ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра организации производства и

моделирования экономических систем

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.ДВ.07.02 Математическое моделирование в менеджменте

Направление подготовки:38.03.02 Менеджмент

Профиль образовательной программы Производственный менеджмент

Форма обучения: заочная

Содержание

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.1 Лекция №2 (2 часа)

Тема: «Линейное программирование»

1.1.1 Вопросы лекции:

1. Классификация методов линейного программирования.
2. Основная задача линейного программирования и её модель в различных формах записи.

1.1.2. Краткое содержание вопросов

1. Классификация методов линейного программирования.

Большое число экономических задач сводится к линейным математическим моделям. Традиционно оптимизационные линейные математические модели называются моделями линейного программирования. Этот термин появился, когда программирование на компьютере еще не было развито, и соответственно не очень удачному переводу английского «programmation». Линейное программирование возникло в СССР. В конце 30-х годов XX в. советский экономист-математик Леонид Витальевич Канторович открыл класс этих задач и придумал некоторые частные методы их решения. В 1975 г. фактически за это открытие он был удостоен Нобелевской премии по экономике, что уже свидетельствует о большой важности задач линейного программирования.

С чисто математической точки зрения задачи линейного программирования интересны тем, что здесь неприменимы методы нахождения экстремумов с помощью производной.

Под *линейным программированием* понимается линейное планирование, т.е. получение оптимального плана-решения в задачах с линейной структурой.

Задачами линейного программирования называются задачи, в которых линейны как целевая функция, так и ограничения в виде равенств и неравенств и для которых методы математического анализа оказываются непригодными. Линейное программирование представляет собой наиболее часто используемый метод оптимизации.

Методы линейного программирования подразделяются на группы:

1) *группа симплексных методов (точные);*
2) группа распределительных методов (точные и приближённые).

Точные – методы перебора вариантов решения задачи в итоге дающие оптимальный вариант. Используются при машинном решении задач.

Приближённые – позволяют получить только один из допустимых вариантов решения задачи. Используются для получения первого варианта в точных распределительных методах или для ручного решения задачи.

Каждая группа методов имеет свою базовую задачу. Для группы симплекс-методов базовой является «Основная задача линейного программирования», для группы распределительных методов – «Транспортная задача».

2. Основная задача линейного программирования и ее модель в различных формах записи.

Постановка задачи.

Пусть некоторое предприятие имеет m видов производственных ресурсов. Порядковый номер ресурсов – i, т.е. i=1, 2,…, m.

Наличие каждого вида ресурсов известно и обозначается b_i.

Предположим, что предприятие может производить n видов продукции. Порядковый номер продукции – j, т.е. j=1, 2, …, n.

Необходимо определить какое количество единиц продукции каждого вида надо производить (x_j), чтобы получить максимум этой продукции в стоимостном выражении, если известны затраты на производство единицы продукции каждого вида ресурса (a_{ij}) и цена реализации (c_j).

Развернутая форма записи модели.

I. Целевая функция – описывает выход продукции в стоимостном выражении:

$Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\rightarrow$max.

II. Система основных ограничений – описывает с помощью математической зависимости тот факт, что расходы производственных ресурсов не должны превышать их наличие:

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \le b_1$;

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \le b_2$;

…………………………

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n \le b_m$.

III. Условие неотрицательности переменных величин:

$x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ \ldots,\ x_n\ge0$.

<u>*Замечание:*</u> в постановке с выбором другого критерия оптимальности целевая функция может стремиться к минимуму. Кроме того система ограничений может быть смешанной, т.е. содержать не только неравенства (≤,≥), но и равенства.

Структурная форма записи модели.

В такой форме модели даются в специализированной литературе. В этой форме записи отражается структура и тип ограничений, структура функции, какие переменные входят в функцию Z и в ограничения.

I. $Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\rightarrow$max.

II. $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \le b_i$, i=*1,2,...,*m.

III. $x_j\ge0$, j=1,2,…,n.

Замечание: одной формулой можно описать ограничения, имеющие одинаковую структуру и тип и включающие в себя одни и те же переменные.

Существуют также векторная, матричная и табличная формы записи модели.

1.2 Лекция №2 (2 часа)

Тема: «Балансовый модели»

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Схема межотраслевого баланса производства и распределения продукта.

1.2.1 Краткое содержание вопросов

1. Схема межотраслевого баланса производства и распределения продукта.

Балансовые модели, как статические так и динамические, широко применяются при экономико-математическом моделировании экономических систем и процессов. В основе создания этих моделей лежит балансовый метод, т.е. метод взаимного сопоставления имеющихся материальных, трудовых и финансовых ресурсов и потребностей в них.

Под ***балансовой моделью*** понимают систему уравнений, которые удовлетворяют требованиям соответствия наличия ресурса и его использования. Кроме приведенного выше требования соответствия производства каждого продукта и потребности в нем, можно указать такие примеры балансового соответствия, как соответствие наличия рабочей силы и количества рабочих мест, платежеспособного спроса населения и предложения товаров и услуг и т.д. При этом соответствие понимается либо как равенство, либо менее жестко – как достаточность ресурсов для покрытия потребности и, следовательно, наличие некоторого резерва.

Важнейшие виды балансовых моделей:

- частные материальные, трудовые и финансовые балансы для народного хозяйства и отдельных отраслей;
- межотраслевые балансы;
- матричные техпромфинпланы предприятий и фирм.

Основу информационного обеспечения балансовых моделей в экономике составляет матрица коэффициентов затрат ресурсов по конкретным направлениям их использования. Например, в модели межотраслевого баланса такую роль играет так называемая *технологическая матрица* – таблица межотраслевого баланса, составленноая из коэффициентов (нормативов) прямых затрат на производство единицы продукции в натуральном выражении. По многим причинам исходные данные реальных хозяйственных объектов не могут быть использованы в балансовых моделях непосредственно, поэтому подготовка информации для ввода в модель является весьма серьезной проблемой. Так, при построении модели межотраслевого баланса используется специфическое понятие чистой (или технологической) отрасли, т.е. условной отрасли, объединяющей все производство данного продукта независимо от ведомственной (административной) подчиненности и форм собственности предприятий и фирм. Переход от хозяйственных отраслей к чистым отраслям требует специального преобразования реальных данных хозяйственных объектов, например, агрегирования отраслей, исключения внутриотраслевого оборота и др.

Балансовые модели строятся в виде числовых матриц – прямоугольных таблиц чисел. В связи с этим балансовые модели относятся к тому типу экономико-математических моделей, которые называются матричными.

Принципиальная схема межотраслевого баланса производства и распределения совокупного общественного продукта в стоимостном выражении представлена в таблице.

