

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ  
ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ**

**Б1.В.09 Методы принятия управленческих решений**

**Направление подготовки (специальность) 38.03.02 Менеджмент**

**Профиль образовательной программы Производственный менеджмент**

**Форма обучения заочная**

## **СОДЕРЖАНИЕ**

### **1. Конспект лекций**

- 1.1 Лекция № 1** Роль принятия решений в управлении
- 1.2 Лекция № 2** Понятие и классификация методов разработки и принятия решений
- 1.3 Лекция № 3** Математические методы принятия решений
- 1.4 Лекция № 4** Методы, применяемые на этапе определения альтернатив
- 1.5 Лекция № 5** Принятие решений в условиях неопределенности и риска

### **2. Методические указания по проведению практических занятий**

- 2.1 Практическое занятие № ПЗ-1** Математические методы принятия решений.
- 2.2 Практическое занятие № ПЗ-2** Математические методы принятия решений
- 2.3 Практическое занятие № ПЗ-3** Математические методы принятия решений
- 2.4 Практическое занятие № ПЗ-4** Методы, применяемые на этапе определения альтернатив
- 2.5 Практическое занятие № ПЗ-5** Методы, применяемые на этапе оценки альтернатив

## **1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ**

### **1. 1 Лекция №1 (2 часа).**

**Тема: «Роль принятия решений в управлении»**

#### **1.1.1 Вопросы лекции:**

- 1. Наука о принятии управленческих решений**
- 2. Эволюция теории принятия решений**
- 3. Сущность, свойства и классификация управленческих решений**

#### **1.1.2 Краткое содержание вопросов:**

##### **1. Наука о принятии управленческих решений**

1. Главной функцией менеджмента и менеджера согласно их предназначению является разработка и принятие управленческих решений. Данная функция связана с другими функциями менеджмента:

- планированием;
- организацией;
- контролем;
- мотивацией.

Менеджер должен принимать обоснованные, взвешенные решения, представляющие собой звенья цепочки от поставленной цели до конкретного результата, и добиваться их исполнения. Принять решение — означает сделать выбор одной из альтернатив. Успешное принятие решения зависит от уровня профессиональных знаний менеджера.

Управленческие решения обладают рядом особенностей, отличающих их от других видов решений, принимаемых в организации (например, технических, организационных, сугубо профессиональных и т. д.), — в первую очередь:

- масштабностью (охватывают более широкий круг людей);
- психологической спецификой;
- финансовыми последствиями;
- экономическими аспектами.

При принятии многих управленческих решений можно столкнуться с непредсказуемостью, вероятностным результативным исходом, на который оказывает влияние очень большое количество различных факторов, в том числе внутреннего и внешнего характера. И тем выше непредсказуемость, чем ниже уровень профессионализма управленца (недостаточные знания в сфере кадрового менеджмента, методов социально-психологического воздействия, отсутствие навыков и знаний технологии разработки управленческих решений).

Особенности управленческих решений многоаспектны (рис..1).



Рис.1. Спектр особенностей управленческих решений

Из всего многообразия выделяют следующие аспекты: *экономический*:

- эффективность использования всех видов ресурсов;
- материальная заинтересованность персонала;
- правильность управленческих решений;
- максимизация экономического эффекта;

*социальный*:

- неформальная структура рабочих групп;
- качество трудовой деятельности;
- развитие системы участия в управлении;
- внепроизводственная деятельность неформальных групп;

*организационный*:

- делегирование полномочий;
- локализация и устранение конфликтов;
- разделение труда;
- структуризация функций управления;

*правовой*:

- соблюдение правовых норм при подготовке, принятии и реализации управленческих решений;
- придание управленческому решению формы нормативного акта;
- соблюдение и соответствие компетенции персонала по принятию решения;
- распределение ответственности за выполнение принятого решения;

*психологический*:

- учет инновационной готовности персонала;
- оценка социально-психологического климата;
- профессиональные качества руководителя;
- деловые качества руководителя и психологический склад личности подчиненных;

*педагогический*:

- воспитательный характер управленческих решений;
- квалификационный рост персонала;
- формирование позитивных моральных установок (формирование корпоративной культуры).

Отличие управленческих решений от производственных заключается в объекте (разработчик принимает решения о механизмах, деталях, менеджер — об организации производства этих деталей). Особая роль отводится менеджеру не только в ходе разработки решения и его принятия, но и при реализации и контроле исполнения, поскольку на данном этапе осуществляется обратная связь, и менеджер может оказывать корректирующие управляющие воздействия, совершенствуя при этом свой профессиональный уровень.

*Особенности решений, принимаемых на государственном уровне:*

- широта охвата (круг вовлеченных в исполнение решения или затрагиваемых этим решением);
- широта решаемых проблем;
- ответственность перед обществом:
  - финансовая;
  - социально-политическая;
  - нравственно-этическая;
  - экологическая.

*Особенности решений, принимаемых на различных уровнях управления:*

- *технический уровень:* оперативные, конкретные, четко формализованные, контролируемые;
- *средний уровень:* тактические, текущие, с высоким экспертным уровнем и уровнем аргументации;
- *высший уровень:* стратегические, высокоответственные.

## 1. Принятие решений как связующий процесс.

*Уметь управлять – значит уметь выбирать.*

Роль и место принятия решений в процессе управления организацией проявляется через основные функции управления, к которым относятся планирование, организация, мотивация, и контроль. Эти функции объединены между собой двумя связующими процессами принятием решений и обменом информацией.

Согласно данному подходу процессы управления и принятия решений тесно взаимосвязаны и неотделимы один от другого. При этом необходимо отметить, что принятие решений не является одной из функций управления, а пронизывает весь этот процесс, осуществляясь непрерывно в каждой функции управления. Принятие решений связывает между собой все функции управления, именно поэтому принятие решений рассматривается как важный связующий процесс в рамках широкого процесса управления.

В подтверждение выше сказанного можно привести примеры решений, которые применяются руководителями при осуществлении каждой функции управления.

*В процессе планирования принимаются решения:*

- о миссии и целях организации;
- о состоянии внешней среды и ее влияния на другие организации;
- о стратегии и тактике достижения поставленных целей;
- о бюджете организации;
- о выборе инвестиционных проектов;
- о стратегии ценообразования.

*В процессе организационной деятельности принимаются следующие решения:*

- о способах организации взаимодействия подразделений и работников организации;
- об организационной структуре;
- о пределах и распределении властных полномочий;
- о реорганизации фирмы вследствие изменения цели и состояния внешней среды предприятия.

*В процессе мотивации:*

- о нуждах и потребностях подчиненных;
- что необходимо сделать для повышения труда подчиненных;
- о методах и приемах мотивации работников.

*В процессе контроля могут приниматься следующие решения:*

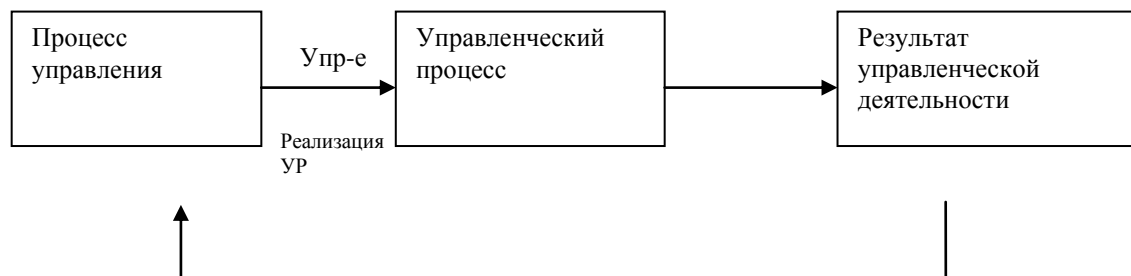
- как и по каким показателям следует оценивать результаты работы;
- как часто следует изменять значение этих показателей;
- какие изменения необходимо провести, с целью улучшения деятельности вашей фирмы.

Приведенные выше примеры показывают, что процесс принятия решений присутствует на любой стадии управленческого процесса.

Деятельность любой организации состоит из 2-х неразделимых процессов:

- процесса управления, который заключается в реализации функции планирования, мотивации и контроля;
- управленческого процесса, который рассматривается как множество взаимосвязанных операций, направленных на достижение целей организации.

В реальной действительности эти два процесса разворачиваются параллельно и неотделимы один от другого, но в целях выяснения сущности этих процессов их удобнее разделить, т. к. они осуществляются разными людьми и преследуют разные цели.



*Процесс управления* – это деятельность руководителей, состоящая в реализации определенных функций управления с целью обеспечения максимальной или требуемой эффективности управляемого процесса.

*Управленческий процесс* – это неуправленческая деятельность, т. е. Конкретная операция и работы, связанные с производством товаров или оказанием услуг и направленная на достижение целей организации.

Конкретная цель деятельности организации вообще состоит в достижении требуемого результата, а цель управления заключается в том, чтобы этот результат достигался с максимальной или достаточно высокой эффективностью. Т. о. *Цель управления* – это обеспечение максимальной или требуемой эффективности управленческого процесса.

Эта цель достигается через выработку и осуществление управленческих воздействий, которые являются непосредственным продуктом процесса управления, т. е. деятельности руководителя. Чтобы достичь своей цели управляющее воздействие должно влиять на изменение таких факторов внешней и внутренней среды организации, которые вообще поддаются управлению, т. е. относятся к управляемым факторам.

*Управляющее воздействие* – это действия руководителя, которые направлены на изменение управляемых факторов внешней и внутренней среды организации с целью обеспечения максимальной или требуемой эффективности управляемого процесса.

Другими словами, управляющее воздействие должно быть направлено на изменение таких управляемых факторов, которые характеризуют качество ресурсов, способы применения ресурсов и условия применения ресурсов организации. Однако прежде чем совершить некоторое действие, руководитель должен принять управленческое решение, т. е. решить, какую цель он преследует, и что необходимо сделать для ее достижения. Руководитель должен выбрать цель управления и определить значения управляемых переменных, которые обеспечивают достижение этой цели. Именно в этом и заключается сущность процесса принятия решений.

Т. о. выбор цели управления и выбор значений управляемых факторов всегда предшествует управляющим воздействиям. Решение возникает в сознании руководителя и как только начинает выполняться, становится управляющим воздействием. Т. о. *управляющие воздействия* – это реализация управленческих решений. *Управленческие решения* – это выбор цели управления и значений управляемых факторов, обеспечивающих достижение этой цели. После того, как цель управления выбрана, руководитель должен позаботиться о средствах ее достижения. К ним относятся:

- качество ресурсов;
- способы применения ресурсов;

- условия применения ресурсов.

Это те факторы. Которые представляют собой объекты управленческого решения. При этом руководитель вступает в роли субъекта управленческих решений.

*Качество ресурсов* – важнейшая характеристика внутренней среды организации. Чтобы деятельность организации была эффективной, ее ресурсы должны быть пригодны для достижения поставленной цели, т. е. обладать набором определенных внутренних свойств, характеризующих уровень качества этих ресурсов. Качество человеческих ресурсов – это физиологические, деловые и психические свойства людей, работающих в организации.

*Качество материальных ресурсов* – это прочность, надежность, производительность, безопасность и т. д.

*Качество финансовых ресурсов* – это покупательная способность денег и стоимость валютного курса.

*Качество информации* – это ее достоверность, ценность, насыщенность, открытость и т.д.

Большая доля управленческих решений – это выбор ресурсов. Обладающих требуемым качеством для достижения целей организации.

#### **Способы применения ресурсов.**

Наиболее широкий круг образуют управленческие решения, связанные с выбором способов применения ресурсов организации. К ним относятся:

- решения о планах деятельности фирмы;
- назначение сотрудников на те или иные должности;
- распределение задач и полномочий;
- организация взаимодействия между подразделениями;
- технология выполнения производственных и коммерческих операций;
- методы мотивации персонала;
- распределение материальных и финансовых средств;
- использование полученной информации;
- и т. д.

#### **Условия применения ресурсов**

Прежде всего переменных, как правило, включает неуправляемые факторы внешней и внутренней среды. Однако, часть из них вполне поддается управлению со стороны руководителя, т. е. мы можем сознательно влиять на значение этих факторов, формируя благоприятные условия для достижения целей организации. К ним можно отнести такие решения, как о:

- целевых рыночных сегментах;
- каналах сбыта и распределения продукции;
- проведение рекламных компаний;
- разделение сфер влияния между конкурентами;
- выбор партнеров и поставщиков;
- организационной культуре;
- структуре фирмы;

и т. д.

## **2. Эволюция теории принятия решений**

### **Сущность теории принятия решений.**

Теория принятия решений зародилась примерно в середине XX века как ответ человеческой практики на возросшие трудности и ответственность при принятии решений.

Главной задачей этой теории была необходимость объяснения того, каким образом человек или группа людей принимают решения, а так же разработать специальные методы и приемы в процессе принятия решений. В связи с этим теорию принятия решений можно разделить на 2 относительно независимые части:

- деструктивную (предписывающую);

- прескриптивную (описывающую).

*Дескриптивная* составляющая описывает реальное поведение и мышление людей в процессе принятия решений и называется психологической теорией решения.

*Прескриптивная* составляющая описывает, как людям следует вести себя, как принимать решения называется нормативной теорией решения.

ПТР – система утверждений, раскрывающих внутреннее содержание деятельности и поведение людей в процессе принятия решений. Эти утверждения позволяют ответить на следующие вопросы:

- Как у людей возникает представление о ситуации принятия решений?

Люди по разному оценивают ситуацию, в которой они оказываются и в которой им приходится принимать решения. Такое представление является субъективной моделью конкретной ситуации. Практика показывает, что люди склонны упрощать реальную ситуацию, упускать многие моменты, оказывающие порой серьезное влияние на принятие решений.

- Как люди оценивают последствия принимаемых решений?

Последствия решений принимаются так же субъективно. Оценка последствий принимаемых решений происходит в соответствии с индивидуальными представлениями о ценностях. В силу этого индивидуальная оценка последствий принимаемых решений может оказать существенное влияние на окончательное принятие решения.

- Как люди оценивают вероятности различных факторов, влияющих на принятие решения?

Психологами было установлено, что люди часто переоценивают вероятность наступления более понятных и желаемых для них событий, хотя объективно они могут быть маловероятны.

- Какие правила и стратегии используют люди для различных ситуаций принятия решения?

Опыт показывает, что при выборе альтернативы люди используют разнообразные правила, которые не имеют строгого обоснования, но когда-то имели место и могли принести какой-то успех.

- Как на людей влияют различные факторы, управляющие процессом принятия решений?

## **Психологическая теория решений**

К таким факторам относят влияние внешней среды, личностные качества, обеспеченность ресурсами и др.

Т.о. психологическая теория принятия решений изучает, как в действительности люди принимают решение и какие психологические явления сопровождают этот процесс. Психологическая теория как бы выполняет две основные функции: *предвидения и поведения* человека в процессе принятия решений. Однако людей всегда интересовал вопрос, «как надо принимать решения»? Чтобы ответить на него. Была разработана и активно развивается нормативная теория решений.

*Нормативная теория решений* – это система методов, обеспечивающих поддержку принятия решений. Эти методы организуют мышление человека и предписывают ему, как следует себя вести в процессе принятия решений. В настоящее время разработано большое число разнообразных методов и процедур, которые призваны помочь разобраться в сложной ситуации, грамотно сформулировать цели, ограничения, оценить альтернативы и принять качественное решение. НТР базируется на двух основных концепциях:

- максимизации полезности;
- ограниченной рациональности.

*Концепция максимальной полезности.* В соответствии с ней, рассматривается так называемый рационалистический или экономический человек, который всегда старается принять оптимальное решение.

У каждого человека имеется своя собственная функция полезности, отражающая индивидуальную систему предпочтений. Оптимальным считается решение, обладающее максимальной полезностью. В силу этого, оценивая каждое решение, мы явно или не явно сопоставляем со своей функцией полезности.

*Концепция ограниченной рациональности* исходит из того, что в реальной действительности люди редко ведут себя подобно «рациональному человеку». На самом



деле, в большинстве реальных ситуаций они, как правило, ограничиваются удовлетворительными решениями, которые обычно уступают по качеству оптимальным решениям, но вполне приемлемы с точки зрения достижения цели. Более того, руководитель организации вынужден принимать удовлетворительные решения по нескольким причинам:

- Из большого числа возможностей он видит только несколько альтернатив, и поэтому маловероятно, что его выбор будет оптимальным.
- Он не может предвидеть всех возможных последствий каждой альтернативы.
- Ему часто не хватает знаний, и поэтому его решение обычно основывается на весьма приблизительных и общих представлениях о тех процессах и объектах, которые передаются в управление.
- Руководитель работает в режиме хронического дефицита времени и поэтому часто ошибается.
- Он не обладает всей необходимой информацией, поскольку принимает решение в условиях неопределенности.
- Он часто руководствуется нечетким, расплывчатым и даже противоречивыми целями, что отрицательно сказывается на качестве принимаемых решений.

Указанные причины обусловлены, прежде всего, психологическими факторами и ограниченными возможностями человека.

### **3 Сущность, свойства и классификация управленческих решений**

Управленческие решения характеризуются высокой степенью сложности, в связи с чем имеют чрезвычайно широкое разнообразие типов. Решение принадлежит к определенному типу если оно обладает каким-либо общим признаком, характерным для некоторого множества решений. Среди основных признаков, которые имеются для построения типологии выделяют такие как:

- Степень разработки;
- степень обоснования;
- варианты реализации;
- степень развития цели управления.

*1. по степени разработки выделяют:*

- запрограммированные решения;
- незапрограммированные решения.

Запрограммированные принимаются в результате определенной последовательности по стандартным методам или правилам, которые разрабатываются заранее и принимаются в типовых, повторяющихся ситуациях.

Использование определенной методики принятия решений снижает вероятность появления ошибок и повышает оперативность выработки решения. Поэтому запрограммированные решения считаются наиболее разработанными.

В реальной действительности далеко не все решения принимаются по заранее подготовленным методам. Особенно характерно для новых или уникальных ситуаций. В этих условиях руководители вынуждены принимать незапрограммированные решения. Как правило, отсутствует конкретная последовательность конкретных действий для решения проблемы. Перед руководителем стоит проблема разработки нового процесса принятия решения, поскольку в реальной действительности то множество проблем, которое приходится решать руководителю невозможно заранее запрограммировать, а основная масса принимаемых решений является не запрограммированными.

*2. По степени обоснования можно выделить:*

- интуитивные;
- логические;
- рациональные решения.

Большинство мнимых и условных решений основано на интуиции. Интуитивные решения принимаются людьми просто на основе того, что они правильные. При этом ЛПР сознательно не сравнивает между собой все достоинства и недостатки каждой альтернативы, т. е. решение принимается подсознательно, без явного логического обоснования.

*Интуиция* – бессознательный разум, помогающий решать проблемы минуя рассуждения и умозаключения. Интуиция проявляется как некоторое озарение или мгновенное понимание ситуации без использования рационального мышления.

Более обоснованным считается решение, основанное на суждении. Такие решения обусловлены знанием прошлого, опытом человека и называется *логическим решением*. Принимая его, люди обращаются к опыту и здравому смыслу, чтобы использовать их для прогноза возможных последствий, альтернатив и обоснования своих действий в конкретной ситуации. В этом случае, как правило, выбирается такая альтернатива, которая уже принесла успех или легко поддается объяснению с помощью несложных логических задач. Решения, основанные на суждениях весьма полезны в повторяющихся ситуациях, которые неоднократно могут возникать в деятельности организации. В таких ситуациях решение принимается по аналогии.

Значительными достоинствами интуитивных и логических решений является оперативность и дешевизна их принятия, но наиболее такие решения работают лишь в сравнительно знакомых ситуациях. Поэтому в новых или уникальных ситуациях вероятность успеха возрастает, если руководитель принимает рациональное решение. Рациональное решение в отличие от логического не зависит от прошлого опыта. Они основываются на объективном анализе сложных проблемных ситуаций с использованием научных методов и компьютерных технологий. В силу этого рациональные решения считаются наиболее обоснованными, т. к. в процессе их разработки используются все доступные человеку механизмы – интуиция, логика и расчет.

### *3. Возможность реализации.*

Все управленческие решения должны реализовываться в деятельности организации, поэтому любое решение с самого начала должно допускать возможность практической реализации. По этому признаку решения делятся на 2 типа:

- допустимые;
- недопустимые.

*Допустимые решения* - решения, которые удовлетворяют всем ограничениям и могут быть реализованы на практике. Любые решения всегда применяются в условиях объективных ограничений: временных, ресурсных, финансовых, трудовых. Анализ ограничений - один из самых важных этапов принятия решений. Если этого не делать, то на практике велика вероятность принятия недопустимых решений, которые на практике не могут быть реализованы и потому не имеют никакой практической значимости.

### *4. Степень достижения цели.*

Допустимость или реалистичность принятого решения еще не означает разумность. Решение может быть допустимым по условиям ограничений, но не приводить к получению желаемых результатов. *Неразумное решение* – недопустимое решение или решение, не приводящее к достижению целей управления.

