) π совпадает с плоскостью XOZ	$A=0;\quad C=0;\quad D=0$	$By=0, \qquad y=0$

1) Точка O(0;0) $\in \pi \Rightarrow \quad A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot 0+D=0 \Rightarrow \quad D=0$

2) $\pi \parallel OX \Rightarrow \quad \vec{i}=(1;0;0) \parallel \pi \quad \Rightarrow \quad A\cdot 1+B\cdot 0+C\cdot 0=0 \Rightarrow \quad A=0$

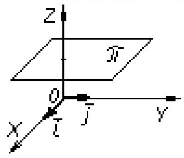
5) π проходит через ось OX $\Rightarrow \quad O(0;0;0) \in \pi \Rightarrow \quad D=0$

$\bar{i}=(1;0;0) \parallel \pi \quad \Rightarrow \quad A=0$



8) $\pi \parallel$ плоскости XOУ $\Rightarrow \quad \bar{i}=(1;0;0) \parallel \pi \quad \Rightarrow \quad A=0$

$\bar{j}=(0;1;0) \parallel \pi \quad \Rightarrow \quad B=0$



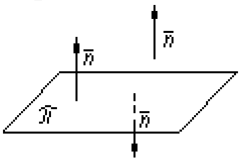
9) $\pi \equiv XOY \quad \Rightarrow \quad \vec{i}=(1;0;0) \parallel \pi \quad \Rightarrow \quad A=0, \quad \vec{j}=(0;1;0) \parallel \pi \quad \Rightarrow \quad B=0, \quad$ O(0;0) $\in \pi \Rightarrow \quad D=0$

2. Способы задания плоскости

Задание плоскости с помощью начальной точки и нормального вектора.

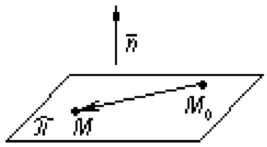
ОПР: Вектор $\vec{n}$ называется *нормальным вектором* плоскости, если он перпендикулярен этой плоскости.

Очевидно, что каждая плоскость имеет бесчисленное множество нормальных векторов, параллельных между собой.



ТЕОРЕМА: Если плоскость π задана общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, то вектор $\boxed{\vec{n}=(A;B;C)}$ является нормальным вектором плоскости π.

Рассмотрим ПДСК и в ней точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *и* $\vec{n}=(A;B;C)$. Составим уравнение плоскости, проходящей через данную точку с данным нормальным вектором.



Возьмем точку $M(x;y;z) \in \pi$. Рассмотрим вектор $\overline{M_0M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$

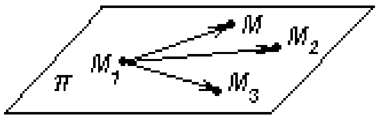
Т.к. $\overline{M_0M} \in \pi \quad \Rightarrow \quad \vec{n} \perp \overline{M_0M} \quad \Rightarrow \quad \overline{M_0M}\cdot\vec{n}=0$

Запишем в координатной форме: $\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Составим уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$,

Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x;y;z)$. Построим векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$



Тогда их координаты $\overrightarrow{M_1M}(x-x_1;y-y_1;z-z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_3}(x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1)$

Воспользуемся признаком компланарности векторов, получим:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0}$$ - уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.

Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей

- если $\pi_1 \parallel \pi_2 \iff \vec{n_1} \parallel \vec{n_2} \Rightarrow$ их координаты пропорциональны.

Если $\vec{n_1} = (A_1;B_1;C_1)$ *и* $\vec{n_2} = (A_2;B_2;C_2)$, то $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

- если $\pi_1 \perp \pi_2 \iff \vec{n_1} \perp \vec{n_2} \Rightarrow \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0 \Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

Расстояние от точки до плоскости

Расстояние от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ определяется по формуле:

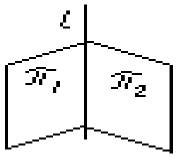
$$\boxed{d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

3. Уравнение прямой в пространстве

В пространстве каждая линия рассматривается как пересечение двух поверхностей. В частности, каждую прямую линию мы будем рассматривать как пересечение двух плоскостей.

1) Рассмотрим ПДСК и две плоскости: $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

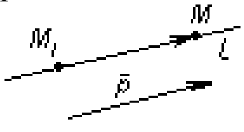
Если $\pi_1 \cap \pi_2$, то они пересекаются по прямой l. Заметим, что координаты точек, лежащих на прямой l, должны удовлетворять как первому, так и второму уравнению, поэтому:



$$\boxed{l: \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}}$$ - <u>общее уравнение прямой в пространстве</u>.

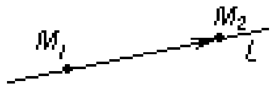
2) Для решения задач данное задание прямой не всегда удобно. Рассмотрим каноническое уравнение прямой.

Пусть дан направляющий вектор $\vec{p} = (\alpha;\beta;\gamma) \parallel l$ и точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$, принадлежащая прямой l.



Возьмем точку $M(x;y;z) \in l$. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x-x_0;y-y_0;z-z_0)$.

$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p} \;\;\Rightarrow$ их координаты пропорциональны. $\boxed{\dfrac{x-x_0}{\alpha}=\dfrac{y-y_0}{\beta}=\dfrac{z-z_0}{\gamma}}$ - <u>каноническое ур. пр</u>.



3) Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

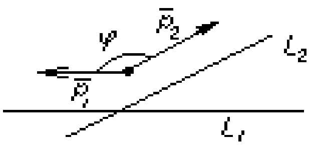
Пусть $M_1(x_1;y_1;z_1)\in l$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)\in l$. Пусть M_1 -начальная точка, $\overrightarrow{M_1M_2}$ -направляющий вектор.

$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$

$\boxed{\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}}$ - <u>уравнение прямой, проходящей через две точки</u>.

4) Угол между двумя прямыми в пространстве.

$l_1:\dfrac{x-x_1}{\alpha_1}=\dfrac{y-y_1}{\beta_1}=\dfrac{z-z_1}{\gamma_1}$ и $l_2:\dfrac{x-x_2}{\alpha_2}=\dfrac{y-y_2}{\beta_2}=\dfrac{z-z_2}{\gamma_2}$



<u>ОПР:</u> <u>*Углом*</u> между двумя прямыми называется угол между их направляющими векторами.

$\vec{p}_1=(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)$ и $\vec{p}_2=(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)$ $\boxed{\cos\varphi=\dfrac{\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2}{|\vec{p}_1|\cdot|\vec{p}_2|}=\dfrac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2}\cdot\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2}}}$

- Условие параллельности прямых:

$l_1\parallel l_2 \;\Leftrightarrow\; \vec{p}_1\parallel\vec{p}_2 \Rightarrow$ их координаты пропорциональны. $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}=\dfrac{\beta_1}{\beta_2}=\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}$

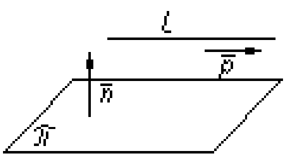
- Условие перпендикулярности прямых:

$l_1\perp l_2 \;\Leftrightarrow\; \vec{p}_1\perp\vec{p}_2 \Rightarrow \vec{p}_1\cdot\vec{p}_2=0 \Rightarrow \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0$.

4. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

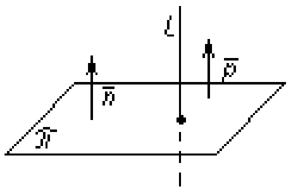
1) <u>*Условие параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.*</u>

$l:\dfrac{x-x_0}{\alpha}=\dfrac{y-y_0}{\beta}=\dfrac{z-z_0}{\gamma}$ и $\pi: Ax+By+Cz+D=0$



$l\parallel\pi \;\Leftrightarrow\; \bar{p}\perp\bar{n}\Rightarrow$

$\bar{p}\cdot\bar{n}=0,\quad \bar{p}=(\alpha;\beta;\gamma),\quad \bar{n}=(A;B;C)\Rightarrow\; \alpha A+\beta B+\gamma C=0$

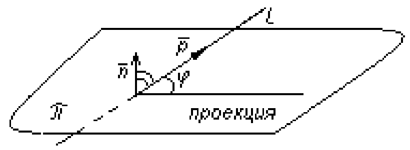


$l\perp\pi \;\Leftrightarrow\; \bar{p}\parallel\bar{n}\Rightarrow$ *их координаты пропорциональны*

$\dfrac{A}{\alpha}=\dfrac{B}{\beta}=\dfrac{C}{\gamma}$

2) <u>*Угол между прямой и плоскостью.*</u>

<u>ОПР:</u> <u>*Углом*</u> φ между прямой l и плоскостью π называется острый угол между прямой и её проекцией на плоскость.



$$\varphi = 90^0 - (\vec{n};^\wedge \vec{p}) \quad \Rightarrow \quad (\vec{n};^\wedge \vec{p}) = 90^0 - \varphi$$

$$\cos(\vec{n};^\wedge \vec{p}) = \cos(90^0 - \varphi) = \sin\varphi \qquad \vec{n} = (A;B;C), \quad \vec{p} = (\alpha;\beta;\gamma)$$

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{\alpha A + \beta B + \gamma C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}}$$

1.10 Лекция №10 (2 часа).
Тема: «Функция одной переменной»

1.10.1 Вопросы лекции:
1. Определение и основные понятия.
2. Элементарные функции.
3. Сложная функция. Обратная функция.
4. Некоторые функциональные зависимости, используемые в экономике.
5. Кривые спроса и предложения. Равновесная цена.

1.10.2 Краткое содержание вопросов:
1. Определение и основные понятия.
Понятие множества, подобно понятиям точки, числа и т.д., не сводится к другим понятиям математики и не определяется. Когда в математике говорят о множестве, то объединяют некоторые предметы или понятия в одно целое – множество, состоящее их этих предметов. Основатель теории множеств Георг Кантор (1845 –1918) выразил это следующими словами: «Множество есть многое, мыслимое, как единое». Предметы (объекты), составляющие некоторое множество, называются его **элементами**.
Множество иногда можно задать перечислением его элементов. Так, {1, 2, 3} обозначает множество, состоящее из чисел один, два, три и только из них.
Но не все же множества можно задать списком. Если множество содержит бесконечно много элементов, то такой список составить нельзя. Такое свойство называется **характеристическим свойством множества**.
Задание множества его характеристическим свойством применяется в геометрии. В геометрии множество точек, обладающих данным характеристическим свойством, часто называют **геометрическим местом точек с данным свойством**. Например, биссектриса угла есть геометрическое место точек плоскости, лежащих внутри этого угла и равноудаленных от его сторон.

Множество элементов, обладающих данным характеристическим свойством, обозначают так: пишут фигурные скобки, в них – обозначение элемента множества, после него – двоеточие, а потом – характеристическое свойство. Например, запись $A = \{x : -3 \le x \le 4\}$ означает, что множество *A* состоит из все чисел *x*, удовлетворяющих неравенству $-3 \le x \le 4$. А запись $A = \{M : F_1M + F_2M = 10\}$ означает, что множество *A* состоит из всех точек *M* плоскости, таких, что сумма расстояний F_1M и F_2M равна 10.

Множество, не имеющее ни одного элемента, называют пустым множеством. Примером может служить: множество точек пересечения двух параллельных прямых.

Расположение множеств.
Если каждый элемент множества B является в то же время элементом множества A, то говорят, что B – **подмножество** в A, и пишут $B \subset A$. Каждое непустое множество имеет по

крайней мере два подмножества: пустое множество Ø и само множество A. Таким образом, пустое множество является подмножеством любого множества.

Приведем примеры подмножеств:

а) числовой отрезок [–1, 3] есть подмножество числового отрезка [–4; 5];

б) множество всех квадратов есть подмножество множества всех прямоугольников;

Пересечение множеств

Пересечением множеств A и Bназывают новое множество X, содержащее те и только те элементы, которые входят и в множество A и в множество B.

Пересечение множеств A и B обозначают $A\bigcap B$ или AB. Например, если A – множество мальчиков, обучающихся в данной школе, а B – множество всех учеников из 8 класса, то $A\bigcap B$ – множество мальчиков, которые учатся в 8 классе.

С понятием пересечения множеств приходится иметь дело и в арифметике. Пусть A – множество натуральных делителей числа 72:

$$A =\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\},$$

а B – множество натуральных делителей числа 54:

$$B =\{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54\}$$

Тогда множество $A\bigcap B$ состоит из чисел 1, 2, 3, 6, 9, 18:

$$A\bigcap B =\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}.$$

Эти числа являются общими делителями для 72 и 54. Наибольший элемент множества $A\bigcap B$ равен 18. Это – **наибольший общий делитель** чисел 54 и 72. Множество делителей числа 72 конечно. А множество кратных этого числа бесконечно:

$$C = \{72, 144, 216, \dots , 72n, \dots\}.$$

Бесконечно и множество кратных числа 54:

$$D = \{54, 108, 162, 216, \dots , 54m, \dots\}.$$

Пересечением этих множеств является множество общих кратных для чисел 72 и 54:

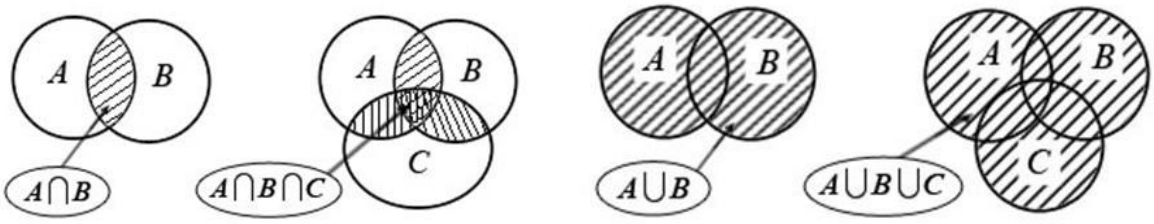
$$C\bigcap D = \{216, 432, \dots\}.$$

Наименьшее число в $C\bigcap D$, т.е. 216, называется **наименьшим общим кратным** для 72 и 54. Иногда приходится пересекать множества геометрических фигур. Например, множество всех квадратов является пересечением множества всех прямоугольников с множеством всех ромбов, т.к. квадрат – это фигура, являющаяся одновременно и прямоугольником, и ромбом. Пересечением множества всех треугольников с множеством всех правильных многоугольников является множество правильных треугольников.

Объединение множеств

Вообще, если задано несколько множеств A, B, … , N, … , то их **объединением называют множество X**, состоящее из тех и только тех элементов, которые входят хотя бы в одно из этих множеств. Объединение двух множеств A и B обозначают $A\bigcup B$.

Например, объединением числового отрезка [2: 6] и числового отрезка [4; 9] является числовой отрезок [2; 9]. При этом точки отрезка [4; 6] входят в оба отрезка, но в объединении их берут только один раз. Точно так же круг на рисунке 12 является объединением двух сегментов AMB и ANB. При этом точки хордыAB входят в оба сегмента.



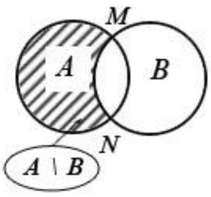
Вычитание множеств

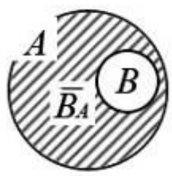
Разностью двух множеств *A* **и** *B* называют такое множество $X = A \setminus B$, в которое входят все элементы из *A*, не принадлежащие множеству *B*. При этом не предполагается, что множество *B* является частью множества *A*. Таким образом, при вычитании множества *B* из множества *A* из *A* удаляются пересечение *A* и *B*:

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B).$$

Например, если *A* – множество точек первого круга на рисунке 16, а *B* – множество точек второго круга, то и разностью является множество точек заштрихованной серповидной фигуры. При этом точки дуги *MN* удаляются из фигуры.

В случае, когда *B* – часть множества *A*, $A \setminus B$ **называют дополнением к** *B* **в множестве** *A* **и обозначают** $\overline{B'}_A$ (разумеется, одно и то же множество *B* может иметь разные дополнения в разных содержащих его множествах *A*) (рис. 17). Например, дополнением множества четных чисел в множестве всех целых чисел является множество нечетных чисел. Дополнением множества всех квадратов в множестве прямоугольников является множество всех прямоугольников с неравными сторонами. А дополнением того же множества квадратов в множестве всех ромбов является множество ромбов с неравными смежными углами.





<u>ОПР:</u> Пусть X и У – некоторые множества. <u>*Функцией*</u> называется зависимость, по которой каждому $x \in X$ ставится в соответствие единственное значение $y \in Y$.

<u>Обозначение:</u> $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = F(x)$ и т.д.

у – значение функции в точке х.

у – зависимая переменная, х – независимая переменная (аргумент).

Х – область определения функции, У –область значений функции

<u>ОПР:</u> Множество значений х, при которых функция существует, называется <u>*областью определения*</u> функции.

Область определения находится по соблюдению законности выполнения математических операций, входящих в формулу $f(x)$. Именно: подкоренное выражение в корне четной степени не отрицательно, знаменатель дроби не равен 0, выражение под знаком логарифма – положительно и т.д.

<u>Пример:</u> 1) $y = \log_2(x^2 - 5x + 6)$

ОДЗ: $x^2 - 5x + 6 > 0$. Корни: х=2 и х=3

$x \in (-\infty;2) \cup (3;+\infty)$

2) $y = \arcsin \frac{1}{x+2}$

ОДЗ: $-1 \le \frac{1}{x+2} \le 1$ и $x \ne -2$ Ответ: $x \in (-\infty; -3] \cup [-1; +\infty)$

<u>ОПР:</u> Функция, все значения которой равны между собой, называется <u>*постоянной*</u> (обозначается: $f(x) = C$).

<u>ОПР:</u> Функция $f(x)$, определенная на некотором множестве X, называется <u>*ограниченной*</u>, если существуют числа A и B такие, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $A \le f(x) \le \hat{A}$. В противном случае - <u>*неограниченной*</u>.

<u>Пример:</u> Функция $y = \sin x$ - ограничена на множестве R, т.к. $|\sin x| \le 1$ для $\forall x \in R$.

<u>ОПР:</u> Функция $y = f(x)$ называется <u>*четной*</u>, если для любых значений аргумента из области её определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

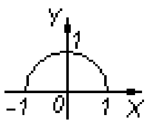
<u>ОПР:</u> Функция $y = f(x)$ называется <u>*нечетной*</u>, если для любых значений аргумента из области её определения выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Существует три основных способа задания функции:

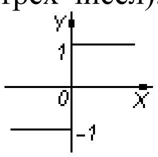
1) <u>Табличный способ.</u> В таблице по крайней мере одну из переменных принимают за независимую, другие величины являются функциями этого аргумента. Широко используется в бухгалтерской отчетности и банковской деятельности, статистических данных и т.д.

2) <u>Аналитический способ.</u> Состоит в задании связи между аргументом и функцией в виде формулы или набора формул.

<u>Пример:</u> 1) $y = \sqrt{1 - x^2}$. $[-1;1]$ - область определения функции, $[0;1]$ - область значений.



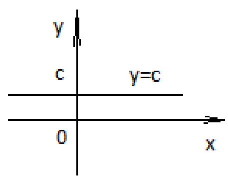
2) $y = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$. $(-\infty; +\infty)$ - область определения функции, -1,0,1 - область значений (состоит из трех чисел).



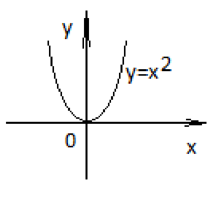
3) <u>Графический способ.</u> На плоскости функция изображается в виде <u>*графика*</u> – множество точек $(x; y)$, координаты которых связаны соотношением $y = f(x)$, называемым уравнением графика.

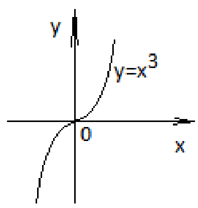
2. Графики основных элементарных функций.

<u>Классификация функций:</u>



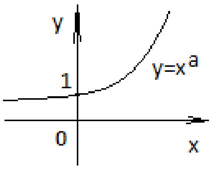
- $f(x) = C$ - постоянная функция $C = const$

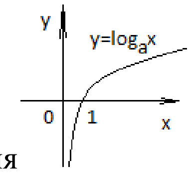




- x^{α}, $\alpha \in R$ - степенная функция

- $a^x, \quad a > 0$ - показательная функция





- $\log_a x, \quad a > 0, a \neq 1$ - логарифмическая функция
- $\sin x, \cos x, tgx, ctgx$ - тригонометрические функции
- $\arcsin x, \arccos x, arctgx, arcctgx$ - обратные тригонометрические функции

Данные функции являются *простейшими элементарными функциями*. Функции, полученные из простейших элементарных функций с помощью конечного числа арифметических действий, называются *элементарными функциями*.

3. Сложная функция. Обратная функция

ОПР: Если на некотором промежутке X определена функция $z = \varphi(x)$ с множеством значений Z и на множестве Z определена функция $y = f(z)$, то функция $y = f(\varphi(x))$ называется *сложной функцией* от x, а переменная z- промежуточной переменной сложной функции.

Пример: $y = \cos(\sqrt{1-x})$ - сложная функция

$y = f(z) = \cos z, \quad z = \varphi(x) = \sqrt{1-x}$ ОДЗ: $x \in (-\infty;1]$

ОПР: Пусть X и У – некоторые множества и задана функция $y = f(x)$, т.е. множество пар чисел *(x;y)*, в которых каждое число x входит в одну и только одну пару. Если в каждой паре поменять местами x и y, то получим множество пар чисел *(y;x)*, которое называется *обратной функцией* φ
к функции f $(x = \varphi(y).)$

4. Некоторые функциональные зависимости, используемые в экономике.

Функции находят широкое применение в экономической теории и практике. Спектр используемых в экономике функций весьма широк: от простейших линейных до функций, получаемых по определенному алгоритму с помощью так называемых рекуррентных соотношений, связывающих состояния изучаемых объектов в разные периоды времени.

Наиболее часто используются в экономике следующие функции:

1. *Функция полезности (функция предпочтений)* – в широком смысле зависимость полезности, т.е. результата, эффекта некоторого действия от уровня (интенсивности) этого действия.

2. *Производственная функция* – зависимость результата производственной деятельности от обусловивших его факторов.

3. *Функция выпуска* (частный вид производственной функции) – зависимость объёма производства от наличия или потребления ресурсов.

4. *Функция издержек* (частный вид производственной функции) – зависимость издержек производства от объема продукции.

5. *Функции спроса, потребления и предложения* – зависимость объёма спроса, потребления или предложения на отдельные товары или услуги от различных факторов (напр-р, цены, дохода и т.п.).

Уравнения СЛУЦКОГО [Slutsky equations] — уравнения, характеризующие количественные зависимости между изменением цен на отдельные товары и доходов потребителей, с одной стороны, и структурой покупательского спроса — с другой. Наиболее просто основное уравнение Слуцкого формулируется так:

Изменение спроса = эффект изменения дохода + эффект замещения

Левая часть представляет не что иное, как коэффициент эластичности спроса на товар $X \approx e_X$.

Первое слагаемое правой части можно представить как $k_X e_I$, где $k_X = XP_X/I \approx$ доля расходов на товар X в общих расходах покупателя I, а $e_I \approx$ коэффициент эластичности спроса на товар X по доходу.

Второе слагаемое правой части характеризует эластичность спроса на товар X при неизменном реальном доходе, обозначим ее коэффициент -

Таким образом, мы можем записать уравнение Слуцкого в коэффициентах эластичности:

$e_X = -kXeI + ex$

В то время как эффект замещения должен быть всегда отрицателен — противоположен направлению изменения цены, эффект дохода может действовать в обоих направлениях. Следовательно, общий эффект может быть положительным или отрицательным. Однако, в случае нормального товара эффект замещения и эффект дохода действуют в одном и том же направлении. Рост цены означает, что спрос сократится вследствие действия эффекта замещения. Поскольку мы рассматриваем ситуацию роста цены, это подразумевает снижение покупательной способности, что для нормального товара означает сокращение спроса.

С другой стороны, если мы рассматриваем товар низшей категории, может случиться так, что эффект дохода перевесит эффект замещения, так что общее изменение спроса, связанное с изменением цены, в действительности окажется положительным.

5. Кривые спроса и предложения. Равновесная цена.

Рассмотрим зависимость спроса D (demand) и предложения S (supply) от цены на товар P (price).

Чем меньше цена, тем больше спрос при постоянной покупательской способности населения. Обычно зависимость D от P имеет вид ниспадающей линии, например прямой:

$D = -aP + c, \quad a > 0, \quad c > 0 \quad (1)$

В свою очередь, предложение растет с увеличением цены на товар, и поэтому зависимость S от P имеет следующий характерную форму:

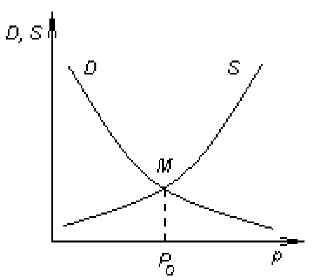
$S = bP + d, \quad b > 0, \quad d > 0 \quad (2)$

В формулах (1) и (2) *a, b, c, d* – так называемые экзогенные величины; они зависят от ряда других причин (благосостояние общества, политическая обстановка и т.п.). Переменные, входящие в формулы (1) и (2), положительны, поэтому графики функций имеют смысл только в первой координатной четверти.

Для экономики представляет интерес условие равновесия, т.е. равенство спроса и предложения; это условие задается уравнением

$D(P) = S(P)$

и соответствует точке M пересечения кривых D и S – это так называемая точка равновесия. Цена P_0, при которой выполнено это условие, называется *равновесной*.



При увеличении благосостояния населения, что соответствует росту величины c в формуле (1), точка равновесия M смещается вправо, т.к. кривая D поднимается вверх; при этом цена товара растет при неизменной кривой предложения S.

Рассмотрим простейшую задачу поиска равновесной цены. Это одна из основных поблеем рынка, означающая торг между производителем и покупателем (рис. 1,2,3).

Пусть сначала цену P_1 называет производитель (в простейшей схеме он же и продавец). Цена P_1 на самом деле выше равновесной (естественно всякий производитель стремится получить максимум выгоды из своего производства). Покупатель оценивает спрос D_1 при этой цене и определяет свою цену P_2, при которой этот спрос D_1 равен предложению. Цена P_2 ниже равновесной (всякий покупатель стремится купить подешевле). В свою очередь, производитель оценивает спрос D_2, соответствующий цене P_2, и определяет свою цену P_3, при которой спрос равен предложению; эта цена выше равновесной. Процесс торга продолжается и при определенных условиях приводит к устойчивому приближению к равновесной цене, т.е. к «скручиванию» спирали. Если рассматривать последовательность чисел, состоящую из называемых в процессе торга цен, то она имеет своим пределом равновесную цену P_0 (рис. 1). Следует заметить, что в данной схеме спираль торга скручивается, если $b < a$. В противном случае имеет место либо циркулирование по замкнутому циклу $(b = a)$ - рис. 2, либо «раскручивание» спирали и уход от равновесной цены $(b < a)$ - рис.3.

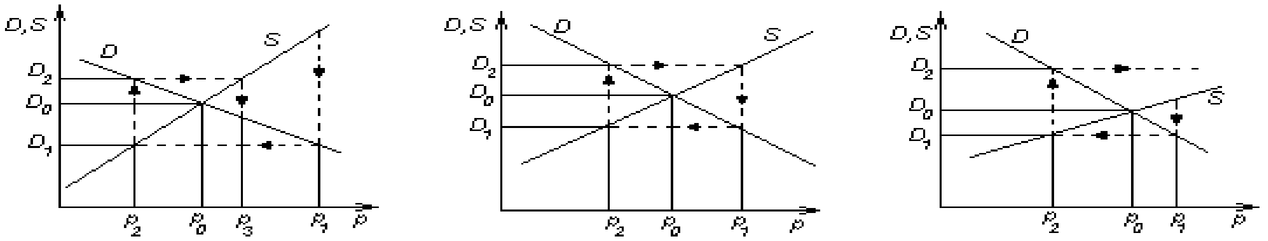


рис. 1 рис. 2 рис. 3

Поиск равновесной цены

1.11 Лекция №11 (2 часа).
Тема: «Числовые последовательности»

1.11.1 Вопросы лекции:

1. Понятие числовой последовательности. Предел числовой последовательности.
2. Основные свойства сходящихся последовательностей
3. Задача о непрерывном начислении процентов.

1.11.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие числовой последовательности. Предел числовой последовательности

С числовыми последовательностями мы уже встречались в средней школе – элементы арифметической и геометрической прогрессий, множества чисел: N: 1, 2, 3,… - натуральные числа; Z: …, -2, -1, 0, 1, 2,… - целые числа и т.д. Уточним и расширим понятие числовой последовательности.

<u>ОПР:</u> Если каждому натуральному числу n ставится в соответствие единственное число x_n, то занумерованное множество действительных чисел $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ называется <u>*числовой последовательностью*</u>.

где $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ - элементы (члены) последовательности

x_n - общий элемент (член) последовательности

<u>Обозначение:</u> $\{x_n\}$ - последовательность.

Пример: 1) Последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; ...; \frac{1}{n}; ...$

2) $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; ...$ $\qquad y_n = \frac{1}{2^n}$

ОПР: Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если существуют числа A и B, такие, что выполняется неравенство $A \le x_n \le B$.

ОПР *(по Коши)* : Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε существует такой номер N, что при всех $n>N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*.

Записывается: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$; $n \to \infty$.

Если предел последовательности не существует или равен ∞, то последовательность называется *расходящейся*.

Записывается: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Если при этом, начиная с некоторого номера, все члены последовательности положительны (отрицательны), то пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$).

ОПР: Последовательность, имеющая своим пределом 0 *(a=0)* , называется *бесконечно малой последовательностью*. (Обозначение: $\{\alpha_n\}$, α_n - элемент бесконечно малой последовательности)

$\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

Пример: 1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; ...; \frac{1}{n}; ...$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ - бесконечно малая последовательность

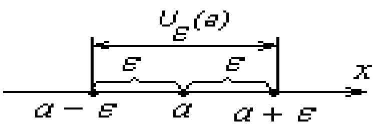
2) $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; ...$

$y_n = \frac{1}{2^n}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ - бесконечно малая последовательность

Приведем геометрическую интерпретацию этого определения:

ОПР: *ε - окрестностью точки a* называется множество чисел x_n, удовлетворяющих неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$.

Раскроем модуль: $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$; $\qquad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ $\quad$ èëè $\quad x_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$.



Обозначение: $U_\varepsilon(a)$

ОПР: Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε существует такой номер N, начиная с которого все элементы последовательности x_n с номерами $n>N$, попадут в ε - окрестность точки а.

Пример: Показать, используя определение предела последовательности, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

Решение: Возьмем $\forall\varepsilon>0$. Т.к. $|x_n-1|=\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}$, то чтобы выполнялось $|x_n-1|<\varepsilon$, достаточно решить неравенство $\frac{1}{n+1}<\varepsilon$, откуда получаем $n>\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$. Примем $N=\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right]$ (символ $[a]$ означает целую часть числа a, т.е. наибольшее число, не превосходящее a), получим:

$\forall\varepsilon>0$ $\exists$ номер $N=\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right]$, что при всех $n>N$ выполняется неравенство $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

Пример: Показать, что последовательность $\{x_n\}=(-1)^n$ или -1, 1, -1, 1,… не имеет предела.

Решение: Какое бы число мы ни предложили в качестве предела, 1 или -1, при $\varepsilon<0{,}5$ неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$ не выполняется. Вне ε - окрестности этих чисел остается бесконечно большое число элементов x_n, т.к. все элементы с нечетными номерами равны -1, а элементы с четными номерами равны 1.

2. Основные свойства сходящихся последовательностей

ТЕОРЕМА 1: Если все элементы бесконечно малой последовательности $\{x_n\}$ равны одному и тому же числу *c*, то *c=0.*

ТЕОРЕМА 2 *(Теорема о единственности предела)*: Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

ТЕОРЕМА 3: Сходящаяся последовательность ограничена.

ТЕОРЕМА 4: Сумма (разность) сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен сумме (разности) пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

ТЕОРЕМА 5: Произведение сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен произведению пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

ТЕОРЕМА 6: Частное двух сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен частному пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, при условии, что $\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq0$.

ТЕОРЕМА 7: Если $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, причем начиная с некоторого номера выполняется неравенство $x_n\geq b$ $(x_n\leq b)$, то $a\geq b$ $(a\leq b)$.

ТЕОРЕМА 8: Произведение бесконечно малой последовательности и ограниченной последовательности или числа есть бесконечно малая последовательностью

ТЕОРЕМА 9: Произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

ТЕОРЕМА: Если $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, то последовательность $\{\alpha_n\}=\{x_n-a\}$ есть бесконечно малая, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-a)=0$.

Доказательство:

1) необходимость: дано: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$; доказать: $\{\alpha_n\}=\{x_n-a\}$ есть бесконечно малая.

Рассмотрим разность $x_n-a=\alpha_n$

Рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n - \lim\limits_{n\to\infty} a = a - a = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0 \Rightarrow \{\alpha_n\}$ -бесконечно малая.

2) достаточность: дано: $\{\alpha_n\}=\{x_n - a\}$ есть бесконечно малая, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$. доказать: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

Рассмотрим разность $\alpha_n = x_n - a \Rightarrow x_n = \alpha_n + a$

Рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n + a) = \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n + \lim\limits_{n\to\infty} a = 0 + a = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Рассмотрим применение этих свойств на примерах.

<u>Пример 1:</u> Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+2n+4}{4n^2+n-3}$.

Решение: При $n\to\infty$ числитель и знаменатель дроби $\to\infty$, т.е. применять сразу теорему о пределе частного нельзя. Вынесем за скобку n^2 в числителе и знаменателе дроби и сократим.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+2n+4}{4n^2+n-3} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(2+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2})}{n^2(4+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2})} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}4+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}} = \frac{2+0+0}{4+0-0} = \frac{1}{2}$$

<u>Пример 2:</u> Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}\cos n}{n+1}$.

Решение: При $n\to\infty$ числитель и знаменатель дроби $\to\infty$. Вынесем за скобку n в числителе и знаменателе дроби и сократим.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cos n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\frac{1}{\sqrt{n}}\cos n}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}}\cos n)}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

<u>Пример 3:</u> Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

Решение: При $n\to\infty$ оба слагаемых $\to\infty$. Поэтому применять сразу теорему о пределе суммы (разности) нельзя. Умножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное выражение $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\lim\limits_{n\to\infty}1} = \frac{0}{1+1} = 0$$

Число *e*

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, общий член которой выражается формулой $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

В курсе математического анализа доказывается, что эта последовательность *монотонно возрастает*, ограничена $(x_n < 3)$ и имеет предел. Этот предел называют числом e.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$$

Число e является иррациональным; его приближенное значение: $e = 2{,}7182818...$

<u>Пример:</u> Найти предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{5n}\right)^n$

3. Задача о непрерывном начислении процентов

Пусть Q_0 ден. ед. – первоначальный взнос в банк, $p\,\%$ - годовые проценты. Найти размер вклада Q_t через t лет.

При использовании *простых процентов* размер вклада ежегодно будет увеличиваться на одну и ту же величину $\frac{Q_0}{100}\cdot p$, т.е.

$Q_1 = Q_0 + \frac{Q_0}{100}p = Q_0(1+\frac{p}{100})$ - размер вклада чрез 1 год.

$Q_2 = Q_0 + \frac{Q_0}{100}p + \frac{Q_0}{100}p = Q_0(1+\frac{2p}{100})$ - размер вклада чрез 2 года. И т.д.

$\boxed{Q_t = Q_0(1+\frac{t\,p}{100})}$ - размер вклада через t лет (простые проценты)

На практике чаще мы имеем дело со *сложными процентами*. В этом случае размер вклада ежегодно будет увеличиваться в одно и то же число раз $\left(1+\frac{p}{100}\right)$.

$Q_1 = Q_0(1+\frac{p}{100})$, $Q_2 = Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$, … , $\boxed{Q_t = Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^t}$ - размер вклада через t лет (сложные проценты)

Если начислять проценты по вкладам не один раз в году, а n раз, то при том же ежегодном приросте $p\,\%$, процент начисления за $\frac{1}{n}$ - ую часть года составит $\frac{p}{n}\%$, а размер вклада за t лет при $n\cdot t$ начислениях составит $\boxed{Q_t = Q_0\left(1+\frac{p}{100\,n}\right)^{nt}}$ - размер вклада через t лет, если начисления производятся n раз в году.

Будем полагать, что проценты по вкладу начисляются каждое полугодие (*n=2*), ежеквартально (*n=4*), ежемесячно (*n=12*), каждый день (*n=365*), каждый час (*n=8760*) и т.д. непрерывно ($n\to\infty$). Тогда размер вклада за t лет составит

$$Q_t = \lim_{n\to\infty}\left(Q_0\left(1+\frac{p}{100\,n}\right)^{n2}\right) = Q_0\lim_{n\to\nabla\infty}\left(1+\frac{p}{100\,n}\right)^{nt} = \begin{bmatrix} \frac{p}{100\,n}=\frac{1}{x} & n\to\infty \Rightarrow x\to\infty \\ px=100n \Rightarrow & n=\frac{px}{100}\end{bmatrix} =$$

$$= Q_0\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{pxt}{100}} = Q_0\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^{\frac{pt}{100}} = Q_0e^{\frac{pt}{100}}$$

Итак, $\boxed{Q_t = Q_0e^{\frac{pt}{100}}}$ - показательный закон роста (при *p>0*) или убывания (при *p<0*).

Эта формула используется при непрерывном начислении процентов.

Пример: Прирост населения страны составляет 3% в год. Через сколько лет население страны удвоится?

Решение: $2Q_0 = Q_0e^{\frac{3t}{100}} \;\Rightarrow\; t=\frac{100\ln 2}{3}\approx 23$ года.

1.12 Лекция №12 (2 часа).
Тема: «Предел функции»

1.12.1 Вопросы лекции:
1. Предел функции в точке и на бесконечности. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.
2. Теоремы о пределах функций.
3. Раскрытие неопределенностей.
4. Два замечательных предела.
5. Эквивалентные бесконечно малые и их использование при вычислении пределов.
6. Левый и правый пределы функции.

1.12.2 Краткое содержание вопросов:
1. Предел функции в точке и на бесконечности. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором множестве X. Пусть $a \in X$ - некоторый элемент множества X. Возьмем из X последовательность чисел, отличных от a и сходящихся к a.

(1) $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ... \to a$

Тогда значения функции $f(x)$ в этих точках тоже образуют последовательность

(2) $f(x_1), f(x_2), f(x_3), ..., f(x_n), ...$

<u>ОПР:</u> Число A называется <u>*пределом функции*</u> $f(x)$ в точки a (или пределом функции при $x \to a$), если для любой сходящейся к a последовательности (1) значений аргумента, отличных от a, соответствующая последовательность значений функции (2) сходится к числу A.

$$A = \lim_{x\to a} f(x), \quad \text{если} \quad \forall \{x_n\}, n \in N: \left.\begin{array}{l} 1)\ \{x_n\} \in X \\ 2)\ x_n \neq a \\ 3)\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

<u>Пример:</u> 1) $f(x) = C = const$ Найти: $\lim\limits_{x\to a} C$

$\{x_n\} \in R: \quad x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ... \to a$

$\{f(x_n)\}: \quad C, C, C, ... \to C \qquad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\lim\limits_{x\to a} C = C}}$

2) $f(x) = x$ Найти: $\lim\limits_{x\to a} x$

$\{x_n\} \in R: \quad x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ... \to a$

$\{f(x_n)\}: \quad x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ... \to a$ Т.е. последовательности тождественны и $\Rightarrow \underline{\underline{\lim\limits_{x\to a} x = a}}$

3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 2}{2x - 1}$ Найти: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Возьмём $\forall$ послед-ть аргумента, сходящуюся к 0: $\{x_n\} \in R: \ x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ... \to 0$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 - 4x_n + 2}{2x_n - 1} = \frac{(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)^2 - 4(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) + 2}{2(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) - 1} = \frac{0 - 0 + 2}{0 - 1} = -2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 4x + 2}{2x - 1} = -2$$

Кроме понятия предела функции в точке, существует также и понятие предела функции при $x \to \infty$. Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$. Эта функция имеет предел при $x \to \infty$, равный нулю. Действительно:

$\{x_n\} \in R: \quad x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ... \quad \to \infty$

$\{f(x_n)\}: \quad \frac{1}{x_1}; \frac{1}{x_2}; ...; \frac{1}{x_n}; ... \quad \to 0$ Т.е. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

ОПР: Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой функцией* (или просто бесконечно малой) в точке $x = a$, если предел ее в этой точке равен нулю: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$

Аналогично определяются бесконечно малые функции при $x \to \infty$, $x \to \pm\infty$, $x \to a+$, $x \to a-$

ТЕОРЕМА: Алгебраическая сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций в точке a, как и произведение бесконечно малой и ограниченной функций, являются бесконечно малыми функциями в точке a.

ОПР: Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой функцией* (или просто бесконечно большой), если для любой сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции является бесконечно большой.

В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ ($\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$) и говорят, что функция имеет в точке a бесконечный предел

ТЕОРЕМА: Произведение бесконечно большой на функцию, предел которой $\neq 0$, есть беск. больш.

Сумма беск. больш. и ограниченной функций есть функция бесконечно большая. Частное от деления беск. больш. на функцию, имеющую предел, есть функция беск. большая.

ТЕОРЕМА: Для того, чтобы функция $f(x)$ была бесконечно большой в точке a необходимо и достаточно, чтобы обратная функция $\frac{1}{f(x)}$ была бесконечно малой в этой точке a.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$$

2. Теоремы о пределах функций

ТЕОРЕМА 1: Функция $f(x)$ имеет в точке a предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют левый и правый пределы, причем они равны. В таком случае предел функции равен односторонним пределам.

