ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра организации производства и

моделирования экономических систем

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.ДВ.07.01 Экономическое моделирование в АПК

Направление подготовки:38.03.02 Менеджмент

Профиль образовательной программы Производственный менеджмент

Форма обучения: заочная

Содержание

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.1 Лекция №1 (2 часа)
Тема: « Модели и экономико-математическое моделирование»

1.1.1 Вопросы лекции:
1. Принцип аналогии в моделировании. Общее понятие модели.
2. Экономико-математические модели.
3. Этапы моделирования. Линейная экономико-математическая модель.

1.1.2 Краткое содержание вопросов
1. Принцип аналогии в моделировании. Общее понятие модели.

Термин модель происходит от латинского слова *modulus* – образец, норма, мера. Понятие модели основано на принципе аналогии. Рассматривая свойства различных объектов, явлений, процессов, можно обнаружить, что некоторые из них имеют определенное сходство, подобие. Это сходство проявляется либо во внешних формах, либо в структуре, либо в изменении характера поведения при одинаковых воздействиях.

С точки зрения управления хозяйственными процессами наибольший интерес представляют модели, основанные на сходстве поведения систем, подобии их реакций на изменение воздействия. Модель в наиболее общем определении - это некоторый аналог той системы, которой мы должны управлять, основываясь на знаниях из исследования данного аналога. Оригиналом служит реальный объект исследования – то или иное явление, процесс производства и т.д. Модель отображает те свойства исследуемой системы, которые представляют интерес, прежде всего с точки зрения управленческих воздействий на нее, т.е. модель служит средством познания оригинала.

Для решения практических задач недостаточно подобия. Необходима возможность экспериментировать на модели. Это достигается прежде всего упрощением системы, ограничением исследуемых свойств.

Воспроизведение некоторого ограниченного множества существенных свойств поведения системы называют имитацией.

Различают ряд способов имитации:

аналоговый – замена носителей базовых свойств реальной системы другими физическими носителями;

аналитический – замена материальных носителей базовых характеристик исследуемой системы абстрактными математическими соотношениями;

машинный - построение численных моделей поведения систем на основе алгоритмов;

ситуационный - путем отображения свойств, деловых игр.

В зависимости от способа отображения свойств исследуемой системы через те или иные носители все множество моделей можно подразделить на две большие группы: материальные (физические) и абстрактные. По своей природе физические модели могут быть механическими, электрическими, гидравлическими, и т.д. Физические модели строятся на принципах прямой аналогии, когда оригинал и модель могут отличаться лишь масштабами, или косвенной, когда меняются носители базовых свойств.

Моделирование – есть научный метод исследования систем, рассматриваемых как оригиналы, на их аналогах-моделях. Цель моделирования является углубление знаний для распространения этих знаний на систему-оригинал при управлении ее поведением.

По своей сущности научные понятия "модель" и "моделирование" представляют собой категории познания системных свойств исследуемых объектов.

Имитация поведения исследуемых систем есть наиболее общая форма моделирования.

Принцип аналогии состоит именно в получении выводов, суждений об управляемой системе на основе исследования поведения другой системы, сходной в некотором отношении с оригиналом

Формализованное представление закономерностей поведения реальных экономических систем в виде абстрактных математических аналогов – системы уравнений и неравенств – получило название математического моделирования.

2. Экономико-математические модели.

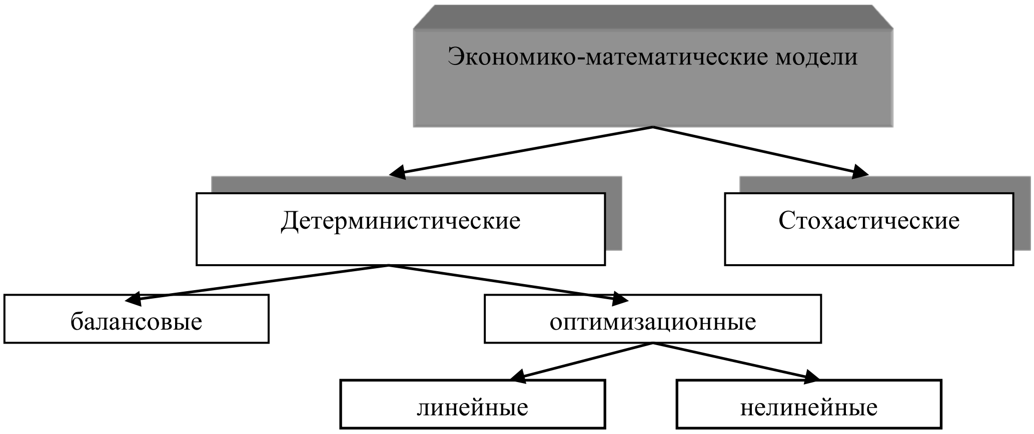
При разработке экономико-математических моделей принимают во внимание наиболее значимые, существенные характеристики управляемых систем, а детали второстепенного характера опускаются.

Модель позволяет имитировать поведение системы в широком диапазоне изменяющихся условий. Отпадает необходимость в дорогостоящих натуральных экспериментах. При исследовании очень сложных систем с большой длительностью протекающих в них процессов моделирование служит единственным средством обоснования управленческих решений на перспективу. Основной эффект моделирования заключается именно в научно обоснованном принятии управленческих решений – в выборе наилучшего (оптимального) варианта развития системы.

Модель всегда проще оригинала. Исследователь стремиться воспроизвести прежде всего те свойства системы, которые важны для решения стоящих перед ним задач. Степень достоверности выводов при этом зависит от детализации исходной информации о свойствах системы, глубины проработки и изученности закономерностей поведения этой системы.

Экономико-математическая модель - это концентрированное выражение существенных взаимосвязей и закономерностей процесса функционирования экономической системы в математической форме

В планово-экономической работе используются разнообразные типы моделей, различающиеся целевым назначением, характером задач, степенью охвата явлений, математическим аппаратом и т.д. Существует множество экономико-математических моделей. Возникает необходимость в их классификации.



Все имеющиеся экономико-математические модели делятся на детерминистические и стохастические.

К детерминистическим относятся модели, в которых результат полностью и однозначно определяется набором независимых переменных. Эти модели строятся на основе правил линейной алгебры и представляют собой систему уравнений, совместно решаемых для получения результатов.

Детерминистические модели подразделяются на модели балансовые и модели оптимизационные. Балансовые модели, как правило, характеризуются системой балансовых таблиц, которые обычно имеют форму шахматного баланса и могут быть записаны в виде квадратных матриц. Оптимизационные модели отличаются от балансовых тем, что целью их построения является не столько описание структуры экономической системы, сколько математическое описание условий функционирования.

Оптимизационные модели бывают линейные и нелинейные.

Стохастические модели описывают случайные процессы, подчиняющиеся законам теории вероятности. В этих моделях исходные данные, либо искомый результата выражаются не определенными величинами, а в виде некоторой статической функции распределения этих величин. Изучаемый процесс условно рассматривается как детерминистический, но в модель входят элементы оценки вероятности полученных результатов.

3. Этапы моделирования. Линейная экономико-математическая модель.

Математическое моделирование имеет два существенных преимущества: 1) дает быстрый ответ на поставленный вопрос, на что в реальной обстановке могут потребоваться иногда даже годы; 2) предоставляет возможность широкого экспериментирования, осуществить которое на реальном объекте зачастую просто невозможно.

Содержательная постановка задачи часто оказывается перенасыщенной сведениями, которые совершенно излишни для ее последующей формализации. Чтобы моделирование было успешным, надо учитывать главные свойства моделируемого объекта, пренебрегать его второстепенными свойствами и уметь отделить их друг от друга.

Формализовать постановку задачи, т.е. перевести ее на язык математики, причем с конечным количеством неизвестных и возможных ограничений. При этом необходимо провести различие между теми величинами, значениями которых можно варьировать и выбирать с целью достижения наилучшего результата (*управляемыми переменными*), и величинами, которые фиксированы или определяются внешними факторами. Одни и те же величины, в зависимости от выбранных границ оптимизируемой системы и уровня детализации ее описания, могут оказаться либо управляемыми переменными, либо нет.

Определение тех значений управляемых переменных, которым соответствует наилучшая (*оптимальная*) ситуация, и представляет собой задачу оптимизации.

Модель экономической задачи оптимизации состоит из 3-х частей:

I. Целевая функция (критерий оптимальности). Здесь описывается конечная цель, преследуемая при решении задачи. В качестве такой цели может быть или максимум получения каких-либо показателей или минимум затрат.

II. Система ограничений.

Ограничения бывают основные и дополнительные. Основные, как правило, описывают расход основных производственных ресурсов (это консервативная часть модели). В модели они обязательно присутствуют. Дополнительные – могут иметь различный характер, являются изменяемой частью модели и отражают особенность моделирования задачи.

III. Условие неотрицательности переменных величин. А также граничные условия, которые показывают, в каких пределах могут быть значения искомых переменных в оптимальном решении.

Решение задачи, удовлетворяющее всем ограничениям и граничным условиям, называется *допустимым.* Если математическая модель задачи оптимизации составлена правильно, то задача будет иметь целый ряд допустимых решений. Чтобы из всех возможных решений выбрать только одно, необходимо договориться, по какому признаку мы это будем делать. То есть речь идет о критерии оптимальности, который выбирает человек, принимающий решение. Таким образом, оптимальное решение – это решение, наилучшее из допустимых с точки зрения выбранного признака.

Однако, следует иметь в виду, что решение не всех оптимизационных проблем сводится к построению математических моделей и соответствующим вычислениям. Это связано с тем, что могут появиться обстоятельства, являющиеся существенными для решения проблемы, но, тем не менее, не поддающиеся математической формализации и, следовательно, не учитываемые в математической модели. Одним из таких обстоятельств является человеческий фактор.

Базовая модель включает следующие элементы: исходные значения ресурсов; переменные величины, значение которых должны определяться в результате моделирования; технико-экономические коэффициенты и нормативы, необходимые для отображения закономерных взаимосвязей ресурсов с выходными показателями; условия (ограничения), описывающие характер и логику взаимосвязей в модели; критерий оптимальности, определяющий качество функционирования исследуемой системы.

Разработка экономико-математической модели осуществляется поэтапно в определенной последовательности.

1. Постановка задачи и обоснование критерия оптимальности.
2. Определение перечня переменных и ограничений.
3. Сбор информации и разработка технико-экономических коэффициентов и констант.
4. Построение модели и ее математическая запись.
5. Кодирование перенесение информации на машинные носители, решение задачи на компьютере.
6. Анализ результатов решения, корректировка модели, повторное решение задачи на компьютере по скорректированной модели.
7. Экономический анализ различных вариантов и выбор проекта плана.

В конкретных условиях в зависимости от характера задачи последовательность этапов моделирования может изменяться.

1.2 Лекция №2 (2 часа)

Тема: «Производственные функции»

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Основные понятия
2. Формальные свойства производственных функций
3. Предельные и средние значения производственной функции

1.2.2 Краткое содержание вопросов

1. Основные понятия

Производственными функциями называют соотношение между используемыми производственными ресурсами и выпускаемой продукцией.

Производственные функции предназначены для моделирования процесса производства некоторой хозяйственной единицы: отдельной фирмы, отрасли или всей экономики государства в целом.

С помощью производственных функций решают задачи:

оценки отдачи ресурсов в производственном процессе;

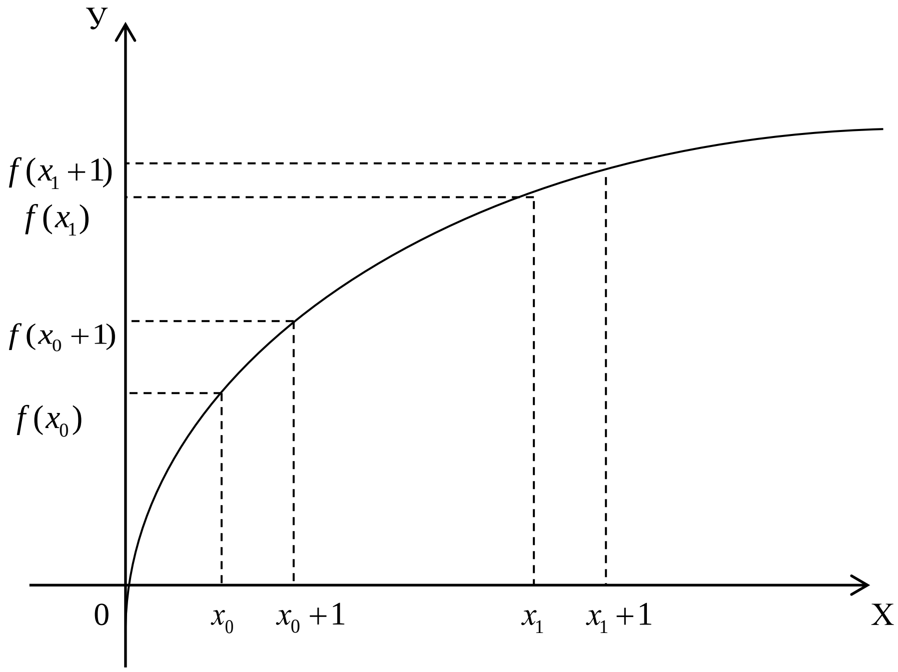
прогнозирование экономического роста;

разработки вариантов плана развития производства;

оптимизации функционирования хозяйственной единицы при условии заданного критерия и ограничений по ресурсам.

<u>Производственная функция одной переменной</u>. Возьмем производственную функцию F в виде $F(x) = a_1 x^{a_2}$, где x- величина затрачиваемого ресурса (например, рабочего времени), F(x) –объем выпускаемой продукции (например, число готовых

холодильников). Величины a_1 и a_2 – параметры производственной функции (вектор параметров есть двумерный вектор (a_1 , a_2)). Здесь a_1 и a_2 – положительные числа и число a_2 <=1. Данная функция является функцией одной переменной x. В связи с этим производственная функция называется одноресурсной или однофакторной. Ее область определения - множество неотрицательных действительных чисел т.е. x>=0. График производственной функции $y = a_1 x^{a_2}$ выглядит следующим образом.



На графике видно, что с ростом величины затрачиваемого ресурса x объем выпуска y растет, однако при этом каждая дополнительная единица ресурса дает все меньше прирост объема y выпускаемой продукции. Отмеченное обстоятельство (рост объема y и уменьшение прироста объема y с ростом величины x) отражает фундаментальное положение экономической теории (хорошо подтверждаемое практикой), называемое законом убывающей эффективности. Производственная функция $y = a_1 x^{a_2}$ является типичным представителем широкого класса однофакторных производственных функций.

Производственная функция нескольких переменных - это функция , независимые переменные $x_1,\ldots,x_n$ которой принимают значения объемов затрачиваемых или используемых ресурсов (число переменных n равно числу ресурсов), а значение функции имеет смысл величин объемов выпуска:

$$y = f(x,a).$$

Подчеркнем еще раз, что в данной формуле величина y – скалярная, x и a – векторные величины т.е. $x = (x_1,\ldots,x_n)$ (под вектором понимается упорядоченный набор чисел). В связи с этим производственную функцию называют многоресурсной или многофакторной. По экономическому смыслу $x_1 \geq 0,\ldots,x_n \geq 0$, следовательно, областью определения многофакторной производственной функции $f(x) = (x_1,\ldots,x_n)$

является множество n-мерных векторов x, все координаты $x_1,\dots,x_n$ которых неотрицательные числа. Для отдельного предприятия, выпускающего однородный продукт, производственная функция $f(x)=(x_1,\dots,x_n)$ может связывать объем выпуска (в натуральном или стоимостном выражении) с затратами рабочего времени по различным видам трудовой деятельности, различных видов сырья, комплектующих изделий, энергии, основного капитала. Производственные функции такого типа характеризуют действующую технологию предприятия.

При построении производственной функции для региона или страны в целом в качестве величины годового выпуска Y (на макроуровне обозначают большой буквой) чаще берут совокупный продукт региона или страны, исчисляемый обычно в неизменных, а не в текущих ценах, в качестве ресурсов рассматривают основной капитал ($x_1(=K)$- объем используемого в течение года основного капитала) живой труд ($x_2(=L)$- количество единиц затрачиваемого в течении года живого труда), исчисляемые обычно в стоимостном выражении. Строят двухфакторную производственную функцию $f(x)=(x_1,x_2)$ или $Y=f(K,L)$. От двухфакторных производственных функций переходят к трехфакторным. В качестве третьего фактора иногда вводят объемы используемых природных ресурсов. Кроме того, если производственная функция строится по данным временных рядов, то в качестве особого фактора роста производства может быть включен технический прогресс.

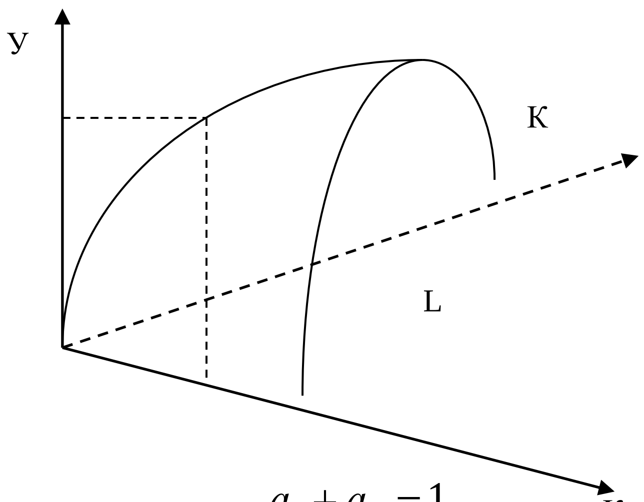
Производственная функция $y=(x_1,x_2)$ называется *статической* если ее параметры и ее характеристика f не зависят от времени t, хотя объемы ресурсов и объемы выпуска могут зависеть от времени t, т.е. могут иметь представление в виде временных рядов: $x_1(0),x_1(1),\dots,x_1(T)$; $x_2(0),x_2(1),\dots,x_2(T)$; $y(0),y(1),\dots,y(T)$;

$y(t)=f(x_1(t),x_2(t))$. Здесь t – номер года, t=0,1,…,T. t=0 – базовый год временного промежутка, охватывающий годы 1,2,…,T.