Любое решение имеет смысл лишь тогда, когда оно не только реализуемо, но и позволяет достичь желаемых результатов. Поэтому все управленческие решения должны оцениваться с точки зрения достижения целей управления, которые устанавливаются руководителем организации.

Удовлетворительными решениями следует признавать также варианты действий, которые приводят к достижению целей управления организацией, т. е. эти решения удовлетворяют всем объективным и субъективным ограничениям одновременно и обеспечивают приемлемый, но не обязательно лучший результат.

Принятие управленческих решений вовсе не отвергает необходимости поиска оптимального решения, при этом необходимо помнить, что оптимальное решение является наилучшим не в абсолютном смысле, а лишь применительно к конкретной ситуации или цели управления.

*Оптимальное решение* – то, которое обеспечивает максимальную степень достижения цели.

Наряду с рассмотренными, существуют и другие признаки классификации управленческих решений:

- По признаку инновационности рассматриваются рутинные, селективные, адаптационные и инновационные решения.
- По масштабу изменений решения могут быть ситуационные и реорганизационные.
- По степени влияния субъекта на содержание решения выделяют рутинизированные и инициативные.
- По времени действия – стратегические, тактические и оперативные решения.
- По содержанию все решения можно поделить на: разрешающие, запрещающие, конструктивные.
- По типу лиц, участвующих в принятии решения: индивидуальные, коллективные.

***Единоначалие:***

- управленческие решения принимаются руководителем лично;
- зачастую 90% таких решений подвергается критике;
- как правило, такой принцип проявляется у авторитарных руководителей;
- однако все шире распространяется система вовлечения исполнителей в процесс принятия решений.

***Единогласие:***

- безоговорочная поддержка принимаемого решения;
- упор на этот принцип делается в экстремальных ситуациях и при отсутствии противоборствующих групп и коалиций.

***Большинство:***

- используется в ситуациях с явно выраженными коалициями и/или разными взглядами;
- используется система голосования;
- нет гарантии принятия качественного решения

***Консенсус:***

- согласование по всем спорным вопросам и различным мнениям в процессе выработки решений;
- использование этого принципа обусловлено влиянием следующих факторов:
  - а) углублением демократизации, возможностью выразить свое мнение;
  - б) ростом информационных потоков и усложнением технико-экономических условий принятия управленческих решений.

***Компромисс:***

- соглашение, достигаемое путем взаимных уступок;
- уступки должны быть разумными

Большинство японских компаний славятся тем, что их система разработки управленческих решений оказывается очень эффективной и живучей. Она обеспечивает текущую стабильность и вместе с тем дает возможность развития в будущем. В Японии используется метод Ринги (*рингисе* — «доработка документа»). Он включает в себя следующие этапы:

1. Формулирование проблемы руководителем (необходимо, чтобы эту формулировку можно было однозначно понять!).

2. Передача проблемы вниз — в секцию, где организуется работа над проектом ее решения.

3. Детальное согласование с исполнителями по всем пунктам готовящегося проекта: сглаживаются все углы, ослабляются разногласия и отсекаются противоположные точки зрения.

4. Проведение целенаправленного совещания/конференции, на которой обсуждается предлагаемый вариант решения проблемы.

5. Доработка документа и визирование его исполнителями, утверждение руководителем.

Несмотря на определенную длительность процесса, отказываться от этой системы японские компании не собираются.

#### **4. Требования, предъявляемые к управленческим решениям**

Чтобы принимаемое управленческое решение было эффективным, менеджер должен соблюдать все требования, предъявляемые к управленческим решениям:

*Единство целей.* Для удовлетворения этому требованию при разработке и принятии решения должно обеспечиваться условие его непротиворечивости ранее принятым целям.

*Научная обоснованность и правомочность.* Заключаются в обеспечении соответствия прав и обязанностей органов принятия решения. Научная обоснованность состоит в том, что каждое управленческое решение должно быть обязательно аргументировано и обосновано. Аргументы должны по возможности носить формализованный характер (статистические, экономические и другие данные).

*Ясность формулировок* — ориентация на конкретного исполнителя.

*Краткость формулировок принятого решения.* Выполнение этого требования повышает конкретность, действенность решений и способствует лучшему усвоению задачи исполнителем.

*Своевременность и оперативность принятия решений,* повышающие ценность принятого решения.

*Объективность.* Менеджеры не должны игнорировать фактические условия или фактическое положение дел при разработке вариантов решений.

#### **Факторы, влияющие на принятие управленческих решений**

Принятие управленческих решений осуществляется под воздействием ряда факторов.

*Личностные оценки руководителя.* Каждый руководитель как человек обладает системой ценностей, которая определяет его действия и влияет на процесс принятия им решений. Например, в процессе принятия управленческого решения руководитель, располагая информацией, может дать ее полностью или придержать (финансовые успехи, прибыль и т. д.).

*Среда принятия решения,* которая характеризуется условиями определенности или неопределенности. В условиях определенности, например, руководитель, имея избыточную наличность, может принять решение о вложении ее в 5—10-процентные депозитные сертификаты или в другие банковские системы, при этом он уверен, что организация получит именно это (5—10%) количество процентов на вложенные средства. В условиях определенности руководитель, например, может точно установить затраты на производство, оказание услуг и т. д.

В условиях неопределенности, характеризующихся, как правило, финансовой, политической, экономической, социальной и т. п. нестабильностью, невозможно точно оценить вероятность потенциальных результатов, которая будет варьироваться от 0 до 1. Поэтому каждое важное решение формируется с учетом принципа компромисса. *Культурные различия,* заключающиеся в том, каким рычагам отдается

предпочтение в процессе управления, например, в данной стране или регионе, то есть используется «мягкий» или более «жесткий» подход к выработке и реализации управленческих решений, применяются подходы, имеющие крен в сторону индивидуализма (США) или, наоборот, в сторону национального коллективизма (Япония).

*Информационные ограничения.* Для принятия решения необходимо располагать достаточным, оптимальным или полным объемом информации. Любая информация стоит денег, даже в том случае, если она собирается именно на данной фирме, а уж тем более если ее необходимо получить из других источников. Поэтому требуется проведение предварительной оценки затрат на получение информации и выгоды от принятого решения.

В этих условиях возможны три варианта:

- а) выгоды от исполнения принятого решения превышают либо практически сопоставимы с затратами на информацию. В этом случае имеет смысл вкладывать средства в получение информации
- б) до определенного момента расходы выгодны в) выгоды превосходят затраты.

*Поведенческие ограничения.* Руководители по-разному воспринимают значимость проблемы ограничения, по-разному оценивают альтернативы (рассматривают варианты), из-за чего возникают конфликты и несогласия в процессе принятия решения (то есть должны учитываться психологические и личностные особенности, которые могут существенно сказываться на окончательном выборе варианта решения) — например: антипатия, симпатия к работнику при увольнении.

*Взаимосвязь решений.* Данный фактор характеризуется тем, что выигрыш от принятия управленческого решения в одной сфере может повлечь за собой существенный проигрыш в другой. Например, решение руководителя об автоматизации производства, в частности внедрении автоматических линий, как правило, предполагает освобождение рабочих мест, а следовательно, и увольнение рабочих. При этом руководитель должен выбирать те решения, которые дают больший выигрыш.

*Фактор сложности.* Сложность исполнения (реализации) принятого решения зависит от того, какова степень охвата различных сфер деятельности фирмы при реализации решения. Чем сложнее решение, тем, как правило, шире круг охвата сфер (материально-техническая, кадровая, организационно-экономическая, маркетинговая, финансовая и т. д.). Чем больше направлений работ и чем больше людей (персонала) вовлечено в сферу реализации, тем сложнее и дороже реализация решений. *Перспективность действия решения.* Поскольку любой вариант решения не исключает наряду с позитивными и негативных последствий, то необходимо, чтобы позитивные преобладали и способствовали развитию фирмы, выходу ее на более высокий уровень.

*Фактор финансовых вложений и анализа финансовых вложений.* При выборе решений, связанных с радикальными нововведениями, как правило, требуются значительные финансовые вложения, средства. Они могут быть собственными и/или заемными. Важно отслеживать и анализировать соотношение собственных и кредитных средств с тем, чтобы не оказаться в сильной зависимости от внешних источников финансирования и не обанкротиться.

*Экономическая целесообразность принятия решения.* Данный фактор связан с оценкой затрат и экономического эффекта, экономической выгоды и предполагает анализ соотношения выгоды и затрат.

*Учет не только экономической выгоды, но и других видов эффекта,* а именно: социального, нравственно-этического, технического.

*Степень риска,* связанного с последствиями от реализации решения. Данный фактор требует применения различных методик оценки рисков (финансовых, экономических и т. д.); соответственно, руководитель должен обладать навыками выполнения такого анализа.

## **1.2 Лекция №2 (2 часа)**

**Тема: Понятие и классификация методов разработки и принятия решений**

### **1.2.1 Вопросы лекции:**

- 1. Типы задач принятия решений**
- 2. Понятие метода принятия решения, классификация методов принятия решения**
- 3. Методы, применяемые на этапе диагностики проблем и формулировки критериев и ограничений**

### **1.2.2 Краткое содержание вопросов:**

- 1. Типы задач принятия решений**

В экономике такие задачи возникают при практической реализации принципа оптимальности в планировании и управлении. В оптимальное (математическое) программирование входят:

- а) линейное программирование,
- б) нелинейное программирование,
- в) динамическое программирование,
- г) дискретное (целочисленное) программирование,
- д) дробно-линейное программирование,
- е) параметрическое программирование,
- ж) сепарабельное программирование,
- з) стохастическое программирование,
- и) геометрическое программирование.

Для успешного принятия оптимального решения необходимо знать, что такое математическая модель, уметь отбирать данные для ее построения и представлять, каким образом компьютер находит это решение (т.е. владеть информацией о возможных методах решения различных типов моделей и применяемых при этом алгоритмов).

Математическое моделирование имеет два существенных преимущества: 1) дает быстрый ответ на поставленный вопрос, на что в реальной обстановке могут потребоваться иногда даже годы; 2) предоставляет возможность широкого экспериментирования, осуществить которое на реальном объекте зачастую просто невозможно.

Содержательная постановка задачи часто оказывается перенасыщенной сведениями, которые совершенно излишни для ее последующей формализации. Чтобы моделирование было успешным, надо учитывать главные свойства моделируемого объекта, пренебрегать его второстепенными свойствами и уметь отделить их друг от друга.

Формализовать постановку задачи, т.е. перевести ее на язык математики, причем с конечным количеством неизвестных и возможных ограничений. При этом необходимо провести различие между теми величинами, значениями которых можно варьировать и выбирать с целью достижения наилучшего результата (*управляемыми переменными*), и величинами, которые фиксированы или определяются внешними факторами. Одни и те же величины, в зависимости от выбранных границ оптимизируемой системы и уровня детализации ее описания, могут оказаться либо управляемыми переменными, либо нет.

Определение тех значений управляемых переменных, которым соответствует наилучшая (*оптимальная*) ситуация, и представляет собой задачу оптимизации.

Модель экономической задачи оптимизации состоит из 3-х частей:

I. Целевая функция (критерий оптимальности). Здесь описывается конечная цель, преследуемая при решении задачи. В качестве такой цели может быть или максимум получения каких-либо показателей или минимум затрат.

II. Система ограничений.

Ограничения бывают основные и дополнительные. Основные, как правило, описывают расход основных производственных ресурсов (это консервативная часть модели). В модели они обязательно присутствуют. Дополнительные – могут иметь различный характер, являются изменяемой частью модели и отражают особенность моделирования задачи.

III. Условие неотрицательности переменных величин. А также граничные условия, которые показывают, в каких пределах могут быть значения искомых переменных в оптимальном решении.

Решение задачи, удовлетворяющее всем ограничениям и граничным условиям, называется *допустимым*. Если математическая модель задачи оптимизации составлена правильно, то задача будет иметь целый ряд допустимых решений. Чтобы из всех возможных решений выбрать только одно, необходимо договориться, по какому признаку мы это будем делать. То есть речь идет о критерии оптимальности, который выбирает

человек, принимающий решение. Таким образом, оптимальное решение – это решение, наилучшее из допустимых с точки зрения выбранного признака.

Однако, следует иметь в виду, что решение не всех оптимизационных проблем сводится к построению математических моделей и соответствующим вычислениям. Это связано с тем, что могут появиться обстоятельства, являющиеся существенными для решения проблемы, но, тем не менее, не поддающиеся математической формализации и, следовательно, не учитываемые в математической модели. Одним из таких обстоятельств является человеческий фактор. В этой связи можно вспомнить о так называемой **«проблеме лифта»**. Служащие одной из фирм жаловались на слишком долгое ожидание лифта. Была попытка решить эту проблему математическими методами. Решение в силу ряда причин оказалось неприемлемым, а дальнейшие исследования показали, что время ожидания лифта невелико. Тогда возникла идея поставить на каждом этаже рядом со входом в лифт большие зеркала. Как только это было сделано, жалобы прекратились. Теперь люди рассматривали себя в зеркале и забывали о долгом ожидании лифта. Этот пример показывает необходимость правильно оценивать возможности математического описания исследуемых процессов и помнить, что в сфере организационного управления не все и не всегда поддается математической формализации и может быть адекватно отражено в математической модели.

## **2. Понятие метода принятия решения, классификация методов принятия решения**

*Оптимизация* – это целенаправленная деятельность, заключающаяся в получении наилучших результатов при соответствующих условиях. Оптимизация решения – это процесс перебора множества факторов, влияющих на результат. Оптимальное решение – это выбранное по какому-либо критерию оптимизации наиболее эффективное из всех альтернативных вариантов решение. В математике оптимизация связана с нахождением оптимума (т.е. максимума или минимума) некоторой функции. В данном контексте *методы оптимизации* будем рассматривать как средства принятия оптимальных решений. Они входят в состав экономико-математических методов.

Термин *экономико-математические методы* понимается как обобщающее название комплекса экономических и математических научных дисциплин, объединенных для изучения социально-экономических систем и процессов.

Под *социально-экономической системой* будем понимать сложную вероятностную динамическую систему, охватывающую процессы производства, обмена, распределения и потребления материальных и других благ. Она относится к классу кибернетических систем, т.е. систем управляемых.

Единого определения понятия *система* нет, но возможна следующая формулировка: *системой* называется комплекс взаимосвязанных элементов вместе с отношениями, как между элементами, так и между их атрибутами. Исследуемое множество элементов можно рассматривать как систему, если выявлены следующие четыре признака:

- 1) целостность системы, т.е. принципиальная несводимость свойств системы к сумме свойств составляющих ее элементов;
- 2) наличие цели и критерия исследования данного множества элементов;
- 3) наличие более крупной, внешней по отношению к данной, системы, называемой «средой»;
- 4) возможность выделения в данной системе взаимосвязанных частей (подсистем).

Основным методом исследования систем является *метод моделирования*, т.е. способ теоретического анализа и практического действия, направленный на разработку и использование моделей. *Экономико-математическое моделирование* – это описание знаковыми математическими средствами социально-экономических систем. Практическими задачами экономико-математического моделирования являются:



- анализ экономических объектов и процессов;
- экономическое прогнозирование, предвидение развития экономических процессов;
- выработка управленческих решений на всех уровнях хозяйственной иерархии.

При разработке и принятии управленческих решений применяется сложный комплекс экономико-математических моделей, которые решаются при помощи определенных методов моделирования.

В составе экономико-математических методов можно выделить следующие разделы:

- 1) *экономическая кибернетика* (системный анализ экономики, теория экономической информации и теория управляющих систем);
- 2) *математическая статистика* (выборочный метод, дисперсионный анализ, корреляционный анализ, регрессионный анализ, многомерный статистический анализ, факторный анализ, теория индексов и др.);
- 3) *математическая экономия* и изучающая те же вопросы с количественной стороны *эконометрия* (теория экономического роста, теория производственных функций, межотраслевые балансы, национальные счета, анализ спроса и потребления, региональный и пространственный анализ, глобальное моделирование и др.);
- 4) *методы принятия оптимальных решений, в том числе исследование операций в экономике*;
- 5) *методы и дисциплины, специфичные отдельно как для централизованно планируемой экономики, так и для рыночной (конкурентной) экономики* (оптимальное планирование, теория оптимального ценообразования, модели монополии, модели индикативного планирования, модели теории фирмы и т.д.). Многие из методов, разработанных для централизованно планируемой экономики, могут оказаться полезными и при экономико-математическом моделировании в условиях рыночной экономики;
- 6) *методы экспериментального изучения экономических явлений* (математические методы анализа и планирования экономических экспериментов, методы машинной имитации (имитационное моделирование), деловые игры, методы экспертных оценок).

Экономико-математические методы следует понимать как инструмент, а экономико-математические модели – как продукт процесса экономико-математического моделирования.

### **3. Методы, применяемые на этапе диагностики проблем и формулировки критериев и ограничений**

Используется для оценки и выбора наилучшего варианта управленческого решения. Его применение предполагает попарное сравнение вариантов решения проблемы по определенным критериям. При этом используются следующие символы:

- > — если данный вариант лучше (1,5);
- = — если сравниваемые варианты равны (1);
- < — если данный вариант хуже другого (0,5).

Обоснование выбора лучшего варианта управленческого решения по методу расстановки приоритетов производится по следующему алгоритму:

- 1) определение критериев отбора предпочтительного варианта решения;
- 2) сопоставление систем сравнения вариантов по каждому критерию;
- 3) построение матрицы смежности по каждому критерию ( $K$ );
- 4) определение абсолютного приоритета  $P_{\text{абс}}$ ;
- 5) определение относительного (нормированного) приоритета  $P_{\text{л ага}}$ ;
- 6) построение системы сравнений для критериев и т. д. (как и для вариантов);
- 7) вычисление комплексного показателя приоритета варианта  $P_{\text{отн/ком /J}}$

8) выбор наиболее приоритетного варианта по максимальному значению комплексного показателя приоритета варианта ? Р отн/ком

### **Метод дерева решений**

Метод имеет несколько вариаций — дерево решений, дерево целей, эффективно реализуется путем коллективной экспертизы.

Суть метода дерева целей сводится к тому, что группа экспертов дает свою оценку всем направлениям и вариантам решения проблемы, выделяя наиболее приоритетный путь (вариант).

Метод показывает «пробелы», которым не уделили внимания.

Принцип построения:

- 1) четкая иерархия;
- 2) полнота.
- 3) Формирование результатов выполняется в несколько этапов.

**Этап 1.** Формирование группы экспертов с высоким уровнем компетентности. Количество экспертов может быть от 7 до 15 человек. В состав группы, как правило, включаются эксперты, которые непосредственно работают в этой области знаний. При этом уровень их компетентности  $K_{mm}$  оценивается с учетом их осведомленности (коэффициент осведомленности  $K_{осв}$ ) и аргументации их предложений (коэффициент аргументации  $K$ ):

*Осведомленность и аргументированность* определяются следующими характеристиками:

- 1) наличие у экспертов научных трудов в этой области (их теоретическая база, образование);
  - 2) наличие у экспертов опыта работы в данной сфере;
  - 3) источники аргументации (специальная литература, периодическая и патентная литература, всевозможные отчеты, электронные средства передачи информации, в том числе Интернет);
  - 4) участие в симпозиумах, конференциях и совещаниях.
- Совокупность этих оценок характеризует уровень компетентности каждого члена экспертной группы.

Считается, что допустимый уровень компетентности группы экспертов должен быть больше или равен 0,67. В этом случае группа имеет основание приступить к экспертным оценкам. В противном случае необходимо еще раз проанализировать состав группы с целью отстранения от работы менее компетентных экспертов.

**Этап 2.** Оценка относительной значимости, приоритетности, которая производится экспертами на каждом уровне дерева целей.

Для этого используется система балльных оценок — как правило, 5-ти или 10-балльная.

### **Метод функционально-стоимостного анализа (ФСА)**

Метод ФСА применяется не только в технической сфере, но и при решении управленческих задач по формированию организационных структур, организации работы персонала, повышению отдачи функционирования подразделений. Он является универсальным методом выбора решений, позволяющим добиваться оптимизации затрат на исполнение функций объекта без ущерба их качеству.

Основная суть метода сводится к представлению объекта в виде совокупности функций (функциональной модели) и решению вопроса о том, все ли функции действительно необходимы, какие из них можно совместить или убрать без ущерба для качества.

Метод ФСА хорошо себя зарекомендовал в управленческой практике разработки и принятия решений: он обладает высокой практической полезностью в сфере построения организационных структур управления, в том числе при анализе функций исполнителей

(выявление лишних функций, нейтральных, негативных и др.) и выборе оптимального соответствия качества выполнения функций с затратами на их реализацию.

### **Основные этапы проведения ФСА**

#### *Подготовительный:*

- выбор объекта анализа;
- подбор членов исследовательской рабочей группы для решения поставленных задач;
- определение сроков, конкретных результатов, которых должна достигнуть группа, порядка взаимодействия с соответствующими службами.