Таблица – Принципиальная схема межотраслевого баланса (МОБ)

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли					Конечный продукт	Валовой продукт
	1	2	3	…	n		
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	…	x_{1n}	Y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	…	x_{2n}	Y_2	X_2
3	x_{31}	x_{23}	x_{33}	…	x_{3n}	Y_3	X_3
…	…	…	…	…	…	…	…
n	x_{n1}	x_{n1}	x_{n3}	…	x_{nn}	Y_n	X_n
Амортизация	c_1	c_2	c_3	…	c_n		
Оплата труда	v_1	v_2	v_3	…	v_n		
Чистый доход	m_1	m_2	m_3	…	m_n		
Валовой продукт	X_1	X_2	X_3	…	X_n	$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{n} X_j$	

В основу этой схемы положено разделение совокупного продукта на две части: промежуточный и конечный продукт. Все народное хозяйство представлено в виде совокупности n отраслей (имеются в виду чистые отрасли), при этом каждая отрасль фигурирует в балансе как производящая и как потребляющая.

в МОБ выделяют четыре части, имеющие различное экономическое содержание, они называются ***квадрантами*** баланса.

Первый квадрант МОБ – это шахматная таблица межотраслевых материальных связей. Показатели, помещенные на пересечениях строк и столбцов, представляют собой величины межотраслевых потоков продукции и в общем виде обозначаются x_{ij}, где I и j – соответственно номера отраслей производящих и потребляющих. Так, величина x_{32} понимается как стоимость средств производства, произведенных в отрасли с номером 3 и потребленных в качестве материальных затрат в отрасли с номером 2. Таким образом, первый квадрант по форме представляет собой квадратную матрицу порядка n, сумма всех элементов которой равняется годовому фонду возмещения затрат средств производства в материальной сфере.

Во втором квадранте представлена конечная продукция всех отраслей материального производства, при этом под конечной понимается продукция, выходящая из сферы производства в область конечного использования (на потребление и накопление). В таблице этот раздел дан укрупнено в виде одного столбца величин Y_i . второй квадрант характеризует отраслевую материальную структуру национального дохода, а в развернутом виде – также распределение национального дохода на фонд накопления и фонд потребления, структуру потребления и накопления по отраслям производства и потребления.

Третий квадрант МОБ также характеризует национальный доход, но со стороны его стоимостного состава как сумму чистой продукции и амортизации; чистая продукция понимается при этом как сумма оплаты труда и чистого дохода отраслей. Сумма амортизации (c_j) и чистой продукции (v_j+m_j) некоторой I-ой отрасли будем называть условно чистой продукцией этой отрасли и обозначать в дальнейшем Z_j.

Четвертый квадрант баланса находится на пересечении столбцов второго квадранта (конечной продукции) и строк третьего квадранта (условно чистой продукции). Этим определяется содержание квадранта: оон отражает конечное распределение и использование национального дохода. В результате перераспределения первоначально созданного национального дохода образуются конечные доходы населения, предприятий, государства. Данные четвертого квадранта важны для отражения в межотраслевой модели баланса доходов и расходов населения, источников финансирования капиталовложений, текущих затрат непроизводственной сферы, для анализа общей структуры конечных доходов по группам потребителей. Общий итог четвертого квадранта, так же как второго и третьего, должен быть равен созданному за год национальному доходу.

Таким образом, в целом межотраслевой баланс в рамках единой модели объединяет балансы отраслей материального производства, баланс совокупного общественного продукта балансы национального дохода, финансовый, баланс доходов и расходов населения.

Следует особо отметить, что хотя валовая продукция отраслей не входит в рассмотренные выше четыре квадранта, она представлена на принципиальной схеме МОБ в двух местах в виде столбца, расположенного справа от второго квадранта, и в виде строки ниже третьего квадранта. Эти столбец и строка валовой продукции замыкают схему МОБ и играют важную роль как для проверки правильности заполнения квадрантов (т.е. проверки самого баланса), так и для разработки экономико-математической модели межотраслевого баланса. Если как показано на схеме, обозначить валовой продукт некоторой отрасли буквой X с индексом, равным номеру данной отрасли, то можно записать два важнейших соотношения, отражающих сущность МОБ и являющихся основой его экономико-математической модели.

Во-первых, рассматривая схему баланса по столбцам, можно сделать вывод, что итог материальных затрат любой потребляющей отрасли и ее условно чистой продукции равен валовой продукции этой отрасли. Данный вывод можно записать в виде соотношения:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + Z_j; \qquad j = \overline{1,n}. \tag{1}$$

Напомним, что величина условно чистой продукции Zj равна сумме амортизации, оплаты труда и чистого дохода j-й отрасли.

Во-вторых, рассматривая схему МОБ по строкам для каждой производящей отрасли, можно видеть, что валовая продукция той или иной отрасли равна сумме материальных затрат потребляющих ее продукцию отраслей и конечной продукции данной отрасли:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i; \qquad i = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Формула описывает систему из n уравнений, которые называются уравнениями распределения продукции отраслей материального производства по направлениям использования.

Просуммируем по всем отраслям уравнения (1), в результате получим:

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} Z_j.$$

Аналогичное суммирование уравнений (2) дает:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Левые части обоих равенств равны, так как представляют собой весь валовой общественный продукт. Первые слагаемые правых частей этих равенств также равны, их величина равна итогу первого квадранта. Следовательно, должно соблюдаться соотношение

$$\sum_{j=1}^{n} Z_j = \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Левая часть данного уравнения есть сумма третьего квадранта, а правая часть итог второго квадранта. В целом же это уравнение показывает, что в межотраслевом балансе соблюдается важнейший принцип единства материального и стоимостного состава национального дохода.

1.3 Лекция №3 (2 часа)

Тема: «Производственные функции»

1.3.1 Вопросы лекции:

1. Основные понятия. Свойства.
2. Эластичность выпуска. Производственная функция Кобба-Дугласа

1.3.2 Краткое содержание вопросов

1. Основные понятия. Свойства.

Производственными функциями называют соотношение между используемыми производственными ресурсами и выпускаемой продукцией.

Производственные функции предназначены для моделирования процесса производства некоторой хозяйственной единицы: отдельной фирмы, отрасли или всей экономики государства в целом.

С помощью производственных функций решают задачи:

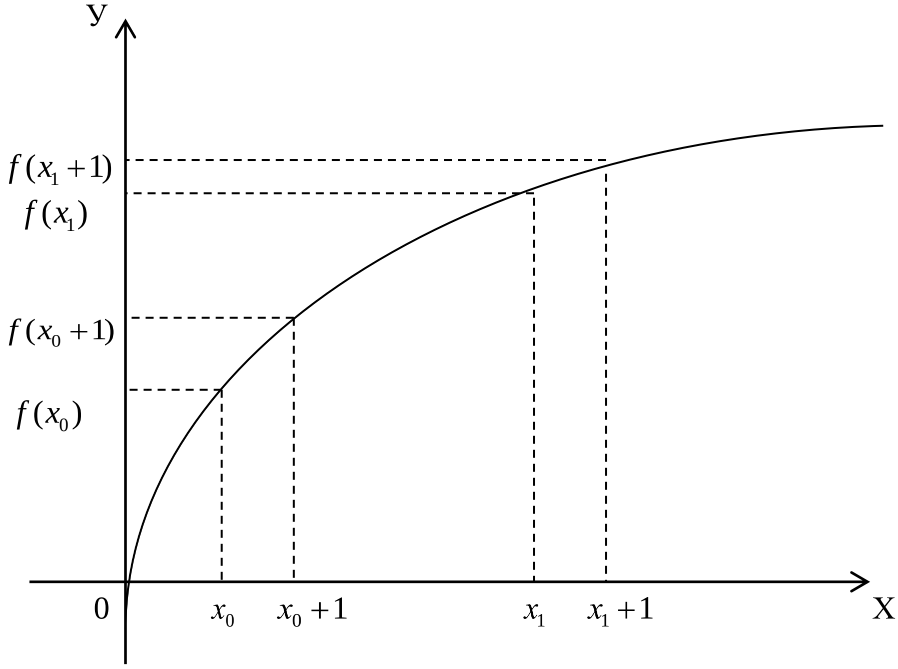
оценки отдачи ресурсов в производственном процессе;