<u>Пример</u> Для моделирования отдельного региона или страны в целом (т.е. для решения задач на макроэкономическом, микроэкономическом уровне) часто используют производственную функцию вида $y=a_0x_1^{a_1}x_2^{a_2}$, где a_0, a_1, a_2- параметры производственной функции. Это положительные постоянные числа (часто a_1 и a_2 таковы, что $a_1+a_2=1$). Производственная функция данного вида называется производственная функция Кобба-Дугласа по имени двух американских экономистов, предложивших ее использовать в 1929 году. Производственная функция Кобба-Дугласа активно применяется для решения разнообразных теоретических и прикладных задач благодаря своей структурной простате. В данной модели $x_1=K$ равно объему используемого основного капитала (объему используемых основных фондов – в отечественной терминологии), $x_2=L$ - затратам живого труда, тогда производственная функция Кобба-Дугласа приобретает вид часто используемый в литературе:

$y=a_0K^{a_1}L^{a_2}$ или если выполняется равенство $a_1+a_2=1$, то $Y=bK^{\alpha},L^{\alpha-1}$

Графиком двухфакторной производственной функции будет являться поверхность в трехмерном пространстве.



При выполнении равенства $a_1 + a_2 = 1$ модель Кобба-Дугласа можно записать несколько в ином виде:

$$\frac{Y}{L} = \frac{a_0 K^{a_1} L^{a_2}}{L} = \frac{a_0 K^{a_1}}{L^{1-a_2}} = \frac{a_0 K^{a_1}}{L^{a_1}} = a_0 \left[\frac{K}{L}\right]^{a_1}, \text{ т.е } \frac{Y}{L} = a_0 \left[\frac{K}{L}\right]^{a_1}$$

Дроби $\frac{Y}{L} = z$ и $\frac{K}{L} = k$ называются соответственно производительностью труда и капиталовооруженностью труда. Используя новые символы, получим $z = a_0 k^{a_1}$, т.е из двухфакторной производственной функции Кобба-Дугласа получим формально однофакторную производственную функцию Кобба-Дугласа. В связи с тем, что $0 < a_1 < 1$, из последней формулы следует, что производительность труда Z растет медленнее его капиталовооруженности. Однако этот вывод справедлив для случая статической производственной функции Кобба-Дугласа в рамках существующей технологии и ресурсов. Отметим, что дробь $\frac{Y}{K}$ называется производительностью капитала или капиталоотдачей, обратные дроби $\frac{K}{Y}$ и $\frac{L}{Y}$ называются соответственно капиталоемкостью и трудоемкостью выпуска.

Производственная функция называется динамической, если:

1) время Т фигурирует в качестве самостоятельной переменной величины (как бы самостоятельного фактора производства), влияющего на объем выпускаемой продукции;
2) параметры производственной функции и ее характеристикаF зависят от времени Т.

При построении производственной функции НТП может быть учтен с помощью введения множителя НТП e^{pt}, где параметр p(p>0) характеризует темп прироста под влиянием НТП:

$$y(t) = e^{pt} f(x_1(t), x_2 t) \text{ где } (t = 0,1,...,T).$$

Эта простейший пример динамической производственной функции; она включает нейтральный, то есть не материализованный в одном из факторов, технический прогресс. В более сложных случаеях технический прогресс может воздействовать непосредственно на производительность труда или капитала (капиталоотдачу): $Y(t) = f(A(t) \cdot L(t), K(t))$ или $Y(t) = f(A(t) \cdot K(t), L(t))$. Он называется, соответственно, трудосберегающим или капиталосберегающим НТП

Пример На основании данных по экономике СССР (динамики национального дохода, численности занятых в материальном производстве и объеме основных фондов), опубликованных за 1960-1985 гг., макроэкономической производственной функции Кобба-Дугласа без учета НТП и с учетом НТП. Без учета НТП функция имеет вид $Y = 1{,}022K^{0{,}5382}L^{0{,}4618}$, с учетом НТП $Y = 1{,}038e^{0{,}0294t}K^{0{,}9749}L^{0{,}2399}$.

Выделение существенных видов ресурсов (факторов производства) и выбор аналитической формы функции называется спецификацией.

Преобразование реальных и экспертных данных в модельную информацию, т.е.расчет численных значений параметров на базе статистических данных с помощью регрессионного и корреляционного анализа, называют параметризацией.

Проверка истинности (адекватности) функции называют ее верификацией.

2. Формальные свойства производственных функций

Производственная функция $f(x_1, x_2)$ имеющая область определения $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ имеет следующие свойства.

1. Производство невозможно при отсутствии хотя бы одного ресурса, т.е. $f(0, x_2)$ = $f(x_1, 0)$ =0

2. При увеличении затрат производственных ресурсов выпуск продукции растет. x(1) $x(1) > x(0)$ $f(x(1)) > (f x(0))$, если функция дифференцирована, то можно записать $x > 0 \;\; \Rightarrow \;\; \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} > 0 \; (i = 1{,}2), \quad x = (x_1, x_2)$ или первая частная производная $\left[\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right]$ положительна.

3. По мере увеличения количества одного ресурса при постоянных количествах других предельная эффективность использования этого ресурса не возрастает. Математически это требование для дважды дифференцируемых производственных функций выглядит так. $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right) \leq 0$. В нашем примере рассмотренном ранее это означает, что рост вооруженности средствами производства приводит к росту выпуска продукции, но темп роста выпуска продукции все время падает (закон убывающей эффективности).

4. Производственная функция характеризуется определенной отдачей от расширения масштабов производства. Отдача от расширения масштабов производства характеризует производственную функцию с точки зрения изменения выпуска продукции при пропорциональном изменении затрат ресурсов, которое математически выражается в умножении всех компонент вектора x на положительный скаляр t. Принято говорить, что скалярная функция является однородной функцией степени δ (дельта), если для любого вектора x и любого скаляра t она удовлетворяет условию $f(tx) = t^{\delta} f(x)$

Математически четвертое предположение состоит в требовании однородности производственной функции. Если $\delta > 1$, то говорят, что производственная функция характеризуется возрастающей отдачей от расширения масштабов производства; если $\delta = 1$ - постоянной отдачей (наиболее часто встречающийся случай), а при $\delta < 1$ - убывающей отдачей.

Пример

Возьмем производственную функцию $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$, $a_1 + a_2 = 1$. Для нее выполняются все четыре свойства.

1. при $x_1 = 0$ $y = a_0 0^{a_1} x_2^{a_2} = 0$ при $x_2 = 0$ $y = a_0 x_1^{a_1} 0^{a_2} = 0$

2. $a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} < a_0 (x_1 + 1)^{a_1} x_2^{a_2}$ или

$a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} < a_0 x_1^{a_1} (x_2 + 1)^{a_2}$

Первая частная производная положительна.

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = a_0 x_2^{a_2} a_1 x_1^{a_1 - 1} \geq 0$$

3. $y_{ч_1}^{Э} = a_0 x_2{}^{a_2} a_1 (a_1 - 1) x_1^{a_1 - 2} \leq 0$ Вторая частная производная не положительна т.к. $a_0 \geq 0, \quad 0 \leq a_1 \leq 1$

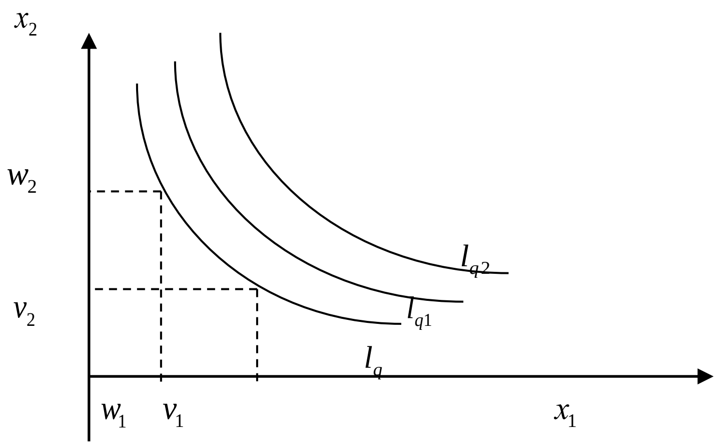
4. $a_0 (tx_1)^{a_1} (tx_2)^{a_2} = t^{a_1 + a_2} (a_0 x_1{}^{a_1} x_2{}^{a_2})$.

Если рассмотреть линейную производственную функцию $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$ для нее свойства 1 и 4 не выполняются.

3. Предельные и средние значения производственной функции

Возможность взаимного замещения ресурсов означает, что одно и то же количество продукта y может быть произведено при различных сочетаниях ресурсов. Совокупность таких сочетаний ресурсов, при которых может быть произведено определенное количество продукции q, называется изоквантой.

Различные наборы (v_1, v_2) и (w_1, w_2) затрачиваемых ресурсов, принадлежащие одной и той же изокванте l_q (т.е. $q = f(v_1, v_2) = f(w_1, w_2)$), дают один и тот же объем выпуска q.



Свойства изоквант:

1. Изокванты не пересекаются друг с другом.
2. Изокванта l_q разбивает пространства ресурсов на два множества, в одном из которых $q_0 < q$, в другом $q_1 > q$, причем граница между этими множествами проходит по изокванте l_q.

3. Большему выпуску продукции соответствует изокванта, более удаленная от начала координат.
4. Изоквнты не имеют общих точек с осями координат.

Средней производительностью I-го ресурса (фактора производства) или средним выпуском по i-му ресурсу (фактору производства) называют отношение значения функции к величине I-го ресурса. Символика:

$A_i = \dfrac{f(x)}{x_i}$, где $(i = 1{,}2)$ или $f(x) = f(x_1, x_2)$

В случае двухфакторной производственной функции Кобба-Дугласа для средних производительностей $\dfrac{Y}{K}$ и $\dfrac{Y}{L}$ основного капитала и труда были использованы соответственно термины капиталоотдача и производительность труда.

Предельной (маржинальной) производительностью i-го ресурса (фактора производства) или предельным выпуском по i-му ресурсу (фактору производства) называют первую частную производную функции $f(x) = f(x_1, x_2)$. Символика $M_i = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ Предельная производительность показывает, на сколько единиц увеличивается объем выпуска y, если объем затрат x_i i-го ресурса вырастает на одну единицу при неизменных объемах другого затрачиваемого ресурса.

Найдем средние (A_1, A_2) и предельные (M_1, M_2)значение для производственной функции Кобба-Дугласа.

1. $A_1 = \dfrac{f(x)}{x_1} = a_0 x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2}$; $A_2 = \dfrac{f(x)}{x_2} = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2 - 1}$

2. $M_1 = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} = a_0 a_1 x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2} = a_1 A_1$; $M_2 = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2} = a_2 A_2$;

$\dfrac{M_1}{A_1} = a_1 \le 1 \Rightarrow M_1 \le A_1$ и $\dfrac{M_2}{A_2} = a_2 \le 1 \Rightarrow M_2 \le A_2$ т.е. предельная производительность i-го ресурса не больше средней производительности этого ресурса. Это положение обычно выполняется и для других производственных функций.

Отношение предельной производительности M_i i-го ресурса к его средней производительности A_i называется эластичностью выпуска по i-му ресурсу (по фактору производства). Символика:

$E_i = \dfrac{M_i}{A_i} = \dfrac{x_i}{f(x)} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ $(i = 1{,}2)$.

Сумма $E_1 + E_2 = E_x$ называется эластичностью производства.

E_i показывает, на сколько процентов увеличится выпуск, если затраты i-го ресурса увеличатся на один процент при неизменных объемах другого ресурса..

Рассчитаем для производственной функции Кобба-Дугласа эластичность каждого ресурса и эластичность выпуска (E_1 , E_2, E_x).

Имеем : $E_1 = a_1$, $E_2 = a_2$, $E_x = E_1 + E_2 = a_1 + a_2$

Предельной нормой замены (замещения) i-го ресурса (фактора производства) j-м называется выражение:

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i} \quad (i, j = 1,2)$$

при постоянной y. i – номер заменяемого ресурса, j - номер замещающего ресурса или

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}}$$

Для двухфакторной производственной функции справедливо равенство:

$R_{12} = \frac{E_1}{E_2}\frac{x_2}{x_1}$, т.е. придельная норма замены первого ресурса вторым равна отношению эластичностей выпуска по первому и второму ресурсам, умноженному на отношение объема второго ресурса к объему первого ресурса.

Для производственной функции Кобба-Дугласа $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$ запишем предельную норму замены первого ресурса вторым R_{12} и предельную норму замены второго ресурса первым R_{21}.

$$R_{12} = \left[\frac{\partial f(x)}{x_1}\right] \Big/ \left[\frac{\partial f(x)}{x_2}\right] = \frac{a_0 x_2^{a_2} a_1 x_1^{a_1 - 1}}{a_0 x_1^{a_1} a_2 x_2^{a_2 - 1}} = \frac{a_1}{a_2}\frac{x_2}{x_1}, \; R_{21} = \frac{a_2}{a_1}\frac{x_1}{x_2}.$$

1.3 Лекция №3 (2 часа)

Тема: «Задачи оптимизации производства»

1.3.1 Вопросы лекции:

1. Основные понятия.
2. Максимизация прибыли в случае долговременного промежутка.
3. Максимизация прибыли в случае кратковременного промежутка

1.3.2 Краткое содержание вопросов

1. Основные понятия

Доходом (выручкой) фирмы в определенном периоде называется произведение общего объема выпускаемой фирмой продукции на рыночную цену этой продукции

$R = p_0 y$, где R – доход фирмы, p_0 - цена продукции, y – объем выпускаемой фирмой продукции ($y = f(x_1, x_2)$).

Издержками фирмы называют общие выплаты в определенном временном периоде за все виды затрат $C = p_1 x_1 + p_2 x_2$, где x_1 и x_2 - объемы используемых фирмой ресурсов (факторов производства), p_1 и p_2 - рыночные цены на эти ресурсы (факторы производства).

Прибылью фирмы называют разность между полученным фирмой доходом R и ее издержками производства

$PR = R - C$ или $PR(x_1, x_2) = p_0 f(x_1, x_2) - (p_1 x_1 + p_2 x_2)$.

В теории фирмы принято считать, что если фирма функционирует в условиях чистой (совершенной) конкуренции, на рыночные цены p_0, p_1 и p_2. она влиять не может. Фирма соглашается с ценами. Основная цель фирмы заключается в максимизации прибыли путем рационального распределения используемых ресурсов. Формально задача максимизации прибыли в определенном временном периоде имеет вид: PR $\to$ max. такая постановка задачи максимизации прибыли зависит от того, какой временной промежуток (долговременный или кратковременный) предшествует периоду, в котором фирма максимизирует свою прибыль.

В случае долговременного промежутка фирма может свободно выбирать любой вектор затрат $x = (x_1, x_2)$ из пространства затрат, поэтому задача максимизации прибыли в случае долговременного промежутка имеет следующий вид:

$$p_0 f(x_1, x_2) - (p_1 x_1 + p_2 x_2) = PR(x_1, x_2) \to \max$$

при условии, что $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$ (x_1 и x_2 - объемы используемых фирмой ресурсов).

в случае краткосрочного промежутка фирма должна учитывать неизбежные лимиты на объемы используемых ею ресурсов, которые формально могут быть записаны в виде нелинейного неравенства

$g(x_1, x_2) \leq b$

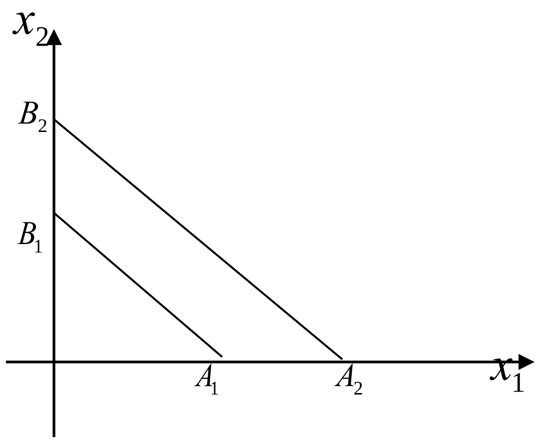
(ограничений вида $g(x_1, x_2) \leq b$ моет быть несколько). Следовательно задача максимизации прибыли для краткосрочного промежутка имеет вид задачи математического программирования:

$p_0 f(x_1, x_2) - (p_1 x_1 + p_2 x_2) = PR(x_1, x_2) \to \max$

при условии, что $g(x_1, x_2) \leq b$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$.

Линия уровня функции издержек производства $z = p_1 x_1 + p_2 x_2$ называется *изокостой*. В связи с тем, что по экономическому смыслу $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$ изокоста есть отрезок прямой , попадающий в неотрицательный ортант плоскости Ox_1x_2.



Отрезок расположенный "северо-восточнее" соответствует большим издержкам производства.

Если для отрезка A_1B_1 издержки производства равны C_1, то его аналитическое представление имеет вид $C_1 = p_1 x_1 + p_2 x_2$, $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$.

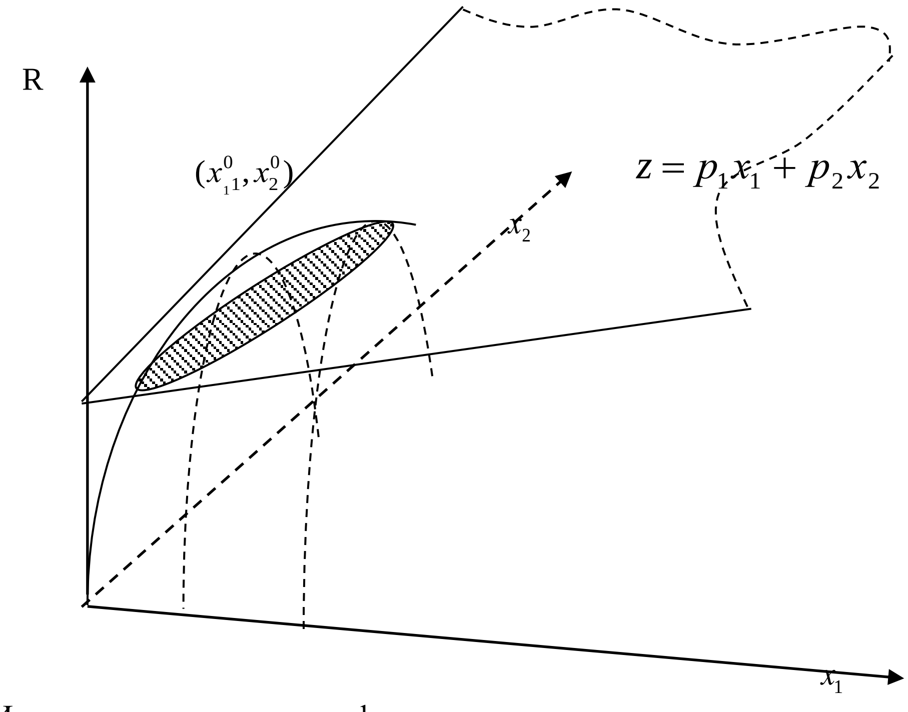
2. Максимизация прибыли в случае долговременного промежутка.

