ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра организации производства и

моделирования экономических систем

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.ДВ.06.02 Исследование операций в менеджменте

Направление подготовки:38.03.02 Менеджмент

Профиль образовательной программы Производственный менеджмент

Форма обучения: заочная

Содержание

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.1 Лекция №1 (2 часа)

Тема: «Методология системного анализа и исследование операция»

1.1.1 Вопросы лекции:

1. Системный анализ, система, оптимизация
2. Схема операционного проекта
3. Особенности математического моделирования

1.1.2 Краткое содержание вопросов

1.Системный анализ, система, оптимизация

Система - множество элементов с определенными способами взаимодействия между ними, которые все вместе выполняют цель системы.

Процесс - все, что происходит в системе. Система работает, значит в ней происходит процесс.

Операция - часть процесса, которая наделена свойствами всей системы. Операция - это управляемое мероприятие, выполняющее определенную цель, сопоставимую с целью всей системы. Например, операция составления расписания учебных занятий для учебного процесса в системе «университет».

При исследовании сложных организационных систем:

1) невозможен экспериментальный метод исследования;

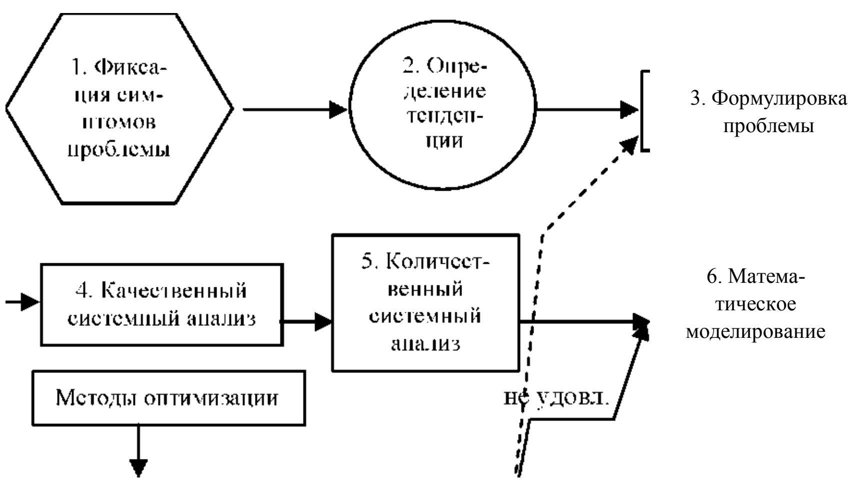
2) невозможно описание поведения систем только на основе какой-либо естественнонаучной теории;

3) при описании таких систем количество факторов, которые необходимо учитывать, велико.

Поэтому очевидно, что такие системы невозможно моделировать, изучать и совершенствовать без использования компьютерных средств и технологий.

2. Схема операционного проекта

Весь комплекс работ по изучению и совершенствованию системы (операции) проводит операционная группа системных аналитиков. Этот проект проводится в интересах лица, принимающего решения (ЛПР). ЛПР может



отвергнуть проект, а может принять.

Дадим краткую характеристику этапов операционного исследования.

1. В самом общем случае поводом для изучения и совершенствования системы служат зафиксированные симптомы, обнаруживающие проблемные вопросы в работе системы.

2. Установленные симптомы проблемы могут образовывать связанную цепочку фактов (тенденцию), которая помогает сформулировать проблему.

3. Важнейшим этапом исследования системы является четкая формулировка проблемы, которая присутствует на данном уровне жизнедеятельности системы.

4.Качественный системный анализ - это расщепление целостной системы (операции) на отдельные элементы (сущности). Для этого нужно:

- выделить изучаемую систему (операцию) из вышестоящей системы (операции);
- сформулировать цель, выполняемую системой (операцией);
- перечислить факторы, которые влияют на достижение цели;
- определить возможные ограничения, в рамках которых можно совершенствовать систему (операцию).

5.Количественный системный анализ предполагает описать все перечисленные факторы, которые участвуют в операции на количественном уровне, т. е. на основе измеримых параметров. Для этого:

- устанавливается критерий *К* - величина, количественно измеряющая степень достижения цели системы (операции);
- вводятся количественные внутренние параметры системы, которые измеряют факторы, участвующие в описании системы (операции);
- все множество этих параметров необходимо разбить на две части:

а) неуправляемые параметры (константы), которые мы в данной конкретной системе (операции) менять не можем (производительность, нормы расхода материалов и т.п.), их обозначают как коэффициенты $A = (a_{ь}\ a_2,\ a_{к});$

б) управляемые параметры (переменные) - величины, которые мы можем менять $X = (x_{ь}\ x_2,\quad x_{n}).$

6. Суть математического моделирования - установление количественных связей между введенными величинами *К, А,* и *X* в виде так называемой операционной модели.

Первая часть операционной модели - это модель целевой функции, она устанавливает функциональную зависимость критерия *К* от неуправляемых параметров *А* и управляемых величин *X* в виде *К = ^(X, А). /* - может быть функция, заданная аналитически, таблично или алгоритмом. В ряде практических задач в качестве элементов множества *X* выступают функции. В этом случае / - функционал. Задачи такого рода называются вариационными и в данном пособии не рассматриваются. Для целевой функции указывается направление улучшения критерия

К = /(X, А) — тт(тах). (1.1)

Этим выражением и определяется смысл оптимизации системы (операции).

Вторая часть операционной модели - математическое описание ограничений на выбор переменных *X*. Все ограничения в общем виде можно записать в виде неравенств (равенств):

((X, А) < 0, 1 = 1,*m*. *(1.2)*

Каждая функция *((X, А)* называется функцией ограничения. В некоторых задачах имеются требования на сам вид переменных *X* или *К*.

$$\left.\begin{array}{l} X \in D \\ K \in M \end{array}\right\}. \qquad (1.3)$$

Например, часто возникает требование, чтобы X или К были целыми. В некоторых случаях они должны принадлежать некоторому стандартному множеству значений.

Модель в виде 1.1, 1.2, 1.3 - модель операционного вида или оптимизационная модель (неоптимизационная - без целевой функции).

Модель 1.1, 1.2, 1.3 позволяет поставить задачу оптимизации системы (операции) как математическую задачу: найти такие управляемые переменные X, которые удовлетворяли бы системе ограничений 1.2, 1.3 и обеспечивали бы наилучшее значение критерия К.

7.Решение поставленной математической задачи требует привлечения методов оптимизации, включающих кроме классических математических методов также и специальные методы исследования операций. Реальные задачи приводят к большой размерности (до десятков тысяч). Поэтому современные методы нахождения оптимальных решений ориентированы на использование компьютерных средств.

8.Сопоставляя полученное решение с содержательной постановкой задачи можно обнаружить противоречия или какие-нибудь некорректные элементы решения. Причиной некорректности могут быть ошибки в математической модели или неучет некоторых существенных ограничений. На этом этапе может принимать участие лицо, принимающее решение (ЛПР). Если полученное решение приемлемо - оно принимается, если нет - необходимо вернуться на этап математического моделирования или даже на более ранние этапы исследования.

9.Найденное оптимальное решение X* позволяет подготовить управляющее решение в форме документа для ЛПР.

Таким образом, операционное исследование - итерационный процесс, который сходится к определенному оптимальному решению. Рассмотренная схема является примерной. Она позволяет лучше понять смысл системного

3. Особенности математического моделирования

Математическое моделирование - самый сложный этап ИСО. Математическая модель - это такое описание системы, которое позволяет специалисту выполнить цель исследования и оптимизации системы. Для одной и той же системы можно построить различные модели, чтобы выявить различные свойства: например аэродинамическая модель, прочностная модель и т.д. Модель должна быть адекватной реальной задаче, т.е. решения, полученные в рамках построенной модели, должны обладать такими же свойствами, что и реальная система.

К сожалению, не существует какого-либо алгоритма, по которому необходимо создать модель. Можно руководствоваться лишь принципами моделирования:

1. Необходимо решить вопрос размерности модели. Если число параметров увеличить, то мы более точно отобразим реальное событие, но в модели будет трудно выявить основные свойства (наиболее значимые). Задача становится необозримой и может не иметь решения. Поэтому число переменных по возможности стараются уменьшать, оставляя главные, существенные. Но уменьшая число переменных, мы можем опустить существенные, и модель становится неадекватной.

2. Модель зависит от точности, с которой нужно получить решение.

3. Модель зависит от того, насколько мы знаем исходные данные.

4. Подход к построению модели может быть двояким:

4.1.Создание оригинальной модели (не учитывая предыдущей модели в этой области), т.е. разработка «с чистого листа». Это может дать, а может не дать хороший результат. Преимущество: «свежий взгляд на вещи», нет чужих ошибок. Но это может быть дороже и потребует большого времени.

4.2.Использование типовых моделей для моделирования конкретных операций. В настоящее время существует большое число типовых моделей, описывающих наиболее распространенные виды операций и систем:

- модель линейного программирования (ЛП);
- модель динамического программирования;
- игровые модели;

1.2 Лекция №2 (2 часа)

Тема: «Линейное программирование»

1.2.1 Вопросы лекции:
1. Общая и основная задача линейного программирования
2. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования
3. Идея симплекс-метода решения задачи линейного программирования

1.2.2 Краткое содержание вопросов

1. Общая и основная задача линейного программирования

Постановка задачи.

Пусть некоторое предприятие имеет m видов производственных ресурсов. Порядковый номер ресурсов – i, т.е. i=1, 2,…, m.

Наличие каждого вида ресурсов известно и обозначается b_i.

Предположим, что предприятие может производить n видов продукции. Порядковый номер продукции – j, т.е. j=1, 2, …, n.

Необходимо определить какое количество единиц продукции каждого вида надо производить (x_j), чтобы получить максимум этой продукции в стоимостном выражении, если известны затраты на производство единицы продукции каждого вида ресурса (a_{ij}) и цена реализации (c_j).

Развернутая форма записи модели.

I. Целевая функция – описывает выход продукции в стоимостном выражении:

$Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\to\max$.

II. Система основных ограничений – описывает с помощью математической зависимости тот факт, что расходы производственных ресурсов не должны превышать их наличие:

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \le b_1$;

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \le b_2$;

…………………………..

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n \le b_m$.

III. Условие неотрицательности переменных величин:

$x_1\ge0$, $x_2\ge0$, …, $x_n\ge0$.

<u>*Замечание:*</u> в постановке с выбором другого критерия оптимальности целевая функция может стремиться к минимуму. Кроме того система ограничений может быть смешанной, т.е. содержать не только неравенства (≤,≥), но и равенства.

Структурная форма записи модели.

В такой форме модели даются в специализированной литературе. В этой форме записи отражается структура и тип ограничений, структура функции, какие переменные входят в функцию Z и в ограничения.

I. $Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$.

II. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$, i=1,2,...,m.

III. $x_j\ge0$, j=1,2,…,n.

Замечание: одной формулой можно описать ограничения, имеющие одинаковую структуру и тип и включающие в себя одни и те же переменные.

Существуют также векторная, матричная и табличная формы записи модели.

2. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования

Графический метод основан на геометрической интерпретации задач линейного программирования и применяется в основном при решении задач *двумерного пространства*, так как довольно трудно, а чаще практически невозможно изобразить графически многогранник решений, который образуется в результате пересечения полупространств. Поэтому, сущность графического метода решения задач линейного программирования рассмотрим на примере задачи, заданной в двумерном пространстве, т.е. ее ограничения содержат две переменные.

Задача. Найти максимальное значение линейной функции:

$$z = 50x_1 + 40x_2$$

при ограничениях

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 5x_2 \le 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{array}\right\}$$

Решение

Построим многоугольник решений (рис.1), для этого в системе координат $x_1 0 x_2$ на плоскости изобразим граничные прямые:

$$2x_1 + 5x_2 = 20\ (l_1)$$
$$8x_1 + 5x_2 = 40\ (l_2)$$
$$5x_1 + 6x_2 = 30\ (l_3)$$
$$x_1 = 0;\ x_2 = 0$$

Эти прямые рекомендуется строить по двум точкам пересечения с осями координат. Например, для l_1 такими точками будут точки $A(0;4)$ и $E(10;0)$.

Взяв какую-нибудь точку (удобнее всего взять начало координат), устанавливаем, какую полуплоскость определяет каждое из неравенств, соответствующее уравнениям граничных прямых (эти полуплоскости на рис.1 показаны стрелками, штриховкой выделяется общая часть (пересечение) указанных полуплоскостей). Многоугольником решений или *областью допустимых решений* данной задачи является ограниченный пятиугольник *OABCD*.

Далее строим одну из линий уровня целевой функции как прямую линию, соответствующую уравнению Z=const. В нашей задаче можно построить прямую $50x_1 + 40x_2 = 200$ (l_4). Через точку O проводим прямую, параллельную l_4, ей соответствует уравнение Z=0 или $50x_1 + 40x_2 = 0$. Таким образом, определяем направление движения по линиям уровня целевой функции, соответствующее ее наибыстрейшему возрастанию (на рис.1 это направление отмечено стрелкой на прямой l_4). Осуществляя перемещение прямой l_4 параллельно самой себе в выбранном направлении, получаем, что функция Z принимает максимальное значение на многоугольнике решений в точке C. Этот вывод следует из ***теоремы: если оптимальное решение задачи существует, то оно достигается, по крайней мере, в одной из вершин области допустимых решений.***

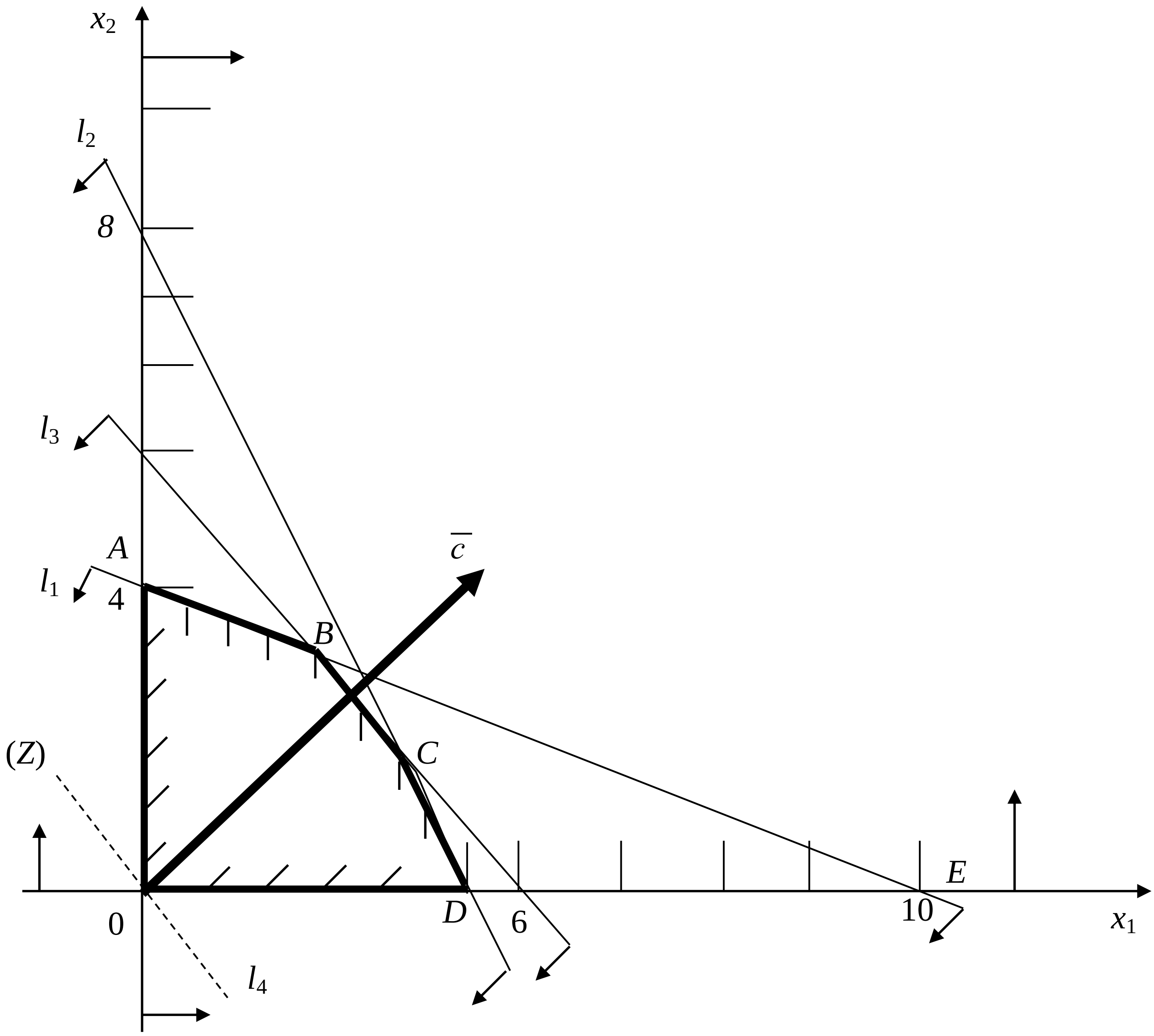


Рисунок 1 – Многоугольник решений

Точка C лежит на пересечении прямых l_2 и l_3 и, следовательно, для определения ее координат нужно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 = 40 \\ 5x_1 + 6x_2 = 30 \end{cases}$$

Подставим найденные значения x_1 и x_2 в функцию Z ($50 \cdot 90/23 + 40 \cdot 40/23$).