прогнозирование экономического роста;

разработки вариантов плана развития производства;

оптимизации функционирования хозяйственной единицы при условии заданного критерия и ограничений по ресурсам.

Производственная функция одной переменной. Возьмем производственную функцию F в виде $F(x) = a_1 x^{a_2}$, где x- величина затрачиваемого ресурса (например, рабочего времени), F(x) –объем выпускаемой продукции (например, число готовых холодильников). Величины a_1 и a_2 – параметры производственной функции (вектор параметров есть двумерный вектор (a_1 , a_2)). Здесь a_1 и a_2 – положительные числа и число a_2 <=1. Данная функция является функцией одной переменной x. В связи с этим производственная функция называется одноресурсной или однофакторной. Ее область определения - множество неотрицательных действительных чисел т.е. x>=0. График производственной функции $y = a_1 x^{a_2}$ выглядит следующим образом.



На графике видно, что с ростом величины затрачиваемого ресурса x объем выпуска y растет, однако при этом каждая дополнительная единица ресурса дает все меньше прирост объема y выпускаемой продукции. Отмеченное обстоятельство (рост объема y и уменьшение прироста объема y с ростом величины x) отражает фундаментальное положение экономической теории (хорошо подтверждаемое практикой), называемое законом убывающей эффективности. Производственная функция $y = a_1 x^{a_2}$ является типичным представителем широкого класса однофакторных производственных функций.

Производственная функция нескольких переменных - это функция , независимые переменные $x_1,\ldots,x_n$ которой принимают значения объемов затрачиваемых или используемых ресурсов (число переменных n равно числу ресурсов), а значение функции имеет смысл величин объемов выпуска:

$$y = f(x,a).$$

Подчеркнем еще раз, что в данной формуле величина y – скалярная, x и a – векторные величины т.е. $x = (x_1,\ldots,x_n)$ (под вектором понимается упорядоченный набор чисел). В связи с этим производственную функцию называют многоресурсной или многофакторной. По экономическому смыслу $x_1 \geq 0,\ldots,x_n \geq 0$, следовательно, областью определения многофакторной производственной функции $f(x) = (x_1,\ldots,x_n)$ является множество n-мерных векторов x, все координаты $x_1,\ldots,x_n$ которых неотрицательные числа. Для отдельного предприятия, выпускающего однородный продукт, производственная функция $f(x) = (x_1,\ldots,x_n)$ может связывать объем выпуска (в натуральном или стоимостном выражении) с затратами рабочего времени по различным видам трудовой деятельности, различных видов сырья, комплектующих изделий, энергии, основного капитала. Производственные функции такого типа характеризуют действующую технологию предприятия.

При построении производственной функции для региона или страны в целом в качестве величины годового выпуска Y (на макроуровне обозначают большой буквой) чаще берут совокупный продукт региона или страны, исчисляемый обычно в неизменных, а не в текущих ценах, в качестве ресурсов рассматривают основной капитал ($x_1(=K)$- объем используемого в течение года основного капитала) живой труд ($x_2(=L)$- количество единиц затрачиваемого в течении года живого труда), исчисляемые обычно в стоимостном выражении. Строят двухфакторную производственную функцию $f(x) = (x_1, x_2)$ или $Y = f(K,L)$. От двухфакторных производственных функций переходят к трехфакторным. В качестве третьего фактора иногда вводят объемы используемых природных ресурсов. Кроме того, если производственная функция строится по данным временных рядов, то в качестве особого фактора роста производства может быть включен технический прогресс.

Производственная функция $y = (x_1, x_2)$ называется *статической* если ее параметры и ее характеристика f не зависят от времени t, хотя объемы ресурсов и объемы выпуска могут зависеть от времени t, т.е. могут иметь представление в виде временных рядов: $x_1(0), x_1(1),\ldots,x_1(T)$; $x_2(0), x_2(1),\ldots,x_2(T)$; $y(0), y(1),\ldots,y(T)$;

$y(t) = f(x_1(t), x_2(t))$. Здесь t – номер года, t=0,1,…,T. t=0 – базовый год временного промежутка, охватывающий годы 1,2,…,T.

Производственная функция $f(x_1, x_2)$ имеющая область определения $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ имеет следующие свойства.

1. Производство невозможно при отсутствии хотя бы одного ресурса, т.е. $f(0, x_2)$ = $f(x_1, 0)$ =0

2. При увеличении затрат производственных ресурсов выпуск продукции растет. x(1) $x(1) > x(0)$ $f(x(1)) > (fx(0))$, если функция дифференцирована, то можно записать $x > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} > 0 \; (i = 1{,}2), \quad x = (x_1, x_2)$ или первая частная производная $\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right]$ положительна.

3. По мере увеличения количества одного ресурса при постоянных количествах других предельная эффективность использования этого ресурса не возрастает. Математически это требование для дважды дифференцируемых производственных функций выглядит так. $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \le 0$. В нашем примере рассмотренном ранее это означает, что рост вооруженности средствами производства приводит к росту выпуска продукции, но темп роста выпуска продукции все время падает (закон убывающей эффективности).

4. Производственная функция характеризуется определенной отдачей от расширения масштабов производства. Отдача от расширения масштабов производства характеризует производственную функцию с точки зрения изменения выпуска продукции при пропорциональном изменении затрат ресурсов, которое математически выражается в умножении всех компонент вектора x на положительный скаляр t. Принято говорить, что скалярная функция является однородной функцией степени δ (дельта), если для любого вектора x и любого скаляра t она удовлетворяет условию $f(tx) = t^{\delta} f(x)$

Математически четвертое предположение состоит в требовании однородности производственной функции. Если $\delta > 1$, то говорят, что производственная функция характеризуется возрастающей отдачей от расширения масштабов производства; если $\delta = 1$ - постоянной отдачей (наиболее часто встречающийся случай), а при $\delta < 1$ - убывающей отдачей.

Пример

Возьмем производственную функцию $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$, $a_1 + a_2 = 1$. Для нее выполняются все четыре свойства.