В связи с тем, что, как правило, $f(x_1,0)=f(0,x_2)=0$, экономически осмысленным является следующие утверждение $x_1>0,\ \ x_2>0$. Поэтому в случае долговременного промежутка задача максимизации прибыли собой обычную задачу на глобальный абсолютный максимум при $x_1>0,\ \ x_2>0$. Из математического анализа известно, что точки локального абсолютного максимума следует искать только среди точек (x_1,x_2), которые удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial PR(x_1,x_2)}{\partial x_1}=0, \\ \dfrac{\partial PR(x_1,x_2)}{\partial x_2}=0. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \dfrac{\partial(p_0 f(x_1,x_2)-(p_1x_1+p_2x_2)}{\partial x_1}=0, \\ \dfrac{\partial(p_0 f(x_1,x_2)-(p_1x_1+p_2x_2)}{\partial x_1}=0. \end{cases} \quad \begin{cases} p_0\dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}-p_1=0, \\ p_0\dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}-p_2=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_0\dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}=p_1, \\ p_0\dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}=p_2. \end{cases}$$

Если выполняется условие, что вторые частные производные меньше 0, то графиком функции $y=f(x_1,x_2)$ в трехмерном пространстве есть поверхность, выпуклая вверх. Следовательно, график прибыли $PR(x_1,x_2)=p_0 f(x_1,x_2)-(p_1x_1+p_2x_2)$, получаемой путем вычитания из графика функции $p_0 f(x_1,x_2)$ плоскости $z=p_1x_1+p_2x_2$, являющейся графиком издержек производства, имеет вид "шапочки", у которой есть "макушка". "Макушка" соответствует глобальному максимуму прибыли.



Из этого геометрического факта следует, что система имеет единственное решение в точке (x_1^0,x_2^0), которое является точкой не только локального, но и глобального максимума прибыли. Точка (x_1^0,x_2^0) (где x_1^0,x_2^0- затраты ресурсов), которая является решением задачи максимизации прибыли, называется локальным (частичным) рыночным равновесием фирмы (в случае долговременного промежутка).

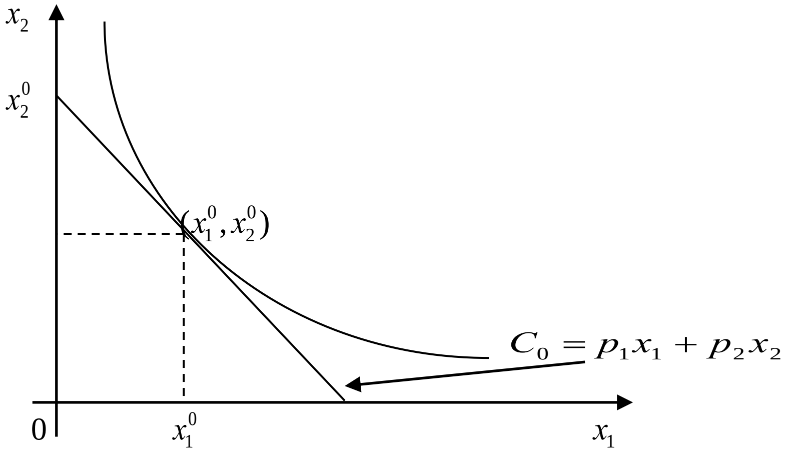
Подставив значения. (x_1^0, x_2^0) в уравнение, получим тождества:

$p_0 \dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} = p_1, \quad p_0 \dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} = p_2$, откуда путем почленного деления первого тождества на второе получаем:

$$\frac{\dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2},$$

т.е. в точке (x_1^0, x_2^0) локального рыночного равновесия фирмы отношение предельной производительности первого ресурса к предельной производительности второго ресурса равно отношению рыночных цен на эти ресурсы.

Проведем через точку (x_1^0, x_2^0) изокванту и изокосту, которые эту точку содержат. Уравнение изокванты имеет вид $y_0 = f(x_1^0, x_2^0)$, уравнение изокосты имеет вид $C_0 = p_1 x_1 + p_2 x_2$. Графически решение задачи максимизации прибыли (если рассмотреть плоскость) будет выглядеть так.



Получена важная геометрическая характеристика локального рыночного равновесия фирмы – касание в точке равновесия изокванты и изокосты.

Отметим, что, приступая к решению задачи максимизации прибыли мы не имели конкретных изокванты и изокосты, которые касаются друг друга в точке (x_1^0, x_2^0), так как не имели самой этой точки. Касающиеся друг друга изокванта и изокоста появляются после того, как аналитически найдено локальное рыночное равновесие (x_1^0, x_2^0) путем решения системы уравнений.

Левая ("четырехэтажная") дробь есть не что иное, как предельная норма замены первого ресурса вторым $R_{12}(x_1^0, x_2^0)$ в точке .

Само равенство выражает следующее фундаментальное положение теории фирмы: в точке локального рыночного равновесия (x_1^0, x_2^0) предельная норма замены первого ресурса вторым равна отношению рыночных цен на эти ресурсы.

Поскольку x_1^0, x_2^0 есть функции цен (p_0, p_1, p_2), т.е. $x_1^0 = d_1(p_0, p_1, p_2)$, $x_2^0 = d_2(p_0, p_1, p_2)$, то они называются функциями спроса на ресурсы. Их значения x_1^0, x_2^0

выражают оптимальнные выборы затрат ресурсов как функции цены как функции цены выпускаемой продукции и цен на ресурсы.

Подставив функции спроса на ресурсы в производственную функцию $y = f(x_1, x_2)$, получим выражение $y^0 = f(d_1(p_0, p_1, p_2), d_{21}(p_0, p_1, p_2)) = s(p_0, p_1, p_2)$, которое называется функцией предложения выпуска.

Функции спроса на ресурсы и функция предложения выпуска являются однородными нулевой степени по всем своим аргументам p_0, p_1, p_2, т.е.

$d_1(tp_0, tp_1, tp_2) = d_1(p_0, p_1, p_2)$,

$d_2(tp_0, tp_1, tp_2) = d_2(p_0, p_1, p_2)$,

$s(tp_0, tp_1, tp_2) = s(p_0, p_1, p_2)$, для любого $t > 0$. свойство однородности означает, что одновременное изменение всех цен p_0, p_1, p_2 в одно и тоже число раз t (изменение масштаба, но не структуры цен)не меняет x_1^0, x_2^0 и y_0.

3. Максимизация прибыли в случае кратковременного промежутка

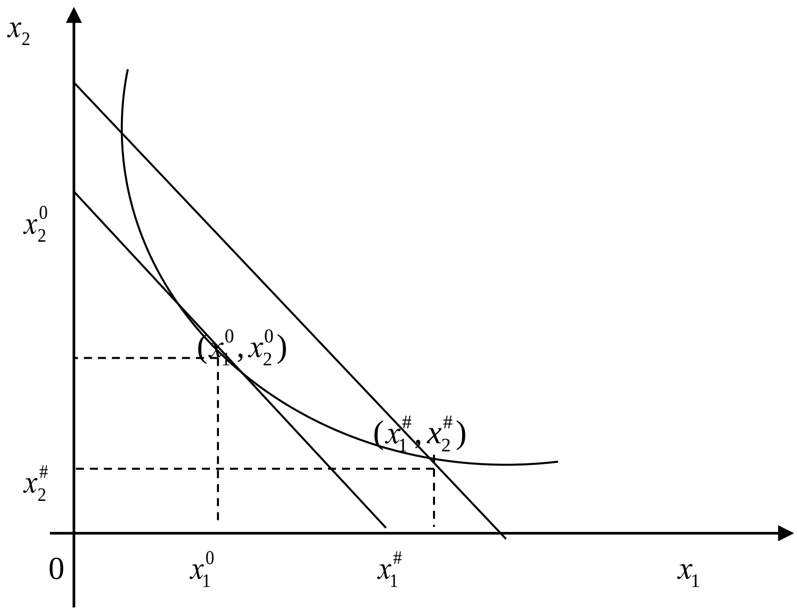
В случае краткосрочного промежутка рассмотрим конкретный пример, когда второй ресурс фирма может использовать только в объеме, равном $x_2^{\#} > 0$. Тогда задача максимизации прибыли превращается в задачу максимизации функции одной переменной:

$p_0 f(x_1, x_2^{\#}) - (p_1 x_1 + p_2 x_2^{\#}) = PR(x_1, x_2^{\#}) \to \max$,

и вместо системы уравнений появляется только одно уравнение

$$\frac{\partial PR(x_1, x_2^{\#})}{\partial x_1} = 0, \text{ или } p_0 \frac{\partial f(x_1, x_2^{\#})}{\partial x_1} = p_1.$$

Полученной уравнение имеет единственное решение $x_1 = x_1^{\#}$ ($x_1^{\#}$ зависит от $x_2^{\#}$, следовательно в случае краткосрочного промежутка локальное рыночное равновесие есть вектор $(x_1^{\#}, x_2^{\#})$. Геометрическое решение задачи будет иметь следующий вид:



Если бы объем второго ресурса не был лимитирован, то, локальным рыночным равновесием была бы точка касания (x_1^0, x_2^0), в которой тот же объем выпускаемой продукции (изокванта одна и та же) получился бы с меньшими издержками производства. Изокоста, содержащая точку $(x_1^{\#}, x_2^{\#})$, находится более "северо-западнее", аследовательнее соответствует большим издержкам производства. В точке $(x_1^{\#}, x_2^{\#})$ локального рыночного равновесия, содержащие ее изокванта и изокоста пересекаются, но не касаются . В рассматриваемом случае $x_1^{\#} = x_1^{\#}(x_2^{\#}, p_0, p_1, p_2)$, это и есть функция спроса на первый ресурс при фиксированном объеме $x_2^{\#}$ второго ресурса. Функция предложения имеет вид $y = f(x_1^{\#}(x_2^{\#}, p_0, p_1, p_2), x_2^{\#})$.

1.4 Лекция № 4 (2 часа)

Тема: «Модели экономического роста»

1.4.1 Вопросы лекции:

1. Однофакторные модели экономического роста
2. Многофакторная модель экономического роста Солоу

1.4.2 Краткое содержание вопросов

1. Однофакторные модели экономического роста

Макроэкономика изучает функционирование экономической системы как единого целого, с точки макроподхода.

При макроподходе объект (будь это такая сложная система как народное хозяйство, или его составные части : промышленность. сельское хозяйство, транспорт и т.д.) рассматриваются как единое целое и как бы снаружи, со стороны.

Макроэкономическая модель представляет собой математически формализованную концепцию функционирования народного хозяйства как единого целого. Макромодели используются для теоретического анализа наиболее общих закономерностей функционирования и развития национальной экономики. Важным полем применения макроэкономических моделей является прогнозирование народнохозяйственных процессов. Для этого используют производственные функции, модели оптимизации соотношения норм накопления и норм потребления, оптимизации национального дохода, валовых капиталовложений и др.

Основные назначения макромоделей:

- анализ структуры и динамики народного хозяйства;
- прогнозирование развития народного хозяйства;
- исследование экономических циклов;
- повышение эффективности государственного регулирования экономики;
- формирование основы для разработки оптимальных планов развития экономических систем.

В теоретической экономике , применяющей математический аппарат для моделирования и исследования социально-экономических процессов и явлений, разработаны и применяются два основных принципа моделирования: экономического роста и экономического равновесия.

Принцип экономического роста позволяет моделировать динамику социально-экономических процессов, принцип экономического равновесия – статику.

Исследование проблем экономического роста можно проводить, используя аппарат математического моделирования. Модель экономического роста – это обычно математико-статистическая модель, описывающая темпы роста, пропорции, направления и условия развития экономики. Эти модели позволяют проводить анализ отдельных зависимостей и тенденций в экономике, а также прогнозировать и планировать ее развитие. Часто объектом исследования являются темпы равновесного роста, в которых равновесие понимается в смысле устойчивых темпов роста при соблюдении определенных пропорций, балансирующих экономику страны. К таким пропорциям относят: соотношение между накоплением и потреблением в национальном доходе, между численностью населения в трудоспособном возрасте и числом занятых в общественном производстве, между наличным фондом капитальных вложений и потребным объемом производственных фондов и т.д. К основным факторам, которые определяют экономический рост в моделях, обычно относят: капиталовложения, производственные фонды, производительность труда, численность и динамику населения, научно-технический прогресс и некоторые другие.

Выделяют однофакторные (односекторные) и многофакторные модели экономического роста.

Однофакторную модель экономического роста можно назвать моделью естественного роста. Предполагается, что прирост продукции, выпускаемой экономической системой, в последующую единицу времени, обычно год, пропорционален абсолютному значению этого показателя.

Пусть прирост национального дохода за год пропорционален величине самого национального дохода Y_t с постоянным коэффициентом n т.е.

$$Y_{t+1} - Y_t = nY_t .$$

В этом случае, зная значение национального дохода в базисном году Y_0 , можно вычислить значение Y для любого t:

$$Y_1 = Y_0 + nY_0 = Y_0(1+n) ,$$

$$Y_2 = Y_1 + nY_1 = Y_0(1+n)^2 ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Y_t = Y_0(1+n)^t .$$

Если принять, что рост национального дохода – непрерывная и непрерывно дифференцируемая функция времени t, то прирост национального дохода можно выразить в виде производной:

$$\frac{dY_t}{dt} = nY_t .$$

Преобразовав это уравнение к виду $\dfrac{dY_t}{Y_t} = ndt$ и проинтегрировав его, получим: $InY_t = nt + InY_0$ или $In(Y_t/Y_0) = nt$, откуда $Y_t = Y_0 e^{nt}$.Данная модель отражает рост национального дохода во времени, но не выявляет факторы роста и механизм их взаимодействия.

Одним из важнейших факторов роста экономики считают капитальные вложения, поскольку именно этот фактор дает возможность строить и развивать производственные предприятия, приобретать новые станки и оборудование, осваивать новые месторождения и т.п.

Роль капитальных вложений можно отразить с помощью следующей простейшей модели Дж.М.Кейнса, в которой центральное место занимает понятие мультипликатора.

Под мультипликатором понимается количественное соотношение, выражающее зависимость между динамикой капиталовложений и вызываемым ею темпом роста национального дохода.

Мультипликатор представляет собой коэффициент, показывающий, во сколько раз возрастает доход при данном росте инвестиций. Так, если ΔY есть прирост национального дохода, а ΔК – прирост инвестиций, то выполняется соотношение

$$\Delta Y = k\Delta K$$

где k – коэффициент мультипликации, или мультипликатор.

Из равенства следует, что $k = \Delta Y/\Delta K$. С другой стороны, согласно кейнсианской теории, общий объем национального дохода, выраженного в данном случае в приросте, используется для покрытия расходов на непроизводственное потребление (ΔС) и новые инвестиции (ΔК). Заменяя в последнем равенстве ΔК на разность (ΔY-ΔС), получаем

$$k = \Delta Y/(\Delta Y - \Delta C).$$

Разделив числитель и знаменатель на одну и ту же величину, приходим к окончательной записи формулы мультипликатора:

$$k = 1/(1 - \Delta C/\Delta Y),$$

где $\Delta C/\Delta Y$ есть доля прироста фонда потребления в приросте национального дохода. Кейнс и его последователи называют эту величину "предельной склонностью к потреблению". Приняв определенные условия и измерив численно "предельную склонность к потреблению", можно проследить множественный эффект, производимый данным приростом инвестиций на прирост национального дохода ΔY. В самом деле, обозначив «предельную склонность к потребителю» $\Delta C/\Delta Y$ через n и подставив ее в значение мультипликатора k, полученное в, будем и меть

$$\Delta Y = \Delta K/(1 - n).$$

В уравнении прирост национального дохода выражен как функция от прироста инвестиций.

2. Многофакторная модель экономического роста Солоу

Состояние экономики в модели Солоу задается пятью переменными состояния: Y – конечный продукт, L – наличные трудовые ресурсы, K – производственные фонды, I – инвестиции, C – размер непроизводственного потребления. Все переменные взаимосвязано изменяются во времени, т.е. являются функциями времени t, но аргумент t будет часто опускаться, хотя и будет подразумеваться по умолчанию.

Время будет предполагаться непрерывным. Для мгновенных показателей K, L можно считать, что K, L – соответственно фонды и трудовые ресурсы в момент t или, чтобы избежать сезонных изменений числа занятых и всплеска фондов при вводе новых мощностей, K и L можно считать средними значениями этих величин за год, серединой которого служит t. Для величин же Y, C, I их значения в момент t можно себе представить, как их объемы, накопленные за год, серединой которого служит момент t (но и в этом случае они остаются функциями времени и их же лучше воспринимать как мощность производства и мгновенные скорости потребления и инвестирования).

Считается, что ресурсы (производственные и трудовые) используются полностью. Годовой конечный продукт в каждый момент времени является функцией среднегодовых фондов и труда:

$Y = F(K, L)$.

Таким образом, $Y = F(K, L)$ – производственная функция народного хозяйства.

Конечный продукт используется на непроизводственное потребление и инвестиции:

$Y = C + I$.

Назовем нормой накопления ρ долю конечного продукта, используемого на инвестиции, тогда

$I = \rho Y$, $C = (1 - \rho) Y$.

В дальнейшем норма накопления будет считаться постоянной: $\rho = \text{const}$, $0 < \rho < 1$.

Инвестиции используются на восстановление выбывших фондов и на их прирост. Если принять, что выбытие происходит с постоянным коэффициентом выбытия μ, $0 < \mu < 1$ (в расчете на год), то

$K = K(t + \Delta t) - K(t) = \rho Y\Delta t - \mu K\Delta t,$

поэтому $dK/dt = \rho Y - \mu K$.

Если считать, что прирост трудовых ресурсов пропорционален наличными трудовыми ресурсами, т.е. $\Delta L = vL \cdot \Delta t$, то получаем дифференциальное уравнение

$dL/dt = vL$ и, решая его, получаем $L = L_0 e^{vt}$, где $L_0 = L(0)$ – трудовые ресурсы в начале наблюдения, при $t = 0$.