ТЕОРЕМА 2: Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке a пределы A и B. Тогда функции $f(x) \pm g(x),\quad f(x) \cdot g(x) \quad и \quad \frac{f(x)}{g(x)} \; (B \neq 0)$ имеют в точке a пределы, равные, соответственно $A \pm B,\; AB \quad и \quad \frac{A}{B}$.

Заметим, что теорема 2 справедлива и в тех случаях, когда a является ∞ ($+\infty$ или $-\infty$).

ТЕОРЕМА 3: Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ определены в некоторой окрестности точки a, причем $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A$ и выполняется неравенство $f(x) \le g(x) \le h(x)$, тогда $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

ТЕОРЕМА 4: Постоянный множитель можно вынести за знак предела $\lim\limits_{x\to a} C\cdot f(x) = C\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

ТЕОРЕМА 5: Предел от элементарной функции равен значению функции от предела выражения, стоящего под знаком функции.

Другими словами, для непрерывной функции знак функции и знак предела можно поменять местами. В частности, предел степени для элементарной функции равен степени предела $\lim\limits_{x\to a} f^{\,m}(x) = (\lim\limits_{x\to a} f(x))^m$.

3. Раскрытие неопределенностей

Зачастую вычисление пределов связано с простыми приемами: разложением числителя и знаменателя на множители, делением числителя и знаменателя на степень x и т.д. Может оказаться, что при отыскании предела частного двух функций $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to a$, числитель и знаменатель стремятся к 0 или числитель и знаменатель стремятся к ∞. В таком случае говорят, что дробь при $x \to a$ представляет собой *неопределенность* вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, а нахождение предела дроби называют *раскрытием неопределенности*.

Пример 1: Найти предел

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-3x+2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-4}{x-2} = 3$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2+3x+2} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2(1+\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2})} = \dfrac{1+0}{1+0+0} = 1$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x^2+5} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\frac{2}{x}}{x^2(1+\frac{5}{x})} = \dfrac{0}{1+0} = 0$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-2x+1}{x^2+5} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3(5-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3})}{x^3(\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3})} = \dfrac{5}{0} = \infty$

Предел обратной дроби =0 $\Rightarrow$ предел данной дроби $=\infty$

Правило: При $x \to \infty$, если имеем:

1) степень числителя и знаменателя равны, то значение предела равно отношению коэффициентов при наибольших степенях.
2) степень числителя больше степени знаменателя, то предел равен ∞.
3) степень числителя меньше степени знаменателя, то предел равен 0.

Другие виды неопределенности: $(\infty-\infty)$, (1^∞) и т.д.

Пример 2: Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})$

Здесь следует умножить и разделить выражение под знаком предела на сопряжённое выражение – в данном случае на $(\sqrt{x+3}+\sqrt{x})$.

$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+3-x}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} = \dfrac{3}{\infty} = 0$

4. Два замечательных предела

Данные пределы наиболее широко используются в математике и её приложениях.

ТЕОРЕМА: Предел функции $\frac{\sin x}{x}$ в точке x=0 существует и равен единице

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$ - *первый замечательный предел.*

Пример: Найти предел

а) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{5x}\frac{5}{3}=\lim_{5x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\lim_{x\to 0}\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$

б) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}=\lim_{5x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2=\frac{1}{2}1^2=\frac{1}{2}$

ТЕОРЕМА: Предел функции $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при $x\to\infty$ существует и равен e, т.е.

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e}$$ - *второй замечательный предел.*

Обозначим $\frac{1}{x}=\alpha$ - является бесконечно малой при $x\to\infty$, т.е. $\alpha\to 0$. Тогда

$$\boxed{\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e}$$

Число e является одной из фундаментальных величин в математике. Показательная функция вида e^{ax} называется *экспонентой.*

Пример: Найти предел

а) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^x=\left(1^\infty\right)=\begin{bmatrix}x=4y\\ x\to\infty\Rightarrow y\to\infty\end{bmatrix}=\lim_{y\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right)^4=e^4$

б) $\lim_{x\to 0}\frac{\log_3 1+x)}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\log_3(1+x)\right)=\lim_{x\to 0}\log_3(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_3\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\log_3 e=\frac{1}{\ln 3}$

5. Эквивалентные бесконечно малые и их использование при вычислении пределов

ОПР: Если функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ определены в некоторой окрестности $U_\varepsilon(a)$, являются бесконечно малыми в точке a, причем $\beta(x)\neq 0$ для $\forall x\in U_\varepsilon(a)$ и выполняется неравенство $\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными* между собой *бесконечно малыми* функциями в точке a.

Обозначение: $\alpha(x)\sim\beta(x)$

1) $\boxed{\sin x\sim x}$ при $x\to 0$, т.к. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1 \Rightarrow \boxed{\ln(1+x)\sim x,\quad x\to 0}$

3)

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x\ln a}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{matrix}a^x-1=y\\ x\to 0\Rightarrow y\to 0\\ x=\log_a(1+y)\end{matrix}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\frac{\ln(1+y)}{\ln a}\ln a}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}}=\frac{1}{\ln e}=1\Rightarrow\boxed{\begin{matrix}a^x-1\sim x\ln a,\quad x\to 0\\ e^x-1\sim x,\ x\to 0\end{matrix}}$$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{\alpha x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha\ln(1+x)}{\alpha x}=1 \;\Rightarrow\; \boxed{(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x,\quad x\to 0}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=1 \;\Rightarrow\; \boxed{1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\quad x\to 0}$

Пример:

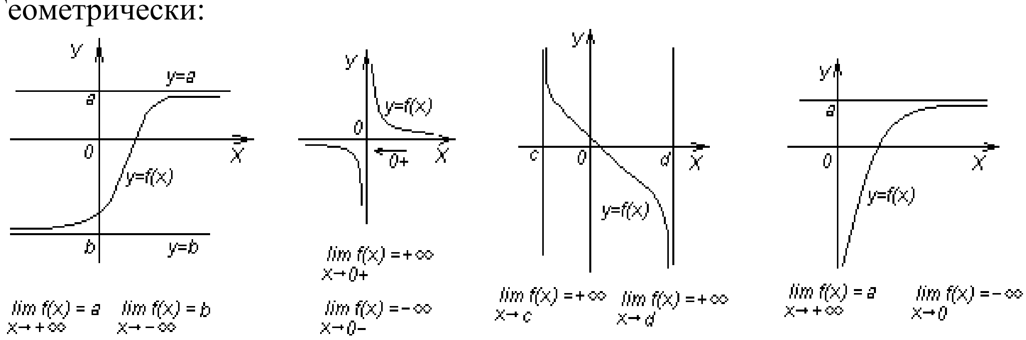
1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a^{\sin x}-1)x}{1-\cos x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{l} a^{\sin x}-1\sim\sin x\ln a, \\ m.k.\ \sin x\to 0,\ npu\ x\to 0 \end{array}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin x\ln a}{\frac{1}{2}x^2}=2\ln a\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=2\ln a$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{3}}-1}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}x}{x}=\dfrac{1}{3}$

6. Левый и правый пределы функции

Введем понятие односторонних пределов функции, когда вся последовательность значений аргумента $\{x_n\}$: $x_n\to a$ расположена слева от точки a (*левый предел*), либо справа от неё (*правый предел*). Т.е. либо $x_n<a$, либо $x_n>a$ при всех n. Для правого (левого) предела функции используется символическая запись $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=A$ $\left(\lim\limits_{x\to a-}f(x)=A\right)$.

Геометрически:



Пример:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty;\qquad \lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty;$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}=e^{+\infty}=+\infty;\qquad \lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}=e^{-\infty}=\dfrac{1}{e^{+\infty}}=\dfrac{1}{\infty}=0$

1.13 Лекция №13 (2 часа).

Тема: «Непрерывные функции. Асимптоты графика функции»

1.13.1 Вопросы лекции:

1. Непрерывность функции в точке и на интервале.
2. Точки разрыва. Классификация точек разрыва.
3. Асимптоты графика функции: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

1.13.2 Краткое содержание вопросов:

1. Непрерывность функции в точке и на интервале. Свойства непрерывных функций.

Понятие непрерывности функции является одним из основных понятий математического анализа.

ОПР: Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она удовлетворяет следующим трём условиям: 1) $f(x)$ определена в точке x_0 (т.е. существует $f(x_0)$)

2) существует конечный предел в точке x_0 $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)$

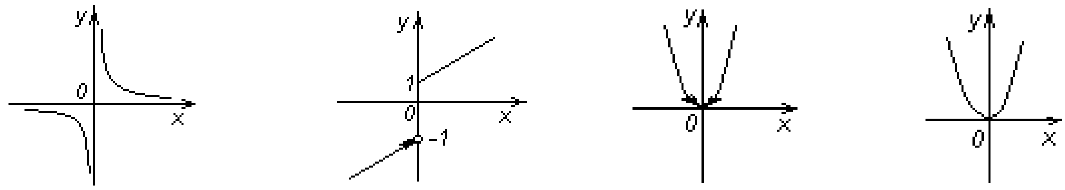
3) этот предел равен значению функции в точке x_0 $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\right)$

Наряду с данным определением непрерывности, рассматривают одностороннюю непрерывность.

ОПР: Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если существуют конечные пределы функции справа $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ и слева $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0)$.

Пример: Исследовать непрерывность в точке $x = 0$ заданных функций

а) $y = \dfrac{1}{x}$; б) $y = \begin{cases} x+1, & x \ge 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$; в) $y = \begin{cases} x^2, & x \ne 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$; г) $y = x^2$



Решение:
а) Функция $f(x)$ в точке $x = 0$ не является непрерывной, т.к. нарушено первое условие – существование $f(0)$ (см. рис. а).
б) Первое условие непрерывности выполнено (существует $f(0)=1$). Второе условие нарушено, т.к. предел функции слева $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -1$ и справа $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1$, а общего предела функции при $x \to 0$ не существует (см. рис. б). Значит, функция не является непрерывной в точке $x = 0$.
в) Существует $f(0)=1$ и конечный предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, но нарушено третье условие $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \ne f(0)$.
г) Функция $f(x)$ в точке $x = 0$ непрерывна, т.к. выполнены все условия непрерывности $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$ (см. рис. г).

Свойства функций непрерывных в точке: Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то их сумма $f(x)+g(x)$, произведение $f(x)\cdot g(x)$ и частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (при условии $g(x_0) \ne 0$) являются непрерывными в точке x_0.

ОПР: Функция $f(x)$ называется *непрерывной на интервале* $(a;b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a;b]$, если она непрерывна в интервале $(a;b)$ и непрерывна в точке a справа, а в точке b слева: $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = f(b)$.

2. Точки разрыва. Классификация точек разрыва

Точка, в которой не выполняется условие непрерывности, называется *точкой разрыва.*

Пусть точка x_0 - точка разрыва

ОПР: Точка x_0 называется *точкой разрыва I рода*, если существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$.

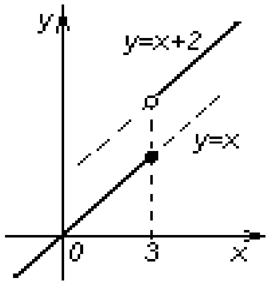
При этом: 1) если $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$, то точка x_0 называется *устранимым разрывом I рода*.

2) если $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$, то - *разрыв со скачком*. Длина скачка определяется модулем разности значений односторонних пределов в точке x_0.

ОПР: Точка x_0 называется *точкой разрыва II рода*, если по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен $\pm\infty$.

Пример: Построить график функции и исследовать данную функцию на непрерывность.

1) $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 3 \\ x+2, & x > 3 \end{cases}$



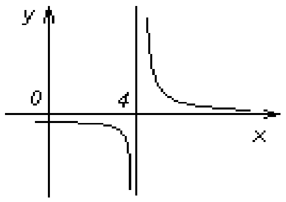
$\lim\limits_{x \to 3-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3-} x = 3$

$\lim\limits_{x \to 3+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3+} (x+2) = 3+2 = 5$

$3 \neq 5 \Rightarrow$ *x=3 - разрыв 1 рода со скачком*
длина скачка |5–3|=2

2) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-4}$

$f(x)$ не определенна в точке x=4.



$\lim\limits_{x \to 4-} \dfrac{x+2}{x-4} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 4+} \dfrac{x+2}{x-4} = +\infty$

$\Rightarrow$ *x=4 - разрыв 2 рода*

3. Асимптоты графика функции: вертикальные, горизонтальные и наклонные

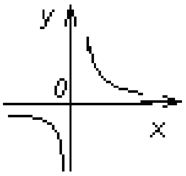
Пусть дана функция $f(x)$. При исследовании функции на бесконечности, т.е. при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$ или вблизи точек разрыва II рода, часто оказывается, что график функции сколь угодно близко приближается к той или иной прямой. Такие прямые называются *асимптотами*.

ОПР: Пряма линия называется *асимптотой* для кривой $y = f(x)$, если расстояние d от точки *M*, лежащей на кривой до прямой стремится к 0 при удалении точки M от начала координат в бесконечность.

Существует три вида асимптот: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

ОПР: Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

Пример: $y = \dfrac{1}{x}$



$$\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}=-\infty$$
$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=+\infty$$
$\Rightarrow$ *$x=0$ вертикальная асимптота*

Сравним с определением точки разрыва II рода. Значит, если в точке a функция $y=f(x)$ терпит разрыв II рода, то прямая $x=a$ является вертикальной асимптотой.

<u>ОПР:</u> Если $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} f(x)=A$, то прямая $y=A$ называется <u>*горизонтальной асимптотой*</u> графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$).

<u>Пример:</u> $y=\dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\dfrac{1}{x}=0 \quad\Rightarrow\quad y=0$ - горизонтальная асимптота.

<u>ОПР:</u> Если существуют такие числа k и b, что $\boxed{k=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\dfrac{f(x)}{x}}$, $\boxed{b=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}(f(x)-kx)}$, то прямая $y=kx+b$ называется <u>*наклонной асимптотой*</u> графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$).

Практически целесообразно искать асимптоты в следующем порядке:
1) вертикальные асимптоты
2) горизонтальные асимптоты
3) наклонные асимптоты

<u>Пример:</u> Найти асимптоты графика функции $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x}$

1) Вертикальные асимптоты. Точка $x=0$ - точка разрыва II рода

$\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x^2+2x-3}{x}=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{x^2+2x-3}{x}=+\infty \quad\Rightarrow\quad x=0$ - разрыв второго рода

$\Rightarrow\quad x=0$ - вертикальная асимптота.

2) Горизонтальные асимптоты.

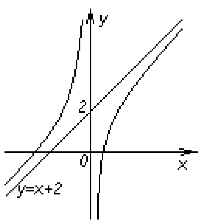
$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\dfrac{x^2+2x-3}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}(x+2-\dfrac{3}{x})=\begin{matrix}+\infty\\(-\infty)\end{matrix} \quad\Rightarrow$ горизонтальных асимптот нет.

3) Наклонные асимптоты. $y=kx+b$

$$k=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{x^2+2x-3}{x^2}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2})=1$$

$$b=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}(f(x)-kx)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\left(\frac{x^2+2x-3}{x}-x\right)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{2x-3}{x}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}(2-\frac{3}{x})=2$$

$\Rightarrow\quad y=x+2$ - наклонная асимптота

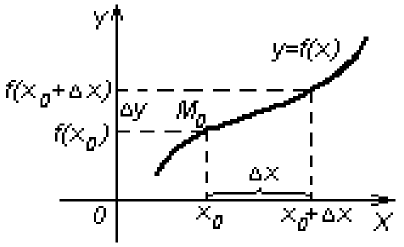


x	-1	-2	1	2
y	4	1,5	0	2,5

1.14 Лекция №14 (2 часа).
Тема: «Производная функции»

1.14.1 Вопросы лекции:
1. Геометрический, механический и экономический смысл производной.
2. Правила дифференцирования.
3. Дифференцирование сложной и обратной функций.
4. Дифференцирование показательно - степенной функции.
5. Производная неявной функции.
6. Производные высших порядков.

1.14.2 Краткое содержание вопросов:
1. Геометрический, механический и экономический смысл производной Коэффициент эластичности.
Пусть функция $f(x)$ определена на некотором промежутке X и точка $x_0 \in X$.



Возьмем точку $M_0(x_0; f(x_0))$, принадлежащую графику функции $y = f(x)$. Зададим аргументу x в точке x_0 произвольное приращение Δx такое, что значение $x_0 + \Delta x$ принадлежит *X.* Новому значению аргумента $x_0 + \Delta x$ соответствует значение функции *f(* $x_0 + \Delta x$). Приращению аргумента Δx будет соответствовать приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

<u>ОПР:</u> <u>*Производной*</u> функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, когда приращение аргумента $\Delta x \to 0$ (при условии, что этот предел существует).
<u>Обозначение:</u> $y', y'(x), f'(x)$ и т.д.

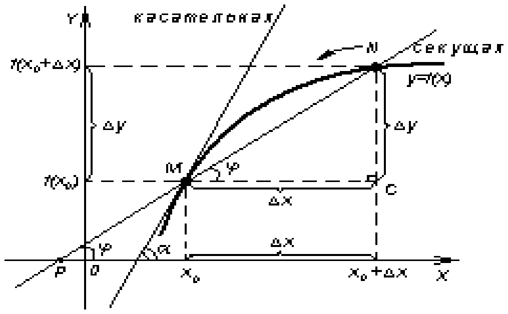
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

<u>Пример:</u> Найти производную функции $f(x) = x^3$ в точке *x=2.*

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0{}^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^3 + 3x_0^2 \Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + (\Delta x)^2) =$$
$$= 3x_0{}^2 + 0 + 0 = 3x_0^2$$
$$y'(2) = 12$$

<u>*1) Геометрический смысл производной*</u>

Пусть задана функция $y = f(x)$, определенная на промежутке *X.*



Возьмем любую точку $M(x_0; f(x_0))$ принадлежащую графику функции. Зададим приращение аргумента Δx. Получим новую точку $N(x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x))$.

Проведем секущую MN. Обозначим $\angle XPN = \varphi$.

Будем приближать точку N к точке M, двигаясь по кривой, тогда положение секущей будет меняться. Когда точки N и M совместятся, секущая превратится в касательную.

В этом случае: если $M \to N$, то $\Delta x \to 0$, $\angle\varphi \to \angle\alpha$, т.е. $\lim\limits_{N\to M}\varphi = \alpha$, где α - угол наклона касательной к оси Ox.

Найдем $tg\varphi$. Проведем дополнительные построения: $MC \parallel Ox$, ΔMCN - прямоугольный: $\angle CMN = \varphi$.

$$tg\varphi = \frac{NC}{MC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (*)$$

$\lim\limits_{\substack{N\to M \\ (\Delta x\to 0)}} \varphi = \alpha$. Рассмотрим $\lim\limits_{\Delta x\to 0} tg\varphi = tg(\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varphi) = tg\alpha \qquad (**)$

Подставим в (**) вместо $tg\varphi$ значение из (*), то

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = tg\alpha = f'(x_0)$ - по определению производной.

$$\boxed{tg\alpha = f'(x_0)}$$

<u>Тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен значению производной функции в этой точке</u>.

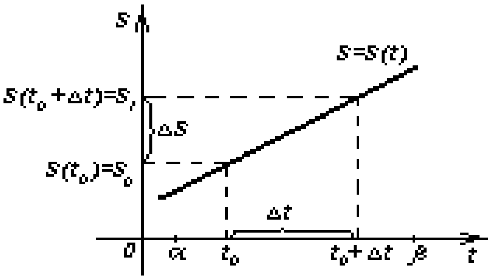
Вспомним $tg\alpha = k$ - угловой коэффициент касательной, т.е. $\boxed{k = f'(x_0)}$. Касательная проходит через точку $M(x_0; f(x_0))$ и имеет угловой коэффициент $k = f'(x_0)$

$y - y_1 = k(x - x_1)$ - уравнение прямой с начальной точкой и угловым коэффициентом. Значит:

$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$ - уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0; f(x_0))$

<u>2) Механический смысл производной</u>

Рассмотрим уравнение неравномерного движения точки по прямолинейной траектории $S = S(t)$, где t – время, изменяется от α до β ($\alpha < t < \beta$), S – расстояние.



Зафиксируем два момента времени t_0 и t_1, причем $t_0 \in (\alpha;\beta)$ и $t_1 \in (\alpha;\beta)$. В момент времени t_0 точка прошла расстояние S_0, а в момент времени t_1 - расстояние S_1

Тогда $t_1 - t_0 = \Delta t$ - изменение времени, $S_1 - S_0 = \Delta S$ - изменение расстояния.

$v_{cp} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ - средняя скорость движения – это отношение пути, пройденного за данный промежуток времени к этому промежутку времени.

Чтобы найти скорость движения в данный момент времени t_0, необходимо чтобы $t_1 - t_0 = \Delta t$ было как можно меньше. Т.е. чем меньше Δt, тем меньше v_{cp} отличается от v в данный момент времени ($v_{\text{ìãíîâåííé}}$).

$$\boxed{v_{\text{ìãí}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}}$$

<u>Мгновенная скорость есть предел отношения изменения пути ΔS к изменению времени Δt, когда $\Delta t \to 0$</u>

Итак: $v_{\text{ìãí}} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t} = S'(t_0)$

$$\boxed{v_{\text{ìãí}} = S'(t_0)}$$

<u>Производная от пути по времени равна скорости при неравномерном прямолинейном движении в данный момент времени t_0.</u>

<u>Примеры:</u>

1) Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^3$ в точке $x_0 = 2$

2) Движение определяется уравнением $S(t) = 2t^2 - t + 1$.

а) Найти скорость тела через 5 часов

б) Найти момент времени, в который тело полностью остановится.

<u>*3) Экономический смысл производной*</u>

<u>*1. Задача о производительности труда.*</u>

Пусть функция $u = u(t)$ выражает количество произведенной продукции u за время t. Необходимо найти производительность труда в момент времени t_0. За период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ количество произведенной продукции изменится от значения $u_0 = u(t_0)$ до $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$. Тогда средняя производительность труда за этот период времени $z_{cp} = \dfrac{\Delta u}{\Delta t}$.

Очевидно, что <u>*производительность труда в момент времени t_0*</u> можно определить как предельное значение средней производительности за период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$, при $\Delta t \to 0$, т.е.

$$z = \lim_{\Delta t \to 0} z_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = u'(t_0)$$

<u>*2.*</u> Пусть функция $y = y(x)$ задает зависимость издержек производства y от количества выпускаемой продукции x. Пусть Δx - прирост продукции, тогда Δy - приращение издержек производства и $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ - среднее приращение издержек производства на единицу продукции.

Производная $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ выражает <u>***предельные издержки** производства и характеризует приближенно дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции.*</u>

Аналогично определяются *предельная выручка, предельный доход, предельный продукт, предельная полезность, предельная производительность* и т.д.

Предельные величины характеризуют *процесс, изменение экономического объекта*. Таким образом, *производная выступает как скорость изменения некоторого экономического объекта (процесса) по времени или относительного другого фактора*.

Рассмотрим **соотношения между средним и предельным доходом** в условиях монопольного и конкурентного рынков.

Замечание: В экономической литературе предельные величины называют также *маржинальными*. При их записи к обычному обозначению величин добавляется буква M. При записи средних величин добавляется буква A. Например: MR – предельный доход, AR – средний доход.

Пусть r – суммарный доход (выручка) от реализации продукции,
p – цена единицы продукции,
q – количество продукции Тогда $r=pq$

В **условиях монополии** одна или несколько фирм полностью контролируют предложение некоторой продукции, а значит и цены на неё. При этом с увеличением цены спрос на продукцию падает. Пусть это происходит по прямой $p=aq+b$, где $a<0$, $b>0$, т.е. линейная убывающая функция. Тогда $r=(aq+b)q=aq^2+bq$. И средний доход на единицу продукции $r_{cp}=\dfrac{r}{q}=aq+b$. Предельный доход составит $r_q'=2aq+b$ (рис. 1)

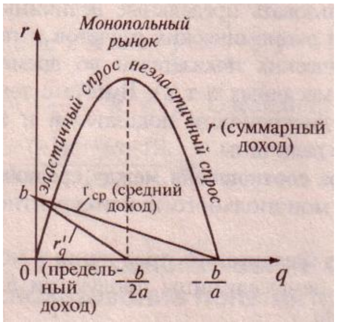


рис. 1

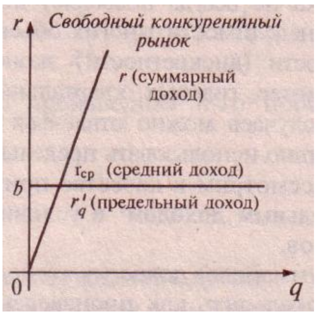


рис. 2

Следовательно, *в условиях монопольного рынка с ростом количества реализованной продукции предельный доход снижается, что приводит к уменьшению среднего дохода*.

В условиях **совершенной конкуренции** каждая фирма не способна контролировать уровень цен. Пусть преобладающая рыночная цена $p=b$. При этом суммарный доход составит $r=bq$ и соответственно средний доход $r_{cp}=\dfrac{r}{q}=b$ и предельный доход $r_q'=b$ (рис. 2).

Таким образом, *в условиях свободного конкурентного рынка средний и предельный доходы совпадают.*

Для исследования экономических процессов и решения прикладных задач используется понятие *эластичности функции.*

ОПР: *Эластичностью функции* $E_x(y)$ называется предел относительного приращения функции y к относительному приращению переменной x при $\Delta x\to 0$:

$$E_x(y)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{x}{y}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x}{y}\cdot y'$$

Эластичность функции показывает приближенно, на сколько процентов изменится функция $y = f(x)$ при изменении независимой переменной x на 1%.

Геометрический смысл:

$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y' = \frac{x}{y} tg\alpha$, где $tg\alpha$ - тангенс угла наклона касательной в точке $M(x;y)$

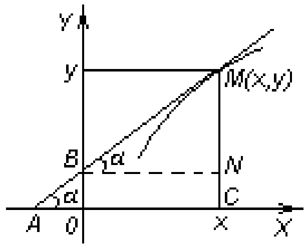


рис. 3

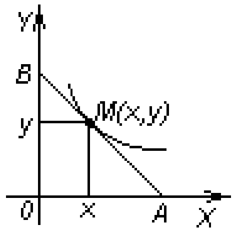


рис. 4

ΔMBN : $MN = x \cdot tg\alpha,\quad MC = y,\quad \Delta MBN \infty \Delta AMC \Rightarrow \frac{MN}{MC} = \frac{MB}{MA}$. Значит $E_x(y) = \frac{MB}{MA}$

Т.е. *<u>эластичность функции (по абсолютной величине) равна отношению расстояний по касательной от данной точки графика функции до точек её пересечения с осями Ox и Oy</u>*.

Если точки A и B находятся по одну сторону от точки M, то эластичность положительна (рис. 3), если по разные, то отрицательна (рис. 4).

<u>Свойства эластичности функции:</u>

1) Эластичность функции равна произведению независимой переменной x на темп изменения функции $T_y = (\ln y)' = \frac{y'}{y}$, т.е. $E_x(y) = x \cdot T_y$.

2) Эластичность произведения (частного) двух функций равна сумме (разности) эластичностей этих функций. $E_x(UV) = E_x(U) + E_x(V)$ и $E_x(\frac{U}{V}) = E_x(U) - E_x(V)$.

3) Эластичности взаимнообратных функций – взаимно обратные величины. $E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}$

Итак, эластичность спроса y относительно цены (или дохода) x показывает приближенно, на сколько процентов изменится спрос при изменении цены (дохода) x на 1%. Причем:

- если эластичность спроса $|E_x(y)| > 1$, то спрос считают *<u>эластичным</u>*;
- если эластичность спроса $|E_x(y)| < 1$, то спрос считают *<u>неэластичным</u>* относительно цены (дохода);
- если эластичность спроса $|E_x(y)| = 1$, то говорят о спросе *<u>с единичной эластичностью</u>*.

Выясним как влияет эластичность спроса относительно цены на суммарный доход *r=pq* при реализации продукции. Пусть *p=p(q)*- произвольная функция (не обязательно линейная). Найдем предельный доход.

$$r'_q = (pq)'_q = p'_q \cdot q + p \cdot 1 = p\left(1 + \frac{q}{p} p'_q\right) = p(1 + E_q(p))$$

По свойству 3: $E_q(p) = \frac{1}{E_p(q)}$ и $E_p(q) < 0$, получим при произвольной кривой спроса

$$r'_q = p\left(1+\frac{1}{|E_p(q)|}\right)$$

- если спрос эластичен, то предельный доход r'_q - положителен при любой цене. Это означает, что <u>*для продукции эластичного спроса с возрастанием цены суммарный доход от реализации продукции увеличивается*</u>.
- если спрос неэластичен, то предельный доход r'_q - отрицателен при любой цене. Это означает, что <u>*для продукции неэластичного спроса с возрастанием цены суммарный доход от реализации продукции уменьшается*</u>.

<u>Пример 1:</u> Зависимость между издержками производства y и объёмом выпускаемой продукции x выражается функцией $y = 50x - 0{,}05x^3$ (ден. ед.). Определить средние и предельные издержки при объёме продукции 10 ед.

Решение: Функция средних издержек: $y_{cp} = \frac{y}{x} = 50 - 0.05x^2$ $\quad y_{cp}(10) = 45$ (ден. ед.).

Функция предельных издержек: $y'(x) = 50 - 0{,}15x^2$ $\quad y'(10) = 35$ (ден. ед.).

Итак, если средние издержки на производство единицы продукции =45 ден. ед., то предельные издержки (дополнительные затраты на производство ед. продукции), при объёме выпускаемой продукции 10 ед., =35 ден. ед.

<u>Пример 2:</u> Зависимость между себестоимостью единицы продукции y (тыс. руб.) и выпуском продукции x (млрд. руб.) выражается функцией $y = -0{,}5x + 80$. Найти эластичность себестоимости при выпуске продукции, =60 млн. руб.

Решение:

$E_x(y) = \frac{x}{y}\cdot y' \quad \Rightarrow \quad E_x(y) = \frac{-0{,}5x}{-0{,}5x+80} = \frac{x}{x-160} \Rightarrow \quad E_{x=60}(y) = -0{,}6$, т.е. при выпуске продукции, равном 60 млн. руб., увеличение его на 1% приведет к снижению себестоимости на 0,6%.

<u>Пример 3:</u> Объём продукции u, произведенный бригадой рабочих, может быть описан уравнением $u = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50$ (ед.), $1 \le t \le 8$, где t – рабочее время в часах. Вычислить производительность труда, скорость и темп её изменения через час после начала работы и за час до её окончания.

Решение: Производительность труда: $z(t) = u'(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100$ (ед./ ч.)

Скорость производительности: $z'(t) = -5t + 15$ (ед./ ч^2)

Темп изменения производительности: $T_z(t) = (\ln z(t))' \quad \Rightarrow \quad T_z(t) = \frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{2t-6}{t^2-6t-40}$ (ед./ч.)

Если $t_1 = 1$, то $z(1) = 112{,}5$ (ед./ ч.), $z'(1) = 10$ (ед./ ч^2), $T_z(1) = 0{,}09$ (ед./ч.)

Если $t_2 = 8 - 1 = 7$, то $z(7) = 82{,}5$ (ед./ ч.), $z'(7) = -20$ (ед./ ч^2), $T_z(7) = -0{,}24$ (ед./ч.)

Итак, к концу работы производительность труда снижается. Изменение знаков говорит о том, что увеличение производительности труда в первые часы рабочего дня сменяется её снижением в последние часы.

<u>Пример 4:</u> Опытным путем установлены функции спроса $q = \frac{p+8}{p+2}$ и предложения $s = p + 0{,}5$, где q и s – количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени, p – цена товара. Найти: а) равновесную цену; б) эластичность

спроса и предложения для этой цены; в) изменение дохода при увеличении цены на 5% от равновесной.
Решение:
а) Равновесная цена определяется из условия $q=s$: $\frac{p+8}{p+2}=p+0{,}5 \Rightarrow p=2$ (ден. ед.) - равновесная цена.

б) $E_x(y)=\frac{x}{y}\cdot y'$

$E_p(q)=-\frac{6p}{(p+2)(p+8)}$ - эластичность спроса и $E_p(s)=\frac{2p}{2p+1}$ - эластичность предложения.

Для равновесной цены $p=2$: $E_{p=2}(q)=-0{,}3$ и $E_{p=2}(s)=0{,}8$.

$E_{p=2}(q)<1$ и $E_{p=2}(s)<1 \Rightarrow$ спрос и предложение при равновесной цене неэластичны. Т.е. при увеличении цены p на 1% спрос уменьшится на 0,3%, а предложение увеличится на 0,8%.
в) При увеличении цены на 5% от равновесной спрос уменьшится на $5\cdot 0{,}3=1{,}5\%$, значит доход возрастет на 3,5%.

Пример 5: Как связаны предельные и средние полные затраты предприятия, если эластичность полных затрат равна 1?
Решение:
Пусть $y=f(x)$ - полные затраты предприятия, где x – объём выпускаемой продукции.

Средние затраты на производство ед. продукции $y_{ср}=\frac{y}{x}$

$E_x(y)=1$ и $1=\frac{x}{y}\cdot y' \Rightarrow y'=\frac{y}{x}$ - предельные издержки предприятия.

Итак, $y_{ср}=y'$, т.е. предельные издержки = средним издержкам.
Заметим: полученное утверждение верно только для линейных функций издержек.

Таблица производных.

Простейшие элементарные функции	Сложные функции ($u=u(x)$- некоторая функция)

1) $y = c,\ c = const, \quad (c)' = 0$

2) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad n \in R$

3) $(a^x)' = a^x \ln a, \quad a > 0,\ a \neq 1$

$(e^x)' = e^x$

4) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

5) $(\sin x)' = \cos x$

6) $(\cos x)' = -\sin x$

7) $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

8) $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

9) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

10) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11) $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

12) $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

1) $y = c,\ c = const, \quad (c)' = 0$

2) $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u', \quad n \in R$

3) $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u', \quad a > 0,\ a \neq 1$

$(e^u)' = e^u \cdot u'$

4) $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

5) $(\sin u)' = u' \cdot \cos u$

6) $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$

7) $(tgu)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

8) $(ctgu)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$

9) $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

10) $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

11) $(arctgu)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

12) $(arcctgu)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

Доказательство: докажем некоторые из приведенных формул.

3) $y = a^x$

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \left| a^{\Delta x} - 1 \sim \Delta x \ln a,\ \Delta x \to 0 \right| = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x \Delta x \ln a}{\Delta x} = a^x \ln a$$

5) $y = \sin x$

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x_0 + \Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2} 2} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos \frac{2x_0 + \Delta x}{2} = \cos x_0$$

2. Правила дифференцирования.

Если функция в точке x *имеет конечную производную, то функция называется дифференцируемой в этой точке.*

ТЕОРЕМА: Если $\exists f'(x)$ и $\exists g'(x)$, то $\exists\, (f(x) + g(x))'$ и при этом производная суммы равна сумме производных.

$$\boxed{(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)}$$

Доказательство: Обозначим $f(x) + g(x) = z(x)$.

Найдем

$$z'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(x + \Delta x) - z(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)) - (f(x) + g(x))}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x + \Delta x) - f(x)) + (g(x + \Delta x) - g(x))}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x) + \Delta g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = f'(x) + g'(x) \quad \Rightarrow \quad (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

ТЕОРЕМА: Если $\exists f'(x)$ *и* $\exists g'(x)$, то $\exists\,(f(x)\cdot g(x))'$ и при этом производная произведения равна сумме произведений производной первой функции на вторую и первой функции на производную второй.

$$\boxed{(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)}$$

Доказательство: Обозначим $f(x)\cdot g(x) = z(x)$.

$$\Delta z = z(x+\Delta x) - z(x) = \underline{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)} - \underline{\underline{f(x)g(x)}} + \underline{\underline{f(x)g(x+\Delta x)}} - \underline{f(x)g(x+\Delta x)} = g(x+\Delta x)(f(x+\Delta x) - f(x)) +$$

$$+ f(x)(g(x+\Delta x) - g(x)) = g(x+\Delta x)\cdot \Delta f(x) + f(x)\cdot \Delta g(x)$$

$$z'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)\Delta f(x) + f(x)\Delta g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}g(x+\underbrace{\Delta x}_{\to 0}) + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}f(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

ТЕОРЕМА: Если $\exists f'(x)$ *и* $\exists g'(x)$, причем $g(x)\neq 0$, то $\exists\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$ и при этом имеет место формула:

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}}$$

Замечание: Производная постоянной функции равна нулю.

Доказательство: Пусть $C = const$, тогда $\tilde{N}' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x} = 0$

СЛЕДСТВИЯ: 1) $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$

2) $(\tilde{N}\cdot f(x))' = \tilde{N}\cdot f'(x)$, где $C = const$

Примеры: 1) $y = 2x^4 + \frac{1}{x} - 3\sqrt[4]{x^3} + \ln 10$; 2) $y = x^4\cdot \ln x$; 3) $y = \frac{5x+1}{\sin x}$; 4) $y = \frac{3^x}{1+x^2}$, $y'(0) = ?$

3. Дифференцирование сложной и обратной функций

Пусть $y = f(t)$ - функция от переменной t. А $t = \varphi(x)$ - функция от независимой переменной x. Т.е. задана сложная функция $y = f(\varphi(x))$.

ТЕОРЕМА: Если $y = f(t)$ и $t = \varphi(x)$ - дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции существует и равна производной данной функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную промежуточного аргумента по независимой переменной х, т.е. $\boxed{y'(x) = f'(t)\cdot\varphi'(x)}$

Или: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$

Используя правила дифференцирования и формулу дифференцирования сложной функции, заполним вторую часть таблицы.

Пусть $y = f(x)$ - дифференцируемая и строго монотонная функция на некотором промежутке X. Если переменную y рассматривать как аргумент, а переменную x как функцию, то новая функция $x = \varphi(y)$ является обратной к данной функции.

ТЕОРЕМА: Для дифференцируемой функции с производной, не равной 0, производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции, т.е.

$$\boxed{f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}}$$

Доказательство:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\left|\begin{matrix}\Delta x\ne\Rightarrow\Delta y\ne 0\\ \Delta x\to 0\Rightarrow\Delta y\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\varphi'(y)}$$

Примеры: 1) $y=(3x-4\sqrt[3]{x}+2)^4$; 2) $y=\cos 3x\cdot e^{\sin 2x}$; 3) $y=\frac{4x+7tgx}{\sqrt{1+9x^2}}$; 4) $y=\ln(arctg\,2x)$

4. Дифференцирование показательно - степенной функции

$y=(U(x))^{V(x)}$. Прологарифмируем: $\ln y=V(x)\ln U(x)$. Продифференцируем:

$$\frac{y'(x)}{y(x)}=V'(x)\ln U(x)+V(x)\frac{U'(x)}{U(x)}\Rightarrow\quad y'=(U(x))^{V(x)}\left(V'(x)\ln U(x)+V(x)\frac{U'(x)}{U(x)}\right)$$

Раскроем скобки, получим: $\boxed{(U^V)'=U^V\cdot\ln U\cdot V'+V\cdot U^{V-1}\cdot U'}$

Пример: $y=x^{x^2+1}$ $\qquad y'=x^{x^2+1}\ln x\cdot 2x+(x^2+1)x^{x^2}$

5. Производная неявной функции

Рассмотрим дифференцирование неявной функции, заданной в виде $F(x,y)=0$. Для нахождения производной функции y, заданной неявно, нужно продифференцировать обе части уравнения, рассматривая y как функцию от x, а затем из полученного уравнения найти производную y'.

Пример: Найти производную функции y, заданную уравнением $x^2-xy+\ln y=2$, и вычислить её значение в точке $(2;1)$.

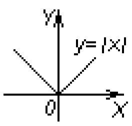
Решение: $2x-(y+xy')+\dfrac{y'}{y}=0 \;\Rightarrow\; y'=\dfrac{2xy-y^2}{xy-1} \;\Rightarrow\; y'(2)=3$

Связь между непрерывностью и дифференцируемостью.

ТЕОРЕМА: Если функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Заметим, что обратная теорема не верна.

Пример: Доказать, что функция $y=|x|$ не дифференцируема в точке $x=0$.



Решение: $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|x+\Delta x|-|x|}{\Delta x}$. Очевидно, что при $x=0$ производная не существует, т.к. отношение $\dfrac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}1, & \Delta x>0\\ -1, & \Delta x<0\end{cases}$, т.е. не имеет предела при $\Delta x\to 0$. Данная функция непрерывна в точке $x=0$, но не дифференцируема в точке $x=0$. Заметим, что геометрически это означает отсутствие касательной к кривой в точке $x=0$.

Таким образом непрерывность функции – необходимое, но не достаточное условие дифференцируемости функции.

6. Производные высших порядков

Рассмотрим некоторую функцию $f(x)$ и пусть $\exists f'(x)$ - производная первого порядка. Очевидно, что она сама представляет некоторую функцию, зависящую от *x*. Если существует $f''(x) = (f'(x))'$, то она называется производной второго порядка данной функции и т.д. Аналогично можно рассматривать $f'''(x)$, $f^{(IV)}(x)$, $f^{(V)}(x)$... Производной *n*-го порядка называется производная от производной *(n-1)*-го порядка.

<u>Пример:</u> Найти производные третьего порядка: 1) $y = x^2 + \cos 2x$ 2) $y = 5x^3 + \ln x - 1$

Рассмотрим <u>*механический смысл второй производной*</u>

Выше было установлено, что если точка движется прямолинейно по закону $S = S(t)$, то $S'(t)$ представляет собой скорость изменения пути в момент времени *t*. Следовательно, <u>*вторая производная пути по времени*</u> $S''(t) = (S'(t))' = v'(t)$ <u>*есть скорость изменения скорости или **ускорение** точки в момент времени t.*</u>

$$\boxed{a(t) = v'(t) = S''(t)}$$

<u>Пример:</u> $S = \dfrac{gt^2}{2}$ $a(t) = g$ - ускорение свободного падения.