1. при $x_1 = 0$ $y = a_0 0^{a_1} x_2^{a_2} = 0$ при $x_2 = 0$ $y = a_0 x_1^{a_1} 0^{a_2} = 0$

2. $a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} < a_0 (x_1 + 1)^{a_1} x_2^{a_2}$ или

$$a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} < a_0 x_1^{a_1} (x_2 + 1)^{a_2}$$

Первая частная производная положительна.

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = a_0 x_2^{a_2} a_1 x_1^{a_1 - 1} \ge 0$$

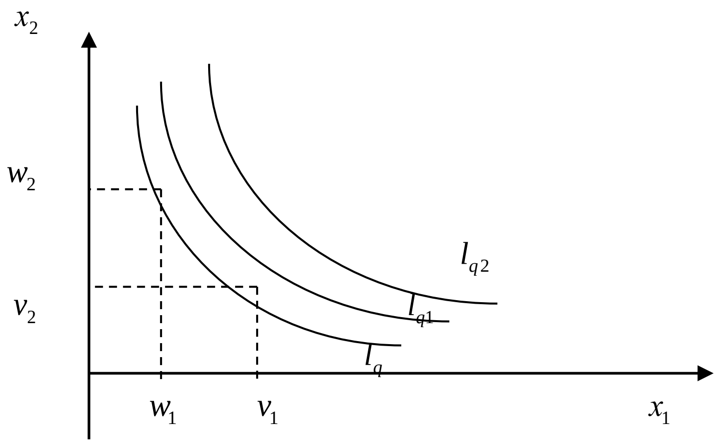
3. $y_{ч_1}^{Э} = a_0 x_2^{a_2} a_1 (a_1 - 1) x_1^{a_1 - 2} \le 0$ Вторая частная производная не положительна т.к. $a_0 \ge 0, \quad 0 \le a_1 \le 1$

4. $a_0 (tx_1)^{a_1} (tx_2)^{a_2} = t^{a_1 + a_2} (a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2})$.

Если рассмотреть линейную производственную функцию $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$ для нее свойства 1 и 4 не выполняются.

Возможность взаимного замещения ресурсов означает, что одно и то же количество продукта y может быть произведено при различных сочетаниях ресурсов. Совокупность таких сочетаний ресурсов, при которых может быть произведено определенное количество продукции q, называется изоквантой.

Различные наборы (v_1, v_2) и (w_1, w_2) затрачиваемых ресурсов, принадлежащие одной и той же изокванте l_q (т.е. $q = f(v_1, v_2) = f(w_1, w_2)$), дают один и тот же объем выпуска q.



Свойства изоквант:

1. Изокванты не пересекаются друг с другом.
2. Изокванта l_q разбивает пространства ресурсов на два множества, в одном из которых $q_0 < q$, в другом $q_1 > q$, причем граница между этими множествами проходит по изокванте l_q.
3. Большему выпуску продукции соответствует изокванта, более удаленная от начала координат.
4. Изоквнты не имеют общих точек с осями координат.

Средней производительностью I-го ресурса (фактора производства) или средним выпуском по i-му ресурсу (фактору производства) называют отношение значения функции к величине I-го ресурса. Символика:

$$A_i = \frac{f(x)}{x_i}, \text{ где } (i = 1,2) \quad \text{или} \quad f(x) = f(x_1, x_2)$$

Предельной (маржинальной) производительностью i-го ресурса (фактора производства) или предельным выпуском по i-му ресурсу (фактору производства) называют первую частную производную функции $f(x) = f(x_1, x_2)$. Символика $M_i = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ Предельная производительность показывает, на сколько единиц увеличивается объем выпуска y, если объем затрат x_i i-го ресурса вырастает на одну единицу при неизменных объемах другого затрачиваемого ресурса.

Найдем средние (A_1, A_2) и предельные (M_1, M_2)значение для производственной функции Кобба-Дугласа.

1. $A_1 = \dfrac{f(x)}{x_1} = a_0 x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2}$; $A_2 = \dfrac{f(x)}{x_2} = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2 - 1}$

2. $M_1 = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} = a_0 a_1 x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2} = a_1 A_1$; $M_2 = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2} = a_2 A_2$;

$\dfrac{M_1}{A_1} = a_1 \le 1 \Rightarrow M_1 \le A_1$ и $\dfrac{M_2}{A_2} = a_2 \le 1 \Rightarrow M_2 \le A_2$ т.е. предельная производительность i-го ресурса не больше средней производительности этого ресурса. Это положение обычно выполняется и для других производственных функций.

2. Эластичность выпуска. Производственная функция Кобба-Дугласа

Отношение предельной производительности M_i i-го ресурса к его средней производительности A_i называется эластичностью выпуска по i-му ресурсу (по фактору производства). Символика:

$$E_i = \frac{M_i}{A_i} = \frac{x_i}{f(x)} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \quad (i = 1,2).$$

Сумма $E_1 + E_2 = E_x$ называется эластичностью производства.

E_i показывает, на сколько процентов увеличится выпуск, если затраты i-го ресурса увеличатся на один процент при неизменных объемах другого ресурса..

Имеем : $E_1 = a_1,\ E_2 = a_2, \quad E_x = E_1 + E_2 = a_1 + a_2$

Предельной нормой замены (замещения) i-го ресурса (фактора производства) j-м называется выражение:

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i} \quad (i, j = 1,2)$$

при постоянной y. i – номер заменяемого ресурса, j - номер замещающего ресурса или

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}}$$

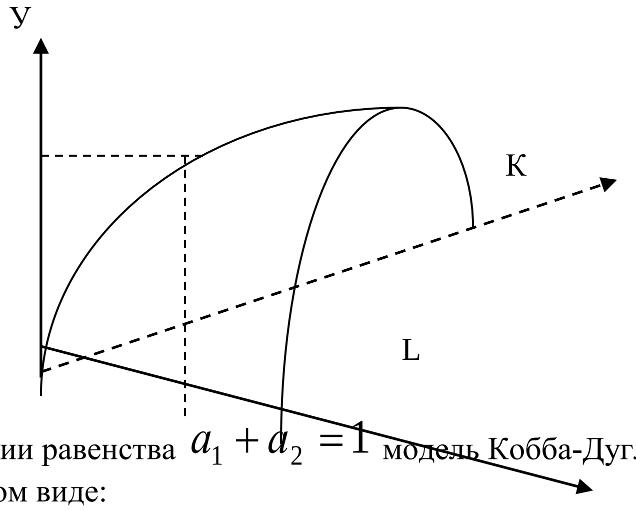
Для двухфакторной производственной функции справедливо равенство:

$R_{12} = \dfrac{E_1}{E_2} \dfrac{x_2}{x_1}$, т.е. придельная норма замены первого ресурса вторым равна отношению эластичностей выпуска по первому и второму ресурсам, умноженному на отношение объема второго ресурса к объему первого ресурса.