Ответ: оптимальное решение задачи $Z_{max} = 6100/23$ при $x_1 = 90/23$; $x_2 = 40/23$.

Замечания:

1) область допустимых решений системы неравенств может быть пустой, одной точкой, выпуклым многоугольником или неограниченной выпуклой многоугольной областью;

2) уравнение $c_1x_1 + c_2x_2 = Z$ при фиксированном значении Z определяет прямую, а при изменении Z – семейство параллельных прямых с параметром Z. Вектор $\bar{c} = (c_1, c_2)$, перпендикулярный ко всем этим прямым, показывает направление возрастания параметра Z;

3) если бы при тех же исходных данных требовалось достичь минимума функции Z, то, очевидно, линию уровня следовало бы перемещать в направлении, противоположном вектору $\overline{C}$. Получили бы оптимальное решение в точке O (0, 0), которой соответствует $Z_{min} = 0$;

4) если экспериментальное значение Z достигается в двух вершинах (случай альтернативного оптимума), то тоже экстремальное значение достигается в любой точке, лежащей на отрезке, соединяющем эти вершины;

5) в случае неограниченной области максимум (минимум) функции Z либо не существует (если Z неограниченна сверху (снизу)), либо достигается по крайней мере в одной из вершин области.

3. Идея симплекс-метода решения задачи линейного программирования

Среди универсальных методов решения задач линейного программирования наиболее распространен *симплексный метод* (или *симплекс-метод),* разработанный американским ученым Дж. Данцигом. Суть этого метода заключается в том, что вначале получают допустимый вариант, удовлетворяющий всем ограничениям, но необязательно оптимальный (так называемое *начальное опорное решение)*. Оптимальность достигается последовательным улучшением этого решения за определенное число этапов (итераций). Нахождение начального опорного решения и переход к следующему опорному решению проводятся на основе применения метода Жордана-Гаусса (мы будем работать с его модифицированным вариантом) для системы линейных уравнений в канонической форме, в которой должна быть предварительно записана исходная задача линейного программирования. Направление перехода от одного опорного решения к другому выбирается на основе критерия оптимальности (целевой функции) исходной задачи.

Весь путь решения задачи симплекс-методом условно можно разбить на три этапа.

I *этап.* Нахождение исходного варианта и исследование его на допустимость, т.е. получение начального опорного решения.

Допустимым вариантом решения задачи будем считать такие значения x_j, при которых выполняются все требования системы ограничений (все неравенства верны и непротиворечивы).

Если исходный вариант допустим, то опорное решение найдено и переходим на второй этап. Иначе, осуществляем перебор вариантов решения задачи до получения допустимого (если такое возможно. Если нет, то задача решения не имеет).

II *этап.* Исследования допустимого варианта на оптимальность.

Оптимальный вариант – это такое значение переменной x_j при котором будут выполняться не только требования системы ограничений, но и требования целевой функции.

Если допустимый вариант окажется оптимальным, то задача решена, иначе переходим на третий этап.

III *этап.* Перебор вариантов решения задачи до получения оптимального варианта (если такое возможно. Если нет, то задача не имеет оптимального решения).

Сам симплекс-метод выбирать варианты не умеет, он только показывает направление перебора вариантов (в нашем случае позволяет осуществить выбор разрешающего элемента). Для расчёта же, в качестве вычислительного аппарата, привлекаются другие методы. Мы будем использовать метод модифицированных Жордановых исключений (МЖИ). Так как данный метод – это метод решения систем линейных уравнений, а модель представляет собой систему линейных неравенств, то модель предварительно должна быть подготовлена.

Суть подготовки заключается в том, чтобы перейти от системы неравенств к системе уравнений в канонической форме. Для этого в каждое ограничение-неравенство вводится дополнительная переменная y_i, как разность между большей и меньшей частями неравенства. Очевидно, что значение y_i не может быть отрицательным.

Подготовленная модель основной задачи линейного программирования будет выглядеть следующим образом:

I. $Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\rightarrow\max$.

II. $y_1=-a_{11}x_1-a_{12}x_2-\ldots-a_{1n}x_n+b_1$;

$y_2=-a_{21}x_1-a_{22}x_2-\ldots-a_{2n}x_n+b_2$;

……………………………………………

$y_m=-a_{m1}x_1-a_{m2}x_2-\ldots-a_{mn}x_n+b_m$.

III. $x_1\geq0,\ x_2\geq0,\ \ldots,\ x_n\geq0$.

Из этого вида данные заносятся в табличную форму для осуществления решения.

1.3 Лекция №3 (2 часа)

Тема: «Транспортная задача»

1.3.1 Вопросы лекции:

1. Метод потенциалов
2. Решение транспортной задачи с неправильным балансом

1.3.2 Краткое содержание вопросов

1.Метод потенциалов.

Математическая модель транспортной задачи относится к задачам линейного программирования и может быть решена симплексным методом. Однако ввиду исключительной практической важности этой задачи и специфики ограничений (ограничения заданы в виде уравнений; каждая неизвестная входит лишь в два уравнения; коэффициенты при неизвестных – единицы) для ее решения созданы специальные алгоритмы. Самым распространенным методом решения транспортной задачи является метод потенциалов.

Решение транспортной задачи разбивается на два этапа:

1) определение начального допустимого базисного решения (первого опорного плана) – первоначальное распределение поставок. Достигается посредством распределительных методов;

2) построение последовательных итераций (шагов), улучшающих опорные планы (каждый новый план не должен увеличивать суммарные затраты при $Z\rightarrow\min$ и уменьшать при $Z\rightarrow\max$). Достигается посредством метода потенциалов.

После выполнения первого этапа шаги второго этапа проводятся до тех пор, пока не будет найдено оптимальное распределение поставок.

1-ый этап. Построение первоначального опорного плана

План составляется последовательным заполнением по одной клетке в таблице так, что каждый раз либо полностью удовлетворяется потребность одного из потребителей, либо полностью вывозится груз от некоторого поставщика. В теории доказывается, что базисное решение системы ограничений (из $m+n$ уравнений с mn переменными) в условиях транспортной задачи имеет $m+n–1$ базисных переменных (ее ранг равен $m+n–1$), поэтому, совершив $m+n–1$ указанных шагов, получим первый опорный план. Опорные планы получают несколькими методами, называемыми распределительными. Среди них можно выделить: метод северо-западного угла, метод наилучших цен и метод аппроксимации. Последние два метода относятся также к приближенным распределительным методам и будут рассмотрены в третьей части данного раздела.

Пример.

$b_1 = 1500 \quad a_1 = 800 \qquad C = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 15 & 16 \\ 17 & 15 & 14 & 13 \\ 15 & 14 & 13 & 16 \end{pmatrix}$

$b_2 = 1000 \quad a_2 = 1200$

$b_3 = 2000 \quad a_3 = 1400$

$a_4 = 1100$

Решить на минимум, заполнив рабочую таблицу методом северо-западного угла.

Таблица 6 – Заполнение рабочей таблицы методом северо-западного угла

	1	2	3	4	b_i
1	13 800	12 700	15	16	1500
2	17	15 500	14 500	13	1000
3	15	14	13 900	16 1100	2000
a_j	800	1200	1400	1100	4500

$Z_{\min} = 800*13 + 700*12 + 500*15 + 500*14 + 900*13 + 1100*16 = 62600.$

При этом методе на каждом шаге построения первого опорного плана заполняется верхняя левая клетка («северо-западный угол») оставшейся части таблицы. При таком методе заполнение таблицы начинается с клетки (1,1) и заканчивается в клетке (m,n), то есть идет как бы по диагонали таблицы перевозок.

Методы наилучших цен и аппроксимации также можно использовать на данном этапе.

2-ой этап. Метод потенциалов. Оптимальность базисного решения.

Полученный одним из распределительных методов опорный план сначала необходимо проверить на вырожденность. Вариант будет невырожденным, если число заполненных клеток N равно сумме поставщиков и потребителей за вычетом единицы:

$$N = m + n - 1.$$

Если на каком-то этапе решения получится вырожденный план (т.е. $N < m + n - 1$), то его необходимо пополнить, проставив в недостающем числе клеток ноль. Поскольку этим дополнительным клеткам будут отвечать нулевые перевозки, то общий баланс и суммарная стоимость перевозок плана при этом не изменится. Однако проводить пополнение плана, выбирая клетки произвольно, нельзя. Необходимо учитывать условие ацикличности. План называется ациклическим, если его базисные клетки (заполненные грузом) не содержат циклов. Циклом в транспортной таблице называется несколько клеток, соединенных замкнутой ломаной линией так, что две соседние вершины ломаной расположены либо в одной строке, либо в одном столбце. Ломаная может иметь точки самопересечения, но не в клетках цикла.

Невырожденный вариант необходимо проверить на оптимальность.

Теорема об оптимальности. Вариант решения задачи будет оптимальным, если найдется такая система абстрактных чисел, называемых потенциалами поставщиков и потенциалами потребителей, при которой для всех клеток таблицы будет выполняться условие:

$$v_j - u_i \le c_{ij} \text{ (при } Z \to \min) \text{ и } v_j - u_i \ge c_{ij} \text{ (при } Z \to \max),$$

где v_j – потенциалы потребителей,

u_i – потенциалы поставщиков,

c_{ij} – цена перевозки единицы груза (условные т/км).

Причем, $v_j - u_i = c_{ij}$ для занятых клеток и $v_j - u_i \le c_{ij}$ (или $v_j - u_i \ge c_{ij}$) для свободных клеток.

На основании этой теоремы исследование на оптимальность проводится в 2 этапа:

1) для каждой занятой клетки составляется уравнение $v_j - u_i = c_{ij}$ в результате чего получается система из $m+n-1$ таких уравнений. Решается эта система относительно потенциалов. Так как в данной системе число уравнений меньше числа неизвестных (т.е. система имеет бесчисленное множество решений), а нам надо найти одно любое решение, то какому-либо потенциалу можно присвоить произвольное число и относительно него рассчитать остальные значения. Для удобства расчетов чаще всего берут u_1=0;

2) для свободных клеток таблицы проверяется условие $v_j - u_i \le c_{ij}$ (или $v_j - u_i \ge c_{ij}$). Вариант будет оптимальным, если для всех свободных клеток это условие выполнится.

Для каждой клетки, в которой не выполняется условие $v_j - u_i \le c_{ij}$ (или $v_j - u_i \ge c_{ij}$), рассчитывается оценка $\alpha_{ij} = |(v_j - u_i) - c_{ij}|$. Клетка, содержащая α_{ij}, называется «плохой», а полученная оценка используется при перераспределении грузов.

То есть исследование на оптимальность не только отвечает на вопрос, оптимален вариант или нет, но еще и подсказывает, в каком направлении надо его улучшать при необходимости.

Перераспределение грузов и получение нового варианта.

Смысл перераспределения заключается в том, чтобы в самую «плохую» клетку (т.е. значение α_{ij} наибольшее) перераспределить какое-то количество груза. Перераспределение грузов должно отвечать следующим требованиям:

1) должны выполняться требования системы ограничений модели;

2) вариант решения задачи должен остаться ациклическим, т.е. не должна появиться лишняя заполненная клетка;

3) должно выполняться условие неотрицательности в модели, т.е. $x_{ij} \ge 0$.

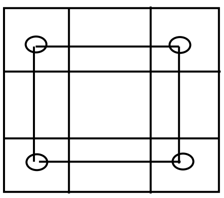
С учетом данных требований, *алгоритм перераспределения* будет состоять из двух шагов:

1) наметить маршрут перераспределения груза.

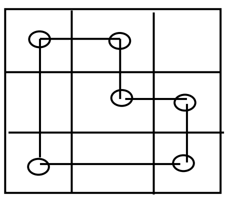
Для этого в таблице строится цикл перераспределения объектов перевозок. Цикл представляет собой замкнутую ломаную линию, которая начинается в той свободной клетке, где условие оптимальности нарушается наиболее сильно (т.е. там, где α_{ij} наибольшая).

Некоторые разновидности циклов.

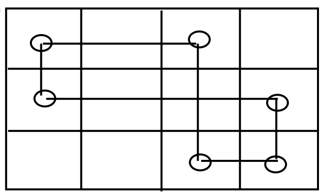
а)



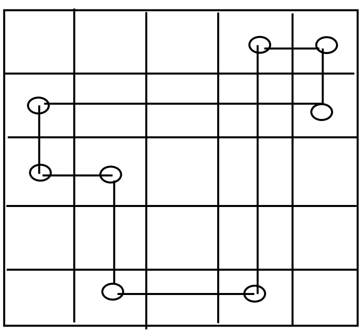
б)



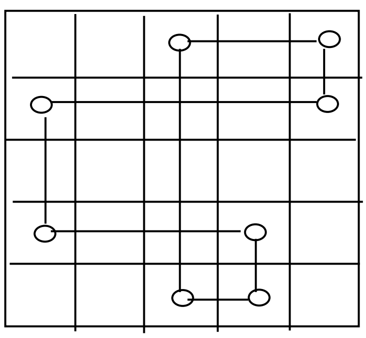
в)



г)



д)



При построении цикла можно проходить как через занятые, так и через свободные клетки таблицы, но повороты делаются только в занятых клетках и под прямым углом;

2) определить порядок изменения объемов перевозок в вершинах цикла.