1.15 Лекция №15 (2 часа).

Тема: «Дифференциал функции»

1.15.1 Вопросы лекции:

1. Определение дифференциала.
2. Геометрический смысл.
3. Приближенные вычисления с помощью дифференциала.

1.15.2 Краткое содержание вопросов:

1. Определение дифференциала

<u>ОПР:</u> Функция $f(x)$ называется <u>*дифференцируемой в точке*</u> x_0, если ее приращение Δy в этой точке можно представить в виде $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, где A – некоторое число, не зависящее от Δx, $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Выясним связь между дифференцируемостью функции в точке и существованием производной в этой точке.

<u>ТЕОРЕМА:</u> Для того, чтобы функция $f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она имела в точке x_0 конечную производную.

<u>Доказательство:</u>

1) необходимость: $f(x)$ - дифференцируемой в точке x_0

$\Rightarrow \quad \Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \quad \Big| : \Delta x \neq 0$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$. Перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$.

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(A + \underbrace{\alpha(\Delta x)}_{\to 0}) = A + 0 = A = f'(x_0)$. Т.е. производная в точке x_0 существует и равна числу A (т.е. конечная).

2) достаточность: Пусть $\exists\ f'(x_0)=A$, т.е. $\exists \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)=A \ \Rightarrow$ по теореме о связи предела функции с б.м. величинами, имеем: $\alpha(\Delta x)=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}-A$ - бесконечно малая при $\Delta x\to 0$.

$\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x=\Delta y-A\cdot\Delta x \ \Rightarrow \ \Delta y=A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x \ \Rightarrow \ f(x)$ дифференцируемой в точке x_0.

Слагаемое $A\cdot\Delta x$ называется *<u>главной частью приращения</u>* функции.

<u>ОПР:</u> *<u>Дифференциалом</u>* функции $f(x)$ в точке x_0 называется главная, линейная относительно Δx часть полного приращения функции.

$dy=A\cdot\Delta x$

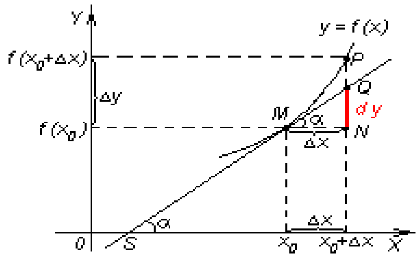
Учитывая, что $A=f'(x_0)$, имеем $\boxed{dy=f'(x_0)\cdot\Delta x}$

Пусть $f(x)=x$, т.е. $y=x$, тогда $dx=(x)'\cdot\Delta x=1\cdot\Delta x=\Delta x$, т.е. $dx=\Delta x$. *<u>Дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной.</u>*

$\boxed{dy=f'(x_0)\cdot dx}$

2. Геометрический смысл

<u>Геометрический смысл:</u>



Рассмотрим $M(x_0; f(x_0))$ *и* $P(x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x))$

MS – касательная к графику функции $y=f(x)$. Обозначим $\angle XSM=\alpha$

Построим $MN \parallel Ox$. Обозначим $MS\cap PN=Q$

$\Delta y=PN$

ΔMNQ - прямоугольный: $NQ=\Delta x\cdot tg\alpha=\Delta x\cdot f'(x_0)=dy$. Т.е. *<u>дифференциал функции равен по величине отрезку NQ, когда аргумент x получил приращение $\Delta x=MN$.</u>*

Из построения видно, что $PN\neq PQ$. Т.о. *<u>дифференциал функции равен приращению ординаты касательной MS к графику этой функции в точке x_0. А приращение функции $\Delta y=PN$ есть приращение ординаты самой функции f(x) в точке x_0</u>*

3. Приближенные вычисления с помощью дифференциала

Рассмотрим разность

$\Delta y-dy=(A\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x)-f'(x_0)\Delta x=f'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x-f'(x_0)=\alpha(\Delta x)\Delta x$ - бесконечно малая при $\Delta x\to 0$.

$\Delta y-dy\approx 0$

$\boxed{\Delta y\approx dy}$

При этом абсолютная погрешность равна $|\Delta y - dy|$.

Пример 1: $y = x^2$. Найти приближенно изменение y, когда x меняется от 2 до 2,01.

Пример 2: Найти приближенное значение функции $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 + 8x - 16}$ при $x = 3{,}94$, исходя из ее точного значения при $x_0=4$.

1.16 Лекция №16 (2 часа).

Тема: «Применение дифференциального исчисления к исследованию функции»

1.16.1 Вопросы лекции:

1. Возрастание и убывание графика функции.
2. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.
3. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точка перегиба.

1.16.2 Краткое содержание вопросов:

1. Возрастание и убывание графика функции

Установим связь между свойствами функций и их производными. Изучим точные методы исследования функции и построения графиков с помощью первой и второй производных.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$ непрерывную и определенную на некотором промежутке X.

ОПР: Функция называется *возрастающей*, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т.е. $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ (рис. 1)

ОПР: Функция называется *убывающей*, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, т.е. $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$ (рис. 2)

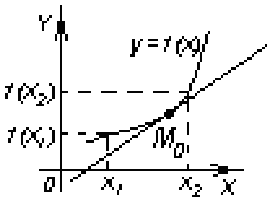


рис. 1

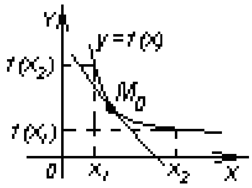


рис.2

Установим связь между возрастанием (убыванием) функции и ее производной.

Рассмотрим возрастающую функцию $y = f(x)$ непрерывную и определенную на некотором промежутке X.

Возьмем любую точку $M_0(x_0; y_0)$ на графике и проведем касательную к графику функции в этой точке.

Обозначим α_1 - угол наклона касательной к оси Ox.

Вспомним геометрический смысл производной: $f'(x) = k$, тогда

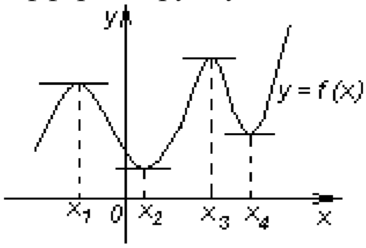
$f'(x_0) = k_{кас} = tg\alpha_1$, α_1 - острый угол, поэтому $tg\alpha_1 > 0 \Rightarrow f'(x_0) > 0$

Аналогично для убывающей функции. Угол α_2 наклона касательной к оси Ox тупой, поэтому $tg\alpha_2 < 0 \Rightarrow f'(x_0) < 0$

Обобщим сказанное в виде теоремы.

ТЕОРЕМА (*признак монотонности*): Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и внутри интервала $f'(x) > 0$ $[\ f'(x) < 0\ ]$, то график функции $y = f(x)$ возрастает [убывает] на интервале $(a;b)$.

Рассмотрим функцию, которая имеет несколько интервалов возрастания и убывания, дифференцируемую на всей области определения.



Точки x_1, x_2, x_3, x_4 отделяют интервалы возрастания от интебрвалов убывания.
Заметим, что значение функции в точке x_1 больше значений функции во всех «соседних» точках как слева, так и справа от x_1. Поэтому в точке x_1 функция имеет максимум. В точке x_3 функция тоже имеет максимум, хотя $f(x_1) < f(x_3)$. Аналогично для точек минимума x_2 и x_4.

ОПР: Функция $y = f(x)$ имеет *максимум [минимум]* в точке x_0, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех точек, отличных от x_0 и принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ $[\ f(x) > f(x_0)\ ]$.
Замечание: Точка x_1 - локальный максимум, x_3 - глобальный максимум,
x_4 - локальный минимум, x_2 - глобальный минимум.
Точки максимума и минимума объединяют под общим названием точек *экстремума*.

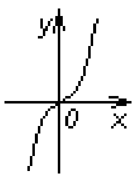
Установим связь между производной и точками экстремума.

ТЕОРЕМА (*необходимое условие экстремума*): Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то производная функции в этой точке равна нулю или не существует.

Теорема имеет следующий геометрический смысл:
Если x_1, x_2, x_3, x_4 - точки экстремума и функция дифференцируема в этих точках, то можно провести касательные в этих точках, причем $k_1 = f'(x_1) = tg\alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$. Аналогично $\alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 0$ и $\alpha_4 = 0$. Это означает, что касательные параллельны оси Ox.

Заметим, что обратная теорема не верна. Из того, что $f'(x_0) = 0$ или $\nexists\ f'(x_0)$ не следует, что точка x_0 является точкой экстремума.

Пример: $y = x^3$



$$y' = 3x^2 \qquad y' = 0 \quad при \quad x = 0$$

Тем не менее, в точке (0,0) нет экстремума, поэтому точки в которых производная равна нулю или не существует называют точками возможного экстремума (*критическими точками*), а условие $f'(x_0) = 0$ или $\nexists\ f'(x_0)$ является лишь *необходимым.*

Чем же отличаются, например, точка x_3 от точки *x=0* ?

В точке x_3 функция меняет характер монотонности (с возрастания на убывание), т.е. производная слева от точки x_3 положительна, а справа отрицательна. В точке *x=0* функция $y = x^3$ характер монотонности не меняет. Слева и справа от критической точки функция возрастает и её производная сохраняет положительный знак. Сформулируем достаточный признак экстремума.

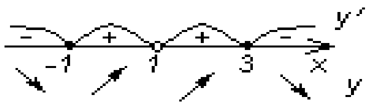
<u>ТЕОРЕМА (*достаточное условие экстремума*):</u> Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема во всех точках своей области определения, и точка x_0 принадлежит области определения. Если производная $f'(x)$ при переходе аргумента слева направо через критическую точку x_0 меняет знак с «+» на «-», то x_0 - точка максимума, если с «-» на «+», то x_0 - точка минимума, а если производная знака не меняет, то в точке x_0 экстремума нет.

<u>Пример:</u> Найти экстремумы функции $y = \dfrac{(3-x)^2}{1-x}$

Решение: $D_y: \quad x \neq 1$

$y' = \dfrac{-x^2+2x+3}{(1-x)^2}$ $\qquad y' = 0$ при $-x^2+2x+3=0 \qquad x=-1$ *и* $x=3$ - критические точки.

$$\nexists\ y' \quad \text{при} \quad x = 1 \notin D_y$$



$x \in (-\infty;-1) \cup (3:+\infty)$ - график функции убывает

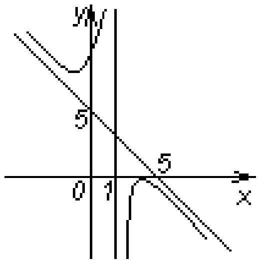
$x \in (-1;1) \cup (1:3)$ - график функции возрастает

$x = -1$ - точка минимума

$x = 3$ - точка максимума

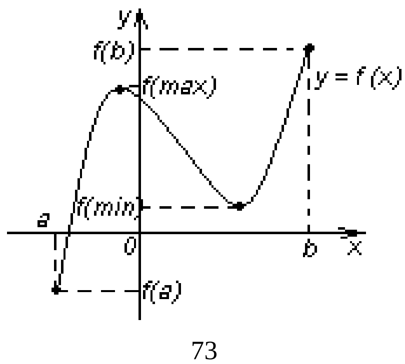
$y_{\min}(-1) = 8$ - минимальное значение функции

$y_{\max}(3) = 0$ - максимальное значение функции.



2. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке

Рассмотрим функцию $y = f(x)$ непрерывную на отрезке $[a;b]$.



Может случиться так, что значения функции на концах отрезка больше максимума или меньше минимума. $f(a) < f(\min)$, $f(b) > f(\max)$. Поэтому находить наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ нужно находить следующим образом.

План нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$

1) Находим область определения функции. Проверяем, принадлежит ли отрезок $[a;b]$ области определения.
2) Находим точки экстремума функции и выбираем те из них, которые принадлежат отрезку $[a;b]$.
3) Находим значения функции на концах отрезка ($f(a)$ *и* $f(b)$) и значения функции в точках экстремума.
4) Выбираем из всех полученных значений наибольшее и наименьшее.

Пример: Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \dfrac{(3-x)^2}{1-x}$ на отрезке $[-4;0]$

Ответ: $y\ (-4) = 9\dfrac{4}{5}$ - наибольшее значение, $y(-1) = 8$ - наименьшее значение.

Пример: Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2\sin x + \cos 2x$ на отрезке $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

Решение: $D_y:\ x \in R \qquad \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right] \in D_y$

$y' = 2\cos x - 2\sin 2x$

$y' = 0 \quad при \quad 2\cos x(1 - 2\sin x) = 0$

$\cos x = 0 \qquad\qquad \sin x = \dfrac{1}{2}$

$x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z \qquad\qquad x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$

$x = \dfrac{\pi}{2} \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right] \qquad\qquad x = \dfrac{\pi}{6} \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

$y(0) = 0 + 1 = 1$ - наименьшее

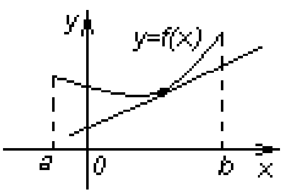
$y(\dfrac{\pi}{2}) = 2 - 1 = 1$ - наименьшее

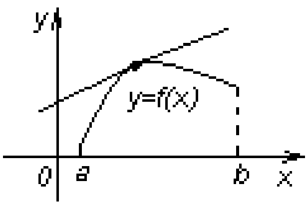
$y(\dfrac{\pi}{6}) = 1{,}5$ - наибольшее

3. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точка перегиба

Еще одной важной характеристикой функции является характер её выпуклости.

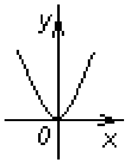
ОПР: График дифференцируемой функции называется *выпуклым [вогнутым]* в интервале $(a;b)$, если он расположен ниже [выше] любой своей касательной в этом интервале.

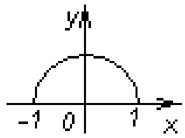




Пример: Функция $y = x^2$ имеет вогнутый график на всей оси R.

Полуокружность $y = \sqrt{1 - x^2}$ имеет выпуклый график на $[-1;1]$





За выпуклость и вогнутость графика функции «отвечает» вторая производная.

ТЕОРЕМА: Если функция $y = f(x)$ имеет вторую производную во всех точках интервала $(a;b)$ и если во всех точках этого интервала $f''(x) > 0$, то график функции вогнутый в интервале $(a;b)$, если же $f''(x) < 0$, то график функции выпуклый в интервале $(a;b)$.

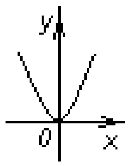
ОПР: Точка $M_0(x_0; f(x_0))$ называется точкой перегиба графика функции $y = f(x)$, если проходя через эту точку функция меняет характер выпуклости / вогнутости.

ТЕОРЕМА (*необходимое условие точки перегиба):* Пусть график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M_0(x_0; f(x_0))$, то вторая производная в этой точке равна нулю или не существует.

Доказательство: Метод от противного. Пусть $f''(x_0) \neq 0 \Rightarrow f''(x) < 0$ или $f''(x) > 0$. Значит в точке $M_0(x_0; f(x_0))$ функция имеет определенное направление выпуклости / вогнутости, а это противоречит наличию перегиба в точке $M_0(x_0; f(x_0))$.

Замечание: Обратное утверждение не верно. Не всякая точка, в которой $f''(x) = 0$ или $\nexists\ f''(x)$ является точкой перегиба.

Пример: $y = x^4$



$y' = 4x^3 \qquad y' = 0 \quad при \quad x = 0$

Тем не менее, в точке (0,0) нет перегиба, поэтому точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует, называют точками возможного перегиба (*стационарными точками*), а условие $f''(x) = 0$ или $\nexists\ f''(x)$ является лишь *необходимым.* Сформулируем достаточный признак точки перегиба.

ТЕОРЕМА (*достаточное условие точки перегиба*): Пусть x_0 - стационарная точка. Если проходя через стационарную точку вторая производная меняет знак, то график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M_0(x_0; f(x_0))$.

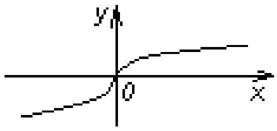
Пример: $y = \dfrac{(3-x)^2}{1-x}$

Ответ: $x \in (-\infty;1)$ - график функции вогнутый

$x \in (1;+\infty)$ - график функции выпуклый

точек перегиба нет.

Пример: $y = \sqrt[3]{x}$



$D_y: \quad x \in R \qquad y'' = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}} \qquad y'' \neq 0 \qquad \nexists\, y''$ при $x=0$ – стационарная точка

$x \in (-\infty;0)$ - график функции вогнутый

$x \in (0;+\infty)$ - график функции выпуклый

(0,0) - точка перегиба.

1.17 Лекция №17 (2 часа).

Тема: «Полное исследование функции»

1.17.1 Вопросы лекции:

1. План исследования.
2. Исследование функций.

1.17.2 Краткое содержание вопросов:

1. План исследования.

Исследование функций и построение графиков следует проводить по следующей схеме:

I. Исследование функции без использования производной.

1) Найти область определения функции D_y.

2) Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва функции, определить их род.

3) Найти асимптоты графика функции.

4) Если возможно, найти пересечение графика функции с осями координат. Если отыскание точек пересечения затруднительно, то посмотреть координаты по графику (приблизительно).

5) Исследовать функцию на четность / нечетность.

II. Исследование функции с помощью первой производной.

6) Определить интервалы монотонности и точки экстремума функции.

III. Исследование функции с помощью второй производной.

7) Определить интервалы выпуклости и вогнутости, найти точки перегиба графика функции.

IV. Построение графика функции.

8) Построение по пунктам исследования (построение графика принято начинать с построения асимптот).

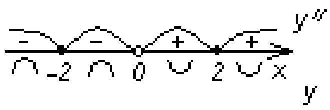
9) Определить множество значений функции E_y.

3.2 Исследование функций.

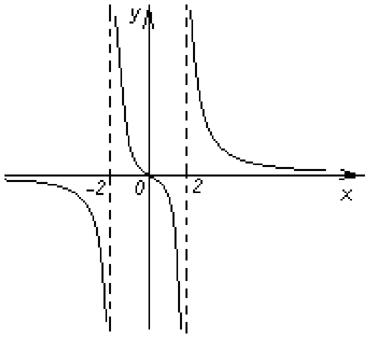
Пример: Исследовать функцию и построить график $y = \frac{x}{x^2 - 4}$

$x = \pm 2$ - вертикальные асимптоты, $y = 0$ - наклонная асимптота

Функция монотонно убывает на D_y, точек экстремума нет.



(0,0) – точка перегиба.

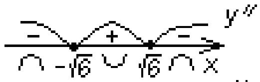


x	-4	-3	$-\frac{5}{2}$	-1	1
y	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{10}{9}$	3	-3

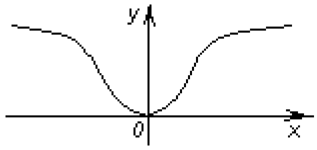
<u>Пример:</u> $y = \ln(x^2 + 1)$

Асимптот нет

(0,0) – точка минимума



$(\sqrt{6};\ln 7)$ и $(-\sqrt{6};\ln 7)$ - точки перегиба.



x	1	3	5
y	ln2 ≈0,7	ln10 ≈2,3	ln26 ≈3,3

1.18 Лекция №18 (2 часа).

Тема: «Функции нескольких переменных»

1.18.1 Вопросы лекции:

1. Область определения функции двух переменных.
2. Дифференциальное исчисление функции многих переменных, их непрерывность.
3. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных.
4. Производная по направлению. Градиент.
5. Экстремум функции нескольких переменных.
6. Функция Кобба-Дугласса.

1.18.2 Краткое содержание вопросов:

1. Область определения функции двух переменных

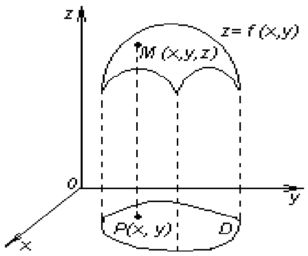
<u>ОПР:</u> <u>*Функцией f двух переменных*</u> $z = f(x, y)$ называется зависимость (закон), по которой каждой паре значений (x, y) из некоторой области $D(x, y)$ соответствует единственное значение $z \in E$.

Тогда x и y – независимые переменные (аргументы),

D – область определения (или существования) функции,

E – область значений функции.

Рассмотрим ПДСК. Если каждой точке на плоскости с координатами (x, y) поставить в соответствие аппликату $z = f(x, y)$, то получим некоторую поверхность в пространстве. Т.о. под <u>*графиком функции двух переменных*</u> будем понимать поверхность, образованную множеством точек $M(x, y, z)$.

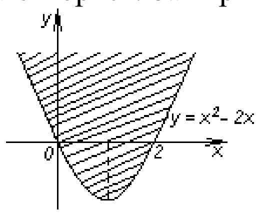


Область определения функции D геометрически представляет собой некоторую часть плоскости Oxy, ограниченную линиями, которые могут принадлежать или не принадлежать этой области. В первом случае область D называется <u>*замкнутой*</u> и обозначается $\overline{D}$, во втором – <u>*открытой*</u>.

<u>Пример:</u> Найти область определения D и область значений E функции $z = \ln(y - x^2 + 2x)$.

D_z: $y - x^2 + 2x > 0$

Построим границу области *D:* $y = x^2 - 2x$. Данное уравнение задает параболу, т.к. парабола не принадлежит области *D*, то она изображается пунктиром. Легко убедиться в том, что любая точка внутри параболы удовлетворяет данному неравенству, в то время, как любая точка, расположенная за параболой - не удовлетворяет. Заштрихуем область *D*.



Т.к. выражение под знаком логарифма может принимать сколь угодно малые и сколь угодно большие положительные значения, то область значений функции $E: z \in (-\infty; +\infty)$

Обобщим сказанное выше.

<u>ОПР:</u> Функцией *n*- переменных $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется зависимость (закон), по которой каждой совокупности $(x_1, x_2, ..., x_n)$ из некоторой области n – мерного пространства, ставится в соответствие единственное значение *u*.

Линии уровня

Пусть дана функция $z = f(x, y)$. Будем придавать переменной z некоторые значения $c_1, c_2, ..., c_n$ из области значений функции. Получим функции одной переменной $f(x, y) = c_1$, $f(x, y) = c_2, \ldots,$ $f(x, y) = c_n$, графиками которых будут являться некоторые линии на плоскости, называемые <u>*линиями уровня*</u>. Графически это означает, что поверхность $z = f(x, y)$, пересекается плоскостями $z = c_1$, $z = c_2, ...,$ $z = c_n$ параллельными друг другу и плоскости *Oxy*.

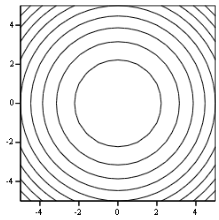
<u>Пример:</u> Построить линии уровня и изображение поверхности $z = x^2 + y^2$

$z = 0:$ $x^2 + y^2 = 0$ - точка (0,0)

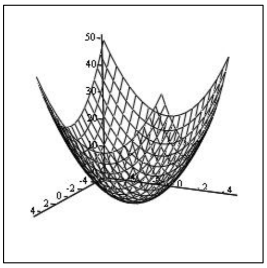
$z = 1:$ $x^2 + y^2 = 1$ - окружность

$z = 4:$ $x^2 + y^2 = 4$ и т. д.

Линии уровня Изображение поверхности



z



z

<u>ОПР:</u> Число A называется *<u>пределом функции</u>* $z = f(x,y)$ *<u>в точке</u>* $M_0(x_0, y_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что при всех *x, y*, удовлетворяющих условиям $|x - x_0| < \delta$ и $|y - y_0| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x,y) - A| < \varepsilon$.

<u>Обозначение:</u> $A = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

<u>Пример:</u> Вычислить предел $A = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$

$$A = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\left(x^2 + y^2\right)\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1\right)}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1\right)\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1\right)} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1\right) = 2$$

<u>ОПР:</u> Функция $z = f(x,y)$ называется *<u>непрерывной в точке</u>* $M_0(x_0, y_0)$, если справедливо равенство $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0)$

<u>Пример:</u> Функция $z = \dfrac{1}{2x^2 + y^2}$ непрерывна в любой точке плоскости, кроме точки (0,0), в которой функция терпит бесконечный разрыв.

<u>ОПР:</u> Функция, непрерывная во всех точках некоторой области *D*, называется *<u>непрерывной в данной области.</u>*

2. Дифференциальное исчисление функции многих переменных, их непрерывность.

Если переменной x дать некоторое приращение Δx, y оставить постоянной, то функция $z = f(x,y)$ получит приращение $\Delta_x z$, называемое *<u>частным приращением функции z по переменной x.</u>*

$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x,y)$.

Аналогично, если переменная y получает приращение Δy, а x остается постоянной, то *<u>частным приращением функции z по переменной y:</u>*

$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x,y)$.

<u>ОПР:</u> Если существуют пределы

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = f'_x(x,y)$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = f'_y(x,y),$$

то они называются *<u>частными производными функции</u>* $z = f(x,y)$ по переменным x и y соответственно.

Аналогично определяются частные производные функций любого числа независимых переменных.

Т.к. частная производная по любой переменной является производной по этой переменной, найденной при условии, что остальные переменные – постоянны, то все правила и формулы дифференцирования одной переменной применимы для нахождения частных производных функций любого числа переменных.

Пример: Найти частные производные функции $z = arctg\dfrac{y}{x}$.

Пример: Найти частные производные функции $u = \ln^2(x^2 + y^2 + z^2)$.

3. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных.

ОПР: Дифференциал функции $z = f(x,y)$, найденный при условии, что одна из независимых переменных изменяется, а вторая остается постоянной, называется *частным дифференциалом* $d_x z = f'_x(x,y)dx$ и $d_y z = f'_y(x,y)dy$

где $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$ - произвольные приращения независимых переменных, называемых их дифференциалами.

Аналогично для функций нескольких переменных.

Пример: Найти частные дифференциалы функции $u = (xy^2)^{z^3}$

Пример: Вычислить значения частных производных функции $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^3} - xyz$ в точке $M(2,-2,1)$

ОПР: *Полным приращением функции* $z = f(x,y)$ называется разность

$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)$

ОПР: *Полным дифференциалом функции* $z = f(x,y)$ называется главная, линейно зависящая от приращений независимых переменных Δx и Δy, часть полного приращения функции и обозначается dz.

Если функция имеет непрерывные частные производные, то полный дифференциал существует и равен $dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$ или

$dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$

Для функции n переменных $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ полный дифференциал определяется выражением

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n$$

Пример: Найти полное приращение и полный дифференциал функции $z = x^2 - xy + y^2$

$\Delta z = (x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x)(y + \Delta y) + (y + \Delta y)^2 - x^2 + xy - y^2 = (2x - y)\Delta x + (2y - x)\Delta y + \Delta x^2 - \Delta x\Delta y + \Delta y^2$

Выражение $(2x - y)\Delta x + (2y - x)\Delta y$, линейное относительно Δx и Δy, есть дифференциал dz, а величина $\alpha = \Delta x^2 - \Delta x\Delta y + \Delta y^2$ - бесконечно малая. Т.о. $\Delta z = dz + \alpha$

Пример: Найти полный дифференциал функции $z = \ln^2(x^2 + y^2 - z^2)$

Полный дифференциал часто используется для приближенных вычислений значений функции.

Рассмотрим разность $\Delta z - dz = \alpha$, т.е. $\Delta z - dz \approx 0 \Rightarrow \Delta z \approx dz$, т.е.

$\underline{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f'_x(x_0,y_0)dx + f'_y(x_0,y_0)dy + f(x_0,y_0)}$

Пример: Вычислить приближенно $(1{,}02)^{3{,}01}$

Дано:

$z = x^y$

$x = 1{,}02$

$x_0 = 1 \quad \Delta x = 0{,}02$

$y = 3{,}01$

$y_0 = 3 \quad \Delta y = 0{,}01$

Найти: $(1{,}02)^{3{,}01} \approx$

ОПР: Функция $z = f(u,v)$, где $u = \varphi(x,y)$, $v = \psi(x,y)$, называется *сложной функцией* переменных x и y.

Для нахождения частных производных сложных функций используются следующие формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Пример: Найти частные производные функции $z = \sin(xy(2x+3y))$

Решение: $z = \sin(uv)$, $u = 2x+3y$, $v = xy$

Если уравнение $F(x,y,z) = 0$ задает функцию двух переменных $z(x,y)$ в неявном виде и $F'_z(x,y,z) \neq 0$, то справедливы формулы

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$$

Пример: Найти частные производные функции z, заданной неявно уравнением $xyz + x^3 - y^3 - z^3 + 5 = 0$

Решение: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz+3x^2}{xy-3z^2} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz-3y^2}{xy-3z^2}$

Частные производные высших порядков

ОПР: *Частными производными второго порядка* называют частные производные, взятые от частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xx}(x,y) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yy}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xy}(x,y) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yx}(x,y)$$

Частные производные $f''_{xy}(x,y)$ и $f''_{yx}(x,y)$ называются *смешанными*. Значения смешанных производных равны в тех точках, в которых эти производные непрерывны.

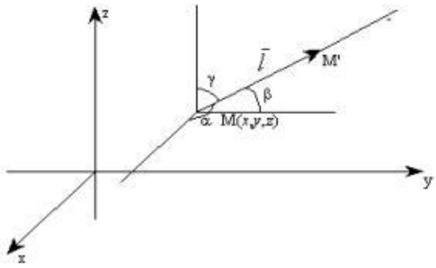
Пример: Найти частные производные второго порядка функции $z = e^{x^2 y^2}$

4. Производная по направлению. Градиент

Пусть дана функция $u = f(x, y, z)$, определенная в некоторой области пространства Oxyz.

Определение. Вектор с координатами $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ называется градиентом функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ и обозначается grad u = $\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j}$.

Под производной функции $z = f(x, y)$ в данном направлении $\bar{l}$ понимается выражение $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos a + \frac{\partial u}{\partial y}\cos b$, где $\cos a$, $\cos b$ – направляющие косинусы вектора $\bar{l}$.



Производная $\frac{\partial u}{\partial l}$ представляет собой скорость изменения функции в данном направлении.

Теорема. Производная функции по направлению равна проекции градиента этой функции на данное направление (в соответствующей точке).

Как известно, проекция вектора на другой вектор имеет максимальное значение, если оба вектора совпадают по направлению.

Градиент функции в данной точке указывает напрвление наиболее быстрого возрастания функции.

Величина градиента, т.е. | grad z | = $\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$ и определяет крутизну наибольшего ската или подъема поверхности $z = f(x, y)$.

Пример. Найти производную функции $z = x^2+y^2-xy+2x+3y$ в точке M(–9,–1) в направлении, идущем от этой точки к точке N(4,5).

Решение. Вычислим z'_x и z'_y.

$z'_x = 2x-y+2$, $z'_y = 2y-x+3$. Найдем значения этих производных в точке M.

$z'_x|_M = -18+1+2=-15$, $z'_y|_M = -2+9+3=10$.

Найдем вектор $\overline{MN}$: $\overline{MN} = (4+9,\ 5+1)=(13,6)$. Так как этот вектор лежит в плоскости, то его направление определяется углом между этим вектором и осью Ox, а производная по направлению определяется по формуле $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos a + \frac{\partial u}{\partial y}\sin a$.

Вычислим $\cos a$ и $\sin a$: $\cos a = \frac{13}{\sqrt{13^2+6^2}} = \frac{13}{\sqrt{205}}$, $\sin a = \frac{6}{\sqrt{205}}$.

5. Экстремум функции нескольких переменных.

О п р е д е л е н и е . Функция $f(M)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ локальный минимум, если $f(M) > f(M_0)$ для любых точек $M \in O_{\varepsilon}(M_0)$, $M \neq M_0$.

О п р е д е л е н и е . Функция $f(M)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ локальный максимум, если $f(M) < f(M_0)$ для любых точек $M \in O_{\varepsilon}(M_0)$, $M \neq M_0$.

Локальный максимум и локальный минимум называются экстремумами функции многих переменных.

Эти определения можно перефразировать в терминах приращений. Если $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, то, как известно, полным приращением функции многих переменных является

$$\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Если $\Delta f < 0$ для всех малых приращений независимых переменных, то $f(x, y)$ достигает локального максимума в точке $M_0(x_0, y_0)$. Если $\Delta f > 0$ для всех малых приращений независимых переменных, то $f(x, y)$ достигает локального минимум в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Необходимое и достаточное условия экстремума

Функция $z = f(x, y)$ может иметь экстремум лишь в тех точках, в которых обе частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ обращаются в ноль или перестают существовать.

Действительно, фиксируя попеременно $x = x_0$ или $y = y_0$, получим попеременно функцию одного аргумента, для которой воспользуемся необходимым условием экстремума функции одного переменного.

Эта теорема не является достаточной, но позволяет находить точки, «подозрительные на экстремум».

Пусть в некоторой области, содержащей точку $M_0(x_0, y_0)$, функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка в точке $M_0(x_0, y_0)$ и некоторой её окрестности. Пусть, кроме того, пусть в этой точке $M_0(x_0, y_0)$ выполняются необходимые условия экстремума функции $f(x, y)$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = 0, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = 0. \qquad (1)$$

Тогда функция $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет максимум, если

$$B^2 - A\cdot C < 0,\ A < 0;$$

функция $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет минимум, если

$$B^2 - A\cdot C < 0,\ A > 0;$$

функция $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ не имеет ни максимума, ни минимума, если

$$B^2 - A\cdot C > 0;$$

функция $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ может иметь, и может не иметь экстремум (в этом случае требуются дополнительные исследования), если

$$B^2 - A\cdot C = 0;$$

где $$A = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\ B = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\ C = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}.$$

6. Функция Кобба-Дугласса.

[Cobb—Douglas production function] — производственная функция, примененная американскими исследователями Ч. Коббом и П. Дугласом при анализе развития экономики США в 20—30-х гг. XX века. Имеет простую алгебраическую форму:

$N = A \cdot L^{\alpha}K^{\beta}$,

где N — национальный доход; A — коэффициент размерности; L и K — соответственно объемы приложенного труда и капитала; α и β — константы (коэффициенты эластичности производства по труду L и капиталу K).

Функция — однородная степени $\alpha+\beta$; следовательно, увеличение L и K в одинаковое число раз m увеличивает доход в $m^{\alpha+\beta}$ раз. Если сумма $\alpha+\beta$ равна единице — функция линейно однородная; если больше или меньше единицы, имеет место *эффект масштаба* (соответственно положительный или отрицательный).

К.—Д. ф. основывается на предположениях о понижающейся предельной отдаче ресурсов (см. *Закон убывающей отдачи*, *Предельный эффект затрат*), постоянстве коэффициентов эластичности производства по затратам ресурсов. *Эластичность замещения ресурсов* в любой точке кривой К.—Д. ф. равна единице.

Хотя К.—Д. ф. нельзя отнести к линейным, значения *параметров* A, α, β можно оценить с помощью линейного *регрессионного анализа* по *методу наименьших квадратов*. Для этого ее приводят к линейному виду, прологарифмировав обе части уравнения (обычно здесь берутся натуральные логарифмы):

$$lnN = ln\,A + \alpha\, lnL + \beta\, lnK\,.$$

Модификация функции, учитывающая технический прогресс, достигается введением дополнительного сомножителя e^{π}, где π — темп технического прогресса (константа).

1.19 Лекция №19 (2 часа).

Тема: «Интегральное исчисление»

1.19.1 Вопросы лекции:

1. Первообразная функции и ее свойства.
2. Понятие неопределенного интеграла, основные свойства.
3. Таблица интегралов.
4. Методы интегрирования: непосредственное интегрирование, замена переменной, интегрирование по частям.

1.19.2 Краткое содержание вопросов:

1. Первообразная функция и ее свойства

Одной из основных задач дифференциального исчисления является отыскание производной заданной функции. Обратной задачей является нахождение по данной функции $f(x)$ такой функции $F(x)$, производная которой была бы равна функции $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$.

Восстановление функции по известной производной этой функции составляет одну из основных задач интегрального исчисления.

ОПР: Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на некотором промежутке X,

если для всех значений x из этого промежутка выполняется равенство

$$F'(x) = f(x)$$

Примеры: 1) $F(x) = \sin x$ - первообразная для функции $f(x) = \cos x$ на множестве R, т. к. $(\sin x)' = \cos x,\ \forall x \in R$

2) $F(x) = x^3$ - первообразная для функции $f(x) = 3x^2$ на множестве R, т. к. $(x^3)' = 3x^2$

Зам: $F(x) = x^3 + C$, где C=const тоже является первообразной для функции $f(x) = 3x^2$, т. к. $(x^3 + C)' = 3x^2$

ТЕОРЕМА: Если $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, то любая другая первообразная для функции $f(x)$ на этом промежутке X, может быть представлена в виде $F(x) + C$, где C- некоторая постоянная.

Доказательство: Пусть $\hat{O}(x)$- другая первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, т. е. $\hat{O}'(\tilde{o}) = f(x)$

Рассм. $(\hat{O}(\tilde{o}) - F(x))' = \hat{O}'(\tilde{o}) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \Rightarrow$

$\hat{O}(\tilde{o}) - F(x) = C \quad \Rightarrow \quad \hat{O}(x) = F(x) + C$ ч. т. д.

2. Понятие неопределенного интеграла, основные свойства

ОПР: Если функция $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$, то множество функций $F(x)+C$, где C=const, называется *неопределённым интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается символом

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

f(x)- подынтегральная функция, f(x)dx-подынтегральное выражение, x- переменная интегрирования.

Пример: Проверить, что $\int 4x^3dx = x^4 + C$

Продифференцируем: $(x^4+C)' = 4x^3$, получим подынтегральную функцию $\Rightarrow$ интегрирование выполнено верно.

Основные свойства неопределённого интеграла:

1) $(\int f(x)dx)' = f(x)$ *и* $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$

Доказательство: 1) $(\int f(x)dx)' = (F(x)+C)' = F'(x)+0 = f(x)$

2) $d(\int f(x)dx) = (\int f(x)dx)'dx = f(x)dx$

2) $\int dF(x) = F(x)+C$

Доказательство: $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x)+C$

3) $\int k\cdot f(x)dx = k\cdot\int f(x)dx$

4) $\int (f(x)\pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

3. Таблица интегралов

1) $\int U^n dU = \dfrac{U^{n+1}}{n+1} + C,\ n\neq -1$

2) $\int \dfrac{dU}{\sqrt{U}} = 2\sqrt{U} + C$

3) $\int \dfrac{dU}{U^2} = -\dfrac{1}{U} + C$

4) $\int \dfrac{dU}{U} = \ln|U| + C$

5) $\int \sqrt{U}dU = \dfrac{2}{3}U^{\frac{3}{2}} + C$

6) $\int dU = U + C$

7) $\int a^U dU = \dfrac{a^U}{\ln a} + C$

8) $\int e^U dU = e^U + C$

9) $\int \sin U dU = -\cos U + C$

10) $\int \cos U dU = \sin U + C$

14) $\int \dfrac{dU}{\cos U} = \ln\left|tg\left(\dfrac{U}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$

15) $\int \dfrac{dU}{\cos^2 U} = tgU + C$

16) $\int \dfrac{dU}{\sin^2 U} = -ctgU + C$

17) $\int \dfrac{dU}{a^2+U^2} = \dfrac{1}{a}arctg\dfrac{U}{a} + C$

18) $\int \dfrac{dU}{1+U^2} = arctgU + C$

19) $\int \dfrac{dU}{\sqrt{a^2-U^2}} = \arcsin\dfrac{U}{a} + C$

20) $\int \dfrac{dU}{\sqrt{1-U^2}} = \arcsin U + C$

21) $\int \dfrac{dU}{a^2-U^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+U}{a-U}\right| + C$

22) $\int \dfrac{dU}{U^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{U-a}{U+a}\right| + C$

23) $\int \dfrac{dU}{\sqrt{U^2\pm a^2}} = \ln\left|U+\sqrt{U^2\pm a^2}\right| + C$

11) $\int tgUdU = -\ln|\cos U| + C$

12) $\int ctgUdU = \ln|\sin U| + C$

13) $\int \frac{dU}{\sin U} = \ln\left|tg\frac{U}{2}\right| + C$

24) $\int \frac{dU}{\sqrt{U^2 \pm a}} = \ln\left|U + \sqrt{U^2 \pm a}\right| + C$

25) $\int \frac{dU}{U \pm a} = \ln|U \pm a| + C$

4. Методы интегрирования: непосредственное интегрирование, замена переменной, интегрирование по частям.

Непосредственное интегрирование

Заключается в вычислении интегралов путём непосредственного использования табдицы простейших интегралов и основных свойств интегралов.

Примеры: 1) $\int (5\cos x + 2 - 3x^2 + \frac{4}{x} - \frac{7}{x^2+1})dx$

2) $\int (\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})^2 dx$ 3) $\int tg^2 xdx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$

Замена переменной

Часто введение новой переменной позволяет свести нахождение интеграла к нахождению табличного, т. е. перейти к непосредственному интегрированию.