.Для моделирования отдельного региона или страны в целом (т.е. для решения задач на макроэкономическом, микроэкономическом уровне) часто используют производственную функцию вида $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$, где a_0, a_1, a_2 - параметры производственной функции. Это положительные постоянные числа (часто a_1 и a_2 таковы, что $a_1 + a_2 = 1$). Производственная функция данного вида называется производственная функция Кобба-Дугласа по имени двух американских экономистов, предложивших ее использовать в 1929 году. Производственная функция Кобба-Дугласа активно применяется для решения разнообразных теоретических и прикладных задач благодаря своей структурной простате. В данной модели $x_1 = K$ равно объему используемого основного капитала (объему используемых основных фондов – в отечественной терминологии), $x_2 = L$ - затратам живого труда, тогда производственная функция Кобба-Дугласа приобретает вид часто используемый в литературе:

$y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$ или если выполняется равенство $a_1 + a_2 = 1$, то $Y = bK^{\alpha}, L^{\alpha-1}$

Графиком двухфакторной производственной функции будет являться поверхность в трехмерном пространстве.



При выполнении равенства $a_1 + a_2 = 1$ модель Кобба-Дугласа можно записать несколько в ином виде:

$$\frac{Y}{L} = \frac{a_0 K^{a_1} L^{a_2}}{L} = \frac{a_0 K^{a_1}}{L^{1-a_2}} = \frac{a_0 K^{a_1}}{L^{a_1}} = a_0 \left[\frac{K}{L}\right]^{a_1}, \text{ т.е } \frac{Y}{L} = a_0 \left[\frac{K}{L}\right]^{a_1}$$

Дроби $\frac{Y}{L} = z$ и $\frac{K}{L} = k$ называются соответственно производительностью труда и капиталовооруженностью труда. Используя новые символы, получим $z = a_0 k^{a_1}$, т.е из двухфакторной производственной функции Кобба-Дугласа получим формально однофакторную производственную функцию Кобба-Дугласа. В связи с тем, что $0 < a_1 < 1$, из последней формулы следует, что производительность труда Z растет медленнее его капиталовооруженности. Однако этот вывод справедлив для случая статической производственной функции Кобба-Дугласа в рамках существующей технологии и ресурсов. Отметим, что дробь $\frac{Y}{K}$ называется производительностью капитала или капиталоотдачей, обратные дроби $\frac{K}{Y}$ и $\frac{L}{Y}$ называются соответственно капиталоемкостью и трудоемкостью выпуска.

Производственная функция называется динамической, если:

1) время Т фигурирует в качестве самостоятельной переменной величины (как бы самостоятельного фактора производства), влияющего на объем выпускаемой продукции;
2) параметры производственной функции и ее характеристикаF зависят от времени Т.

При построении производственной функции НТП может быть учтен с помощью введения множителя НТП e^{pt}, где параметр p(p>0) характеризует темп прироста под влиянием НТП:

$y(t) = e^{pt} f(x_1(t), x_2 t)$ где $(t = 0,1,...,T)$.

Эта простейший пример динамической производственной функции; она включает нейтральный, то есть не материализованный в одном из факторов, технический прогресс. В более сложных случаеях технический прогресс может воздействовать непосредственно на производительность труда или капитала (капиталоотдачу): $Y(t) = f(A(t) \cdot L(t), K(t))$ или $Y(t) = f(A(t) \cdot K(t), L(t))$. Он называется, соответственно, трудосберегающим или капиталосберегающим НТП

Пример На основании данных по экономике СССР (динамики национального дохода, численности занятых в материальном производстве и объеме основных фондов), опубликованных за 1960-1985 гг., макроэкономической производственной функции Кобба-Дугласа без учета НТП и с учетом НТП. Без учета НТП функция имеет вид $Y = 1{,}022 K^{0{,}5382} L^{0{,}4618}$, с учетом НТП $Y = 1{,}038 e^{0{,}0294t} K^{0{,}9749} L^{0{,}2399}$.

Выделение существенных видов ресурсов (факторов производства) и выбор аналитической формы функции называется спецификацией.

Преобразование реальных и экспертных данных в модельную информацию, т.е.расчет численных значений параметров на базе статистических данных с помощью регрессионного и корреляционного анализа, называют параметризацией.

Проверка истинности (адекватности) функции называют ее верификацией.

1.4 Лекция №4 (2 часа)

Тема: «Задачи и модели оптимизации»

1.4.1 Вопросы лекции:

1. Основные понятия.
2. Максимизация прибыли в случае долговременного промежутка.
3. Максимизация прибыли в случае кратковременного промежутка.

1.4.2 Краткое содержание вопросов

1. Основные понятия.

Доходом (выручкой) фирмы в определенном периоде называется произведение общего объема выпускаемой фирмой продукции на рыночную цену этой продукции

$R = p_0 y$, где R – доход фирмы, p_0- цена продукции, y – объем выпускаемой фирмой продукции ($y = f(x_1, x_2)$).

Издержками фирмы называют общие выплаты в определенном временном периоде за все виды затрат $C = p_1 x_1 + p_2 x_2$, где x_1 и x_2 - объемы используемых фирмой ресурсов (факторов производства), p_1 и p_2 - рыночные цены на эти ресурсы (факторы производства).

Прибылью фирмы называют разность между полученным фирмой доходом R и ее издержками производства

$$PR = R - C \text{ или } PR(x_1, x_2) = p_0 f(x_1, x_2) - (p_1 x_1 + p_2 x_2).$$

В теории фирмы принято считать, что если фирма функционирует в условиях чистой (совершенной) конкуренции, на рыночные цены p_0, p_1 и p_2. она влиять не может. Фирма соглашается с ценами. Основная цель фирмы заключается в максимизации прибыли путем рационального распределения используемых ресурсов. Формально задача максимизации прибыли в определенном временном периоде имеет вид: PR $\to$ max. такая постановка задачи максимизации прибыли зависит от того, какой временной промежуток (долговременный или кратковременный) предшествует периоду, в котором фирма максимизирует свою прибыль.

В случае долговременного промежутка фирма может свободно выбирать любой вектор затрат $x = (x_1, x_2)$ из пространства затрат, поэтому задача максимизации прибыли в случае долговременного промежутка имеет следующий вид:

$$p_0 f(x_1, x_2) - (p_1 x_1 + p_2 x_2) = PR(x_1, x_2) \to \max$$

при условии, что $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$ (x_1 и x_2 - объемы используемых фирмой ресурсов).

в случае краткосрочного промежутка фирма должна учитывать неизбежные лимиты на объемы используемых ею ресурсов, которые формально могут быть записаны в виде нелинейного неравенства

$$g(x_1, x_2) \leq b$$

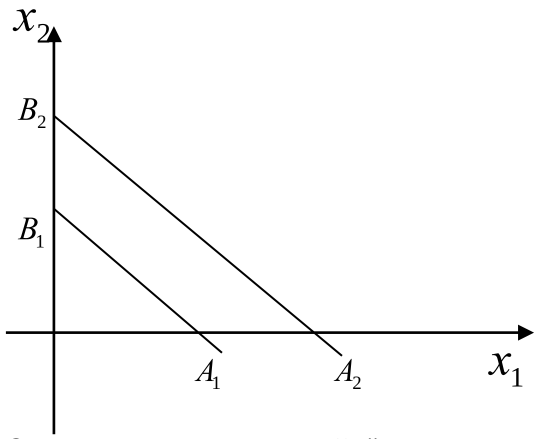
(ограничений вида $g(x_1, x_2) \leq b$ моет быть несколько). Следовательно задача максимизации прибыли для краткосрочного промежутка имеет вид задачи математического программирования:

$$p_0 f(x_1, x_2) - (p_1 x_1 + p_2 x_2) = PR(x_1, x_2) \to \max$$

при условии, что $g(x_1, x_2) \leq b$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$.