Для этого в вершинах цикла расставляют знаки «+» и «–», причем в начале цикла (клетка, где α_{ij} наибольшая) ставится знак «+», в следующей «–», в следующей «+» и т.д. Получаем чередование знаков. Направление движения при расстановке знаков от свободной клетки безразлично, так как количество вершин цикла является четной величиной. Наличие знака «+» в вершине цикла показывает, что объем перевозок необходимо увеличить, а «–» – уменьшить. Увеличение и уменьшение объемов перевозок в вершинах цикла производится на одинаковую величину, которая выбирается равной наименьшему из объемов перевозок в тех клетках, где в вершине цикла стоит знак «–». Таким образом, из отрицательной вершины контура необходимо выбрать наименьшее значение x_{ij}. В новой рабочей таблице получаем следующий вариант решения задачи: выбранное значение x_{ij} из отрицательных вершин контура предыдущей таблицы отнимаем, а к положительным – прибавляем. Заполненные клеточки, не являющиеся вершинами контура, не меняют свое значение.

В итоге получаем новый вариант. Следующие шаги поиска оптимального варианта совершаются по аналогии вышеизложенного.

Замечание: алгоритм перераспределения одинаков и при $Z \to \min$ и при $Z \to \max$.

2. Решение транспортной задачи с неправильным балансом.

Среди проблем, для исследования которых успешно применяется линейное программирование, важное значение имеет так называемая транспортная задача.

Общая постановка этой задачи применительно к экономической проблеме экономии издержек производства формулируется так: имеется несколько пунктов назначения (предприятий, потребителей); требуется перевезти некоторое количество однородного товара из различных пунктов отправления в несколько пунктов назначения; каждый из поставщиков может выделить только определенное количество единиц товара и каждому потребителю требуется также определенное количество единиц этого товара; известны расстояния или стоимости перевозки единицы товара от каждого поставщика к каждому потребителю. Задача состоит в том, чтобы найти такие маршруты перевозок, из всех возможных связей поставщиков и потребителей, при которых общие транспортные расходы были бы минимальными (транспортная задача также может быть сформулирована с целевой функцией, стремящейся к максимуму).

Таким образом, пусть имеем m пунктов, в которых находится известное количество однородных грузов (поставщики). Порядковый номер поставщика обозначается i, то есть $i=1,2,\dots,m$. Наличие грузов у поставщика b_i. Имеется n пунктов испытывающих потребность в этих грузах (потребителей). Порядковый номер потребителя $j=1,2,\dots,n$. Потребность в грузах каждого потребителя a_j. Известна «цена» перевозки единицы груза от каждого поставщика к каждому потребителю (c_{ij}). Необходимо составить план перевозки грузов от поставщиков к потребителю, т.е. определить: какое количество груза необходимо перевезти от каждого поставщика к каждому потребителю (x_{ij}), причем значения x_{ij} должны отвечать следующим требованиям:

1) общие затраты на перевозку грузов должны быть минимальными;
2) все грузы от поставщиков должны быть вывезены;
3) потребности потребителей в грузах должны быть удовлетворены.

Требования 2-3 одновременно могут быть выполнены только в том случае, когда сумма грузов у всех поставщиков равна суммарной потребности всех потребителей, то есть:

$$\sum_{i=1}^{m} b_i = \sum_{j=1}^{n} a_j$$ – условие разрешимости задачи.

Если условие разрешимости выполняется, то задача будет являться задачей, так называемого закрытого типа (сбалансированной). Иначе – задача открытого типа (несбалансированная). Для того чтобы решить задачу открытого типа, надо её «закрыть» (то есть привести к закрытому типу). Для этого вводится или фиктивный поставщик или фиктивный потребитель.

В случае, когда *суммарные запасы превышают суммарные потребности*, необходим дополнительный фиктивный пункт потребления, который будет формально потреблять существующий излишек запасов, то есть:

$$a_ф = \sum_{i=1}^{m} b_i - \sum_{j=1}^{n} a_j \ .$$

Если *суммарные потребности превышают суммарные запасы*, то необходим дополнительный *фиктивный* пункт отправления, формально восполняющий существующий недостаток продукции в пунктах отправления:

$$b_ф = \sum_{j=1}^{n} a_j - \sum_{i=1}^{m} b_i \ .$$

Введение фиктивного потребителя или отправителя повлечет необходимость формального задания *фиктивных* тарифов $c_{ij}^{ф}$ (реально не существующих) для фиктивных перевозок. Поскольку нас интересует определение наиболее выгодных *реальных* перевозок, то необходимо предусмотреть, чтобы при решении задачи (при нахождении опорных планов) *фиктивные* перевозки не рассматривались до тех пор, пока не будут определены все реальные перевозки. Для этого надо фиктивные перевозки сделать невыгодными, чтобы при поиске решения задачи их рассматривали в самую последнюю очередь. Таким образом, если целевая функция стремится к min, то затраты берутся во всех фиктивных клетках таблицы произвольные, одинаковые и на порядок выше настоящих цен, т.е. величина фиктивных тарифов должна превышать максимальный из реальных тарифов, используемых в модели: $c_{ij}^{ф} > \max c_{ij} \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$. Если целевая функция стремится к max, то $c_{ij}^{ф}$ берётся равная нулю.

Развёрнутая форма записи модели транспортной задачи.

Для удобства, прежде чем писать модель, запишем в виде матрицы цен все значения c_{ij}. А также в виде матрицы грузоперевозок переменные x_{ij}.

Матрица цен:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11}\ c_{12}\ \ldots c_{1n} \\ c_{21}\ c_{22} \ldots c_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{m1}\ c_{m2} \ldots c_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица $C = (c_{ij})_{m*n}$ называется также матрицей тарифов (издержек или транспортных расходов).

Матрица грузоперевозок:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11}\ x_{12}\ \ldots x_{1n} \\ x_{21}\ x_{22} \ldots x_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1}\ x_{m2} \ldots x_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица $X = (x_{ij})_{m*n}$ еще называется планом транспортной задачи.

Модель транспортной задачи будет выглядеть следующим образом.

I. Целевая функция описывает затраты на перевозку грузов:

$$Z = c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\ldots+c_{1n}x_{1n}+c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+\ldots+c_{2n}x_{2n}+\ldots$$
$$+c_{m1}x_{m1}+c_{m2}x_{m2}+\ldots+c_{mn}x_{mn}\rightarrow \min.$$

II. Система ограничений описывает второе и третье требования для x_{ij} из постановки задачи.

1 группа: условие полного вывоза грузов от поставщиков (сумма грузов, вывезенных от поставщика должна быть равна наличию):

$x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n} = b_1$,
$x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n} = b_2$,
……………………
$x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn} = b_m$;

2 группа: условие удовлетворения потребителя (сумма грузов привезённых потребителю должна быть равна его потребности):

$x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{m1}=a_1$,
$x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{m2}=a_2$,
…………………….
$x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn} = a_n$.

III. Условие неотрицательности переменных величин $x_{11}\geq 0$, $x_{12}\geq 0$, …, $x_{mn}\geq 0$.

Структурная форма записи модели транспортной задачи.

В специализированной литературе модели даются в структурной форме.

I. $Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min.$

II.

1) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i,\ i = 1,2,\ldots,m$

2) $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_j,\ j = 1,2,\ldots,n$

III. $x_{ij}\geq 0$ ($i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$).

Табличная форма записи модели транспортной задачи.

Общепринято в таблице информацию по поставщикам располагать по строкам, по потребителю – по столбцам.

Размер таблицы: строк m+2, столбцов n+2.

Матрицы транспортных расходов и перевозок совмещают обычно в одну двойную матрицу – *матрицу планирования*.

Если в таблицу записана только исходная информация и нет значений x_{ij}, то это рабочая таблица или *макет* задачи. Если значения x_{ij} проставлены, то получаем первый вариант решения задачи. В такой форме задачи решаются.

Таблица 5 – Общий вид транспортной матрицы

потребители

поставщики

	1	2	…	n	b_i
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	b_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	b_m
a_j	a_1	a_2	…	a_n	$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{i=1}^{m} b_i$

Кроме основных условий, в транспортных задачах может встретиться ряд дополнительных, ограничивающих количественные связи между отдельными потребителями и поставщиками. Характер этих ограничений и способы решения задачи при наличии дополнительных ограничений заключаются в следующем.

1. Полное отсутствие связи между поставщиком и потребителем, то есть $x_{ij} = 0$. Это означает, что в данной клетке матрицы искомый объем перевозок должен быть равен нулю. В этом случае оценка переменной завышается на большую величину, обычно обозначаемую буквой М, и «попадание» груза в эту клетку нежелательно, так как целевая функция стремиться к минимуму (и занижается, если $Z \to max$).

2. Наличие частной заранее фиксированной связи между поставщиками и потребителями, то есть $x_{ij} = q$ (искомый объем перевозок от i-го поставщика к j-му потребителю должен быть строго равен q). Тогда, до начала решения задачи от величины грузов соответствующего поставщика и потребителя вычитается величина q, затем в соответствующую клетку пересечения поставщика и потребителя записывается завышенная оценка М (при $Z \to min$ и заниженная при $Z \to max$) и задача решается обычным методом.

3. $x_{ij} \geq q$, то есть искомый объем перевозок от i-го поставщика к j-му потребителю должен быть не меньше величины q. В этом случае до начала решения от величины грузов соответствующего поставщика и потребителя вычитается величина q, затем задача решается обычным путем.

Модель транспортной задачи позволяет решать любые задачи, в которых параметры имеют одинаковые единицы измерения. Такие модели называются однопродуктовыми. К ним можно отнести задачу оптимизации использования машинно-тракторного парка в отдельные агротехнические сроки, задачу оптимального размещения посевов сельскохозяйственных культур по участкам с различным плодородием почв и т.д.

1.4 Лекция № 4 (2 часа)

Тема: «Динамическое программирование»

1.4.1 Вопросы лекции:

1. Принцип оптимальности Беллмана
2. Решение графовых задач на основе принципа Беллмана
3. Функциональное уравнение Беллмана
4. Задачи распределения ресурсов

1.4.2. Краткое содержание вопросов

1. Принцип оптимальности Беллмана

Метод ДП является наиболее общим методом решения задач оптимального управления. Он применим как для задач с линейной ЦФ, так и с нелинейной , а также в случае, когда управляемые переменные целые числа, при этом сама ЦФ может быть задана таблицей, что наиболее распространено в практических задачах.

Процессы называют динамическими, если результаты на одном участке процесса влияют на другие шаги.

Рассмотрим принцип оптимального управления Р. Беллмана. Он связан с проблемой оптимизации сложной системы, состоящей из многих взаимосвязанных элементов. Элементами могут быть экономические единицы, которые входят в единую (более общую) систему; узлы сложной технической системы; отдельные участки производства, строительства, боевых операций и т.д.

Возникает вопрос: как нужно управлять отдельными элементами системы, чтобы показатель эффективности всей системы был максимальным?

Выше мы на интуитивном уровне показали, что для оптимизации в целом недостаточно оптимизировать каждый элемент отдельно - это приводит к неверному результату.

Беллман впервые сформулировал принцип оптимальности для такой задачи. То есть, оптимизируя отдельный шаг, необходимо задумываться о его последствиях, приводящих к общему результату. Для решения подобных задач был разработан метод ДП, основывающийся на уравнении Беллмана, которое математически выражает его принцип.

Назовем состоянием системы 5* один или несколько параметров системы. Например, деньги на лицевом счете предприятия. Обозначим управление на }-дм шаге /Л - это некоторое воздействие, которое испытывает система и изменяет свое состояние 5.

Если перед г-м шагом состояние системы 5 и мы принимаем управление V, то за *г*-й шаг мы можем получить некоторый выигрыш, который обозначается *p(5, V),* при этом состояние 5переходит в 5':

Считается, что функции *со$_г$(8, V).* _и *p(5. V^* известны..

Беллман ввел понятие условного оптимального выигрыша *Ж,(5).* Эта функция показывает оптимальный выигрыш (наилучший результат), полученный за все шаги от *г*-го и до конца, если *г-й* шаг начинается с состояния 5. Тогда согласно принципу оптимальности Беллмана, принимая решение на *г* шаге, мы должны выбрать V так, чтобы выигрыш был максимальным от *г* -шага и до конца.

Принцип оптимальности Беллмана ставит вопрос о том, что такое оптимальность отдельного элемента системы с точки зрения оптимальности всей системы. Принимая решение на отдельном этапе, мы должны выбирать управление на этом этапе с прицелом на будущее, т. к. нас интересует результат в целом за все шаги.

Любой процесс имеет где-то окончание, т. е. говорят, что он имеет «горизонт планирования». Тогда последний этап «не имеет будущего». Вот именно его можно оптимизировать только из условий данного этапа. После этого приступают к оптимизации (т-1)-го этапа. При этом мы задаём состояние, с которого начинается (т-1)-й шаг (условие). Поэтому функцию называют условным оптимальным выигрышем. Таким образом, процесс оптимизации по методу ДП разворачивается сначала от конца к началу, а затем от начала к концу. В различных задачах может быть известно либо начальное состояние, либо конечное, либо то и другое. Принцип Беллмана нашёл практическое применение в так называемом методе программно-целевого планирования (любое действие планируется как элемент некоторого проекта).

2. Решение графовых задач на основе принципа Беллмана

Задача о наборе высоты и скорости летательного аппарата

Летательный аппарат находится на высоте *кй* и летит со скоростью $у_0$. Необходимо перевести его на высоту *к$_* со скоростью у_. Причём *к<>к$_{1г}$* Ур>у^ Разобьём участок от *к^* до *к±* на *п* частей:

ДА:

ДУ :

т

Известен расход горючего при переводе системы на *ДА* при у.=соп51,и на Ду при к=соп§1.

Таким образом, из каждого состояния есть лишь два управления.Начиная с конца помечаем все узлы (состояния) величинами условных (для данного узла) оптимальных расходов горючего от этого узла и до конца, а стрелками условные оптимальные управления. Указанные действия в упрощенном виде демонстрируют рассмотренную

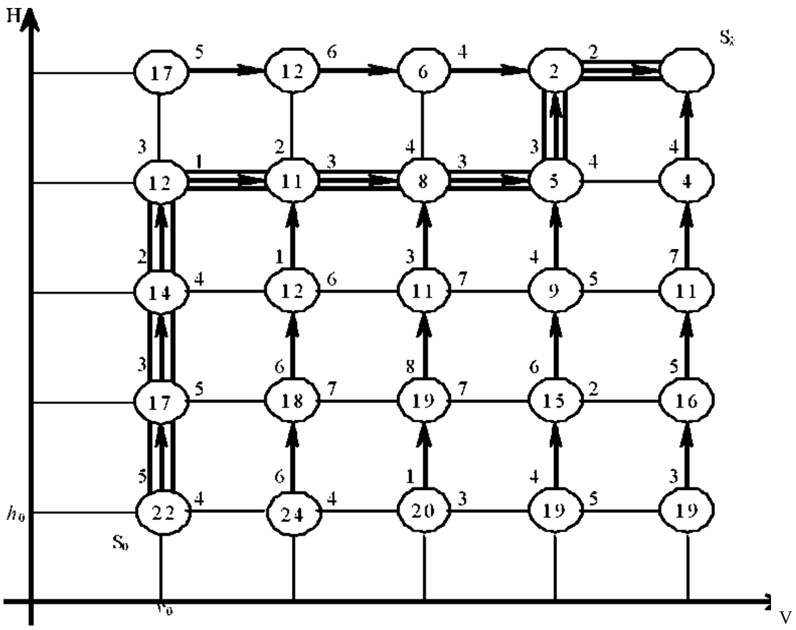


Рис. 23

процедуру решения на основе уравнения Беллмана. Дойдя от конечного состояния до начального и получив 22, мы получим минимальную величину потерь горючего. Идя по стрелкам от начального состояния до конечного, мы получаем безусловные оптимальные управления (показаны двойной линией).

Видно, что любая задача, сводящаяся к поиску минимального пути в графе, решается методом динамического программирования.