#### *Информационный:*

- подготовка, сбор, систематизация информации об объекте ФСА и его аналогах;
- изучение потребностей и функций, которые нужно удовлетворить;
- прогнозирование конкурентоспособности объектов;
- изучение объекта и его аналогов;
- изучение условий их эксплуатации;
- изучение технологии создания объекта;
- построение структурно-экономической модели объекта;
- анализ стоимостной информации, определение затрат на изготовление и функционирование объекта и его составных частей, затрат на техническое обслуживание и ремонт объекта;
- дополнение структурно-элементной модели объекта и его составных частей стоимостной информацией;
- выявление зон наибольшего сосредоточения затрат в исследуемом объекте;
- анализ патентной информации в данной области, в том числе отклоненных предложений.

#### *Аналитический:*

- формулирование всех возможных функций объекта и его элементов;
- классификация функций;
- построение функциональной модели объекта;
- оценка значимости функций экспертным методом;
- определение материальных носителей соответствующих функций;
- оценка связанных с осуществлением функций затрат в увязке с соответствующими материальными носителями;
- построение функционально-стоимостной диаграммы, модели объекта с применением принципа иерархичности системного подхода. Модель содержит элементы объекта, шифры элементов, абсолютные и удельные затраты по элементам, а также доли функций, выполняемых этими элементами;
- определение противоречий между значимостью функций и их стоимостной оценкой;
- формулирование задач совершенствования объекта для последующих задач ФСА.

#### *Творческий:*

- выработка предложений по совершенствованию объекта;
- анализ и предварительный отбор предложений для реализации;
- систематизация предложений по функциям;
- формирование вариантов выполнения функций.

#### *Исследовательский:*

разработка эскизного проекта по отобранным вариантам; экспертиза подготовленных решений; отбор наиболее рациональных вариантов решений; создание при необходимости макетов или опытных образцов для проведения испытаний;

- проведение испытаний;
- окончательный выбор реализуемых решений;
- технико-экономическое обоснование решений.

#### *Рекомендательный:*

- рассмотрение представленных технических решений на научно-техническом совете;
- принятие решения о возможности их реализации;
- согласование мероприятий по реализации принятых решений.

*Внедренческий:*

- включение мероприятий по обеспечению внедрения принятых предложений ФСА в соответствующие планы;
- контроль выполнения планов;
- оценка эффективности реализации планов;
- стимулирование работников за внедрение методов ФСА.

### **Метод платежной матрицы**

Это один из методов принятия управленческих решений, который применяется в условиях, когда:

- число альтернативных вариантов разумно ограничено;
- нет полной определенности в отношении того, что может произойти (неопределенность среды).

В данном случае платеж — это денежное вознаграждение за конкретную стратегию (работу) с учетом конкретных обстоятельств.

Если рассматриваемые варианты и платежи представить в виде матрицы, то получится платежная матрица. Менеджер (руководитель) должен объективно оценить вероятность совершения события и рассчитать ожидаемое значение вероятности. Вероятность события варьируется от 0 (когда событие определенно не произойдет) до 1 (когда оно определенно произойдет). Сумма всех вероятностей равна 1. Вероятность может быть определена на основе экспертной оценки руководителя. Она прямо влияет на определение ожидаемого значения альтернативы.

### **Метод цепных подстановок (МЦП)**

Метод используется для разработки и принятия решений в том случае, если проблема имеет строго выраженный функциональный характер. При этом функция должна быть выражена либо в виде произведения, либо в виде частного от деления одних показателей на другие, либо в виде суммы.

Суть метода заключается в последовательной замене плановых величин одного из факторов при условии, что остальные факторы остаются неизменными. Степень влияния на функцию того или иного фактора определяется последовательным вычитанием  $i$ -го расчета из  $(i+1)$ -го. Причем в первом расчете все величины плановые, а в последнем — фактические.

Анализируя влияние факторов на функцию, выявляют, за счет влияния каких факторов и как («+» или «-») произошли отклонения фактического значения функции от планового.

### **Метод сценариев**

Метод сценариев используется в сфере принятия управленческих решений в долгосрочном периоде.

*Сценарий* — описание или картина будущего какого-либо объекта (фирмы), составленные с учетом правдоподобных предпочтений.

Прогнозная оценка чаще всего представляется в виде трех возможных вариантов сценария:

- 1) оптимистического;
- 2) пессимистического;
- 3) ожидаемого, наиболее вероятного.

Сценарии используют для принятия решений в сфере стратегического развития фирм, регионов, технологий, рынков.

Выделяют следующие этапы проведения (составления) сценария:

**1. *Формулирование проблемы:***

- а) производится сбор и анализ информации;
- б) выполняются согласование со всеми участниками проекта решения сути задачи и ее формулирование.

**2. *Определение и группировка сфер влияния:***

- а) выделяются критические точки среды бизнеса;
- б) производится оценка их возможного влияния на будущее фирмы.

**3. *Определение показателей будущего развития объекта.***

Эти показатели не должны быть амбициозными или завышенными. Те сферы деятельности, развитие которых может идти по нескольким вариантам, описываются при помощи нескольких альтернативных показателей.

**4. *Формулирование и отбор согласующихся наборов предположений:***

- а) развитие определяется исходя из сегодняшнего положения и все возможных изменений;
- б) различные альтернативные предположения о будущем комбинируются в наборы;
- в) из всех полученных наборов выбирают, как правило, три с учетом следующих критериев:

- высокая сочетаемость, совместимость предположений, входящих в набор;
- наличие большого числа значимых переменных;
- высокая вероятность событий, относящихся к набору предположений.

**5. *Сопоставление намеченных показателей будущего состояния сфер (фирмы) с предположениями об их развитии:***

- а) сравниваются результаты этапов 3 и 4;
- б) завышенные и заниженные показатели состояния корректируются при помощи данных этапа 4.

Для более точного прогноза необходимо сокращать интервал прогнозирования, то есть делить его на несколько фрагментов, составляя несколько сценариев.

**6. *Введение в анализ разрушительных событий.***

Под разрушительным событием понимаются как негативный, так и позитивный моменты.

**7. *Установление последствий.***

На данном этапе происходит сравнение стратегических проблем фирмы и выбранных вариантов ее развития.

### **1.3 Лекция №3 (2 часа)**

**Тема: Математические методы принятия решений**

#### **1.3.1 Вопросы лекции:**

- 1. Обзор экономико-математических методов.**
- 2. Линейное программирование.**
- 3. Целочисленное программирование.**
- 4. Метод двойственных оценок.**
- 5. Распределительные методы.**
- 6. Динамическое программирование.**
- 7. Сетевое планирование и управление.**
- 8. Теория массового обслуживания.**

#### **1.3.2 Краткое содержание вопросов:**

##### **1. Обзор экономико-математических методов**

методы, как: оптимальное (математическое) программирование, методы ветвей и границ, сетевые методы планирования и управления, программно-целевые методы планирования и управления, теорию и методы управления запасами, теорию массового обслуживания, теорию игр, теорию расписаний.

*Оптимальное (математическое) программирование* – раздел прикладной математики, изучающий задачи условной оптимизации. В экономике такие задачи

возникают при практической реализации принципа оптимальности в планировании и управлении. В оптимальное (математическое) программирование входят:

- а) линейное программирование,
- б) нелинейное программирование,
- в) динамическое программирование,
- г) дискретное (целочисленное) программирование,
- д) дробно-линейное программирование,
- е) параметрическое программирование,
- ж) сепарабельное программирование,
- з) стохастическое программирование,
- и) геометрическое программирование.

Для успешного принятия оптимального решения необходимо знать, что такое математическая модель, уметь отбирать данные для ее построения и представлять, каким образом компьютер находит это решение (т.е. владеть информацией о возможных методах решения различных типов моделей и применяемых при этом алгоритмов).

Математическое моделирование имеет два существенных преимущества: 1) дает быстрый ответ на поставленный вопрос, на что в реальной обстановке могут потребоваться иногда даже годы; 2) предоставляет возможность широкого экспериментирования, осуществить которое на реальном объекте зачастую просто невозможно.

## **2. Линейное программирование**

Большое число экономических задач сводится к линейным математическим моделям. Традиционно оптимизационные линейные математические модели называются моделями линейного программирования. Этот термин появился, когда программирование на компьютере еще не было развито, и соответственно не очень удачному переводу английского «*programming*». Линейное программирование возникло в СССР. В конце 30-х годов XX в. советский экономист-математик Леонид Витальевич Канторович открыл класс этих задач и придумал некоторые частные методы их решения. В 1975 г. фактически за это открытие он был удостоен Нобелевской премии по экономике, что уже свидетельствует о большой важности задач линейного программирования.

С чисто математической точки зрения задачи линейного программирования интересны тем, что здесь неприменимы методы нахождения экстремумов с помощью производной.

Под *линейным программированием* понимается линейное планирование, т.е. получение оптимального плана-решения в задачах с линейной структурой.

*Задачами линейного программирования* называются задачи, в которых линейны как целевая функция, так и ограничения в виде равенств и неравенств и для которых методы математического анализа оказываются непригодными. Линейное программирование представляет собой наиболее часто используемый метод оптимизации.

Методы линейного программирования подразделяются на группы:

- 1) группа симплексных методов (точные);
- 2) группа распределительных методов (точные и приближённые).

Точные – методы перебора вариантов решения задачи в итоге дающие оптимальный вариант. Используются при машинном решении задач.

Приближённые – позволяют получить только один из допустимых вариантов решения задачи. Используются для получения первого варианта в точных распределительных методах или для ручного решения задачи.

Каждая группа методов имеет свою базовую задачу. Для группы симплекс-методов базовой является «Основная задача линейного программирования», для группы распределительных методов – «Транспортная задача».

*Постановка задачи.*

Пусть некоторое предприятие имеет  $m$  видов производственных ресурсов. Порядковый номер ресурсов –  $i$ , т.е.  $i=1, 2, \dots, m$ .

Наличие каждого вида ресурсов известно и обозначается  $b_i$ .

Предположим, что предприятие может производить  $n$  видов продукции. Порядковый номер продукции –  $j$ , т.е.  $j=1, 2, \dots, n$ .

Необходимо определить какое количество единиц продукции каждого вида надо производить ( $x_j$ ), чтобы получить максимум этой продукции в стоимостном выражении, если известны затраты на производство единицы продукции каждого вида ресурса ( $a_{ij}$ ) и цена реализации ( $c_j$ ).

*Развернутая форма записи модели.*

I. Целевая функция – описывает выход продукции в стоимостном выражении:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max.$$

II. Система основных ограничений – описывает с помощью математической зависимости тот факт, что расходы производственных ресурсов не должны превышать их наличие:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2;$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m.$$

III. Условие неотрицательности переменных величин:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

Замечание: в постановке с выбором другого критерия оптимальности целевая функция может стремиться к минимуму. Кроме того система ограничений может быть смешанной, т.е. содержать не только неравенства ( $\leq, \geq$ ), но и равенства.

*Структурная форма записи модели.*

В такой форме модели даются в специализированной литературе. В этой форме записи отражается структура и тип ограничений, структура функции, какие переменные входят в функцию  $Z$  и в ограничения.

$$\text{I. } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max.$$

$$\text{II. } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i=1, 2, \dots, m.$$

$$\text{III. } x_j \geq 0, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

Замечание: одной формулой можно описать ограничения, имеющие одинаковую структуру и тип и включающие в себя одни и те же переменные.

Существуют также векторная, матричная и табличная формы записи модели.

### 3. Целочисленное программирование.

Большая группа экономических задач, решаемых методами линейного программирования, требует целочисленного решения. Например, при определении оптимального выпуска машин, агрегатов, размещения оборудования, если речь идет о фасованной продукции в определенном объеме и пр. переменные характеризуют физически неделимые единицы и поэтому должны принимать только целые значения.

*Целочисленное программирование* – это разновидность линейного программирования, подразумевающая, что искомые значения должны быть целыми числами.

Постановка целочисленной задачи звучит также, как и постановка основной задачи линейного программирования и добавляется только одно условие – целочисленность  $x_j$ .



Пусть некоторое предприятие имеет  $n$  видов производственных ресурсов. Порядковый номер ресурсов –  $i$ , т.е.  $i = 1, 2, \dots, m$ . Наличие каждого вида ресурсов известно и обозначается  $b_i$ . Предположим, что предприятие может производить  $m$  видов продукции. Порядковый номер продукции –  $j$ , т.е.  $j = 1, 2, \dots, n$ . Необходимо определить какое количество единиц продукции каждого вида надо производить ( $x_j$ ), чтобы получить максимум этой продукции в стоимостном выражении, если известно, что затраты на производство единицы продукции каждого вида ресурса равны  $a_{ij}$  единиц, а цена реализации –  $c_j$ . Единицы производимой продукции должны принимать целые значения. Тогда модель задачи будет выглядеть следующим образом:

$$\text{I) } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max.$$

$$\text{II) } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2,$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m.$$

$$\text{III) } x_j \geq 0 \text{ и } x_j - \text{целые, } j = 1, 2, \dots, n.$$

Методы решения задач линейного программирования не гарантируют целочисленности решения.

Иногда задачи целочисленного программирования решают приближенно. Сначала, отбросив условие целочисленности, решают задачу методом линейного программирования, а затем в полученном оптимальном решении округляют переменные до целых чисел. Такой прием можно использовать, если значения переменных достаточно велики и погрешностью округления можно пренебречь. Если значения переменных невелики, то округление может привести к значительному расхождению с оптимальным решением. Поэтому разработаны специальные методы решения целочисленных задач, среди которых можно выделить два направления: методы отсекающих (отсекающих плоскостей) и комбинаторные методы.

Представление о комбинаторных методах дает широко используемый на практике метод ветвей и границ. Мы будем рассматривать метод отсекающих плоскостей, который состоит в построении дополнительных ограничений.

К методу отсекающих плоскостей относится аналитический метод решения полностью целочисленных задач – *метод Гомори*. Основная его идея заключается в том, что задача сначала решается без ограничения целочисленности. Если решение получается целочисленным, то задача решена, если нет, то к задаче присоединяют новое дополнительное ограничение, которое называют сечением. Получают новую задачу, для которой множество допустимых решений будет меньше, чем для исходной задачи, но будет содержать все допустимые целочисленные решения.

Дополнительное ограничение отсекает часть области, содержащую нецелочисленное оптимальное решение.

Вновь полученную задачу решают методом линейного программирования. Процесс построения сечений и решения задачи повторяется до получения целочисленного оптимального решения.

Таким образом, сначала задачу будем решать симплексным методом без учета требования о целочисленности до получения оптимального варианта. Если значение всех  $x_j$  будут целыми, то задача решена. Если же есть хотя бы одно дробное значение, то составляется дополнительное ограничение по целочисленности этой переменной  $x_j$ , которое присоединяется к исходным ограничениям задачи, и вновь находится новый оптимальный вариант. Алгоритм Гомори позволяет прийти к оптимальному целочисленному решению за конечное число шагов.

Предположим, что на каком-то шаге мы получили таблицу с оптимальным вариантом решения задачи (таблица 4.1).

Таблица 4.1 – Оптимальный вариант для исходной задачи без ограничения по целочисленности

	$-x_1$	$-y_1$	$\dots$	$-x_n$	Свободные члены
$x_2$	$a_{11}'$	$a_{12}'$	$\dots$	$a_{1n}'$	$b_1'$
$y_2$	$a_{21}'$	$a_{22}'$	$\dots$	$a_{2n}$	$b_2'$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$y_m$	$a_{m1}'$	$a_{m2}'$	$\dots$	$a_{mn}'$	$b_m'$
$Z$	$c_1'$	$c_2'$	$\dots$	$c_n'$	$Q$

$$b_i \geq 0, c_j \geq 0.$$

Предположим, что в полученном оптимальном варианте среди переменных  $x_j$  есть дробное значение. Составим дополнительное ограничение по целочисленности этой переменной.

Обозначим через  $\beta_{ij}$  целое число, не превосходящие коэффициенты и свободный член в строке, в которой находится переменная  $x_j$  с дробным значением.

Для каждого коэффициента и свободного члена составим разность  $\alpha_{ij} = a_{ij} - \beta_{ij}$  (если само  $a_{ij}$  целое, то  $\beta_{ij} = a_{ij}$  и  $\alpha_{ij} = 0$ ).

Очевидно, что все значения  $\alpha_{ij} \geq 0$ .

Возьмем  $\alpha_{ij}$  в качестве коэффициентов нового дополнительного ограничения:

$$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}y_1 + \dots + \alpha_{in}x_n \geq \alpha_i$$

Запишем это дополнительное ограничение в виде равенства введя дополнительную переменную  $s_i \geq 0$ :

$$s_i = \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \dots + \alpha_{in}x_n - \alpha_i.$$

Далее составляется расширенная симплекс-таблица, т.е. в таблицу с оптимальным вариантом вводится дополнительная строка, в которой записывается дополнительное ограничение (таблица 4.2), после чего вычисления продолжаются.

Таблица 4.2 – Вариант решения для исходной задачи с добавленным ограничением

	$-x_1$	$-y_1$	$\dots$	$-x_n$	Свободные члены
$x_2$	$a_{11}'$	$a_{12}'$	$\dots$	$a_{1n}'$	$b_1'$
$y_2$	$a_{21}'$	$a_{22}'$	$\dots$	$a_{2n}'$	$b_2'$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$y_m$	$a_{m1}'$	$a_{m2}'$	$\dots$	$a_{mn}'$	$b_m'$
$s_i$	$-\alpha_{i1}$	$-\alpha_{i2}$	$\dots$	$-\alpha_{in}$	$-\alpha_i$
$Z$	$c_1'$	$c_2'$	$\dots$	$c_n'$	$Q$

Далее задача решается симплекс-методом с получением допустимого и оптимального варианта. В случае необходимости в таблицу вводятся еще ограничения.

Замечание: при работе с линейными целочисленными задачами оптимизации необходимо иметь ввиду: 1) условие целочисленности распространяется только на основные переменные  $x_j$ , а дополнительные переменные (остаток ресурсов) и целевая функция (выход продукции в стоимостном выражении) не обязательно должны принимать целые значения; 2) условие целочисленности может только «ухудшить» результат решения задачи; 3) существует ряд задач, которые без дополнительных ограничений сразу являются целочисленными или вовсе не могут быть решены с условием целочисленности, но из постановки задачи это сложно увидеть заранее.

Рассмотрим наиболее значимые формулировки целочисленных оптимизационных задач, которые подразумевают обязательное выполнение условия целочисленности переменных величин и применяются с различными модификациями в экономике.

*Задача о ранце.* Общий вес ранца заранее ограничен. Необходимо определить какие предметы положить в ранец, чтобы общая полезность отобранных предметов была максимальна, если вес каждого предмета известен.

Примем, что  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – предметы,  $c_1, c_2, \dots, c_n$  – ценность каждого предмета,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  – масса каждого предмета (или какой-то характерный важный размер). Рюкзак может выдержать общую массу не более  $b$ . Если предмет кладется в рюкзак, то ему присваивается значение, равное единице, если нет, то равное нулю. В итоге получим линейную целочисленную задачу оптимизации:

$$I) \quad Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max.$$

$$II) \quad \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b.$$

$$III) \quad x_j \in \{0, 1\}, j = 1, 2.$$

Есть много эквивалентных формулировок. Например, можно вместо рюкзака рассматривать спутник, а в качестве предметов – научные приборы. Тогда задача интерпретируется как отбор приборов для запуска на орбиту. Правда, при этом предполагается решенной предварительная задача – оценка сравнительной ценности исследований, для которых нужны те или иные приборы. Или роль рюкзака может играть транспортный самолет.

*Задача о выборе оборудования.* Пусть для приобретения оборудования, размещаемого на производственной площади  $38 \text{ м}^2$ , фирма выделяет 20 млн. руб. Имеются единицы оборудования двух типов: типа А стоимостью 5 млн. руб., требующее производственную площадь  $8 \text{ м}^2$  и имеющее производительность 7 тыс. единиц продукции за смену, и типа Б – стоимостью 2 млн. руб., занимающее площадь  $4 \text{ м}^2$ , и дающее за смену 3 тыс. единиц продукции. Требуется рассчитать оптимальный вариант приобретения оборудования, обеспечивающий максимум производительности участка.

Пусть  $x_1$  и  $x_2$  – количество приобретаемых машин типа А и типа Б соответственно, тогда модель задачи будет выглядеть следующим образом:

$$I) \quad Z = 7x_1 + 3x_2 \rightarrow \max.$$

$$II) \quad \begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 &\leq 20, \\ 8x_1 + 4x_2 &\leq 38. \end{aligned}$$

$$III) \quad x_j \geq 0 \text{ и } x_j - \text{целые}, j = 1, 2.$$

Решая задачу в MS Excel без ограничения целочисленности, получим, что  $Z = 29,5$ , при  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 7,5$ .