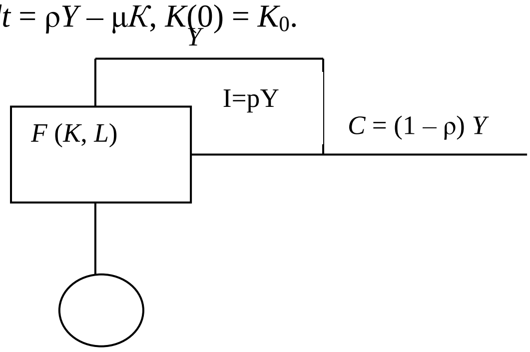
Таким образом, модель Солоу задается схемой или системой уравнений:

$C = (1 - \rho)\, Y$;

$Y = F\,(K, L)$;

$L = L_0 e^{vt}$;

$dK/dt = \rho Y - \mu K$, $K(0) = K_0$.



Функция $F\,(K, L)$;удовлетворяет требованиям к производственным функциям и считается линейно-однородной, т.е. $F\,(\lambda K, \lambda L) = \lambda F\,(K, L)$. Пользуясь ее однородностью и обозначив среднюю производительность труда $y = Y/L$ и среднюю фондовооруженность $k = K/L$, получаем

$y = Y/L = F\,(K, L)/L = F\,(K/L, 1) = F\,(k,1)$,

а если обозначим последнюю функцию $f(k)$, то получаем $y = f(k)$.

Далее найдем производную от k по t:

$dk/dt = d(K/L)/dt = (K^{/}L - KL^{/})/L^2 = K^{/}/L - K(L^{/}/L^2) =$

$=(\rho Y - \mu K)/L - Kv/L = \rho y - (\mu + v)k$.

Окончательно:

$$dk/dt = \rho f(k) - (\mu + v)k,\ k(0) = k_0 = K_0/L_0.$$

Поведение макропоказателей модели целиком определятся данным уравнением и динамикой трудовых ресурсов $L = L_0 e^{vt}$.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

2.1 Лабораторная работа№ 1 (1 часа)

Тема: «Приемы моделирования»

2.1.1 Цель работы: Изучить приемы моделирования особенности их применения

2.1.2 Задачи работы:

1. Построение модели и ее математическая запись. Символика обозначений
2. Использование табличного редактора Excel для решения задач линейного программирования

2.1.3 Описание (ход) работы:

Упражнения

Задача 1

Для производства продукции типа $П_1$ и $П_2$ предприятие использует два вида сырья: C_1 и C_2. Данные об условиях производства приведены в таблице.

Сырье	Расход сырья на единицу продукции, кг/ед.		Количество сырья, кг
	$П_1$	$П_2$	
C_1	1	3	300
C_2	1	1	150
Прибыль на единицу продукции, тыс. руб.	2	3	-

Составить план производства по критерию максимум прибыли.

Решение

1. Состав переменных

x_1 – количество (единиц) продукции $П_1$;
x_2 – количество (единиц) продукции $П_2$.

2. Числовая модель

I. Целевая функция. Критерий оптимальности получение максимума прибыли от производственной деятельности. Следовательно,

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

II. Основные ограничения
В таблице представлены данные по расходу основных производственных ресурсов (сырье C_1 и C_2) на производство продукции $П_1$ и $П_2$. Используя данные таблицы, составим ограничения:

$1x_1 + 3x_2 \le 300$
$1x_1 + 1x_2 \le 150$

III. Условие неотрицательности переменных

$x_1 \ge 0$
$x_2 \ge 0$

3. Общий вид экономико-математической модели

I. $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max$

II. $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$
III. $x_j \geq 0$, (j=1, 2)

4. Структурная форма экономико-математической модели

I. $$Z = \sum_{j=1}^{2} c_j x_j \to \max$$

II. $$\sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1{,}2$$

III. $$x_j \geq 0, \qquad j = 1{,}2$$

5. Решение задачи с использованием табличного редактора MS Excel
Чтобы решить задачу, используя табличный редактор MS Excel необходимо:

- Открыть табличный редактор (Пуск → Программы → MS Excel);
- Запишем числовую модель задачи на рабочий лист (рисунок 1.1). Для этого необходимо выбрать ячейки в которых будут находиться переменные. Допустим $x_1 \to$C1 $x_2 \to$C2 (выбор ячеек произволен).

В ячейке A1 запишем целевую функцию $Z = 2x_1 + 3x_2$: A1: =2*C1+3*C2
Примечание: запись формул всегда начинается со знака «=».
В ячейку B1 запишем левую часть 1-го ограничения ($1x_1 + 3x_2$)
B1: =C1+3*C2
В ячейку B2 запишем левую часть 2-го ограничения ($1x_1 + 1x_2$)
B2:=C1+C2

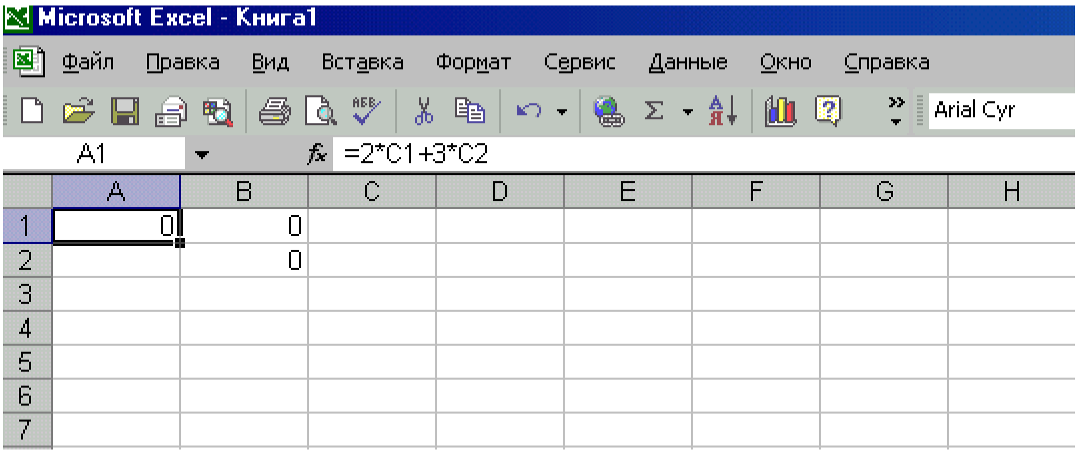


Рисунок 1.1 – Запись числовой модели на рабочем листе MS Excel

- После как числовая модель записана, необходимо установить курсор в ячейку A1 (в ней расположена целевая функция). Выбираем вкладку «Сервис» → «Поиск решения…», при этом откроется диалоговое окно функции «Поиск решения».
- В открывшемся окне необходимо установить целевую ячейку, а поскольку у вас курсор стоял на ячейке A1, то значение целевой ячейки будет правильным. В противном случае установите в ручную адрес целевой ячейки (в данном случае программа использует абсолютные адреса т.е. ячейка A1 имеет абсолютный адрес $A$1) (рисунок 1.2).

- Установите маркер в положение, соответствующие критерию оптимальности: максимальному или минимальному значению.

- В окне «Изменяя ячейки» нужно указать адреса ячеек соответствующие переменным. Для этого необходимо выделить диапазон ячейки с С1 по С2 (рисунок 1.2).

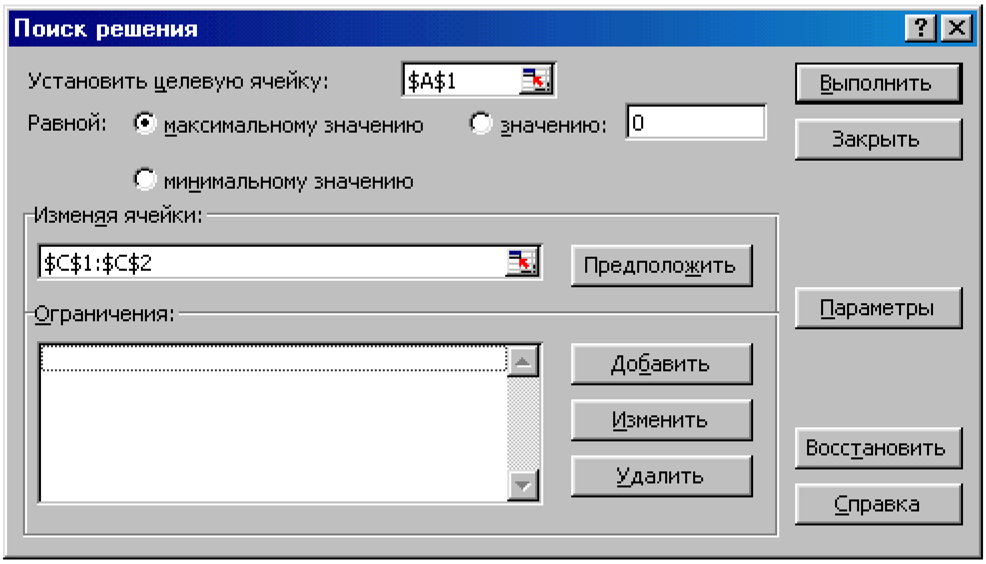


Рисунок 1.2 – Работа в диалоговом окне «Поиск решения»

- В окне «Ограничения» активировать кнопку «Добавить». Откроется окно «Добавить ограничения» (рисунок 1.3). Вводим первое ограничение: в окне «Ссылка на ячейку» указывают адрес ячейки, где находится левая часть 1-го ограничения - $B$1, затем выбирают знак ограничения « $\le$ » и значение – 300.

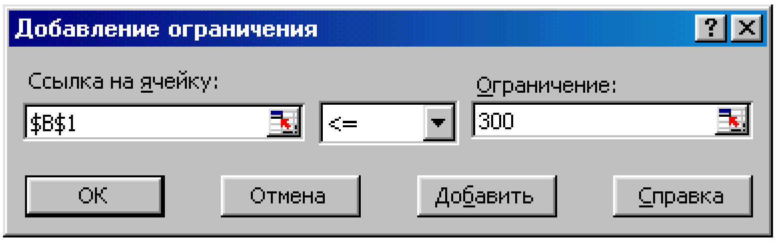


Рисунок 1.3 – Диалоговое окно «Добавление ограничения»

- Активируем клавишу «добавить» и аналогично вводим второе ограничение. Затем вводим условие неорицательности. Для этого в окне «Ссылка на ячейку» указываем диапазон ячеек, в которых находятся переменные ($C$1:$C$2). После добавления всех ограничений выбираем «ОК». Программа возвращается в диалоговое окно «Поиск решения». Ввод числовой модели закончен (рисунок 1.4).

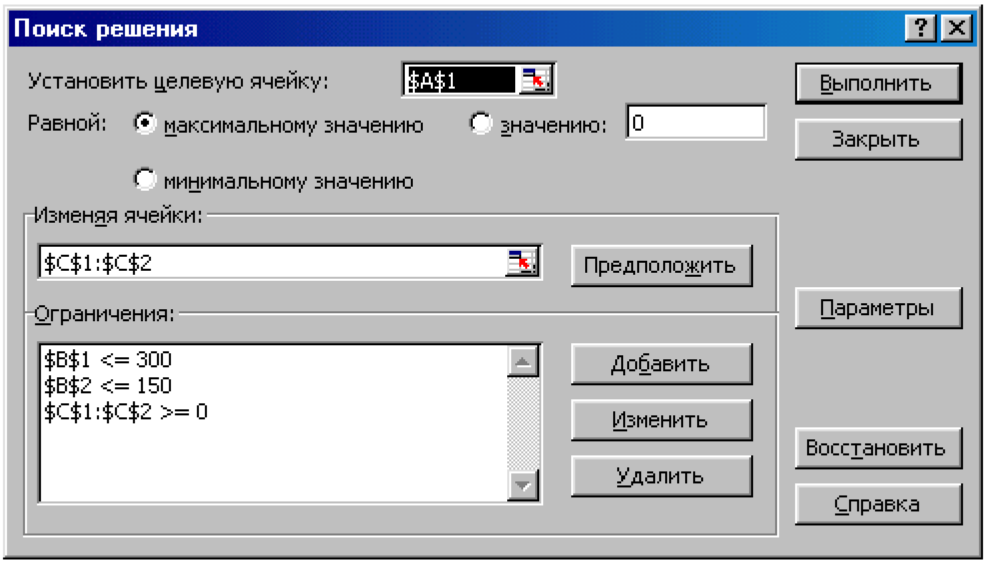


Рисунок 1.4 – Завершение ввода числовой модели в диалоговом окне «Поиск решения»

- Выбираем команду «Выполнить». На экране появится окно «Результаты поиска решения» (рисунок 1.5). Если модель составлена правильно и имеет решение, в открывшемся окне будет сообщение: «Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены». В окне «Тип отчета» выберите «Результаты» и нажмите «ОК».

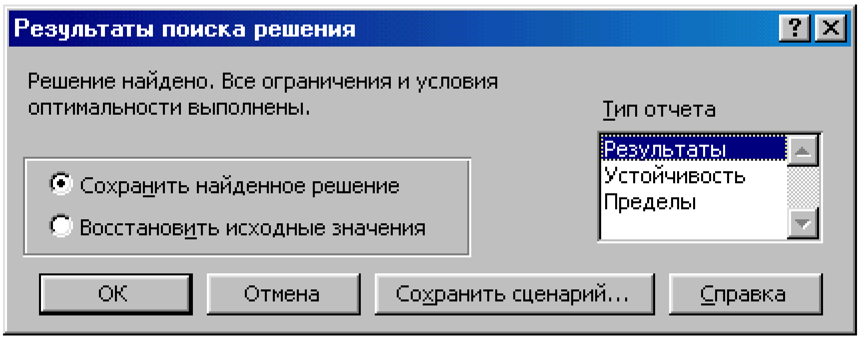
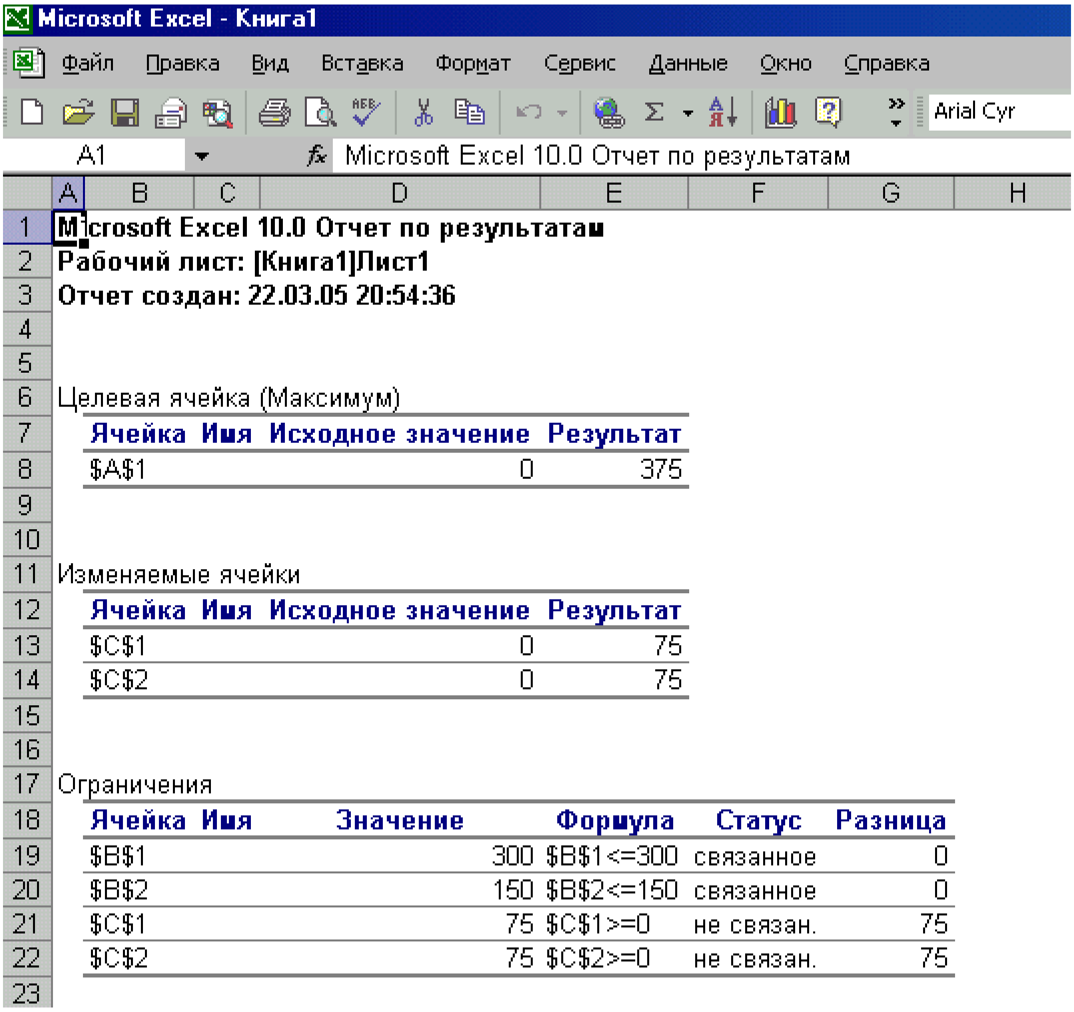


Рисунок 1.5 – Окно «Результаты поиска решения»

Результат решения задачи представлен в «Отчете по результатам» (рисунок 1.6). Решение задачи окончено.


Microsoft Excel - Книга1

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

Arial Cyr

A1 Microsoft Excel 10.0 Отчет по результатам

Microsoft Excel 10.0 Отчет по результатам
Рабочий лист: [Книга1]Лист1
Отчет создан: 22.03.05 20:54:36

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$A$1		0	375

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$C$1		0	75
$C$2		0	75

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$B$1		300	$B$1<=300	связанное	0
$B$2		150	$B$2<=150	связанное	0
$C$1		75	$C$1>=0	не связан.	75
$C$2		75	$C$2>=0	не связан.	75

Рисунок 1.6 – Отчет по результатам

- Решение задачи окончено, результаты можно распечатать.

Примечание

Если поиск не может найти оптимальное решение, в диалоговом окне **Результаты поиска решения** выводится одно из следующих сообщений.

Поиск не может улучшить текущее решение. Все ограничения выполнены.

В процессе поиска решения нельзя найти такой набор значений влияющих ячеек, который был бы лучше текущего решения. Приблизительное решение найдено, но либо дальнейшее уточнение невозможно, либо погрешность, заданная в диалоговом окне **Параметры поиска решения** слишком высока. Измените погрешность на меньшее число и запустите процедуру поиска решения снова.