Линия уровня функции издержек производства $z = p_1 x_1 + p_2 x_2$ называется *изокостой*. В связи с тем, что по экономическому смыслу $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$ изокоста есть отрезок прямой , попадающий в неотрицательный ортант плоскости Ox_1x_2.



Отрезок расположенный "северо-восточнее" соответствует большим издержкам производства.

Если для отрезка A_1B_1 издержки производства равны C_1, то его аналитическое представление имеет вид $C_1 = p_1 x_1 + p_2 x_2$, $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$.

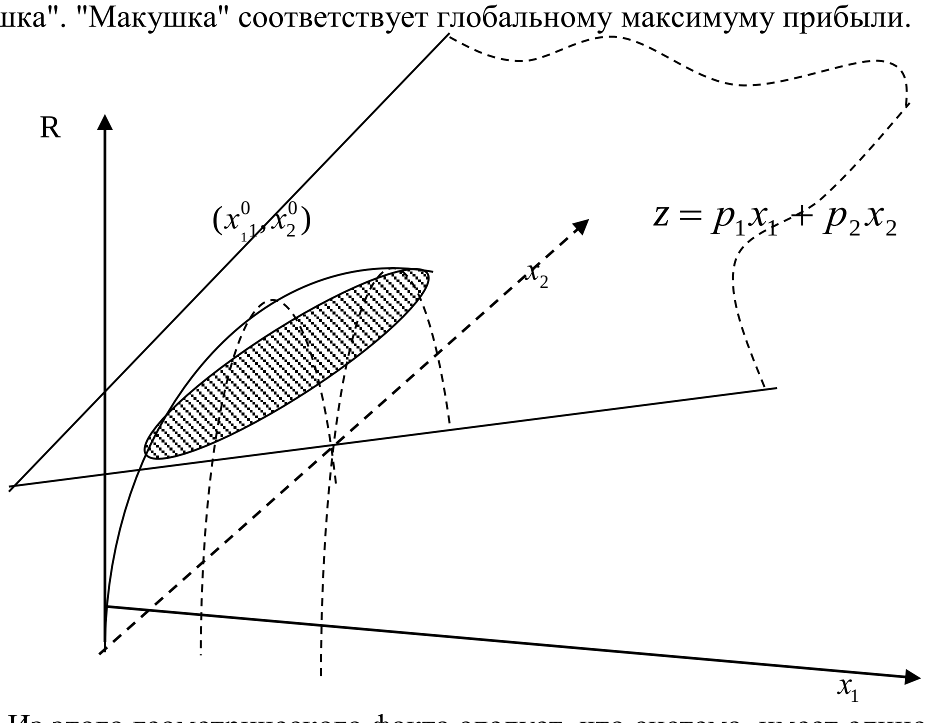
2. Максимизация прибыли в случае долговременного промежутка.

В связи с тем, что, как правило, $f(x_1,0)= f(0,x_2)=0$, экономически осмысленным является следующие утверждение $x_1>0,\quad x_2>0$. Поэтому в случае долговременного промежутка задача максимизации прибыли собой обычную задачу на глобальный абсолютный максимум при $x_1>0,\quad x_2>0$. Из математического анализа известно, что точки локального абсолютного максимума следует искать только среди точек (x_1,x_2), которые удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial PR(x_1,x_2)}{\partial x_1}=0, \text{ или} \\ \dfrac{\partial PR(x_1,x_2)}{\partial x_2}=0. \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial(p_0 f(x_1,x_2)-(p_1x_1+p_2x_2)}{\partial x_1}=0, \\ \dfrac{\partial(p_0 f(x_1,x_2)-(p_1x_1+p_2x_2)}{\partial x_1}=0. \end{cases} \quad \begin{cases} p_0\dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}-p_1=0, \\ p_0\dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}-p_2=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_0\dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}=p_1, \\ p_0\dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}=p_2. \end{cases}$$

Если выполняется условие, что вторые частные производные меньше 0, то графиком функции $y=f(x_1,x_2)$ в трехмерном пространстве есть поверхность, выпуклая вверх. Следовательно, график прибыли $PR(x_1,x_2)=p_0 f(x_1,x_2)-(p_1x_1+p_2x_2)$, получаемой путем вычитания из графика функции $p_0 f(x_1,x_2)$ плоскости $z=p_1x_1+p_2x_2$, являющейся графиком издержек производства, имеет вид "шапочки", у которой есть "макушка". "Макушка" соответствует глобальному максимуму прибыли.



Из этого геометрического факта следует, что система имеет единственное решение в точке (x_1^0,x_2^0), которое является точкой не только локального, но и глобального максимума прибыли. Точка (x_1^0,x_2^0) (где x_1^0,x_2^0- затраты ресурсов), которая является решением задачи максимизации прибыли, называется локальным (частичным) рыночным равновесием фирмы (в случае долговременного промежутка).

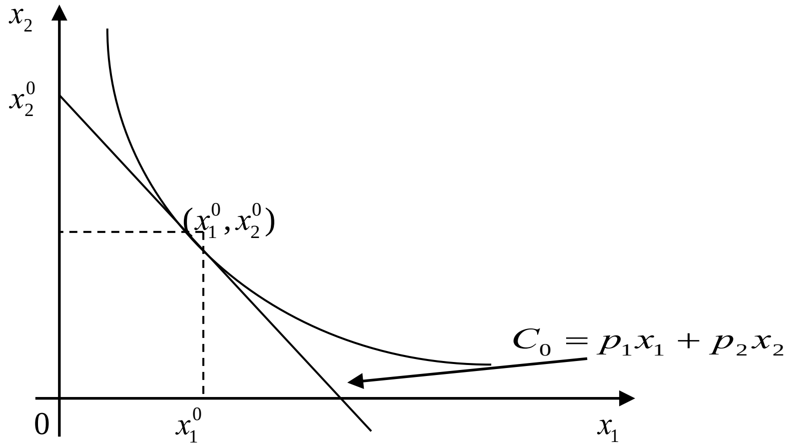
Подставив значения. (x_1^0, x_2^0) в уравнение, получим тождества:

$p_0 \dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} = p_1$, $\quad p_0 \dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} = p_2$, откуда путем почленного деления первого тождества на второе получаем:

$$\frac{\dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2},$$

т.е. в точке (x_1^0, x_2^0) локального рыночного равновесия фирмы отношение предельной производительности первого ресурса к предельной производительности второго ресурса равно отношению рыночных цен на эти ресурсы.