Если же изначально при добавлении ограничений в соответствующем диалоговом окне в MS Excel дополнительно еще раз выбрать ячейки, соответствующие переменным величинам, и задать их целыми числами, то после активизации поиска решения ответ будет выглядеть так:  $Z = 29$ , при  $x_1 = 2$  и  $x_2 = 5$ . Таким образом, приобретение двух машин типа А и пяти машин типа Б обеспечивает максимум производительности участка, равный 29 тыс. единиц продукции в смену. Заметим, что если бы в качестве плана был выбран вариант, получаемый в результате простого округления первоначального решения (т.е.  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 7$ ), то суммарная производительность оказалась бы равной всего 28 тыс. единиц продукции.

К задачам целочисленного программирования также относятся:

- *задача оптимального раскроя материалов:* на предприятии производится раскрой нескольких различных партий материалов в заданных количествах единиц одинакового размера в каждой партии. Из материалов всех партий требуется изготовить максимальное число комплектов, в каждый из которых входит несколько различных видов деталей в заданном количестве, если известно, что каждую единицу материала можно раскроить на детали определенным количеством различных способов для получения деталей разного вида;

- *задача о назначениях.* С ее помощью можно получить ответ на вопросы типа: как распределить рабочих по станкам, чтобы общая выработка была наибольшей или затраты на заработную плату наименьшими; как наилучшим образом распределить экипажи самолетов; как назначить людей на различные должности и т.д. Математически такие

задачи относятся к транспортным задачам, с той особенностью, что в них объемы наличных и требующихся ресурсов для выполнения каждой работы равны единице ( $a_j = b_i = 1$ ), а все переменные  $x_{ij}$  либо равны единице, если  $i$ -ый работник назначен на  $j$ -ую работу, либо равны нулю в других случаях. Исходные данные задачи о назначениях группируются в таблице, которая называется матрицей оценок, а результаты – в матрице назначений. При решении задачи о назначениях используют алгоритмы и методы решения транспортных задач;

- *задача о коммивояжере*. Она относится к задачам предыдущего вида и может быть сформулирована следующим образом: имеется  $n$  городов, пронумерованных числами от 1 до  $n$ . Коммивояжер, выезжая из города 1, должен побывать в каждом городе ровно один раз и вернуться в исходный пункт при этом известны расстояния  $c_{ij}$  между городами ( $i = 1, n, j = 1, n, i \neq j$ ). Требуется найти самый короткий маршрут. —

К задачам целочисленного программирования приводят также многие оптимальные задачи *теории расписаний*, в которой рассматриваются методы оптимизации оперативно-календарного планирования (например, задача определения оптимальной очередности обработки изделий на различных станках или других рабочих местах и пр.).

#### 4. Метод двойственных оценок

С каждой задачей линейного программирования тесно связана другая линейная задача, называемая *двойственной*. Первоначальная задача называется исходной (или прямой). Связь исходной и двойственной задач заключается, в частности, в том, что решение одной из них может быть получено непосредственно из решения другой.

Напомним, что в основе задачи линейного программирования рассматривается предприятие, имеющее ресурсы  $b_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, m$ . Оно тратит их на изготовление готовой продукции и эту продукцию реализует. При этом ставится цель – получить максимум продукции в стоимостном выражении не перерасходуя ресурсы. Модель задачи выглядит следующим образом:

$$\text{I) } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max.$$

$$\text{II) } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2,$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m.$$

$$\text{III) } x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n.$$

Предположим, что некоторое предприятие решило не тратить ресурсы на изготовление продукции, а продать эти ресурсы. Тогда возникает вопрос: по какой цене продавать ресурсы? Цена должна устраивать как продавца, так и покупателя. Интерес покупающей стороны заключается в том, чтобы заплатить за ресурсы как можно меньше, а интерес продающей стороны – в том, чтобы получить за ресурсы не меньше того, что она получила бы за реализованный готовый товар.

Тогда, в так называемой *двойственной модели*, целевая функция будет описывать интерес покупающей стороны, система ограничений – интерес продающей стороны (необходимо оценить ресурсы, которые пошли бы на изготовление единицы продукции и стоимость этих ресурсов ограничить ценой реализованной единицы продукции). Третье условие (неотрицательность переменных величин) будет выполняться в силу того, что цена единицы ресурса не может быть отрицательной. Введя в качестве цены единицы ресурса величину  $u_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), ее еще называют *оценкой ресурса* (или двойственной оценкой), получим следующую модель:

$$\text{I) } F = b_1u_1 + b_2u_2 + \dots + b_mu_m \rightarrow \min.$$

$$\text{II) } a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{m1}u_m \geq c_1,$$

$$a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{m2}u_m \geq c_2,$$

.....

$$a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \dots + a_{mn}u_m \geq c_n.$$

III)  $u_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$ .

Сопоставим обе задачи:

- первая – задача на максимум ( $z \rightarrow \max$ ), вторая – на минимум ( $F \rightarrow \min$ );

- в первой система ограничений типа  $\leq$ , во второй  $\geq$ ;

- в первой задаче  $n$  неизвестных и  $m$  ограничений, во второй  $m$  неизвестных и  $n$  ограничений;

- коэффициенты в целевых функциях и величины в правых частях неравенств при переходе из одной задачи в другую меняются местами (в первой задаче  $c_j$  – коэффициенты целевой функции, во второй  $c_j$  – свободные члены; в первой задаче  $b_i$  – свободные члены, во второй  $b_i$  – коэффициенты целевой функции);

- матрицы коэффициентов в первой и второй задаче являются транспонированными относительно друг друга (строки и столбцы поменялись местами).

Таким образом, видно, что обе задачи тесно связаны между собой. Они образуют пару задач, называемую в линейном программировании *двойственной парой*. Первую из них обычно называют прямой (или исходной) задачей, а вторую – двойственной задачей (с чисто математической точки зрения за исходную может быть принята любая из задач двойственной пары).

*Алгоритм составления двойственной задачи:*

1) тип экстремума целевой функции меняется;

2) каждому ограничению исходной задачи ставится в соответствие переменная двойственной задачи;

3) свободные члены исходной задачи становятся коэффициентами при переменных в целевой функции двойственной задачи;

4) каждый столбец коэффициентов в системе ограничений формирует ограничение двойственной задачи, при этом тип неравенства меняется; коэффициенты при переменных в целевой функции исходной задачи становятся свободными членами в соответствующих неравенствах двойственной задачи.

Рассмотрим конкретный пример построения двойственной модели:

исходная задача:

I)  $Z = 6x_1 + 4x_2 \rightarrow \max.$

II)  $2x_1 + 4x_2 \leq 8,$

$2x_1 + x_2 \leq 6.$

III)  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

двойственная задача:

I)  $F = 8u_1 + 6u_2 \rightarrow \min.$

II)  $2u_1 + 2u_2 \geq 6,$

$4u_1 + u_2 \geq 4.$

III)  $u_1 \geq 0, u_2 \geq 0.$

Следует отметить, что:

- математические модели пары двойственных задач могут быть симметричными и несимметричными. В несимметричных двойственных задачах система ограничений исходной задачи задается в виде равенств, а двойственной – в виде неравенств, причем в последней переменные могут быть и отрицательными. В симметричных задачах система ограничений как исходной, так и двойственной задачи задается неравенствами, причем на двойственные переменные налагается условие неотрицательности. Чаще рассматриваются симметричные взаимодвойственные задачи;

- каждая из задач двойственной пары формально является самостоятельной задачей линейного программирования и может решаться независимо от другой. Однако, использование симплексного метода решения одной из двойственных задач двойственной пары автоматически приводит к решению другой задачи. Наглядным обоснованием данного положения может служить возможность использования двойственной симплекс-таблицы для отыскания искомых значений целевых функций.

Каждая из задач двойственной пары может решаться отдельно. При этом используется как симплексный метод, так и графический (в случае если задача содержит две переменные). Одновременное решение задач реализуется с использованием, так называемой, двойственной симплекс-таблицы.

Подготовленные для записи в симплекс таблицу модели будут выглядеть следующим образом:

исходная задача (введем  $u_i \geq 0$ ):

- I)  $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max.$   
 II)  $y_1 = -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n + b_1,$   
 $y_2 = -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \dots - a_{2n}x_n + b_2,$   
 $\dots$   
 $y_m = -a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - \dots - a_{mn}x_n + b_m.$   
 III)  $x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n.$

двойственная задача (введем  $v_j \geq 0$ ):

- I)  $F = b_1u_1 + b_2u_2 + \dots + b_mu_m \rightarrow \min.$   
 II)  $v_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{m1}u_m - c_1,$   
 $v_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{m2}u_m - c_2,$   
 $\dots$   
 $v_n = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \dots + a_{mn}u_m - c_n.$   
 III)  $u_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m.$

Обе модели записываются в двойственную симплекс-таблицу следующим образом (таблица 5.1):

Таблица 5.1 – Двойственная симплексная таблица

		$v_1$	$v_2$	$\dots$	$v_n$	$F$
		$-x_1$	$-x_2$	$\dots$	$-x_n$	Свободные члены
$u_1$	$y_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	$\dots$	$a_{1n}$	$b_1$
$u_2$	$y_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	$\dots$	$a_{2n}$	$b_2$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$u_m$	$y_m$	$a_{m1}$	$a_{m2}$	$\dots$	$a_{mn}$	$b_m$
Свободные члены	$Z$	$-c_1$	$-c_2$	$\dots$	$-c_n$	0

Замечания:

- коэффициенты подготовленной двойственной модели располагаются по столбцам, то есть в одной таблице записаны обе двойственные модели. Решая модель прямой задачи симплекс-методом, параллельно решается и модель двойственной задачи. Получив оптимальный вариант для прямой задачи, мы получаем оптимальный вариант и для двойственной;

- прежде чем составлять модель двойственной задачи, необходимо у исходной модели «выровнять» знаки, т.е. если целевая функция стремится к  $\max$ , то все знаки в системе ограничений должны быть  $\leq$ , а если к  $\min$ , то  $\geq$ . Система приводится в соответствие путем домножения обеих частей «неподходящего» неравенства на (-1). Например, чтобы записать модель, двойственную к приведенной модели

I)  $Z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min.$

II)  $-4x_1 - 3x_2 + x_3 \leq -4,$

$5x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6.$

III)  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$

необходимо исходную переписать в виде:

I)  $Z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min.$

II)  $4x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 4,$

$5x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6.$

III)  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$

Тогда двойственная задача будет выглядеть так:

I)  $F = 4u_1 + 6u_2 \rightarrow \max.$

II)  $4u_1 + 5u_2 \leq 4,$

$3u_1 + u_2 \leq 2,$

$$-u_1 + 2u_2 \leq 3.$$

III)  $u_1 \geq 0; u_2 \geq 0$ ;

- в центр двойственной симплекс-таблицы (таблицы 4) всегда ставится задача на max, вне зависимости от того какова целевая функция исходной задачи.

В качестве *основной теоремы двойственности* выделяют следующую формулировку: если одна из взаимно двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая также имеет оптимальное решение, при этом соответствующие им оптимальные значения целевых функций равны (т.е.  $\max z = \min F$ ).

Кроме этого варианта возможны следующие взаимоисключающие случаи:

- в одной из пары двойственных задач допустимое множество не пусто, а целевая функция на этом множестве не ограничена, то у другой задачи из этой пары будет пустое допустимое множество (т.е. если в одной задаче функционал не ограничен, то задача ей двойственная не имеет решения);

- обе из рассматриваемых задач имеют пустые допустимые множества (т.е. обе не имеют решения).

С экономической стороны решение прямой задачи дает оптимальный план выпуска продукции, а решение двойственной задачи – оптимальную систему условных (или *двойственных*) оценок применяемых ресурсов.

Для экономических задач часто представляет интерес то, как повлияет на оптимальное решение изменение запасов сырья и изменение прибыли от единицы продукции. В связи с этим посредством двойственных оценок можно выяснить: увеличение объемов какого вида ресурсов наиболее выгодно; на сколько можно увеличить запас сырья для улучшения полученного оптимального значения целевой функции; каков диапазон изменения того или иного коэффициента целевой функции, при котором не происходит изменение оптимального решения; целесообразность включения в план новых изделий.

Центральный вопрос, который рассматривается в теории двойственности, – это вопрос о ценности ресурса. Но ценности его не рыночной, а исключительно с внутренней точки зрения данного предприятия, с точки зрения эффективного использования этого ресурса в сложившейся структуре производства, определяемой технологической матрицей и удельными прибылями. При этом оценка ценности производится только в процессе использования ресурса в одном цикле производства. Это является элементом условности. Однако из всего этого вытекает основополагающая оценка ценности ресурса – сколько прибыли может принести вовлечение в производство еще одной единицы данного ресурса.

Двойственные оценки отражают сравнительную дефицитность различных видов ресурсов в отношении принятого в задаче показателя эффективности. Двойственные оценки могут служить тонким инструментом анализа и принятия правильных управленческих решений в условиях постоянно изменяющегося производства. Приведем некоторые общие положения, вытекающие из экономического смысла двойственности задач линейного программирования и свойств оценок оптимального плана:

- исчисленные в оптимальных оценках суммарные затраты на производства каждого ингредиента не могут быть меньше, чем оценка данного ингредиента в конечном продукте;

- в оптимальном плане, обеспечивающем максимум выпуска конечного продукта при изменяющихся ресурсах, суммарные затраты ресурсов на единицу конечной продукции минимальны (иначе за счет более экономичного их использования можно было бы увеличить выпуск и тем самым улучшить оптимальный план, что противоречит понятию оптимального плана как наилучшего с точки зрения принятого критерия);

- абсолютные значения оценок можно трактовать как некоторые расчетные «цены» ресурсов и потребностей, выраженные в тех же единицах, что и критерий, а знак «+» или

«—» при этих «ценах» показывает, ведет ли увеличение данного фактора к возрастанию или уменьшению значения критерия;

- использование двойственных оценок целесообразно, когда ограничивающие условия не меняются, но возникает необходимость определить целесообразность применения тех или иных новых технологических способов.

Различные виды ресурсов, входящие в модель оптимального планирования, имеют свое конкретное содержание и специфику. Соответствующие им оценки также специфичны и рассматриваются в отдельности по каждой качественно отличной группе ресурсов.

Таким образом, двойственные оценки являются важнейшим результатом, вытекающим из теории двойственности, которая широко применяется на практике.

## 5. Распределительные методы

Среди проблем, для исследования которых успешно применяется линейное программирование, важное значение имеет так называемая транспортная задача.

Общая постановка этой задачи применительно к экономической проблеме экономии издержек производства формулируется так: имеется несколько пунктов назначения (предприятий, потребителей); требуется перевезти некоторое количество однородного товара из различных пунктов отправления в несколько пунктов назначения; каждый из поставщиков может выделить только определенное количество единиц товара и каждому потребителю требуется также определенное количество единиц этого товара; известны расстояния или стоимости перевозки единицы товара от каждого поставщика к каждому потребителю. Задача состоит в том, чтобы найти такие маршруты перевозок, из всех возможных связей поставщиков и потребителей, при которых общие транспортные расходы были бы минимальными (транспортная задача также может быть сформулирована с целевой функцией, стремящейся к максимуму).

Таким образом, пусть имеем  $m$  пунктов, в которых находится известное количество однородных грузов (поставщики). Порядковый номер поставщика обозначается  $i$ , то есть  $i=1,2,\dots,m$ . Наличие грузов у поставщика  $b_i$ . Имеется  $n$  пунктов испытывающих потребность в этих грузах (потребителей). Порядковый номер потребителя  $j=1,2,\dots,n$ . Потребность в грузах каждого потребителя  $a_j$ . Известна «цена» перевозки единицы груза от каждого поставщика к каждому потребителю ( $c_{ij}$ ). Необходимо составить план перевозки грузов от поставщиков к потребителю, т.е. определить: какое количество груза необходимо перевезти от каждого поставщика к каждому потребителю ( $x_{ij}$ ), причем значения  $x_{ij}$  должны отвечать следующим требованиям:

- 1) общие затраты на перевозку грузов должны быть минимальными;
- 2) все грузы от поставщиков должны быть вывезены;
- 3) потребности потребителей в грузах должны быть удовлетворены.

Требования 2-3 одновременно могут быть выполнены только в том случае, когда сумма грузов у всех поставщиков равна суммарной потребности всех потребителей, то есть:

$$\sum_{i=1}^m b_i = \sum_{j=1}^n a_j \text{ условие разрешимости задачи.}$$

Если условие разрешимости выполняется, то задача будет являться задачей, так называемого закрытого типа (сбалансированной). Иначе — задача открытого типа (несбалансированная). Для того чтобы решить задачу открытого типа, надо её «закрыть» (то есть привести к закрытому типу). Для этого вводится или фиктивный поставщик или фиктивный потребитель.



В случае, когда суммарные запасы превышают суммарные потребности, необходим дополнительный фиктивный пункт потребления, который будет формально потреблять существующий излишек запасов, то есть:

$$a_{\phi} = \sum_{i=1}^m b_i - \sum_{j=1}^n a_j .$$

Если суммарные потребности превышают суммарные запасы, то необходим дополнительный фиктивный пункт отправления, формально восполняющий существующий недостаток продукции в пунктах отправления:

$$b_{\phi} = \sum_{j=1}^n a_j - \sum_{i=1}^m b_i .$$

Введение фиктивного потребителя или отправителя повлечет необходимость формального задания фиктивных тарифов  $c_{ij}^{\phi}$  (реально не существующих) для фиктивных перевозок. Поскольку нас интересует определение наиболее выгодных реальных перевозок, то необходимо предусмотреть, чтобы при решении задачи (при нахождении опорных планов) фиктивные перевозки не рассматривались до тех пор, пока не будут определены все реальные перевозки. Для этого надо фиктивные перевозки сделать невыгодными, чтобы при поиске решения задачи их рассматривали в самую последнюю очередь. Таким образом, если целевая функция стремится к min, то затраты берутся во всех фиктивных клетках таблицы произвольные, одинаковые и на порядок выше настоящих цен, т.е. величина фиктивных тарифов должна превышать максимальный из реальных тарифов, используемых в модели:  $c_{ij}^{\phi} > \max c_{ij} (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$ . Если целевая функция стремится к max, то берётся равная нулю.

*Развёрнутая форма записи модели транспортной задачи.*

Для удобства, прежде чем писать модель, запишем в виде матрицы цен все значения  $c_{ij}$ . А также в виде матрицы грузоперевозок переменные  $x_{ij}$ .

Матрица цен:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \quad c_{ij}^{\phi}$$

Матрица  $C = (c_{ij})_{m \times n}$  называется также матрицей тарифов (издержек или транспортных расходов).

Матрица грузоперевозок:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица  $X = (x_{ij})_{m \times n}$  еще называется планом транспортной задачи.

Модель транспортной задачи будет выглядеть следующим образом.

I. Целевая функция описывает затраты на перевозку грузов:

$$Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \dots + c_{2n}x_{2n} + \dots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \dots + c_{mn}x_{mn} \rightarrow \min.$$

II. Система ограничений описывает второе и третье требования для  $x_{ij}$  из постановки задачи.

1 группа: условие полного вывоза грузов от поставщиков (сумма грузов, вывезенных от поставщика должна быть равна наличию):

$$x_{11}+x_{12}+\dots+x_{1n}=b_1,$$

$$x_{21}+x_{22}+\dots+x_{2n}=b_2,$$

.....

$$x_{m1}+x_{m2}+\dots+x_{mn}=b_m;$$

2 группа: условие удовлетворения потребителя (сумма грузов привезённых потребителю должна быть равна его потребности):

$$x_{11}+x_{21}+\dots+x_{m1}=a_1,$$

$$x_{12}+x_{22}+\dots+x_{m2}=a_2,$$

.....

$$x_{m1}+x_{m2}+\dots+x_{mn}=a_n.$$

III. Условие неотрицательности переменных величин  $x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, \dots, x_{mn} \geq 0$ .

*Структурная форма записи модели транспортной задачи.*

В специализированной литературе модели даются в структурной форме.

I.  $Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min.$

II. 1)  $\sum_{j=1}^n x_{ij} = b_i, i = 1, 2, \dots, m$

2)  $\sum_{i=1}^m x_{ij} = a_j, j = 1, 2, \dots, n$

III.  $x_{ij} \geq 0 (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n).$

*Табличная форма записи модели транспортной задачи.*

Общепринято в таблице информацию по поставщикам располагать по строкам, по потребителю – по столбцам.

Размер таблицы: строк  $m+2$ , столбцов  $n+2$ .

Матрицы транспортных расходов и перевозок совмещают обычно в одну двойную матрицу – *матрицу планирования*.

Если в таблицу записана только исходная информация и нет значений  $x_{ij}$ , то это рабочая таблица или *макет* задачи. Если значения  $x_{ij}$  проставлены, то получаем первый вариант решения задачи. В такой форме задачи решаются.