Поиск остановлен (истекло заданное на поиск время).

Время, отпущенное на решение задачи, исчерпано, но достичь удовлетворительного решения не удалось. Чтобы при следующем запуске процедуры поиска решения не повторять выполненные вычисления, установите переключатель **Сохранить найденное решение** или **Сохранить сценарий**.

Поиск остановлен (достигнуто максимальное число итераций).

Произведено разрешенное число итераций, но достичь удовлетворительного решения не удалось. Увеличение числа итераций может помочь, однако следует рассмотреть результаты, чтобы понять причины остановки. Чтобы при следующем запуске процедуры поиска решения не повторять выполненные вычисления, установите переключатель **Сохранить найденное решение** или нажмите кнопку **Сохранить сценарий**.

Значения целевой ячейки не сходятся.

Значение целевой ячейки неограниченно увеличивается (или уменьшается), даже если все ограничения соблюдены. Возможно следует в задаче снять одно ограничение или сразу несколько. Изучите процесс расхождения решения, проверьте ограничения и запустите задачу снова.

Поиск не может найти подходящего решения.

В процессе поиска решения нельзя сделать итерацию, которая удовлетворяла бы всем ограничениям при заданной точности. Вероятно, ограничения противоречивы. Исследуйте лист на предмет возможных ошибок в формулах ограничений или в выборе ограничений.

Поиск остановлен по требованию пользователя.

Нажата кнопка **Стоп** в диалоговом окне **Текущее состояние поиска решения** после прерывания поиска решения в процессе выполнения итераций.

Условия для линейной модели не удовлетворяются.

Установлен флажок **Линейная модель**, однако итоговый пересчет порождает такие значения, которые не согласуются с линейной моделью. Это означает, что решение недействительно для данных формул листа. Чтобы проверить линейность задачи, установите флажок **Автоматическое масштабирование** и повторно запустите задачу. Если это сообщение опять появится на экране, снимите флажок **Линейная модель** и снова запустите задачу.

При поиске решения обнаружено ошибочное значение в целевой ячейке или в ячейке ограничения.

При пересчете значений ячеек обнаружена ошибка в одной формуле или в нескольких сразу. Найдите целевую ячейку или ячейку ограничения, порождающие ошибку, и измените их формулы так, чтобы они возвращали подходящее числовое значение.

Набрано неверное имя или формула в окне **Добавить ограничение** или в окне **Изменить ограничение**, либо в поле **Ограничение** было задано целое или двоичное ограничение. Чтобы ограничить значения ячейки множеством целых чисел выберите оператор **целого** ограничения в списке условных операторов. Чтобы установить двоичное ограничение, выберите оператор для **двоичного** ограничения.

Интерпретация результатов задачи

Полученные значения в ячейках, содержащих формулы целевой функции или ограничений, являются результатом расчета целевой функции и соответствующих ограничений.

Результат, полученный в ячейке A1 означает прибыль, полученную от производства продукции.

Ячейки C1, C2 указывают нам на количество произведенной продукции.

В ячейке B1 записано 1-ое ограничение, характеризующее расход сырья C_1 на производство всех видов продукции. При этом получился результат равный 300, разница равна 0, что указывает на полный расход сырья данного вида.

В ячейке B2 записано второе ограничение, характеризующее расход сырья C_2 на производство продукции $П_1$ и $П_2$. Результат равен 150, разница равна 0, что полностью соответствует заданному ограничению (т.е. сырье C_2 израсходовано полностью).

Значение ячеек C1, C2 превышают 0, т.е. условие неотрицательности переменных выполнено.

Ответ

Максимальная прибыль возможна в размере 375 единиц.

Объем выпуска продукции: $П_1$ - 75 штук, $П_2$ - 75 штук.

Сырье C1 иC2 израсходовано полностью, условие неотрицательности выполнено.

Порядок оформления задачи

1. Состав переменных

x_1 – количество продукции $П_1$, единиц;

x_2 – количество продукции $П_2$, единиц.

2. Числовая модель

I. $Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

II. $1x_1 + 3x_2 \leq 300$

$1x_1 + 1x_2 \leq 150$

III. $x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

3. Общий вид экономико-математической модели

I. $Z = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max$

II. $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$

III. $x_j \geq 0$, (j=1, 2)

4. Структурная форма экономико-математической модели

I. $$Z = \sum_{j=1}^{2} c_j x_j \to \max$$

II. $$\sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1{,}2$$

III. $$x_j \geq 0, \qquad j = 1{,}2$$

5. Ответ: **м**аксимальная прибыль возможна в размере 375 единиц;

объем выпуска продукции: $П_1$ - 75 штук, $П_2$ - 75 штук;

сырье С1 иС2 израсходовано полностью,

условие неотрицательности выполнено.

Задача 2

Для выпуска четырех видов продукции требуются затраты сырья, рабочего времени и оборудования. Исходные данные приведены в таблице.

Тип ресурса	Нормы затрат ресурсов на единицу продукции				Наличие ресурсов
	1	2	3	4	
Сырье	3	5	2	4	60
Рабочее время	22	14	18	30	400
Оборудование	10	14	8	16	128
Прибыль на единицу продукции	30	25	8	16	

Необходимо формулировать экономико-математическую модель задачи на максимум прибыли и найти оптимальный план выпуска продукции.

Задача 3

Для выпуска четырех видов продукции P_1, P_2, P_3, P_4 на предприятии используют три вида сырья S_1, S_2 и S_3. объемы выделенного сырья, нормы расхода сырья и прибыль на единицу продукции при изготовлении каждого вида продукции приведены в таблице. Требуется определить план выпуска продукции, обеспечивающий наибольшую прибыль.

Составим экономико-математическую модель задачи оптимального использования ресурсов на максимум прибыли. В качестве неизвестных примем выпуска продукции j-го вида x_j (j = 1,2,3,4).

Вид сырья	Запасы сырья	Вид продукции			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	35	4	2	2	3
S_2	30	1	1	2	3
S_3	40	3	1	2	1
Прибыль		14	10	14	11

Задача 4

Фабрика выпускает три вида тканей, причем суточное плановое задание составляет не менее 90 м тканей первого вида, 70 м – второго и 60 м – третьего. Суточные ресурсы следующие: 780 единиц производственного оборудования,850 единиц сырья, 790 единиц электроэнергии, расход которых на один метр ткани представлен в таблица.

Ресурсы	Ткани		
	I	II	III
Оборудование	2	3	4
Сырье	1	4	5
Электроэнергия	3	4	2

Цена за один метр ткани вида I равна 80 денежным единицам, II – 70 денежным единицам, III – 60 денежным единицам.

Необходимо определить, сколько метров ткани каждого вида следует выпустить, чтобы общая стоимость выпускаемой продукции была максимальной.

Задача 5

На основании информации, приведенной в таблице, составить план производства, максимизирующий объем прибыли.

Ресурсы	Затраты ресурсов на единицу продукции		Наличие ресурсов
	А	Б	
Труд	2	4	2000
Сырье	4	1	1400
Оборудование	2	1	800
Прибыль на единицу продукции	40	60	

2.2 Лабораторная работа №2 (1 часа)

Тема: «Моделирование кормового рациона»

2.2.1 Цель работы: «Изучить особенности построения модели кормового рациона и ее решения»

2.2.2 Задачи работы:

1. Постановка задачи

2. Структурная модель

2.2.3 Описание (ход) работы:

4. Анализ и экономическая интерпретация полученных результатов

цель задачи можно выразить следующим образом: из имеющихся в сельскохозяйственном предприятии кормов составить такой рацион кормления, который полностью отвечал бы требованиям животных по содержанию в нем питательных веществ, соотношению отдельных видов и групп кормов и одновременно был самым дешевым для хозяйства. Критерием оптимальности чаще всего служит показатель минимум стоимости (себестоимости) рациона.

Основными переменными в экономико-математической задачи являются корма, имеющиеся в хозяйстве, а также корма, кормовые и минеральные добавки, которые хозяйство может приобрести. Единица измерения этих переменных являются весовые единицы – кг, ц в зависимости от периода, на который составляется, - сутки, год.

В экономико-экономической задаче, кроме основных, могут быть также вспомогательные переменные. Они чаще всего выражают суммарное количество кормовых единиц или переваримого протеина в рационе. С помощью этих переменных записывают условия по структуре рациона (удельному весу отдельных групп кормов).

Основные ограничения необходимы для записи условий по балансу питательных веществ. Технико-экономические коэффициенты в этих ограничениях обозначают содержание соответствующих питательных веществ в единице корма. Константы (объемы ограничений) показывают количество питательных веществ, которое должно содержаться в рационе.

С помощью дополнительных ограничений в задаче записывают условия по соотношению отдельных групп кормов в рационе и отдельных видов кормов внутри групп.

С помощью вспомогательных ограничений записывают условия по суммарному количеству кормовых единиц и переваримого протеина. Технико-экономические коэффициенты по основным переменным (так же, как и в основных ограничениях) отражают содержание питательных веществ в единице корма или кормовых добавок, по вспомогательным переменным минус 1. Константами в этих ограничениях являются нули.

Задача

Составить рацион для молочных коров весом 500 кг, с суточным удоем 10 кг так, чтобы стоимость рациона была минимальной. Исходные данные представлены в таблицах 1.2 и 1.3.

Таблица 1.2 - Потребность в питательных элементах

Питательные элементы	Затраты питательных элементов на поддержание жизни	Затраты питательных элементов на 1кг молока
Кормовые единицы, кг	5	0,5
Протеин, г	300	70
Кальций, г	20	3
Фосфор, г	10	4
Каротин, мг	150	25

Таблица 1.3 - Питательность и себестоимость 1 кг корма

Показатели	Концентрир	Сочные	Грубые	Минеральн

	ованные			ые и прочие
Кормовые единицы, кг	1,0	0,2	0,4	-
Протеин, г	100	10	20	-
Кальций, г	5	1	2	100
Фосфор, г	5	1	2	200
Каротин, мг	2	10	5	5
Себестоимость, руб.	5	2	3	5

Физиологические ограничения: дача сочных кормов в сутки не более 30 кг.
Экономические требования: дача концентрированных кормов в размере не менее 200 г, на каждый кг молока суточного удоя.

Решение

Расчет рациона производится на 1 животное, исходя из средних физиологических характеристик животных.

1. Состав переменных

x_1 – количество концентрированных кормов, кг;
x_2 – количество сочных, кг;
x_3 – количество грубых, кг;
x_4 – количество минеральных и прочих кормов, кг.

2. Числовая модель

I. Целевая функция должна выражать стоимость рациона. Причем стоимость должна быть минимальной, следовательно

$Z = 5x_1+2x_2+3x_3+5x_4 \to \min$

II. Основные ограничения

Первый вид ограничения будет выражать суточную потребность животных в кормовых единицах. Количество кормовых единиц, получаемых животным из концентрированных кормов составит 1,0 x_1, из сочных соответственно 0,2 x_2, из грубых – 0,4 x_3. Минеральные корма не содержат кормовые единицы. Следовательно животное в день может получить из различных видов кормов $1{,}0x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}4x_3$ кг кормовых единиц.

Потребность животного в кормовых единицах в сутки составит 10 кг ($5+0{,}5\cdot10$, т.к. 5 кг тратится на поддержание жизни, $0{,}5\cdot10$ кг необходимо для производства молока). Тогда ограничение по содержанию кормовых единиц в суточном рационе животного будет иметь вид:

$1{,}0x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}4x_3 \geq 10$

Аналогично составляем ограничения по содержанию других питательных веществ:

по протеину: $100x_1 + 10x_2 + 20x_3 \geq 1000$
по кальцию: $5x_1 + 1{,}0x_2 + 2x_3 + 100x_4 \geq 50$
по фосфору: $5x_1 + 1{,}0x_2 + 2x_3 + 200x_4 \geq 50$
по каротину: $2{,}0x_1 + 10x_2 + 5x_3 + 5x_4 \geq 400$

Дополнительные ограничения

Условие, что суточная норма сочных кормов не должна превышать 30 кг будет иметь вид: $x_2 \leq 30$.

Условие, что на каждый 1 кг суточного удоя должно приходится не менее 200 г концентрированных кормов, будет иметь вид: $x_1 \geq 2$.

III. Условие неотрицательности переменных

$x_2 \geq 0$

$x_3 \geq 0$
$x_4 \geq 0$

3. Общий вид экономико-математической модели

I. $Z = c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4 \rightarrow \min$

II. $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \geq b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \geq b_2$
$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \geq b_3$
$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \geq b_4$
$a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 \geq b_5$

$x_2 \leq b_6$
$x_1 \geq b_7$

III. $x_j \geq 0$, j=2,3,4.

4. Структурная форма экономико-математической модели

I. $$Z = \sum_{j=1}^{4} c_j x_j \rightarrow \min$$

II. $$\sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1,2$$

$$\sum_{j=1}^{4} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 3,\dots,5$$

$$x_j \leq b_i, \qquad j = 2, i = 6$$

$$x_j \geq b_i, \qquad j = 1, i = 7$$

III. $$x_j \geq 0, \qquad j = 2,3,4$$

Ответ

Оптимальный рацион для коров 500 кг и суточный удой 10 кг, концентрированные – 3,26 кг, сочные – 30,00 кг, грубые - 18,70 кг, минеральные -0 кг. Минимальная стоимость рациона 132,39 руб.

Содержание кормовых единиц в рационе превышает минимально допустимую норму на 6,74 кг, кальция – на 33,7 г, фосфора – 33,7 г, содержание протеина и каротина в рационе строго соответствует норме.

Количество сочных кормов в рационе составило 30 кг, что соответствует максимальной норме. Количество концентратов превысило минимальный уровень (2кг) на 1,26 кг.

Минеральные вещества не вошли в рацион животных, потребность в минеральных веществах (кальций, фосфор) удовлетворяется другими, более экономически эффективными кормами.

2. 3 Лабораторная работа 3 (1часа)

Тема: «Моделирование производства кормов.»

2.3.1 Цель работы:

2.3.2 Задачи работы: Изучить основные принципы моделирования производства кормов

1. Постановка задачи
2. Структурная модель
3. Исходная информация

2.3.3 Описание (ход) работы:

1. Постановка задачи

Создание прочной кормовой базы – важнейшая проблема хозяйства. Одним из основных путей ее решения является внедрение оптимальной структуры кормопроизводства. Разработка экономико-математической модели предусматривает расчет площадей кормовых культур с учетом требований севооборота, экономических и технологических условий и задач, стоящих перед хозяйством.

Критерием оптимальности данной задачи является минимум посевной площади кормовых культур. Кроме того, могут использоваться критерии минимизации материально-денежных или трудовых затрат на кормопроизводство.

Возможны различные постановки задачи в зависимости от предъявляемых к ней требований. В частности, допустима постановка задачи при заданных рационах и с их оптимизацией в процессе ее решения.

Установим перечень неизвестных показателей плана кормопроизводства, которые должны быть определены в процессе решения задачи.

Составными элементами кормовой базы, как известно, являются: 1) производство кормов на пашне, 2) производство кормов на естественных угодьях, 3) покупные корма, 4) отходы товарных отраслей.

В соответствии с этим в процессе решения задачи и следует определить состав и долю каждой из перечисленных групп кормов.

Далее необходимо выяснить, какие условия влияют на состав кормовой базы, какие требования, взаимосвязи необходимо предусмотреть в модели, чтобы план являлся оптимальным с математической и с экономической точки зрения. Все условия, которые должны быть учтены при разработке экономико-математической модели оптимизации плана кормопроизводства, можно разбить на три группы: зоотехнические, агротехнические и экономические.

Зоотехнические условия включают требования:

сбалансированности кормления животных по важнейшим элементам питания (кормовым единицам, переваримому протеину и др.);

разнообразия кормов, то есть подбора таких рационов, которые отвечают биологическим потребностям животных;

равномерности поступления зеленых кормов в летний период.

Агротехнические условия требуют учета особенностей выращивания кормовых культур, их требований к предшественникам и т. д.

Экономические условия предусматривают учет объема наличных ресурсов, выделенных на кормопроизводство, возможностей покупки кормов, производственного направления и перспектив развития хозяйства.

2. Структурная модель

Переменные задачи. В процессе решения данной задачи определяются:

1. Посевные площади возделываемых в хозяйстве кормовых культур (га).
2. Площади естественных кормовых угодий по видам (га).

3. Количество покупных кормов и минеральных добавок по видам (ц).

Обозначим номера переменных, входящих в первую группу, через множество A_1; соответственно номера переменных, входящих во вторую и третью группы, – A_2 и A_3. Множество, включающее номера всех переменных задачи, обозначим A.

Критерий оптимизации имеет следующий вид:

$$\sum_{j \in A} c_j x_j \to \min ,$$

где c_j - коэффициент, характеризующий затраты пашни, материально-денежных средств или труда в расчете на единицу измерения переменных.

Ограничения задачи. Система ограничений экономико-математической модели оптимизации плана кормопроизводства представляет выраженные в математическом виде зоотехнические, агротехнические и экономические условия.

Важнейшей задачей кормопроизводства является обеспечение потребностей животных основными элементами питания. Это требование вводим в модель в виде следующего неравенства:

$$\sum_{j \in A} v_{ij} x_j \geq Q_i, (i \in I_1),$$

где i – индекс элемента питания (кормовые единицы, переваримый протеин и т. д.);

j – индекс переменной;

v_{ij} – содержание i-го вида элемента питания в j-м виде корма в расчете на принятую единицу измерения;

x_j – объем производства j-го вида корма;

Q_i – общая потребность животноводства в i-м элементе питания;

I_1 – множество, включающее номера ограничений по балансам основных элементов питания

В соответствии с биологическими требованиями скота и птицы кормовой баланс должен быть не только полноценным по питательности, но и разнообразным по составу кормов. Это требование отражается в балансах отдельных групп кормов (концентрированные, грубые, сочные, зеленые и др.).

Алгебраическое выражение соответствующих ограничений имеет следующий вид:

$$\sum_{j \in A} v_{ij} x_j \geq D_i, (i \in I_2),$$

где D_i – общая потребность животноводства в i-й группе кормов;

I_2 – множество, включающее номера ограничений по балансам отдельных групп кормов.