Рассм $\int f(x)dx$

Обозначим

$$x = \varphi(t)$$

тогда $dx = d(\varphi(t)) \Rightarrow dx = \varphi'(t)dt$ подставим в исходный интеграл:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

Зам: На практике обычно обозначают некоторую функцию от x через t $\psi'(x) = t$

Примеры:

1) $\int \frac{x^3dx}{(x-1)^2} = \left|\begin{matrix} x-1=t \Rightarrow d(x-1)=dt \\ dx = dt \end{matrix}\right| = \int \frac{(t+1)^3dt}{t^2} = \int \frac{t^3+3t^2+3t+1}{t^2}dt = \frac{t^2}{2} + 3t + 3\ln|t| - \frac{1}{t} + C =$

$\frac{(x-1)^2}{2} + 3x - 3 + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$

2) $\int \frac{x^4dx}{x^5+7} = \left|\begin{matrix} x^5+7=t \\ d(x^5+7)=dt \\ (x^5+7)'dx = dt \\ 5x^4dx = dt \end{matrix}\right| = \frac{1}{5}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{5}\ln|t| + C = \frac{1}{5}\ln|x^5+7| + C$

3) $\int \sin^2 x\cos xdx = \left|\begin{matrix} \sin x = t \\ d(\sin x) = dt \\ (\sin x)'dx = dt \\ \cos xdx = dt \end{matrix}\right| = \int t^2dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$

Интегрирование простейших иррациональных выражений

Пример: $\int \frac{\sqrt{x}dx}{2+\sqrt{x}} = \left|\begin{matrix} \sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{matrix}\right| = \int \frac{t \cdot 2tdt}{2+t} = 2\int \frac{t^2dt}{2+t} =$

$\frac{t^2}{2+t}$ - неправильная дробь (степень числителя $\geq$ степени знаменателя)

$$\begin{array}{l|l} t^2 & \,t+2 \\ \cline{2-2} \underline{t^2+2t} & \,t-2 \quad \text{-целая часть} \\ \quad -2t & \\ \quad \underline{-2t-4} & \\ \qquad\quad 4 & \end{array}$$

остаток

Зам: деление ведём до тех пор, пока степень остатка не станет меньше степени делителя

$$\frac{3}{2}=1+\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{t^2}{t+2}=t-2+\frac{4}{t+2}$$

$$=2\int(t-2+\frac{4}{t+2})dt=t^2-4t+8\ln|t+2|+C=x-4\sqrt{x}+8\ln\left|\sqrt{x}+2\right|+C$$

Интегрирование выражений, содержащих квадратный трёхчлен в знаменателе

А) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}=I_1$ Б) $\int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{x^2+px+q}}=I_2$

Решаются методом подстановки. Нужно выделить полный квадрат под знаком корня.
Рассм.

$$I_2=\int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{x^2+px+q}}=\left|\begin{array}{c} x^2+px+q=(x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4})-\frac{p^2}{4}+q= \\ =(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})=t^2\pm a^2 \\ \boxed{x+\frac{p}{2}=t} \quad\Rightarrow\quad x=t-\frac{p}{2} \quad u \quad q-\frac{p^2}{4}=\pm a^2 \\ dx=dt \end{array}\right|=\int\frac{(A(t-\frac{p}{2})+B)dt}{\sqrt{t^2\pm a^2}}=A\int\frac{tdt}{\sqrt{t^2\pm a^2}}+$$

$$+(B-\frac{Ap}{2})\int\frac{dt}{\sqrt{t^2\pm a^2}}=A\sqrt{t^2\pm a^2}+(B-\frac{Ap}{2})\ln\left|x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right|+C$$

А) $\int\frac{dx}{x^2+px+q}=I_3$ Б) $\int\frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q}=I_4$

Решаются аналогичной подстановкой

Зам: Выражение ax^2+bx+c всегда можно свести к x^2+px+q. Такой подстановкой решаем в том случае, если многочлен, стоящий в знаменателе имеет D<0 или представляет собой неточный квадрат.

Примеры:

$$1)\ \int\frac{(3x-5)dx}{x^2-2x+4}=\left|\begin{array}{c} ?\ (x^2-2x+4)'=2x-2\ ?\ \text{íå} \quad \text{òàáëè÷íûé} \quad \int\frac{dU}{U} \\ D=4-16\prec 0 \quad\Rightarrow \\ \Rightarrow \text{âûäåëÿåì} \quad \text{ïîëíûé} \quad \text{êâàäðàò â çíàìåíàòåëå} \quad \text{å} \end{array}\right|=\ldots$$

2) $\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2-2x-2}} = \left| \begin{array}{c} ?\ \int \frac{dU}{\sqrt{U}} = 2\sqrt{U}\ ? \\ x^2-2x-2=U \\ (2x-2)dx = dU \\ 2(x-1)dx = dU \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{2(x-1)dx}{\sqrt{x^2-2x-2}} = \sqrt{x^2-2x-2}+C$

3) $\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{2x^2+3x-2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2+\frac{3}{2}x-1}} = ...$

Интегрирование по частям

Рассмотрим непрерывные функции $u(x)$ и $v(x)$. Пусть существуют их производные $u'(x)$ и $v'(x)$.

Рассм. $(u\cdot v)' = u'v+uv'$

Рассм. $d(u\cdot v) = (uv)'dx = u'(x)v(x)dx + u(x)v'(x)dx = vdu+udv$

Рассм. $\int d(uv) = \int (vdu+udv)$

$uv = \int vdu + \int udv$ получим *формулу интегрирования по частям*

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Выпишем классы интегралов, решаемых этим методом:

I класс: $\left.\begin{array}{l} \int P(x)e^{ax}dx \\ \int P(x)\sin axdx \\ \int P(x)\cos axdx \end{array}\right\}$ $a\in R$, $u=P(x)$, $dv = \left\{\begin{array}{l} e^{ax}dx \\ \sin axdx \\ \cos axdx \end{array}\right.$

II класс: $\left.\begin{array}{l} \int P(x)\ln axdx \\ \int P(x)\arcsin axdx \\ \int P(x)\arccos axdx \\ \int P(x)arctgaxdx \\ \int P(x)arcctgaxdx \end{array}\right\}$ $a\in R$, $u = \left\{\begin{array}{l} \ln ax \\ \arcsin ax, \arccos ax \\ arctgax, arcctgax \end{array}\right.$ $dv = P(x)dx$

Примеры:

1) $\int x^2e^{-2x}dx = \left| \begin{array}{c} u=x^2 \\ dv = e^{-2x}dx \\ du = d(x^2) \\ u = 2xdx \\ v = \int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{array} \right| = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \int e^{-2x}xdx = \left| \begin{array}{c} u = x \\ dv = e^{-2x}dx \\ du = dx \\ v = \int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{array} \right| = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} +$

$+(-\frac{1}{2}xe^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}dx) = -\frac{1}{2}e^{-2x}(x^2+x+\frac{1}{2})+C$

2) $\int \ln(2x-5)dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln(2x-5) \\ dv = dx \\ du = d(\ln(2x-5)) \\ du = \frac{2}{2x-5}dx \\ v = \int dx = x \end{array} \right| = x\ln(2x-5) - \int \frac{2xdx}{2x-5} = x\ln(2x-5) - x - \frac{5}{2}\ln|2x-5| + C$

III класс: Под знаком интеграла обе функции не алгебраические

$\int e^{ax}\sin bxdx \qquad \int\sqrt{a^2-x^2}dx$

$\int e^{ax}\cos bxdx \qquad \int\sqrt{x^2-a^2}dx$

Без разницы, что обозначать через u и dv. Метод применяется два раза, главное сохранить обозначение.

Примеры:

1)

$$\int e^x\sin 5xdx = \left|\begin{matrix} u=e^x \\ dv=\sin 5xdx \\ du=e^x dx \\ v=\int\sin 5xdx=-\frac{1}{5}\cos 5x\end{matrix}\right| = -\frac{1}{5}e^x\cos 5x+\frac{1}{5}\int e^x\cos 5xdx = \left|\begin{matrix} u=e^x - \text{подстановка} \\ \text{такая же, как и в первый раз} \\ dv=\cos 5xdx \\ du=e^x dx \\ v=\int\cos 5xdx=\frac{1}{5}\sin 5x\end{matrix}\right|$$

$=-\frac{1}{5}e^x\cos 5x+\frac{1}{25}e^x\sin 5x-\frac{1}{25}\int e^x\sin 5xdx$ Интеграл повторился. Обозначим его через I, получим:

$$I==-\frac{1}{5}e^x\cos 5x+\frac{1}{25}e^x\sin 5x-\frac{1}{25}I$$

$$I=\frac{5}{26}e^x(-\cos 5x+\frac{1}{5}\sin 5x)+C$$

2) $\int\sqrt{x^2-4}dx=\int\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2-4}}dx=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-4}}-4\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}=$

Рассм. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-4}}=\left|\begin{matrix} u=x \\ dv=\frac{xdx}{\sqrt{x^2-4}} \\ du=dx \\ v=\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-4}}=\left|\begin{matrix}x^2-4=t\\2xdx=dt\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=\sqrt{x^2-4}\end{matrix}\right|=x\sqrt{x^2-4}-\int\sqrt{x^2-4}dx$

$$=x\sqrt{x^2-4}-\int\sqrt{x^2-4}dx-4\ln\left|x-\sqrt{x^2-4}\right| \quad\Rightarrow$$

$$I=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4}-2\ln\left|x-\sqrt{x^2-4}\right|+C$$

1.20 Лекция №20 (2 часа).

Тема: «Интегрирование рациональных функций»

1.20.1 Вопросы лекции:

1. Понятие рациональной функции.
2. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование.
3. Интегрирование рациональных функций.

1.20.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие рациональной функции

Обозначим многочлен n-ой степени через $P_n(x)$

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n$$

$$P_0(x)=A - \text{мн } 0-\text{ой степ}, \quad P_1(x)=Ax+B-\text{мн } 1-\text{ой степ}, \quad P_2(x)=Ax^2+Bx+C-\text{мн } 2-\text{ой степ}...$$

Вспомним: 1) Два многочлена одинаковой степени называются *равными*, если равны их коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях неизвестных.

2) Значение переменной x, обращающее многочлен в 0, называется *корнем* многочлена

3) Целые корни многочлена, если они существуют, находятся среди делителей свободного члена

4) Каждый многочлен делится нацело на разность мехду x и его корнем.
<u>Пример:</u> Разложить на множителе многочлены:

1) $P_2(x) = 2x^2 - 10x + 12 = 2(x-2)(x-3)$

2) $P_3(x) = x^3 + 2x^2 + 2x = x(x^2 + 2x + 2)$

3) $P_4(x) = (x-1)(x^3 - 1) = (x-1)(x-1)(x^2 + x + 1) = (x-1)^2(x^2 + x + 1)$

4) $P_3(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4 = x^2(2x-1) - 4(2x-1) = (2x-1)(x^2 - 4) = 2(x - \frac{1}{2})(x-2)(x+2)$

5) $P_4(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x = x(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$

Найдём корни $x_1=0$ и $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

$-6 \div \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Проверим: 1: 1-6+11-6=0-верно, значит $x_2=1$ – корень

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x - 1 \\
\cline{2-2}
\underline{x^3 - x^2} & x^2 - 5x + 6 \\
\quad -5x^2 + 11x - 6 & \\
\quad \underline{-5x^2 + 5x} & \\
\qquad 6x - 6 & \\
\qquad \underline{6x - 6} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

$\Rightarrow \quad x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6) =$

$= (x-1)(x-2)(x-3)$

$P_4(x) = (x-1)(x-2)(x-3) -$ *мнгочлен 4ой степени*

6) $P_6(x) = x^6 - 16x^2 = x^2(x^4 - 16) = x^2(x-2)(x+2)(x^2+4)$

Рациональные дроби

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} - \textit{рациональная дробь} \Rightarrow \begin{cases} m > n - \textit{правильная дробь} \\ m \le n - \textit{неправильная дробь} \end{cases}$$

2. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование

Существует 4 типа простейших правильных дробей:

I тип: $\dfrac{A}{x-k}$, $k \in R$, $k -$ *корень знаменателя*

II тип: $\dfrac{A}{(x-k)^\alpha}, \alpha \ge 2$, $k -$ *корень кратности* α

III тип: $\dfrac{Ax+B}{x^2 + px + q}$, $D < 0$

IV тип: $\dfrac{Ax+B}{(x^2 + px + q)^\alpha}, \alpha \ge 2$, $D < 0$

Рассм.: I: $\displaystyle\int \frac{Adx}{x-k} = A\ln|x-k| + C$

II: $\displaystyle\int \frac{Adx}{(x-k)^\alpha} = A\int (x-k)^{-\alpha}dx = \frac{A}{(1-\alpha)(x-k)^{1-\alpha}} + C$

III: $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{x^2 + px + q}dx -$ *интеграл от дроби с квадрвтным трёхченом в знаменателе*

$D < 0$

IV: $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(x^2 + px + q)^\alpha}dx -$ *рекурентная формула*

$D < 0$

Основана на выделении полного квадрата в знаменателе. Метод применяют несколько раз, каждый раз степень в знаменателе понижается на 1

3. Интегрирование рациональных функций

Разложение рациональных дробей на простейшие

Любую *правильную* дробь можно единственным образом представить (разложить) в виде суммы простейших дробей. Это разложение зависит от корней многочлена, стоящего в знаменателе.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)},\quad n<m-\underline{\textit{правильная дробь.}}\ (\textit{Если дробь неправильная, то сначала выделим целую часть})$$

Разложим многочлен, стоящий в знаменателе на произведение элементарных множителей.

$$Q_m(x)=(x-k)^t(x^2+px+q)^s$$

$$\frac{P_n(x)}{\underbrace{(x-k)^t}_{\substack{t\ \textit{дробейв}\\ \textit{разложении}\\ I\ \textit{и}\ II\ \textit{типа}}}\underbrace{(x^2+px+q)^s}_{\substack{s\ \textit{дробейв}\\ \textit{разложении}\\ III\ \textit{и}\ IV\ \textit{типа}}}}=\underbrace{\frac{A}{x-k}+\frac{B}{(x-k)^2}+\frac{C}{(x-k)^3}+\ldots+\frac{D}{(x-k)^t}}_{t\ \textit{дробей}}+\underbrace{\frac{Ex+F}{x^2+px+q}+\frac{Gx+K}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^s}}_{s\ \textit{дробей}}$$ гд

е A,B,C,D,E,F…M,N-некоторые числа, которые вычисляются *методом неопределённых коэффициентов.*

Чтобы найти коэффициенты, нужно привести сумму дробей к общему знаменателю. Получим две равные дроби, причём у них одинаковые знаменатели $\Rightarrow$ приравниваем числители. Учитывая, что два многочлена равны, если равны коэффициенты при соответствующих степенях неизвестных, находим коэффициенты A,B,C,D…M,N.

Примеры: $1)\int\frac{(x^3+4)dx}{x^3+2x^2}$ $\qquad 2)\int\frac{(x^2-1)dx}{x^3-27}$

1.21 Лекция №21 (2 часа).
Тема: «Определенный интеграл»

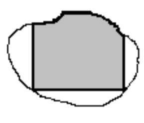
1.21.1 Вопросы лекции:

1. Понятие определенного интеграла, его основные свойства.
2. Геометрический и экономический смысл определенного интеграла.
3.Формула Ньютона – Лейбница.
4. Методы интегрирования в определенном интеграле.

1.21.2 Краткое содержание вопросов:

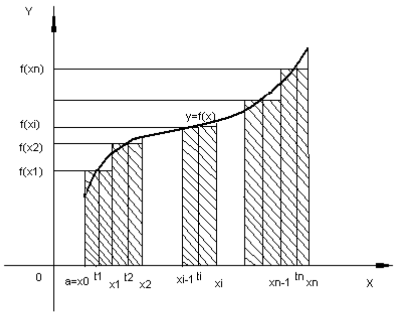
1. Понятие определенного интеграла, его основные свойства

Исторически возникла потребность вычислять площадь произвольной фигуры, в частности - криволинейной трапеции. Любую фигуру можно представить в виде нескольких криволинейных трапеций. Таким образом, если мы научимся вычислять площадь произвольной криволинейной трапеции, то мы сможем вычислять площади различных фигур.



Перенесём криволинейную трапецию в ПДСК т. о., что её основание совпадёт с отрезком $[a;b]$оси OX, слева и справа трапеция будет ограничена прямыми $x=a$ и $x=b$, а сверху – графиком функции $y=f(x)$,определённой и непрерывной на этом отрезке.

Разобьём отрезок $[a;b]$ на n сколь угодно малых частей (т. е. $n\to\infty$) произвольным образом, причём: $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n=b$.



Точки $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ - *<u>точки разбиения.</u>*

В каждом из полученных отрезков возьмём точку: $t_1 \in [x_0; x_1], t_2 \in [x_1; x_2], ..., t_i \in [x_{i-1}; x_i], ..., t_n \in [x_{n-1}; x_n]$

Обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ - длина элементарного отрезка разбиения $[x_{i-1}; x_i]$.

Каждой точке t_i соответствует значение функции $f(t_i)$. Построим прямоугольники с основаниями Δx_i и высотами $f(t_i)$. Сумма площадей всех полученных прямоугольников будет приблизительно равна площади данной криволинейной трапеции.

Составим сумму $\sigma = f(t_1)\Delta x_1 + f(t_2)\Delta x_2 + ... + f(t_i)\Delta x_i + ... + f(t_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$

σ (сигма)- *<u>интегральная сумма.</u>*

<u>Геометрический смысл:</u> σ- это сумма площадей прямоугольников с основаниями $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ и высотами $f(t_1), f(t_2), ..., f(t_n)$, если $f(x) \geq 0$. σ приблизительно равна площади данной криволинейной трапеции.

Обозначим через λ (лямбда) длину наибольшего отрезка разбиения $\lambda = \max\limits_{i=1,,,n}(\Delta x_i)$

Очевидно, что чем больше n, тем меньше λ (т. е. если $n \to \infty$, то $\lambda \to 0$) $\Rightarrow$ площадь криволинейной трапеции будет тем ближе к значению σ, чем больше n (или, чем меньше λ).
<u>ОПР:</u> Если существует конечный предел I интегральной суммы σ при $\lambda \to 0$, то этот предел называется *<u>определённым интегралом</u>* от функции $f(x)$ по отрезку $[a;b]$ и обозначается

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda \to 0} \sigma,$$

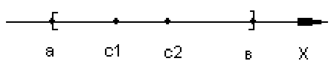
Функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a;b]$, a-нижний, b-верхний пределы интегрирования

<u>Основные свойства определённого интеграла:</u>

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$

2) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$

3)



$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^{c1} f(x)dx + \int\limits_{c1}^{c2} f(x)dx + \int\limits_{c2}^{b} f(x)dx$$

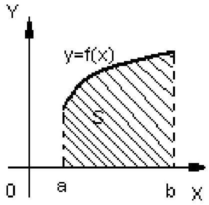
4) $\int\limits_a^b k \cdot f(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$

5) $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$

2. Геометрический и экономический смысл определенного интеграла

Пусть в ПДСК задана криволинейная трапеция, ограниченная отрезком $[a;b]$ на оси ОХ, прямыми х=а и х=в и сверху графиком функции $y = f(x)$ непрерывной на этом отрезке , её площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

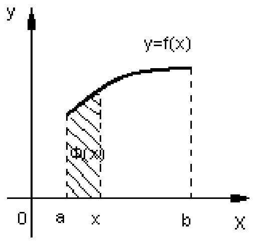


Определённый интеграл от неотрицательной непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ численно равен площади криволинейной трапеции с основанием $[a;b]$, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$.

Пусть функция $z = f(t)$ задает изменение производительности некоторого производства с течением времени. Тогда объем продукции u, произведенной за промежуток времени $[0, T]$, равен значению определенного интеграла от функции производительности от 0 до Т.

$$u = \int_0^T f(t)dt$$

3. Формула Ньютона – Лейбница



Если a зафиксировать, а значение b менять не выходя из отрезка $[a;b]$, получим <u>*интеграл с переменным верхним пределом*</u> $\int_a^x f(x)dx,\ ãäå\, a \le x \le b$

Очевидно, если x меняется, то и значение интеграла меняется, т. е. интеграл с переменным верхним пределом будет представлять собой функцию от верхнего предела х, т. о.

$$\int_a^x f(x)dx = \hat{O}(\tilde{o}),\ ãäå\, a \le x \le b$$

Геометрически функция Ф(х) представляет собой площадь заштрихованной криволинейной трапеции.

Вычисление определённого интеграла с помощью $\lim \sigma$ затруднительно, поэтому существует другой метод, основанный на теореме.

<u>ТЕОРЕМА</u> <u>*(Ньютона-Лейбница):*</u> Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и F(x)- некоторая её первообразная на этом отрезке, то справедлива формула: <u>формула Ньютона- Лейбница</u>

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

<u>Доказательство:</u> $\int_a^x f(x)dx = \Phi(x)$ - поопределению.

$\int_a^b f(x)dx = F(x)+C$ - по условию теоремы.

Т. к. разность двух первообразных есть const , то Ф(x)-F(x)=C

$$\Phi(x)=F(x)+C \quad \Rightarrow \int_a^x f(x)dx = F(x)+C$$

Пусть x=a: $\int_a^a f(x)dx = F(a)+C \Rightarrow 0 = F(a)+C \Rightarrow C = -F(a) \Rightarrow \int_a^x f(x)dx = F(x)-F(a)$

Пусть x=b: $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

<u>Пример:</u> $\int_1^3 x^2 dx = 8\frac{2}{3}$

4. Методы интегрирования в определенном интеграле

1) <u>*Замена переменной*</u> $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$

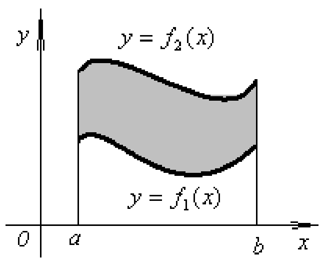
$x=\varphi(t)$	x	a	в	$\varphi(t)=a \Rightarrow t=\alpha$
$dx=\varphi'(t)dt$	t	α	β	$\varphi(t)=b \Rightarrow t=\beta$

2) <u>*Интегрирование по частям*</u> $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

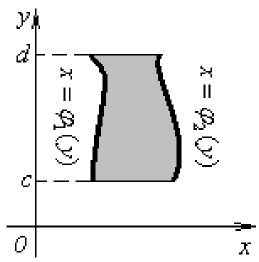
1.22 Лекция №22 (2 часа).
Тема: «Приложения определенного интеграла»

1.22.1 Вопросы лекции:
1. Площадь фигур на плоскости.
2. Нахождение объема тела вращения.

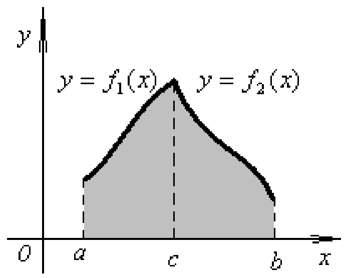
1.22.2 Краткое содержание вопросов:
1. Площадь фигур на плоскости
Возможные случаи расположения линий:



$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$

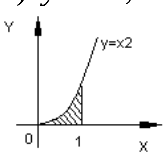


$S = \int_c^d (\varphi_1(y) - \varphi_2(y))dy$



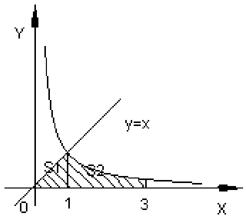
$S = \int_a^c f_1(x)dx + \int_c^b f_2(x)dx$

<u>Примеры:</u> Найти площадь фигуры, ограниченной
1) $y = x^2, x = 1$ и осью OX.



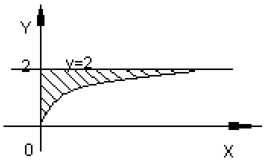
$$S = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

2) $y = x, y = \dfrac{1}{x^2}, y = o, x = 3$



$$S = S1 + S2 = \int_0^1 x dx + \int_1^3 \frac{1}{x^2} dx = 1\frac{1}{6}$$

3) $y = \sqrt{x}, y = 2, x = 0$

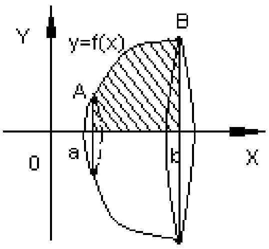


$$S = \int_0^4 (2 - \sqrt{x}) dx = 2\frac{2}{3}$$

2. Нахождение объема тела вращения

Объём и площадь поверхности тела вращения

Пусть имеем функцию $y = f(x), a \le x \le b, f(x) > 0$ и непрерывна.



Будем вращать дугу АВ вокруг оси ОХ, получим тело вращения, площадь поверхности которого вычисляется по формуле $S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

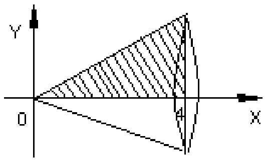
И объём вычисляется по формуле $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$

Заметим, если дугу вращать вокруг оси ОУ, то выразим х через у

$x = \varphi(y), c \le y \le d$, тогда площадь поверхности тела вращения вокруг оси ОУ вычисляется по формуле $S = 2\pi \int_c^d \varphi(y)\sqrt{1 + (\varphi'(y))^2} dy$

И объём тела вращения вокруг оси ОУ вычисляется по формуле $V = \pi \int_c^d (\varphi(y))^2 dy$

<u>Пример:</u> Фигура, ограниченная прямыми $y = \dfrac{3}{4}x, x = 4$ и осью ОХ, вращается вокруг оси ОХ. Вычислить площадь поверхности и объём полученного тела вращения.



$$1) S=2\pi\int_0^4 \frac{3}{4}x\sqrt{1+\frac{9}{16}}dx=15\pi \qquad 2) V=\pi\int_0^4 \frac{9}{16}x^2dx=12\pi$$

1.23 Лекция №23 (2 часа).
Тема: «Несобственные интегралы»

1.23.1 Вопросы лекции:
1. Понятие несобственного интеграла.
2. Несобственные интегралы первого рода.
3. Несобственные интегралы второго рода.

1.23.2 Краткое содержание вопросов:
1. Понятие несобственного интеграла

Рассмотрим $\int\limits_a^b f(x)dx$: 1) $[a;b]$-конечный

2) $f(x) - \textit{непрерывнв}\ \forall x \in [a;b]$

При выполнении этих условий, получаем собственный интеграл. Если хотя бы одно из этих условий нарушается, то получаем *несобственный интеграл.*

Обозначим $I(x)=\int\limits_a^x f(x)dx$ -функция от х

ОПР: $\lim\limits_{x\to\infty} I(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx,\ \textit{где}\ f(x)\in[a;+\infty)$ называется *несобственным интегралом*

1) если $\exists \lim\limits_{x\to\infty} I(x)$, причём конечный, то интеграл сходится;

2) если $\textit{не}\exists \lim\limits_{x\to\infty} I(x)\ \textit{или} = \infty$, то интеграл расходится.

Примеры:

1) $\int\limits_0^\infty e^{-x}dx=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^b e^{-x}dx=\lim\limits_{b\to\infty}(-\frac{1}{e^x})\Big|_0^b=\lim(-\frac{1}{e^x})\Big|_0^\infty=-\frac{1}{\infty}+\frac{1}{1}=1$-сходится

2) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to\infty}(\ln b-\ln 1)=\infty$-расходится

2. Несобственные интегралы первого рода

Пусть функция $f(x)$ определена на полуоси $[a,+\infty)$ и интегрируема по любому отрезку $[a,b]$, принадлежащему этой полуоси. Предел интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ при $b\to+\infty$ называется несобственным интегралом функции $f(x)$ от a до $+\infty$ и обозначается $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Итак, по определению, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$. Если этот предел существует и конечен, интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся; если предел не существует или бесконечен, интеграл называется расходящимся.

Примеры: 1. $\int\limits_0^{+\infty}\cos x dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^b \cos x dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \sin x\Big|_0^b = \lim\limits_{b\to+\infty}(\sin b - \sin 0) = \lim\limits_{b\to+\infty}\sin b$; этот предел не существует; следовательно, исследуемый интеграл расходится.

Аналогично интегралу с бесконечным верхним пределом интегрирования определяется интеграл в пределах от $-\infty$ до b: $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx \overset{\text{опр.}}{=} \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ и в пределах от $-\infty$ до $+\infty$: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \overset{\text{опр.}}{=} \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)dx + \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_c^b f(x)dx$. В последнем случае $f(x)$ определена на всей числовой оси, интегрируема по любому отрезку; c - произвольная (собственная) точка числовой оси; интеграл называется сходящимся, если существуют и конечны оба входящих в определение предела. Пользуясь свойством аддитивности определённого интеграла, можно показать, что существование конечных пределов и их сумма не зависят от выбора точки c.

Примеры: 3. $\int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\left(\int\limits_a^0 e^x dx\right) = \lim\limits_{a\to-\infty}\left(e^x\Big|_a^0\right) = \left(e^0 - \lim\limits_{a\to-\infty} e^a\right) = e^0 = 1$. Интеграл сходится.

Формула Ньютона-Лейбница для несобственного интеграла. В приведённых примерах мы сначала вычисляли с помощью первообразной функции определённый интеграл по конечному промежутку, а затем выполняли предельный переход. Объединим два этих действия в одной формуле. Символом $F(+\infty)$ будем обозначать $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$; символом $F(-\infty)$ - соответственно, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$; тогда можно записать

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty}, \quad \int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b}, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty},$$

подразумевая в каждом из этих случаев существование и конечность соответствующих пределов. Теперь решения примеров выглядят более просто: $\int\limits_5^{+\infty}\frac{dx}{x^3} = \frac{-1}{2x^2}\Big|_5^{+\infty} = \frac{1}{50}$ - интеграл сходится; $\int\limits_5^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_5^{+\infty} = +\infty$ - интеграл расходится.

3. Несобственные интегралы второго рода

Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $(a, b]$, интегрируема по любому отрезку $[a+\varepsilon, b]\ (0<\varepsilon<b-a)$, и имеет бесконечный предел при $x\to a+0: \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$.

Несобственным интегралом от $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ называется предел $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$. Если этот предел конечен, говорят, что интеграл сходится; если предел не существует или бесконечен, говорят, что интеграл расходится.

Примеры: $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{x}} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} -\frac{2}{\sqrt{x}}\Big|_{\varepsilon}^{2} = \infty$ - интеграл расходится.

1.24 Лекция №24 (2 часа).
Тема: «Комплексные числа»

1.24.1 Вопросы лекции:
1. Определение комплексных чисел.
2. Действия над комплексными числами в алгебраической форме
3. Тригонометрическая форма комплексного числа. Формула Муавра
4. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

1.24.2 Краткое содержание вопросов:
1. Определение комплексных чисел
$x^2+1=0$ - это уравнение до конца 15 века было неразрешённым. Сначала комплексные числа не признавали, теперь без них нельзя обойтись. Как же решить данное уравнение?
$x^2=-1$. Во множестве действительных чисел нет такого числа, квадрат которого был бы равен отрицательному числу.
$x=\pm\sqrt{-1}$
Обозначим $\boxed{\sqrt{-1}=i}$ и назовём *мнимая единица*.
$x_{1/2}=\pm i$ $\boxed{i^2=-1}$
$\boxed{z=x+yi}$, где $x\ и\ y\in R$, x – действительная часть числа,
$y\,i$ – мнимая часть,
y – коэффициент при мнимой части.

Пример: $z=2+3i,\quad 5=5+0i$. Эти числа расширяют класс чисел, т.к. любое действительное число может быть представлено в виде комплексного числа.

Замечания: 1) Комплексное число равно 0 тогда и только тогда, когда его действительная часть и коэффициент при мнимой части равны нулю.
2) Два комплексных числа $z_1=x_1+y_1i$ и $z_2=x_2+y_2i$ называются *равными*, если
$\begin{cases}x_1=x_2\\ y_1=y_2\end{cases}$
$\boxed{z=x+yi}$ - *алгебраическая форма комплексного числа*.
Рассмотрим $x+yi\ \ и\ \ x-yi$ - *комплексно-сопряжённые числа*.

2. Действия над комплексными числами в алгебраической форме
1) Чтобы сложить алгебраически два комплексных числа нужно сложить их действительные части и коэффициенты при мнимых частях.
$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+(y_1\pm y_2)\,i$
2) Умножение комплексных чисел производится по правилу умножения многочленов.
Пример: $(x+yi)\cdot(x-yi)=x^2-xyi+yix-y^2i^2=x^2+y^2$
Произведение двух комплексно-сопряжённых чисел равно сумме квадрата действительной части и квадрата коэффициента при мнимой части. Обратное тоже верно.

$$\boxed{\begin{aligned}&i^1=i\\&i^2=-1\\&i^3=i^2\cdot i=-i\\&i^4=i^3\cdot i=-i\cdot i=1\end{aligned}}$$

$i^5=i^4\cdot i=1\cdot i=i$ Различных значений степени i четыре. Этим пользуются при умножении.
$i^6=i^5\cdot i=i\cdot i=-1...$

3) $\dfrac{x_1+y_1i}{x_2+y_2i}=\dfrac{(x_1+y_1i)(x_2-y_2i)}{(x_2+y_2i)(x_2-y_2i)}=\dfrac{x_1x_2-x_1y_2i+y_1i\,x_2+y_1y_2}{{x_2}^2+{y_2}^2}=\dfrac{(x_1x_2+y_1y_2)+(x_2y_1-x_1y_2)\,i}{{x_2}^2+{y_2}^2}=$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}}+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}}i$$

Рассмотрим квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$. Возможнее следующие случаи:

1) $D>0\Rightarrow\quad x_1\neq x_2$

2) $D=0\Rightarrow\quad x_1\neq x_2$

3) $D<0\Rightarrow$ нет действительных корней, корни уравнения комплексно-сопряжённые. $x_1=\alpha+\beta i\quad u\quad x_2=\alpha-\beta i$

<u>Пример:</u> $x^2+2x+2=0$

$D=-4<0\Rightarrow$ нет действительных корней.

$x_{1/2}=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{-2\pm 2i}{2}=-1\pm i\qquad \begin{cases}x_1=-1+i\\ x_2=-1-i\end{cases}$ – комплексно-сопряжённые.

Найдём $\sqrt{-4}=\sqrt{(-1)\cdot 4}=2\sqrt{-1}=2i$

Проверка: $(-1+i)^2+2(-1+i)+2=1-2i+i^2-2+2i+2=1+i^2=1-1=0$ - верно. Аналогично для x_2.

Разложим данный многочлен на множители: $x^2+2x+2=(x+1-i)(x+1+i)$.

Обычно, если $D<0$, то многочлен не раскладывали на элементарные множители. Теперь мы можем решать квадратные уравнения при любом *D*.

<u>Пример:</u> $x^3+1=0$

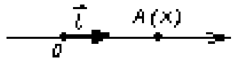
$(x+1)(x^2-x+1)=0$

$\left[\begin{array}{l}x+1=0\qquad x_1=-1\\ x^2-x+1=0\end{array}\right.$ - действительный корень.

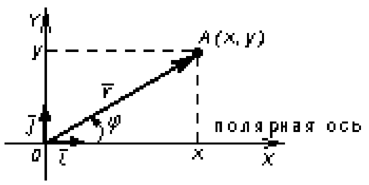
$D=-3<0$, $\sqrt{-3}=i\sqrt{3}$, $\quad x_{1/2}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\qquad \left[\begin{array}{l}x_1=-1\\ x_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\\ x_3=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\end{array}\right.$ Уравнение имеет 3 корня: *R* и два *C*.

3. Тригонометрическая форма комплексного числа. Формула Муавра

$\boxed{z=x+yi}$

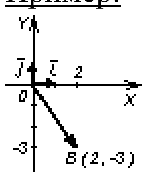


Числовая прямая. Одно число определяет положение точки на числовой прямой.



Две координаты определяют положение точки на плоскости $A(x,y)$, $\vec{r}(x,y)$ - радиус-вектор, изображающий комплексное число $z=x+yi$.

<u>Пример:</u> $z=2-3i$



С каждой точкой $z(x, y)$ плоскости связан *радиус-вектор* этой точки $\overrightarrow{Oz}$, длина которого r называется <u>*модулем комплексного числа z*</u> и обозначается $|z|$. Очевидно

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Угол φ, образованный радиус-вектором $\overrightarrow{Oz}$ с осью *Ox,* называется <u>*аргументом комплексного числа z*</u> и обозначается $Arg\, z$. Из значений $\varphi = Arg\, z$ выделяется ***главное*** значение $\arg z$, удовлетворяющее условию $-\pi < \arg z \le \pi$.

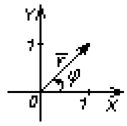
<u>Пример:</u> $\arg 5 = 0, \quad \arg(-3i) = -\pi/2, \quad \arg(1-i) = -\pi/4$

Очевидно, что $\qquad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$

Поэтому $z = r\cos\varphi + i\cdot r\sin\varphi$, т.е. $\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$ - <u>*тригонометрическая форма комплексного числа*</u>.

<u>Пример:</u> $z_1 = 1 + i \quad u \quad z_2 = -1 - i$

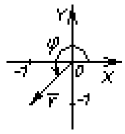
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\qquad tg\varphi = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \quad \varphi = arctg\dfrac{y}{x}$



$\vec{r}_1(1,1), \quad r_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad tg\varphi_1 = 1 \Rightarrow \quad \varphi_1 = \pi/4$

$1 + i = \sqrt{2}(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4)$

Проверка: $\sqrt{2}(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4) = \sqrt{2}(1/\sqrt{2} + i\ 1/\sqrt{2}) = 1 + i$ - верно.



$\vec{r}_2(-1,-1), \quad r_2 = \sqrt{2}, \quad tg\varphi_2 = 1$. Заметим, что $tg\varphi_1 = tg\varphi_2$, но углы различные.

$\varphi_2 \in III$ четверти, поэтому $\quad tg\varphi_2 > 0 \quad$ и $\quad \varphi_2 = \dfrac{5\pi}{4}$

$-1 - i = \sqrt{2}(\cos 5\pi/4 + i\sin 5\pi/4)$

Поэтому для перехода из алгебраической формы в геометрическую необходимо построить комплексное число.

4. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме:

Пусть имеем два комплексных числа: $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

1) $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

3) $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ - формула Муавра.

Извлечение корня из комплексного числа

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

где *к* принимает значения $= 0,1,2\ldots(n\text{-}1)$, *к* и $n \in N$

<u>Пример:</u> $\sqrt[3]{1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4})} = \begin{vmatrix} n = 3 \\ k = 0,1,2 \end{vmatrix} =$

$k = 0: \quad \sqrt[3]{1+i} = \sqrt[6]{2}(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12})$

$k = 1:$

$k = 2:$

1.25 Лекция №25 (2 часа).
Тема: «Дифференциальные уравнения»

1.25.1 Вопросы лекции:
1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
2. Частные и общие решения. Задача Коши.
3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

1.25.2 Краткое содержание вопросов:
1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям
Раньше мы встречались с такими зависимостями:
Дано: $v(x)=t^2+5t-3$
Найти: закон движения S(t)
$S'(t)=v(t)=t^2+5t-3 \Rightarrow \dfrac{dS}{dt}=t^2+5t-3$ - находим S интегрированием.
Т е мы получаем уравнение, содержащее производную, а производная есть отношение дифференциалов. Такое уравнение называется *дифференциальным.* Решением таких уравнений является искомая функция.

ОПР: *Дифференциальным уравнением* называется равенство, выражающее зависимость между аргументом, искомой функцией и её производными.
$F(x;y;y';y'';...;y^{(n)})=0$ (1)
Запишем это уравнение в виде: $y^{(n)}=F_1(x;y;y';y'';...;y^{(n-1)})$ (2)

ОПР: *Порядком* ДУ называется наивысший порядок входящей в него производной.
Уравнения (1) и (2) называются *ДУ n-го порядка.*

Рассмотрим ДУ I порядка:
$F(x;y;y')=0 \quad т.е. \quad y'=f(x;y)$

ОПР: *Решением ДУ* называется функция, обращающая его в верное равенство, т е в тождество.
Пример: Проверить является ли функция $y=e^{-x}$ решением ДУ $y''+2y'+y=0$
$y'=-e^{-x} \qquad y''=e^{x}$
$e^{-x}-2e^{-x}+e^{-x}=0$
$0\equiv 0 \Rightarrow \quad y=e^{-x}$
Рассмотрим дифференциальное уравнение $y'=f(x)$
$\dfrac{dy}{dx}=f(x)\Rightarrow dy=f(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int dy=\int f(x)dx \Rightarrow \quad y=\int f(x)dx+C$ - о*бщее решение* дифференциального
уравнения представляет собой множество функций.
ОПР: *Общим решением ДУ* n-го порядка называется функция, зависящая от аргумента и n произвольных постоянных. $y=\varphi(x;C_1;C_2:...:C_n)$

2. Частные и общие решения. Задача Коши
ОПР: *Частным решением ДУ* называется решение, полученное из общего при определенных значениях постоянных

ТЕОРЕМА (*о существовании и единственности частного решения ДУ I порядка):* Если в уравнении $y'=f(x;y)$, функции $f(x;y)$ и $f'_y(x;y)$ непрерывны в любой точке $(x_0;y_0)$, то $\exists!$ частное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $\begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \end{cases}$

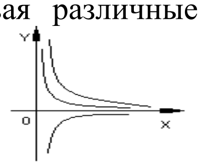
Задача нахождения частных решений по начальным условиям называется <u>*решением задачи Коши.*</u>

<u>Пример:</u> $y' = -\frac{y}{2x}$ - ДУ 1 порядка

1) Проверить, является ли функция $y = \frac{C}{\sqrt{x}}$ решением ДУ

$y' = -\frac{C}{2x\sqrt{x}}$ $\qquad \frac{C}{2x\sqrt{x}} = \frac{C/\sqrt{x}}{2x}$ - верно $\Rightarrow y = \frac{C}{\sqrt{x}}$ -общее решение ДУ

2) Придавая различные значения С, получим множество решений, которые называются



частными.

При С=0: y=0 При С=1: $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ При С=-2 $y = \frac{-2}{\sqrt{x}}$ и т д

3) График общего решения ДУ называется <u>*интегральными кривыми.*</u>

Нужно выбрать из множества $y = \frac{C}{\sqrt{x}}$ решений интегральную кривую, которая проходила бы через точку $\begin{cases} x_0 = 4 \\ y_0 = 1 \end{cases}$, т е решить задачу Коши с начальными условиями.

Подставим в общее решение $y = \frac{C}{\sqrt{x}}$ начальные условия: $1 = \frac{\tilde{N}}{\sqrt{4}} \Rightarrow \tilde{N} = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{x}}$ -частное решение, удовлетворяющее начальным условиям.

3. Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными

$\boxed{M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0}$ (4) –уравнение с разделяющимися переменными.

Разделим переменные, т е приведем уравнение к такому виду, чтобы в левой части равенства были функции, зависящие только от у, а в правой- только от х.

$M_2(y)N_2(y)dy = -M_1(x)N_1(y)dx \quad |: M_2(x)N_1(y) \neq 0$

$\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = -\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx$

Получим уравнение с разделенными переменными.

Проинтегрируем обе части равенства

$\int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = -\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx$

Решив интегралы, найдем решение ДУ

<u>Пример:</u> Решить ДУ 1-го порядка

$(xy - x)y' - (xy + 2y) = 0 - ДУ\,1\,пор.$

$(xy - x)\frac{dy}{dx} - (xy + 2y) = 0 \quad | \cdot dx$

$\underbrace{x}_{M_2(x)}\underbrace{(y-1)}_{N_2(y)}dy - \underbrace{y}_{N_1(y)}\underbrace{(x+2)}_{M_1(x)}dx = 0 - ДУ \quad |: xy$

$\int \frac{y-1}{y}dy = \int \frac{x+2}{x}dx$

$y = x + \ln|x^2 y| + C$

Решим задачу Коши при начальном условии $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{cases}$

1=1+ln1+C

С=0 $\Rightarrow y = x + \ln|x^2 y|$ - частное решение, удовлетворяющее начальным условиям.

1.26 Лекция №26 (2 часа).
Тема: «Дифференциальные уравнения первого порядка»

1.26.1 Вопросы лекции:
1. Линейные дифференциальные уравнения. Уравнения Бернулли. Метод Бернулли.
2. Однородные дифференциальные уравнения.
3. Разностные уравнения.

1.26.2 Краткое содержание вопросов:
1. Линейные дифференциальные уравнения. Уравнения Бернулли. Метод Бернулли

ОПР: *Линейным ДУ 1 порядка* называется уравнение вида $\boxed{y' + p(x)y = q(x)}$ (6) , где $p(x)$ и $q(x)$ - некоторые функции от х.

Одним из методов решения таких уравнений является *метод Бернулли.*

Решение ДУ ищут в виде $y = u(x)\cdot v(x),$ ãäå $u(x)$ и $v(x)$ -неизвестные функции от х.

$$\begin{array}{l} y = uv \\ y' = u'v + uv' \end{array}$$ подставим в (6)

$u'v + \underline{\underline{uv'}} + \underline{\underline{p(x)uv}} = q(x)$ вынесем u за скобку

$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$

Подберём v(x) так, чтобы $v' + p(x)v = 0$, получим систему

$\begin{cases} v' + p(x)v = 0 \\ u'v = q(x) \end{cases}$ -это уравнения с разделяющимися переменными

Из первого уравнения найдём v(x), подставим его во второе уравнение и найдём u(x). Т.о. найдём $y = u(x)\cdot v(x)$-общее решение ДУ.

Пример: $xy' - 5y - (x+1) = 0$ Разделить переменные нельзя. Это не однородное ДУ

Приведём к линейному ДУ:

$xy' - 5y = x + 1 \quad |:x$

$y' - \frac{5}{x}y = \frac{x+1}{x}$

$y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$

$u'v + \underline{\underline{uv'}} - \underline{\underline{\frac{5}{x}}}uv = \frac{x+1}{x}$

$u'v + u(v' - \frac{5}{x}v) = \frac{x+1}{x}$

$$\begin{cases} v' - \frac{5}{x}v = 0 \\ u'v = \frac{x+1}{x} \end{cases} \Rightarrow v = x^5, u = -\frac{1}{4x^4} - \frac{1}{5x^5} + C$$

$y = uv \Rightarrow y = -\frac{x}{4} - \frac{1}{5} + Cx^5 - \textit{общее решение ДУ}$

При решении методом Бернулли, промежуточное значение const берём =0

2. Однородные дифференциальные уравнения

ОПР: ДУ $y' = f(x;y)$ называется *однородным ДУ 1 порядка ,* если функция $f(x;y)$ удовлетворяет

условию: $\boxed{f(tx;ty) = f(x;y)}$ (5) , где t-произвольный параметр.

Рассмотрим однородное ДУ $y' = f(x;y)$

Обозначим $\boxed{z = \frac{y}{x}}$ $\Rightarrow y = xz$, z-функция от х

$$y' = z'x + zx' = z'x + z$$

Подставим в исходное уравнение:

$$z'x + z = f(x; zx)$$
$$z'x = f(x; zx) - z$$
- можно свести к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример: Решить ДУ 1-го порядка

$$xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx \quad |: dx$$

$$(*)\ y' = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} - \textit{однородное ДУ, тк}$$

$$f(tx; ty) = \frac{ty + \sqrt{(tx)^2 + (ty)^2}}{tx} = f(x; y)$$

$$\textit{обозначим}: z = \frac{y}{x} \quad y = zx \quad y' = z'x + z \quad \textit{подставим в}\ (*)$$

$$z'x = \sqrt{1 + z^2}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln\left|z + \sqrt{1 + z^2}\right| = \ln|x| + \ln|C|$$

$$z + \sqrt{1 + z^2} = Cx$$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = Cx$$

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2 - \textit{общий интеграл}$$

Выбираем в какой части равенства записываем const и в какой форме. Если нет других функций, кроме ln, то записываем const в виде ln/C/.

Дополнительно: Решить задачу Коши с начальными условиями $x_0=1$ и $y_0=3$

C=3+$\sqrt{10}$

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = (3 + \sqrt{10})x^2$$
- частное решение.

3. Разностные уравнения

На практике простейшие разностные уравнения возникают при исследовании, например величины банковского вклада. Эта величина является переменной Y_x, представляющей сумму, которая накапливается по установленному закону при целочисленных значениях аргумента *x*. Пусть сумма Y_o положена в банк при условии начисления 100 r сложных процентов в год. Пусть начисление процентов производится один раз в год и *x* обозначает число лет с момента помещения вклада (x = 0, 1, 2,...). Обозначим величину вклада по истечении *x*лет через Y_x. Мы получаем

$$Y_x = (1+r)Y_{x-1}.$$

Если начальная сумма составляет Y_o, мы приходим к задаче отыскания решения полученного разностного уравнения, подчиненного начальному условию $Y_x = Y_o$ при x = 0. Полученное разностное уравнение содержит Y_x и значение этой переменной на один год раньше, т.е. Y_{x-1}; в данном случае аргумент *x* явно не входит в разностное уравнение.

Вообще говоря, *обыкновенное разностное уравнение* устанавливает связь между значениями функции Y=Y(x), рассматриваемой для ряда *равноотстоящих значений аргумента* *x*, но можно без ограничения общности считать, что искомая функция определена для равноотстоящих значений аргумента с шагом, равным единице. Таким образом, если начальное значение аргумента есть *x*, то ряд его равноотстоящих значений будет x, x+1, x+2,... и в обратном направлении: x, x-1, x-2,.... Соответствующие значения функции будем обозначать Y_x, Y_{x+1}, Y_{x+2},... или Y_x, Y_{x-1}, Y_{x-2},.... Определим так называемые *разности* различных порядков функции Y_x с помощью следующих формул:

Разности первого порядка

$$D\,Y_x = Y_{x+1} - Y_x,$$
$$D\,Y_{x+1} = Y_{x+2} - Y_{x+1},$$
$$DY_{x+2} = Y_{x+3} - Y_{x+2},$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

Разности второго порядка

$D^2Y_x = DY_{x+1} - D\,Y_x$,
$D^2Y_{x+1} = D\,Y_{x+2} - DY_{x+1}$,
$D^2Y_{x+2} = D\,Y_{x+3} - DY_{x+2}$,
… … … … …

Разности третьего порядка
$D^3Y_x = D^2Y_{x+1} - D^2Y_x$,
$D^3Y_{x+1} = D^2Y_{x+2} - D^2Y_{x+1}$,
… … … … …

Обыкновенным разностным уравнением называется уравнение, связывающее значения одного независимого аргумента *x*, егофункцииY_x и разностей различных порядков этой функции DY_x, D^2Y_x, D^3Y_x,.... Такое уравнение можно записать в общем виде следующим образом:

$$j(x, Y_x, DY_x, D^2Y_x\ D^3Y_x, D^nY_x) = 0,$$

которое по форме аналогично дифференциальному уравнению.
Порядком разностного уравнения называется порядок наивысшей разности, входящей в это уравнение. Разностное уравнение (1) часто удобнее записать, пользуясь не разностями неизвестной функции, а ее значениями при последовательных значениях аргумента, то есть выразить DY_x, D^2Y_x, D^3Y_x,... через Y_x, Y_{x+1}, Y_{x+2},.... Уравнение (1) можно привести к одной из двух форм:

$$y(x, Y_x, Y_{x+1},...,Y_{x+n}) = 0,$$
$$x(x, Y_x, Y_{x-1},...,Y_{x-n}) = 0.$$

Общее дискретное решение Y_x обыкновенного разностного уравнения *n*-го порядка представляет функцию x (x = 0, 1. 2,...), содержащую ровно *n* произвольных постоянных:

$$Y_x = Y(x, C_1, C_2,..., C_n).$$

Примером служит паутинообразная модель рынка.

1.27 Лекция №27 (2 часа).
Тема: «Дифференциальные уравнения высших порядков»

1.27.1 Вопросы лекции:
1. ЛОДУ второго порядка.
2. ЛНДУ второго порядка.

1.27.2 Краткое содержание вопросов:
1. ЛОДУ второго порядка

<u>ОПР</u>: <u>*ЛОДУ 2 пор. с постоянными коэф-ми*</u> называется уравнение вида $\left|\overline{y'' + py' + qy = 0}\right|$ (7)
, где
p и q- действительные числа.

Обозначим $y''k^2, y' = k, y = k^0 = 1$. Получим квадратное уравнение вида:

$\left|\overline{k^2 + pk + q = 0}\right|$ -<u>*характеристическое уравнение.*</u>

Найдём корни этого уравнения k_1 *и* k_2 - некоторые действительные числа.

Общее решение ЛОДУ будет зависеть от корней характ-го уравнения следующим образом:

1)если $k_1 \neq k_2$ *,то* $y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$, C_1 *и* C_2 -постоянные, является общим решением данного ЛОДУ

2) если $k_1 = k_2$,òî $y = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_1x}$

3) если характ-кое уравнение не имеет действительных корней (т.е. D<0), то

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x), \quad \alpha = -\frac{p}{2}, \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

Примеры:
$1) y'' - 10y' + 25y = 0 \quad y = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x}$
$2) y'' + 5y' + 6y = 0 \quad y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} \quad y(0) = 2, y'(0) = 4$
$3) y'' + 2y' + 10y = 0 \quad y = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$

2. ЛНДУ второго порядка

ОПР: *ЛНДУ 2 пор. с постоянными коэф-ми* называется уравнение вида: (8)
$y'' + py' + qy = P_n(x)e^{\gamma x}$, $\tilde{a}\ddot{a}\mathring{a}\, P_n(x)$ -многочлен, степени n
p и q – действит. числа.

Общее решение данного ЛНДУ ищут в виде: $\boxed{y = y_0 + y_ч}$, y_0 – общее решение соотв-го ЛОДУ
$y_ч$ - частное решение исходного ЛНДУ.

Для отыскания $y_{\div}$ пользуются следующим правилом:

1)если $\gamma \neq k_1$ *и* $\gamma \neq k_2$ (т.е. не является корнем характеристич. уравнения), то $y_{\div} = Q_n(x)e^{\gamma x}$, где $Q_n(x)$ - многочлен степени n с неопределёнными коэффициентами.

2) если $\gamma = k_1$ *и* $\gamma \neq k_2$ (т.е. совпадает с одним из корней характеристич. уравнения), то $y_{\div} = x \cdot Q_n(x)e^{\gamma x}$

3) если $\gamma = k_1$ *и* $\gamma = k_2$ (т.е. корни равны и равны γ), то $y_{\div} = x^2 \cdot Q_n(x)e^{\gamma x}$

Примеры:

$1) y'' + y' - 12y = (2x-3)e^{2x} \quad y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-4x} + e^{2x}(-\frac{1}{3}x - \frac{7}{9}),\ y(0) = -\frac{7}{9}, y'(0) = \frac{109}{9}$

$2) y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x} \quad y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + \frac{3}{2}x^2 e^{-2x}$

1.28 Лекция №28 (2 часа).
Тема: «Знакоположительные ряды»

1.28.1 Вопросы лекции:
1. Понятие числового ряда.
2. Примеры сходящихся и расходящихся рядов.
3. Свойства рядов.
4. Признаки сходимости знакоположительных рядов.
5. Эталонные ряды.

1.28.2 Краткое содержание вопросов:
1. Понятие числового ряда

Пусть задана последовательность действительных чисел (a_n): $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

Опр; Символ $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ называется *числовым рядом* , а числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ его *членами,* a_n ($n \in N$) называется *.общим членом.*

Обозначим: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots (1)$

Опр: Суммы
$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
....
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$
....

называются *частичными суммами* ряда (1).

2. Примеры сходящихся и расходящихся рядов

Опр: Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм сходится к какому-нибудь числу S (т е $\exists$ конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$), при этом S- *сумма ряда.*

В этом случае $S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ или S=$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $\boxed{S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n}$ -сумма ряда

Опр: Если не существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$, то ряд (1) называется *расходящимся.*

Пример: Выяснить, сходится ли данный ряд, если сходится, найти его сумму. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + ...$$

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \quad \Rightarrow S = 1$$

Ряд сходится и его сумма равна 1.

ТЕОРЕМА (*Необходимое условие сходимости ряда):* Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его общий член стремится к 0 (т е $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$)

Замечание: Обратная теорема не верна.

СЛЕДСТВИЕ: Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Пример: Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{3n+2}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{3n+2} = \frac{4}{3} \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{3n+2} \quad \text{расходится}$$

3. Свойства рядов

1) Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится (расходится), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{N} a_n$, где $\tilde{N} \in R$ тоже сходится (расходится). Обратное верно при $C \neq 0$

2) Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, который называется суммой данных рядов, тоже сходится.

4. Признаки сходимости знакоположительных рядов

ОПР: Ряд, все члены которого положительны, называется *знакоположительным.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0 \quad (n \in N) \qquad (2)$$

Достаточные условия сходимости ряда:

1) ТЕОРЕМА (<u>*Признак сравнения*</u>): Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0$ (A) и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n, b_n > 0$ (B), $(n \in N)$.и выполняется неравенство $a_n \le b_n, \forall n \in N$,
тогда из сходимости ряда (B)$\Rightarrow$ сходимость ряда (A),
а из расходимости ряда (A) $\Rightarrow$ расходимость ряда (B).

ТЕОРЕМА (<u>*Предельный признак сравнения):*</u> Пусть даны два знакоположительных ряда (A) и (B). Если $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, где $k > 0$, то оба знакоположительных ряда (A) и (B) в плане сходимости ведут себя одинаково (т. е. либо оба сходятся, либо оба расходятся).

<u>Пример:</u> Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ (A)

Сравним с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (B)-ряд сходится, т к p=2>1

$K = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot n^2}{n^3+1} = 1,\ K > 0 \Rightarrow$ ряды (A) и (B) в плане сходимости ведут себя одинаково, $\Rightarrow$ ряд (A) -сходятся.

2) ТЕОРЕМА (<u>*Признак Даламбера)*</u>: Пусть дан знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0$ (2). Если начиная с некоторого значения n члены ряда (2) удовлетворяют неравенству $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1$, то ряд (2) сходится, а если начиная с некоторого значения n выполняется неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то ряд (2) расходится

ТЕОРЕМА (<u>*Предельная форма признака Даламбера):*</u> Пусть дан знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0$ Если $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$, то $D < 1$ ряд сходится, $D > 1$ ряд расходится, $D = 1$ признак не подходит, вопрос о сходимости ряда не решен.

<u>Пример:</u> Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n^2}$

$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}; \quad a_n = \frac{9^n}{n^2}; \quad a_{n+1} = \frac{9^{n+1}}{(n+1)^2} = \frac{9 \cdot 9^n}{(n+1)^2}$

$D = \lim_{n\to\infty} \frac{9 \cdot 9^n \cdot n^2}{(n+1)^2 \cdot 9^n} = 9 > 1 \Rightarrow$

ряд расходится.

3) ТЕОРЕМА (<u>*Признак Коши*</u>): Пусть дан знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0$ (2). Если начиная с некоторого
значения n выполняется неравенство $\sqrt[n]{a_n} \le 1$, то ряд (2) сходится, а если $\sqrt[n]{a_n} > 1$, то ряд (2) расходится

ТЕОРЕМА 2 (<u>*Предельная форма признака Коши):*</u> Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=K$, то $K<1$ ряд сходится, $K>1$ряд расходится, $K=1$ признак не подходит, вопрос о сходимости ряда не решен.

<u>Примеры:</u> Исследовать на сходимость ряды

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

$4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24;\quad n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n;\quad (2n)!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2n$

$a_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!};\quad a_{n+1}=\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}$

Применим предельный признак Даламбера:

$D=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot(n+1)!\cdot(2n)!}{(2n+2)!\cdot n!\,n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2}=\frac{1}{4},\quad D=\frac{1}{4}<1\Rightarrow$ ряд сходится.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}$

Применим предельный признак Коши:

$K=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt[n]{n}}=\frac{2}{1}=2,\quad K=2>1\Rightarrow$ ряд расходится.

5. Эталонные ряды

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - гармонический ряд, расходится.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, $p\in R$ если $p>1$, то ряд сходится, если $p\le 1$, то ряд расходится

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a\cdot q^n$, $a\in R$ если $|q|\ge 1$, то ряд расходится, если $|q|<1$, то ряд сходится

1.29 Лекция №29 (2 часа).
Тема: «Знакочередующиеся ряды»

1.29.1 Вопросы лекции:

1. Понятие знакочередующегося ряда.
2. Признак Лейбница.
3. Абсолютная и условная сходимость.

1.29.2 Краткое содержание вопросов:
1. Понятие знакочередующегося ряда

<u>ОПР:</u> Ряд $a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots$, где $a_n>0$ (3) называется <u>*знакочередующимся рядом*</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ (3)

(3”) $-a_1+a_2-a_3+a_4-\ldots$, где $a_n>0$ тоже знакочередующийся ряд

Обозначим $u_n=(-1)^n a_n \quad то \quad |u_n|=a_n$

2. Признак Лейбница

ТЕОРЕМА (<u>*Признак Лейбница):*</u> Если общий член знакочередующегося ряда удовлетворяет условиям: $\left.\begin{matrix}1)\ |u_{n+1}|<|u_n| \\ 2)\ \lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=0\end{matrix}\right\}$ $то \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ сходится

Если хотя бы одно из этих условий нарушается, то ряд расходится.

Пример: Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{7}{n^2}$

$=-7+\frac{7}{4}-\frac{7}{9}+\frac{7}{16}-...+(-1)^n\frac{7}{n^2}+...$

1) $|u_n|=\frac{7}{n^2}$; $|u_{n+1}|=\frac{7}{(n+1)^2}$ $\Rightarrow$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{7}{n^2}$ сходится по признаку Лейбница.

$|u_{n+1}|<|u_n|$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n^2}=0$

3. Абсолютная и условная сходимость

ОПР: Если ряд сходится вместе с рядом, составленным из модулей его членов, то такой ряд называется *абсолютно сходящимся.*

ОПР: Если знакочередующийся ряд сходится, а ряд, составленный из модулей его членов расходится, то такой ряд называется *условно сходящимся.*

Пример: (продолжим предыдущий пример)

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{7}{n^2}$ -сходится $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{n^2}=7\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\ p=2>1\Rightarrow$ обобщенный гармонический ряд, сходится, тогда данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{7}{n^2}$ -сходится абсолютно.

1.30 Лекция №30 (2 часа).

Тема: «Степенные ряды»

1.30.1 Вопросы лекции:

1. Понятие степенного ряда.
2. Радиус и интервал сходимости степенного ряда.
3. Ряд Тейлора и Маклорена.
4. Применение рядов в приближенных вычислениях.

1.30.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие степенного ряда

ОПР: Ряд вида $a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+...$, где $a_0,a_1,a_2,...,a_n,x_0\in R$ - заданные действительные числа, х-переменная, называется *степенным рядом.*

Обозначение $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ (4)

ТЕОРЕМА (*Признак Даламбера для рядов с произвольными членами):* Если $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=D$, то $D<1$ ряд сходится, $D>1$ ряд расходится, $D=1$ признак не подходит, вопрос о сходимости ряда не решен.

2. Радиус и интервал сходимости степенного ряда

Найем интервал и радиус сходимости степенного ряда, воспользовавшись признаком Даламбера

$D=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a^n(x-x_0)^n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)}{a_n}\right|=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}(x-x_0)\right|$ Пусть D<1, то степенной ряд абсолютно сходится.

$\Rightarrow\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}(x-x_0)\right|<1 \quad \Rightarrow|x-x_0|<\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x-x_0<\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \Rightarrow x<\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|+x_0 \\ x-x_0>-\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \Rightarrow x>x_0-\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \end{array}\right.$. Т.е. $x_0-\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|<x<x_0+\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

$c_1<x<c_2$

Значит, на интервале $(c_1;c_2)$ ряд абсолютно сходится.

$R=\left|\frac{c_1-c_2}{2}\right|$-*радиус сходимости ряда.*

Также нужно выяснить вопрос о сходимости ряда на концах интервала, т е при x= c_1 и x=c_2. Таким образом, получим *область сходимости.*

Пример: Найти область и радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n+2}\cdot x^n$

$u_n=\frac{3^n}{n+2}x^n;\quad a_n=\frac{3^n}{n+2};\quad x_0=0$

$D=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{3x(n+2)}{n+3}\right|=|3x|$

Ряд абсолютно сходится, если D<1, т е $|3x|<1$, $|x|<\frac{1}{3}$

$x\in(-\frac{1}{3};\frac{1}{3})$ **-интервал сходимости ряда.**

R=1\3-**радиус сходимости**.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости:

1) $x=\frac{1}{3}\Rightarrow\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n+2}\cdot\frac{1}{3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$

Сравним с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – гармонический ряд, расходится

Применим предельный признак сравнения $K=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1>0\Rightarrow$ оба ряда в плане сходимости ведут себя одинаково $\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$- расходится. $\Rightarrow$ $x=-\frac{1}{3}$ не входит в область сходимости ряда.

2) $x=-\frac{1}{3}\Rightarrow\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n+2}(-\frac{1}{3})^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}$

$D=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{-n-2}{n+3}\right|=1\Rightarrow$ признак Даламбера не подходит

Рассмотрим признак Лейбница:

$\left.\begin{array}{l} 1)\ |u_{n+1}|<|u_n| \\ 2)\ \lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0 \end{array}\right\}\Rightarrow ряд \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}$ ряд сходится условно, т.к. ряд, составленный из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$ -расходится

$x\in[\ -\frac{1}{3};\frac{1}{3})$ - **область сходимости ряда**

3. Ряд Тейлора и Маклорена

Если функция $f(x)$ имеет непрерывные производные вплоть до $(n+1)$-го порядка, то ее можно разложить в степенной ряд по *формуле Тейлора*:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)(x-a)^2}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}+R_n,$$

где R_n – *остаточный член* в форме Лагранжа определяется выражением

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad a < \xi < x.$$

Если приведенное разложение сходится в некотором интервале x, т.е. $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$, то оно называется *рядом Тейлора*, представляющим разложение функции $f(x)$ в точке a.

Если $a = 0$, то такое разложение называется *рядом Маклорена*:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + R_n.$$

Разложение некоторых функций в ряд Маклорена

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

4. Применение рядов в приближенных вычислениях

С помощью рядов можно вычислить значения тригономегричеких функций, логарифмов чисел, корней, определенных интегралов.

Значения тригонометрических функций (синуса и косинуса) можно вычислить с помощью их разложений в степенные ряды.

Для вычисления натуральных логарифмов чисел применяется формула

$$\ln\frac{N+1}{N} = \ln(N+1) - \ln N = 2\left(\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{(2N+1)^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2N+1)^5} + \ldots\right),$$

Которая получается из формулы $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \ldots\right)$ $(|x| < 1)$ при $x = 1/(2N+1)$.

Погрешность при замене суммы ряда суммой его и первых членов определяется формулой

$$\alpha_n = 2\left(\frac{1}{2n+1}\frac{1}{(2N+1)^{2n+1}} + \frac{1}{2n+3}\frac{1}{(2N+1)^{2n+3}} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \frac{1}{2n+5}\frac{1}{(2N+1)^{2n+5}} + \ldots\right).$$

Очевидно, $\alpha_n < \beta_n = \frac{2}{2n+1}\frac{1}{(2N+1)^{2n+1}}\left(1 + \frac{1}{(2N+1)^2} + \frac{1}{(2N+1)^4} + \ldots\right),$

Или $\alpha_n < \frac{1}{2(2n+1)}\frac{1}{(2N+1)^{2n-1}}\frac{1}{N(N+1)}.$

Для вычисления корней применяют биномиальный ряд, т. е. степенной ряд для функции $f(x) = (1+x)^{\alpha}$. Предположим, что нужно вычислить $\sqrt[m]{A}$, причем уже

Известно приближенное значение a Этого корня, но требуется улучшить его. Если $A/a^m = 1 + x$, где x - небольшая правильная дробь, то можно преобразовать корень следующим образом:

$$\sqrt[m]{A} = a\sqrt[m]{\frac{A}{a^m}} = a(1+x)^{1/m}$$

И применить биномиальный ряд при $\alpha = 1/m.$

Если подынтегральная функция разлагается в степенной ряд, а пределы интегрирования принадлежат области сходимости этого ряда, соответствующий определенный интеграл можно вычислить приближенно.

Пример. Вычислить $\sqrt{17}$ С точностью до 0,0001.

Преобразование (23.24) в данном случае принимает вид

$$\sqrt{17} = \sqrt{16+1} = \sqrt{16\,(1+1/16)} = 4\,(1+1/16)^{1/2}.$$

Воспользуемся биномиальным рядом. Полагая в нем $x = 1/16, \quad \alpha = 1/2,$ Получаем

$$\left(1+\frac{1}{16}\right)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}\,\frac{1}{16}+\frac{1/2\,(1/2-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{16}\right)^2+\frac{1/2\,(1/2-1)(1/2-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{16}\right)^3+$$
$$+\frac{1/2\,(1/2-1)\,(1/2-2)\,(1/2-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{1}{16}\right)^4+\ldots,$$

Т. е.

$$\left(1+\frac{1}{16}\right)^{1/2} = 1+\frac{1}{2\cdot 16}-\frac{1}{2^3\cdot 16^2}+\frac{1}{2^4\cdot 16^3}-\frac{5}{2^7\cdot 16^4}+\ldots$$

Полученный ряд (если не принимать во внимание первый член) является знакочередующимся рядом, удовлетворяющим условиям признака Лейбница. Погрешность при вычислении его суммы не превышает первого отброшенного члена. Так как

$$\frac{1}{2^4\cdot 16^3} = \frac{1}{66536} < \frac{1}{10000} = 0{,}0001,$$

То достаточно взять сумму первых трех членов ряда, чтобы получить искомое значение корня с заданной точностью: $\sqrt{17} \approx 4\left(1+\frac{1}{2\cdot 16}-\frac{1}{2^3\cdot 16^2}\right) \approx 4{,}1230.$

1.31 Лекция №31 (2 часа).
Тема: «Основы теории вероятностей»

1.31.1 Вопросы лекции:
1. Сущность и условия применения теории вероятностей.
2. Классическое и статистическое определения вероятности.
3. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
4. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

1.31.2 Краткое содержание вопросов:
1. Классическое и статистическое определения вероятности. Частота и вероятность.
Многие явления в окружающем нас мире носят случайный характер. Если некоторое явление повторяется многократно, то его можно описать с помощью чисел. ТВ помогает составить математические модели описания случайных явлений. Причем при построении модели учитываются главные, наиболее существенные особенности изучаемого явления и отбрасываются второстепенные. К примеру, при подбрасывании монеты считаем, что она может упасть «орлом» или «решкой» и не может упасть ребром, не учитываем окружающей среды. При посадке семян, считаем, что все они одинаковы и высаживаются при одинаковых условиях.

Основным понятием ТВ является «событие».

ОПР: *Испытание* – это осуществление определенного комплекса условий, при которых производится наблюдение.

ОПР: Событие называется *случайным* , если оно в данном испытании может произойти или не произойти.

Обозн.: событие-А,В,С…A_1, A_2…

ОПР: Событие называется *достоверным*, если оно обязательно произойдёт в данном испытании.

Обозн.: достоверное событие- *u*

Пример: 1) выпадение числа очков ≤ 6 при однократном бросании игральной кости.

2) закипание воды при 100^0 С при н.у.

ОПР: Событие называется *невозможным*, если оно заведомо не произойдёт в данном испытании.

Обозн.: невозможное событие- *v*

Пример: Выпадение 7 очков при однократном бросании игральной кости.

ОПР: События А и В называются *несовместными*, если в одном и том же испытании появление одного из них исключает появление другого.

Пример: А-«Выпадение 5 очков при однократном бросании игральной кости».

В-«Выпадение 4 очков при однократном бросании игральной кости».

ОПР: События А и В называются *совместными*, если в одном и том же испытании появление одного из них не исключает появление другого.

Пример: А-«Выпадение 2х очков при однократном бросании игральной кости».

В-«Выпадение четного числа очков при однократном бросании игральной кости».

ОПР: Событие $\overline{A}$ называется *противоположным* данному событию А, если оно происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие А.

Перечислим простейшие события при однократном бросании игральной кости:

A_1 –выпадение 1го очка

A_2 –выпадение 2х очков

A_3 –выпадение 3х очков

A_4 –выпадение 4х очков

A_5 –выпадение 5ти очков

A_6 –выпадение 6ти очков

Все эти события единственно возможные, равновозможные, несовместные, элементарные исходы испытания.

События образуют полную группу, если они попарно несовместны и, в результате испытания непременно происходит одно из них. События A_1,…,A_6 –полная группа.

ОПР (классическое определение вероятности): *Вероятностью* события А называется отношение числа исходов испытания, благоприятствующих наступлению события А к общему числу несовместных, единственно возможных и равновозможных, элементарных исходов испытания.

$$\boxed{p(A)=\frac{m}{n}}$$, где m-число исходов испытания, благоприятствующих наступлению соб. А

n- общее число исходов испытания.

Пример 1: p(A_1)=1\6

Соб. А- Выпадение четного числа очков на кости.

Р(А)=3\6=1\2 (50%)

Пример 2: Игральную кость бросают один раз. Найти вероятность событий

А- выпадение числа очков, кратного 7

В- выпадение числа очков, < 7

р(А)=0\6=0 – это v (невозможное соб.) p(B)=6\6=1 (100%)- это u (достоверное соб.)

$$\boxed{0 \le p(A) \le 1}$$

Свойства вероятности:

1) $0 \le p(A) \le 1$
2) $p(v) = 0$
3) $p(u) = 1$

Пример 3: Игральную кость бросают два раза. Найти вероятность того, что 6 очков выпадет 1 раз.

- В чем состоит испытание?

Дважды подбрасываем кость.

- Что может стать исходом испытания?

Выпадение от 1 до 6 очков при каждом броске.

- Вероятность какого события мы находим?

А- хотя бы 1 раз выпадет 6 очков.
п=36 m=11 p(A)=11\36

Если классическое опр. Вероятности исходит из соображений равновозможности событий при некоторых испытаниях, то статистическая вероятность определяется из опыта или из результатов наблюдений и испытаний. В качестве статистической вероятности принимают относительную частоту.

ОПР: *Относительной частотой* (частостью) события называется число $\boxed{w(A) = \frac{m}{n}}$, где m-число всех появлений соб. А, n- общее число испытаний.

Пример: Прививка сделана 12 животным. Иммунитет приобрели 9 из них. Найти относительную частоту события А (данное животное приобрело иммунитет).
n=9, n=12 w(a)=9\12=3\4=0,75 (75%)

2. Теоремы сложения и умножения вероятностей

ОПР: Событие С, состоящее в появлении хотя бы одного из событий А или В называется их *суммой.*

$$\boxed{\begin{matrix} C = A + B \\ C = A \cup B \end{matrix}}$$

Пример 1: соб. А- При однократном изъятии карты из колоды вынута дама
Соб. В- При однократном изъятии карты из колоды вынута пиковая карта.
Найти сумму событий А и В. С=А+В
C_1 – Вынули пиковую даму
C_2 – Извлечена любая дама, но не пиковая (совместные события)
C_3 – Извлечена любая пиковая карта, но не дама.

Пример 2: А- При однократном бросании монеты выпал «герб»
В – При однократном бросании монеты выпала «решка»
C_1 – Выпал «герб»
C_2 –Выпала «решка» (несовместные события)

Пример 3: А – При однократном бросании игральной кости выпало 2 очка.
В - При однократном бросании игральной кости выпало четное очков.
C_1 – Выпало четное число очков (совместные события)

Пример 4: А – Попадание в мишень при первом выстреле.
В - Попадание в мишень при втором выстреле.
C_1 – Попадание только при первом выстреле
C_2 – Попадание только при втором выстреле (совместные события)
C_3 – Попадание при обоих выстрелах

ТЕОРЕМА 1: Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий $p(A+B)=p(A)+p(B)$ А и В- <u>несовместные</u> события.

ТЕОРЕМА 2: Вероятность события, противоположного данному, равна разности между 1 и вероятностью данного события. $p(\overline{A})=1-p(A)$

<u>ОПР:</u> Событие С, состоящее в совместном появлении в данном испытании событий А и В называется <u>*произведением*</u> этих событий.

$$C=A\cdot B$$
$$C=A\cap B$$

<u>Пример 1:</u> С- Пиковая дама.
<u>Пример 2:</u> С- невозможное событие (v)
<u>Пример 3:</u> С- Выпадение двух очков.
<u>Пример 4:</u> С- Попадание при обоих выстрелах.
<u>Пример:</u> В корзине 2 яблока, 6 груш, 7 слив и 5 абрикосов. Какова вероятность того, что наудачу выбранный плод не окажется яблоком?
Решение: В данном примере могут возникнуть следующие элементарные события:
А-извлечено яблоко
В- извлечение груши
С- извлечение сливы
D- извлечение абрикоса
n=20
Нас интересует появление событий B+C+D-несовместные.
p(B+C+D)=p(B)+p(C)+p(D)=6\20+7\20+5\20=9\10 (90%)

<u>ОПР:</u> Два события называются <u>*зависимыми*</u>, если вероятность появления одного из них зависит от наступления или не наступления другого. В противном случае события называются <u>*независимыми*</u>
<u>ОПР:</u> <u>*Условной вероятностью*</u> события В при условии, что соб. А произошло, называется вероятность события В, вычисленная в предположении, что событие А уже наступило. (обозначение: $Ð_{\grave{A}}(\hat{A})$).

ТЕОРЕМА 3: Вероятность совместного наступления двух независимых событий, равна произведению вероятностей этих событий. $p(A\cdot B)=p(A)\cdot p(B)$ А и В- <u>независимые</u> события.

<u>Пример:</u> Имеется 2 ящика с деталями. В первом ящике 10 деталей, из которых 8 стандартных. Во втором ящике 15 деталей, из которых 12 стандартных. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали, найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.
Решение: Испытание- из ящика вынимают по одной детали

Исходы испытаний-	ст.	ст.
	ст.	нест.
	нест.	ст.
	нест.	нест.

С-обе детали стандартные
А-деталь из первого ящика стандартная
В- деталь из второго ящика стандартная
С=АВ
p(C)=p(AB)=p(A)p(B)=8\10*12\15=16\25

Пример: В урне находятся 3 белых и 2 черных шара. Из нее последовательно вынули 2 шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.

Решение: А-первый взятый шар белый

В-второй взятый шар белый

$Ð_{À}(\hat{A})$ =3\5*2\4=3\10 после первого испытания в урне осталось 4 шара, из которых 2 белых.

ТЕОРЕМА 4: Вероятность совместного наступления двух зависимых событий, равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже произошло.

$$\boxed{\begin{aligned} p(A\cdot B) &= p(A)\cdot p_A(B) \\ p(A\cdot B) &= p(B)\cdot p_B(A) \end{aligned}}$$

А и В-зависимые события.

ТЕОРЕМА 5: Вероятность появления одного из двух совместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.

$$\boxed{p(A+B) = p(A) + p(B) - p(A\cdot B)}$$

А и В- совместные события.

4. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Пример: Студент знает 25 вопросов из 30ти. Преподаватель задает студенту последовательно 2 вопроса. Какова вероятность того, что студент знает ответ: а) на первый вопрос

б) на второй вопрос

Решение: А-студент знает ответ на первый вопрос

В-студент знает ответ на второй вопрос

а) p(A)=25\30=5\6

б) $B = A\cdot B + \overline{A}\cdot B$ -несовместные события

$$p(B) = p(AB) + p(\overline{A}B) \underset{зависимые}{=} p(A)p_A(B) + p(\overline{A})p_{\overline{A}}(B) = \frac{5}{6}\cdot\frac{24}{29} + \frac{1}{6}\cdot\frac{25}{29} = \frac{5}{6}$$

ТЕОРЕМА 6: Вероятность события А, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$ равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события А.

$$\boxed{p(A) = p(H_1)p_{H_1}(A) + \ldots + p(H_n)p_{H_n}(A)}$$

-формула полной вероятности

ТЕОРЕМА 7: Пусть событие А может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, тогда вероятность события H_i, i=1…n , вычисленная при условии, что событие А уже произошло, вычисляется по формуле Байеса.

$$\boxed{p_A(H_i) = \frac{p(H_i)p_{Hi}(A)}{p(A)}}$$

Пример: В институте идет назначение на премии. Разрешено охватить премиями 90% всех отличников, 60% -хорошистов и 30%-троишников.

В группе 25 студентов, из них 3 отличника, 12 хорошистов и 10 троишников. Известно, что студентам этой группы начислена премия. Какова вероятность того, что этот студент:

а) отличник

б) хорошист

в) троишник

Решение: А-студенту группы присуждена стипендия

H_1-студент-отличник

H_2-студент-хорошист

H_3-студент-троишник

$A=H_1A+H_2A+H_3A$

$p(A)=p(H_1A+H_2A+H_3A)=p(H_1)p_{H1}(A)+p(H_2)p_{H2}(A)+p(H_3)p_{H3}(A)=$

$p(H_1)=3\backslash 25$ $\quad p(H_2)=12\backslash 25$ $\quad p(H_3)=10\backslash 25$

$p(A)=\frac{3}{25}\frac{9}{10}+\frac{12}{25}\frac{6}{10}+\frac{10}{25}\frac{3}{10}=0{,}516$

$p(AH_1)=p(H_1)p_{H1}(A)=p(A)p_A(H_1)$

$$p_A(H_1)=\frac{p(H_1)p_{H1}(A)}{p(A)} \qquad p_A(H_2)=\frac{p(H_{21})p_{H2}(A)}{p(A)}$$

$$p_A(H_1)=\frac{\frac{3}{25}\cdot\frac{9}{10}}{\frac{3}{25}\cdot\frac{43}{10}}=\frac{9}{43} \qquad p_A(H_2)=\frac{\frac{12}{25}\cdot\frac{6}{10}}{\frac{3}{25}\cdot\frac{43}{10}}=\frac{24}{43} \qquad p_A(H_1)=\frac{10}{43}$$

1.32 Лекция №32 (2 часа).

Тема: «Вероятность события при повторных испытаниях»

1.32.1 Вопросы лекции:

1. Формула Бернулли.
2. Локальная теорема Лапласа.
3. Интегральная теорема Лапласа.
4. Теорема Пуассона.
5. Наивероятнейшее число наступлений события при повторении испытаний.

1.32.2 Краткое содержание вопросов:

1. Формула Бернулли

Будем проводить n независимых повторных испытаний, в каждом из которых событие А может появиться или не появиться.

В дальнейшем будем считать, что вероятность события А в каждом испытании одна и та же p, тогда и вероятность не наступления будет постоянной $q=1-p$.

Вероятность появления события А k раз в n повторных независимых испытаниях находит по формуле Бернулли

$\boxed{P_n(k)=C_n^k\, p^k\, q^{n-k}}$ - <u>*формула Бернулли*</u>

<u>ОПР:</u> <u>*Сочетанием без повторений из n элементов по k*</u> .называют всевозможные комбинации, содержащие по k элементов и различающихся хотя бы одним элементом.

$$\boxed{C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

<u>Пример:</u> Монета подбрасывается 4 раза. Найти вероятность того, что «герб» выпал 3 раза

Решение: $P_4(3)=C_4^3(0{,}5)^3(0{,}5)^1=\frac{4!}{3!\cdot 1!}\frac{1}{16}=\frac{1}{4}$

2. Локальная теорема Лапласа

<u>Пример:</u> При производстве деталей на некором предприятии вероятность того, что отдельная деталь будет бракованной 0,2. Какова вероятность того, что в партии из 400 деталей окажется 80 бракованных.

Решение: А-одна отдельно взятая деталь является бракованной.

$p(A)=0{,}2=p$ значит $q=1-p=0{,}8$

$P_{400}(80)=C_{400}^{80}(0{,}2)^{80}(0{,}8)^{320}$

В случае, когда вычисления слишком громоздки, формуле Бернулли предпочитают приближенную формулу из теоремы Лапласа.