Таблица 6.1 – Общий вид транспортной матрицы

		потребители				
		1	2	...	$n$	$b_i$
поставщики	1	$c_{11}$ $x_{11}$	$c_{12}$ $x_{12}$	...	$c_{1n}$ $x_{1n}$	$b_1$
	2	$c_{21}$ $x_{21}$	$c_{22}$ $x_{22}$	...	$c_{2n}$ $x_{2n}$	$b_2$
	...	...	...	...	...	...
	$m$	$c_{m1}$ $x_{m1}$	$c_{m2}$ $x_{m2}$	...	$c_{mn}$ $x_{mn}$	$b_m$
	$a_j$	$a_1$	$a_2$	...	$a_n$	$\sum_{j=1}^n a_j = \sum_{i=1}^m b_i$

Кроме основных условий, в транспортных задачах может встретиться ряд дополнительных, ограничивающих количественные связи между отдельными потребителями и поставщиками. Характер этих ограничений и способы решения задачи при наличии дополнительных ограничений заключаются в следующем.

1. Полное отсутствие связи между поставщиком и потребителем, то есть  $x_{ij} = 0$ . Это означает, что в данной клетке матрицы искомый объем перевозок должен быть равен нулю. В этом случае оценка переменной завышается на большую величину, обычно обозначаемую буквой  $M$ , и «попадание» груза в эту клетку нежелательно, так как целевая функция стремится к минимуму (и занижается, если  $Z \rightarrow \max$ ).

2. Наличие частной заранее фиксированной связи между поставщиками и потребителями, то есть  $x_{ij} = q$  (искомый объем перевозок от  $i$ -го поставщика к  $j$ -му потребителю должен быть строго равен  $q$ ). Тогда, до начала решения задачи от величины грузов соответствующего поставщика и потребителя вычитается величина  $q$ , затем в соответствующую клетку пересечения поставщика и потребителя записывается завышенная оценка  $M$  (при  $Z \rightarrow \min$  и заниженная при  $Z \rightarrow \max$ ) и задача решается обычным методом.

3.  $x_{ij} \geq q$ , то есть искомый объем перевозок от  $i$ -го поставщика к  $j$ -му потребителю должен быть не меньше величины  $q$ . В этом случае до начала решения от величины грузов соответствующего поставщика и потребителя вычитается величина  $q$ , затем задача решается обычным путем.

Модель транспортной задачи позволяет решать любые задачи, в которых параметры имеют одинаковые единицы измерения. Такие модели называются *однопродуктовыми*. К ним можно отнести задачу оптимизации использования машинно-тракторного парка в отдельные агротехнические сроки, задачу оптимального размещения посевов сельскохозяйственных культур по участкам с различным плодородием почв и т.д.

Математическая модель транспортной задачи относится к задачам линейного программирования и может быть решена симплексным методом. Однако ввиду исключительной практической важности этой задачи и специфики ограничений (ограничения заданы в виде уравнений; каждая неизвестная входит лишь в два уравнения; коэффициенты при неизвестных – единицы) для ее решения созданы специальные алгоритмы. Самым распространенным методом решения транспортной задачи является метод потенциалов.

Решение транспортной задачи разбивается на два этапа:

1) определение начального допустимого базисного решения (первого опорного плана) – первоначальное распределение поставок. Достигается посредством распределительных методов;

2) построение последовательных итераций (шагов), улучшающих опорные планы (каждый новый план не должен увеличивать суммарные затраты при  $Z \rightarrow \min$  и уменьшать при  $Z \rightarrow \max$ ). Достигается посредством метода потенциалов.

После выполнения первого этапа шаги второго этапа проводятся до тех пор, пока не будет найдено оптимальное распределение поставок.

#### *1-ый этап. Построение первоначального опорного плана*

План составляется последовательным заполнением по одной клетке в таблице так, что каждый раз либо полностью удовлетворяется потребность одного из потребителей, либо полностью вывозится груз от некоторого поставщика. В теории доказывается, что базисное решение системы ограничений (из  $m+n$  уравнений с  $mn$  переменными) в условиях транспортной задачи имеет  $m+n-1$  базисных переменных (ее ранг равен  $m+n-1$ ), поэтому, совершив  $m+n-1$  указанных шагов, получим первый опорный план. Опорные планы получают несколькими методами, называемыми распределительными. Среди них можно выделить: метод северо-западного угла, метод наилучших цен и метод аппроксимации. Последние два метода относятся

также к приближенным распределительным методам и будут рассмотрены в третьей части данного раздела.

*Пример.*

$$\begin{array}{ll} b_1 = 1500 & a_1 = 800 \\ b_2 = 1000 & a_2 = 1200 \\ b_3 = 2000 & a_3 = 1400 \\ & a_4 = 1100 \end{array} \quad C = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 15 & 16 \\ 17 & 15 & 14 & 13 \\ 15 & 14 & 13 & 16 \end{pmatrix}$$

Решить на минимум, заполнив рабочую таблицу методом северо-западного угла.

Таблица 6.2 – Заполнение рабочей таблицы методом северо-западного угла

	1	2	3	4	$b_i$
1	13 800	12 700	15	16	1500
2	17 500	15	14 500	13	1000
3	15	14	13 900	16 1100	2000
$a_j$	800	1200	1400	1100	4500

$$Z_{\min} = 800 \cdot 13 + 700 \cdot 12 + 500 \cdot 15 + 500 \cdot 14 + 900 \cdot 13 + 1100 \cdot 16 = 62600.$$

При этом методе на каждом шаге построения первого опорного плана заполняется верхняя левая клетка («северо-западный угол») оставшейся части таблицы. При таком методе заполнение таблицы начинается с клетки (1,1) и заканчивается в клетке  $(m,n)$ , то есть идет как бы по диагонали таблицы перевозок.

Методы наилучших цен и аппроксимации также можно использовать на данном этапе.

*2-ой этап. Метод потенциалов. Оптимальность базисного решения.*

Полученный одним из распределительных методов опорный план сначала необходимо проверить на вырожденность. Вариант будет невырожденным, если число заполненных клеток  $N$  равно сумме поставщиков и потребителей за вычетом единицы:

$$N = m + n - 1.$$

Если на каком-то этапе решения получится вырожденный план (т.е.  $N < m + n - 1$ ), то его необходимо пополнить, проставив в недостающем числе клеток ноль. Поскольку этим дополнительным клеткам будут отвечать нулевые перевозки, то общий баланс и суммарная стоимость перевозок плана при этом не изменится. Однако проводить пополнение плана, выбирая клетки произвольно, нельзя. Необходимо учитывать условие ацикличности. План называется *ациклическим*, если его базисные клетки (заполненные грузом) не содержат циклов. *Циклом* в транспортной таблице называется несколько клеток, соединенных замкнутой ломаной линией так, что две соседние вершины ломаной расположены либо в одной строке, либо в одном столбце. Ломаная может иметь точки самопересечения, но не в клетках цикла.

Невырожденный вариант необходимо проверить на оптимальность.

*Теорема об оптимальности.* Вариант решения задачи будет оптимальным, если найдется такая система абстрактных чисел, называемых потенциалами поставщиков и потенциалами потребителей, при которой для всех клеток таблицы будет выполняться условие:

$$v_j - u_i \leq c_{ij} \text{ (при } Z \rightarrow \min) \text{ и } v_j - u_i \geq c_{ij} \text{ (при } Z \rightarrow \max),$$

где  $v_j$  – потенциалы потребителей,

$u_i$  – потенциалы поставщиков,

$c_{ij}$  – цена перевозки единицы груза (условные т/км).

Причем,  $v_j - u_i = c_{ij}$  для занятых клеток и  $v_j - u_i \leq c_{ij}$  (или  $v_j - u_i \geq c_{ij}$ ) для свободных клеток.

На основании этой теоремы исследование на оптимальность проводится в 2 этапа:

1) для каждой занятой клетки составляется уравнение  $v_j - u_i = c_{ij}$  в результате чего получается система из  $m+n-1$  таких уравнений. Решается эта система относительно потенциалов. Так как в данной системе число уравнений меньше числа неизвестных (т.е. система имеет бесчисленное множество решений), а нам надо найти одно любое решение, то какому-либо потенциалу можно присвоить произвольное число и относительно него рассчитать остальные значения. Для удобства расчетов чаще всего берут  $u_1=0$ ;

2) для свободных клеток таблицы проверяется условие  $v_j - u_i \leq c_{ij}$  (или  $v_j - u_i \geq c_{ij}$ ). Вариант будет оптимальным, если для всех свободных клеток это условие выполнится.

Для каждой клетки, в которой не выполняется условие  $v_j - u_i \leq c_{ij}$  (или  $v_j - u_i \geq c_{ij}$ ), рассчитывается оценка  $\alpha_{ij} = |(v_j - u_i) - c_{ij}|$ . Клетка, содержащая  $\alpha_{ij}$ , называется «плохой», а полученная оценка используется при перераспределении грузов.

То есть исследование на оптимальность не только отвечает на вопрос, оптимален вариант или нет, но еще и подсказывает, в каком направлении надо его улучшать при необходимости.

#### *Перераспределение грузов и получение нового варианта.*

Смысл перераспределения заключается в том, чтобы в самую «плохую» клетку (т.е. значение  $\alpha_{ij}$  наибольшее) перераспределить какое-то количество груза. Перераспределение грузов должно отвечать следующим требованиям:

- 1) должны выполняться требования системы ограничений модели;
- 2) вариант решения задачи должен остаться ациклическим, т.е. не должна появиться лишняя заполненная клетка;

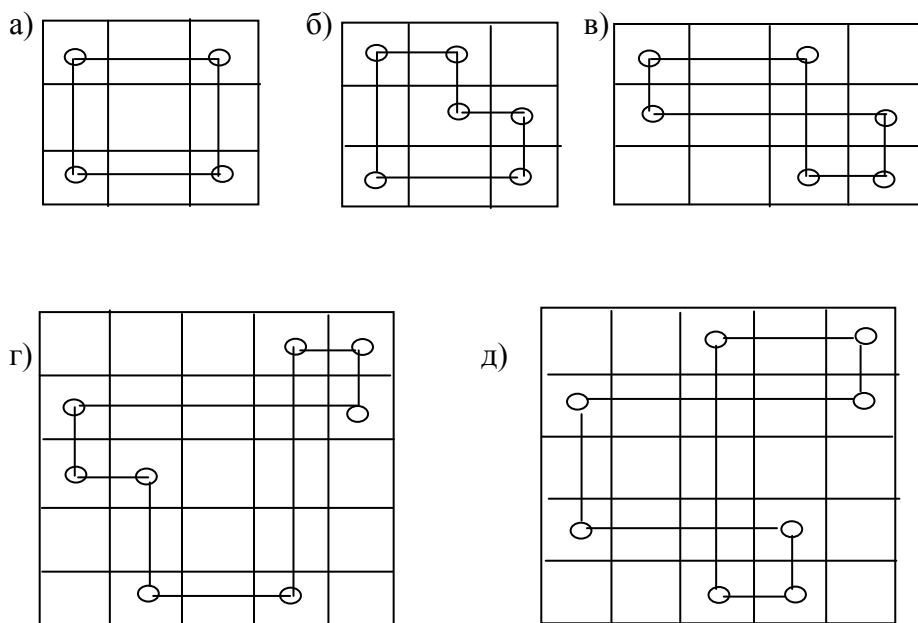
- 3) должно выполняться условие неотрицательности в модели, т.е.  $x_{ij} \geq 0$ .

С учетом данных требований, алгоритм перераспределения будет состоять из двух шагов:

- 1) наметить маршрут перераспределения груза.

Для этого в таблице строится цикл перераспределения объектов перевозок. Цикл представляет собой замкнутую ломаную линию, которая начинается в той свободной клетке, где условие оптимальности нарушается наиболее сильно (т.е. там, где  $\alpha_{ij}$  наибольшая).

Некоторые разновидности циклов.



При построении цикла можно проходить как через занятые, так и через свободные клетки таблицы, но повороты делаются только в занятых клетках и под прямым углом;

- 2) определить порядок изменения объемов перевозок в вершинах цикла.

Для этого в вершинах цикла расставляют знаки «+» и «-», причем в начале цикла (клетка, где  $\alpha_{ij}$  наибольшая) ставится знак «+», в следующей «-», в следующей «+» и т.д. Получаем чередование знаков. Направление движения при расстановке знаков от свободной клетки безразлично, так как количество вершин цикла является четной величиной. Наличие знака «+» в вершине цикла показывает, что объем перевозок необходимо увеличить, а «-» – уменьшить. Увеличение и уменьшение объемов перевозок в вершинах цикла производится на одинаковую величину, которая выбирается равной наименьшему из объемов перевозок в тех клетках, где в вершине цикла стоит знак «-». Таким образом, из отрицательной вершины контура необходимо выбрать наименьшее значение  $x_{ij}$ . В новой рабочей таблице получаем следующий вариант решения задачи: выбранное значение  $x_{ij}$  из отрицательных вершин контура предыдущей таблицы отнимаем, а к положительным – прибавляем. Заполненные клеточки, не являющиеся вершинами контура, не меняют свое значение.

В итоге получаем новый вариант. Следующие шаги поиска оптимального варианта совершаются по аналогии вышеизложенного.

Замечание: алгоритм перераспределения одинаков и при  $Z \rightarrow \min$  и при  $Z \rightarrow \max$ .

К приближенным распределительным методам можно отнести метод наилучших цен и метод аппроксимации. Приближенными они называются вследствие того, что полученное при помощи этих методов распределение груза в таблице не требует дополнительной проверки на оптимальность, так как либо сразу оказывается оптимальным, либо максимально к нему приближено.

#### *Метод наилучших цен*

Метод наилучших цен позволяет получить более выгодный опорный план, чем метод северо-западного угла. При распределении груза на каждом шаге этого метода выбирается клетка с *наилучшей ценой*. Наилучшей считается минимальная цена при  $Z \rightarrow \min$ , и максимальная цена при  $Z \rightarrow \max$ . Если существует несколько клеток с одинаковыми лучшими тарифами, то из них для определенности можно выбрать клетку, находящуюся левее и выше остальных.

*Алгоритм метода наилучших цен:*

- 1) рассматривая рабочую таблицу, найти клетку с наилучшей ценой;
- 2) проставить в эту клетку максимально допустимое значение  $x_{ij}$ ;
- 3) вычеркнуть свободные нерабочие клетки;
- 4) откорректировать клетки  $b_i$  и  $a_j$ .

На этом заканчивается один шаг (итерация) метода.

Из оставшихся свободных рабочих клеток снова выбрать клетку с наилучшей ценой и повторять до тех пор, пока полностью не будет распределен весь груз.

Таблица 6.3 – Заполнение рабочей таблицы методом наилучших цен

	1	2	3	4	$b_i$
1	300      13	1200      12	15      15	16      16	1500
2	17      17	15      15	14      14	13      13	1000
3	500      15	14      14	13      13	16      16	2000
$a_j$	800	1200	1400	1100	4500

$$Z_{\min} = 300 \cdot 13 + 1200 \cdot 12 + 1000 \cdot 13 + 500 \cdot 15 + 1400 \cdot 13 + 100 \cdot 16 = 58600.$$

Замечание. Предлагаемый алгоритм метода можно использовать для решения задач небольшого размера. При решении задач большого размера алгоритм этого метода применяется не для всей рабочей таблицы, а или для каждой строки, или каждого столбца.

#### Метод аппроксимации

Данный метод, также как и предыдущий, использует понятие «наилучшая цена», но в отличие от него позволяет более однозначно сделать выбор между равнозначными клетками при распределении груза.

*Алгоритм метода аппроксимации:*

- 1) в рабочей таблице задачи берем дополнительную строку и столбец «разностей»;
- 2) заполняем эти строку и столбец разностями между двумя наилучшими ценами по каждой строке и каждому столбцу;
- 3) из всех разностей строки и столбца выбрать наибольшую, указать номер итерации;
- 4) в соответствующей строке или столбце выбираем клетку с наилучшей ценой, проставляем в эту клетку максимальное значение  $x_{ij}$ ;
- 5) корректируем свободные члены и вычеркиваем нерабочие свободные клетки;
- 6) из оставшихся неиспользованных разностей снова выбрать наибольшую и так до тех пор, пока или не будут использованы все разности или не будет распределен весь груз.

Если разности будут использованы все, а груз распределен не до конца, то в малых задачах дораспределение груза производится вручную. В больших же задачах приходится дочерчивать строку и столбец "разностей" и заполнять их, но теперь разности берутся между двумя наилучшими ценами, но только по свободным рабочим клеткам.

Таблица 6.4 – Заполнение рабочей таблицы методом аппроксимации

	1	2	3	4	$b_i$	Столбец разностей
1	13 300	12 1200	15	16	1500	1
2	17	15	14	13 1000	1000	1
3	15 500	14	13 1400	16 100	2000	1
$a_j$	800	1200	1400	1100	4500	
Строка разностей	$2_3$	$2_2$	1	$3_1$		

$$Z_{\min} = 300 \cdot 13 + 1200 \cdot 12 + 1000 \cdot 13 + 500 \cdot 15 + 1400 \cdot 13 + 100 \cdot 16 = 58600.$$

Разность  $3_1$  означает, что заполнение таблицы начинать следует с клетки (2,4) (столбец выбран с учетом наибольшей разности, клетка в этом столбце выбрана с наименьшей ценой, так как  $Z \rightarrow \min$ ).

При заполнении таблицы следует помнить, что:

1) если разности использованы все, а грузы распределены не до конца, то если существует единственный вариант, дораспределение происходит вручную. Если же дораспределять грузы можно разными способами, то чертится еще одна строка и столбец разностей и заполняются они разностями между наилучшими ценами только по свободным клеткам. Далее алгоритм действий повторяется;

2) если в строке и столбце окажется несколько одинаковых разностей, то предпочтение надо отдать той, которая будет иметь «оптимальный элемент». «Оптимальный элемент» – это цена, которая является наилучшей, как по строке, так и по столбцу, на пересечении которых она стоит. Исследование на наличие «оптимального элемента» проводить после каждой итерации;

3) если оптимальный элемент имеется у нескольких одинаковых разностей, то предпочтение отдать тому «оптимальному элементу», который будет иметь наибольшую

сумму «разностей» по строке и столбцу, на пересечении которых он стоит. Если и сумма окажется одинаковой, то заполнять можно клетку с любым «оптимальным элементом»;

4) если мы имеем несколько одинаковых разностей и ни одна из них не имеет «оптимального элемента», то тогда в соответствующих строках и столбцах исчисляются новые разности, но между 1-ой и 3-ей наилучшими ценами.

Замечание. В качестве недостатка этого метода можно отметить необходимость в знании всех его особенностей, а также некоторую громоздкость таблиц.

## **6. Динамическое программирование**

В задачах линейного и нелинейного программирования, рассмотренных в предыдущих главах, экономический процесс считался статическим, т.е. не зависящим от времени, поэтому оптимальное решение находилось только на один этап планирования. Такие задачи получили название *одноэтапных* или *одношаговых*.

В задачах динамического программирования экономический процесс зависит от времени (от нескольких периодов (этапов) времени), поэтому находится ряд оптимальных решений (последовательно для каждого этапа), обеспечивающих оптимальное развитие всего процесса в целом. Задачи динамического программирования называются *многоэтапными* или *многошаговыми*.

**Динамическое программирование** представляет собой математический аппарат (разработанный для решения некоторого класса задач математического программирования путем их разложения на относительно небольшие и, следовательно, менее сложные задачи), позволяющий осуществлять оптимальное планирование многошаговых управляемых процессов и процессов, зависящих от времени.

Экономический процесс называется *управляемым*, если можно влиять на ход его развития. *Управлением* называется совокупность решений, принимаемых на каждом этапе для влияния на ход процесса. В экономических процессах управление заключается в распределении и перераспределении средств на каждом этапе. Например, выпуск продукции любым предприятием – управляемый процесс, так как он определяется изменением состава оборудования, объемом поставок сырья, величиной финансирования и т.д. Совокупность решений, принимаемых в начале каждого года планируемого периода по обеспечению предприятия сырьем, замене оборудования, размерам финансирования и т.д., является управлением.

С одной стороны, для получения максимального объема выпускаемой продукции проще всего вложить максимально возможное количество средств и использовать на полную мощность оборудование. Но, с другой – это привело бы к быстрому изнашиванию оборудования и, как следствие, к уменьшению выпуска продукции. Следовательно, выпуск продукции надо спланировать так, чтобы избежать нежелательных эффектов. Необходимо предусмотреть мероприятия, обеспечивающие пополнение оборудования по мере изнашивания, т.е. по периодам времени. Последнее хотя и приводит к уменьшению первоначального объема выпускаемой продукции, но обеспечивает в дальнейшем возможность расширения производства.

Таким образом, экономический процесс выпуска продукции можно считать состоящим из нескольких *этапов (шагов)*, на каждом из которых осуществляется влияние на его развитие.

Началом этапа (шага) управляемого процесса считается момент принятия решения (о величине капитальных вложений, о замене оборудования определенного вида и т.д.). Под этапом обычно понимают хозяйственный год.

Планируя многоэтапный процесс, исходят из интересов всего процесса в целом, т.е. при принятии решения на отдельном этапе всегда необходимо иметь в виду *конечную цель*.