Ограничения этой группы, как правило, вводят в модель в кормовых единицах. В отличие от остальных групп ограничение по зеленым кормам желательно дифференцировать по месяцам пастбищного периода, что позволит отыскать план, гарантирующий равномерное поступление зеленой массы в соответствии с потребностью:

$$\sum_{j \in A} v_{ijt} x_j \geq P_{it}, (i \in I_3),$$

где t – индекс месяца пастбищного периода;

P_{it} – общая потребность в зеленых кормах в t-й период, корм. ед.;

v_{ijt} – содержание питательных веществ в зеленом корме j-й культуры, используемой в t-й период;

I_3 – множество, включающее номера ограничений по зеленому конвейеру.

Оптимальная структура кормопроизводства должна определяться с учетом агротехнических и биологических особенностей отдельных кормовых культур, их требований к предшественникам и технологии производства. Взаимосвязь отдельных культур или их групп выражается следующим неравенством:

$$\sum_{j \in A_1} q'_{ij} x'_j - \sum_{j \in A_1} q''_{ij} x''_j \le 0, (i \in I_1),$$

где $x_j^{'}$, $x_j^{''}$ – площади кормовых культур, связанных между собой технологической зависимостью;

$q_j^{'}$, $q_j^{''}$ – коэффициенты взаимосвязи культур;

I_4 – множество, включающее номера ограничений по агротехническим особенностям кормовых культур.

Если одним из элементов кормовой базы являются покупные корма, их объем должен быть ограничен в соответствии с планом приобретения хозяйством (в натуре или стоимостном выражении):

$$x_j \le B_j, (j \in A_3),$$

где B_j—максимальный объем покупки j-го вида корма.

Важный источник получения кормов — естественные и улучшенные кормовые угодья. Однако, учитывая, что площади этих угодий ограничены, в модель необходимо ввести соответствующие неравенства.

Модель может быть дополнена группой ограничений по наличию и использованию производственных ресурсов, выделенных на кормопроизводство (труда техники средств и др.).

3. Исходная информация.

Для разработки экономико-математической модели по оптимизации кормопроизводства необходимо иметь следующую информацию:

1. Перечень кормовых культур, возделываемых в хозяйстве, их урожайность;
2. Поголовье скота и птицы, научно обоснованные нормы кормления по основным элементам питания и группам кормов;
3. Перечень и объем кормов, приобретаемых со стороны;
4. Количество побочной продукции и отходов, которое может быть использовано на корм с посевов товарных сельскохозяйственных культур;
5. Нормативные данные: содержание питательных веществ в 1 ц основной и побочной продукции, нормы потерь кормов при уборке, хранении, переработке и перевозках, стоимость единицы покупаемых кормов и др.;
6. Площадь пашни и естественных кормовых угодий по видам;
7. Допустимые в соответствии с экономическими условиями хозяйства объемы производства отдельных кормов, нормы потребления и выход зеленых кормов в пастбищный период по месяцам.

2.4 Лабораторная работа №4 (2 часа)

Тема: «Моделирование производственной структуры аграрного предприятия»

2.4.1 Цель работы: Изучить особенности построения числовой модели производственной структуры аграрного предприятия

2.1.3 Описание (ход) работы:

1. Особенности постановки и формализации задачи.

2. Структурная модель.

2.4.3 Описание (ход) работы:

Экономико-математическая модель оптимизации производственной структуры – одна из основных в системе моделей оптимального планирования сельскохозяйственного производства.

Оптимальная специализация и сочетание отраслей в сельскохозяйственных предприятиях предполагает такие количественные соотношения между отдельными отраслями, которые позволяют эффективно использовать землю, труд и технику, то есть получить максимум продукции при данных ресурсах и обеспечить минимум затрат на единицу продукции.

В качестве критерия оптимальности чаще других выступает чистый доход.

Формализуем задачу. Введем условные обозначения:

Индексация:

- j – номер отрасли в хозяйстве ($j = 1 \ldots n$);
- J – множество, элементы которого номера отраслей;
- J_1 - множество, элементы которого номера отраслей в растениеводстве;
- J_2 - множество, элементы которого номера отраслей в животноводстве;
- i – номер ограничения;
- I_1 – множество, элементы которого – номера ограничений по использованию сельскохозяйственных угодий;
- I_2 – множество, элементы которого – номера ограничений по использованию трудовых ресурсов;
- I_3 – множество, элементы которого номера ограничений по определению оптимальных объемов производственных затрат;
- I_4 – множество, элементы которого – номера ограничений по органическим удобрениям;
- I_5 – множество, элементы которого – номера ограничений по кормовым ресурсам;
- I_6 – множество, элементы которого – номера ограничений по гарантированным объемам производства;
- I_7 – множество, элементы которого – номера ограничений, учитывающих агробиологические особенности производства.

<u>Известные величины:</u>

a_{ij} – коэффициенты затрат *i-го* вида ресурсов на единицу измерения по j-тому виду деятельности;

V_{ij} – коэффициенты выхода продукции *i-го* вида в расчете на единицу j-го вида деятельности;

B_i – объемы производственного ресурса i-го вида;

$V_{ij} = q_{ij}\, d_j$ по кормовым культурам, где

q_{ij} – содержание *i-го* вида питательного вещества в единице j-го корма;

d_j – доля продукции $j^{й}$ культуры используемая на корма;

Q_i – гарантированный объем производства *i-го* вида продукции;

C_j – денежное выражение товарной продукции, получаемой в расчете на единицу измерения j-го вида деятельности;

c_i – цена реализации продукции на особых условиях поставки;

W'_{ij}, W''_{ij} – коэффициенты связки, для отражения агробиологических особенностей производства.

<u>Например: размещение посевов по предшественникам.</u>

Переменные величины:

x_j – искомое значение размеров отраслей и интенсивности $j^{го}$ вида деятельности;

$\bar{x}_i$ - искомое значение производственных затрат.

2. Структурная модель

Требуется найти:

$$C = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \bar{x}_i \to \max \tag{1}$$

(где i при $\bar{x}_i$ принадлежит I_3)

При условиях:

1. Использование сельскохозяйственных угодий.

$$\sum_{j \in J_1} a_{ij} x_j \le B_i \quad где\, i \in I_1 \tag{2}$$

Условия этого вида гарантируют, что земельных ресурсов потребуется не больше чем их имеется. a_{ij}- *равно 1, если* x_j *измеряется в га, или обратному показателю урожайности, если* x_j *измеряется в ц.*

Обычно ограничения этой группы учитывают несколько условий – использование пашни различного качества, сенокосов и пастбищ различной продуктивности, орошаемых и неорошаемых земель.

2. Использование трудовых ресурсов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le в_i \qquad где \quad i \in I_2 \tag{3}$$

Это условие обычно представляется несколькими ограничениями по наиболее напряженным периодам работ и в целом на весь период.

Иногда возникает необходимость в определении целесообразности привлечения в отдельные периоды дополнительных трудовых ресурсов. Тогда вводится переменная, искомое значение которой – количество привлекаемых ресурсов труда в отдельные периоды.

3. Производственные затраты:

$$\sum_{J=1}^{n} \mathrm{a}_{ij} x_j = \bar{x}_i \quad где \quad i \in I_3 \tag{4}$$

или после преобразования: $\sum_{J=1}^{n} \mathrm{a}_{ij} x_j - \bar{x}_i = 0$

С помощью этих ограничений можно определить оптимальную структуру и объемы производственных затрат всех видов. Однако в целевой функции представлены только суммарные денежно-материальные затраты.

4. Использование органических удобрений:

$$\sum_{J \in J_1} a_{ij} x_j \le \sum_{j \in J_2} v_{ij} x_j \qquad где\, i \in I_4 \tag{5}$$

Левая часть ограничений представляет собой расход органических удобрений в растениеводческих отраслях, а правая – объем его выхода в отраслях животноводства. Ограничения этого вида гарантируют, что органических удобрений потребуется растениеводству не больше, чем будет их получено в животноводстве.

после преобразования: $\sum_{J \in J_1} a_{ij} x_j - \sum_{j \in J_2} v_{ij} x_j \le 0$

5. Производство и использование кормов.

Обычно ограничения по этим условиям формируют оптимальный кормовой баланс для каждого вида животных и птицы. Модель этого процесса рассматривается в отдельной лекции.

Часто в модель предусматривают только балансирование по отдельным видам питательных веществ.

$$\sum_{j \in J_2} a_{ij} x_j \le \sum_{j \in J_i} v_{ij} x_j + в_i \qquad где \quad i \in I_5 \tag{6}$$

где $В_i$ – наличие кормов в хозяйстве.

В левой части показан расход кормов в животноводстве.

В правой части ограничения представлен объем производства кормов и их наличие в хозяйстве.

Производство кормов можно показать и более детально. Если вместо v_{ij} записать их значения q_{ij} d_j, то $\sum_{j \in J_i} q_{ij} d_j x_j$ – объем производства кормов в питательном веществе, например, производство белка.

В целом условие предусматривает, что животноводству потребуется кормов не больше, чем будет произведено растениеводством плюс наличный объем кормов.

После преобразования: $\sum_{j \in J_2} a_{ij} x_j - \sum_{j \in J_i} v_{ij} x_j + в_i \le 0$

6. Гарантированные объемы производства. Объемы производства сельскохозяйственной продукции, обеспечивающие выполнение договорных обязательств и внутрихозяйственную потребность, минимально допустимый уровень концентрации поголовья скота и птицы и т.д. $\sum_{j=1}^{n} v_{ij} x_j \ge Q_i \qquad где \quad i \in I_6$ (7)

В правой части показан гарантированный объем производства продукции и реализация продукции сельского хозяйства. В левой части – производство этой продукции.

7. Условия по соотношению размеров производства по отдельным видам деятельности. Запись условий по агробиологическим особенностям производства, условия севооборотов, размещение культур по предшественникам, зеленый конвейер, повторные посевы и т.п.

$$\sum_{j \in J} W_{ij}^{/} x_j \le \sum_{j \in J} W_{ij}^{//} x_j \qquad где i \in I_7 \tag{8}$$

8. Условия неотрицательности переменных $x_{ij} \ge 0$; $\bar{x}_i \ge 0$ (9)

Здесь приведены основные типы ограничений задачи оптимизации производственной структуры. При решении конкретных задач все они включаются в модель, однако, кроме этого требуется в модели отразить и специфику предприятия, его производственное направление, стратегию ведения хозяйства, особенности местных условий. Например, модель зернового хозяйства и модель специализированного молочного хозяйства требуют разной инфраструктуры.

Задача 7

Определить оптимальное сочетание отраслей сельского хозяйства: растениеводства и животноводства, таким образом, чтобы получить максимальный выход товарной продукции (в качестве товарной - выступает продукция отрасли животноводства). Вся продукция отрасли растениеводства идет на корм скоту.

Производственные ресурсы:

пашня – 8000 га

трудовые ресурсы – 7500 ч. дн

энергоресурсы – 1000 тр. смен

Урожайность зерновых 10 ц/га (содержание кормовых единиц в 1 ц – 1,2 ц к.ед.), урожайность кукурузы на силос 150 ц/га (содержание кормовых единиц в 1ц – 0,2 ц к.ед.). Годовой удой 1 коровы 2500 кг, годовой прирост 1 свиньи 0,9 ц.

Таблица 1.4 - Удельные затраты производственных ресурсов

Показатели	Затраты труда, чел. дн.	Энергетические ресурсы, тр. смены	Расход кормовых единиц на 1ц продукции, ц к.ед
На 1 га зерновых	2	0,4	-
На 1 га кукурузы	20	4,0	-
На 1 ц молока	0,1	0,01	1,2
На 1 ц прироста живой массы свиней	1,5	0,02	7,0

Цена реализации 1 ц продукции:

зерна – 8 руб.,

силоса – 1 руб.,

молока – 18 руб.,

прирост свиней – 120 руб.

Валовое производство продукции животноводства равно произведению продуктивности животных (прирост живой массы от 1 головы, удой от 1 коровы) на поголовье.

Задача 8

Определить оптимальное сочетание отраслей сельского хозяйства: растениеводства и животноводства так, чтобы получить максимальный выход товарной продукции (в качестве товарной - выступает продукция отрасли животноводства – мясо КРС и свиней, молоко; продукция отрасли растениеводства – зерно). На корм идет 20% валового сбора зерна и весь силос.

Производственные ресурсы:

пашня – 10000 га,

трудовые ресурсы – 85000 ч. дн,

энергоресурсы – 15000 тр. смен,

пастбища – 1500 га.

Урожайность зерновых 20 ц/га (содержание кормовых единиц в 1 ц – 1,2 ц к.ед.), кукурузы на силос - 150 ц/га (содержание кормовых единиц в 1ц – 0,2 ц к.ед.). С 1 га естественных пастбищ возможно получение 5 ц к.ед. Годовой удой 1 коровы 2500 кг, прирост живой массы 1 коровы – 2,5 ц, свиньи – 0,9 ц.

Таблица 1.5 - Удельные затраты производственных ресурсов

Показатели	Затраты труда, чел. дн.	Энергетические ресурсы, тр. смены	Расход кормовых единиц на 1ц продукции, ц к.ед
На 1 га зерновых	2,1	0,4	-
На 1 га кукурузы	20	4,0	-

На 1 ц молока	0,1	0,01	1,2
На 1 ц прироста живой массы КРС	2,0	0,01	5,0
На 1 ц прироста живой массы свиней	1,5	0,02	7,0
На 1 га естественных пастбищ	0,8	0,01	-

Цена реализации 1 ц продукции: зерна – 8 руб., силоса – 1 руб., молока – 16 руб., прироста КРС – 120 руб., прироста свиней – 80 руб.
Продать государству: зерна не менее 2600 ц, молока не менее – 800 ц, мяса – 150 ц.

Задача 9

Определить оптимальное сочетание отраслей сельского хозяйства: растениеводства и животноводства таким образом, чтобы получить максимальный выход товарной продукции (в качестве товарной - выступает продукция отрасли животноводства – мясо КРС и свиней, молоко; продукция отрасли растениеводства – зерно).

Производственные ресурсы: пашня – 10000 га,
трудовые ресурсы – 85000 ч. дн,
энергоресурсы – 15000 тр. смен,
пастбища – 1500 га.
Возможная распашка естественных пастбищ до 400 га.

Урожайность зерновых 20 ц/га (содержание кормовых единиц в 1 ц – 1,2 ц к.ед.), кукурузы на силос - 150 ц/га (содержание кормовых единиц в 1ц – 0,2 ц к.ед.). С 1 га естественных пастбищ возможно получение 5 ц к.ед. Годовой удой 1 коровы 2500 кг, прирост живой массы 1 коровы – 2,5 ц, свиньи – 0,9 ц. Содержание кормовых единиц в 1ц молока, которое идет на корм - 0,4 ц к.ед.

Таблица 1.6 - Удельные затраты производственных ресурсов

Показатели	Затраты труда, чел. дн.	Энергетические ресурсы, тр. смены	Расход кормовых единиц на 1ц продукции, ц к.ед
На 1 га зерновых	2,1	0,4	-
На 1 га кукурузы	20	4,0	-
На 1 ц молока	0,1	0,01	1,2
На 1 ц прироста живой массы КРС	2,0	0,01	5,0
На 1 ц прироста живой массы свиней	1,5	0,02	7,0
На 1 га естественных пастбищ	0,8	0,01	-
На 1 га освоения пастбищ	1,5	1,2	-

Структура использования продукции:
а) зерна: продажа государству – 40%,
на корм скоту – 50%,
прочая реализация – 10%.

б) молока: продажа государству – 80%,

на корм скоту – 10%,

прочая реализация – 10%.

в) мяса: продажа государству – 90%,

на внутрихозяйственные нужды – 10 %.

Планировать продажу продукции государству не менее: зерна – 12000 ц, молока – 1200 ц, мяса – 800 т.

Цена реализации государству 1 ц продукции : зерна – 8 руб., молока – 18 руб., прироста КРС – 180 руб., прироста свиней – 120 руб.

Прочая цена реализации 1 ц продукции : зерна – 9 руб., молока – 19 руб., прироста КРС – 190 руб., прироста свиней – 130 руб.

2.5 Лабораторная работа 5 (1 часа)

Тема: «Моделирование использования средств механизации»

2.5.1 Цель работы: Сформировать навыки моделирования экономических процессов при помощи стандартной транспортной задачи

2.5.2 Задачи работы:

1. Освоить этапы построения модели транспортной задачи
2. Построение модели и ее математическая запись. Символика обозначений
3. Использование табличного редактора Excel для решения задач транспортного типа
4. Анализ и экономическая интерпретация полученных результатов.

2.5.3 Описание (ход) работы:

Среди проблем, для исследования которых успешно применяется линейное программирование, важное значение имеет так называемая транспортная задача.

Общая постановка этой задачи применительно к экономической проблеме экономии издержек производства формулируется так: имеется несколько пунктов назначения (предприятий, потребителей); требуется перевезти некоторое количество однородного товара из различных пунктов отправления в несколько пунктов назначения; каждый из поставщиков может выделить только определенное количество единиц товара и каждому потребителю требуется также определенное количество единиц этого товара; известны расстояния или стоимости перевозки единицы товара от каждого поставщика к каждому потребителю. Задача состоит в том, чтобы найти такие маршруты перевозок, из всех возможных связей поставщиков и потребителей, при которых общие транспортные расходы были минимальными.

Транспортная задача может быть решена с помощью одного из распределительных методов. С помощью алгоритма транспортной задачи решаются многие экономические задачи, не имеющие характера перевозок, но условия которых укладываются в модель транспортной задачи (распределение посевных площадей, составление различных смесей, размещение предприятий, раскрой материалов и т.д.).

В общей постановке транспортная задача выглядит следующим образом.

Имеется n пунктов отправления с запасами b_i единиц груза в каждом. Имеется m пунктов назначения с потребностями в грузах b_j . Стоимость перевозки одной единицы груза по соответствующему маршруту равна c_{ij}.

Для записи модели транспортной задачи примем следующие обозначения:

b_i - наличие груза у i-го поставщиков (i = 1, 2, 3, …, m);

a_j - потребность j-го потребителя (j= 1, 2, 3, …, n);

c_{ij} – стоимость перевозки единицы груза от i-го поставщика к j-му потребителю.

Матрица $(c_{ij})_{m*n}$ называется матрицей тарифов (издержек или транспортных расходов).

Планом транспортной задачи называется матрица $X = (x_{ij})_{m*n}$, где каждое число x_{ij} обозначает количество единиц груза, которое надо доставить из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения. Матрица X называется еще матрицей перевозок. Чаще всего матрицы тарифов и перевозок совмещают в одну двойную матрицу (таблица 3.1).