3. Функциональное уравнение Беллмана

Назовём состоянием системы вектор координат: 8 = (^1,^2,...,^ь) . В некоторых задачах состояние ^ одна величина. Тогда работу системы можно представить как движение в фазовом пространстве - пространстве состояний. Назовём шаговым управлением ^ управление на 2-м шаге. Рассмотрим процесс управления системой за *т* шагов. Функция *а(8,* Ц) называется выигрышем на м шаге. Здесь 8-состояние перед шагом, а *Ц* - управление на / ,-м шаге.

Величина *а. (8, II.)* должна быть известна до начала динамического программирования. Если состояние перед шагом было 8 и мы приняли какое-то управление Ц, то система перейдёт в новое состояние 8' = (8, Ц) .

функция должна быть так же известна. Если эти функции не заданы, то их надо сформулировать. Введём функцию *Ж(8)^* условный оптимальный выигрыш. Это выигрыш на всех этапах от , до конца, если ,-й шаг начинается с состояния 8.

Рассмотрим т шагов. Пусть с (,+ 1)-го шага мы системой управляем оптимально, тогда величина выигрыша будет так

4. Задачи распределения ресурсов

Классическая задача распределения ресурсов Распределение ресурсов - это едва ли не самая распространённая операция. Под ресурсом в общем случае понимают физическую или абстрактную величину, которую система использует для производства полезного продукта. Например: горючее, деньги, время, объём склада. Как правило - ресурс ограничен, поэтому встаёт задача так распределить ресурс между отдельными элементами системы, чтобы суммарный эффект был максимальным. Рассмотрим классическую задачу распределения ресурсов.

лить между двумя отраслями. Каждая отрасль работает в течении *т* лет. Если в первую отрасль в *1* -й год вкладываются средства X, то доход *ЯX),,* если же во вторую вкладываются, У, тогда доход *∂(У1)*. Средства тратятся, принося доход, а новых средств не поступает и полученный доход не вкладывается. Нас интересует суммарный доход:

Щ= Ё /(x)+*e (y,). "*
1 = 1

Суммарный выигрыш равен сумме выигрышей на каждом шаге. Состоянием системы является количество средств перед *1* -м шагом. Так как новых средств не поступает, то ресурсы «тают».

Управление *У* может быть записано как *У=к-*X_1. После *1* -го шага в первой отрасли остаются средства р(X_1), а во второй (//(у) = *(//(к* -X_1) . Эти функции называются функциями траты. Мы можем составить уравнение Беллмана. В этой задаче на *1* -м шаге одно управление *X* и одно состояние к.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

1. Лабораторная работа № ЛР-1 (2 часа)

2.1.1 Цель работы: Изучить игровые методы принятия решений

Тема: «Решение задач на основе транспортной»

2.2.2 Задачи работы:

1. Применение стандартной транспортной задачи к различным экономическим ситуациям
2.Интерпритация результатов работы

2.1.3 Описание (ход) работы:

Задача 1

Необходимо разместить сорта озимой пшеницы по предшественникам таким образом, чтобы сбор озимой ржи был максимальным.

Символ *М* указывает на отсутствие данных урожайности *i*-го сорта по соответствующему *j*–му предшественнику (клетки с этим символом являются запретными).

Таблица 3.7 – Урожайность озимой пшеницы, ц/га

Сорта озимой пшеницы	Предшественники					Всего, га
	Чистый пар	Кукуруза, убранная в стадии молочно-восковой спелости	Однолетние травы на зеленый корм	Бобовые культуры	Стерневые посевы	
Безостая 1	30,7	13,6	18,4	18,9	16,1	9185
Одесская 16	26,5	*М*	16,8	19,2	15,2	5583
Белоцерковская 198	*М*	14,4	14,1	*М*	16,5	1114
Мичуринка	16,8	10,8	*М*	*М*	*М*	65
Всего, га	4503	2160	2884	2800	3600	

Задача 2

Необходимо составить оптимальный план проведения весенне-полевых работ, для имеющейся техники в хозяйстве. Объем работ в гектарах мягкой пахоты, производительность имеющейся техники за период (гектары мягкой пахоты), затраты на единицу работы представлены в таблице 3.9.

Таблица 3.9 – Затраты на 1 га мягкой пахоты, руб.

Виды работ	Марки тракторов	б о т .

	ДТ–75М	МТЗ-821	Т - 4А	ДТ-175С	
Раннее боронование зяби	5,5	5,7	5,8	5,9	210
Предпосевная культивация	4,8	5,0	5,7	6,0	1000
Посев яровых зерновых	5,5	5,7	5,8	5,9	75
Боронование озимой пшеницы	5,1	6,5	6,4	7,0	135
Прикатывание	*М*	5,4	5,3	5,6	40
Объем работ, га м. п.	470	400	270	320	

Затраты на проведение весенне-полевых работ должны быть минимальными.

i. Результаты и выводы:

На основе транспортных задач решаются задачи распределения посевов по участкам земли с различным плодородием, оптимизации машино-тркторного парка.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

3.1 Практическое занятие №1,2 (4 часов)

Тема: «Линейное программирование. Алгоритм симплекс-метода»

3.1.1 Задание для работы:

1. Получение исходного варианта и исследование его на допустимость
2. Получение допустимого варианта и исследование его на оптимальность
3. Получение оптимального варианта.

3.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Получение исходного варианта и исследование его на допустимость

Среди универсальных методов решения задач линейного программирования наиболее распространен *симплексный метод* (или *симплекс-метод),* разработанный американским ученым Дж. Данцигом. Суть этого метода заключается в том, что вначале получают допустимый вариант, удовлетворяющий всем ограничениям, но необязательно оптимальный (так называемое *начальное опорное решение)*. Оптимальность достигается последовательным улучшением этого решения за определенное число этапов (итераций). Нахождение начального опорного решения и переход к следующему опорному решению проводятся на основе применения метода Жордана-Гаусса (мы будем работать с его модифицированным вариантом) для системы линейных уравнений в канонической форме, в которой должна быть предварительно записана исходная задача линейного программирования. Направление перехода от одного опорного решения к другому выбирается на основе критерия оптимальности (целевой функции) исходной задачи.

Весь путь решения задачи симплекс-методом условно можно разбить на три этапа.

I *этап.* Нахождение исходного варианта и исследование его на допустимость, т.е. получение начального опорного решения.

Допустимым вариантом решения задачи будем считать такие значения x_j, при которых выполняются все требования системы ограничений (все неравенства верны и непротиворечивы).

Если исходный вариант допустим, то опорное решение найдено и переходим на второй этап. Иначе, осуществляем перебор вариантов решения задачи до получения допустимого (если такое возможно. Если нет, то задача решения не имеет).

II *этап.* Исследования допустимого варианта на оптимальность.

Оптимальный вариант – это такое значение переменной x_j при котором будут выполняться не только требования системы ограничений, но и требования целевой функции.

Если допустимый вариант окажется оптимальным, то задача решена, иначе переходим на третий этап.

III *этап.* Перебор вариантов решения задачи до получения оптимального варианта (если такое возможно. Если нет, то задача не имеет оптимального решения).

Сам симплекс-метод выбирать варианты не умеет, он только показывает направление перебора вариантов (в нашем случае позволяет осуществить выбор разрешающего элемента). Для расчёта же, в качестве вычислительного аппарата, привлекаются другие методы. Мы будем использовать метод модифицированных Жордановых исключений (МЖИ). Так как данный метод – это метод решения систем линейных уравнений, а модель представляет собой систему линейных неравенств, то модель предварительно должна быть подготовлена.

Суть подготовки заключается в том, чтобы перейти от системы неравенств к системе уравнений в канонической форме. Для этого в каждое ограничение-неравенство вводится дополнительная переменная y_i, как разность между большей и меньшей частями неравенства. Очевидно, что значение y_i не может быть отрицательным.

Подготовленная модель основной задачи линейного программирования будет выглядеть следующим образом:

IV. $Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\rightarrow\max.$

V. $y_1=-a_{11}x_1-a_{12}x_2-\ldots-a_{1n}x_n+b_1;$

$y_2=-a_{21}x_1-a_{22}x_2-\ldots-a_{2n}x_n+b_2;$

……………………………………………

$y_m=-a_{m1}x_1-a_{m2}x_2-\ldots-a_{mn}x_n+b_m.$

VI. $x_1\geq0,\ x_2\geq0,\ \ldots,\ x_n\geq0.$

Из этого вида данные заносятся в табличную форму для осуществления решения.

Алгоритм симплекс-метода

I *этап*: получение начального опорного решения.

Для того, чтобы получить исходный вариант достаточно записать подготовленную модель в табличной форме.

Таблица 1 – Симплекс-таблица исходного варианта

свободные переменные

базисные переменные

	$-x_1$	$-x_2$	…	$-x_n$	Свободные члены
y_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
y_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
Z	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_n$	0

Из каждой таблицы можно выписать один вариант решения задачи. Для этого надо помнить, что свободные переменные (верхняя строка таблицы) приравниваются к нулю, а базисные (крайний левый столбец) к соответствующим свободным членам.

Исходный вариант (по таблице 1):

1) основные переменные (x_j): x_1=0, x_2=0,…, x_n=0;
2) дополнительные переменные (y_i): y_1=b_1, y_2=b_2,…, y_m=b_m;
3) Z=0.

Исследуем полученный вариант на допустимость.

Теорема о допустимости: в таблице будет находиться допустимый вариант решения задачи, если среди свободных членов не будет отрицательных (элемент на пересечение столбца свободных членов и строки Z при анализе во внимание не принимается).

Доказательство: свободные члены являются значениями базисных переменных, если среди базисных переменных есть x_j, то они не могут быть отрицательными в силу условия неотрицательности ($x_j \geq 0$). Если в базисе y_i, то оно не должно быть отрицательным так как y_i вводилась как разница между большей и меньшей частью неравенства.

Если вариант допустим, то перейдем на второй этап и исследуем его на оптимальность. Если нет, то попытаемся получить допустимый вариант, выбрав разрешающий элемент по следующему правилу:

- выбор разрешающей строки: среди отрицательных свободных членов (кроме строки Z), выбрать больший по абсолютной величине. Пусть это b_2;
- выбор разрешающего столбца: взять симплексные отношения, поделив свободный член разрешающей строки на каждый её коэффициент:

$$\frac{b_2}{a_{21}},\ \frac{b_2}{a_{22}},\dots,\frac{b_2}{a_{2n}}.$$

Наименьшее положительное из симплексных отношений укажет на столбец.

Выбирая описанным способом разрешающие элементы, делаем шаги до получения допустимого варианта (если такое возможно).

Предположим, что на каком-то шаге мы получим таблицу с допустимым вариантом, т.е. найдем опорное решение.

2. Получение допустимого варианта и исследование его на оптимальность

II *этап*: исследование допустимого варианта на оптимальность.

Теорема об оптимальности: в таблице будет находиться оптимальный вариант, если среди коэффициентов строки Z не будет отрицательных при $Z \to \max$ и не будет положительных при $Z \to \min$ (элемент на пересечение столбца свободных членов и строки Z при анализе во внимание не принимается).

Если вариант окажется оптимальным, то задача решена, если нет, то переходим на третий этап.

3. Получение оптимального варианта.

Предположим, что наш допустимый вариант не оптимален.

III *этап:* нахождение оптимального варианта.

Попытаемся получить оптимальный вариант, выбрав разрешающий элемент по следующему правилу:

при $Z \to \max$:

- разрешающий столбец: среди отрицательных коэффициентов строки Z выбрать наибольший по абсолютной величине (например, пусть это c_n);
- разрешающая строка: взять симплексные отношения, поделив свободные члены на соответствующие элементы разрешающего столбца, кроме строки Z:

$$\frac{b_1}{a_{1n}},\ \frac{b_2}{a_{2n}},\ \dots,\frac{b_m}{a_{mn}}.$$

Наименьшее положительное из симплексных отношений укажет на строку;

при $Z \to \min$:

- разрешающий столбец: среди положительных коэффициентов строки Z выбрать наибольший (например, пусть это c_1);

- разрешающая строка: взять симплексные отношения, поделив свободные члены на соответствующие элементы разрешающего столбца, кроме строки Z:

$$\frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_2}{a_{21}}, \ldots, \frac{b_m}{a_{m1}}.$$

Наименьшее положительное из симплексных отношений укажет на строку.

Выбирая описанным способом разрешающий элемент, делаем шаги до получения оптимального варианта (если такое возможно).

Замечание. Если при нахождении оптимального варианта разрешающая строка была выбрана не по наименьшему положительному симплексному отношению, то в следующей таблице будет получен недопустимый вариант.

Упражнения

Задача 1

I. Целевая функция:

$Z = 30x_1 + 35x_2 + 136x_3 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 1{,}01x_1 + 1{,}01x_2 + 9{,}45x_3 \le 136 \\ 0{,}18x_1 + 0{,}19x_2 \le 21{,}4 \\ 3{,}25x_3 \le 16{,}25 \\ x_1 \ge 100 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

Решение:

Переходим от системы неравенств к системе уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = -1{,}01x_1 - 1{,}01x_2 - 9{,}45x_3 + 136 \\ y_2 = -0{,}18x_1 - 0{,}19x_2 + 21{,}4 \\ y_3 = -3{,}25x_3 + 16{,}25 \\ y_4 = x_1 - 100 \end{cases}$$

Запишем математическую модель в табличной форме:

Таблица 1

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены
$y_1 =$	1,01	1,01	9,45	136
$y_2 =$	0,18	0,19	0	21,4
$y_3 =$	0	0	3,25	16,25
$y_4 =$	–1	0	0	–100
$Z =$	–30	–35	–136	0

Для того, чтобы вести параллельно проверку вычислений необходимо в полученную таблицу 1 добавить столбец $\sum$ (табл. 2)

Выберем разрешающий элемент:
Таблица 2

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены	$\sum_1$
y_1 =	1,01	1,01	9,45	136	146,46
y_2 =	0,18	0,19	0	21,4	21,59
y_3 =	0	0	3,25	16,25	19,5
y_4 =	–1	0	0	–100	–99
Z=	–30	–35	–136	0	–171

Сделаем первую итерацию
Таблица 3

	$-y_4$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены	$\sum_1$	$\sum_2$
y_1 =	1,01	1,01	9,45	35	38,02	46,47
y_2 =	0,18	0,19	0	3,4	3,77	3,77
y_3 =	0	0	3,25	16,25	16,25	19,5
x_1 =	–1	0	0	100	99	99
Z =	–30	–35	–136	3000	2935	2799

Получен допустимый, не вырожденный, но не оптимальный вариант.

Сделаем вторую итерацию
Таблица 4

	$-y_4$	$-x_2$	$-y_1$	Свободные члены	$\sum_1$	$\sum_2$
x_3 =	0,11	0,11	0,11	3,7	3,92	4,03
y_2 =	0,18	0,19	0	3,4	4,58	3,77
y_3 =	–0,35	–0,35	–0,34	4,21	3,52	3,17
x_1 =	–1	0	0	100	99	99
Z =	–15,46	–20,46	14,39	3503,7	3502,63	3482,17

Получен допустимый, не вырожденный, но не оптимальный вариант.

Сделаем третью итерацию
Таблица 5

	$-y_4$	$-y_2$	$-y_1$	Свободные члены	$\sum_1$	$\sum_2$
x_3 =	0,01	–0,58	0,11	1,73		1,27
x_2 =	0,95	5,26	0	17,89		24,1
y_3 =	–0,02	1,84	–0,34	10,47		11,96
x_1 =	–1	0	0	100		99
Z =	3,92	107,68	14,39	3869,83		3995,82

Получен допустимый вариант, являющийся оптимальным.