Для большинства задач динамического программирования классические методы анализа или вариационного исчисления оказываются неэффективными, поскольку приводят первоначально поставленную задачу отыскания максимального значения функции к задаче, которая не проще, а сложнее исходной.

Динамическое программирование, используя *поэтапное планирование*, позволяет не только упростить решение задач, но и решить те из них, к которым нельзя применить методы математического анализа. Упрощение решения достигается за счет значительного уменьшения количества исследуемых вариантов, так как вместо того, чтобы один раз решать сложную многовариантную задачу, метод поэтапного планирования предполагает многократное решение относительно простых задач.

Однако динамическое программирование имеет и свои *недостатки*. В отличие от линейного программирования, в котором симплексный метод является универсальным, в динамическом программировании такого метода не существует. Каждая задача имеет свои трудности, и в каждом случае необходимо найти наиболее подходящую методику решения. Недостаток динамического программирования заключается также в трудоемкости решения многомерных задач.

Пусть некоторая физическая управляемая система  $S$  находится в первоначальном состоянии  $S_0 \in \tilde{S}_0$  (где  $\tilde{S}_0$  – область начальных состояний). С течением времени ее состояние меняется и система приходит в конечное состояние  $S_k \in \tilde{S}_k$  (где  $\tilde{S}_k$  – область конечных состояний). С процессом изменения состояния системы связан некоторый численный критерий  $W$ . Необходимо так организовать процесс, чтобы критерий достиг оптимального значения.

Обозначим множество возможных управлений через  $U$ . Тогда задача состоит в том, чтобы из множества возможных управлений  $U$  найти такое управление  $U^*$ , которое позволит перевести систему  $S$  из начального состояния  $S_0 \in \tilde{S}_0$  в конечное  $S_k \in \tilde{S}_k$  так, что критерий  $W(U)$  принимает оптимальное значение  $W^*$ .

Некоторые операции естественно распадаются на этапы, в других это деление приходится вводить искусственно. Примером «естественно многоэтапной» операции может служить планирование работы предприятия на некоторый период времени, состоящий из нескольких хозяйственных лет или кварталов.

Принцип динамического программирования предполагает, что управление на каждом шаге должно выбираться с учетом всех его последствий в будущем. Однако из этого правила есть исключение. Среди всех шагов существует один, который может планироваться «без оглядки на будущее» – это *последний шаг*. Спланировав оптимальным образом этот *последний шаг*, можно к нему «пристраивать» предпоследний, затем предыдущий и т. д.

Поэтому процесс динамического программирования разворачивается от конца к началу. Сначала делаются различные предположения о том, чем кончился предпоследний шаг, и для каждого из них выбирается управление на последнем. Затем делаются различные предположения о том, чем кончился предпредпоследний шаг, т.е. рассматриваются различные состояния системы на третьем от конца шаге и выбирается управление на втором от конца шаге так, чтобы оно вместе с уже выбранным управлением на последнем шаге обеспечивало наилучший эффект на двух последних шагах, и так далее, вплоть до первого от начала шага, с которого начинался процесс.

В начале процесса состояние системы нам известно, и делать какие-то предположения не нужно. Поэтому, имея в виду, что все последующие шаги спланированы для различных состояний системы, остается выбрать управление на первом шаге так, чтобы оно было оптимальным с учетом всех управлений, уже принятых наилучшим образом на всех последующих шагах.

Принцип, положенный в основу построения такого решения (искать всегда оптимальное продолжение процесса относительно того состояния, которое достигнуто в данный момент), принято называть *принципом оптимальности*.

Состояние физической системы  $S$  можно описать числовыми параметрами, например расходом горючего и скоростью, количеством вложенных средств и т. д. Назовем эти параметры *координатами системы*; тогда состояние системы можно изобразить точкой  $S$ , а переход из одного состояния  $S_1$  в другое  $S_2$  – траекторией точки  $S$ . Управление  $U$  означает выбор определенной траектории перемещения точки  $S$  из  $S_1$  в  $S_2$ , т.е. установление определенного закона движения точки  $S$ . Совокупность состояний, в которые может переходить система называется *областью возможных состояний*. В зависимости от числа параметров, характеризующих состояние системы, область возможных состояний системы может быть различной.

Пусть, например, состояние системы  $S$  характеризуется одним параметром, – координатой  $x$ . Следовательно, областью возможных состояний системы является совокупность значений  $x$ , а управлением – закон движения точки  $S$  из начального состояния  $S_0 \in \tilde{S}_0$  в конечное  $S_k \in \tilde{S}_k$  по оси  $Ox$  или ее части (рис. 1).



Рисунок 1 – Состояние системы  $S$ , характеризуемое одним параметром (координатой  $x$ )

Если состояние системы  $S$  характеризуется двумя параметрами ( $x_1$  и  $x_2$ ), то областью возможных состояний системы служит плоскость  $x_1Ox_2$  или ее часть, а управление изобразится линией на плоскости, по которой точка  $S$  перемещается из  $S_0 \in \tilde{S}_0$  в  $S_k \in \tilde{S}_k$  (рис. 2).

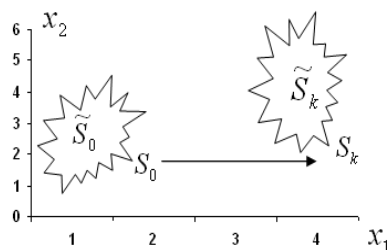


Рисунок 2 – Состояние системы  $S$ , характеризуемое двумя параметрами ( $x_1$  и  $x_2$ )

В общем случае, когда состояние системы описывается  $n$  параметрами  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), областью возможных состояний служит  $n$ -мерное пространство, а управление изображается перемещением точки  $S$  из какой-то начальной области  $\tilde{S}_0$  в конечную  $\tilde{S}_k$  по некоторой «траектории» этого пространства.

Таким образом, задаче динамического программирования можно дать следующую **геометрическую интерпретацию**. Из всех траекторий, принадлежащих области возможных состояний системы и соединяющих области  $\tilde{S}_0$  и  $\tilde{S}_k$ , необходимо выбрать такую, на которой критерий  $W$  принимает оптимальное значение.

## 7. Сетевое планирование и управление

**Сетевое планирование и управление** – это комплекс графических и расчетных методов, организационных мероприятий, обеспечивающих моделирование, анализ и динамическую перестройку плана выполнения сложных проектов и разработок, например, таких как: строительство и реконструкция каких-либо объектов; выполнение научно-исследовательских и конструкторских работ; подготовка производства к выпуску продукции; перевооружение армии и другие.

*Основная цель сетевого планирования* – сокращение до минимума продолжительности проекта.

*Задача сетевого планирования* состоит в том, чтобы графически, наглядно и системно отобразить и оптимизировать последовательность и взаимозависимость работ, действий или мероприятий, обеспечивающих своевременное и планомерное достижение конечных целей.

*Характерной особенностью* таких проектов является то, что они состоят из ряда отдельных, элементарных *работ*. Они обуславливают друг друга так, что выполнение некоторых работ не может быть начато раньше, чем завершены некоторые другие. Например, укладка фундамента не может быть начата раньше, чем будут доставлены необходимые материалы; эти материалы не могут быть доставлены раньше, чем будут построены подъездные пути; любой этап строительства не может быть начат без составления соответствующей технической документации и т.д.

*Сетевое планирование и управление* включает *три* основных этапа:

- 1) структурное планирование;
- 2) календарное планирование;
- 3) оперативное управление.

*Структурное планирование* начинается с разбиения проекта на четко определенные операции, для которых определяется продолжительность. Затем строится сетевой график, который представляет взаимосвязи работ проекта. Это позволяет детально анализировать все работы и вносить улучшения в структуру проекта еще до начала его реализации.

*Календарное планирование* предусматривает построение календарного графика, определяющего моменты начала и окончания каждой работы и другие временные характеристики сетевого графика. Это позволяет, в частности, выявлять критические операции, которым необходимо уделять особое внимание, чтобы закончить проект в директивный срок. Во время календарного планирования определяются временные характеристики всех работ с целью проведения в дальнейшем *оптимизации* сетевой модели, которая позволит улучшить эффективность использования какого-либо ресурса.

В ходе *оперативного управления* используются сетевой и календарный графики для составления периодических отчетов о ходе выполнения проекта. При этом сетевая модель может подвергаться оперативной корректировке, вследствие чего будет разрабатываться новый календарный план остальной части проекта.

**Сетевой моделью** называется экономико-компьютерная модель, отражающая комплекс работ (операций) и событий, связанных с реализацией некоторого проекта (научно-исследовательского, производственного и др.), в их логической и технологической последовательности и связи.

Анализ сетевой модели, представленной в графической или табличной (матричной) форме, позволяет:

- 1) более четко выявить взаимосвязи этапов реализации проекта;
- 2) определить наиболее оптимальный порядок выполнения этих этапов в целях, например, сокращения сроков выполнения всего комплекса работ.

Основными понятиями сетевых моделей являются понятия «*событие*» и «*работа*».

**Работа** – это некоторый процесс, приводящий к достижению определенного результата, требующий затрат каких-либо ресурсов и имеющий протяженность во времени. По своей физической природе работы можно рассматривать как:

- *действие*: разработка чертежа, изготовление детали, заливка фундамента бетоном, изучение конъюнктуры рынка;
- *процесс*: старение отливок, выдерживание вина;
- *ожидание*: ожидание поставки комплектующих.

По количеству затрачиваемого времени работа может быть:

- *действительной*, т.е. требующей затрат времени;

- *фиктивной*, т.е. формально не требующей затрат времени и представляющей связь между какими-либо работами, например: передача измененных чертежей от конструкторов к технологам; сдача отчета о технико-экономических показателях работы цеха вышестоящему подразделению.

**Событие** – это момент времени, когда завершаются одни работы и начинаются другие. Например, фундамент залит бетоном, комплектующие поставлены, отчеты сданы и т.д. Событие представляет собой результат проведенных работ и, в отличие от работ, не имеет протяженности во времени.

На этапе структурного планирования взаимосвязь работ и событий, необходимых для достижения конечной цели проекта, изображается с помощью *сетевого графика* (сетевой модели). На сетевом графике работы изображаются *стрелками*, которые соединяют *вершины*, изображающие события. Начало и окончание любой работы описываются парой событий, которые называются *начальным* и *конечным* событиями. Поэтому для идентификации конкретной работы используют код работы  $(i, j)$ , состоящий из номеров начального ( $i$ -го) и конечного ( $j$ -го) событий (рисунок 1).

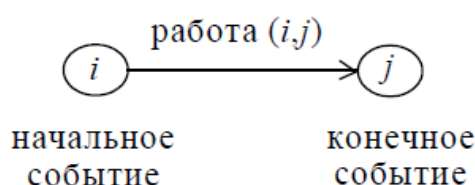


Рисунок 1– Кодирование работы

Любое событие может считаться наступившим только тогда, когда закончатся *все* входящие в него работы. Поэтому, работы, выходящие из некоторого события не могут начаться, пока не будут завершены *все* работы, входящие в это событие.

Событие, не имеющее предшествующих ему событий, т.е. с которого начинается проект, называют **исходным**. Событие, которое не имеет последующих событий и отражает конечную цель проекта, называется **завершающим**.

При построении сетевого графика необходимо следовать следующим правилам:

- 1) длина стрелки не зависит от времени выполнения работы;
- 2) стрелка может не быть прямолинейным отрезком;
- 3) для действительных работ используются сплошные, а для фиктивных – пунктирные стрелки;
- 4) каждая операция должна быть представлена только одной стрелкой;
- 5) между одними и теми же событиями не должно быть параллельных работ, т.е. работ с одинаковыми кодами;
- 6) следует избегать пересечения стрелок;
- 7) не должно быть стрелок, направленных справа налево;
- 8) номер начального события должен быть меньше номера конечного события;
- 9) не должно быть *висячих* событий (т.е. не имеющих предшествующих событий), кроме исходного;
- 10) не должно быть *тупиковых* событий (т.е. не имеющих последующих событий), кроме завершающего;
- 11) не должно быть циклов.

Важное значение для анализа сетевых моделей имеет понятие пути.

**Путь** – это любая последовательность работ в сетевом графике (в частном случае это одна работа), в которой конечное событие одной работы совпадает с начальным событием следующей за ней работы. Различают следующие виды путей.

**Полный путь** – это путь от исходного события до завершающего.

**Критический путь** – максимальный по продолжительности полный путь. Работы, лежащие на критическом пути, называют *критическими*.

**Подкритический путь** – полный путь, ближайший по длительности к критическому пути.

Построение сети является лишь первым шагом на пути к построению календарного плана. Вторым шагом является расчет сетевой модели, который выполняют прямо на сетевом графике, пользуясь простыми правилами.

К *временным параметрам событий* относятся:

-  $T_p(i)$  – ранний срок наступления события  $i$ . Это время, которое необходимо для выполнения всех работ, предшествующих данному событию  $i$ . Оно равно наибольшей из продолжительности путей, предшествующих данному событию.

-  $T_n(i)$  – поздний срок наступления события  $i$ . Это такое время наступления события  $i$ , превышение которого вызовет аналогичную задержку наступления завершающего события сети. Поздний срок наступления любого события  $i$  равен разности между продолжительностью критического пути и наибольшей из продолжительностей путей, следующих за событием  $i$ .

-  $R(i)$  – резерв времени наступления события  $i$ . Это такой промежуток времени, на который может быть отсрочено наступление события  $i$  без нарушения сроков завершения проекта в целом. Начальные и конечные события критических работ имеют нулевые резервы событий.

Рассчитанные численные значения временных параметров записываются прямо в вершины сетевого графика (рисунок 2).

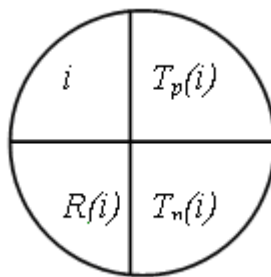


Рисунок 2 – Отображение временных параметров событий в вершинах сетевого графика

Расчет *ранних* сроков свершения событий  $T_p(i)$  ведется *от исходного (И) к завершающему (З) событию*.

*Замечание.* Поскольку длительность работы может быть как нормальной  $T_n$ , так и ускоренной  $T_y$ , то для общности изложения будем в дальнейшем обозначать текущую длительность работы буквой  $t$  с соответствующим кодом работы, например,  $t(i, j)$ ,  $t(k, j)$  и т.д.

1. Для исходного события  $И$ :  $T_p(И) = 0$ .
2. Для всех остальных событий  $i$ :  $T_p(i) = \max[T_p(k) + t(k, i)]$ , где максимум берется по всем работам  $(k, j)$ , входящим в событие  $i$ .

Иными словами, **ранний срок наступления событий** – это максимальная суммарная длина пути от исходного события до данного события.

**Поздние сроки свершения событий**  $T_n(i)$  рассчитываются *от завершающего к исходному* событию.

- 3) Для завершающего события  $З$ :  $T_n(З) = T_p(З)$ .
- 4) Для всех остальных событий:  $T_n(i) = \min[T_n(j) - t(i, j)]$ , где минимум берется по всем работам  $(i, j)$ , выходящим из события  $i$ .
- 5)  $R(i) = T_n(i) - T_p(i)$  – резерв времени наступления событий.

Иными словами, поздний срок наступления событий есть разность между продолжительностью критического пути и максимальной продолжительностью работ, лежащих на пути от данного события до завершающего

К наиболее важным временным **параметрам работ** относятся:

- $T_{pn}(i, j)$  – ранний срок начала работы;

- $T_{nn}(i, j)$  – поздний срок начала работы;
- $T_{po}(i, j)$  – ранний срок окончания работы;
- $T_{no}(i, j)$  – поздний срок окончания работы;

Для критических работ  $T_{pn}(i, j) = T_{nn}(i, j)$  и  $T_{po}(i, j) = T_{no}(i, j)$ .

-  $R_n(i, j)$  – полный резерв работы показывает максимальное время, на которое может быть увеличена продолжительность работы  $(i, j)$  или отсрочено ее начало, чтобы продолжительность проходящего через нее максимального пути не превысила продолжительности критического пути. Важнейшее свойство полного резерва работы  $(i, j)$  заключается в том, что его частичное или полное использование уменьшает полный резерв у работ, лежащих с работой  $(i, j)$  на одном пути. Таким образом, полный резерв принадлежит не одной данной работе  $(i, j)$ , а всем работам, лежащим на путях, проходящим через эту работу.

-  $R_c(i, j)$  – свободный резерв работы показывает максимальное время, на которое можно увеличить продолжительность работы  $(i, j)$  или отсрочить ее начало, не меняя ранних сроков начала последующих работ. Использование свободного резерва одной из работ не меняет величины свободных резервов остальных работ сети.

Временные параметры работ сети определяются на основе ранних и поздних сроков событий:

- 1)  $T_{pn}(i, j) = T_p(i)$ ;
- 2)  $T_{po}(i, j) = T_p(i) + t(i, j)$  или  $T_{po}(i, j) = T_{pn}(i, j) + t(i, j)$ ;
- 3)  $T_{no}(i, j) = T_n(j)$ ;
- 4)  $T_{nn}(i, j) = T_n(j) - t(i, j)$  или  $T_{nn}(i, j) = T_{no}(i, j) - t(i, j)$ ;
- 5)  $R_n(i, j) = T_n(j) - T_p(i) - t(i, j)$ ;
- 6)  $R_c(i, j) = T_p(j) - T_p(i) - t(i, j)$ .

Временные параметры работ вносятся в таблицу. При этом коды работ записывают в определенном порядке: сначала записываются все работы, выходящие из исходного, т.е. первого, события, затем – выходящие из второго события, потом – из третьего и т.д.

Резервами времени, кроме работ и событий, обладают полные пути сетевой модели. Разность между продолжительностью критического пути  $T(L_{кр})$  и продолжительностью любого другого полного пути  $T(L_n)$  называется полным резервом времени пути  $L_n$ , т.е.  $R(L_i) = T(L_{к\delta}) - T(L_i)$ . Этот резерв показывает, на сколько в сумме может быть увеличена продолжительность всех работ данного пути  $L$ , чтобы при этом не изменился общий срок окончания всех работ.

#### *Методика оптимизации загрузки сетевых моделей по критерию «Минимум исполнителей»*

При оптимизации использования ресурса рабочей силы чаще всего сетевые работы стремятся организовать таким образом, чтобы:

- количество одновременно занятых исполнителей было минимальным;
- выровнять потребность в людских ресурсах на протяжении срока выполнения проекта.

Суть оптимизации загрузки сетевых моделей по критерию «минимум исполнителей» заключается в следующем: необходимо таким образом организовать выполнения сетевых работ, чтобы количество одновременно работающих исполнителей было минимальным. Для проведения подобных видов оптимизации необходимо построить и проанализировать *график привязки* и *график загрузки*.

*График привязки* отображает взаимосвязь выполняемых работ во времени и строится на основе данных либо о продолжительности работ (в данной лабораторной это

$T_n$ ), либо о ранних сроках начала и окончания работ. При первом способе построения необходимо помнить, что выполнение работы  $(i, j)$  может начаться только после того, как будут выполнены все предшествующие ей работы  $(k, j)$ .

По вертикальной оси графика привязки откладываются коды работ, по горизонтальной оси – длительность работ (раннее начало и раннее окончание работ).

На графике загрузки по горизонтальной оси откладывается время, например в днях, по вертикальной – количество человек, занятых работой в каждый конкретный день.

Для построения графика загрузки необходимо:

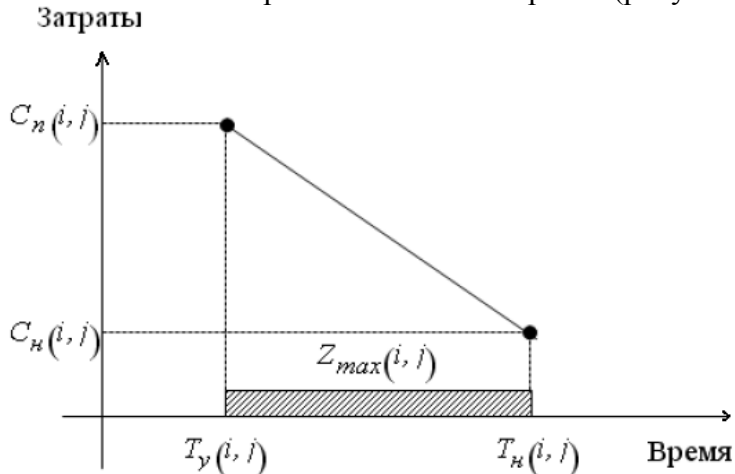
- на графике привязки над каждой работой написать количество ее исполнителей;
- подсчитать количество работающих в каждый день исполнителей и отложить на графике загрузки.

Для удобства построения и анализа графики загрузки и привязки следует располагать один над другим.