Таблица 3.1 – Общий вид транспортной матрицы

Поставщики	Потребители					Запасы, [ед.прод.]
	1	*2*	*3*	…	*n*	
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	…	c_{1n} x_{1n}	b_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	…	c_{2n} x_{2n}	b_2
3	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	…	c_{3n} x_{3n}	b_3
…	…	…	…	…	…	…
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{m3} x_{m3}	…	c_{mn} x_{mn}	b_n
Потребность в грузе [ед.прод.]	a_1	a_2	a_3	…	a_n	

Этапы построения модели транспортной задачи

1. Проверка сбалансированности задачи.
2. Определение переменных.
3. Построение сбалансированной транспортной матрицы.
4. Задание целевой функции.
5. Задание ограничений.
6. Решение задачи в Excel.
7. Анализ результатов решения задачи.

Исходные параметры модели транспортной задачи

a) m – количество пунктов отправления, n – количество пунктов назначения.

b) b_i – запас продукции в пункте отправления ($i = 1, 2, 3, \dots, m$);

c) a_j – спрос на продукцию в пункте назначения (j= 1, 2, 3, …, n);

d) c_{ij} – тариф (стоимость) перевозки единицы продукции из i-го пункта отправления в j-ый пункт назначения.

Если наличие грузов и потребности равны между собой, то задача является закрытой (сбалансированной)

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{i=1}^{m} b_i \,. \tag{3.1}$$

Если наличие грузов и потребностей не совпадают между собой, задача является открытой (несбалансированной)

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \neq \sum_{i=1}^{m} b_i \,. \tag{3.2}$$

В случае, когда *суммарные запасы превышают суммарные потребности*, необходим дополнительный фиктивный пункт потребления, который будет формально потреблять существующий излишек запасов, то есть

$$a_{ф} = \sum_{i=1}^{m} b_i - \sum_{j=1}^{n} a_j \ . \quad (3.3)$$

Если *суммарные потребности превышают суммарные запасы*, то необходим дополнительный *фиктивный* пункт отправления, формально восполняющий существующий недостаток продукции в пунктах отправления:

$$b_{ф} = \sum_{j=1}^{n} a_j - \sum_{i=1}^{m} b_i \ . \quad (3.4)$$

Искомые параметры модели транспортной задачи

1. x_{ij}– количество продукции, перевозимой из i-го пункта отправления в j-ый пункт назначения. Если по условию задачи введен фиктивный поставщик или потребитель, то необходимо ввести фиктивные переменные, которые обозначаются $x_{ij}^{ф}$.

2. $F(X)$ – транспортные расходы на перевозку всей продукции [руб.].

Задача сводится к тому, чтобы отыскать неотрицательные значения x_{ij} , при которых:

I. Целевая функция стремится к минимуму

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \ . \quad (3.5)$$

Введение фиктивного потребителя или отправителя повлечет необходимость формального задания *фиктивных* тарифов $c_{ij}^{ф}$ (реально не существующих) для фиктивных перевозок. Поскольку нас интересует определение наиболее выгодных *реальных* перевозок, то необходимо предусмотреть, чтобы при решении задачи (при нахождении опорных планов) *фиктивные* перевозки не рассматривались до тех пор, пока не будут определены все реальные перевозки. Для этого надо фиктивные перевозки сделать невыгодными, то есть дорогими, чтобы при поиске решения задачи их рассматривали в самую последнюю очередь. Таким образом, величина фиктивных тарифов должна превышать максимальный из реальных тарифов, используемых в модели, то есть

$$c_{ij}^{ф} > \max c_{ij} \ \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right). \quad (3.6)$$

<u>II. Необходимо выполнение следующих основных условий:</u>

от каждого поставщика можно вывести столько груза, сколько у него имеется, то есть сумма искомых перевозок от каждого поставщика равна наличию у них груза (условия вывоза всех грузов из пунктов отправления)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i \ ; \quad (3.7)$$

каждому потребителю можно перевезти необходимое ему количество груза, то есть сумма искомых объемов перевозок равна потребности потребителей (условия полного удовлетворения потребностей потребителей)

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_j \ ; \quad (3.8)$$

III. Условия неотрицательности переменных, исключающие обратные перевозки

$$\forall x_{ij} \ge 0 \quad \left(i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}\right). \quad (3.9)$$

Ограничения модели (3.7, 3.8, 3.9) могут быть выполнены только при сбалансированной задаче.

Если условие задачи таково, что в результате ее решения искомые переменные должны будут иметь целые значения, то необходимо введение дополнительного условия целочисленности:

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ, НА ОСНОВЕ СТАНДАРТНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Кроме основных условий, в транспортных задачах может встретиться ряд дополнительных, ограничивающих количественные связи между отдельными потребителями и поставщиками. Характер этих ограничений и способы решения задачи при наличии дополнительных ограничений заключаются в следующем.

1. Полное отсутствие связи между поставщиком и потребителем, то есть $x_{ij} = 0$. Это означает, что в данной клетке матрицы искомый объем перевозок должен быть равен нулю. Оценка переменной завышается на большую величину, обычно обозначаемую буквой М, и «попадание» груза в эту клетку нежелательно, так как целевая функция всегда стремиться к минимуму.

2. Наличие частной заранее фиксированной связи между поставщиками и потребителями, то есть $x_{ij} = q$, искомый объем перевозок от i-го поставщика к j-му потребителю должен быть строго равен q. До начала решения задачи от соответствующего поставщика и потребителя вычитается величина q, затем в соответствующую клетку пересечения поставщика и потребителя записывается завышенная оценка М и задача решается обычным методом.

3. $x_{ij} > q$, то есть искомый объем перевозок от i-го поставщика к j-му потребителю должен быть не меньше величины q. До начала решения от соответствующего поставщика и потребителя вычитается величина q, затем задача решается обычным путем.

Модель транспортной задачи позволяет решать любые задачи, в которых параметры имеют одинаковые единицы измерения. Такие модели называются однопродуктовыми. К ним можно отнести задачу оптимизации использования машинно-тракторного парка в отдельные агротехнические сроки, задачу оптимального размещения посевов сельскохозяйственных культур по участкам с различным плодородием почв и т.д.

Упражнения

Задача 1

Требуется перевезти одноименный груз из трех пунктов отправления в три пункта назначения. Количество грузов, подлежащих отправлению с каждого склада, потребности в них каждого потребителя и расстояния в километрах от каждого пункта отправления в каждый пункт назначения приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2 – Расстояния перевозки, км

Поставщики	Потребители			Наличие грузов, т
	1	2	3	
1	15	17	23	900
2	9	19	8	800
3	24	21	32	550
Потребность в грузах, т	700	800	750	2250 / 2250

Нужно определить, из какого пункта отправления следует удовлетворять спрос потребителей, чтобы общая сумма объема перевозок (ткм) была минимальной.

Решение:

1. Проверка сбалансированности задачи

Просуммируем наличие грузов у поставщиков

$\sum_{i=1}^{3} b_i$ = 900+800+550=2250

Просуммируем потребности потребителей в грузах

$\sum_{j=1}^{3} a_j$ = 700+800+750=2250

$\sum_{i=1}^{3} b_i = \sum_{j=1}^{3} a_j$, следовательно, задача сбалансированная (закрытого типа).

2. Определение переменных

Обозначим через x_{ij} [т] количество грузов, которые будут перевезены от i-го поставщика j-му потребителю.

3. I. Целевая функция

<u>Формальная целевая функция имеет вид:</u>

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(X) = 15x_{11} + 17x_{12} + 23x_{13} &+ \\ + 9x_{21} + 19x_{22} + 8x_{23} &+ \\ + 24x_{31} + 21x_{32} + 32x_{33} &\to \min \end{aligned}$$

II. Основные ограничения

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 900, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 800, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 550, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 700, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 800, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 750. \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности

$$\forall x_{ij} \ge 0 \quad \left(i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,3}\right).$$

4. Модель задачи в общем виде:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad \mathrm{F}(X) = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} &+ \\ + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} &+ \\ + c_{31}x_{31} + c_{32}x_{32} + c_{33}x_{33} &\to \min \end{aligned}$$

$$II.\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=b_1, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=b_2, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}=b_3, \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=a_1, \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=a_2, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=a_3. \end{cases}$$

$$III.\quad \forall x_{ij}\geq 0 \quad \left(i=\overline{1,3};\quad j=\overline{1,3}\right)$$

5. Модель задачи в структурной форме:

$$I.\quad F(x)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}c_{ij}x_{ij}\rightarrow \min,$$

$$II.\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{3}x_{ij}=b_i, \quad i=\overline{1,3} \\ \sum_{i=1}^{3}x_{ij}=a_j, \quad j=\overline{1,3} \end{cases},$$

$$III.\ \forall x_{ij}\geq 0 \quad \left(i=\overline{1,3};\quad j=\overline{1,3}\right)$$

6. Для решения данной задачи в Excel необходимо:

1) под запись целевой функции отвести ячейку A1;

2) под запись ограничений – ячейки столбца B (количество ячеек совпадает с количеством ограничений): B1, B2, B3, B4, B5, B6;

3) под запись искомых переменных отвести ячейки столбцов C, D, E (количество потребителей совпадает с количеством столбцов, количество поставщиков – с количеством строк).

**Примечание:* искомые переменные x_{ij} будут находиться в следующих ячейках:

($x_{11} \to C1$ $\quad x_{12} \to D1$ $\quad x_{13} \to E1$

$x_{21} \to C2$ $\quad x_{22} \to D2$ $\quad x_{23} \to E2$

$x_{31} \to C3$ $\quad x_{31} \to D2$ $\quad x_{33} \to E3$).

Порядок выполнения работы:

1. Ввести в ячейку A1 формулу целевой функции (рисунок 3.1):

=15*C1+17*D1+23*E1+

\+ 9*C2+19*D2 + 8*E2+

+24*C3+21*D3+32*E3;

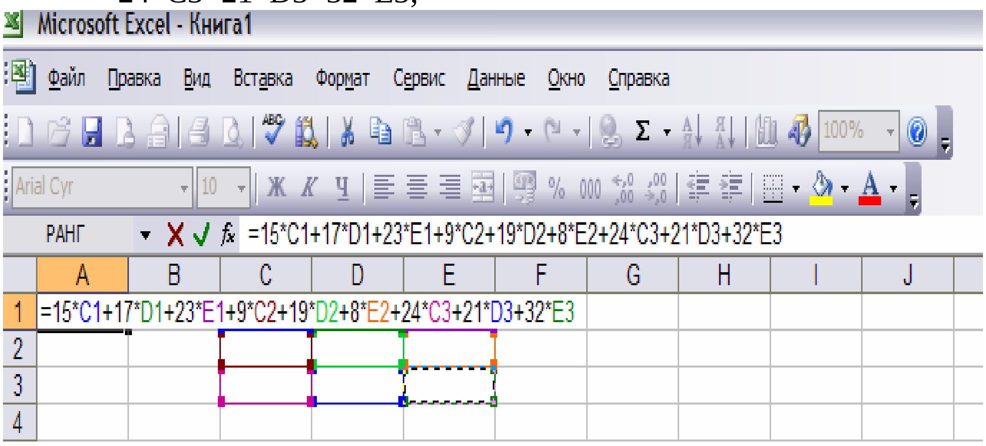
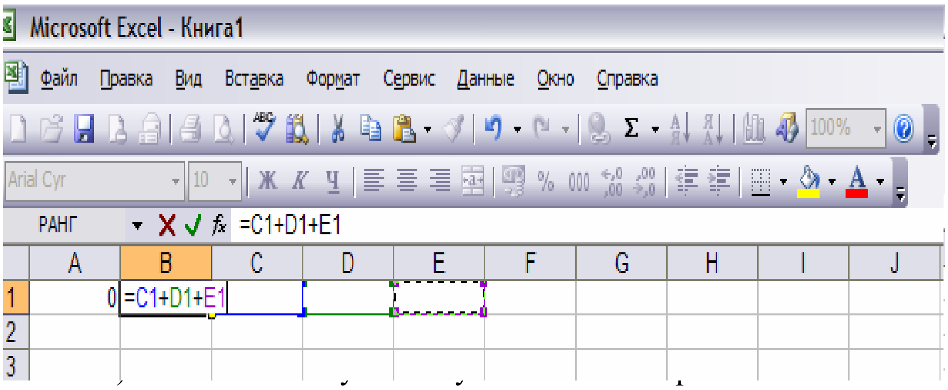


Рисунок 3.1 – Ввод целевой функции в Excel

2. а) Ввести в ячейку B1 левую часть 1-го ограничения: = C1+D1+E1 (рисунок 3.2)



= C2+D2+E2

в) Ввести в ячейку B3 левую часть 3-го ограничения:

= C3+D3+E3

г) Ввести в ячейку B4 левую часть 4-го ограничения:

= C1+C2+C3

д) Ввести в ячейку B5 левую часть 5-го ограничения:

= D1+D2+D3

е) Ввести в ячейку B6 левую часть 6-го ограничения:

= E1+E2+E3

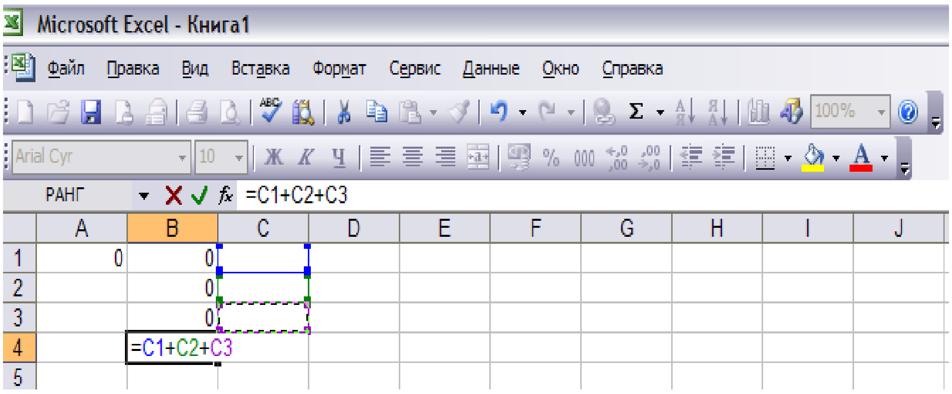


Рисунок 3.3 – Ввод ограничений в Excel

3. На панели инструментов выбрать опцию "Сервис", а в ней вкладку "Поиск решения"

Примечание

Если "Поиск решения" отсутствует, нужно выполнить команду "Сервис"–"Надстройки". В окне диалога "Надстройки" нужно установить флажок напротив строки "Поиск решения".

4. В окне диалога "Поиск решения" в поле ввода "Установить целевую ячейку" нужно ввести ссылку на ячейку A1. Необходимо выбрать способ адресации ячеек в абсолютной системе координат (т.е. указать не A1, а $A$1). Также нужно поступать с другими переменными.

5. В окне диалога "Поиск решения" нужно установить переключатель (рисунок 3.4).

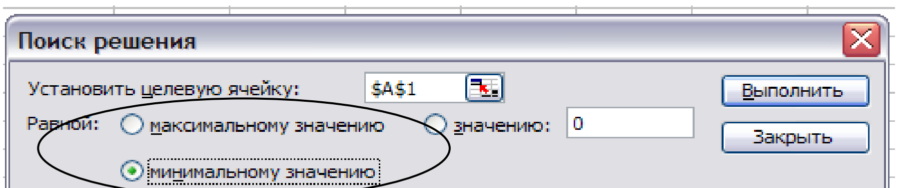


Рисунок 3.4 – Работа в диалоговом окне «Поиск решения»

6. В поле ввода "Изменяя ячейки" нужно указать ссылки на ячейки, содержащие искомые переменные, т.е. диапазон ячеек $C$1: $E$3 (рисунок 3.5).

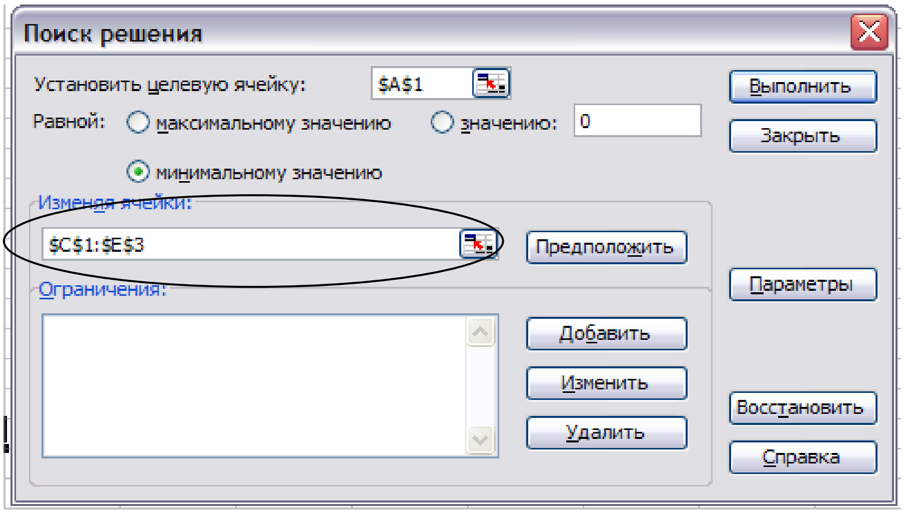


Рисунок 3.5 – Поле ввода ячеек, обозначающих искомые переменные

7. В поле ввода "Ограничения" при нажатии кнопки "Добавить" появляется окно диалога "Добавить ограничения". В поле ввода "Ссылка на ячейку" вводится $B$1. В поле ввода "Ограничение" вводится = и число 900. При помощи кнопки "Добавить" таким же образом вводятся все остальные ограничения (ячейки $B$2:$B$6) (рисунок 3.6).

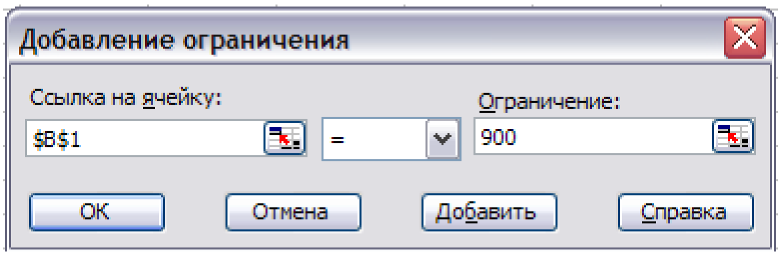


Рисунок 3.6 – Диалоговое окно «Добавление ограничения»

8. Для ввода ограничений на неотрицательность искомых переменных в окне диалога "Добавить ограничения" в поле ввода "Ссылка на ячейку" нужно ввести ссылку на ячейку $C$1, а в поле ввода "Ограничения" нужно ввести >= и число 0. При помощи кнопки "Добавить" таким же образом вводятся условия неотрицательности оставшихся искомых переменных. Либо выделяется диапазон ячеек $C$1: $E$3 и задается >= и число 0. После ввода последнего ограничения нажмите «ОК».