Проведем через точку (x_1^0, x_2^0) изокванту и изокосту, которые эту точку содержат. Уравнение изокванты имеет вид $y_0 = f(x_1^0, x_2^0)$, уравнение изокосты имеет вид $C_0 = p_1 x_1 + p_2 x_2$. Графически решение задачи максимизации прибыли (если рассмотреть плоскость) будет выглядеть так.



Получена важная геометрическая характеристика локального рыночного равновесия фирмы – касание в точке равновесия изокванты и изокосты.

Отметим, что, приступая к решению задачи максимизации прибыли мы не имели конкретных изокванты и изокосты, которые касаются друг друга в точке (x_1^0, x_2^0), так как не имели самой этой точки. Касающиеся друг друга изокванта и изокоста появляются после того, как аналитически найдено локальное рыночное равновесие (x_1^0, x_2^0) путем решения системы уравнений.

Левая ("четырехэтажная") дробь есть не что иное, как предельная норма замены первого ресурса вторым $R_{12}(x_1^0, x_2^0)$ в точке .

Само равенство выражает следующее фундаментальное положение теории фирмы: в точке локального рыночного равновесия (x_1^0, x_2^0) предельная норма замены первого ресурса вторым равна отношению рыночных цен на эти ресурсы.

Поскольку x_1^0, x_2^0 есть функции цен (p_0, p_1, p_2), т.е. $x_1^0 = d_1(p_0, p_1, p_2)$, $x_2^0 = d_2(p_0, p_1, p_2)$, то они называются функциями спроса на ресурсы. Их значения x_1^0, x_2^0

выражают оптимальнные выборы затрат ресурсов как функции цены как функции цены выпускаемой продукции и цен на ресурсы.

Подставив функции спроса на ресурсы в производственную функцию $y = f(x_1, x_2)$, получим выражение $y^0 = f(d_1(p_0, p_1, p_2), d_{21}(p_0, p_1, p_2)) = s(p_0, p_1, p_2)$, которое называется функцией предложения выпуска.

Функции спроса на ресурсы и функция предложения выпуска являются однородными нулевой степени по всем своим аргументам p_0, p_1, p_2, т.е.

$d_1(tp_0, tp_1, tp_2) = d_1(p_0, p_1, p_2)$,

$d_2(tp_0, tp_1, tp_2) = d_2(p_0, p_1, p_2)$,

$s(tp_0, tp_1, tp_2) = s(p_0, p_1, p_2)$, для любого $t > 0$. свойство однородности означает, что одновременное изменение всех цен p_0, p_1, p_2 в одно и тоже число раз t (изменение масштаба, но не структуры цен)не меняет x_1^0, x_2^0 и y_0.

3. Максимизация прибыли в случае кратковременного промежутка.

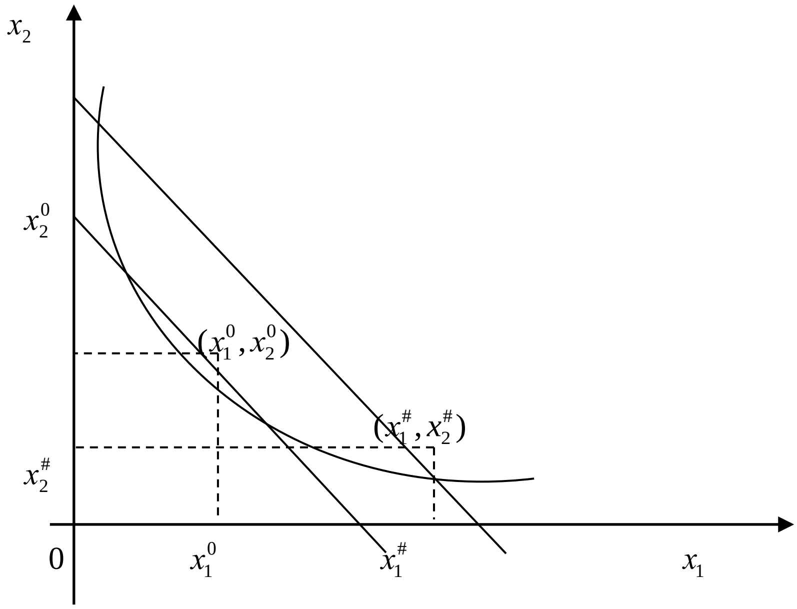
В случае краткосрочного промежутка рассмотрим конкретный пример, когда второй ресурс фирма может использовать только в объеме, равном $x_2^{\#} > 0$. Тогда задача максимизации прибыли превращается в задачу максимизации функции одной переменной:

$p_0 f(x_1, x_2^{\#}) - (p_1 x_1 + p_2 x_2^{\#}) = PR(x_1, x_2^{\#}) \to \max$,

и вместо системы уравнений появляется только одно уравнение

$$\frac{\partial PR(x_1, x_2^{\#})}{\partial x_1} = 0, \text{ или } p_0 \frac{\partial f(x_1, x_2^{\#})}{\partial x_1} = p_1.$$

Полученной уравнение имеет единственное решение $x_1 = x_1^{\#}$ ($x_1^{\#}$ зависит от $x_2^{\#}$, следовательно в случае краткосрочного промежутка локальное рыночное равновесие есть вектор $(x_1^{\#}, x_2^{\#})$. Геометрическое решение задачи будет иметь следующий вид:



Если бы объем второго ресурса не был лимитирован, то, локальным рыночным равновесием была бы точка касания (x_1^0, x_2^0), в которой тот же объем выпускаемой продукции (изокванта одна и та же) получился бы с меньшими издержками производства. Изокоста, содержащая точку $(x_1^{\#}, x_2^{\#})$, находится более "северо-западнее", аследовательнее соответствует большим издержкам производства. В точке $(x_1^{\#}, x_2^{\#})$ локального рыночного равновесия, содержащие ее изокванта и изокоста пересекаются, но не касаются . В рассматриваемом случае $x_1^\# = x_1^\#(x_2^\#, p_0, p_1, p_2)$, это и есть функция спроса на первый ресурс при фиксированном объеме $x_2^\#$ второго ресурса. Функция предложения имеет вид $y = f(x_1^\#(x_2^\#, p_0, p_1, p_2), x_2^\#)$.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

2.1 Лабораторная работа 1 (2 часа)

Тема: «Линейное программирование»

2.1.1 Цель работы: Изучить алгоритм решения задач линейного программирования

2.1.2 Задачи работы:

1. Общая характеристика симплекс-метода и подготовка решения модели.
2. Особые случаи при решении задач:

2.1.3 Описание (ход) работы:

1. Общая характеристика симплекс-метода и подготовка решения модели.