Описанные виды оптимизации загрузки выполняются за счет сдвига во времени не критических работ, т.е. работ, имеющих полный и/или свободный резервы времени. Полный и свободный резервы любой работы можно определить без специальных расчетов, анализируя только график привязки. Сдвиг работы означает, что она будет выполняться уже в другие дни (т.е. изменится время ее начала и окончания), что в свою очередь приведет к изменению количества исполнителей, работающих одновременно (т.е. уровня ежедневной загрузки сети).

*Методика оптимизации сетевых моделей по критерию «Время-затраты»*

Целью оптимизации по критерию «Время-затраты» является сокращение времени выполнения проекта в целом. Эта оптимизация имеет смысл только в том случае, когда время выполнения работ может быть уменьшено за счет подключения дополнительных ресурсов, что приводит к повышению затрат на выполнение работ (рисунок 3).



где  $T_y(i, j)$  – ускоренное время выполнения события,

$T_n(i, j)$  – нормальное время выполнения события.

Рисунок 3 – Зависимость прямых затрат на работу от времени ее выполнения

Для оценки величины дополнительных затрат, связанных с ускорением выполнения той или иной работы, используются либо нормативы, либо данные о выполнении аналогичных работ в прошлом. Под параметрами работ  $C_n(i, j)$  и  $C_n(i, j)$  понимаются так называемые *прямые* затраты, непосредственно связанные с выполнением конкретной работы.

$C_n(i, j)$  – прямые затраты при нормальном течении событий;

$C_n(i, j)$  – прямые затраты при сокращении времени совершения событий до уровня подкритического.

Таким образом, *косвенные* затраты типа административно-управленческих в процессе сокращения длительности проекта во внимание не принимаются, однако их влияние учитывается при выборе окончательного календарного плана проекта.

Важными параметрами работы  $(i, j)$  при проведении данного вида оптимизации являются:

- коэффициент нарастания затрат

$$k(i, j) = \frac{C_n(i, j) - C_n(i, j)}{T_n(i, j) - T_y(i, j)},$$

который показывает затраты денежных средств, необходимые для сокращения длительности работы  $(i, j)$  на один день;

- *запас времени* для сокращения длительности работы в текущий момент времени:

$$Z_T(i, j) = t_T(i, j) - T_y(i, j),$$

где  $t_T(i, j)$  – длительность работы  $(i, j)$  на текущий момент времени.

Максимально возможное значение запаса времени работы равно:

$$Z_{\max}(i, j) = T_n(i, j) - T_y(i, j).$$

Эта ситуация имеет место, когда длительность работы  $(i, j)$  еще ни разу не сокращали, т.е.  $t_T(i, j) = T_n(i, j)$ .

*Общая схема проведения оптимизации «Время – затраты»*

1. Исходя из нормальных длительностей работ  $T_n(i, j)$ , определяются критические  $L_{кр}$  и подкритические  $L_n$  пути сетевой модели и их длительности  $T_{кр}$  и  $T_n$ .

2. Определяется сумма прямых затрат на выполнение всего проекта  $C_{np}^0$  при нормальной продолжительности работ.

3. Рассматривается возможность сокращения продолжительности проекта, для чего анализируются параметры критических работ проекта.

3.1. Для сокращения выбирается критическая работа с  $\min$  коэффициентом нарастания затрат  $k(i, j)$ , имеющая ненулевой запас времени сокращения  $Z_T(i, j)$ .

3.2. Время  $\Delta t(i, j)$ , на которое необходимо сжать длительность работы  $(i, j)$ , определяется как

$$\Delta t(i, j) = \min[Z_T(i, j), \Delta T],$$

где  $\Delta T = T_{кр} - T_n$  – разность между длительностью критического и подкритического путей в сетевой модели.

Необходимость учета параметра  $\Delta T$  вызвана нецелесообразностью сокращения критического пути более чем на  $\Delta T$  единиц времени. В этом случае критический путь перестанет быть таковым, а подкритический путь наоборот станет критическим, т.е. длительность проекта в целом принципиально не может быть сокращена больше, чем на  $\Delta T$ .

4. В результате сжатия критической работы временные параметры сетевой модели изменяются, что может привести к появлению других критических и подкритических



путей. Вследствие удорожания ускоренной работы общая стоимость проекта увеличивается на величину:

$$\Delta C_{np} = k(i, j) \Delta t(i, j).$$

5. Для измененной сетевой модели определяются новые критические и подкритические пути и их длительности, после чего необходимо продолжить оптимизацию с шага 3. При наличии ограничения в денежных средствах, их исчерпание является причиной окончания оптимизации. Если не учитывать подобное ограничение, то оптимизацию можно продолжать до тех пор, пока у работ, которые могли бы быть выбраны для сокращения, не будет исчерпан запас времени сокращения.

## 8. Теория массового обслуживания

Многие экономические задачи связаны с **системами массового обслуживания (СМО)**, т.е. такими системами, в которых, с одной стороны, возникают массовые запросы (требования) на выполнение каких-либо услуг, с другой – происходит удовлетворение этих запросов.

С позиции моделирования процесса массового обслуживания ситуации, когда образуются очереди заявок (требований) на обслуживание, возникают следующим образом. Поступив в обслуживающую систему, требование присоединяется к очереди других (ранее поступивших) требований. Канал обслуживания выбирает требование из находящихся в очереди, с тем, чтобы приступить к его обслуживанию. После завершения процедуры обслуживания очередного требования канал обслуживания приступает к обслуживанию следующего требования, если таковое имеется в блоке ожидания.

Цикл функционирования системы массового обслуживания подобного рода повторяется многократно в течение всего периода работы обслуживающей системы. При этом предполагается, что переход системы на обслуживание очередного требования после завершения обслуживания предыдущего требования происходит мгновенно, в случайные моменты времени.

Методами теории массового обслуживания могут быть решены многие задачи исследования процессов, происходящих в экономике. Так, в организации торговли эти методы позволяют определить оптимальное количество торговых точек данного профиля, численность продавцов, частоту завоза товаров и другие параметры.

Примерами *систем массового обслуживания* могут служить:

- 1) магазины;
- 2) банки;
- 3) ремонтные мастерские;
- 4) почтовые отделения;
- 5) посты технического обслуживания автомобилей, посты ремонта автомобилей;
- 6) персональные компьютеры, обслуживающие поступающие заявки или требования на решение тех или иных задач;
- 7) аудиторские фирмы;
- 8) отделы налоговых инспекций, занимающиеся приемкой и проверкой текущей отчетности предприятий;
- 9) телефонные станции и т.д.

СМО включает в себя следующие *элементы* (рис. 1):

- источник требований (ИС);
- входящий поток требований;
- очередь;
- обслуживающие устройства (каналы обслуживания);
- выходящий поток требований.

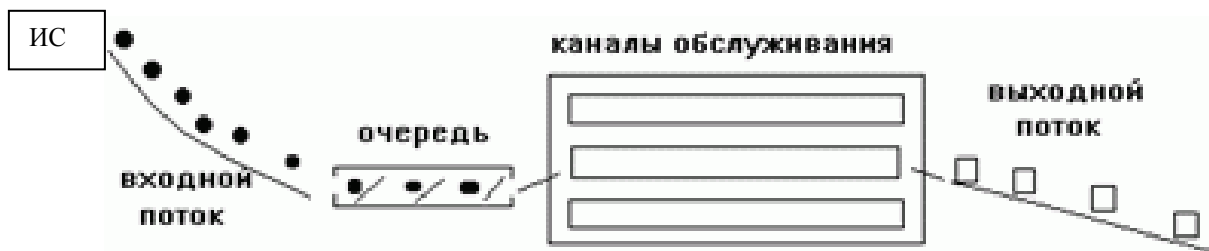


Рисунок 1 – Элементы системы массового обслуживания

Основным признаком систем массового обслуживания является наличие некоторой *обслуживающей системы*, которая предназначена для осуществления действий согласно требованиям поступающих в *систему заявок*. Заявки поступают в систему случайным образом. Поскольку обслуживающая система, как правило, имеет ограниченную пропускную способность, а заявки поступают нерегулярно, то периодически создается очередь заявок в ожидании обслуживания, а иногда обслуживающая система простаивает в ожидании заявок. И то и другое в экономических системах влечет непроизводительные издержки (потери), поэтому при проектировании систем массового обслуживания возникает задача нахождения рациональной пропускной способности системы, при которой достигается приемлемый компромисс между издержками от простоя в ожидании выполнения заявки и простоя системы от недогрузки. Впервые задачи такого типа были решены в работах А. К. Эрланга в начале прошлого века и легли в основу “Теории массового обслуживания”, которая успешно развивается в настоящее время.

Таким образом, система массового обслуживания состоит из следующих основных элементов: *блока обслуживания, потока заявок и очереди* в ожидании обслуживания.

**Предметом теории массового обслуживания** является установление зависимости между факторами, определяющими функциональные возможности системы массового обслуживания, и эффективностью ее функционирования. В большинстве случаев все параметры, описывающие системы массового обслуживания, являются случайными величинами или функциями, поэтому эти системы относятся к стохастическим системам.

Системы массового обслуживания могут быть классифицированы по ряду признаков.

1. В зависимости от условий ожидания начала обслуживания различают:

- СМО с потерями (отказами);
- СМО с ожиданием (неограниченное ожидание или очередь);
- СМО смешанного типа (с ограниченным ожиданием).

В СМО с потерями (отказами) требования, поступающие в момент, когда все каналы обслуживания заняты, получают отказ и теряются. Классическим примером системы с отказами является телефонная станция. Если вызываемый абонент занят, то требование на соединение с ним получает отказ и теряется.

В СМО с ожиданием заявка, поступившая в момент занятости всех каналов, становится в очередь и ожидает освобождения канала, который примет ее к обслуживанию. Каждая заявка, поступившая на вход, в конце концов будет обслужена.

СМО смешанного типа – это такие системы, в которых на пребывание заявки в очереди накладываются некоторые ограничения. Эти ограничения могут накладываться на длину очереди, т.е. максимально возможное число заявок, которые одновременно могут находиться в очереди. СМО, допускающие очередь, но с ограниченным числом требований в ней, называются *системами с ограниченной длиной очереди*. СМО, допускающие очередь, но с ограниченным сроком пребывания каждого требования в ней, называются *системами с ограниченным временем ожидания*.

2. По числу каналов обслуживания СМО делятся на:

- одноканальные;
- многоканальные.

3. По месту нахождения источника требований СМО делятся на:

- *разомкнутые*, когда источник требования находится вне системы;
- *замкнутые*, когда источник находится в самой системе.

Примером разомкнутой системы может служить ателье по ремонту телевизоров. Здесь неисправные телевизоры – это источник требований на их обслуживание, находятся вне самой системы, число требований можно считать неограниченным. К замкнутым СМО относится, например, станочный участок, в котором станки являются источником неисправностей, а следовательно, источником требований на их обслуживание, например, бригадой наладчиков.

4. По дисциплине обслуживания выделяют:

- *однофазные*;
- *многофазные*.

*Методы и модели*, применяющиеся в теории массового обслуживания, можно условно разделить на:

- *аналитические*;
- *имитационные*.

*Аналитические методы* теории массового обслуживания позволяют получить характеристики системы как некоторые функции параметров ее функционирования. Благодаря этому появляется возможность проводить качественный анализ влияния отдельных факторов на эффективность работы СМО.

*Имитационные методы* основаны на моделировании процессов массового обслуживания на ЭВМ и применяются, если невозможно применение аналитических моделей.

В настоящее время теоретически наиболее разработаны и удобны в практических приложениях методы решения таких задач массового обслуживания, в которых входящий поток требований является *простейшим (пуассоновским)*.

Для простейшего потока частота поступления требований в систему подчиняется закону Пуассона, т.е. вероятность поступления за время  $t$  ровно  $k$  требований задается формулой:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

Простейший поток обладает тремя основными свойствами: ординарности, стационарности и отсутствием последействия.

*Ординарность* потока означает практическую невозможность одновременного поступления двух и более требований. Например, достаточно малой является вероятность того, что из группы станков, обслуживаемых бригадой ремонтников, одновременно выйдут из строя сразу несколько станков.

*Стационарным* называется поток, для которого математическое ожидание числа требований, поступающих в систему в единицу времени (обозначим  $\lambda$ ), не меняется во времени. Таким образом, вероятность поступления в систему определенного количества требований в течение заданного промежутка времени  $\Delta t$  зависит от его величины и не зависит от начала его отсчета на оси времени.

*Отсутствие последействия* означает, что число требований, поступивших в систему до момента  $t$ , не определяет того, сколько требований поступит в систему за промежутки времени от  $t$  до  $t + \Delta t$ .

Важная характеристика СМО – *время обслуживания требований в системе*. Время обслуживания одного требования является, как правило, случайной величиной и, следовательно, может быть описано законом распределения. Наибольшее распространение в теории и, особенно, в практических приложениях получил *экспоненциальный закон распределения времени обслуживания*. Функция распределения для этого закона имеет вид:

$$F(t) = 1 - e^{-\mu t},$$

где  $\mu$  – параметр экспоненциального закона распределения времени обслуживания требований в системе (соответствует среднему количеству клиентов в системе в единицу времени),

$1/\mu$  – среднее время обслуживания одного клиента.

$\square = 1/t_{обс}$  – интенсивность обслуживания (среднее число обслуживаний в единицу времени),  $t_{обс}$  – среднее время обслуживания одной заявки.

Рассмотрим аналитические модели наиболее распространенных СМО с ожиданием, т.е. таких СМО, в которых требования, поступившие в момент, когда все обслуживающие каналы заняты, ставятся в очередь и обслуживаются по мере освобождения каналов.

Общая постановка задачи состоит в следующем. Система имеет  $n$  обслуживающих каналов, каждый из которых может одновременно обслуживать только одно требование.

В систему поступает *простейший (пуассоновский) поток требований* с параметром  $\lambda$  ( $\lambda$  – количество поступающих заявок в единицу времени,  $1/\lambda$  – среднее время появления одного клиента). Если в момент поступления очередного требования в системе на обслуживании уже находится не меньше  $n$  требований (т.е. все каналы заняты), то это требование становится в очередь и ждет начала обслуживания.

Время обслуживания каждого требования  $1/\mu$  – случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром  $\mu$  (количество обслуживаемых клиентов в единицу времени).

СМО с ожиданием можно разбить на две большие группы: замкнутые и разомкнутые. К *замкнутым* относятся системы, в которых поступающий поток требований возникает в самой системе и ограничен. Если питающий источник обладает бесконечным числом требований, то системы называются *разомкнутыми*. Примерами подобных систем могут служить магазины, кассы вокзалов, портов и др. Для этих систем поступающий поток требований можно считать неограниченным. Расчет характеристик работы СМО различного вида может быть проведен на основе расчета вероятностей состояний СМО (так называемые *формулы Эрланга*).

Рассмотрим алгоритмы расчета показателей качества функционирования *разомкнутой системы* массового обслуживания с ожиданием.

При изучении таких систем рассчитывают различные показатели эффективности обслуживающей системы. В качестве основных показателей могут быть вероятность того, что все каналы свободны или заняты, математическое ожидание длины очереди (средняя длина очереди), коэффициенты занятости и простоя каналов обслуживания и др.

Введем в рассмотрение параметр  $\alpha = \lambda/\mu$  – нагрузка системы (среднее количество каналов, необходимое для обслуживания всех поступающих в единицу времени требований). Заметим, что если  $\alpha/n < 1$ , то очередь не растет безгранично. Это условие означает, что число обслуживающих каналов должно быть больше среднего числа каналов, необходимых для того, чтобы за единицу времени обслужить все поступившие требования. Для одноканальной системы ( $n = 1$ ) данное условие будет выглядеть  $\alpha < 1$ . Тогда основные характеристики системы массового обслуживания определяются по формулам:

1. Вероятность того, что все обслуживающие каналы свободны:

$$P_0 = \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!(1 - \alpha/n)} \right]^{-1}.$$

2. Вероятность того, что занято ровно  $k$  обслуживающих каналов при условии, что общее число требований, находящихся на обслуживании, не превосходит числа обслуживающих аппаратов:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0, \text{ при } k \leq n.$$

3. Вероятность того, что в системе находится  $k$  требований в случае, когда их число больше числа обслуживающих каналов:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{n! n^{k-n}} P_0, \text{ при } k \geq n.$$

4. Вероятность того, что все обслуживающие каналы заняты:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{n!(1 - \alpha/n)} P_0; \quad (\alpha/n < 1).$$

5. Среднее время ожидания требованием начала обслуживания в системе (коэффициент простоя очереди):

$$E_1 = \frac{P_n}{\mu(n - \alpha)}; \quad (\alpha/n < 1)$$

6. Средняя длина очереди:

$$E_2 = \frac{\alpha P_n}{n(1 - \alpha/n)} = \frac{\alpha^{n+1}}{n! n(1 - \alpha/n)^2} P_0; \quad (\alpha/n < 1)$$

7. Среднее число свободных от обслуживания каналов:

$$E_3 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{k!} \alpha^k P_0$$

8. Коэффициент простоя каналов:

$$E_{np} = \frac{E_3}{n}.$$

9. Среднее число занятых обслуживанием каналов:

$$E_4 = n - E_3$$

10. Коэффициент загрузки каналов:

$$K_p = \frac{E_4}{n}$$

Для замкнутых систем вышеописанные характеристики рассчитываются несколько иначе (разобрать самостоятельно).

Вышеописанные характеристики удобно использовать при проектировании СМО. После проведенных вычислений данные по различным полученным вариантам сводят в таблицы. Окончательное решение о выборе дисциплины очереди, количестве каналов их пропускной способности принимается лицом принимающим решение (ЛПР) и может зависеть от множества, в том числе и субъективных факторов.

#### **1.4 Лекция №4 (2 часа)**

**Тема: Методы, применяемые на этапе определения альтернатив**

##### **1.4.1 Вопросы лекции:**

- 1. Метод «мозговой атаки.**
- 2. Морфологический анализ.**
- 3. Методы ассоциаций и аналогий.**

##### **1.4.2 Краткое содержание вопросов:**

###### **1. Метод «мозгового штурма»**

Бывают ситуации, когда один человек не может принять окончательное решение. Тогда применяют метод «мозгового штурма» (или метод номинальной группы), который полезен в тех случаях, когда необходимо выявить и сопоставить индивидуальные суждения, а затем принять решение. Этот метод был разработан в 1939 г. американским ученым *А. Осборном*.

Методы мозгового штурма, или мозговой атаки, основываются на следующем психологическом эффекте. Если взять группу в 5—8 человек, каждому из которых независимо предложить и индивидуально высказать идеи и предложения по решению поставленной изобретательской или рационализаторской задачи, то в сумме можно получить N идей. Если предложить этой группе коллективно высказать идеи по той же задаче, то получится N\*к

идей. При этом оказывается, что  $N \cdot k$  намного больше  $N$ . Во время сеанса мозгового штурма происходит как бы цепная реакция идей, приводящая к интеллектуальному взрыву.

Метод мозгового штурма предназначен для активизации поиска различных вариантов решений и выбора из них наилучшего. Он широко применяется в управленческой практике с целью получения максимального количества оригинальных идей за короткий промежуток времени (30 мин, максимум 40 мин). Причем экспертами являются как генераторы идей — специалисты в этой сфере, так и генераторы идей — дилетанты (специалисты в другой сфере).

Метод мозгового штурма предполагает разделение по времени и по исполнителям этапов «штурма». Участников разбивают на «генераторов» и «критиков». Генераторы высказывают как можно больше идей, а критики оценивают их идеи. Все высказанные идеи записывают на бумаге или на магнитофон.

#### **Виды мозговой атаки**

*Правила проведения мозговой атаки:*

- краткость высказывания идеи (менее 1 мин);
- отсутствие критики высказанных предложений;
- возможность развития идеи, высказанной ранее;
- возможность записи идей на магнитофонную пленку.

Существует несколько видов мозговых атак.

**Прямая мозговая атака («мозговой штурм»).** Постановка задачи перед творческой группой — участниками мозговой атаки — может иметь самую различную форму и содержание. Однако в ней должны быть четко сформулированы два момента: что в итоге желательно получить или иметь и что мешает получению желаемого. Постановка задачи для «мозгового штурма» должна отличаться краткостью изложения. Она может быть представлена в виде описания проблемной ситуации. Иногда имеет смысл дать более детальное изложение постановки, когда описание проблемной ситуации дополняют предварительной формулировкой задачи в соответствии с операцией.

Оптимальное число участников в творческой группе для проведения сеанса мозговой атаки составляет 5—12 человек, хотя допустимо и меньшее, и большее число участников.

Цель проведения прямой мозговой атаки состоит в выработке управленческого решения путем обсуждения предложенных идей для

решения данной проблемы. Метод прямого мозгового штурма целесообразно использовать:

- при решении изобретательских и рационализаторских задач в самых различных областях техники и видах деятельности, в том числе управленческой (по форме, деятельности и глубине проработки);
- на различных этапах решения творческой задачи и на различных стадиях разработки и проектирования изделий;
- в сочетании с другими эвристическими методами.