$Z = 3869{,}83$

$$\begin{cases} x_1 = 100 \\ x_2 = 17{,}89 \\ x_3 = 1{,}73 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 10{,}47 \\ y_4 = 0 \end{cases}$$

Рассмотренная нами задача в исходном виде была сформулирована следующим образом:

Продукцией городского молочного завода являются молоко, кефир и сметана. На производство 1 т молока, кефира и сметаны требуется соответственно 1010, 1010 и 9450 кг молока. При этом затраты рабочего времени при разливе 1 т молока и кефира составляют 0,18 и 0,19 машино-ч. На расфасовке 1 т сметаны заняты специальные автоматы в течение 3,25 ч. Всего для производства цельномолочной продукции завод может использовать 136000 кг молока. Основное оборудование может быть занято в течение 21,4 машино-ч, а автоматы по расфасовке сметаны - в течение 16,25 ч. Прибыль от реализации 1 т молока, кефира и сметаны соответственно равна 30, 22 и 136 руб. Завод должен ежедневно производить не менее 100 т молока.

Составьте математическую модель задачи, позволяющую определить объемы выпуска молочной продукции, позволяющие получить наибольшую прибыль.

В результате полученного решения можно сделать вывод, что максимальная прибыль возможна в размере 3869,83 руб. Оптимальный объем выпуска молока – 100 т, кефира – 17,89 т, сметаны – 1,73 т.

3.1.3 Результаты и выводы:

Суть этого метода заключается в том, что вначале получают допустимый вариант, удовлетворяющий всем ограничениям, но необязательно оптимальный (так называемое *начальное опорное решение)*. Оптимальность достигается последовательным улучшением этого решения за определенное число этапов (итераций). Нахождение начального опорного решения и переход к следующему опорному решению проводятся на основе применения метода Жордана-Гаусса (мы будем работать с его модифицированным вариантом) для системы линейных уравнений в канонической форме, в которой должна быть предварительно записана исходная задача линейного программирования. Направление перехода от одного опорного решения к другому выбирается на основе критерия оптимальности (целевой функции) исходной задачи.

Весь путь решения задачи симплекс-методом условно можно разбить на три этапа.

I *этап.* Нахождение исходного варианта и исследование его на допустимость, т.е. получение начального опорного решения.

Допустимым вариантом решения задачи будем считать такие значения x_j, при которых выполняются все требования системы ограничений (все неравенства верны и непротиворечивы).

Если исходный вариант допустим, то опорное решение найдено и переходим на второй этап. Иначе, осуществляем перебор вариантов решения задачи до получения допустимого (если такое возможно. Если нет, то задача решения не имеет).

II *этап.* Исследования допустимого варианта на оптимальность.

Оптимальный вариант – это такое значение переменной x_j при котором будут выполняться не только требования системы ограничений, но и требования целевой функции.

Если допустимый вариант окажется оптимальным, то задача решена, иначе переходим на третий этап.

III *этап.* Перебор вариантов решения задачи до получения оптимального варианта (если такое возможно. Если нет, то задача не имеет оптимального решения).

Сам симплекс-метод выбирать варианты не умеет, он только показывает направление перебора вариантов (в нашем случае позволяет осуществить выбор разрешающего элемента). Для расчёта же, в качестве вычислительного аппарата, привлекаются другие методы.

3.2 Практическое занятие 3 (2 часов)

Тема: «Транспортная задача»

3.2.1 Задание для работы:

1. Подготовка и модель транспортной задачи.
2. Алгоритм метода потенциалов.
3. Приближенные распределительные методы.
4. Решение распределительных задач методом потенциалов (закрытого типа; открытого типа; случай вырожденности; решение задач приближенными методами).
5. Решение задачи линейного программирования в MS Excel

3.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Подготовка и модель транспортной задачи. Среди проблем, для исследования которых успешно применяется линейное программирование, важное значение имеет так называемая транспортная задача.

Общая постановка этой задачи применительно к экономической проблеме экономии издержек производства формулируется так: имеется несколько пунктов назначения (предприятий, потребителей); требуется перевезти некоторое количество однородного товара из различных пунктов отправления в несколько пунктов назначения; каждый из поставщиков может выделить только определенное количество единиц товара и каждому потребителю требуется также определенное количество единиц этого товара; известны расстояния или стоимости перевозки единицы товара от каждого поставщика к каждому потребителю. Задача состоит в том, чтобы найти такие маршруты перевозок, из всех возможных связей поставщиков и потребителей, при которых общие транспортные расходы были бы минимальными (транспортная задача также может быть сформулирована с целевой функцией, стремящейся к максимуму).

Таким образом, пусть имеем m пунктов, в которых находится известное количество однородных грузов (поставщики). Порядковый номер поставщика обозначается i, то есть $i=1,2,\dots,m$. Наличие грузов у поставщика b_i. Имеется n пунктов испытывающих потребность в этих грузах (потребителей). Порядковый номер потребителя $j=1,2,\dots,n$. Потребность в грузах каждого потребителя a_j. Известна «цена» перевозки единицы груза от каждого поставщика к каждому потребителю (c_{ij}). Необходимо составить план перевозки грузов от поставщиков к потребителю, т.е. определить: какое количество груза необходимо перевезти от каждого поставщика к каждому потребителю (x_{ij}), причем значения x_{ij} должны отвечать следующим требованиям:

4) общие затраты на перевозку грузов должны быть минимальными;
5) все грузы от поставщиков должны быть вывезены;
6) потребности потребителей в грузах должны быть удовлетворены.

Требования 2-3 одновременно могут быть выполнены только в том случае, когда сумма грузов у всех поставщиков равна суммарной потребности всех потребителей, то есть:

$$\sum_{i=1}^{m} b_i = \sum_{j=1}^{n} a_j$$ – условие разрешимости задачи.

Если условие разрешимости выполняется, то задача будет являться задачей, так называемого закрытого типа (сбалансированной). Иначе – задача открытого типа (несбалансированная). Для того чтобы решить задачу открытого типа, надо её «закрыть» (то есть привести к закрытому типу). Для этого вводится или фиктивный поставщик или фиктивный потребитель.

В случае, когда *суммарные запасы превышают суммарные потребности*, необходим дополнительный фиктивный пункт потребления, который будет формально потреблять существующий излишек запасов, то есть:

$$a_{ф} = \sum_{i=1}^{m} b_i - \sum_{j=1}^{n} a_j .$$

Если *суммарные потребности превышают суммарные запасы*, то необходим дополнительный *фиктивный* пункт отправления, формально восполняющий существующий недостаток продукции в пунктах отправления:

$$b_{ф} = \sum_{j=1}^{n} a_j - \sum_{i=1}^{m} b_i .$$

Введение фиктивного потребителя или отправителя повлечет необходимость формального задания *фиктивных* тарифов $c_{ij}^{ф}$ (реально не существующих) для фиктивных перевозок. Поскольку нас интересует определение наиболее выгодных *реальных* перевозок, то необходимо предусмотреть, чтобы при решении задачи (при нахождении опорных планов) *фиктивные* перевозки не рассматривались до тех пор, пока не будут определены все реальные перевозки. Для этого надо фиктивные перевозки сделать невыгодными, чтобы при поиске решения задачи их рассматривали в самую последнюю очередь. Таким образом, если целевая функция стремится к min, то затраты берутся во всех фиктивных клетках таблицы произвольные, одинаковые и на порядок выше настоящих цен, т.е. величина фиктивных тарифов должна превышать максимальный из реальных тарифов, используемых в модели: $c_{ij}^{ф} > \max c_{ij} \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$. Если целевая функция стремится к max, то $c_{ij}^{ф}$ берётся равная нулю.

Развёрнутая форма записи модели транспортной задачи.

Для удобства, прежде чем писать модель, запишем в виде матрицы цен все значения c_{ij}. А также в виде матрицы грузоперевозок переменные x_{ij}.

Матрица цен:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11}\ c_{12}\ \ldots c_{1n} \\ c_{21}\ c_{22} \ldots c_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{m1}\ c_{m2} \ldots c_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица $C = (c_{ij})_{m*n}$ называется также матрицей тарифов (издержек или транспортных расходов).

Матрица грузоперевозок:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11}\ x_{12}\ \ldots x_{1n} \\ x_{21}\ x_{22} \ldots x_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1}\ x_{m2} \ldots x_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица $X = (x_{ij})_{m*n}$ еще называется планом транспортной задачи.

Модель транспортной задачи будет выглядеть следующим образом.

I. Целевая функция описывает затраты на перевозку грузов:

$$Z=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\ldots+c_{1n}x_{1n}+c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+\ldots+c_{2n}x_{2n}+\ldots$$
$$+c_{m1}x_{m1}+c_{m2}x_{m2}+\ldots+c_{mn}x_{mn}\rightarrow\min.$$

II. Система ограничений описывает второе и третье требования для x_{ij} из постановки задачи.

1 группа: условие полного вывоза грузов от поставщиков (сумма грузов, вывезенных от поставщика должна быть равна наличию):

$x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n} = b_1,$
$x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n} = b_2,$
……………………
$x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn} = b_m;$

2 группа: условие удовлетворения потребителя (сумма грузов привезённых потребителю должна быть равна его потребности):

$x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{m1}=a_1,$
$x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{m2}=a_2,$
…………………….
$x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn} = a_n.$

III. Условие неотрицательности переменных величин $x_{11}\geq 0$, $x_{12}\geq 0$, …, $x_{mn}\geq 0$.

Структурная форма записи модели транспортной задачи.

В специализированной литературе модели даются в структурной форме.

I. $Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min$.

II.

3) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i,\ i = 1,2,\ldots,m$

4) $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_j,\ j = 1,2,\ldots,n$

III. $x_{ij}\geq 0$ (i = 1,2,…,m, j = 1,2,…,n).

Табличная форма записи модели транспортной задачи.

Общепринято в таблице информацию по поставщикам располагать по строкам, по потребителю – по столбцам.

Размер таблицы: строк m+2, столбцов n+2.

Матрицы транспортных расходов и перевозок совмещают обычно в одну двойную матрицу – *матрицу планирования*.

Если в таблицу записана только исходная информация и нет значений x_{ij}, то это рабочая таблица или *макет* задачи. Если значения x_{ij} проставлены, то получаем первый вариант решения задачи. В такой форме задачи решаются.

Таблица 5 – Общий вид транспортной матрицы

потребители

поставщики

	1	2	…	n	b_i
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	b_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	b_m

	x_{m1}	x_{m2}		x_{mn}	
a_j	a_1	a_2	…	a_n	$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{i=1}^{m} b_i$

Кроме основных условий, в транспортных задачах может встретиться ряд дополнительных, ограничивающих количественные связи между отдельными потребителями и поставщиками. Характер этих ограничений и способы решения задачи при наличии дополнительных ограничений заключаются в следующем.

1. Полное отсутствие связи между поставщиком и потребителем, то есть $x_{ij} = 0$. Это означает, что в данной клетке матрицы искомый объем перевозок должен быть равен нулю. В этом случае оценка переменной завышается на большую величину, обычно обозначаемую буквой *M*, и «попадание» груза в эту клетку нежелательно, так как целевая функция стремиться к минимуму (и занижается, если $Z \to \max$).

2. Наличие частной заранее фиксированной связи между поставщиками и потребителями, то есть $x_{ij} = q$ (искомый объем перевозок от i-го поставщика к j-му потребителю должен быть строго равен q). Тогда, до начала решения задачи от величины грузов соответствующего поставщика и потребителя вычитается величина q, затем в соответствующую клетку пересечения поставщика и потребителя записывается завышенная оценка M (при $Z \to \min$ и заниженная при $Z \to \max$) и задача решается обычным методом.

3. $x_{ij} \geq q$, то есть искомый объем перевозок от i-го поставщика к j-му потребителю должен быть не меньше величины q. В этом случае до начала решения от величины грузов соответствующего поставщика и потребителя вычитается величина q, затем задача решается обычным путем.

Модель транспортной задачи позволяет решать любые задачи, в которых параметры имеют одинаковые единицы измерения. Такие модели называются однопродуктовыми. К ним можно отнести задачу оптимизации использования машинно-тракторного парка в отдельные агротехнические сроки, задачу оптимального размещения посевов сельскохозяйственных культур по участкам с различным плодородием почв и т.д.

2. Алгоритм метода потенциалов.

Математическая модель транспортной задачи относится к задачам линейного программирования и может быть решена симплексным методом. Однако ввиду исключительной практической важности этой задачи и специфики ограничений (ограничения заданы в виде уравнений; каждая неизвестная входит лишь в два уравнения; коэффициенты при неизвестных – единицы) для ее решения созданы специальные алгоритмы. Самым распространенным методом решения транспортной задачи является метод потенциалов.

Решение транспортной задачи разбивается на два этапа:

3) определение начального допустимого базисного решения (первого опорного плана) – первоначальное распределение поставок. Достигается посредством распределительных методов;

4) построение последовательных итераций (шагов), улучшающих опорные планы (каждый новый план не должен увеличивать суммарные затраты при $Z \to \min$ и уменьшать при $Z \to \max$). Достигается посредством метода потенциалов.

После выполнения первого этапа шаги второго этапа проводятся до тех пор, пока не будет найдено оптимальное распределение поставок.

1-ый этап. Построение первоначального опорного плана

План составляется последовательным заполнением по одной клетке в таблице так, что каждый раз либо полностью удовлетворяется потребность одного из потребителей, либо полностью вывозится груз от некоторого поставщика. В теории доказывается, что базисное решение системы ограничений (из $m+n$ уравнений с mn переменными) в условиях транспортной задачи имеет $m+n-1$ базисных переменных (ее ранг равен $m+n-1$), поэтому, совершив $m+n-1$ указанных шагов, получим первый опорный план. Опорные планы получают несколькими методами, называемыми распределительными. Среди них можно выделить: метод северо-западного угла, метод наилучших цен и метод аппроксимации. Последние два метода относятся также к приближенным распределительным методам и будут рассмотрены в третьей части данного раздела.

Пример.

$b_1 = 1500 \quad a_1 = 800$

$b_2 = 1000 \quad a_2 = 1200$

$b_3 = 2000 \quad a_3 = 1400$

$a_4 = 1100$

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 15 & 16 \\ 17 & 15 & 14 & 13 \\ 15 & 14 & 13 & 16 \end{pmatrix}$$

Решить на минимум, заполнив рабочую таблицу методом северо-западного угла.

Таблица 6 – Заполнение рабочей таблицы методом северо-западного угла

	1	2	3	4	b_i
1	13 800	12 700	15	16	1500
2	17	15 500	14 500	13	1000
3	15	14	13 900	16 1100	2000
a_j	800	1200	1400	1100	4500

$Z_{\min} = 800*13 + 700*12 + 500*15 + 500*14 + 900*13 + 1100*16 = 62600.$

При этом методе на каждом шаге построения первого опорного плана заполняется верхняя левая клетка («северо-западный угол») оставшейся части таблицы. При таком методе заполнение таблицы начинается с клетки (1,1) и заканчивается в клетке (m,n), то есть идет как бы по диагонали таблицы перевозок.

Методы наилучших цен и аппроксимации также можно использовать на данном этапе.

2-ой этап. Метод потенциалов. Оптимальность базисного решения.