Примечание

Если в задаче имеется условие целочисленности искомых переменных, то в диалоговом окне «Добавление ограничений» в поле ввода "Ссылка на ячейку" нужно ввести ссылку на ячейку $C$1, а в поле ввода знака ограничения нужно ввести «цел». При помощи кнопки "Добавить" таким же образом вводятся условия целочисленности оставшихся искомых переменных. Либо выделяется диапазон ячеек $C$1: $E$3 и задается «цел». После ввода последнего ограничения нажмите «ОК».

После нажатия кнопки "Выполнить" Excel рассчитывает результат и открывает окно диалога "Результаты поиска решения". В этом диалоге в окне "Тип отчета" нужно выбрать "Результаты" и нажать Ok. Перед листом, где записана постановка задачи, будет вставлен лист "Отчет по результатам 1", а на экране будет выдан результат решения задачи (рисунок 3.7).

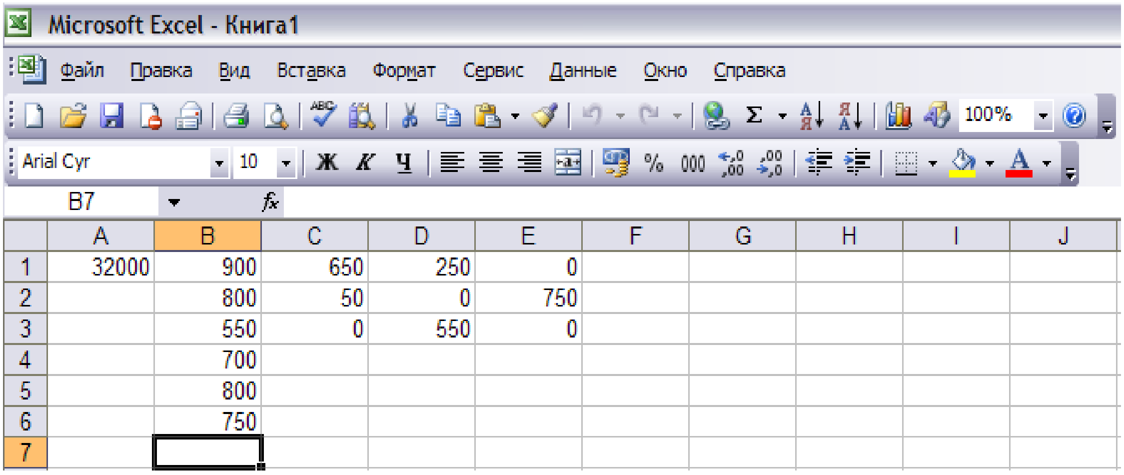


Рисунок 3.7 – Результаты решения задачи

Интерпретация результатов задачи

Полученные значения в ячейках, содержащих формулы целевой функции и ограничений, являются результатом расчета целевой функции и соответствующих ограничений.

Результат, полученный в ячейке А1, означает общую сумму объема грузоперевозок в ткм.

Ячейки В1, В2, В3 показывают выполнение условия полного вывоза груза от поставщика. Ячейки В4, В5, В6 показывают выполнение условия полного удовлетворения потребностей потребителя.

Значения ячеек в диапазоне \$C\$1: \$E\$3 показывают количество груза (в т), перевезенного от соответствующего поставщика, соответствующему потребителю. Значения данного диапазона превышают 0, следовательно условие неотрицательности искомых переменных выполнено.

Ответ

Оптимальные перевозки грузов предусматривают перевозку от 1-го поставщика 1-му потребителю 650 т, от 1-го поставщика 2-му потребителю – 250 т, от 2-го поставщика 1-му потребителю – 50 т, а 3-му потребителю – 750 т. 3-й поставщик отвезет свой груз только 2-му потребителю в количестве 550 т. Минимальный объем перевозок составит 32000 т км.

Порядок оформления задачи

1. Проверка сбалансированности задачи

$$\sum_{i=1}^{3} b_i = 900+800+550=2250$$

$$\sum_{j=1}^{3} a_j = 700+800+750=2250$$

$$\sum_{i=1}^{3} b_i = \sum_{j=1}^{3} a_j \text{, задача закрытого типа}$$

2. Состав переменных

x_{ij}– количество продукции (т), перевозимой из *i*-го пункта отправления в *j*-ый пункт назначения

3. Числовая модель

$$\text{I.}\quad \begin{aligned} F(X) = {} & 15x_{11} + 17x_{12} + 23x_{13} + \\ & + 9x_{21} + 19x_{22} + 8x_{23} + \\ & + 24x_{31} + 21x_{32} + 32x_{33} \to \min \end{aligned}$$

$$\text{II.}\quad \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 900, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 800, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 550, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 700, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 800, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 750. \end{cases}$$

$$\text{III.}\quad \forall x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,3}\right).$$

4. Общий вид экономико-математической модели

$$\text{I.}\quad \begin{aligned} F(X) = {} & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + \\ & + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + \\ & + c_{31}x_{31} + c_{32}x_{32} + c_{33}x_{33} \to \min \end{aligned}$$

$$II. \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = b_1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = b_2, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = b_3, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = a_1, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = a_2, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = a_3. \end{cases}$$

$$III. \quad \forall x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,3}\right).$$

5. Структурная форма экономико-математической модели

$$I. \quad F(x) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

$$II. \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = b_i, & i = \overline{1,3} \\ \sum_{i=1}^{3} x_{ij} = a_j, & j = \overline{1,3} \end{cases},$$

$$III. \ \forall \, x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,3}\right).$$

6. Ответ: Минимальный объем перевозок составит 32000 т км. При этом матрица грузоперевозок будет выглядеть следующим образом:

$$X = \begin{pmatrix} 650 & 250 & 0 \\ 50 & 0 & 750 \\ 0 & 550 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 2

Составить план перевозки картофеля из 3 хозяйств 4 магазинам так, чтобы сумма расстояний на перевозку была минимальной. Наличие картофеля, потребность магазинов и расстояние от хозяйств до магазинов приведены в таблице 3.3.

Таблица 3.3 – Расстояния перевозок, км

Хозяйства	Магазин				Запасы, т
	1	2	3	4	
1	8	6	9	2	280
2	4	5	4	5	520
3	3	4	6	4	400
Потребности, т	300	250	340	210	

Задача 3

Составьте план перевозок нефтепродуктов из 3-х пунктов отправления в 4 пункта назначения. План должен обеспечить минимальные транспортные издержки и полностью удовлетворить спрос потребителей на нефтепродукты. Запас, потребности и стоимость перевозки 1т нефтепродуктов приведены в таблице 3.4.

Таблица 3.4 – Стоимость перевозок, руб.

Пункт отправления	Пункты назначения				Запасы, т
	1	2	3	4	
1	9	7	5	3	175
2	1	2	4	6	125
3	8	10	12	1	140
Потребности, т	180	110	60	40	

Задача 4

Четырем предприятиям необходимо сырье в количестве 110, 100, 80 и 40 т соответственно. Запасы сырья сосредоточены в трех пунктах хранения в количестве 90, 100 и 140 т соответственно. Известна матрица С расстояний между пунктами хранения и предприятиями. Нужно составить план перевозок сырья так, чтобы общий объем перевозок (т-км) был минимальным.

$$C=\begin{pmatrix} 20 & 40 & 60 & 100 \\ 10 & 30 & 70 & 40 \\ 40 & 80 & 130 & 70 \end{pmatrix}$$

Задача 7

Требуется перевезти однородный груз из трех пунктов отправления в три пункта назначения. Качество груза, подлежащих отправлению с каждого склада, потребности в нем каждого потребителя и расстояния перевозки от каждого пункта отправления до каждого пункта назначения приведены в таблице 3.8.

Таблица 3.8 – Расстояние перевозок, км

Поставщики	Потребители			Наличие, т
	1	2	3	
I	15	17	23	900
II	9	19	8	800
III	24	21	32	550
Потребность, т	500	700	650	

Необходимо составить оптимальный план перевозок, так чтобы объем транспортных работ (т км) был минимальным. При этом обязательна поставка от первого поставщика первому потребителю установлена в количестве 300т, второй поставщик должен поставить второму потребителю не менее 200т, а первый поставщик третьему – не более 400т.

Задача 8

Необходимо составить оптимальный план проведения весенне-полевых работ, для имеющейся техники в хозяйстве. Объем работ в гектарах мягкой пахоты, производительность имеющейся техники за период (гектары мягкой пахоты), затраты на единицу работы представлены в таблице 3.9.

Таблица 3.9 – Затраты на 1 га мягкой пахоты, руб.

Виды работ	Марки тракторов				Объем работ, га м. п.
	ДТ–75М	МТЗ-821	Т - 4А	ДТ-175С	
Раннее боронование зяби	5,5	5,7	5,8	5,9	210
Предпосевная культивация	4,8	5,0	5,7	6,0	1000
Посев яровых зерновых	5,5	5,7	5,8	5,9	75
Боронование озимой пшеницы	5,1	6,5	6,4	7,0	135
Прикатывание	*M*	5,4	5,3	5,6	40
Объем работ, га м. п.	470	400	270	320	

Затраты на проведение весенне-полевых работ должны быть минимальными.

Ответы

№2 $X = \begin{pmatrix} 0 & 70 & 0 & 210 & 0 \\ 0 & 80 & 340 & 0 & 100 \\ 300 & 100 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $F(x) = 3900$

№3 $X = \begin{pmatrix} 0 & 110 & 60 & 0 & 5 \\ 125 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 55 & 0 & 0 & 40 & 45 \end{pmatrix}$ $F(x) = 1675$

№4 $X = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 80 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 100 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}$ $F(x) = 14800$

№6 $X = \begin{pmatrix} 4503 & 981 & 2884 & 0 & 817 \\ 0 & 0 & 0 & 2800 & 2783 \\ 0 & 1114 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 65 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $F(x) = 330608{,}2$

№7 $X = \begin{pmatrix} 300 & 500 & 51 & 49 \\ 1 & 200 & 599 & 0 \\ 199 & 0 & 0 & 351 \end{pmatrix}$ $F(x) = 27550$

№8 $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 210 \\ 335 & 400 & 232 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 75 \\ 135 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 38 & 2 \end{pmatrix}$ $F(x) = 7711$

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

3.1 Практическое занятие 1,2 (4 часа)

Тема: «Моделирование посевов и использования удобрений»

3.1.1 Задание для работы:

1. Моделирование размещения посевов по участкам земли различного плодородия.
2. Моделирование севооборотов.
3. Моделирование использования минеральных удобрений

3.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Моделирование размещения посевов по участкам земли различного плодородия.

Задача оптимизации структуры посевных площадей может рассматриваться и как составная часть планирования производства предприятия, где она моделируется во взаимосвязи с животноводством и как самостоятельная задача. Разработка самостоятельной задачи оптимизации структуры посевных площадей имеет практический смысл, когда рассматривается задача размещения посевов по участкам земли различного плодородия, размещение зерновых культур в зерновом севообороте, кормовых культур в кормовом севообороте и.д.

Рассмотрим отдельные постановки задачи размещения и структуры посевов.

Для определения оптимального размещения посевов по отдельным участкам земли различного плодородия может быть применен распределительный метод. Задачу можно разработать на основе транспортной задачи.

Сформулировать задачу можно так: требуется разместить посевы сельскохозяйственных культур по участкам земли так, чтобы посевные площади по всем культурам равнялись плановым объемам, все пашни должны быть заняты под посев при этом стоимость валовой продукции была бы максимальной.

В качестве критерия оптимальности в этой задачи можно принять максимум стоимости валовой продукции сельского хозяйства, чистый доход, прибыль.

Введем условные обозначения:

m – число участков земли;

i – номер участков земли;

n – число культур;

j –номера культур;

S_i - площадь i-го участка;

S_j -площадь отведенная под j-ю культуру;

c_{ij} - стоимость j-й продукции с одного гектара i-го;

x_{ij} - площадь посева j-й культуры на ii-том участке.

Структурная модель задачи:

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \max$$

при условиях:

1. Первое условие обеспечивает, что площадь посева всех культур на каждом участке будет равна его площади.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = S_i \text{, где i=1…m.}$$

2. Второе условие гарантирует, что под каждую культуру будет отведена плановая площадь.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = S_j \text{, где j=1…n.}$$

3. Третье условие обеспечивает равенство имеющейся земли и площади посевов всех сельскохозяйственных культур.

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} S_j$$

1. Условие неотрицательности переменных:

$$x_{ij} \geq 0$$

Числовая модель составляется по типу транспортной задачи, то есть заполняется платежная матрица, по строкам размещаются участки, а по столбцам культуры. Задача имеет практический смысл решения лишь тогда, когда фактически имеются участки различного плодородия.

2. Моделирование севооборотов.

Уточним понятие севооборота. Под севооборотом понимают площадь земли с обоснованным чередованием культур во времени и пространстве.

Стоит задача: определить площадь севооборотов хозяйства, которая обеспечивала бы размещение плановых посевных площадей на севооборотной площади и позволяла получить максимальный экономический эффект.

За критерий оптимальности можно принять максимум прибыли, чистого дохода, валового дохода, стоимости валовой продукции.

Формализация задачи.

n – количество севооборотов различных видов, введение которых возможно в данных условиях;

j – номера севооборотов;

i – номера культур;

m – количество культур;

x_j - площадь J-го севооборота в гектарах;

c_j - прибыль, чистый или валовой доход, стоимость валовой продукции с одного гектара в j-том севообороте;

β_{ij} - доля посевов I-й культуры в j-том севообороте;

S_i - общая заданная площадь посева I-й культуры;

S – площадь пашни в хозяйстве.

Структурная модель:

$$C = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \max$$

при условиях:

1. первое условие обеспечивает посев плановой площади по каждой культуре

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} x_j = S_i$$, где i=1…m

2.Второе условие предусматривает, что для вводимых севооборотов потребуется площади пашни не больше, чем ее имеется в хозяйстве.

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \le S$$

3. Условие неотрцательности переменных

$$x_{ij} \ge 0.$$

3. Моделирование использования минеральных удобрений

Пусть в хозяйстве имеется некоторое количество минеральных удобрений, требуется найти такой план их использования, который обеспечивал бы максимальную прибавку урожая.

По сути речь идет о распределении между культурами.

Формализуем задачу:

a_{ij} - норма внесения действующего вещества i-го вида для получения единицы прибавки урожая j-й культуры;

$в_к$ - количество удобрений к- го вида (в натуре), имеющееся в хозяйстве (к=1…К);

q_{ik} - содержание i-го действующего вещества в единице к-го удобрения;

c_j -цена единицы j-й продукции;

x_j - количество полученной прибавки j-й продукции за счет внесения минеральных удобрений;

Q_j - максимально-возможный объем прибавки j-ой продукции за счет внесения минеральных удобрений – при данной площади посева j-й культуры.

Целевая функция.

$$C = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

Так максимизируется прибавка урожая в денежном выражении:

При условиях:

1. Расход действующего вещества ii-го вида для получения всей прибавки урожая по j-й культуре не должны превышать наличия действующего вещества i-го вида в к-том удобрении

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} xj \le \sum_{к=1}^{K} q_{ik} в_к$$

По сути ограничения данного вида сводят баланс по действующему веществу. Это прежде всего баланс азота, калия, фосфора и т.п.

2. Нижний и верхний пределы изменения переменной

$$0 \le x_j \le Q_j.$$

Эффективность удобрений зависит не только от культуры, под которую оно вносится, но т и от характера удобряемого участка, то есть от наличия действующего вещества в почке.

Доказана зависимость прибавки урожая от способа внесения удобрений.

Рассмотрим модель с этими ограничениями.

Пусть p – номера, а P – количество способов внесения минеральных удобрений.

r - номера, а R – количество участков земли, отличающихся по содержанию питательных элементов в почве.

Модель имеет вид:

$$C = \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{R} \sum_{p=1}^{P} c_j x_{jrp} \rightarrow \max$$

При условии:

1. $$\sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{R} \sum_{p=1}^{P} a_{ij} xj \le \sum_{\kappa=1}^{K} q_{ik} в_{\kappa}$$

2. $$0 \le x_{jrp} \le Q_{jrp}$$

Нетрудно заметить, что введение ограничений по учету способов внесения минеральных удобрений, характера удобряемого участка не усложнили модель. Два типа ограничений остались, возросло лишь число индексов. Естественно, потребуется новая входная информация, но заметно возрастает и выходная информация, будуд получены новые, более ценные сведения. Здесь в качестве примера показано, как учесть дополнительные условия в модели. По такому же принципу можно учесть сроки внесения минеральных удобрений.

Задача 6

Необходимо разместить сорта озимой пшеницы по предшественникам таким образом, чтобы сбор озимой ржи был максимальным.

Символ *М* указывает на отсутствие данных урожайности *i*-го сорта по соответствующему *j*–му предшественнику (клетки с этим символом являются запретными).

Таблица 3.7 – Урожайность озимой ржи, ц/га

Сорта озимой пшеницы	Предшественники					Всего, га
	Чистый пар	Кукуруза, убранная в стадии молочно-восковой спелости	Однолетние травы на зеленый корм	Бобовые культуры	Стерневые посевы	
Безостая 1	30,7	13,6	18,4	18,9	16,1	9185
Одесская 16	26,5	*М*	16,8	19,2	15,2	5583
Белоцерковская 198	*М*	14,4	14,1	*М*	16,5	1114
Мичуринка	16,8	10,8	*М*	*М*	*М*	65
Всего, га	4503	2160	2884	2800	3600	

3.1.3 Результаты и выводы: Для определения оптимального размещения посевов по отдельным участкам земли различного плодородия может быть применен распределительный метод. Задачу можно разработать на основе транспортной задачи.

Сформулировать задачу можно так: требуется разместить посевы сельскохозяйственных культур по участкам земли так, чтобы посевные площади по всем культурам равнялись плановым объемам, все пашни должны быть заняты под посев при этом стоимость валовой продукции была бы максимальной.