ТЕОРЕМА (<u>*локальная теорема Лапласа):*</u> Если вероятность p появления события А в каждом испытании постоянна и $\neq 0$ и $\neq 1$, то вероятность того, что событие А появится k раз в n независимых испытаниях приблизительно равна (тем точнее, чем больше n) значению функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \text{ при } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

$$\boxed{P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)}, \text{ где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ - табличная функция.}$$

$\varphi(x)$ -четная, т.е. $\underline{\varphi(-x) = \varphi(x)}$

Замечание: Теорема Лапласа используется при больших значениях n и дает наиболее точный результат когда произведение $\boxed{npq \geq 10}$

Пример: Вернемся к примеру: $x = \frac{80 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 0$

$$P_{400}(80) = \frac{1}{8} \cdot \varphi(0) = \frac{1}{8} \cdot 0{,}3989 = 0{,}05$$

3. Интегральная теорема Лапласа

Продолжим задачу про детали.

Пример: Какова вероятность того, что в партии из 400 деталей бракованных окажется не менее 70 и не более 100?

$P_{400}(70 \leq x \leq 100) = P_{400}(70) + P_{400}(71) + ... + P_{400}(100)$, где x- число бракованных деталей (сумма несовместных событий)

ТЕОРЕМА (*интегральная теорема Лапласа):* Если вероятность p наступления события А в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность того, что событие А появится в n испытаниях от к$_1$ до к$_2$ раз, равна

$$P_n(k_1; k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad \text{ïðè} \quad x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

$\boxed{P_n(k_1 \leq x \leq k_2) = \hat{O}(x_2) - \hat{O}(x_1)}$, где Φ(x)-функция Лапласа

Φ(x)- табличная функция, нечётная, т е Φ(-x)= - Φ(x) и для значений $x \geq 5$, значение функции принимают равным 0,5.

4. Теорема Пуассона

Локальная теорема Лапласа дает хорошие результаты в тех случаях, когда вероятность события А в каждом из n независимых повторных испытаниях значительно отличается от 0 и 1. Теорема Пуассона применяется для редких событий.

ОПР: Событие называется *редким*, если вероятность его появления очень мала ≈ 0.

Пусть вероятность события А в каждом из n независимых повторных испытаниях выражается формулой $p = \frac{\lambda}{n}, \lambda > 0, \lambda = const$. То $\boxed{P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}$, $\lambda = np$ - *формула Пуассона.*

Пример: Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится =0,0002. Найти вероятность того, что на базу придут три негодных изделия.

n=5000 p=0,0002 k=3

$\lambda = np = 5000 \cdot 0{,}0002 = 1 = const$

$$P_{5000}(3) = \frac{1}{3!} e^{-1} = \frac{1}{6e} \approx 0{,}06$$

5. Наивероятнейшее число наступлений события при повторении испытаний

ОПР: Число k_0 наступлений события А в n независимых повторных испытаниях называется *наивероятнейшим*, если вероятность того, что событие А наступит в этих испытаниях k_0 раз превышает или не < вероятности остальных возможных исходов испытаний.

$$\boxed{n \cdot p - q \le k_0 < n \cdot p + p}$$

Можно доказать, что если np-q дробное число, то имеем только одно значение k_0, а если np-q целое число, то имеется k значений k_0.

Пример: Производится 6 независимых повторных испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А =0,2. Найти наивероятнейшее число появлений события А.

Решение: n=6, p=0,2, q=0,8

$6*0,2-0,8 \le k_0 < 6*0,2+0,2$

$0,4 \le k_0 < 1,4$

$k_0=1$

1.33 Лекция №33 (2 часа).

Тема: «Случайные величины»

1.33.1 Вопросы лекции:

1. Дискретные случайные величины. Закон распределения вероятностей дискретной с.в.
2. Числовые характеристики дискретной случайной величины.
3. Непрерывные случайные величины. Функция распределения и её свойства. Плотность распределения вероятности непрерывной случайной величины.
4. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.

1.33.2 Краткое содержание вопросов:

1. Дискретные случайные величины. Закон распределения вероятностей дискретной с.в.

ОПР: *Случайная величина* – это величина, которая в результате испытания примет одно и только одно из возможных значений, причем заранее не известно какое. (Обозн: X, Y, Z,…)

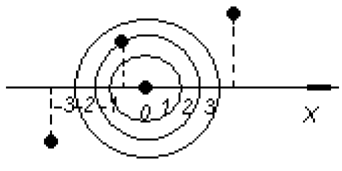
С каждой с. в. Связывают численное множество *(множество значений случ. величины)* (Обозн: x_1, x_2, x_3,…)

Пример: 1) X_1-число появлений «герба» при трех подбрасываниях монеты. $\{0,1,2,3\}$

2) Y- число выпадений 6 очков при одном бросании игральной кости. $\{0,1\}$

3) Z-число попаданий в самолет для вывода его из строя. $\{0,1,2,3,...,n\}$

4) X-абсцисса точки попадания при выстреле по мишени. Множ-во значений R $(-\infty;+\infty)$



ОПР: *Дискретной* называется с.в., которая принимает отдельные изолированные значения с определенными вероятностями (примеры 1-3). *Непрерывной* называется с.в., которая принимает все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Различные с.в. могут принимать одинаковые значения, но иметь различные вероятности для этих значений.

Пример: 1) X-число появлений «герба» при одном подбрасываниях монеты.

$\{0,1\}$ $p(X=0)=0,5$ $p(X=1)=0,5$

2) У- число выпадений 6 очков при одном бросании игральной кости.

$\{0,1\}$ $p(X=0)=\frac{5}{6}$ $p(X=1)=\frac{1}{6}$

Поэтому с.в. задают законом распределения.

ОПР: *Законом распределения вероятностей дискретной с.в.* называют перечень всех возможных её значений и соответствующих им вероятностей.

1) $\dfrac{X|\ 0\ |\ 1\ |}{p\ |0{,}5|0{,}5|}$ 2) $\dfrac{Y|\ 0\ |\ 1\ |}{p\ \left|\frac{5}{6}\right|\frac{1}{6}\ \right|}$

$\dfrac{X\ \ |\ x_1\ |\ x_2\ \ |..|\ x_n}{p\ \ |\ p_1\ |\ p_2\ |...|\ p_n}$ причем: $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$

<u>Пример:</u> В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается: 1 выигрыш в 50 рублей и 10 выигрышей по 1 рублю. Найти закон распределения с.в. Х-стоимость возможного выигрыша для владельца одного билета.

Решение:

Возможные значения Х: $x_1=50$ соответствующая $p_1=1\backslash 100=0{,}01$

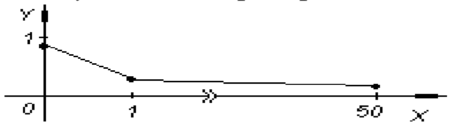
$x_2=1$ соответствующая $p_2=10\backslash 100=0{,}1$

$x_3=0$ соответствующая $p_3=1-(p_1+p_2)=1-0{,}11=0{,}89$.

Составим закон распределения:

$\dfrac{X|\ 50\ |\ 1\ |\ \ 0}{p\ |0{,}01|0{,}1\ |0{,}89}$ Проверка: 0,01+0,1+0,89=1

Для наглядности закон распределения можно изобразить графически. Для этого в ПДСК строят точки $(x_i\ ;\ y_i)$, а затем соединяют их отрезками прямых. Полученную фигуру называют <u>*многоугольником распределения.*</u>



2. Числовые характеристики дискретной случайной величины

1) Математическое ожидание.

<u>ОПР:</u> <u>*Математическим ожиданием дискретной с.в.*</u> называют сумму произведений всех её возможных значений на их соответствующие вероятности.

$\dfrac{X\ \ |\ x_1\ |\ x_2\ \ |..|\ x_n}{p\ \ |\ p_1\ |\ p_2\ |...|\ p_n}$ $M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n$ $\boxed{M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i}$

<u>Пример:</u> вернемся к предыдущему примеру. Подсчитаем математическое ожидание выигрыша владельца одного лотерейного билета

$M(X) = 50\cdot 0{,}01 + 1\cdot 0{,}1 + 0\cdot 0{,}89 = 0{,}6$

<u>*Свойства математического ожидания:*</u>

1) М(С)=С, где С- постоянная

2) М(СХ)=СМ(Х)

3) М(ХУ)=М(Х)М(У)

4) М(Х+У)=М(Х)+М(У) и М(Х-У)=М(Х)-М(У)

2) Дисперсия.

Пусть Х-случайная величина. М(Х)- ее математическое ожидание.

С.в. Х-М(Х) называется <u>*отклонением*</u> между с.в. и её математич. ожиданием.

<u>ОПР:</u> <u>*Дисперсией*</u> (рассеянием) дискретной с.в. называется матаематич. Ожидание квадрата отклонения с.в. от её математического ожидания.

$\boxed{D(X) = M(X - M(X))^2}$

Чаще более удобно пользоваться другой формулой

ТЕОРЕМА: Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата с.в. Х и квадратом её математического ожидания. $\boxed{D(X) = M(X^2) - (M(X))^2}$

<u>Пример:</u> Найти дисперсию с.в. Х, заданной законом распределения

$\dfrac{X|\ 1\ |\ \ 2\ |\ \ \ 5}{p\ |0{,}3|0{,}5\ |0{,}2}$

Решение: M(X)=0,3+1+1=2,3

X^2	1	4	25
p	0,3	0,5	0,2

$M(X^2)=0,3+2+5=7,3$ $(M(X))^2=(2,3)^2=5,29$

D(X)=7,3-5,29=2,01

Свойства дисперсии:

1) D(C)=0, где C- постоянная

2) $D(CX)=C^2\,D(X)$

3) D(X+C)=D(X)

4) D(X+У)=D(X)+D(У) и D(X-У)=D(X)+D(У)

3) Среднее квадратическое отклонение

Для оценкирассеивания возможных значений с.в. служит также среднее квадратическое отклонение $\boxed{\sigma(X)=\sqrt{D(X)}}$

Пример: $\sigma(X)=\sqrt{2,01}=1,42$

3. Непрерывная случайная величина. Функция распределения и её свойства.

Рассм. непрер. с.в. X, все значения которой заполняют некоторый интервал (a,b). Очевидно, что перечислить все возможные значения этой величины нельзя (т.к. их бесконечно много). Следовательно закон распределения в виде таблицы составить нельзя. Для создания закона распределения введем функцию распределения вероятности с.в.

Пусть x- действительное число.

ОПР: *Функцией распределения с.в.X* (интегральной функцией) называется вероятность события, состоящего в том, что с.в. X примет значение меньше x.

F(X)=p(X<x)

Заметим: если рассмотреть значения с.в. на числовой прямой, F(X)=p(X<x) определяет вероятность попадания с.в. X левее точки x.

Свойства функции распределения:

1)значения функции распределения принадлежат отрезку (0,1), включая концы отрезка. $0\le F(X)\le 1$

2) функция распределения неубывающая, т.е. если $x_2>x_1 \Rightarrow F(x_2)\ge F(x_1)$

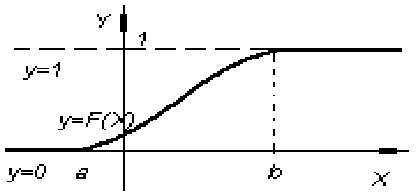
Следствия: 1) вероятность того, что с.в. примет значение из интервала (a,b)

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a)$$

2)вероятность того, что с.в. X примет одно конкретное значение =0

3) $F(X)=0,\ \text{ïðè}\ x\le a\ \ \text{è}\ \ F(X)=1,\ \text{ïðè}\ x\ge b$

Изобразим график F(X) по её свойствам:



Замечание: Интегральную функцию можно составить и для дискретной случ. величины

$$F(X)=\sum_{x_i<x} p(X=x_i)$$ График имеет ступенчатый вид.

Пример: Построить график дискр. с. в. X, заданной законом распределения.

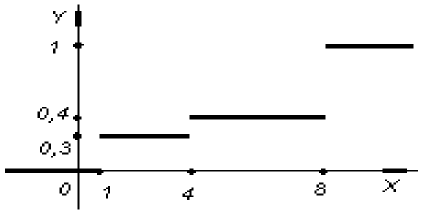
X	1	4	8
p	0,3	0,1	0,6

1) $x\le 1\quad F(X)=0-св-во\ 3$

2) $1<x\le 4\quad F(X)=p(X=1)=0,3$

3) $4<x\le 8\quad F(X)=p(X=1)+p(X=4)=0,3+0,1=0,4$

4) $x>8\quad F(X)=1-св-во\ 3$



На графике скачки=0,3; 0,1 и 0,6 и = вероятностям значений с. в. $\Rightarrow$ если задана F(X), то можно составить закон распределения с. в. X.

Плотность распределения вероятности непрерывной случайной величины

ОПР: *Плотностью распределения вероятностей НСВ X* (дифференциальная функция) называют функцию f(X)=F'(X), т.е. первую производную от функции распределения.

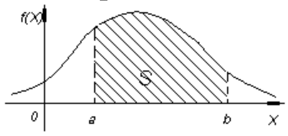
Замечание: Для ДСВ плотность распределения не применима.

ТЕОРЕМА: Вероятность того, что НСВ X примет значение, принадлежащее интервалу (a;b) равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b.

$$\boxed{P(a < X < b) = \int_a^b f(X)dx = F(b) - F(a)}$$

Геометрически это означает, что вероятность того, что НСВ примет значение из (a;b) равна площади криволин. трапеции, ограниченной осью OX, кривой распределения f(X) и прямыми x=a и x=b.

ОПР: Кривая, соответствующая функции y=f(X) называется *кривой распределения.*



Зная плотность распределения f(X) можно найти функцию распределения F(X) по формуле

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(X)dx$$

Свойства плотности распределения:

1) f(X)$\geq$0, геометрически: график расположен выше оси OX или на ней.

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(X)dx = 1$, геометрически: вся площадь криволин. трап., ограниченная осью OX и кривой распределения =1.

4. Числовые характеристики непрерывной случайной величины

1. Математическое ожидание. $M(X) = \int_a^b x \cdot f(X)dx$ или $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(X)dx$

2. Дисперсия. $D(X) = \int_a^b (X - M(X))^2 \cdot f(X)dx$ или $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - M(X))^2 \cdot f(X)dx$

$D(X) = \int_a^b X^2 \cdot f(X)dx - (M(X))^2$ или $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} X^2 \cdot f(X)dx - (M(X))^2$

3. Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

1.34 Лекция №34 (2 часа).

Тема: «Нормальный закон распределения случайной величины»

1.34.1 Вопросы лекции:

1. Вероятность попадания нормально распределенной с. в. в заданный интервал.
2.Правило «трёх сигм».

1.34.2 Краткое содержание вопросов:

1. Вероятность попадания нормально распределенной с. в. в заданный интервал

Нормальный закон распределения наиболее часто встречается в жизни. Ему подчиняется рост людей и животных, их масса.

<u>ОПР:</u> Н.с.в. подчинена <u>*нормальному закону распределения*</u>, если её плотность распределения имеет следующий вид $f(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где $a=M(X), \sigma=\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$

<u>ОПР:</u> График плотности нормально распределенной величины называется <u>*нормальной кривой или*</u>
<u>*кривой Гаусса.*</u>

Он обладает следующими свойствами:

1) $x\in R$

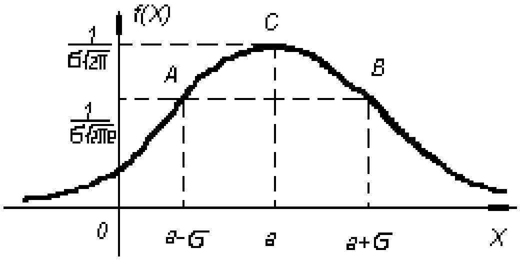
2) для всех x , функция принимает положительные значения (её график выше оси OX)

3) кривая симметрична относит. прямой x=a.

4) точка $(a;\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}})$ - точка максимума.

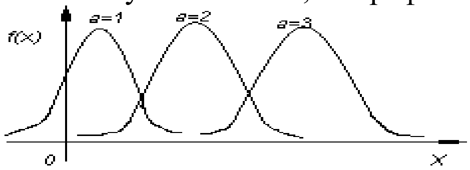
5) по мере удаления x от точки a, график функции убывает, приближается к оси OX, но не пересекает её.

6) при $x\in(a-\sigma;a+\sigma)$ -график функции выпуклый, $x\in(-\infty;a-\sigma)\cup(a+\sigma;+\infty)$ - график функции вогнутый. Точки перегиба: $A(a-\sigma;\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\, e}})$ и $B(a+\sigma;\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\, e}})$

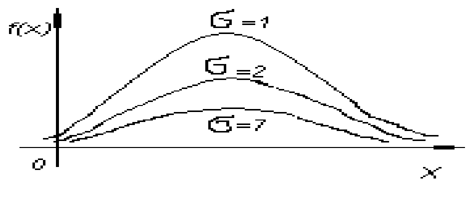


<u>Влияние параметров нормального распределения на вид нормальной кривой:</u>

1) если a увеличивается, то график сдвигается вправо вдоль оси OX
 если a уменьшается, то график сдвигается влево вдоль оси OX



2) с увеличением σ , максимум ордината норм. Кривой уменьшается, а сама кривая становится более пологой (сжимается к оси OX). При уменьшении σ, нормальная кривая растягивается по оси OY.



Вероятность попадания нормально распределенной с. в. в заданный интервал

$$\boxed{P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)}$$, где

Ф(X)- функция Лапласа

a- математическое ожидание

σ -ср. квадр. Отклонение

<u>Пример:</u> Найти вероятность того, что с. в. X примет значение, принадлежащее интервалу (10;50), если с.в. X распределена по нормальному закону и M(X)=30, σ (X)=10.

$$P(10 < X < 50) = \hat{O}(\frac{50-30}{10}) - \hat{O}(\frac{10-30}{10}) = \hat{O}(2) - \hat{O}(-2) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544$$

Часто требуется вычислить вероятность того, что отношение норм. распр. с.в. X по модулю меньше заданного положительного числа δ, т.е. требуется найти вероятность осуществления неравенства

$$|x-a| < \delta \qquad P(|x-a| < \delta) = \hat{O}\left(\frac{(a+\delta)-a}{\sigma}\right) - \hat{O}\left(\frac{(a-\delta)-a}{\sigma}\right) = \hat{O}\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \hat{O}\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\hat{O}\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

$$-\delta < x-a < \delta$$

$$\underbrace{a-\delta}_{\alpha} < x < \underbrace{a+\delta}_{\beta} \qquad \boxed{P(|x-a| < \delta) = 2\hat{O}\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)}$$

2. Правило «трёх сигм»

Вычислим вероятности:

$$1) P(|x-a| < \sigma) = 2\Phi\left(\frac{\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(1) = 2 \cdot 0{,}34134 = 0{,}6827$$

$$2) P(|x-a| < 2\sigma) = 2\Phi\left(\frac{2\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0{,}47725 = 0{,}9545$$

$$3) P(|x-a| < 3\sigma) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0{,}49865 = 0{,}9973$$

ПРАВИЛО: Практически достоверно, что при однократном испытании отклонение нормально распределенной с. в. От ее математического ожидания не превышает утроенного среднего квадр. отклонения, т.е. значение любой норм. распред. с.в. расположены в интервале (а-3σ; а+3σ).

Пример: Средний диаметр стволов на некот. Участке является с. в., распределенной по нормальному закону. D(X)=16, M(X)=25 (см). Найти границы, в которых заключается диаметр ствола наудачу взятого дерева.

D(X)=16	$\lvert x-a\rvert < 3\sigma$	$\sigma = \sqrt{D}$
a=25 см	$\lvert x-25\rvert < 3 \cdot 4$	$\sigma = \sqrt{16} = 4$
$(\alpha;\beta) = ?$	$-12 < x-25 < 12$	
	$13 < x < 37 \quad см$	

1.35 Лекция №35 (2 часа).

Тема: «Основы математической статистики»

1.35.1 Вопросы лекции:

1. Вариационные ряды, их характеристики и графическое изображение.
2. Генеральная совокупность, выборка.
3. Функция распределения.
4. Числовые характеристики.

1.35.2 Краткое содержание вопросов:

1. Вариационные ряды, их характеристики и графическое изображение

Пусть некоторый признак генеральной совокупности описывается случайной величиной *X*.

Рассмотрим выборку $\{x_1,x_2,...,x_n\}$ объема *n* из генеральной совокупности. этой выборки представляют собой значения случайной величины *X*.

На первом этапе статистической обработки производят *ранжирование* выборки, т.е. упорядочивание чисел $x_1,x_2,...,x_n$ по возрастанию.

Различные элементы выборки называются **вариантами.**

Частотой варианты x_i называется число m_i, показывающее, сколько раз эта варианта встречается в выборке.

Частостью, относительной частотой или **долей** варианты называется число

$$w_i = \frac{m_i}{n}$$

Частоты и частости называются **весами**.

Пусть *x* некоторое число. Тогда количество вариант m_x, значения которых меньше *x,* называется накопленной частотой, т.е.

$$m_x = \sum_{x_i < x} m_i$$

Отношение накопленной частоты к общему числу наблюдений *n* называется **накопленной частостью:**

$$w_x = \frac{m_x}{n} = \frac{1}{n}\sum_{x_i < x} m_i$$

Ряд вариант, расположенных в порядке возрастания их значений, с соответствующими им весами называется **вариационным рядом.**

Вариационные ряды бывают:

- дискретные;
- интервальные.

Вариационный ряд называется **дискретным,** если он представляет собой выборку значений дискретной случайной величины.

Ряд называется **непрерывным (интервальным)**, если он представляет выборку непрерывной случайной величины.

Общий вид дискретного вариационного ряда показан в табл.

Таблица

Варианты x_i	x_1	x_2	…	x_n
Частоты m_i	m_1	m_2	…	m_n

Построение интервального вариационного ряда

1. Разбивают множество значений вариант на полуинтервалы $[a_i, a_{i+1})$ т.е. производят их *группировку.*

Рекомендуется количество интервалов *k* выбирать по формуле Стерджерса

$$k = 1 + 1,4\ln n$$

Длина интервала равна $\Delta = x_{max} - x_{min} / k$

Величина интервала:

$$k = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3,322\lg n}$$

Строим интервал: за начало 1-го интервала берут:

$$x_{нач} = x_{\min} - \frac{k}{2}$$

Считают число вариант, попавших в полуинтервал $[a_i, a_{i+1})$.

Получают значения частот m_i, $i = \overline{1,k}$.

Интервальный ряд можно представить таблицей

Таблица

Варианты x_i	$[a_1, a_2)$	$[a_2, a_3)$	…	$[a_k, a_{k+1})$
Частоты m_i	m_1	m_2	…	m_k

Если варианта находится на границе интервала, то ее присоединяют к правому интервалу.

Графические изображения вариационных рядов

Для наглядности представления используют графические изображения вариационных рядов в виде:
- полигона;
- гистограммы;
- кумулянты.

Полигон, как правило, служит для изображения дискретного вариационного ряда. Представляет собой ломаную, соединяющую точки плоскости с координатами $(x_i, m_i), i = \overline{1, n}$. Для интервального ряда также строится полигон, только его ломаная проходит через точки (c_i, m_i), где $c_i = (a_i + a_{i+1})/2, i = \overline{1, k}$.

Гистограмма служит только для представления интервальных вариационных рядов и имеет вид ступенчатой фигуры из прямоугольников с основаниями, равными длине интервалов Δ, и высотами, равными частотам m_i интервалов.

Кумулянта представляет собой ломаную, соединяющую точки с координатами (x_i, m_{x_i}) (где m_{x_i} — накопленные частоты) для дискретного ряда, или точки с координатами (a_i, m_{a_i}) для интервального ряда.

2. Генеральная совокупность, выборка

Генеральной совокупностью называется совокупность объектов или наблюдений, *все элементы* которой подлежат изучению при статистическом анализе.

В математической статистике генеральная совокупность часто понимается как совокупность всех мыслимых наблюдений, которые могли быть произведены при выполнении данного комплекса условий. Понятие генеральной совокупности аналогично понятию случайной величины (закону распределения вероятностей), так как обе они полностью определяются заданным комплексом условий. Так как понятия генеральной совокупности и совокупности всех значений случайной величины связаны с испытаниями (наблюдениями) в неизменных условиях, то в дальнейшем эти понятия не будут различаться.

Понятие генеральной совокупности несколько шире понятия случайной величины, так как случайная величина может быть результатом нескольких испытаний.

Генеральная совокупность может быть конечной или бесконечной.

Число объектов (наблюдений) в генеральной совокупности называется ее *объемом.*

Изучение всего набора элементов генеральной совокупности часто оказывается невозможным, в таких случаях рассматривают некоторую часть объема.

Часть объектов генеральной совокупности, используемая для исследования, называется *выборочной совокупностью* или *выборкой.*

Пример. Число единиц товара N, произведенного фирмой в течение года, есть конечная генеральная совокупность. Для исследования качества продукции на практике рассматривается выборка, состоящая из *n* единиц товара. Признаком, или случайной величиной, может быть число единиц товара, удовлетворяющих сертификатным требованиям.

Сущность выборочного метода в математической статистике заключается в том, чтобы по определенной части генеральной совокупности (выборке) судить о ее свойствах в целом. Выборочный метод является единственно возможным в случае бесконечной генеральной совокупности или когда исследование связано с уничтожением (гибелью) наблюдаемых объектов (например, исследование предельных режимов приборов, исследование действия вирусов на подопытных животных и т.д.). Для того чтобы по выборке можно было адекватно судить о случайной величине, она должна быть *представительной (репрезентативной).* Репрезентативность выборки обеспечивается случайностью отбора ее элементов, так как все элементы генеральной совокупности должны иметь одинаковую вероятность попадания в выборку.

Имеются два способа образования выборки:
1) *повторная выборка,* когда каждый элемент, случайно отобранный и исследованный, возвращается в общую совокупность и может быть отобран повторно;
2) *бесповторная выборка,* когда отобранный элемент не возвращается в общую совокупность.

3. Функция распределения.

Эмпирической функцией распределения $F_n(x)$ называется функция, значение которой в точке *x* равно накопленной частоте, т.е.

$$F_n(x) = w_x = \frac{m_x}{n}$$

Для интервального ряда указываются не конкретные значения вариант, а только их частоты на интервалах. В этом случае эмпирическая функция распределения определена только на концах интервалов. Ее можно изобразить ломаной, проходящей через точки $(a_i, F_n(a_i)), i = \overline{1,k}$.

Эмпирической плотностью распределения непрерывного вариационного ряда называется функция

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{m_i}{n\Delta} & \text{, если } a_i \le x \le a_{i+1}, i = \overline{1,k} \\ 0 & \text{,если } x < a \text{ или } x > a_{k+1} \end{cases}$$

Функция $f_n(x)$ является аналогом плотности распределения случайной величины. Площадь области под графиком этой функции равна единице.

4. Числовые характеристики.

Каждой числовой характеристике случайной величины X соответствует ее статистическая аналогия. Для основной характеристики положения — математического ожидания случайной величины – такой является среднее арифметическое наблюденных значений случайной величины:

$$M^*|X| = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

где x_i — случайной величины, наблюденное i -м опыте, n - число опытов.

Эту характеристику мы будем в дальнейшем называть статистическим средним случайной величины.

Согласно закону больших чисел, при ограниченном увеличении числа опытов статистическое среднее приближается (сходится по вероятности) к математическому ожиданию. При ограниченном числе опытов статистическое среднее является случайной величиной, которая, тем не менее, связана с математическим ожиданием и может дать о нем известное представление.

Рассмотрим, например, дисперсию случайной величины. Она представляет собой математическое ожидание случайной величины $\overset{o}{X}{}^2 = \left(X - m_x\right)^2$:

$$D[X]=M\left[\overset{\circ}{X}{}^2\right]=M\left[\left(X-m_x\right)^2\right].$$

Если в этом выражении заменить математическое ожидание его статистической аналогией – средним арифметическим, мы получим статистическую дисперсию случайной величины X:

$$D^*[X]=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-m_x^*\right)^2}{n},$$ где $m_x^*=M^*[X]$ - статистическое среднее.

Аналогично определяются статистические начальные и центральные моменты любых порядков:

$$\alpha_s^*[X]=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^s}{n}$$

$$\mu_s^*[X]=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-m_x^*\right)^s}{n}$$

Все эти определения полностью аналогичны данным в главе 5 определениям числовых характеристик случайной величины, с той разницей, что в них везде вместо математического ожидания фигурирует среднее арифметическое. При увеличении числа наблюдений, очевидно, все статистические характеристики будут сходиться по вероятности к соответствующим математическим характеристикам и при достаточном n могут быть приняты приближенно равными им.

Нетрудно доказать, что для статистических начальных и центральных моментов справедливы те же свойства, которые были введены в главе 5 для математических моментов. В частности, статистический первый центральный момент всегда равен нулю:

$$\mu_1^*=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-m_x^*\right)}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}-m_x^*=m_x^*-m_x=0.$$

Соотношения между центральными и начальными моментами также сохраняются:

$$\mu_2^*=D_x^*=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-m_x^*\right)^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-2m_x^*\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}+\left(m_x^*\right)^2=\alpha_2^*-\left(m_x^*\right)^2 \quad (7.4.6)$$

и т.д.

При очень большом количестве опытов вычисление характеристик можно применить следующий прием: воспользоваться теми же разрядами, на которые был расклассифицирован статистический материал для построения статистического ряда или гистограммы, и считать приближенно значение случайной величины в каждом разряде постоянным и равным среднему значению, которое выступает в роли «представителя» разряда. Тогда статистические числовые характеристики будут выражаться приближенными формулами:

$$m_x^*=M^*[X]=\sum_{i=1}^{k}\tilde{x}_i p_i^*,$$

$$D_x^*=D^*[X]=\sum_{i=1}^{k}\left(\tilde{x}_i-m_x^*\right)^2 p_i^*,$$

$$\alpha_s^*[X] = \sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i^s p_i^*,$$

$$\mu_s^*[X] = \sum_{i=1}^{k} \left(\tilde{x}_i - m_x^*\right)^s p_i^*,$$

где $\tilde{x}_i$ — «представитель» i-го разряда, p_i^* - частота i-го разряда, k - число разрядов.

1.36 Лекция №36 (2 часа).

Тема: «Основы теории выборочного метода»

1.36.1 Вопросы лекции:

1. Статистическое оценивание параметров, методы нахождения оценок.
2. Точность оценки, надежность, доверительный интервал.
3. Статистическая гипотеза и общая схема ее проверки.
4. Типы статистических критериев проверки гипотез.

1.36.2 Краткое содержание вопросов:

1. Оценка параметров, методы нахождения оценок.

Метод максимального правдоподобия

Метод предложен Р. Фишером в 1912 г. Метод основан на исследовании вероятности получения выборки наблюдений $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Эта вероятность равна $f(x_1, T)\, f(x_2,T) \ldots f(x_n, T)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$.

Совместная плотность вероятности

$$L(x_1, x_2 \ldots, x_n\,;\, T) = f(x_1, T)\, f(x_2, T) \ldots f(x_n, T), \quad (1)$$

рассматриваемая как функция параметра T, называется *функцией правдоподобия*.

В качестве оценки θ параметра T следует взять то значение, которое обращает функцию правдоподобия в максимум. Для нахождения оценки необходимо заменить в функции правдоподобия T на θ и решить уравнение $\partial L/\partial \theta = 0$. В целях упрощения вычислений переходят от функции правдоподобия к ее логарифму $\ln L$. Такое преобразование допустимо, так как функция правдоподобия – положительная функция, и она достигает максимума в той же точке, что и ее логарифм. Если параметр распределения векторная величина $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$, то оценки максимального правдоподобия находят из системы уравнений

$$\partial \ln L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) / \partial_{\theta 1} = 0;$$
$$\partial \ln L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) / \partial_{\theta 2} = 0;$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\partial \ln L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) / \partial_{\theta n} = 0. \quad (2)$$

Для проверки того, что точка оптимума соответствует максимуму функции правдоподобия, необходимо найти вторую производную от этой функции. И если вторая производная в точке оптимума отрицательна, то найденные значения параметров максимизируют функцию.

Итак, нахождение оценок максимального правдоподобия включает следующие этапы: построение функции правдоподобия (ее натурального логарифма); дифференцирование функции по искомым параметрам и составление системы уравнений; решение системы уравнений для нахождения оценок; определение второй производной функции, проверку ее знака в точке оптимума первой производной и формирование выводов.

Пример. Будем считать, что случайная величина X, выборка значений которой представлена в табл. 2.3, имеет нормальное распределение. Необходимо найти оценки максимального правдоподобия параметров μ и σ этого распределения.

Решение. Функция правдоподобия для выборки ЭД объемом n

$$L(\mu, \sigma) = \frac{1}{\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^n} \exp\left[-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Логарифм функции правдоподобия

$$\ln L(\mu, \sigma) = -n\ln(\sqrt{2\pi}) - n\ln\sigma - \left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 / 2\sigma^2\right\}.$$

Система уравнений для нахождения оценок параметров

$$\partial \ln L(\mu,\sigma)/\partial\mu = \left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)/\sigma^2\right\} = 0;$$

$$\partial \ln L(\mu, \sigma)/\partial\sigma = -n/\sigma + \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2/\sigma^3 = 0.$$

Из первого уравнения следует: $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0; \quad \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i / n,$ т.е. среднее арифметическое является оценкой максимального правдоподобия для математического ожидания. Из второго уравнения можно найти $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 / n$. Эмпирическая дисперсия является смещенной.

После устранения смещения $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 / (n-1)$.

Фактические значения оценок параметров: μ =27,51, σ^2 = 0,91.

Для проверки того, что полученные оценки максимизируют значение функции правдоподобия, возьмем вторые производные

$$\partial^2 \ln(\mu, \sigma)/\partial\mu^2 = -n/\sigma^2;$$

$$\partial^2 \ln(\mu, \sigma)/\partial\sigma^2 = n/\sigma^2 - 3\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2/\sigma^4 = n/\sigma^2 - 3n/\sigma^2 = -2n\sigma^2.$$

Вторые производные от функции $\ln L(\mu, \sigma)$ независимо от значений параметров меньше нуля, следовательно, найденные значения параметров являются оценками максимального правдоподобия.

Метод максимального правдоподобия позволяет получить состоятельные, эффективные (если таковые существуют, то полученное решение даст эффективные оценки), достаточные, асимптотически нормально распределенные оценки. Этот метод может давать как смещенные, так и несмещенные оценки. Смещение удается устранить введением поправок. Метод особенно полезен при малых выборках. Оценка инвариантна относительно преобразования параметра, т.е. оценка некоторой функции $\varphi(T)$ от параметра T является эта же функция от оценки $\varphi(\theta)$. Если функция максимального правдоподобия имеет несколько максимумов, то из них выбирают глобальный.

Метод моментов

Метод предложен К. Пирсоном в 1894 г. Сущность метода:

выбирается столько эмпирических моментов, сколько требуется оценить неизвестных параметров распределения. Желательно применять моменты младших порядков, так как погрешности вычисления оценок резко возрастают с увеличением порядка момента;

вычисленные по ЭД оценки моментов приравниваются к теоретическим моментам;

параметры распределения определяются через моменты, и составляются уравнения, выражающие зависимость параметров от моментов, в результате получается система уравнений. Решение этой системы дает оценки параметров распределения генеральной совокупности.

Пример. Предположим, что случайная величина X, выборка значений которой представлена в табл. 2.3, имеет гамма-распределение. Необходимо найти оценки параметров этого распределения (можно отметить, что нормальное распределение является частным случаем гамма-распределения).

Решение. Функция плотности гамма-распределения имеет вид

$$f(x, \lambda) = \frac{\lambda^{\nu}}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} \exp(-\lambda x), \; x \ge 0, \; \lambda > 0, \; \nu \ge 0.$$

Распределение характеризуется двумя параметрами ν и λ , поэтому следует выразить один параметр через оценку математического ожидания, а другой – через оценку дисперсии. Математическое ожидание и дисперсия этого распределения равны ν/λ и ν/λ^2 соответственно. Их оценки определены в примере 2.3: $\mu_1 = 27{,}51$, $\mu_2 = 0{,}91$;. Тогда получим систему уравнений для оцениваемых параметров

$$\frac{\nu}{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \mu_1 ,$$

$$\frac{\nu}{\lambda^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = \mu_2 .$$

Разделив оценку математического ожидания на оценку дисперсии, получим $\lambda = \mu_1/\mu_2 = 30{,}12$, следовательно, $\nu = \lambda\, \mu_1 = 828{,}61$.

Метод моментов позволяет получить состоятельные, достаточные оценки, они при довольно общих условиях распределены асимптотически нормально. Смещение удается устранить введением поправок. Эффективность оценок невысокая, т.е. даже при больших объемах выборок дисперсия оценок относительно велика (за исключением нормального распределения, для которого метод моментов дает эффективные оценки). В реализации метод моментов проще метода максимального правдоподобия. Напомним, что метод целесообразно применять для оценки не более чем четырех параметров, так как точность выборочных моментов резко падает с увеличением их порядка.

2. Точечность оценки, надежность, доверительный интервал.

Точечная оценка предполагает нахождение единственной числовой величины, которая и принимается за значение параметра. Такую оценку целесообразно определять в тех случаях, когда объем ЭД достаточно велик. Причем не существует единого понятия о достаточном объеме ЭД, его значение зависит от вида оцениваемого параметра (к этому вопросу предстоит вернуться при изучении методов интервальной оценки параметров, а предварительно будем считать достаточной выборку, содержащую не менее чем 10 значений). При малом объеме ЭД точечные оценки могут значительно отличаться от истинных значений параметров, что делает их непригодными для использования.

Задача точечной оценки параметров в типовом варианте постановки состоит в следующем.

Имеется: выборка наблюдений $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ за случайной величиной X. Объем выборки n фиксирован.

Известен вид закона распределения величины X, например, в форме плотности распределения $f(T, x)$, где T – неизвестный (в общем случае векторный) параметр распределения. Параметр является неслучайной величиной.

Требуется найти оценку θ параметра T закона распределения.

Ограничения: выборка представительная.

Сущность задачи интервального оценивания параметров

Интервальный метод оценивания параметров распределения случайных величин заключается в определении интервала (а не единичного значения), в котором с заданной степенью достоверности будет заключено значение оцениваемого параметра. *Интервальная оценка* характеризуется двумя числами – концами интервала, внутри которого предположительно находится истинное значение параметра. Иначе говоря, вместо отдельной точки для оцениваемого параметра можно установить интервал значений, одна из точек которого является своего рода "лучшей" оценкой. Интервальные оценки являются более полными и надежными по сравнению с точечными, они применяются как для больших, так и для малых выборок. Совокупность методов определения промежутка, в котором лежит

значение параметра T, получила название методов интервального оценивания. К их числу принадлежит метод Неймана.
Имеется: выборка наблюдений $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ за случайной величиной X. Объем выборки n фиксирован.
Необходимо с доверительной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$ определить интервал $t_0 - t_1$ $(t_0 < t_1)$, который накрывает истинное значение неизвестного скалярного параметра T(здесь, как и ранее, величина T является постоянной, поэтому некорректно говорить, что значение T попадает в заданный интервал).
Ограничения: выборка представительная, ее объем достаточен для оценки границ интервала.

Эта задача решается путем построения доверительного утверждения, которое состоит в том, что интервал от t_0 до t_1 накрывает истинное значение параметра T с доверительной вероятностью не менее γ. Величины t_0 и t_1 называются нижней и верхней доверительными границами (НДГ и ВДГ соответственно). Доверительные границы интервала выбирают так, чтобы выполнялось условие $P(t_0 \le \theta \le t_1) = \gamma$. В инженерных задачах доверительную вероятность γ назначают в пределах от 0,95 до 0,99. В доверительном утверждении считается, что статистики t_0 и t_1 являются случайными величинами и изменяются от выборки к выборке. Это означает, что доверительные границы определяются неоднозначно, существует бесконечное количество вариантов их установления.

Доверительным называется **интервал**, который с заданной надежностью α покрывает оцениваемый параметр.

Для оценки математического ожидания a случайной величины $\mathbf{X}$, распределенной по нормальному закону, при известном среднем квадратическом отклонении σ служит доверительный интервал

$$x^* - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < x^* + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

где $t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \delta$ - точность оценки, n - объем выборки, $\mathbf{x}^*$ - выборочное среднее, t - аргумент функции Лапласа, при котором $\Phi(t) = \frac{\alpha}{2}$.

Пример. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,9 неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака $\mathbf{X}$ генеральной совокупности, если среднее квадратическое отклонение $\sigma = 5$, выборочная средняя $\mathbf{x}^* = 20$ и объем выборки $n = 100$.

Решение. Требуется найти доверительный интервал

$$x^* - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < x^* + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Все величины, кроме t, известны. Найдем t из соотношения $\Phi(t) = 0,9/2 = 0,45$.

По таблице приложения 2 находим $t = 1,65$ и получаем доверительный интервал $19,175 < a < 20,825$.

Если среднее квадратическое отклонение σ неизвестно, то для оценки $M[X] = a$ служит доверительный интервал

$$x^* - t_\alpha\frac{\bar{s}}{\sqrt{n}} < a < x^* + t_\alpha\frac{\bar{s}}{\sqrt{n}},$$

где t_α находится в приложении 4 по заданным n и α, а вместо $\bar{s}$ часто бывает возможно подставить любую из оценок

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x^*)^2 \cdot m_i}, \quad s^* = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x^*)^2 \cdot m_i}$$

- исправленное среднеквадратическое, статистическое среднеквадратическое отклонения соответственно. При увеличении n обе оценки s и s^* будут различаться сколь угодно мало и будут сходиться по вероятностям к одной и той же величине σ.

3. Статистическая гипотеза и общая схема ее проверки.

С теорией статистического оценивания параметров распределения тесно связана проверка статистических гипотез.

О п р е д е л е н и е. ^ *Статистической гипотезой* называется любое предположение о виде неизвестного закона распределения или о величине параметров известных распределений.

Например, статистическими являются следующие гипотезы:
1) генеральная совокупность распределена по закону Пуассона;
2) дисперсии двух генеральных совокупностей, распределённых по нормальному закону, равны между собой.