Полученный одним из распределительных методов опорный план сначала необходимо проверить на вырожденность. Вариант будет невырожденным, если число заполненных клеток N равно сумме поставщиков и потребителей за вычетом единицы:

$$N = m + n - 1.$$

Если на каком-то этапе решения получится вырожденный план (т.е. $N < m + n - 1$), то его необходимо пополнить, проставив в недостающем числе клеток ноль. Поскольку этим дополнительным клеткам будут отвечать нулевые перевозки, то общий баланс и суммарная стоимость перевозок плана при этом не изменится. Однако проводить пополнение плана, выбирая клетки произвольно, нельзя. Необходимо учитывать условие ацикличности. План называется ациклическим, если его базисные клетки (заполненные грузом) не содержат циклов. Циклом в транспортной таблице называется несколько клеток, соединенных замкнутой ломаной линией так, что две соседние вершины ломаной расположены либо в одной строке, либо в одном столбце. Ломаная может иметь точки самопересечения, но не в клетках цикла.

Невырожденный вариант необходимо проверить на оптимальность.

Теорема об оптимальности. Вариант решения задачи будет оптимальным, если найдется такая система абстрактных чисел, называемых потенциалами поставщиков и потенциалами потребителей, при которой для всех клеток таблицы будет выполняться условие:

$$v_j - u_i \leq c_{ij} \text{ (при } Z \to \min) \text{ и } v_j - u_i \geq c_{ij} \text{ (при } Z \to \max),$$

где v_j – потенциалы потребителей,

u_i – потенциалы поставщиков,

c_{ij} – цена перевозки единицы груза (условные т/км).

Причем, $v_j - u_i = c_{ij}$ для занятых клеток и $v_j - u_i \leq c_{ij}$ (или $v_j - u_i \geq c_{ij}$) для свободных клеток.

На основании этой теоремы исследование на оптимальность проводится в 2 этапа:

3) для каждой занятой клетки составляется уравнение $v_j - u_i = c_{ij}$ в результате чего получается система из $m+n-1$ таких уравнений. Решается эта система относительно потенциалов. Так как в данной системе число уравнений меньше числа неизвестных (т.е. система имеет бесчисленное множество решений), а нам надо найти одно любое решение, то какому-либо потенциалу можно присвоить произвольное число и относительно него рассчитать остальные значения. Для удобства расчетов чаще всего берут u_1=0;

4) для свободных клеток таблицы проверяется условие $v_j - u_i \leq c_{ij}$ (или $v_j - u_i \geq c_{ij}$). Вариант будет оптимальным, если для всех свободных клеток это условие выполнится.

Для каждой клетки, в которой не выполняется условие $v_j - u_i \leq c_{ij}$ (или $v_j - u_i \geq c_{ij}$), рассчитывается оценка $\alpha_{ij} = |(v_j - u_i) - c_{ij}|$. Клетка, содержащая α_{ij}, называется «плохой», а полученная оценка используется при перераспределении грузов.

То есть исследование на оптимальность не только отвечает на вопрос, оптимален вариант или нет, но еще и подсказывает, в каком направлении надо его улучшать при необходимости.

Перераспределение грузов и получение нового варианта.

Смысл перераспределения заключается в том, чтобы в самую «плохую» клетку (т.е. значение α_{ij} наибольшее) перераспределить какое-то количество груза. Перераспределение грузов должно отвечать следующим требованиям:

4) должны выполняться требования системы ограничений модели;

5) вариант решения задачи должен остаться ациклическим, т.е. не должна появиться лишняя заполненная клетка;

6) должно выполняться условие неотрицательности в модели, т.е. $x_{ij} \geq 0$.

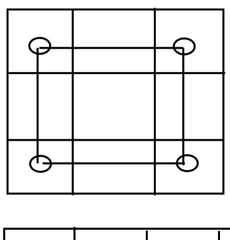
С учетом данных требований, *алгоритм перераспределения* будет состоять из двух шагов:

1) наметить маршрут перераспределения груза.

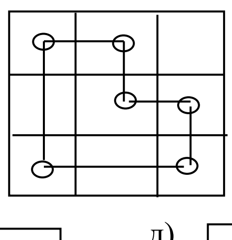
Для этого в таблице строится цикл перераспределения объектов перевозок. Цикл представляет собой замкнутую ломаную линию, которая начинается в той свободной клетке, где условие оптимальности нарушается наиболее сильно (т.е. там, где α_{ij} наибольшая).

Некоторые разновидности циклов.

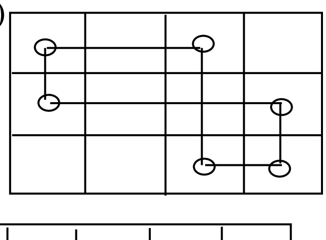
а)



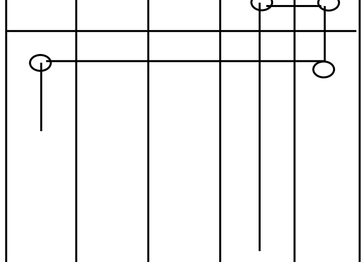
б)



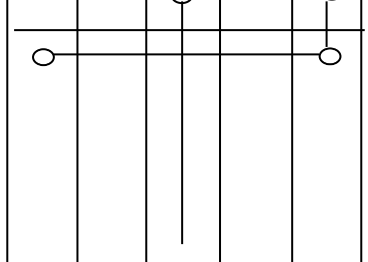
в)

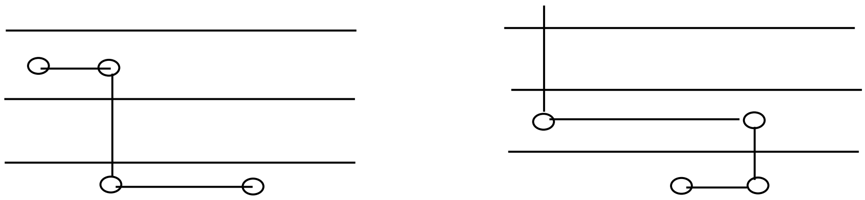


г)



д)





При построении цикла можно проходить как через занятые, так и через свободные клетки таблицы, но повороты делаются только в занятых клетках и под прямым углом;

2) определить порядок изменения объемов перевозок в вершинах цикла.

Для этого в вершинах цикла расставляют знаки «+» и «–», причем в начале цикла (клетка, где α_{ij} наибольшая) ставится знак «+», в следующей «–», в следующей «+» и т.д. Получаем чередование знаков. Направление движения при расстановке знаков от свободной клетки безразлично, так как количество вершин цикла является четной величиной. Наличие знака «+» в вершине цикла показывает, что объем перевозок необходимо увеличить, а «–» – уменьшить. Увеличение и уменьшение объемов перевозок в вершинах цикла производится на одинаковую величину, которая выбирается равной наименьшему из объемов перевозок в тех клетках, где в вершине цикла стоит знак «–». Таким образом, из отрицательной вершины контура необходимо выбрать наименьшее значение x_{ij}. В новой рабочей таблице получаем следующий вариант решения задачи: выбранное значение x_{ij} из отрицательных вершин контура предыдущей таблицы отнимаем, а к положительным – прибавляем. Заполненные клеточки, не являющиеся вершинами контура, не меняют свое значение.

В итоге получаем новый вариант. Следующие шаги поиска оптимального варианта совершаются по аналогии вышеизложенного.

Замечание: алгоритм перераспределения одинаков и при Z→min и при Z→max.

3. Приближенные распределительные методы

К приближенным распределительным методам можно отнести метод наилучших цен и метод аппроксимации. Приближенными они называются вследствие того, что полученное при помощи этих методов распределение груза в таблице не требует дополнительной проверки на оптимальность, так как либо сразу оказывается оптимальным, либо максимально к нему приближено.

Метод наилучших цен

Метод наилучших цен позволяет получить более выгодный опорный план, чем метод северо-западного угла. При распределении груза на каждом шаге этого метода выбирается клетка с *наилучшей ценой*. Наилучшей считается минимальная цена при Z→min, и максимальная цена при Z→max. Если существует несколько клеток с одинаковыми лучшими тарифами, то из них для определенности можно выбрать клетку, находящуюся левее и выше остальных.

Алгоритм метода наилучших цен:

1) рассматривая рабочую таблицу, найти клетку с наилучшей ценой;

2) проставить в эту клетку максимально допустимое значение x_{ij};

3) вычеркнуть свободные нерабочие клетки;

4) откорректировать клетки b_i и a_j.

На этом заканчивается один шаг (итерация) метода.

Из оставшихся свободных рабочих клеток снова выбрать клетку с наилучшей ценой и повторять до тех пор, пока полностью не будет распределен весь груз.

Таблица 7 – Заполнение рабочей таблицы методом наилучших цен

	1	2	3	4	b_i

1	13 300	12 1200	15	16	1500
2	17	15	14	13 1000	1000
3	15 500	14	13 1400	16 100	2000
a_j	800	1200	1400	1100	4500

Z_{min} = 300*13 + 1200*12 + 1000*13 + 500*15 + 1400*13 + 100*16 = 58600.

Замечание. Предлагаемый алгоритм метода можно использовать для решения задач небольшого размера. При решении задач большого размера алгоритм этого метода применяется не для всей рабочей таблицы, а или для каждой стоки, или каждого столбца.

Метод аппроксимации

Данный метод, также как и предыдущий, использует понятие «наилучшая цена», но в отличие от него позволяет более однозначно сделать выбор между равнозначными клетками при распределении груза.

Алгоритм метода аппроксимации:

1) в рабочей таблице задачи берем дополнительную строку и столбец «разностей»;

2) заполняем эти строку и столбец разностями между двумя наилучшими ценами по каждой строке и каждому столбцу;

3) из всех разностей строки и столбца выбрать наибольшую, указать номер итерации;

4) в соответствующей строке или столбце выбираем клетку с наилучшей ценой, проставляем в эту клетку максимальное значение x_{ij};

5) корректируем свободные члены и вычеркиваем нерабочие свободные клетки;

6) из оставшихся неиспользованных разностей снова выбрать наибольшую и так до тех пор, пока или не будут использованы все разности или не будет распределен весь груз.

Если разности будут использованы все, а груз распределен не до конца, то в малых задачах дораспределение груза производится вручную. В больших же задачах приходится дочерчивать строку и столбец "разностей" и заполнять их, но теперь разности берутся между двумя наилучшими ценами, но только по свободным рабочим клеткам.

Таблица 8 – Заполнение рабочей таблицы методом аппроксимации

	1	2	3	4	b_i	Столбец разностей
1	13 300	12 1200	15	16	1500	1
2	17	15	14	13 1000	1000	1
3	15 500	14	13 1400	16 100	2000	1
a_j	800	1200	1400	1100	4500	
Строка разностей	2_3	2_2	1	3_1		

Z_{min} = 300*13 + 1200*12 + 1000*13 + 500*15 + 1400*13 + 100*16 = 58600.

Разность 3_1 означает, что заполнение таблицы начинать следует с клетки (2,4) (столбец выбран с учетом наибольшей разности, клетка в этом столбце выбрана с наименьшей ценой, так как $Z \rightarrow \min$).

При заполнении таблицы следует помнить, что:

1) если разности использованы все, а грузы распределены не до конца, то если существует единственный вариант, дораспределение происходит вручную. Если же дораспределять грузы можно разными способами, то чертится еще одна строка и столбец разностей и заполняются они разностями между наилучшими ценами только по свободным клеткам. Далее алгоритм действий повторяется;

2) если в строке и столбце окажется несколько одинаковых разностей, то предпочтение надо отдать той, которая будет иметь «оптимальный элемент». «Оптимальный элемент» – это цена, которая является наилучшей, как по строке, так и по столбцу, на пересечении которых она стоит. Исследование на наличие «оптимального элемента» проводить после каждой итерации;

3) если оптимальный элемент имеется у нескольких одинаковых разностей, то предпочтение отдать тому «оптимальному элементу», который будет иметь наибольшую сумму «разностей» по строке и столбцу, на пересечении которых он стоит. Если и сумма окажется одинаковой, то заполнять можно клетку с любым «оптимальным элементом»;

4) если мы имеем несколько одинаковых разностей и ни одна из них не имеет «оптимального элемента», то тогда в соответствующих строках и столбцах исчисляются новые разности, но между 1-ой и 3-ей наилучшими ценами.

Замечание. В качестве недостатка этого метода можно отметить необходимость в знании всех его особенностей, а также некоторую громоздкость таблиц.

4. Решение распределительных задач методом потенциалов (закрытого типа; открытого типа; случай вырожденности; решение задач приближенными методами).

Метод потенциалов решения транспортной задачи линейного программирования с нахождением опорного плана методом Северо-западного угла.

Задача 1

Составить план перевозки картофеля из 3 совхозов 3 магазинам так, чтобы сумма расстояний на перевозку была минимальной. Наличие картофеля (в тоннах), потребность магазинов и расстояние от совхоза до магазина (в километрах) приведены в таблице 1.

Таблица 1

Совхоз	*Магазин*			*Запасы*
	1	*2*	*3*	
1	*2*	*8*	*7*	*300*
2	*6*	*9*	*3*	*360*
3	*5*	*2*	*1*	*180*
Потребности	*210*	*450*	*310*	*840* / *970*

Дано: b_i – наличие груза у i-го поставщика (i = 1, 2, 3)

a_j – потребность j-го потребителя (j = 1, 2, 3, 4)

Возможности поставщиков:

$$\sum_{i=1}^{3} b_i = 840$$

Возможности потребителей:

$$\sum_{j=1}^{3} a_j = 970$$

$$\sum_{j=1}^{3} a_j \geq \sum_{i=1}^{3} b_i \quad \rightarrow \quad \left| \sum_{j=1}^{3} a_j - \sum_{i=1}^{3} b_i \right| = 130$$

Задача открытого типа, чтобы закрыть, нужно ввести фиктивного потребителя с потребностью $b_4 = 130$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} \end{pmatrix}$$

x_{ij} – количество груза, перевозимого от i-го поставщика к j-му потребителю.

$$Z = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = a_j \ (j = 1, 2, 3) \qquad \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = b_i \ (i = 1, 2, 3, 4)$$

Условие вывоза:

$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 300$
$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 360$
$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 180$
$x_{41} + x_{42} + x_{43} = 130$

Условие удовлетворения потребностей:

$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 210$
$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 450$
$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 310$

$$\begin{aligned} Z \ &= 2x_{11} + 8x_{12} + 7x_{13} + \\ &+ 6x_{21} + 9x_{22} + 3x_{23} + \\ &+ 5x_{31} + 2x_{32} + 1x_{33} + \\ &+ 10x_{14} + 10x_{15} + 10x_{24} \rightarrow \min \end{aligned}$$

Получаем исходный вариант методом Северо-западного угла.

Таблица 2

Совхоз	*Магазин*			*Запасы*
	1	*2*	*3*	
1	*2* *210*	*8* *90*	*7*	*300*
2	*6*	– *9* *360*	+ *3* *0*	*360*
3	*5*	*2* *α =* *5*	*1* *180*	*180*

4ф	*10*	+ *10* *α = 6*	– *10* *130*	*130*
Потребности	*210*	*450*	*310*	*970* / *970*

$Z_{факт} = 2 \cdot 210 + 8 \cdot 90 + 9 \cdot 360 + 1 \cdot 180 =$
$= 420 + 720 + 3240 + 180 = 4560$

Исследование на вырожденность. Вариант будет невырожденным, если число заполненных клеток N равно сумме поставщиков и потребителей за вычетом единицы: $N = m + n - 1$.

N = 5

$n + m - 1 = 3 + 3 - 1 = 6$,

т.е. $N < m + n - 1$ – вариант вырожденный, следовательно, его необходимо пополнить, проставив в недостающем числе клеток ноль. Поскольку этим дополнительным клеткам будут отвечать нулевые перевозки, то общий баланс и суммарная стоимость перевозок плана при этом не изменится. Однако проводить пополнение плана, выбирая клетки произвольно, нельзя. Необходимо учитывать условие ацикличности.