**Обратная мозговая атака.** В основе обратной мозговой атаки

лежит закон прогрессивной конструктивной эволюции. Согласно этому закону переход к новому происходит через выявление и устранение дефектов в существующем. Таким образом, обратная мозговая атака не генерирует идеи, а целиком направлена на критику уже имеющихся идей.

Метод обратной мозговой атаки ориентирован на решение первой творческой задачи, то есть цель обратной мозговой атаки заключается в составлении наиболее полного списка недостатков рассматриваемого объекта, который подвергается ничем не ограниченной критике. Объектом обратной мозговой атаки может быть конкретное изделие, процесс, сфера обслуживания и т. д.

Формулировка задач для обратной мозговой атаки должна содержать краткие и достаточно исчерпывающие ответы на следующие вопросы: что представляет собой объект,

который требуется улучшить, какие недостатки объекта известны, что требуется получить в результате мозговой атаки, на что нужно обратить особое внимание.

Обратная мозговая атака может быть использована в следующих случаях:

- при уточнении постановки изобретательских и рационализаторских задач;
- при разработке технического задания или технического предложения;
- при проведении экспертизы проектно-конструкторской документации на любой

стадии разработки.

*Двойная мозговая атака.* Суть двойной мозговой атаки заключается в том, что после проведения прямой мозговой атаки делается перерыв от двух часов до двух-трех дней, затем еще раз повторяется прямая мозговая атака. При двойной мозговой атаке число участников может возрасти до 20 и более человек. Обсуждение задачи идет в непринужденной обстановке и во время перерыва, при этом допускается критика высказанных идей, причем как бы «неофициальная». После перерыва генерация высказанных идей продолжается, но уже с учетом высказанных замечаний.

*Теневая атака:* мнения фиксируются на бумаге, затем выполняется их обработка.

*Метод индивидуального мозгового штурма:* человек поочередно выполняет роли «генератора» и «критика».

## **2. Морфологический анализ**

Данный метод, разработанный в 1942 г. американским астрофизиком *Цвики*, используется в целях расширения области поиска различных вариантов решения проблемы. Он предполагает углубленную классификацию объектов и позволяет на основе построения модели (двух-

или трехмерной матрицы) получать новые решения путем составления комбинаций элементов морфологической модели (матрицы). Основные этапы анализа:

- 1) определение характеристик объекта или задач;
- 2) определение разновидностей реализации этих задач;
- 3) формирование морфологической модели в виде матрицы, где по вертикали отражается совокупность всех задач, которые необходимо решить для достижения поставленной цели. По горизонтали для каждой задачи дается вариант (один или несколько) реализации конкретного решения;
- 4) получение комбинаций элементов матрицы, причем каждое новое решение представляет собой сочетание элементов, взятых по одному из каждой строки матрицы;
- 5) анализ на предмет выявления совместимости элементов в полученной комбинации друг с другом. В случае несовместимости комбинация исключается из рассмотрения. Оставшиеся рассматриваемые варианты оцениваются, сравниваются по критериям, установленным в соответствии с требованиями решения данной проблемы, и выбирается наилучший вариант.

## **3. Метод проб и ошибок - метод, ориентированный на действие**

С точки зрения организации - это самый простой метод, так как он не требует специальной организации. Метод предполагает перечисление всех возможных вариантов решения проблемы без попытки упорядочить или строго организовать этот процесс.

Этот метод связан с неисследованностью, высоким уровнем новизны проблемы или с недостаточным уровнем профессионализма принимающего решение (небольшой опыт работы, отсутствие знания экспертных методов разработки и принятия управленческих решений).

### **Метод контрольных вопросов**

Позволяет упорядочить процесс отбора вариантов и состоит в том, что варианты перечисляются в последовательности, задаваемой рядом специально подобранных наводящих вопросов. Эти вопросы составляются с учетом особенностей мышления.



На этапе разработки управленческих решений и на этапе выбора варианта управленческого решения используются ключевые слова, построенные в логической последовательности. Например:

- какова проблема (в чем заключается проблема)?
- кто участвует в ее решении?
- кто ее создает?
- где она возникла?
- какие возможны варианты решения?

Метод построен на логической структурной основе, но уровень аргументации часто бывает не очень высок.

## **1.5 Лекция №5 (2 часа)**

**Тема: Принятие решений в условиях неопределенности и риска**

### **1.5.1 Вопросы лекции:**

- 1. Неопределенность и риск в управленческих решениях.**
- 2. Теория игр.**
- 3. Проблемы разработки и выбора управленческих решений в условиях полной неопределенности.**
- 4. Проблемы разработки и выбора управленческих решений в условиях риска**

### **1.5.2 Краткое содержание вопросов:**

#### **1. Неопределенность и риск в управленческих решениях**

Принятие управленческих решений – это выбор одного курса действий, одной альтернативы из ряда имеющихся. Если нет альтернатив, то нет выбора и, следовательно, нет и решения.

Принимаемые управленческие решения всегда спроектированы в будущее, поэтому ЛПР в момент принятия решения часто не может с абсолютной уверенностью знать, как

будут развиваться события, как будет изменяться ситуация. Иными словами, в момент принятия управленческого решения значителен элемент неопределенности и риска.

Риск — это возможная опасность потерь, вытекающая из специфики тех или иных явлений природы и видов деятельности человеческого общества. Это историческая и экономическая категория. Таким образом, принятие решений в условиях риска означает выбор варианта решения в условиях, когда каждое действие приводит к одному из множества возможных частных исходов, причем каждый исход имеет вычисляемую или экспертно определяемую вероятность появления .[14]

Неопределенность — это неполнота или недостоверность информации об условиях реализации решения, наличие фактора случайности или противодействия. Таким образом, принятие решения в условиях неопределенности означает выбор варианта решения, когда одно или несколько действий имеют своим следствием множество частных исходов, но их вероятности совершенно не известны или не имеют смысла .

При принятии управленческих решений требуется оценить степень риска и определить его величину.

Степень риска — это вероятность наступления случая потерь, а также размер возможного ущерба от него.

Риск предпринимателя количественно характеризуется субъективной оценкой вероятной (т.е. ожидаемой), величины максимального и минимального дохода (убытка) от данного вложения капитала. При этом, чем больше диапазон между максимальными минимальным доходом (убытком) при равной вероятности их получения, тем выше степень риска .

Риск представляет собой действие в надежде на счастливый исход по принципу «повезет — не повезет». Принимать на себя риск предпринимателя вынуждает прежде всего неопределенность хозяйственной ситуации, т.е. неизвестность условий политической и экономической обстановки, окружающей ту или иную деятельность, и перспектив изменения этих условий. Чем больше неопределенность хозяйственной ситуации при принятии решения, тем больше и степень риска.[1]

## 2. Теория игр.

Приведем несколько общих критериев рационального выбора вариантов решений из множества возможных. Критерии основаны на анализе матрицы возможных состояний окружающей среды и альтернатив решений.

Матрица, приведенная в таблице 1, содержит:  $A_j$  — альтернативы, т. е. варианты действий, один из которых необходимо выбрать;  $S_i$  — возможные варианты состояний окружающей среды;  $a_{ij}$  — элемент матрицы, обозначающий значение стоимости капитала, принимаемое альтернативой  $j$  при состоянии окружающей среды  $i$ .

Таблица: Матрица решений.

Альтернатива	S (состояние среды)						
	S1	S2	...	S <sub>i</sub>	...	S <sub>m</sub>	
A	S1	S2	...	S <sub>i</sub>	...	S <sub>m</sub>	
A1	a <sub>11</sub>	a <sub>12</sub>	...	a <sub>1i</sub>	...	a <sub>1m</sub>	
	...	...	...	...	...	...	

$A_j$	$a_{j1}$	$a_{j2}$	...	$a_{ji}$	...	$a_{jm}$	
$A_n$	$a_{n1}$	$a_{n2}$	...	$a_{jn}$	...	$a_{nm}$	

Для выбора оптимальной стратегии в ситуации неопределённости используются различные правила и критерии.

В соответствии с правилом максимин из альтернатив  $a_j$  выбирают ту, которая при самом неблагоприятном состоянии внешней среды, имеет наибольшее значение показателя. С этой целью в каждой строчке матрицы фиксируют альтернативы с минимальным значением показателя и из отмеченных минимальных выбирают максимальное. Альтернативе  $a^*$  с максимальным значением из всех минимальных даётся приоритет.

Принимающий решение в этом случае минимально готов к риску, предполагая максимум негативного развития состояния внешней среды и учитывая наименее благоприятное развитие для каждой альтернативы.

По критерию Ваальда лица, принимающие решения, выбирают стратегию, гарантирующую максимальное значение наихудшего выигрыша (критерия максимина).

В соответствии с правилом максимак выбирается альтернатива с наивысшим достижимым значением оцениваемого показателя. При этом ЛПР не учитывает риска от неблагоприятного изменения окружающей среды. Альтернатива находится по формуле:

$$a^* = \{a_j \max_j \max_i \Pi_{ij}\}$$

Используя это правило, определяют максимальное значение для каждой строки и выбирают наибольшее из них. [1]

Большой недостаток правил максимакса и максимина – использование только одного варианта развития ситуации для каждой альтернативы при принятии решения.

В отличие от максимина минимакс ориентирован на минимизацию не столько потерь, сколько сожалений по поводу упущенной прибыли. Правило допускает разумный риск ради получения дополнительной прибыли. Критерий Севиджа рассчитывается по формуле:

$$\min \max \Pi = \min_i [ \max_j (\max_i X_{ij} - X_{ij}) ]$$

где **mini**, **maxj** – поиск максимума перебором соответствующих столбцов и строк.

Расчёт минимакса состоит из четырёх этапов:

1. Находится лучший результат каждой графы в отдельности, то есть максимум  **$X_{ij}$**  (реакции рынка).
2. Определяется отклонение от лучшего результата каждой отдельной графы, то есть  **$\max_i X_{ij} - X_{ij}$** . Полученные результаты образуют матрицу отклонений (сожалений), так как её элементы – это недополученная прибыль от неудачно принятых решений, допущенных из-за ошибочной оценки возможности реакции рынка.
3. Для каждой строчки сожалений находим максимальное значение.
4. Выбираем решение, при котором максимальное сожаление будет меньше других.

В соответствии с этим правилом правила максимакс и максимин сочетаются связыванием максимума минимальных значений альтернатив. Это правило называют ещё правилом оптимизма – пессимизма. Оптимальную альтернативу можно рассчитать по формуле:

$$a^* = \max_i [(1-\alpha) \min_j \Pi_{ji} + \alpha \max_j \Pi_{ji}]$$

где  **$\alpha$** - коэффициент оптимизма,  $\alpha = 1 \dots 0$  при  $\alpha = 1$  альтернатива выбирается по правилу максимакс, при  $\alpha = 0$  – по правилу максимин. Учитывая боязнь риска, целесообразно задавать  $\alpha = 0,3$ . Наибольшее значение целевой величины и определяет необходимую альтернативу.

Правило Гурвица применяют, учитывая более существенную информацию, чем при использовании правил максимин и максимакс.

Таким образом, при принятии управленческого решения в общем случае необходимо:

- спрогнозировать будущие условия, например, уровни спроса;
- разработать список возможных альтернатив
- оценить окупаемость всех альтернатив;
- определить вероятность каждого условия;
- оценить альтернативы по выбранному критерию решения.[3]

### **3. Проблемы разработки и выбора управленческих решений в условиях полной неопределенности**

Сталкиваясь с неопределённостью, управляющий может использовать две основные возможности:

1) попытаться получить дополнительную информацию и ещё раз проанализировать проблему с целью уменьшить её новизну и сложность. В сочетании с опытом и интуицией это даст ему возможность оценить субъективную, предполагаемую вероятность возможных результатов;

2) когда не хватает времени и / или средств на сбор дополнительной информации, при принятии решений приходится полагаться на прошлый опыт и интуицию.

Отсутствие полной информации о хозяйственной ситуации и перспектив ее изменения заставляет предпринимателя искать возможность приобрести недостающую дополнительную информацию, а при отсутствии такой возможности начать действовать наугад, опираясь на свой опыт и интуицию.

Случайность во многом определяет неопределенность хозяйственной ситуации.

Случайность — это то, что в сходных условиях происходит неодинаково, и поэтому ее заранее нельзя предвидеть и спрогнозировать. Однако при большом количестве наблюдений за случайностями можно обнаружить, что в мире случайностей действуют определенные закономерности. Математический аппарат для изучения этих закономерностей дает теория вероятности. Случайные события становятся предметом теории вероятности только тогда, когда с ними связываются определенные числовые характеристики — их вероятности.

Риск имеет математически выраженную вероятность наступления потери, которая опирается на статистические данные и может быть рассчитана с достаточно высокой степенью точности.

Чтобы количественно определить величину риска, необходимо знать все возможные последствия какого-нибудь отдельного действия и вероятность самих последствий.

Вероятность — это возможность получения определенного результата. Применительно к экономическим задачам методы теории вероятности сводятся к определению значений вероятности наступления событий и к выбору из возможных событий самого предпочтительного исхода из наибольшей величины математического ожидания. Иначе говоря, математическое ожидание какого-либо события равно абсолютной величине этого события, умноженной на вероятность его наступления.

Вероятность наступления события может быть определена с помощью:

- объективного метода, основанного на вычислении частоты, с которой происходит данное событие. Например, если известно, что при вложении капитала в какое-либо мероприятие прибыль в сумме 25 тыс. руб. была получена в 120 случаях из 200, то вероятность получения такой прибыли составляет  $0,6 (120 : 200)$ ;
- субъективного метода, основанного на использовании субъективных критериев, которые базируются на различных предположениях. К таким предположениям могут относиться: суждение оценивающего, его личный опыт, оценка эксперта, мнение

финансового консультанта и т.п. Когда вероятность определяется субъективно, то разные люди могут устанавливать разное ее значение для одного и того же события и делать различный выбор. Важное место при этом занимает прием экспертной оценки, т.е. проведение экспертизы, обработка и использование ее результатов при обосновании значения вероятности. Прием экспертной оценки представляет собой комплекс логических и математико-статистических методов и процедур, связанных с деятельностью эксперта по переработке необходимой для анализа и принятия решений информации. Этот прием экспертной оценки основан на использовании способности специалиста (его знаний, умения, опыта, интуиции и т.п.) находить нужное, наиболее эффективное решение. [13]

Величина риска (степень риска) измеряется двумя критериями.

1. среднее ожидаемое значение;
2. изменчивость (колеблемость) возможного результата.

Среднее ожидаемое значение связано с неопределенной ситуацией.

Среднее ожидаемое значение — это средневзвешенное для всех возможных результатов, где вероятность каждого результата используется в качестве частоты или веса соответствующего значения. Среднее ожидаемое значение измеряет результат, который мы ожидаем в среднем.

#### **4. Проблемы разработки и выбора управленческих решений в условиях риска**

Одно из главных правил управленческой деятельности гласит: не избегать риска, а предвидеть его, стремясь снизить до возможно более низкого уровня. Это требует грамотного управления рисками, т.е. своевременного предвидения, заблаговременного выявления неопределенностей и их последствий на деятельность организации для разработки и реализации УР по их уменьшению.

Для анализа риска нужна прежде всего, быстрая и достоверная информация. В условиях более жесткой конкуренции, вызванной глобализацией рынков, победу будут одерживать не крупные предприятия над малыми, а динамичные над медленно реагирующими на изменение обстановки. Второй этап управления риском — выявление риска.

Для того чтобы выявить, оценить риск и принять соответствующее решение по его снижению, необходимо собрать исходную информацию об объекте — носителе риска. Эта стадия включает два этапа: отбор информации о структуре объекта и выявление опасностей или инцидентов.

Основные методы получения исходной информации об исследуемых объектах:

- стандартизированный опросный лист;
- рассмотрение и анализ первичных документов отчетности;
- анализ данных ежеквартальных и годовых финансовых отчетов;
- составление и анализ диаграммы организационной структуры;
- составление и анализ карт технологических процессов;
- инспекционные посещения;
- консультации специалистов;
- экспертиза документации внешними аудиторами.[11]



Рис 1.- Схема управления рисками

Страхование компенсирует возможные ошибки и стабилизирует деятельность компании. Страхование УР базируется на двух подходах:

1. стоимость или цена подготовленного УР;
2. стоимость возможных убытков при реализации УР.

Расчет стоимости (С) конкретной формы УР в зависимости от процедуры его выполнения оценивается следующим образом:

- стоимость процедуры разработки, согласования, утверждения и принятия:

$$C = Kф \times Зур;$$

- стоимость процедуры практической реализации:

$$C = Kф \times Кп \times Зпр,$$

где **Кф** — коэффициент, учитывающий форму представления УР;

**Зур** — фактические затраты на УР при выполнении соответствующих процедур;

**Кп** — коэффициент, учитывающий долю затрат на частичную или полную реализацию УР (**Зпр**).

Риски образуются от следующих процедур реализации УР: паблик рилейшнз; выбор формы реализации УР; организация выполнения; контроль; информирование; архивация данных об УР.

Причины появления незапланированных результатов по представленным процедурам:

- недостаточный профессионализм как самого разработчика УР, так и исполнителей;
- недостаточная ответственность исполнителя;
- организационные неурядицы;
- искажения, утеря информации в базе данных и базе знаний (интеллектуальной собственности).

Кроме того, риск может возникнуть сам по себе.

## **2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ**

### **2.1 Практическое занятие №1 (2 часа).**

**Тема: «Математические методы принятия решений»**

#### **2.1.1 Задание для работы:**

- 1. Обзор экономико-математических методов.**
- 2. Линейное программирование.**
- 3. Целочисленное программирование.**
- 4. Метод двойственных оценок.**

### **2.1.2 Краткое описание проводимого занятия:**

Подготовка и представление докладов по предложенным вопросам.

### **2.1.3 Результаты и выводы:**

Рассмотрены и изучены теоретические вопросы, а также сделаны практические выводы по материалам заслушанных докладов. Рассмотрена часть материала, отраженная в контрольных вопросах ФОС дисциплины и необходимая для формирования компетенций.

## **2.2 Практическое занятие 2 (ПЗ-2), (2 часа).**

**Тема: «Математические методы принятия решений»**

### **2.2.1 Задание для работы:**

- 1. Распределительные методы.**
- 2. Динамическое программирование.**
- 3. Сетевое планирование и управление.**
- 4. Теория массового обслуживания.**

### **2.2.2 Краткое описание проводимого занятия:**

Подготовка и представление докладов по предложенным вопросам.

### **2.2.3 Результаты и выводы:**

Рассмотрены и изучены теоретические вопросы, а также сделаны практические выводы по материалам заслушанных докладов. Рассмотрена часть материала, отраженная в контрольных вопросах ФОС дисциплины и необходимая для формирования компетенций.

## **2.3 Лабораторное занятие 1 (ПЗ-3) (2 часа).**

**Тема: «Математические методы принятия решений»**

### **2.3.1 Задание для работы:**

- 1. Методы экспертных оценок.**
- 2. Эконометрические методы принятия решений**

### **2.3.2 Краткое описание проводимого занятия:**

Подготовка и представление докладов по предложенным вопросам.

### **2.3.3 Результаты и выводы:**

Рассмотрены и изучены теоретические вопросы, а также сделаны практические выводы по материалам заслушанных докладов. Рассмотрена часть материала, отраженная в контрольных вопросах ФОС дисциплины и необходимая для формирования компетенций.

## **2.4 Практическое занятие 3 (ПЗ-3) (2 часа).**

**Тема: «Методы, применяемые на этапе определения альтернатив»**

### **2.4.1 Задание для работы:**

- 1. Метод «мозговой атаки».**
- 2. Морфологический анализ.**
- 3. Методы ассоциаций и аналогий.**



#### **2.4.2 Краткое описание проводимого занятия:**

Подготовка и представление докладов по предложенным вопросам.

#### **2.4.3 Результаты и выводы:**

Рассмотрены и изучены теоретические вопросы, а также сделаны практические выводы по материалам заслушанных докладов. Рассмотрена часть материала, отраженная в контрольных вопросах ФОС дисциплины и необходимая для формирования компетенций.

### **2.5 Практическое занятие 4 (ПЗ-4) (2 часа).**

**Тема: «Методы, применяемые на этапе оценки альтернатив»**

#### **2.5.1 Задание для работы:**

- 1. Свойства критериев оценки альтернатив.**
- 2. Методы экспертных оценок.**
- 3. Методы прогнозирования.**
- 4. Эконометрические методы принятия решений**

#### **2.5.2 Краткое описание проводимого занятия:**

В ходе выполнения практических занятий делаются расчеты норм труда в отраслях растениеводства и животноводства; студенты знакомятся с методическими указаниями по конкретно поставленным задачам, а также изучают материал по данным темам.

#### **2.5.3 Результаты и выводы:**

Рассмотрены и изучены теоретические вопросы, а также сделаны практические выводы по материалам методических указаний, рассмотрено решение практических заданий. Рассмотрена часть материала, отраженная в контрольных вопросах ФОС дисциплины и необходимая для формирования компетенций.