Проверяемую гипотезу обычно называют *нулевой или основной* и обозначают H_0. Наряду с нулевой гипотезой H_0 рассматривают *конкурирующую* или*альтернативную* гипотезу H_1, являющуюся логическим отрицанием H_0. Например, если нулевая гипотеза $H_0: M(X)=10$, тогда альтернативная гипотеза $H_1: M(X)\neq 10$, или $H_1: M(X)>10$, или $H_1: M(X)<10$. Нулевая и конкурирующая гипотезы представляют собой две возможности выбора, осуществляемого в задачах проверки статистических гипотез.

Проверку правильности или неправильности выдвинутой гипотезы проводят статистическими методами. В результате такой проверки может быть принято правильное или неправильное решение. При этом различают *ошибки неправильного решения двух родов.*

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза. ^ *Ошибка второго рода* состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза. Последствия этих ошибок весьма различны.

О п р е д е л е н и е. Вероятность α допустить ошибку 1-го рода, т. е. отвергнуть правильную гипотезу H_0, называется *уровнем значимости* или «*альфа – риском*». Вероятность допустить ошибку 2-го рода, т. е. принять гипотезу H_0, когда она неверна, обычно обозначают β и называют «*бета – риском*».

Пользуясь терминологией статистического контроля качества продукции, можно сказать, что «альфа – риск» есть «риск потребителя», равный вероятности признания негодной по результатам выборочного контроля партии годной продукции, а «бета – риск» есть «риск потребителя», равный вероятности*принять* негодную продукцию, не удовлетворяющую стандарту. По юридической терминологии вероятность α есть вероятность вынесения обвинительного приговора невиновному, а вероятность β есть вероятность вынесения оправдательного приговора виновному.

Возможностью двойной ошибки 1-го и 2-го рода проверка гипотез отличается от рассмотренного ранее интервального оценивания параметров, в котором имелась лишь одна возможность ошибки получить доверительный интервал, который на самом деле не содержит оцениваемый параметр.

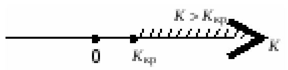
Для проверки нулевой гипотезы H_0 в рассмотрение вводят специально подобранную случайную величину, закон распределения которой известен. Эту случайную величину K, которая служит для проверки нулевой гипотезы H_0, называют *статистическим критерием*, или просто *критерием*. Сначала по выборочным характеристикам вычисляются значения величин, входящих в критерий K, а затем вычисляется и сам критерий. Вычисленное по выборкам значение критерия называют *наблюдаемым значением* $K_{\text{набл}}$.

Область возможных значений критерия K разбивают на две области: в одной находятся те значения критерия, при которых гипотеза H_0 принимается, в другой – те, при которых она отвергается.

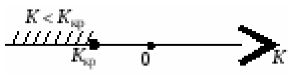
^ *Критической областью* называется область значений критерия K, при которых нулевая гипотеза H_0 *отвергается*.

Областью принятия гипотезы H_0 называют совокупность значений критерия, при которых гипотезу H_0 *принимают*.

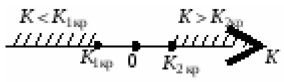
Поскольку критерий K есть одномерная случайная величина, то все её возможные значения принадлежат некоторому интервалу. *Критическими точками*(границами интервалов) $K_{\text{кр}}$ называются точки числовой оси, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы H_0. Различают*односторонную* (правостороннюю или левостороннюю) и *двусторонную* критические области (рис. 93):

а) 

– правосторонняя критическая область;

б) 

– левосторонняя критическая область;

в) 

– двусторонняя критическая область.

Для отыскания, например, правосторонней критической области необходимо найти критическую точку $K_{\text{кр}}$ исходя из условия

$$P(K > K_{\text{кр}}) = \alpha, \tag{12.37}$$

где $\alpha -$ вероятность, называемая уровнем значимости или «альфа – риском».

Для каждого критерия имеются соответствующие таблицы, по которым и находят критическую точку $K_{\text{кр}}$, удовлетворяющую условию (12.37). Затем сравнивают два значения $K_{\text{набл}}$ и $K_{\text{кр}}$. Если $K_{\text{набл}} > K_{\text{кр}}$, то нулевую гипотезу H_0 отвергают как практически невозможную. Если же $K_{\text{набл}} < K_{\text{кр}}$, то нулевую гипотезу H_0 принимают (точнее, не отвергают).

Проверка гипотезы о законе распределения по критерию Пирсона

Одной из важнейших задач математической статистики является *установление теоретического закона распределения случайной величины*, характеризующей изучаемый признак, по опытному (эмпирическому) распределению, представляющему вариационный ряд. Если на основании теоретических предпосылок или опыта аналогичных исследований, или на основании графического изображения статистического распределения можно предположить, что теоретический закон распределения имеет определённый вид, например A, то проверяют

нулевую гипотезу H_0: генеральная совокупность распределена по закону *А*. При этом неизвестные параметры распределения *А* заменяют наилучшими оценками по выборке, как это указано выше.
Как бы хорошо ни был подобран теоретический закон распределения, между эмпирическим и теоретическим распределениями неизбежны расхождения. Естественно возникает вопрос: объясняются ли эти расхождения только случайными обстоятельствами, связанными с ограниченным числом наблюдений, или они являются существенными и связаны с тем, что теоретический закон распределения подобран неудачно. Для ответа на этот вопрос выбирают статистический критерий – *критерий согласия*.

Критерием согласия называют статистический критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения. Имеется несколько критериев согласия. На практике наиболее часто используют критерий χ^2 (хи-квадрат) Пирсона, который применим к любым распределениям, в чём и состоит его достоинство.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы H_0 принимается случайная величина:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'},$$

где $n_i -$ частоты дискретного или интервального вариационного ряда выборочной совокупности объёма $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$. Числа $n_i' = n\, p_i$ называются *теоретическими частотами* предполагаемого закона распределения случайной величины X. Если случайная величина *X* дискретная, то вероятности p_i находят по соответствующим законам её распределения: биномиальному, Пуассона, гипергеометрическому и т. п. Если случайная величина *X* непрерывная, то вероятности p_i вычисляются через значения функции распределения $F(x)$ или плотности вероятности $f(x)$ по формуле

$$p_i = P(\alpha_i < X < \beta_i).$$

Например, при нормальном распределении случайной величины *X* вероятность p_i находится по известной формуле

$$p_i = P(\alpha_i < X < \beta_i) = \overline{\Phi}\left(\frac{\beta_i - \overline{x}_{\text{в}}}{\sigma_{\text{в}}}\right) - \overline{\Phi}\left(\frac{\alpha_i - \overline{x}_{\text{в}}}{\sigma_{\text{в}}}\right),$$

где $\overline{\Phi}(x) -$ функция Лапласа, $\overline{x}_{\text{в}} -$ выборочная средняя, $\sigma_{\text{в}} -$ выборочное среднее квадратическое отклонение.

Величина χ^2 в формуле случайная, так как в различных опытах она принимает различные, заранее не известные, значения. Ясно, что чем меньше различаются эмпирические n_i и теоретические n_i' частоты, тем меньше величина критерия χ^2. Следовательно, он в известной мере характеризует близость эмпирического и теоретического распределений.

Доказано, что при $n \to \infty$ закон распределения случайной величины χ^2 известен и практически не зависит от закона распределения случайной величины *X* генеральной совокупности. Закон распределения величины χ^2 *называется* χ^2- распределением с $k = m - r - 1$ степенями свободы, где $m -$ число интервалов, на которые разбивают данный дискретный или непрерывный вариационный ряд; $r -$ число параметров теоретического распределения, вычисленных по выборочным данным. В частности, если предполагаемое распределение – нормальное, то оценивают по выборке два параметра $M(X) = a$ и $\sigma(X) = \sigma$, поэтому $r = 2$ и число степеней свободы $k = m-2-1 = m-3$. Для распределения Пуассона оценивается один параметр λ, поэтому $r=1$ и число степеней свободы $k = m-1-1 = m-2$.

Схема применения критерия χ^2 для проверки гипотезы H_0 сводится к следующему.

1. Сначала вычисляются вероятности p_i по формуле (12.39), а для нормального распределения по формуле (12.40), затем теоретические частоты $n_i' = n\ p_i$, а затем наблюдаемое значение критерия:

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}.$$

2. Для выбранного уровня значимости α по таблице $\chi^2 -$ распределения находят критическую точку $\chi^2_{\text{кр}} = (\alpha,\, k)$ при числе степеней свободы $k = m-r-1$, при которых $P(\chi^2 > \chi^2_{\text{кр}}(\alpha,\, k)) = \alpha$.

3. Если $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{кр}}(\alpha,\, k)$, то гипотеза H_0 отвергается как практически невозможная.

Если $\chi^2_{\text{набл}} \le \chi^2_{\text{кр}}(\alpha,\, k)$, то нет оснований отвергать нулевую гипотезу H_0, так как она не противоречит опытным данным.

З а м е ч а н и е. Объём выборки должен быть достаточно велик, во всяком случае $n \ge 50$. В каждом частичном интервале (α_i, β_i) должно быть не менее 5-8 вариант x_i. Если в каком-нибудь интервале число наблюдений $n_i < 5$, имеет смысл объединить соседние интервалы в один, суммируя частоты. После этого при вычислении числа степеней свободы $k = m-r-1$ в качестве величины m берётся соответственно уменьшенное число интервалов.

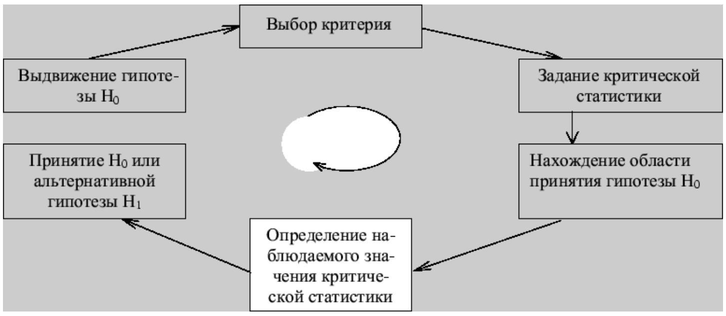
4. Типы статистических критериев проверки гипотез

На разных этапах статистического исследования возникает необходимость в формулировании и экспериментальной проверке некоторых предположительных утверждений (гипотез). **Статистической** называют гипотезу о виде неизвестного распределения или о параметрах известных распределений. Выдвигается основная (нулевая) гипотеза H_0 и проверяется, не противоречит ли она имеющимся эмпирическим данным. Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу H_1, которая противоречит нулевой.

В результате статистической проверки гипотезы могут быть допущены ошибки двух родов. **Ошибка первого рода** состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза; вероятность совершить такую ошибку обозначают α и называют ее **уровнем значимости**. **Ошибка второго рода** состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза, вероятность которой обозначают β, а мощностью критерия является вероятность $1-\beta$.

Процедура обоснованного сопоставления высказанной гипотезы с имеющейся выборкой осуществляется с помощью того или иного статистического критерия и называется статистической проверкой гипотез. Под **критической областью** понимают совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу H_0 отвергают. Критическую область при заданном уровне значимости следует строить так, чтобы мощность критерия была максимальной.

Статистические критерии проверки гипотез разнообразны, но у них единая логическая схема построения, которую представим на рис.



1. Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей. При заданном уровне значимости α проверяется нулевая гипотеза, состоящая в том, что генеральные дисперсии рассматриваемых совокупностей равны между собой:

$$\mathrm{H}_0 = D[X] = D[Y].$$

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы принимают случайную величину отношения большей исправленной дисперсии к меньшей

$$F = S_{б}^2 \quad / S_{м}^2.$$

Величина F имеет распределение Фишера-Снедекора, которое зависит только от чисел степеней свободы $k_1 = n_1 - 1$ и $k_2 = n_2 - 1$.

Пример Исследование длительности оборотных средств двух групп предприятий (по 13 предприятий в каждой) дало следующие результаты:

$\mathrm{x}^* = 23$ дня, $\mathrm{y}^* = 26$ дней, $\sigma_x^2 = 3$ дня, $\sigma_y^2 = 6$ дней.

Можно ли считать, что отклонения в длительности оборота оборотных средств групп предприятий одинаковы для уровня значимости 0,1?

Решение. В этой задаче надо проверить нулевую гипотезу $\mathrm{H}_0 : D[X] = D[Y]$ о равенстве генеральных дисперсий нормальных совокупностей при конкурирующей гипотезе $\mathrm{H}_1 : D[X] \neq \quad D[Y]$. Используем критерий Фишера-Снедекора со степенями свободы $k_1 = k_2 = 13 - 1$ и вычислим наблюдаемое значение критерия (отношение большей дисперсии к меньшей)

$$F_{эмп} = S_{б}^2 / S_{м}^2 = \frac{n}{n-1}\sigma_y^2 \Big/ \frac{n}{n-1}\sigma_x^2 = \sigma_y^2 / \sigma_x^2 = 6/3 = 2.$$

По таблице приложения 6 по уровню значимости для двусторонней критической области $\alpha/2 = 0,1/2 = 0,05$ и числам степеней свободы $k_1 = k_2 = 12$ находим критическую точку

$$F_{кр}(0,05; 12; 12) = 2,69.$$

Так как $F_{эмп} = 2 < 2,69 = F_{кр}$, то нет оснований отвергать нулевую гипотезу о равенстве отклонений в длительности оборота оборотных средств двух групп предприятий.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

2.1 Лабораторная работа№1 (2 часа).

Тема: «Определители»

2.1.1 Цель работы: овладеть различными методами вычисления определителей.

2.1.2 Задачи работы:

1. Научиться вычислять определители второго и третьего порядка по определению.

2. Научиться вычислять определители по теореме Лапласа.
3. Научиться вычислять определители методом эффективного понижения порядка.

2.1.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:
Специфика дисциплины материально-техническое обеспечение не требует

2.1.4 Описание (ход) работы:
1. Вычисление определителей второго и третьего порядка по определению.

1) $\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 15 & 4 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 9 & 36 & 0 \\ -6 & 60 & 5 \\ 3 & 48 & 5 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix}$.

2. Минор, алгебраическое дополнение.
1) Дан определитель $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}$. Найти следующие миноры и алгебраические дополнения матрицы, соответствующей данному определителю: M_{23}, M_{14}, M_{34}, A_{32}, A_{43}, A_{24}.
3. Вычисление определителей по теореме Лапласа.

1) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 9 & 1 \\ -6 & -15 & 20 \end{vmatrix}$.

4. Вычисление определителей методом эффективного понижения порядка.

1) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & -1 \\ -6 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

2.2 Лабораторная работа№2 (2 часа).
Тема: «Производная функции»

2.2.1 Цель работы: ознакомиться с понятием производной функции, ее геометрическим, механическим и экономическим смыслом, научиться вычислять производные функций.
2.2.2 Задачи работы:
1. Научиться дифференцированию сложной и обратной функций.
2. Научиться дифференцированию показательно - степенной функции.
3. Научиться дифференцированию неявной функции.

2.2.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:
Специфика дисциплины материально-техническое обеспечение не требует

2.2.4 Описание (ход) работы:
1. Геометрический, механический и экономический смысл производной.
1) Записать уравнение касательной к кривой $y = x^2 - 6x + 2$ в точке с абсциссой $x_0 = -3$.
2) Закон движения материальной точки $s = 3t^4 - t^3 + 4t^2 + 6$, Найти скорость ее движения в момент времени $t = 2$ с.
3) Объем продукции u (у.е.) цеха в течение рабочего дня представляет функцию $u = -t^3 - 5t^2 + 75t + 425$, где t– время (ч.). Найти производительность труда через 2 ч после начала работы.

2. Правила дифференцирования.
Найти производные функций:

1) $y = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$; 2) $y = \sqrt[7]{x^2}\ln x$; 3) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

3. Дифференцирование сложной и обратной функций.
Найти производные функций:

1) $y = \sqrt[4]{1 + e^{4x}} + \sqrt{5}$; 2) $y = \dfrac{\ln\cos x}{\cos x}$; 3) $y = e^x \ln\sin x$.

4. Дифференцирование показательно - степенной функции.
Найти производные показательно-степенных функций:

1) $y = (ctg(7x + 4))^{\sqrt{x+3}}$; 2) $y = (\sqrt{x + 5})^{\arccos 3x}$.

5. Производная неявной функции.
Найти производные функций, заданных неявно, в указанных точках:

1) $x^2 + xy + y^2 = 6, \quad x_0 = 5, y_0 = -2$;

2) $e^x \sin y - e^{-y}\cos x = 0, \quad x_0 = 0, y_0 = 0$;

3) $2y = 1 + xy^3, \quad x_0 = 1, y_0 = 1$.

6. Производные высших порядков.
Найти производные второго порядка от функций:

1) $y = tgx$; 2) $y = e^{-x^2}$.

2.3 Лабораторная работа№3 (2 часа).
Тема: «Первообразная и неопределенный интеграл»

2.3.1 Цель работы: Научиться вычислять интегралы различными способами.

2.3.2 Задачи работы:
1. Научиться вычислять интегралы непосредственно.
2. Научиться вычислять интегралы заменой переменных.
3. Научиться вычислять интегралы по частям.

2.3.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:
Специфика дисциплины материально-техническое обеспечение не требует

2.3.4 Описание (ход) работы:
1. Непосредственное интегрирование.
Найти неопределенные интегралы непосредственным интегрированием:

1) $\left(\int x^4 + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{7}{x^2}\right)dx$; 3) $\int\left(\dfrac{4}{\sqrt{4x^2 + 36}} - \dfrac{15}{3x^2 - 27}\right)dx$;

2) $\int \dfrac{\sqrt[7]{x^6} - 2x^2 + 3}{x}dx$; 4) $\int e^x\left(1 - \dfrac{e^{-x}}{x^2}\right)dx$.

2. Замена переменной.
Найти неопределенные интегралы подстановкой:

1) $\int \dfrac{\sqrt[4]{\ln(3x + 2)}}{3x + 2}dx$; 3) $\int \dfrac{e^{2\sqrt{x}} + e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$;

2) $\int \dfrac{dx}{tg4x\cos^2 4x}$; 4) $\int \dfrac{2x + 5}{\sqrt{1 - 4x^2}}dx$.

3. Интегрирование по частям.
Найти интегралы методом интегрирования по частям:

1) $\int \ln(2x+1)dx$;

2) $\int (2x-5)\sin 3x dx$;

3) $\int (x^2-4)\sin 5x dx$;

4) $\int (x^2+x)e^{-x}dx$.

2.4 Лабораторная работа№4 (2 часа).
Тема: «Основы теории вероятностей»

2.4.1 Цель работы: Научиться решать задачи по теории вероятностей с помощью классической вероятность, научиться применять теоремы сложения и умножения вероятностей.

2.4.2 Задачи работы:
1. Научиться решать задачи на классическое и статистическое определения вероятности.
2. Научиться решать задачи с помощью теорем сложения и умножения вероятностей.
3. Научиться решать задачи с помощью формулы полной вероятности и формулы Байеса.

2.4.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:
Специфика дисциплины материально-техническое обеспечение не требует

2.4.4 Описание (ход) работы:
1. Сущность и условия применения теории вероятностей.
Устно обсудить.
2. Классическое и статистическое определения вероятности.
1) По условиям лотереи «Спортлото 6 из 45», участник лотереи, угадавший 4, 5, 6 видов спорта из отобранных при случайном розыгрыше 6 видов спорта из 45, получает денежный приз. Найти вероятность того, что будут угаданы: а) все 6 цифр; б) 4 цифры.
2) Набирая номер телефона, абонент забыл последние 3 цифры и, помня лишь, что они различные, набрал их наудачу. Какова вероятность того, что номер телефона был набран верно?
3) Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 одинаковых кубиков, которые затем сложили в коробку и перемешали. Из коробки наудачу вынимают один кубик. Какова вероятность, что этот кубик имеет окрашенных граней: а) одну; б) две; в) три?

3. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
1) Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятность того, что формула содержится в первом, втором и третьем справочниках, равна соответственно 0,6, 0,7 и 0,8. Найти вероятность того, что эта формула содержится не менее, чем в двух справочниках.
2) В коробке 10 красных, 3 синих и 7 желтых карандашей. Наудачу вынимают 3 карандаша. Какова вероятность того, что все они: а) разных цветов; б) одного цвета?
3) Инвестор решил вложить поровну средств в три предприятия при условии возврата ему каждым предприятием через определенный срок 150% от вложенной суммы. Вероятность банкротства каждого из предприятий равна 0,2. Найти вероятность того, что по истечении срока кредитования инвестор получит обратно, по крайней мере, вложенную сумму.

4. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
1) В урну, содержащую два шара, опущен белый шар. После чего из нее наудачу извлечен один шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможны все возможные предположения о первоначальном составе шаров (по цвету)?
2) При проверке изделия на соответствие стандарту вероятность того, что оно пройдет через первого контролера, равна 0,55, а через второго – 0,45. Вероятность признания изделия стандартным у первого контролера равна 0,9, а у второго – 0,98. Контролеры имеют различную квалификацию. Изделие при проверке было признано стандартным. Найти вероятность того, что это изделие прошло через второго контролера.

3) Страховая компания разделят застрахованных по классам риска: I класс – малый риск, II класс – средний, III – большой риск. Среди этих клиентов 50% - первого класса риска, 30% - второго и 20% - третьего. Вероятность необходимости выплачивать страховое вознаграждение для первого класса риска равно 0,01,второго – 0,03, третьего – 0,08. Какова вероятность того, что: а) застрахованный получит денежное вознаграждение за период страхования; б) получивший денежное вознаграждение застрахованный относится к группе малого риска?

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

3.1 Практическое занятие №1 (2 часа)
Тема: «Матрицы»

3.1.1 Задание для работы:
1. Действия над матрицами.
2. Нахождение обратной матрицы.

3.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Определение матрицы.
2. Сложение и вычитание матриц.
3. Умножение матрицы на число.
4. Произведение матриц.
5. Теорема о существовании и единственности обратной матрицы.

Решение задач:

1. Найти матрицы $C = 2A - B^t$ и B^2, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить матрицу $D=ABC\text{-}3E$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, E – единичная матрица соответствующей размерности.

3. Вычислить матрицу $D = (AB)^t - C^2$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

4. При каких значениях λ матрица $A = \begin{pmatrix} \lambda & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$ не имеет обратной?

5. Определить, имеют ли данные матрицы обратные, и если имеют, то вычислить их:

1) $\begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6) Найти матрицу $C = A^{-1} + 2B^t$, если $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

7) Найти ранги матриц:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 10 & -4 & 7 \end{pmatrix}$.

3.1.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры, приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

3.2 Практическое занятие №2 (2 часа)

Тема: «Системы линейных уравнений»

3.2.1 Задание для работы:

1. Решение системы в матричном виде.
2. Решение системы по формулам Крамера.
3. Решение системы метод Гаусса. Ранг матрицы. Исследование решения систем. Однородные системы линейных уравнений.

3.2.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Суть метода решения системы в матричном виде.
2. Суть метода решения системы по формулам Крамера.
3. Суть метода решения системы метод Гаусса.
4. Определение ранга матрицы.

Решение задач:
1. Решить СЛУ матричным методом:

1) $\begin{cases} 4x + y - 3z = 9 \\ x + y - z = -2 \\ 8x + 3y - 6z = 12 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 4x + y + 4z = 19 \\ 2x - y + 2z = 11 \\ x + y + 2z = 8 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 12 \\ 2x + y + 3z = 16 \\ 3x + 2y + z = 8 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} 7x + 4y - z = 13 \\ 3x + 2y + 3z = 3 \\ 2x - 3y + z = -10 \end{cases}$.

2. Решить СЛУ по формулам Крамера:

1) $\begin{cases} -3x + 5y + 6z = -8 \\ 3x + y + z = -4 \\ x - 4y - 2z = -9 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ 4x + y + 4z = 6 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} 3x + 4y - 2z = 11 \\ 2x - y - z = 4 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ 3x + 4y + 2z = 1 \\ x + 5y + z = -3 \end{cases}$.

3. Решить СЛУ методом Гаусса:

1) $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 21 \\ 3x + 4y - 2z = 9 \\ 2x - y - z = 10 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 3x - y + 3z = 13 \\ -5x + y - 4z = -23 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} 5x - 9y - 4z = 6 \\ x - 7y - 5z = 1 \\ 4x - 2y + z = 2 \end{cases}$.

3.2.3 Результаты и выводы:
На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры, приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

3.3 Практическое занятие №3 (2 часа)
Тема: «Векторы»

3.3.1 Задание для работы:
1. Действия над векторами в геометрической и координатной форме.
2. Длина вектора.
3. Скалярное произведение векторов.
4. Проекция вектора на ось, ее свойства.

3.3.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Определение вектора.
2. Сумма, разность векторов.
3. Умножение вектора на число.
4. Длина вектора.
5. Определение скалярного произведения векторов.
6. Определение проекции вектора на ось.

Решение задач:

1. При каком значении α векторы $\vec{a}=(\alpha;-3;2)$ и $\vec{b}=(1;2;-\alpha)$ взаимно перпендикулярны?

2. В треугольной пирамиде *SABC* известны векторы $\overrightarrow{SA}=\vec{a},\overrightarrow{SB}=\vec{b},\overrightarrow{SC}=\vec{c}$. Найти вектор $\overrightarrow{SO}$, если точка *O* является центром масс треугольника *ABC*.

3. Лежат ли точки $A(1;2;-1),B(4;1;5),C(-1;2;1),D(2;1;3)$ в одной плоскости?

4. Даны координаты точек $A(4;6;3),B(-5;2;6),C(4;-4;-3)$. Найти:

а) модуль вектора $\vec{a}=4\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}$;

б) скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$;

в) проекцию вектора $\overrightarrow{CB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$;

г) координаты точки *M*, делящей отрезок AB в отношении 5:4.

5. Дана прямоугольная трапеция *ABCD*, длины оснований *AD* и *BC* которой соответственно равны 4 и 2, а угол *D* равен 45^0. Найти проекции векторов $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}$ на ось, определяемую вектором $\overrightarrow{CD}$.

6. Вычислить $(\vec{a}-\vec{b})^2$, если $\left|\vec{a}\right|=2\sqrt{2}$; $\left|\vec{b}\right|=4$; $\left(\vec{a},\hat{\ }\vec{b}\right)=135^0$.

7. Даны две вершины $A(2;-3;-5),B(-1;3;2)$ параллелограмма *ABCD* и точка пересечения его диагоналей $E(4;-1;7)$. Найти координаты остальных вершин параллелограмма.

3.3.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

3.4 Практическое занятие №4 (2 часа)
Тема: «Векторное пространство векторов»

3.4.1 Задание для работы:
1. Разложение вектора по базису.
2. Переход к новому базису.
3. Отыскание собственных векторов и собственных значений матриц.

3.4.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Определение базиса на плоскости и в пространстве.
2. Определение линейно зависимых векторов.
3. Определение линейно независимых векторов.
4. Определение собственных значений матриц.
5. Определение собственных векторов матриц.

Решение задач:

1. Выяснить, являются ли линейно зависимыми векторы $\vec{a}(2;-1;3)$, $\vec{b}(1;4;-1)$, $\vec{c}(0;-9;5)$.

2. Доказать, что векторы $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}+5\vec{j}$ образуют базис. Если это так, то найти координаты вектора $\vec{c}=6\vec{i}+13\vec{j}$ в базисе $\{\vec{a},\vec{b}\}$.

3. Известны координаты векторов базиса $\vec{a}(-4;5)$ и $\vec{b}(-2;1)$. Разложение вектора $\vec{c}(18;-3)$ по этому базису имеет вид $\vec{c}=x\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}$. Найти сумму $x+y$.

4. Известны координаты векторов базиса $\vec{a}(8;-3)$ и $\vec{b}(-1;4)$. Разложение вектора $\vec{c}(-7;-1)$ по этому базису имеет вид $\vec{c}=x\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}$. Найти сумму $x+y$.

5. Доказать, что векторы $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k},\ \vec{b}=3\vec{i}-\vec{j}+\vec{k},\ \vec{c}=\vec{j}+\vec{k}$ образуют базис. Если это так, то найти координаты вектора $\vec{d}=-2\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k}$ в базисе $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$.

6. Доказать, что векторы $\vec{a}(1;2;0),\ \vec{b}(3;-1;1),\ \vec{c}(0;1;1)$ образуют базис. Если это так, то найти координаты вектора $\vec{d}(1;1;1)$ в базисе $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$.

7. Найти собственные значения и собственные векторы матриц:

1) $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\1&1&3\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\1&0&3\\1&3&0\end{pmatrix}$.

8. Структурная матрица торговли трех стран S_1, S_2, S_3 имеет вид

$$A=\begin{pmatrix}0{,}9&0&0{,}1\\0{,}1&0{,}9&0{,}1\\0{,}1&0{,}2&0{,}5\end{pmatrix}.$$

Найти национальные доходы для сбалансированной торговли.

9. Структурная матрица торговли четырех стран имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix}0{,}2&0{,}3&0{,}2&0{,}2\\0{,}4&0{,}3&0{,}1&0{,}2\\0{,}3&0{,}3&0{,}5&0{,}2\\0{,}1&0{,}1&0{,}2&0{,}4\end{pmatrix}.$$

Найти бюджеты этих стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что сумма бюджетов задана: $x_1+x_2+x_3+x_4=6270$ (усл. ден. ед.).

3.4.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, основных математических моделей принятия решений; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику, решать типовые математические задачи, используемые при принятии управленческих решений.

3.5 Практическое занятие №5 (2 часа)

Тема: «Уравнение прямой линии на плоскости. Способы задания прямой»

3.5.1 Задание для работы:

1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
2. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с угловым коэффициентом.
3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

4. Уравнение прямой в отрезках.
5. Угол между двумя прямыми.
6. Условие параллельности и перпендикулярности прямых.

3.5.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Определение прямой линии.
2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с угловым коэффициентом.
4. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.
5. Уравнение прямой в отрезках.
6. Угол между двумя прямыми.
7. Условие параллельности и перпендикулярности прямых.

Решение задач:
1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;3)$: а) параллельно оси Ox; б) параллельно оси Oy; в) составляющей с осью Ox угол 45^0.
2. Составить уравнения прямых, проходящих через точки: а) $A(3;1)\ и\ B(5;4)$; б) $A(3;1)\ и\ C(3;5)$; в) $A(3;1)\ и\ D(-4;1)$.
3. Стороны AB, BC и AC треугольника ABC заданы соответственно уравнениями $4x+3y-5=0,\ x-3y+10=0,\ x-2=0$. Определить координаты его вершин.
4. Найти уравнение множества точек, равноудаленных от точек $A(-4;2)\ и\ B(-2;-6)$.
5. Составить уравнения прямых, проходящих через точку пересечения прямых $2x-3y+1=0$ и $3x-y-2=0$ параллельно и перпендикулярно прямой $y=x+1$.
6. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(4;3)$ и отсекающей от координатного угла треугольник площадью 3 кв. ед.
7. Дан треугольник с вершинами $A(-2;0), B(2;4)\ и\ C(4;0)$. Найти уравнения сторон треугольника, медианы AE, высоты AD и длину медианы AE.
8. В треугольнике ABC даны уравнения: стороны AB: $3x+2y-12=0$, высоты BM: $x+2y-4=0$, высоты AM: $4x+y-6=0$, где M – точка пересечения высот. Найти уравнение сторон AC, BC и высоты CM.
9. Две стороны параллелограмма заданы уравнениями $y=x-2$ и $x-5y+6=0$. Диагонали его пересекаются в начале координат. Найти уравнения двух других сторон параллелограмма и его диагоналей.
10. Даны уравнения сторон треугольника $AB: 3x-4y+24=0,$ $BC: 4x+3y+32=0,$ $AC: 2x-y-4=0$. Составить уравнение высоты, медианы и биссектрисы, проведенных из вершины B, и найти их длины.

3.5.3 Результаты и выводы:
На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

3.6 Практическое занятие №6 (2 часа)
Тема: «Уравнение прямой линии на плоскости. Способы задания прямой»

3.6.1 Задание для работы:
1. Общее уравнение прямой, его частные случаи.
2. Расстояние от точки до прямой.
3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с нормальным вектором.

4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с направляющим вектором.

3.6.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Общее уравнение прямой.
2. Частные случаи общего уравнения прямой.
3. Формула расстояния от точки до прямой.
4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с нормальным вектором.
5. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с направляющим вектором.

Решение задач:
1. Составить уравнение высоты, проведенной через вершину *A* треугольника *ABC*, зная уравнения его сторон: $AB: 2x + y + 3 = 0,\ \ AC: x - 5y + 7 = 0,\ \ BC: 3x + 2y - 13 = 0$.
2. Дан треугольник с вершинами $A(3;1), B(-3;-1), C(5;-12)$. Найти уравнение и вычислить длину его медианы, проведенной из вершины *C*.
3. Найти уравнения перпендикуляров к прямой $3x + 5y - 15 = 0$, проведенных через точки пересечения данной прямой с осями координат.
4. Через точку пересечения прямых $2x - 5y - 1 = 0$ *и* $x + 4y - 7 = 0$ провести прямую, делящую отрезок между точками $A(4;-3)$ и $B(-1;2)$ в отношении $\lambda = 2/3$.
5. По цене $p_1 = 2$ ден. ед. потребители готовы купить $q_1 = 4$ ед. товара, а по цене $p_2 = 4$ ден. ед. только $q_2 = 2$ ед. товара. Найти: а) зависимость спроса q от цены товара p и максимальное значение спроса; б) цену, при которой спрос на товар пропадет; в) объем рынка $Q = p \cdot q$ и его максимальное значение.
6. По цене $p_1 = 2$ ден. ед. предложение составляет $s_1 = 1$ ед. товара, а при цене $p_2 = 5$ ден. ед., предложение вырастает до $s_2 = 4$ ед. товара. Найти: а) зависимость предложения s от цены товара p и цену, при которой производство прекратится; б) с учетом условия задачи 121, найти равновесную цену p_0 и объем рынка для этой цены.
7. Спрос и предложение на некоторый товар на рынке описываются зависимостями вида $D(P) = 15 - 3P$, $S(P) = 0{,}5P + 1$. Определить равновесную цену. Найти графическим способом, является ли модель паутинного рынка «скручивающейся».
8. Спрос и предложение на некоторый товар на рынке описываются зависимостями вида $D(P) = 5 - 0{,}5P$, $S(P) = 1{,}5P + 1$. Определить равновесную цену. Найти графическим способом, является ли модель паутинного рынка «скручивающейся».

3.6.3 Результаты и выводы:
На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, основных математических моделей принятия решений; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику, решать типовые математические задачи, используемые при принятии управленческих решений.

3.7 Практическое занятие №7 (2 часа)
Тема: «Линии второго порядка»

3.7.1 Задание для работы:
1. Построение линий второго порядка. Нахождение их основных элементов.
2. Составление уравнений линий второго порядка по их основным элементам.

3.7.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Определение линии второго порядка.
2. Определение и каноническое уравнение окружности.
3. Определение и каноническое уравнение эллипса.
4. Определение и каноническое уравнение гиперболы.
5. Определение и каноническое уравнение параболы.

Решение задач:
1. Определить тип линий, их основные элементы и сделать рисунок.
1) $x^2+y^2+8x-3y+37/4=0$;
2) $4x^2+9y^2-36=0$;
3) $25x^2-4y^2-100=0$;
4) $-9x^2+16y^2=144$.
2. Составить уравнение прямой, проходящей через центры окружностей $x^2+y^2=5$ и $x^2+y^2+2x+4y-31=0$. Найти отношение радиусов окружностей.
3. Эллипс, симметричный относительно начала координат, проходит через точки $M_1(4;\frac{4\sqrt{5}}{3})$ и $M_2(0;4)$. Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса.
4. Составить уравнения парабол, проходящих через точки: а) (0,0) и (-1,-3), симметрично относительно оси *ОХ*; б) (0,0) и (2,-4), симметрично относительно оси *ОУ*.
5. Найти уравнение параболы и её директрисы, если известно, что парабола имеет вершину в начале координат и симметрична относительно оси *Ох* и что точка пересечения прямых $y=x$ и $x+y-2=0$ лежит на параболе.
6. Найти уравнение геометрического места точек, для каждой из которых отношение расстояния до точки $A(\sqrt{5};0)$ к расстоянию до прямой $\sqrt{5}\cdot x-9=0$ постоянно и равно $\frac{\sqrt{5}}{3}$. Сделать чертеж. Привести уравнение линии к каноническому виду, найти фокусы, эксцентриситет.
7. Найти уравнение геометрического места точек, для каждой из которых отношение расстояния до точки $A(-\sqrt{20};0)$ к расстоянию до прямой $\sqrt{5}\cdot x+8=0$ постоянно и равно $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Сделать чертеж. Привести уравнение линии к каноническому виду, найти фокусы, эксцентриситет, асимптоты.

3.7.3 Результаты и выводы:
На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

3.8 Практическое занятие №8 (2 часа)
Тема: «Плоскость и прямая в пространстве»

3.8.1 Задание для работы:
1. Способы задания плоскости в пространстве.
2. Уравнение прямой в пространстве.
3. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

3.8.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Определение плоскости.
2. Каноническое уравнение прямой в пространстве.
3. Способы задания прямой в пространстве.
3. Способы задания плоскости в пространстве.
4. Условие параллельности прямых в пространстве.
5. Условие параллельности плоскостей в пространстве.
6. Угол между прямой и плоскостью.

Решение задач:
1. Даны координаты точек $A(5;5;4)$, $B(1;-1;4)$, $C(3;5;1)$, $D(5;8;-1)$.. Составить уравнения:
а) плоскости ABC;
б) прямой AB;
в) прямой DM, перпендикулярной к плоскости ABC;
г) прямой CN, параллельной прямой AB;
д) плоскости, проходящей через точку D перпендикулярно к прямой AB.
Вычислить:
е) синус угла между прямой AD и плоскостью ABC;
ж) косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью ABC.
2. Записать уравнение плоскости:
а) параллельной плоскости Oxz и проходящей через точку $M(7;-3;5)$;
б) проходящей через ось Oz и точку $A(-3;1;-2)$;
в) параллельной оси Ox и проходящей через две точки $A(4;0;-2)$ и $B(5;1;7)$;
г) проходящей через точку $C(2;1;-1)$ и имеющую нормальный вектор $\vec{n}(1;-2;3)$;
д) проходящей через точку $D(3;4;-5)$ параллельно двум векторам $\vec{a}(3;1;-1)$ *и* $\vec{b}(1;-2;1)$.
3. Составить уравнение плоскости: а) проходящей через точки $A(1;1;1)$ и $B(2;3;4)$ перпендикулярно к плоскости $2x-7y+5z+9=0$; б) проходящей через точку $M(7;-5;1)$ и отсекающей на осях координат равные положительные отрезки.
4. Вычислить косинус угла между плоскостями $x-2y+2z-3=0$ и $3x-4y+5=0$.
5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3;4;0)$ и прямую $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{2}$.
6. Составить уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка AB, перпендикулярно к этому отрезку, если $A(1;5;6)$ и $B(-1;7;10)$.
7. Найти расстояние от точки $M(2;0;-0,5)$ до плоскости $4x-4y+2z+17=0$.

2.8.3 Результаты и выводы:
На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

3.9 Практическое занятие №9 (2 часа)
Тема: «Функция одной переменной»

3.9.1 Задание для работы:
1. Область определения и область значений функции.
2. Элементарные функции, их графики.
3. Исследование на четность, нечетность функции.

3.9.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Определение функции одной переменной.
2. Определение области определения и области значений функции.
3. Элементарные функции.
4. Определение четной и нечетной функции.

Решение задач:
1. Найти область определения следующих функций:

1) $y=\sqrt{x^2-6x+5}$; 3) $y=\arcsin(2x^2+x)$;

2) $y=\sqrt{x}+\ln(2x-5)$; 4) $y=\dfrac{1}{\lg(1-x)}+\sqrt[3]{x+2}$.

2. Найти область значений следующих функций:

1) $y=\sin x+\cos x$; 2) $y=\dfrac{6x}{1+x^2}$.

3. Построить графики функций:

1) $y=\begin{cases}-x, & x<1\\ x^2-2, & x\ge 1\end{cases}$; 2) $y=\begin{cases}1+x, & x<0\\ 2\sin x, & 0\le x<\pi\\ x-\pi, & x\ge\pi\end{cases}$.

4. Исследовать на четность (нечетность) функции:

1) $y=x^3\sin x$; 2) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$; 3) $y=x\dfrac{2^x+1}{2^x-1}$.

5. Исследовать на устойчивость и асимптотическую устойчивость нулевое решение системы, общее решение которой имеет вид

$$\begin{cases}x(t)=C_1+C_2e^{-4t}\\ y(t)=C_1e^{-2t}+C_2\sin t\end{cases}.$$

5. При каких значениях b графики функций $y=2bx^2+2x+1$ и $y=5x^2+2bx-2$ пересекаются в одной точке?

6. Найдите область определения функций:

1) $y=\sqrt{4-x|x|}$; 3) $y=\sqrt{|x|(x-1)}$;

2) $y=\sqrt{(x-2)\sqrt{x}}$; 4) $y=\sqrt{(1-x)\sqrt{x-2}}$.

7. При каких значениях a нули функции $f(x)=x^2+2(a-2)x+2a-5$ расположены между числами -2 и 4?

3.9.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

3.10 Практическое занятие №10 (2 часа)
Тема: «Числовые последовательности»

3.10.1 Задание для работы:
1. Понятие числовой последовательности.
2. Предел числовой последовательности.
3. Основные свойства сходящихся последовательностей.

3.10.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Основные числовой последовательности.
2. Определение предела числовой последовательности.
3. Свойства сходящихся последовательностей.

Решение задач:

1. Доказать, пользуясь определением предела, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{n+2}=3$.