Поставим ноль в клетку (2,3).

Исследуем на оптимальность, для этого:

1) Составим систему уравнений относительно потенциалов для заполненных клеток таблицы: условие: $v_j - u_i = c_{ij}$.

для клетки (1,1) $v_1 - u_1 = c_{11} = 2$

для клетки (1,2) $v_2 - u_1 = c_{12} = 8$

для клетки (2,2) $v_2 - u_2 = c_{22} = 9$

для клетки (2,3) $v_3 - u_2 = c_{23} = 3$

для клетки (3,3) $v_3 - u_3 = c_{33} = 1$

для клетки (4,3) $v_3 - u_4 = c_{43} = 10$

Как правило $u_1 = 0$, тогда получаем:

$v_1 = 2$ $u_2 = -1$

$v_2 = 8$ $u_3 = 1$

$v_3 = 2$ $u_4 = -8$.

2) С помощью найденных потенциалов проверим выполнение неравенства $v_j - u_i \le c_{ij}$ для свободных клеток и вычислим

$$\alpha = \left| (v_j - u_i) - c_{ij} \right|$$

для тех из них, для которых это неравенство невыполняется.

для клетки (1,3) $v_3 - u_1 \le c_{13}$

$2 - 0 \le 7$ верно

для клетки (2,1) $v_1 - u_2 \le c_{21}$

$2 - (-1) \le 6$ верно

для клетки (3,1) $v_1 - u_3 \le c_{31}$

$2 - 1 \le 5$ верно

для клетки (3,2) $v_2 - u_3 \le c_{32}$

$8 - 1 \le 2$ неверно $\alpha_{32} = 5$

для клетки (4,1) $v_1 - u_4 \le c_{41}$

$2 - (-8) \le 10$ верно

для клетки (4,2) $v_2 - u_4 \le c_{42}$

$$8 - (-8) \leq 10 \qquad \text{неверно} \qquad \alpha_{42} = 6$$

Получаем: $\alpha_{32} = 5$; $\alpha_{42} = 6$.

Существуют плохие клетки, следовательно, вариант представленный в таблице 1 не оптимальный. Для улучшения плана перевозок в таблице строится цикл перераспределения объектов перевозок. Цикл представляет собой замкнутую ломаную линию, которая начинается в той свободной клетке, где условие оптимальности нарушается наиболее сильно. В рассматриваемом примере такой клеткой является клетка (4,2), где α наибольшее ($\alpha_{42} = 6$).

При построении цикла можно проходить как через занятые, так и через свободные клетки таблицы, но повороты можно делать только в занятых клетках под прямым углом. Построим по указанным правилам цикл в таблице 2. Данный цикл показывает, что для улучшения плана перевозок, т.е. для уменьшения общей стоимости перевозок, необходимо изменить объем перевозок в тех клетках, где находятся вершины (углы поворота) цикла.

Порядок изменения объемов перевозок в вершинах цикла определяется следующим образом. В вершинах цикла расставляются знаки «+» и «–», причем в начале цикла ставится знак «+», в следующей «–», в следующей за ней вершине «+» и т.д. То есть, получаем чередование знаков «+» и «–». Направление движения при расстановке знаков от свободной клетки безразлично, так как количество вершин цикла является четной величиной. Наличие знака «+» в вершине цикла показывает, что объем перевозок необходимо увеличить. Увеличение и уменьшение объемов перевозок в вершинах цикла производится на одинаковую величину, которая выбирается равной наименьшему из объемов перевозок в тех клетках, где в вершине цикла стоит знак «–».

В итоге получаем новый вариант в таблице 3. Следующие шаги поиска оптимального варианта совершаются по аналогии вышеизложенного.

Таблица 3

Совхоз	*Магазин*			*Запасы*
	1	*2*	*3*	
1	*2* *210*	*8* *90*	*7*	*300*
2	*6*	*–* *9* *230*	*+* *3* *130*	*360*
3	*5*	*+* *2* *α = 5*	*–* *1* *180*	*180*
4ф	*10*	*10* *130*	*10*	*130*
Потребности	*210*	*450*	*310*	*970* / *970*

$$Z_{\text{факт}} = 2 \cdot 210 + 8 \cdot 90 + 9 \cdot 230 + 3 \cdot 130 + 1 \cdot 180 =$$
$$= 420 + 720 + 2070 + 390 + 180 = 3780$$

Исследование на вырожденность.

N = 6

$n + m - 1 = 3 + 3 - 1 = 6$,

т.е. $N = m + n - 1$ – вариант невырожденный.

Исследуем на оптимальность, для этого:

1) Составим систему уравнений относительно потенциалов для заполненных клеток таблицы: условие: $v_j - u_i = c_{ij}$.

для клетки (1,1) $v_1 - u_1 = c_{11} = 2$

для клетки (1,2) $v_2 - u_1 = c_{12} = 8$

для клетки (2,2) $v_2 - u_2 = c_{22} = 9$

для клетки (2,3) $v_3 - u_2 = c_{23} = 3$

для клетки (3,3) $v_3 - u_3 = c_{33} = 1$

для клетки (4,2) $v_2 - u_4 = c_{42} = 10$

Как правило $u_1 = 0$, тогда получаем:

$v_1 = 2$ $u_2 = -1$

$v_2 = 8$ $u_3 = 1$

$v_3 = 2$ $u_4 = -2$.

2) С помощью найденных потенциалов проверим выполнение неравенства $v_j - u_i \leq c_{ij}$ для свободных клеток и вычислим

$$\alpha = \left| (v_j - u_i) - c_{ij} \right|$$

для тех из них, для которых это неравенство невыполняется.

для клетки (1,3) $v_3 - u_1 \leq c_{13}$

$2 - 0 \leq 7$ верно

для клетки (2,1) $v_1 - u_2 \leq c_{21}$

$2 - (-1) \leq 6$ верно

для клетки (3,1) $v_1 - u_3 \leq c_{31}$

$2 - 1 \leq 5$ верно

для клетки (3,2) $v_2 - u_3 \leq c_{32}$

$8 - 1 \leq 2$ неверно $\alpha_{32} = 5$

для клетки (4,1) $v_1 - u_4 \leq c_{41}$

$2 - (-2) \leq 10$ верно

для клетки (4,3) $v_3 - u_4 \leq c_{43}$

$8 - (-2) \leq 10$ верно

Получаем: $\alpha_{32} = 5$.

Существуют плохие клетки, следовательно, вариант представленный в таблице 1 не оптимальный. Для улучшения плана перевозок в таблице строится цикл перераспределения объектов перевозок. Цикл представляет начинается в той свободной клетке, где условие оптимальности нарушается наиболее сильно. В рассматриваемом примере такой клеткой является клетка (3,2), где α наибольшее ($\alpha_{32} = 5$).

В итоге получаем новый вариант в таблице 4. Следующие шаги поиска оптимального варианта совершаются по аналогии вышеизложенного.

Таблица 4

Совхоз	*Магазин*			*Запасы*
	1	*2*	*3*	
1	*2* *210*	*8* *90*	*7*	*300*
2	*6*	*9* *50*	*3* *310*	*360*
3	*5*	*2* *180*	*1*	*180*
4ф	*10*	*10* *130*	*10*	*130*
Потребност	*210*	*450*	*310*	*970*

u				970

$Z_{факт} = 2\cdot210 + 8\cdot90 + 9\cdot50 + 3\cdot310 + 2\cdot130 =$
$= 420 + 720 + 450 + 910 + 360 = 2860$

Исследование на вырожденность.

N = 6

$n + m - 1 = 3 + 3 - 1 = 6,$

т.е. $N = m + n - 1$ – вариант невырожденный.

Исследуем на оптимальность, для этого:

1) Составим систему уравнений относительно потенциалов для заполненных клеток таблицы: условие: $v_j - u_i = c_{ij}$.

для клетки (1,1) $v_1 - u_1 = c_{11} = 2$
для клетки (1,2) $v_2 - u_1 = c_{12} = 8$
для клетки (2,2) $v_2 - u_2 = c_{22} = 9$
для клетки (2,3) $v_3 - u_2 = c_{23} = 3$
для клетки (3,2) $v_2 - u_3 = c_{32} = 2$
для клетки (4,2) $v_2 - u_4 = c_{42} = 10$

Как правило $u_1 = 0$, тогда получаем:

$v_1 = 2$ $u_2 = -1$
$v_2 = 8$ $u_3 = 6$
$v_3 = 7$ $u_4 = -2$.

2) С помощью найденных потенциалов проверим выполнение неравенства $v_j - u_i \le c_{ij}$ для свободных клеток и вычислим

$$\alpha = \left|(v_j - u_i) - c_{ij}\right|$$

для тех из них, для которых это неравенство невыполняется.

для клетки (1,3) $v_3 - u_1 \le c_{13}$
$7 - 0 \le 7$ верно
для клетки (2,1) $v_1 - u_2 \le c_{21}$
$2 - (-1) \le 6$ верно
для клетки (3,1) $v_1 - u_3 \le c_{31}$
$2 - 6 \le 5$ верно
для клетки (3,3) $v_3 - u_3 \le c_{33}$
$7 - 6 \le 1$ верно
для клетки (4,1) $v_1 - u_4 \le c_{41}$
$2 - (-2) \le 10$ верно
для клетки (4,3) $v_3 - u_4 \le c_{43}$
$7 - (-2) \le 10$ верно

Вариант оптимален.

Ответ: $Z_{min} = 2860$

$$A = \begin{pmatrix} 210 & 90 & 0 \\ 0 & 50 & 310 \\ 0 & 180 & 0 \end{pmatrix}$$

В результате полученного решения можно сделать вывод, что минимальная сумма расстояний на перевозку будет равна 2860 км, если 1-ый совхоз перевезет 1-му и 2-му магазинам соответственно 210 т и 90 т картофеля, 2-ой совхоз 2-му и 3-му магазинам перевезет соответственно 50 т и 310 т картофеля, а 3-ий совхоз 2-му магазину – 180 т картофеля. Причем из 2-му магазину недопоставят 130 т картофеля.

Далее рассмотрим задачи для закрепления навыка решения транспортных задач.

Задача 2
Найти оптимальное решение задачи:

$b_1 = 100$ $a_1 = 140$
$b_2 = 150$ $a_2 = 170$
$b_3 = 130$ $a_3 = 230$
$b_4 = 200$
$b_5 = 180$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 8 \\ 6 & 3 & 2 \\ 8 & 9 & 3 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Решить на max.

Задача 3
Найти оптимальное решение задачи:

$b_1 = 1500$ $a_1 = 800$
$b_2 = 1000$ $a_2 = 1200$
$b_3 = 2000$ $a_3 = 1400$
$a_4 = 1100$

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 15 & 16 \\ 17 & 15 & 14 & 13 \\ 15 & 14 & 13 & 16 \end{pmatrix}$$

Решить на min.

Задача 4
Найти оптимальное решение задачи:

$b_1 = 6$ $a_1 = 4$
$b_2 = 8$ $a_2 = 6$
$b_3 = 10$ $a_3 = 8$
$a_4 = 8$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 8 & 5 \\ 2 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Решить на min.

Задача 5
Найти оптимальное решение задачи:

$b_1 = 200$ $a_1 = 150$
$b_2 = 180$ $a_2 = 130$
$b_3 = 190$ $a_3 = 150$
$a_4 = 140$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Решить на max.

Задача 6
Найти оптимальное решение задачи:

$b_1 = 500$ $a_1 = 150$
$b_2 = 300$ $a_2 = 350$
$b_3 = 100$ $a_3 = 200$
$a_4 = 100$
$a_5 = 100$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Решить на min.

Задача 7
Найти оптимальное решение задачи:

$b_1 = 150$ $a_1 = 200$
$b_2 = 250$ $a_2 = 100$
$b_3 = 50$ $a_3 = 250$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 6 & 7 & 6 \\ 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

$b_4 = 100$ $\quad$ 5 $\quad$ 5 $\quad$ 6

Решить на min.

Задача 8

Найти оптимальное решение задачи:

$b_1 = 130$ $\quad$ $a_1 = 130$

$b_2 = 55$ $\quad$ $a_2 = 75$

$b_3 = 80$ $\quad$ $a_3 = 65$

$b_4 = 65$ $\quad$ $a_4 = 60$

$b_5 = 135$ $\quad$ $a_5 = 75$

$a_6 = 60$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 8 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 9 & 8 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 6 & 11 \\ 3 & 5 & 4 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Решить на min.

5. Решение задачи линейного программирования в MS Excel

Требуется перевезти одноименный груз из трех пунктов отправления в три пункта назначения. Количество грузов, подлежащих отправлению с каждого склада, потребности в них каждого потребителя и расстояния в километрах от каждого пункта отправления в каждый пункт назначения приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2 – Расстояния перевозки, км

Поставщики	Потребители			Наличие грузов, т
	1	2	3	
1	15	17	23	900
2	9	19	8	800
3	24	21	32	550
Потребность в грузах, т	700	800	750	2250 / 2250

Нужно определить, из какого пункта отправления следует удовлетворять спрос потребителей, чтобы общая сумма объема перевозок (ткм) была минимальной.

Решение:

1. Проверка сбалансированности задачи

Просуммируем наличие грузов у поставщиков

$$\sum_{i=1}^{3} b_i = 900+800+550=2250$$

Просуммируем потребности потребителей в грузах

$$\sum_{j=1}^{3} a_j = 700+800+750=2250$$

$\sum_{i=1}^{3} b_i = \sum_{j=1}^{3} a_j$, следовательно, задача сбалансированная (закрытого типа).

2. Определение переменных

Обозначим через x_{ij} [т] количество грузов, которые будут перевезены от i-го поставщика j-му потребителю.

3. I. Целевая функция

Формальная целевая функция имеет вид:

$$F(X) = 15x_{11} + 17x_{12} + 23x_{13} + \\ + 9x_{21} + 19x_{22} + 8x_{23} + \\ + 24x_{31} + 21x_{32} + 32x_{33} \to \min$$

II. Основные ограничения

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 900, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 800, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 550, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 700, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 800, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 750. \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности

$$\forall x_{ij} \ge 0 \quad \left(i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,3}\right).$$

4. Модель задачи в общем виде:

$$\text{I.} \quad F(X) = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + \\ + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + \\ + c_{31}x_{31} + c_{32}x_{32} + c_{33}x_{33} \to \min$$

$$II. \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = b_1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = b_2, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = b_3, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = a_1, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = a_2, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = a_3. \end{cases}$$

$$III. \quad \forall x_{ij} \ge 0 \quad \left(i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,3}\right).$$

5. Модель задачи в структурной форме:

$$I. \quad F(x) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

$$II. \qquad \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{3} x_{ij} = b_i, \quad i = \overline{1,3} \\ \sum\limits_{i=1}^{3} x_{ij} = a_j, \quad j = \overline{1,3} \end{cases},$$

$$III. \; \forall \, x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,3}\right)$$

6. Для решения данной задачи в Excel необходимо:

1) под запись целевой функции отвести ячейку A1;

2) под запись ограничений – ячейки столбца B (количество ячеек совпадает с количеством ограничений): B1, B2, B3, B4, B5, B6;

3) под запись искомых переменных отвести ячейки столбцов C, D, E (количество потребителей совпадает с количеством столбцов,

количество поставщиков – с количеством строк).