2. Найти пределы последовательностей:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+3+4+...+(n+1)}{n^2+1}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3\cdot 2}+\dfrac{1}{3\cdot 2^2}+...+\dfrac{1}{3\cdot 2^{n-1}}\right)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4+7+...+(3n-2)}{3n^2}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+...+(2n-1)}{2n^2-3}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+...+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

3. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2+3x-7}{x-8}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+2)\cos x}{\sqrt{x^2+3x+4}}$;

3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+4x-3}{x^3-7}$;

4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{\sqrt{\dfrac{\pi}{2}x}}$.

4. Устранить неопределенность

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^4+x^2+x}{7x^4+3x-2}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x+2x^3-1}{2x^2-x+4}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5+3x-1}{3x+x^2-2x^8}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[6]{x^2+1}}{3+x}$.

3.10.3 Результаты и выводы:
На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

3.11 Практическое занятие №11 (2 часа)
Тема: «Предел функции»

3.11.1 Задание для работы:
1. Предел функции в точке и на бесконечности. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Теоремы о пределах функций.
2. Раскрытие неопределенностей.
3. Два замечательных предела.
4. Эквивалентные бесконечно малые и их использование при вычислении пределов.
5. Левый и правый пределы функции.

3.11.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Предел функции в точке и на бесконечности.

2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.
3. Теоремы о пределах функций.
4. Раскрытие неопределенностей.
5. Первый замечательный предел.
6. Второй замечательный предел.
7. Определение эквивалентных бесконечно малых.
8. Определение односторонних пределов.

Решение задач:
1. Устранить неопределенность:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}(x(\sqrt{x^2+4}-x))$;

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$; 4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}(x(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2+1}))$.

2. Найти пределы функций, используя формулу первого замечательного предела:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x\cdot\sin 4x}{x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 3x+\sin 7x}{2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x\cdot\cos 8x}{2x}$.

3. Найти пределы функций, используя формулу второго замечательного предела:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{7x}\right)^x$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{2x}$.

4. Вычислить пределы, используя эквивалентные бесконечно малые функции:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{arctg2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{4x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{2x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-5x+6}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{\sin 2x}-1}{1-\cos 7x}$.

5. Прирост населения страны составляет 3% в год. Через сколько лет население страны удвоится?
6. Первоначальный вклад, положенный в банк под 10% годовых составил 6 млн. руб. Найти размер вклада через 5 лет при начислении процентов: а) ежегодном; б) поквартальном; в) непрерывном.
7. Первоначальная сумма 7000 руб., период начисления 2 года, сложная процентная ставка 12% годовых. Начисление процентов происходит непрерывно. Найти наращенную сумму.
8. Вкладчик положил в банк, выплачивающий 10% сложных годовых, 2000 тыс.д.е. Какая сумма будет на счете вкладчика через 3 года? Какая сумма будет на счете вкладчика, если банк выплачивает 10% простых годовых?

3.11.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа, основных математических моделей принятия решений; приобрели умения решать типовые математические задачи, используемые при принятии управленческих решений, использовать математический язык и математическую символику при построении организационно-управленческих моделей.

3.12 Практическое занятие №12 (2 часа)

Тема: «Непрерывные функции. Асимптоты графика функции»

3.12.1 Задание для работы:

1. Непрерывность функции в точке и на интервале.
2. Точки разрыва. Классификация точек разрыва.
3. Асимптоты графика функции: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

3.12.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Определение непрерывной функции в точке и на интервале.
2. Определение точки разрыва.
3. Классификация точек разрыва.
4. Определение асимптоты графика.
5. Определение вертикальной асимптоты.
6. Определение горизонтальной асимптоты.
7. Определение наклонной асимптоты.

Решение задач:
1. Исследовать функции на непрерывность в указанных точках:

а) $f(x) = 2^{\frac{1}{x-5}} + 1$; $x_1 = 4,\ x_2 = 5$;

б) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+4}$; $x_1 = -4,\ x_2 = -3$.

2. Исследовать функцию $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x}, & x < 0 \\ x^2, & 0 \le x < 1 \\ -x+4, & x \ge 1 \end{cases}$ на непрерывность, определить род точек разрыва и построить график.

3. Исследовать функцию $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ \sin x, & 0 \le x < \pi \\ 3, & x \ge \pi \end{cases}$ на непрерывность, определить род точек разрыва и построить график.

4. Найти асимптоты функций:

1) $y = \dfrac{3-4x}{2+5x}$; 2) $y = \dfrac{3x-1}{x+1}$; 3) $y = \dfrac{2x^2}{x+1}$.

5. При каких значениях параметров *A* и *B* функция $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \le -1 \\ A(x^2+1), & -1 < x \le 1 \\ Bx+3, & x > 1 \end{cases}$ будет непрерывной?

6. При каком значении параметра *A* функция $y = \begin{cases} -x^2+5, & x \le 1 \\ A\cos \pi x, & x > 1 \end{cases}$ будет непрерывной?

3.12.3 Результаты и выводы:
На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

3.13 Практическое занятие №13 (2 часа)
Тема: «Дифференциал функции»

3.13.1 Задание для работы:
1. Определение дифференциала.
2. Геометрический смысл.
3. Приближенные вычисления с помощью дифференциала.

3.13.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Определение дифференциала.
2. Геометрический смысл дифференциала.
3. Формула приближенных вычислений с помощью дифференциала.

Решение задач:
1. Найти дифференциал функций:
1) $y = x^3 \cos x$; 3) $y = \ln(x^2 + 5x - 2)$;
2) $y = \sqrt{\sin(5x^3 - 3)}$; 4) $y = \arccos\sqrt{x}$.
2. Найти дифференциал функций до второго порядка:
1) $y = \cos 2x^3$; 2) $y = \ln(\cos 3x)$.
3. С помощью дифференциала найти приближенные значения:
1) $\sqrt{101}$; 3) $\sqrt[3]{9}$;
2) $\sqrt{1{,}04}$; 4) $\sqrt[5]{33}$.
4. Найти приращение функции $y = 2x^2 + 3$ при изменении абсциссы от 2 до 2,001.
5. Шар радиуса 20 см был нагрет, отчего его радиус увеличился на 0,01 см. На сколько увеличится объём шара?
6. Найти первоначальное значение радиуса круга, если радиус увеличился на 0,1 см, при этом площадь круга увеличилась на 10π см^2.
7. Найти дифференциал функции $y = \ln(1 + e^{10x}) + \sqrt{x^2 + 1}$. Вычислить dy при $x = 0$, $dx = 0{,}1$.
8. Какой путь пройдет тело при свободном падении на Луне за 10,04 с от начала падения. Уравнение свободного падения тела $H = \dfrac{g_L \cdot t^2}{2}$, $g_L = 1{,}6$ м/с^2.

3.13.3 Результаты и выводы:
На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

3.14 Практическое занятие №14 (2 часа)
Тема: «Применение дифференциального исчисления к исследованию функции»

3.14.1 Задание для работы:
1. Возрастание и убывание графика функции.
2. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.
3. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точка перегиба.

3.14.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Определение возрастающего и убывающего графика функции.
2. Определение точек экстремума.
3. Определение выпуклого и вогнутого графика функции.
4. Определение точки перегиба.

Решение задач:

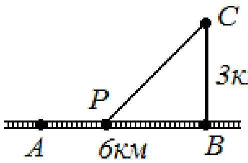
1. Найти промежутки монотонности, точки экстремума функций, наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке, если он указан.

1) $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2$, $[1;3]$; 2) $y = \frac{x}{\ln x}$; 3) $y = \frac{x+2}{x-3}$.

2. Найти промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба функций:

1) $y = x^3 - 6x^2 + 1$; 2) $y = (3+x)\cdot e^{-x}$; 3) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

3. Стоимость железнодорожной перевозки груза на 1 км равна 4 у.е., а автомобильной – 5 у.е. В каком месте надо начать строить шоссе, чтобы как можно дешевле доставлять груз из пункта A в пункт C. Какова наименьшая стоимость перевозки груза? Известно, что $|AB| = 6$ км, $|BC| = 3$ км.



4. Цементный завод производит X т. цемента в день. По договору он должен ежедневно поставлять строительной фирме не менее 20 т. цемента. Производственные мощности завода таковы, что выпуск цемента не может превышать 90 т. в день. Определить, при каком объеме производства удельные затраты K/x будут наибольшими (наименьшими), если функция затрат имеет вид: $K = -x^3 + 98x^2 + 200x$.

5. Предприятие производит X единиц некоторой однородной продукции в месяц. Установлено, что зависимость финансовых накопления предприятия от объема выпуска выражается формулой $f(x) = -0{,}02x^3 + 600x - 1000$ (ден. ед.). Исследовать потенциал предприятия.

6. Суточные расходы при плавании судна вычисляются по формуле $f(v) = \frac{aS}{v} + kSv^2$, где S - расстояние между портами; v - скорость; a, k - постоянные параметры, причем $a > 0$, $k > 0$. При какой скорости плавание судна будет наиболее выгодным?

3.14.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа, основных математических моделей принятия решений; приобрели умения решать типовые математические задачи, используемые при принятии управленческих решений, использовать математический язык и математическую символику при построении организационно-управленческих моделей.

3.15 Практическое занятие №15 (2 часа)

Тема: «Полное исследование функции»

3.15.1 Задание для работы:

1. Алгоритм исследования функции.
2. Исследование функции. Построение графика.

3.15.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Определение возрастающего и убывающего графика функции.
2. Определение точек экстремума.
3. Определение выпуклого и вогнутого графика функции.
4. Определение точки перегиба.

Решение задач:

1. Исследовать функции, построить их графики.

а) $y = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$; в) $y = \sqrt{1-\ln^2 x}$;

б) $y = 2x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$; г) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$.

2. Под посевы элитных культур выделили земельный участок прямоугольной формы площадью 3,24 га и вдоль всей границы окопали рвом. Найти размер участка, чтобы стоимость рва была наименьшей. Вычислить стоимость рва, если погонный метр его обходится в 50 руб.

3. Прямоугольный участок земли, примыкающий к стене заводскою здания, нужно оградить забором. Часть забора, параллельная стене, должна быть каменной, а остальная часть деревянной. Площадь участка 90 м^2. Стоимость 1 м каменного забора 10 руб., а деревянного - 8 руб. Найдите такие размеры участка, чтобы стоимость всей ограды была наименьшей? Какова эта стоимость?

3.15.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа, основных математических моделей принятия решений; приобрели умения решать типовые математические задачи, используемые при принятии управленческих решений, использовать математический язык и математическую символику при построении организационно-управленческих моделей.

3.16 Практическое занятие №16 (2 часа)

Тема: «Функция двух переменных»

3.16.1 Задание для работы:

1. Область определения функции двух переменных.
2. Частные производные первого и второго порядка.
3. Полный дифференциал.
4. Производная по направлению. Градиент.
5. Необходимое и достаточное условия экстремума.
6. Функция Кобба-Дугласса.

3.16.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Определение области определения функции двух переменных.
2. Определение частных производных функции двух переменных.
3. Определение производной по направлению.
4. Определение градиента.
5. Необходимое и достаточное условия экстремума.
6. Функция Кобба-Дугласса.

Решение задач:

1. Найти и построить область определения функций:

1) $z = \arcsin(x-y)$; 2) $z = \sqrt{xy} + \dfrac{2x^2 + y^3}{\sqrt{9x^2 + 16y^2 - 144}}$.

2. Построить линии уровней и примерное изображение поверхностей для функций двух переменных.

1) $z = \dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16}$; 2) $z = x + y^2$.

3. Найти пределы, если они существуют:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\dfrac{x^2+4y}{2xy-1}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

4. Найти значения частных производных функций нескольких переменных в указанных точках:

1) $z=x^y$, $(e;1)$; 3) $z=\cos(x-\sqrt{xy^3})$, $\left(\dfrac{\pi}{2};0\right)$;

2) $z=e^{-2x^2+y^5}$, $(1;0)$; 4) $z=3x^2y^3-5x^4y^2+5xy-7x^2+6y^5$, $(1;1)$.

5. Найти градиент функций и его модуль в указанных точках:

1) $z=x^2+y^2$, $(3,2)$; 2) $z=\dfrac{xy}{x^2+y^2+1}$, $(0,3)$.

6. Вычислить значение производной по направлению $\vec{\alpha}$ в точке $M(2\sqrt{2};\sqrt{2})$ для функции $z=xy+\ln x$. Известно, что $\vec{\alpha}$ составляет угол $\dfrac{\pi}{4}$ с осью *OX*.

7. Исследовать на экстремум функции:

1) $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$; 3) $z=x^3+4x^2+2xy+y^2-2x-2y$;

2) $z=3x+6y-x^2-xy-y^2$; 4) $z=x^3-y^3-3xy$;

8. Пусть производственная система характеризуется производственной функцией Кобба – Дугласа. За период времени системой было произведено 100 единиц продукции при затратах 20 единиц труда и 40 единиц капитала. Известно, что $\alpha=0{,}75$, $\beta=0{,}25$. Записать производственную функцию Кобба – Дугласа. Сколько единиц продукта будет произведено системой при затратах 25 единиц труда и 50 единиц капитала? Определить для данной производственной системы средние продукты труда и капитала. Определить предельные продукты труда и капитала.

3.16.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

3.17 Практическое занятие №17 (2 часа)

Тема: «Интегрирование рациональных функций»

3.17.1 Задание для работы:

1. Разложение рациональной дроби на простейшие.
2. Интегрирование рациональных функций.

3.17.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Определение рациональной дроби.
2. Виды элементарных дробей.
3. Метод неопределенных коэффициентов.

Решение задач:

1. Разложить дробно-рациональные функции на сумму простейших дробей, не определяя коэффициентов разложения:

1) $\dfrac{x^3+3x-9}{(x^2-4)(x^3+8)}$; 2) $\dfrac{x^2-5}{(x^4-1)^2}$.

2. Найти интегралы (корни знаменателя действительные различные):

1) $\int \frac{xdx}{2x^2-3x-2}$; 2) $\int \frac{6x^2+15x-3dx}{6x^3-7x^2-3x}$.

3. Найти интегралы (корни знаменателя действительные совпадающие):

1) $\int \frac{x^5dx}{(x-1)^2(x^2-1)}$; 2) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^4-4x^2}dx$.

4. Найти интегралы (корни знаменателя комплексные различные):

1) $\int \frac{(3x^2+9x+10)dx}{x^3+2x^2+5x}$; 3) $\int \frac{x^3-1}{x^3+1}dx$;

2) $\int \frac{xdx}{x^3-1}$; 4) $\int \frac{2x^3+4x^2+2x-1}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}dx$.

3.17.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

3.18 Практическое занятие №18 (2 часа)

Тема: «Определенный интеграл»

3.18.1 Задание для работы:

1. Вычисление определенных интегралов. Формула Ньютона – Лейбница.
2. Геометрический и экономический смысл определенного интеграла.
3. Методы интегрирования в определенном интеграле.

3.18.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Определение определенного интеграла.
2. Формула Ньютона – Лейбница.
3. Геометрический и экономический смысл определенного интеграла.
4. Вычисление определенных интегралов подстановкой и по частям.

Решение задач:

1. Вычислить интегралы по формуле Ньютона-Лейбница:

1) $\int_1^2 (3x^2-1)dx$; 3) $\int_1^2 (x^2+\frac{1}{x^2})dx$;

2) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; 4) $\int_0^{\pi/4} \sin 4xdx$.

2. Вычислить интегралы методом замены переменной:

1) $\int_0^2 x(2-x)^5 dx$; 3) $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$;

2) $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{\cos x+1}}$.

3. Вычислить интегралы методом интегрирования по частям:

1) $\int_{2\pi}^{3\pi} x\sin xdx$; 3) $\int_1^2 x\log_2 xdx$;

2) $\int\limits_{0}^{1} xe^{-x}dx$;   4) $\int\limits_{4\pi}^{6\pi} x\cos 2x\,dx$.

4. Найти значение суммы $\alpha+\beta$, если $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{x^4+16}} = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{\sqrt{t^2+16}}$.

5. Найти значение разности $\alpha-\beta$, если $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin xdx}{\cos^2 x+1} = -\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{t^2+1}$.

3.18.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

3.19 Практическое занятие №19 (2 часа)

Тема: «Приложения определенного интеграла»

3.19.1 Задание для работы:

1. Площадь фигур на плоскости.
2. Нахождение объема тела вращения.

3.19.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:
1. Формулы нахождения площадей фигур на плоскости.
2. Формулы объемов тел вращения.
3. Экономический смысл определенного интеграла.

Решение задач:
1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ *и* $y = \sqrt{x}$.
2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2^x$, $y = x^2 - 4x + 5$, $x = 2$ и осями координат.
3. Вычислить объём и площадь поверхности тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 4x$, прямой $x = 1$ и осью Ox.
4. Вычислить объём и площадь поверхности тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x + 1$, $x = 3$ и осью Ox.
5. Известно, что спрос на некоторый товар задается функцией $p = 4 - q^2$, где q - количество товара (шт.), p - цена единицы товара (руб.), а равновесие на рынке данного товара достигается при $p^* = q^* = 1$. Определите величину потребительского излишка.
6. Известно, что спрос на некоторый товар задается функцией $q = \frac{8000}{p^3}$, предложение данного товара характеризуется функцией $q = 500p$. Определите величину потребительского излишка при покупке товара.
7. Известно, что спрос на некоторый товар задается функцией $p = \frac{231}{q+1}$, предложение – функцией $p = q + 11$. Определите величину выигрыша потребителя при покупке товара.

3.19.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа, основных математических моделей принятия решений; приобрели умения решать типовые математические задачи, используемые при принятии управленческих решений, использовать математический язык и математическую символику при построении организационно-управленческих моделей.

3.20 Практическое занятие №20 (2 часа)

Тема: «Несобственные интегралы»

3.20.1 Задание для работы:

1. Несобственные интегралы первого рода.
2. Несобственные интегралы второго рода.

3.20.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Определение несобственного интегралы первого рода.
2. Определение несобственного интегралы второго рода.

Решение задач:

1. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

1) $\int\limits_4^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$; 3) $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx$; 5) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$;

2) $\int\limits_0^{\infty} e^{-2x}dx$; 4) $\int\limits_2^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}$; 6) $\int\limits_{-\infty}^{0} x^2 2^{x^3+1}dx$.

2. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

1) $\int\limits_0^1\frac{dx}{x}$; 3) $\int\limits_1^2\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$; 5) $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$;

2) $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 4) $\int\limits_1^2\frac{dx}{x^2-4x+3}$; 6) $\int\limits_0^1 x\ln x dx$.

3. Определить, при каких значениях k интеграл $\int\limits_0^1\frac{dx}{x^k}$, ($k>0$, $k\neq 1$) сходится.

4. Найти площадь под кривой $y=\ln x$ в интервале от $x=0$ до $x=1$.

3.20.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

3.21 Практическое занятие №21 (2 часа)

Тема: «Комплексные числа»

3.21.1 Задание для работы:

1. Определение комплексных чисел.
2. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.
3. Тригонометрическая форма комплексного числа. Формула Муавра.
4. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

3.210.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Определение комплексных чисел в алгебраической форме.
2. Определение комплексных чисел в тригонометрической форме.
3. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Решение задач:
1. Решить уравнения:
1) $x^2 + x + 1 = 0$; 3) $x^3 + 8 = 0$;
2) $2x^2 + 18x + 45 = 0$; 4) $x^2 - 6x + 34 = 0$.

2. Даны комплексные числа $z_1 = 5 - 12i,\quad z_2 = -6 + 8i$. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$ и $\dfrac{z_1}{z_2}$.

3. Комплексные числа $z_1 = -1 + i$ и $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ представить в тригонометрической форме и найти $z_1 \cdot z_2$ и $\dfrac{z_1}{z_2}$.

4. Найти $z = (-\sqrt{3} + i)^{20}$.

5. Найти $z = \dfrac{(1+i)^{100}}{(\sqrt{3} - i)^{50}}$.

6. Решить уравнение $x^4 + 1 = 0$.
7. Найти все значения корней комплексных чисел:
1) $\sqrt[3]{-1 + \sqrt{3}\, i}$;
2) $\sqrt{-2 + 2i}$.

3.21.3 Результаты и выводы:
На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

3.22 Практическое занятие №22 (2 часа)
Тема: «Дифференциальные уравнения»

3.22.1 Задание для работы:
1. Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными.
2. Линейные дифференциальные уравнения. Уравнения Бернулли. Метод Бернулли.

3.22.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Определение дифференциального уравнения.
2. Определение общего решения дифференциального уравнения.
3. Определение частного решения дифференциального уравнения.
4. Определение линейного дифференциального уравнения.
5. Определение уравнения Бернулли.

Решение задач:
1. Найти общее решение (интеграл) дифференциального уравнения, построить интегральные кривые, решить задачу Коши:

1) $3y - xy' = 0;\quad \left(1;\frac{1}{3}\right),\ (1;1)$;

2) $xy' - y = 0,\quad y(4) = 2$.

2. Найти общее решение (интеграл) дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, решить задачу Коши:

1) $xyy' = 1 - x^2,\quad y(1) = 2$;

2) $xydx + (x+1)dy = 0,\quad y(0) = 1$;

3) $xyy' = x + 1,\quad y(1) = 2$;

4) $\sqrt{y^2+1}dx = xydy,\quad y(1) = \sqrt{3}$;

5) $(1+x^2)yy' = x(1+y^2),\quad y(2) = 5$;

6) $y' = 10^{x+y},\quad y(0) = 0$.

3. Найти общее решение (интеграл) линейных дифференциальных уравнений:

1) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$;

2) $y' + \frac{2y}{x} = x^3$;

3) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$;

4) $xy' - \frac{y}{x+1} = x$;

5) $y' + y = 2xe^{-2x}$;

6) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$.

4. Найти общее решение (интеграл) уравнений Бернулли:

1) $y' - \frac{y}{x} = x^2y^2$;

2) $y' + \frac{y}{x} = xy^3$;

3) $y' + y = xy^3$;

4) $xy' + 2y = x^5y^2$.

3.22.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

3.23 Практическое занятие №23 (2 часа)

Тема: «Дифференциальные уравнения»

3.23.1 Задание для работы:

1. Линейные дифференциальные уравнения. Уравнения Бернулли. Метод Бернулли.
2. Однородные дифференциальные уравнения.
3. Разностные уравнения.

3.23.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Определение дифференциального уравнения.
2. Определение общего решения дифференциального уравнения.
3. Определение частного решения дифференциального уравнения.
4. Определение однородного дифференциального уравнения.
5. Определение разностного уравнения.

Решение задач:

1. Найти общее решение (интеграл) уравнений Бернулли:

1) $y' + xy = xy^3$;

2) $xy' + y = -xy^2$;

3) $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$;

4) $xy' + y = y^2 \ln x$.

2. Найти общее решение (интеграл) однородных дифференциальных уравнений, решить задачу Коши:

1) $y' = \dfrac{y}{x} - 1$;

2) $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$;

3) $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$;

4) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$;

5) $y^2 + x^2 y' = xyy'$;

6) $2xy' = x + 3y$;

7) $(x + 2y)dx - xdy = 0$;

8) $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$;

9) $x^2 y' = y(x+y)$;

10) $(xy' - y)arctg \dfrac{y}{x} = x$.

3.23.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

3.24 Практическое занятие №24 (2 часа)

Тема: «Дифференциальные уравнения высших порядков»

3.24.1 Задание для работы:

1. ЛОДУ второго порядка.
2. ЛНДУ второго порядка.

3.24.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Определение дифференциального уравнения второго порядка.
2. Определение общего решения дифференциального уравнения второго порядка.
3. Определение частного решения дифференциального уравнения второго порядка.
4. Определение ЛОДУ второго порядка.
5. Определение ЛНДУ второго порядка.

Решение задач:

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

1) $y''' = e^{2x}$;

2) $y^{(4)} = \sin x$;

3) $y'' = \dfrac{1}{x}$;

4) $y''(x+2)^5 = 1$.

2. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

1) $x(y''+1) + y' = 0$;

2) $y'' = y' + x$;

3) $xy'' = y'$;

4) $y''(e^x + 1) + y' = 0$.

3. Решить дифференциальные уравнения:

1) $(y')^2 + 2y \cdot y'' = 0$;

2) $y^3 y'' = -1$;

3) $2y \cdot y'' = (y')^2 + 1$;

4) $y \cdot y'' = -(y')^2$.

4. Найти общее решение линейных однородных дифференциальных уравнений:

1) $y'' - 4y' + 4y = 0$;

2) $y'' - 8y' + 25y = 0$.

5. Решить задачу Коши:

1) $y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$;

2) $y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$;
6. Найти общее решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений:
1) $y'' - 2y' + y = e^x$;
2) $y'' + 2y' - 8y = (12x + 14)e^{2x}$.
7. Решить задачу Коши:
1) $y'' - 2y' = (x^2 + x - 3)e^x$, $y(0) = 2,\ y'(0) = 5$;
2) $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 8$, $y(0) = 2,\ y'(0) = 9$;
8. Найти выражение объема реализованной продукции $y = y(t)$ и его значение при $t = 2$, если известно, что кривая спроса имеет вид $p(y) = 3 - 2y$, норма акселерации $\frac{1}{l} = 1{,}5$, норма инвестиций $m = 0{,}6$, $y(0) = 1$.
9. Для некоторой фирмы функция маржинальной выручки от продажи своей продукции имеет вид $MR = 10 - 0{,}2q$, где R - общая выручка, MR - маржинальная выручка ($MR = R'$), q - объем продукции. Нужно найти общую выручку фирмы R (указание: учесть, что при нулевом уровне продаж $R(0) = 0$).
10. Найти функцию дохода $Y(t) = I(t) + C(t)$, если известно, что величина потребления задается функцией $C(t) = 2t$, коэффициент капиталоемкости прироста дохода $b = 0{,}5$, сумма инвестиций $I(t) = bY'(t)$ и $Y(0) = 2$.

3.24.3 Результаты и выводы:
На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа, основных математических моделей принятия решений; приобрели умения решать типовые математические задачи, используемые при принятии управленческих решений, использовать математический язык и математическую символику при построении организационно-управленческих моделей.

3.25 Практическое занятие №25 (2 часа)
Тема: «Знакоположительные ряды»

3.25.1 Задание для работы:
1. Исследование числовых рядов на сходимость.
2. Признаки сходимости знакоположительных рядов.
3. Эталонные ряды.

3.25.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Определение знакоположительного ряда.
2. Признак сравнения.
3. Предельный признак сравнения.
4. Признак Даламбера.
5. Признак Коши.

Решение задач:
1. Найти сумму ряда, доказав, что он сходится:
1) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+2)} + \ldots$
2) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \ldots$
2. Найти сумму ряда, если известна его *n*-ая частичная сумма:

1) $S_n = \dfrac{6n^4 - 5n + 4}{3n^4 + 7n^2 - 8}$; 2) $S_n = \dfrac{\sqrt{n^3} - n}{\sqrt{4n^3 - n^2 + 5}}$.

3. Исследовать на сходимость ряды с помощью необходимого условия сходимости:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n+5)$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n^3} - 25}{\sqrt{n} + 50}$.

4. Исследовать на сходимость ряды с помощью признака сравнения:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)(n+4)}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{6n^4 - 5n + 3}$;

2) $\dfrac{1}{3^3 - 1} + \dfrac{1}{5^3 - 1} + \dfrac{1}{7^3 - 1} + \ldots$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{4n(1+n^2)}}$.

5. Исследовать на сходимость ряды с помощью предельной формы признака сравнения:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5n^5 - 2n^2}{7n^6 + 5n - 1}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n+1}{\sqrt{n^3}}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{6n^7 - 3n + 4}{7n^8 + 4n^2 + 1}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$.

6. Исследовать на сходимость ряды с помощью предельной формы признака Даламбера:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)!}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{3^n}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n}{(n+1)!}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3n+1)!}{10^n}$.

7. Исследовать на сходимость ряды с помощью предельной формы признака Коши:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{10n}{10n+5}\right)^{n^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^n(n+1)}$.

3.25.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

3.26 Практическое занятие №26 (2 часа)

Тема: «Знакочередующиеся ряды»

3.26.1 Задание для работы:

1. Понятие знакочередующегося ряда.
2. Признак Лейбница.
3. Абсолютная и условная сходимость.

3.26.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Определение знакочередующегося ряда.
2. Признак Лейбница.
3. Определение абсолютной и условной сходимости.

Решение задач:

1. Исследовать на сходимость ряды с помощью признака Лейбница. В случае сходимости, установить абсолютно или условно сходится ряд:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{n^3-2}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n^3+2}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{9^n \cdot n^2}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(4n+1)^n}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin\frac{\pi n}{3}}{2\sqrt{n^3+1}}$.

3.26.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

3.27 Практическое занятие №27 (2 часа)
Тема: «Степенные ряды»

3.27.1 Задание для работы:
1. Радиус и интервал сходимости степенного ряда.
2. Ряд Тейлора и Маклорена.
3. Применение рядов в приближенных вычислениях.

3.27.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Определение степенного ряда.
2. Определение радиуса и интервала сходимости степенного ряда.
3. Формулы разложения функций в ряд Маклорена.

Решение задач:
1. Найти радиус и область сходимости степенных рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n \cdot x^{2n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{3n^5+4}\cdot(x-2)^n$.

2. Разложить в ряд Маклорена функции:

1) $y=\frac{e^x-1}{x}$;

2) $y=x\cdot\ln(1+x^2)$;

3) $y=\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}$;

4) $y=\frac{\sin\sqrt{x}}{x^2}$.

3. Вычислить приближенно с точностью до 0,001:

1) $\sqrt[5]{1{,}7}$;

2) $\ln(1{,}04)$;

3) $\ln\sqrt[3]{130}$;

4) $\int_0^{0{,}5} e^{-x^2}dx$.

3.27.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

3.28 Практическое занятие №28 (2 часа)
Тема: «Вероятность события при повторных испытаниях»

3.28.1 Задание для работы:
1. Формула Бернулли.
2. Локальная теорема Лапласа.
3. Интегральная теорема Лапласа.
4. Теорема Пуассона.
5. Наивероятнейшее число наступлений события при повторении испытаний.

3.28.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Понятие вероятность события при повторных испытаниях.
2. Формула Бернулли.
3. Локальная теорема Лапласа.
4. Интегральная теорема Лапласа.
5. Теорема Пуассона.
6. Наивероятнейшее число наступлений события при повторении испытаний

Решение задач:
1. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее, выиграть две партии из четырех или три партии из шести (ничьи во внимание не принимать)?
2. Производится залп из шести орудий по некоторому объекту. Вероятность попадания в объект из каждого орудия равна 0,6. Найти вероятность ликвидации объекта, если для этого необходимо 4 попадания.
3. В среднем по 15% договоров страхования компания выплачивает страховую сумму. Найти вероятность того, что из 10 договоров с наступлением страхового случая будет связано с выплатой страховой суммы: а) три договора; б) менее двух договоров.
4. Предполагается, что 10% открывающихся новых малых предприятий прекращают свою деятельность в течение года. Какова вероятность того, что из шести малых предприятий не более двух в течение года прекратят свою деятельность?
5. Статистическая вероятность рождения девочки равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных будет ровно 50 девочек.
6. Вероятность появления события равна 0,7 в каждом из 2100 независимых испытаний. Найти вероятность появления события: а) не менее 1470 раз; б) не менее 1470 и не более 1500 раз; в) не более 1469 раз.
7. Вероятность обращения в поликлинику каждого взрослого человека в период эпидемии гриппа равна 0,8. Найти, среди какого числа взрослых человек можно ожидать, что в поликлинику будет не менее 75 обращений.
8. В вузе обучаются 3650 студентов. Вероятность того, что день рождения студента приходится на определенный день года, равна $\frac{1}{365}$. Найти: а) наиболее вероятное число студентов, родившихся 1 мая, и вероятность такого события; б) вероятность того, что, по крайней мере, 3студента имеют один и тот же день рождения.

9. Учебник издан тиражом 10000 экземпляров. Вероятность того, что экземпляр учебника сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что: а) тираж содержит 5 бракованных книг; б) по крайней мере 9998 книг сброшюрованы правильно.

3.28.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов математического анализа и теории вероятностей; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

3.29 Практическое занятие №29 (2 часа)

Тема: «Случайные величины»

3.29.1 Задание для работы:

1. Дискретные случайные величины. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины.
2. Числовые характеристики дискретной случайной величины.
3. Непрерывные случайные величины. Функция распределения и её свойства. Плотность распределения вероятности непрерывной случайной величины.
4. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.

3.29.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Определение дискретной случайной величины.
2. Определение закона распределения вероятностей дискретной случайной величины.
3. Определение непрерывной случайной величины.
4. Определение функции распределения.
5. Определение уравнения плотности распределения вероятности.
6. Числовые характеристики дискретной и непрерывной случайной величины

Решение задач:

1. Выпущено 1000 лотерейных билетов: на 5 из них выпадает выигрыш в сумме 500 рублей, на 10 – выигрыш в 100 рублей, на 20 – выигрыш в 50 рублей, на 50 – выигрыш в 10 рублей. Определить закон распределения вероятностей случайной величины X – выигрыша на один билет.
2. Найти математическое ожидание числа очков, выпадающих при бросании игральной кости.
3. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте, построить многоугольник распределения. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины.
4. В городе 4 коммерческих банка. У каждого риск банкротства в течение года составляет 20%. Составьте ряд распределения числа банков, которые могут обанкротиться в течение следующего года.
5. Дан закон распределения дискретной случайной величины X

X	2	a	6	7
p_i	0,3	0,4	0,2	b

Найти значения параметров a и b, если математическое ожидание случайной величины равно 4,1.

6. Случайная величина задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le\pi,\\ -\cos x, & \pi<x\le 1{,}5\pi,\\ 0, & x>1{,}5\pi.\end{cases}$$

а) определить вероятность попадания случайной величины X в интервал $[\pi;5/4\pi]$; б) найти математическое ожидание случайной величины X; в) дисперсию случайной величины X.

7. Случайная величина X задана плотностью вероятности:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ C\cdot(x-1), & 1<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$$

Требуется: а) найти коэффициент C; б) найти функцию распределения $F(x)$; в) найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; г) найти вероятность $P(0<x<3)$; д) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

8. Непрерывная случайная величина задана на интервале $0<x<1$ плотностью распределения $f(x)=2x$, а вне этого интервала $f(x)=0$. Найти ее числовые характеристики.

3.29.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов математического анализа и теории вероятностей; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

3.30 Практическое занятие №30 (2 часа)

Тема: «Нормальный закон распределения случайной величины**»**

3.30.1 Задание для работы:

1. Вероятность попадания нормально распределенной с. в. в заданный интервал.
2. Правило «трёх сигм».

3.30.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Определение нормально распределенной случайной величины.
2. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал.
3. Правило «трёх сигм».

Решение задач:

1. Поезда метро идут строго по расписанию. Интервал движения – 5 минут. Составить *f(x)* и *F(x)* случайной величины *X* – времени ожидания очередного поезда и построить их графики. Найти *M(X), D(X).*

2. Непрерывная случайная величина распределена по показательному закону с параметром $\lambda=2$. Составить функцию распределения, функцию плотности этой случайной величины. Найти числовые характеристики и вероятность того, что случайная величина попадет в интервал (0,3;1).

3. Детали, выпускаемые цехом, по размеру диаметра распределены по нормальному закону. Стандартная длина диаметра детали равна a=35, среднее квадратическое отклонение $\sigma=4$. Требуется: а) составить функцию плотности вероятностей; б) найти вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали будет больше $\alpha=34$ и меньше $\beta=40$; в) найти вероятность того, что диаметр детали отклонится от стандартной длины не больше чем на $\delta=2$.

4. Заданы математическое ожидание *a=4* и среднеквадратическое отклонение $\sigma=6$ нормально распределенной случайной величины. Требуется: а) написать плотность распределения вероятностей; б) найти вероятность того, что X примет значение из интервала (5; 9).

5. Ошибка измерителя дальности подчинена нормальному закону с систематической ошибкой 20м и средним квадратическим отклонением 60м. Найти вероятность того, что измеренное значение дальности будет отклоняться от истинного не более, чем на 30м.

6. Диаметр валика - случайная величина, распределённая по нормальному закону с параметрами $M(X)=10$ мм и $\sigma(X)=0{,}61$. Найти интервал, в который с вероятностью $P=0{,}9973$ будут заключены диаметры изготовляемых валиков.

7. Случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $a=50$ и средним квадратическим отклонением $\sigma=20$. Найти вероятность того, что случайная величина X отклонится от своего математического ожидания по абсолютной величине не больше, чем на $\delta=4$.

8. Коробки с конфетами упаковываются автоматически со средней массой 540 г. Полагая, что средняя масса коробок распределена по нормальному закону со средним квадратическим отклонением 30 г, найти: а) в какой интервал, симметричный относительно математического ожидания, укладываются 88% коробок; б) какой процент коробок имеет массу в пределах от 500 до 540 г.

3.30.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов математического анализа и теории вероятностей; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

3.31 Практическое занятие №31 (2 часа)

Тема: «Основы математической статистики»

3.31.1 Задание для работы:

1. Вариационные ряды, их характеристики и графическое изображение.
2. Функция распределения.
3. Числовые характеристики.

3.31.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Определение вариационного ряда.
2. Характеристики вариационного ряда.
3. Определение полигона и гистограммы.
4. Определение функции распределения.

Решение задач:

1. Найти эмпирическую функцию по данному распределению выборки и построить ее график.

а)

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

;

б)

x_i	2	5	7	8
n_i	1	3	2	4

;

в)

x_i	4	7	8
n_i	5	2	3

.

2. Построить полигон частот и относительных частот по данному распределению выборки:

а)

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

;

б)

x_i	15	20	25	30	35
n_i	10	15	30	20	25

;

в)

x_i	2	4	5	7	10
n_i	15	20	10	10	45

.

3. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки:

а)

1-5	5-9	9-13	13-17	17-21
10	20	50	12	8

;

б)

2-7	7-12	12-17	17-22	22-27
5	10	25	6	4

.

4. Построить гистограмму относительных частот по данному распределению выборки:

а)

0-2	2-4	4-6
20	30	50

; б)

10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
2	4	8	4	2

.

5. Из генеральной совокупности извлечена выборка:

x_i	2	5	7	10
n_i	16	12	8	14

Найти: а) выборочное среднее; б) выборочную и исправленную дисперсию; в) выборочное и исправленное среднее квадратическое отклонение; г) коэффициент вариации; д) моду; е) медиану выборки.

6. Из генеральной совокупности извлечена выборка:

x_i	1	3	6	26
n_i	8	40	10	2

Найти: а) выборочное среднее; б) выборочную и исправленную дисперсию; в) выборочное и исправленное среднее квадратическое отклонение; г) коэффициент вариации; д) моду; е) медиану выборки.

3.31.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов математического анализа, теории вероятностей, математической и социально-экономической статистики; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику, обрабатывать эмпирические и экспериментальные данные; сформировали навыки математических, статистических и количественных методов решения типовых организационно-управленческих задач.

3.32 Практическое занятие №32 (2 часа)

Тема: «Основы теории выборочного метода»

3.32.1 Задание для работы:

1. Статистическое оценивание параметров, методы нахождения оценок.
2. Точность оценки, надежность, доверительный интервал.

3.32.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Определение статистической оценки параметров.
2. Методы нахождения оценок.
3. Определение точности оценки.
4. Определение надежности оценки.
5. Определение доверительного интервала.

Решение задач:

1. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,99неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если известны генеральное среднее квадратическое отклонение σ, выборочная средняя $\overline{x_B}$ и объем выборки n: а) $\sigma = 4$, $\overline{x_B} = 10{,}2$, $n = 16$.

2. Выборка из большой партии электроламп содержит 100 ламп. Средняя продолжительность горения лампы оказалась равной 1000 ч. Найти с надежностью 0,95 доверительный интервал для средней продолжительности a горения лампы всей партии, если известно, что среднее квадратическое отклонение продолжительности горения лампы $\sigma = 40$ ч. Предполагается, что продолжительность горения ламп распределена нормально.

3. Из генеральной совокупности извлечена выборка:

x_i	-2	1	2	3	4	5

n_i	2	1	2	2	2	1

Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание a нормально распределенного признака генеральной совокупности по выборочной средней при помощи доверительного интервала.

4. По данным девяти независимых равноточных измерений некоторой физической величины найдены среднее арифметическое результатов измерений $\overline{x_B} = 30{,}1$ и исправленное среднее квадратическое отклонение $s = 6$. Оценить истинное значение измеряемой величины с помощью доверительного интервала с надежностью 0,99. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

5. По данным 16 независимых равноточных измерений некоторой физической величины найдены среднее арифметическое результатов измерений $\overline{x_B} = 42{,}8$ и исправленное среднее квадратическое отклонение $s = 8$. Оценить истинное значение измеряемой величины с помощью доверительного интервала с надежностью 0,999. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

6. По данным выборки объема $n = 16$ из генеральной совокупности найдено исправленное среднее квадратическое отклонение $s = 1$ нормально распределенного количественного признака. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение σ с надежностью 0,95.

7. Произведено 12 измерений одним прибором (без систематических ошибок) некоторой физической величины, причем исправленное среднее квадратическое отклонение s случайных ошибок измерения оказалось равным 0,6. Найти точность прибора с надежностью 0,99. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

8. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,99неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если известны генеральное среднее квадратическое отклонение σ, выборочная средняя $\overline{x_B}$ и объем выборки n: а) $\sigma = 5$, $\overline{x_B} = 16{,}8$, $n = 25$.

3.32.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов математического анализа, теории вероятностей, математической и социально-экономической статистики; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику, обрабатывать эмпирические и экспериментальные данные; сформировали навыки математических, статистических и количественных методов решения типовых организационно-управленческих задач.