Примечание: искомые переменные x_{ij} будут находиться в следующих ячейках:

($x_{11} \to C1$ $\quad x_{12} \to D1$ $\quad x_{13} \to E1$

$x_{21} \to C2$ $\quad x_{22} \to D2$ $\quad x_{23} \to E2$

$x_{31} \to C3$ $\quad x_{31} \to D2$ $\quad x_{33} \to E3$).

Порядок выполнения работы:

1. Ввести в ячейку A1 формулу целевой функции (рисунок 3.1):

=15*C1+17*D1+23*E1+

+ 9*C2+19*D2 + 8*E2+

+24*C3+21*D3+32*E3;

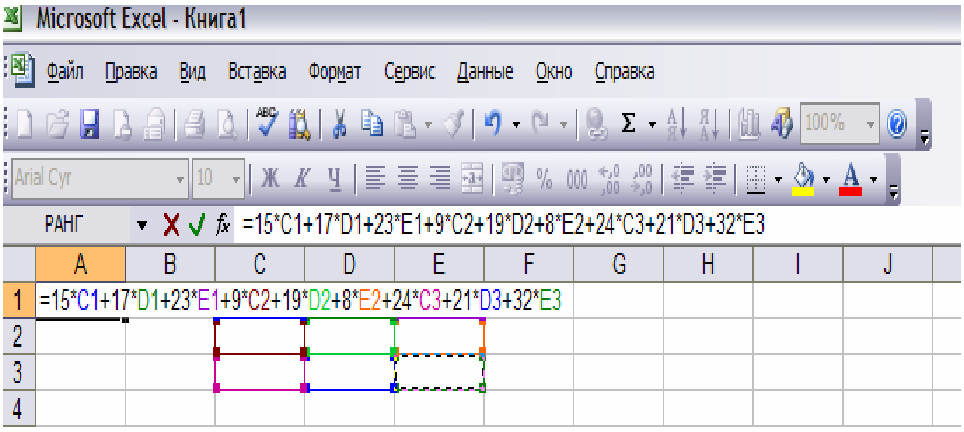


Рисунок 3.1 – Ввод целевой функции в Excel

2. а) Ввести в ячейку B1 левую часть 1-го ограничения: = C1+D1+E1 (рисунок 3.2)

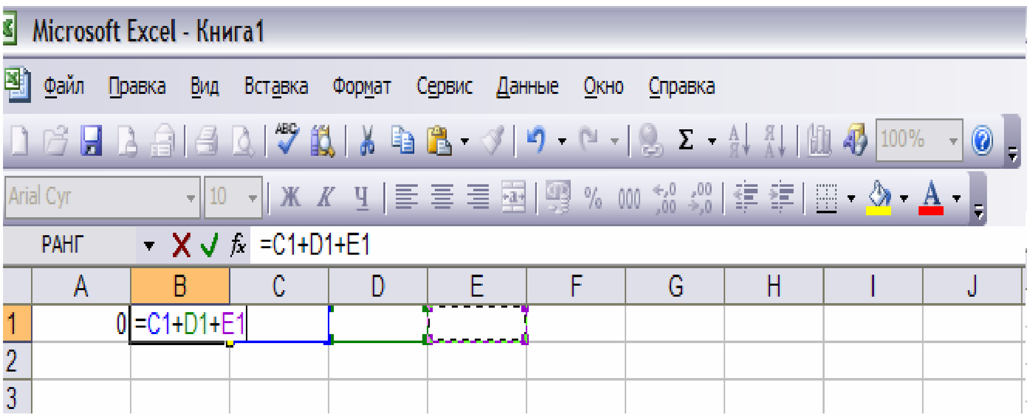


Рисунок 3.2 – Ввод ограничений в Excel

б) Ввести в ячейку B2 левую часть 2-го ограничения:

= C2+D2+E2

в) Ввести в ячейку B3 левую часть 3-го ограничения:

= C3+D3+E3

г) Ввести в ячейку B4 левую часть 4-го ограничения:

= C1+C2+C3

д) Ввести в ячейку B5 левую часть 5-го ограничения:
= D1+D2+D3
е) Ввести в ячейку B6 левую часть 6-го ограничения:
= E1+E2+E3

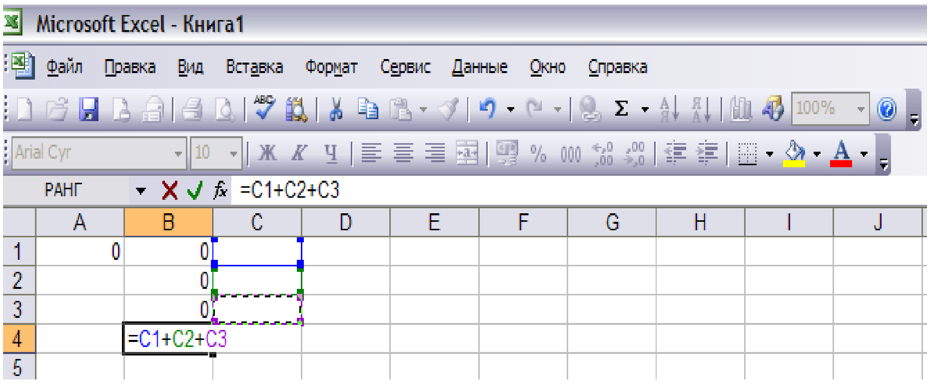


Рисунок 3.3 – Ввод ограничений в Excel

3. На панели инструментов выбрать опцию "Сервис", а в ней вкладку "Поиск решения"

Примечание

Если "Поиск решения" отсутствует, нужно выполнить команду "Сервис"–"Надстройки". В окне диалога "Надстройки" нужно установить флажок напротив строки "Поиск решения".

4. В окне диалога "Поиск решения" в поле ввода "Установить целевую ячейку" нужно ввести ссылку на ячейку A1. Необходимо выбрать способ адресации ячеек в абсолютной системе координат (т.е. указать не A1, а $A$1). Также нужно поступать с другими переменными.

5. В окне диалога "Поиск решения" нужно установить переключатель (рисунок 3.4).

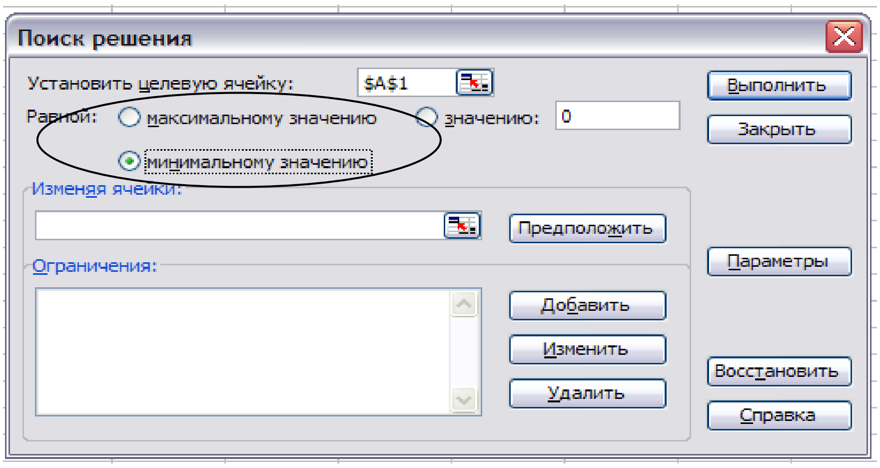


Рисунок 3.4 – Работа в диалоговом окне «Поиск решения»

6. В поле ввода "Изменяя ячейки" нужно указать ссылки на ячейки, содержащие искомые переменные, т.е. диапазон ячеек $C$1: $E$3 (рисунок 3.5).

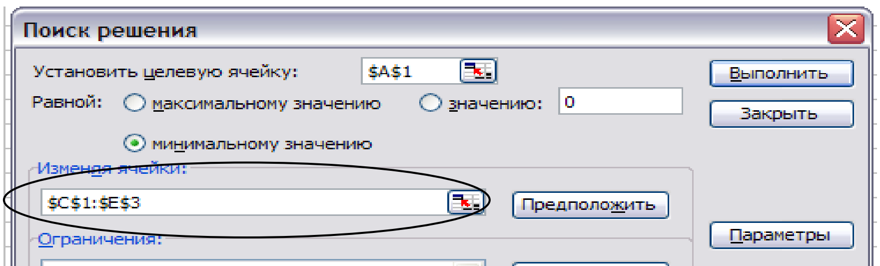


Рисунок 3.5 – Поле ввода ячеек, обозначающих искомые переменные

7. В поле ввода "Ограничения" при нажатии кнопки "Добавить" появляется окно диалога "Добавить ограничения". В поле ввода "Ссылка на ячейку" вводится $B$1. В поле ввода "Ограничение" вводится = и число 900. При помощи кнопки "Добавить" таким же образом вводятся все остальные ограничения (ячейки $B$2:$B$6) (рисунок 3.6).

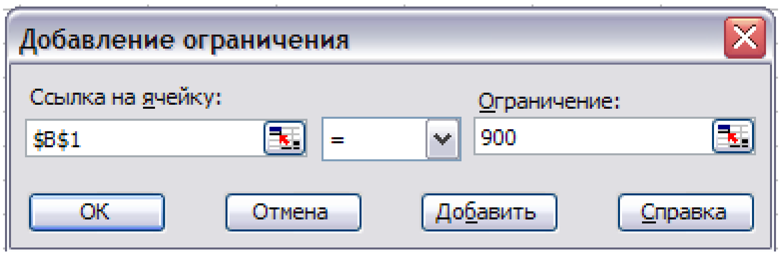


Рисунок 3.6 – Диалоговое окно «Добавление ограничения»

8. Для ввода ограничений на неотрицательность искомых переменных в окне диалога "Добавить ограничения" в поле ввода "Ссылка на ячейку" нужно ввести ссылку на ячейку $C$1, а в поле ввода "Ограничения" нужно ввести >= и число 0. При помощи кнопки "Добавить" таким же образом вводятся условия неотрицательности оставшихся искомых переменных. Либо выделяется диапазон ячеек $C$1: $E$3 и задается >= и число 0. После ввода последнего ограничения нажмите «ОК».

Примечание

Если в задаче имеется условие целочисленности искомых переменных, то в диалоговом окне «Добавление ограничений» в поле ввода "Ссылка на ячейку" нужно ввести ссылку на ячейку $C$1, а в поле ввода знака ограничения нужно ввести «цел». При помощи кнопки "Добавить" таким же образом вводятся условия целочисленности оставшихся искомых переменных. Либо выделяется диапазон ячеек $C$1: $E$3 и задается «цел». После ввода последнего ограничения нажмите «ОК».

9. После нажатия кнопки "Выполнить" Excel рассчитывает результат и открывает окно диалога "Результаты поиска решения". В этом диалоге в окне "Тип отчета" нужно выбрать "Результаты" и нажать Ok. Перед листом, где записана постановка задачи, будет вставлен лист "Отчет по результатам 1", а на экране будет выдан результат решения задачи (рисунок 3.7).

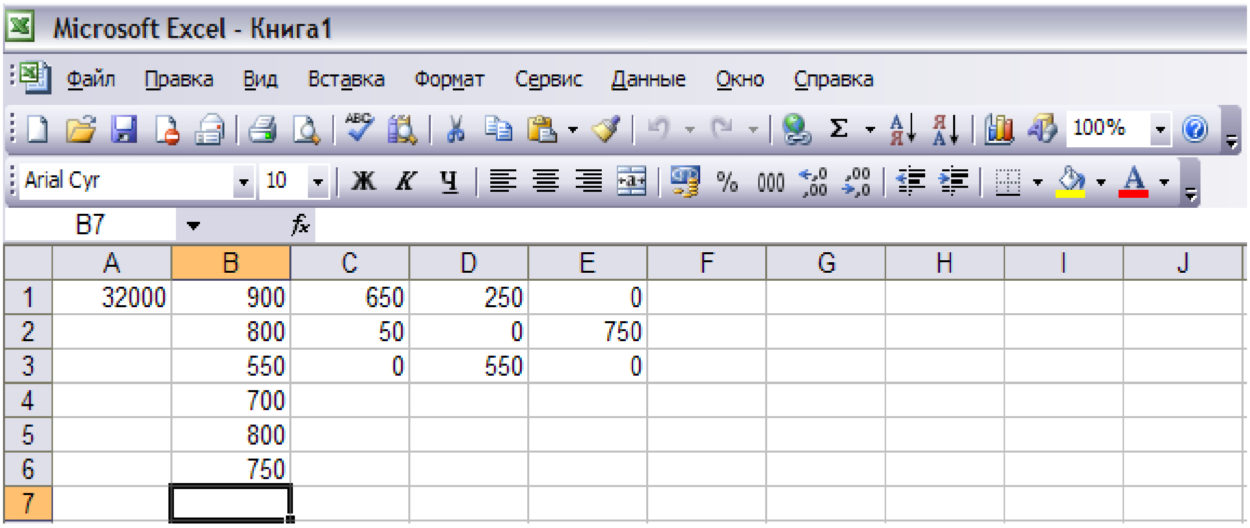


Рисунок 3.7 – Результаты решения задачи

Интерпретация результатов задачи

Полученные значения в ячейках, содержащих формулы целевой функции и ограничений, являются результатом расчета целевой функции и соответствующих ограничений.

Результат, полученный в ячейке А1, означает общую сумму объема грузоперевозок в ткм.

Ячейки В1, В2, В3 показывают выполнение условия полного вывоза груза от поставщика. Ячейки В4, В5, В6 показывают выполнение условия полного удовлетворения потребностей потребителя.

Значения ячеек в диапазоне $C$1: $E$3 показывают количество груза (в т), перевезенного от соответствующего поставщика, соответствующему потребителю. Значения данного диапазона превышают 0, следовательно условие неотрицательности искомых переменных выполнено.

Ответ

Оптимальные перевозки грузов предусматривают перевозку от 1-го поставщика 1-му потребителю 650 т, от 1-го поставщика 2-му потребителю – 250 т, от 2-го поставщика 1-му потребителю – 50 т, а 3-му потребителю – 750 т. 3-й поставщик отвезет свой груз только 2-му потребителю в количестве 550 т. Минимальный объем перевозок составит 32000 т км.

3.2.3 Результаты и выводы:

Общая постановка этой задачи применительно к экономической проблеме экономии издержек производства формулируется так: имеется несколько пунктов назначения (предприятий, потребителей); требуется перевезти некоторое количество однородного товара из различных пунктов отправления в несколько пунктов назначения; каждый из поставщиков может выделить только определенное количество единиц товара и каждому потребителю требуется также определенное количество единиц этого товара; известны расстояния или стоимости перевозки единицы товара от каждого поставщика к каждому потребителю. Задача состоит в том, чтобы найти такие маршруты перевозок, из всех возможных связей поставщиков и потребителей, при которых общие транспортные расходы были бы минимальными (транспортная задача также может быть сформулирована с целевой функцией, стремящейся к максимуму).

Математическая модель транспортной задачи относится к задачам линейного программирования и может быть решена симплексным методом. Однако ввиду исключительной практической важности этой задачи и специфики ограничений (ограничения заданы в виде уравнений; каждая неизвестная входит лишь в два уравнения; коэффициенты при неизвестных – единицы) для ее решения созданы специальные алгоритмы. Самым распространенным методом решения транспортной задачи является метод потенциалов.

К приближенным распределительным методам можно отнести метод наилучших цен и метод аппроксимации. Приближенными они называются вследствие того, что полученное при помощи этих методов распределение груза в таблице не требует дополнительной проверки на оптимальность, так как либо сразу оказывается оптимальным, либо максимально к нему приближено.