Среди универсальных методов решения задач линейного программирования наиболее распространен *симплексный метод* (или *симплекс-метод),* разработанный американским ученым Дж. Данцигом. Суть этого метода заключается в том, что вначале получают допустимый вариант, удовлетворяющий всем ограничениям, но необязательно оптимальный (так называемое *начальное опорное решение)*. Оптимальность достигается последовательным улучшением этого решения за определенное число этапов (итераций). Нахождение начального опорного решения и переход к следующему опорному решению проводятся на основе применения метода Жордана-Гаусса (мы будем работать с его модифицированным вариантом) для системы линейных уравнений в канонической форме, в которой должна быть предварительно записана исходная задача линейного программирования. Направление перехода от одного опорного решения к другому выбирается на основе критерия оптимальности (целевой функции) исходной задачи.

Весь путь решения задачи симплекс-методом условно можно разбить на три этапа.

I *этап.* Нахождение исходного варианта и исследование его на допустимость, т.е. получение начального опорного решения.

Допустимым вариантом решения задачи будем считать такие значения x_j, при которых выполняются все требования системы ограничений (все неравенства верны и непротиворечивы).

Если исходный вариант допустим, то опорное решение найдено и переходим на второй этап. Иначе, осуществляем перебор вариантов решения задачи до получения допустимого (если такое возможно. Если нет, то задача решения не имеет).

II *этап.* Исследования допустимого варианта на оптимальность.

Оптимальный вариант – это такое значение переменной x_j при котором будут выполняться не только требования системы ограничений, но и требования целевой функции.

Если допустимый вариант окажется оптимальным, то задача решена, иначе переходим на третий этап.

III *этап.* Перебор вариантов решения задачи до получения оптимального варианта (если такое возможно. Если нет, то задача не имеет оптимального решения).

Сам симплекс-метод выбирать варианты не умеет, он только показывает направление перебора вариантов (в нашем случае позволяет осуществить выбор разрешающего элемента). Для расчёта же, в качестве вычислительного аппарата, привлекаются другие методы. Мы будем использовать метод модифицированных Жордановых исключений (МЖИ). Так как данный метод – это метод решения систем линейных уравнений, а модель представляет собой систему линейных неравенств, то модель предварительно должна быть подготовлена.

Суть подготовки заключается в том, чтобы перейти от системы неравенств к системе уравнений в канонической форме. Для этого в каждое ограничение-неравенство вводится дополнительная переменная y_i, как разность между большей и меньшей частями неравенства. Очевидно, что значение y_i не может быть отрицательным.

Подготовленная модель основной задачи линейного программирования будет выглядеть следующим образом:

I. $Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\rightarrow\max$.

II. $y_1=-a_{11}x_1-a_{12}x_2-\ldots-a_{1n}x_n+b_1$;

$y_2=-a_{21}x_1-a_{22}x_2-\ldots-a_{2n}x_n+b_2$;

……………………………………………

$y_m=-a_{m1}x_1-a_{m2}x_2-\ldots-a_{mn}x_n+b_m$.

III. $x_1\geq0$, $x_2\geq0$, …, $x_n\geq0$.

Из этого вида данные заносятся в табличную форму для осуществления решения.

2. Особые случаи при решении задач.

1.Неразрешимость модели (система неравенств не имеет решения).

В этом случае невозможно найти допустимый вариант (в разрешающей строке симплекс-таблицы нет ни одного отрицательного элемента). С экономической точки зрения это значит, что ограничения модели являются взаимоисключающими, противоречащими друг другу требованиями. Задача не имеет решения.

2.Неограниченность функционала (функция не имеет экстремального значения).

В этом случае в симплекс-таблице находится допустимый, но не оптимальный вариант и в разрешающем столбце нет ни одного положительного элемента. С экономической точки зрения речь идее о неограниченности какого-либо вида ресурса. Задача не имеет оптимального решения.

3.Альтернативный оптимум.

Такая ситуация возникает в случае возможности неоднозначного выбора разрешающего элемента при соблюдении всех правил решения (т.е. разрешающим элементом в равной степени может выступать не одно значение). В этом случае вычисления, организованные по разным траекториям, могут привести как к полному совпадению ответов, так и к варианту совпадения значений целевых функций при разных наборах значений переменных. Именно в последнем случае говорят об альтернативности решения. С экономической точки зрения это означает, например, что если ассортимент выпускаемой нами продукции при разных его наборах дает одинаковая прибыль, то выбор управленческого решения остается за руководителем предприятия с учетом маркетинговой стратегии.

4.Случай вырожденности.

В симплекс-таблице будет находиться вырожденный вариант, если среди свободных членов (кроме строки Z), появится ноль.

Если вырожденный вариант не допустим, то разрешающий элемент находится обычным образом. Если вырожденный вариант будет допустимым, но не оптимальным, то необходимо после выбора разрешающего столбца посмотреть на коэффициент, находящийся на пересечении вырожденной строки и разрешающего столбца. Если этот коэффициент с положительным знаком, то мы берём его разрешающим элементом (в этом случае в следующей таблице мы получим те же значения свободных членов при различном наборе базисных переменных), если нет, то вырожденная строка не берётся в качестве разрешающей. Тогда разрешающая строка выбирается по общему правилу, но среди других строк таблицы.

5.Смешанная система ограничений.

Система является смешанной, когда среди ограничений модели присутствуют строгие равенства. Такие модели решаются сначала методом модифицированных жордановых исключений, а потом симплекс-методом.

В симплекс-таблице в качестве разрешающей строки берётся строка, в которой было записано строгое равенство, разрешающий элемент в этой строке берётся произвольно. Сделав шаг с этим разрешающим элементом, столбец, соответствующий разрешающему элементу, следует вычеркнуть из таблицы. Такие шаги повторяются для каждой строки, соответствующей строгому равенству.

В симплекс-таблице, в которой был исключён последний столбец, соответствующий равенству, вариант исследуется на допустимость и оптимальность, продолжая решение симплекс-методом.

2.2 Лабораторная работа 2,3 (4 часа)

Тема: «Методы решения задач линейного программирования»

2.2.1 Цель работы: Изучить методы решения задач линейного программирования

2.2.2 Задачи работы:

1. Графический метод решения задачи линейного программирования.
2. Решение задач линейного программирования в MS Excel.
3. Экономическая интерпретация результатов решения задач.

2.2.3 Описание (ход) работы:

1. Графический метод решения задачи линейного программирования.

Графический метод основан на геометрической интерпретации задач линейного программирования и применяется в основном при решении задач *двумерного пространства*, так как довольно трудно, а чаще практически невозможно изобразить графически многогранник решений, который образуется в результате пересечения полупространств. Поэтому, сущность графического метода решения задач линейного программирования рассмотрим на примере задачи, заданной в двумерном пространстве, т.е. ее ограничения содержат две переменные.

Задача. Найти максимальное значение линейной функции:

$$z = 50x_1 + 40x_2$$

при ограничениях

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 5x_2 \le 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{array}\right\}$$

Решение

Построим многоугольник решений (рис.1), для этого в системе координат $x_1 0 x_2$ на плоскости изобразим граничные прямые: $2x_1 + 5x_2 = 20$ (l_1)

$$8x_1 + 5x_2 = 40\ (l_2)$$

$$5x_1 + 6x_2 = 30\ (l_3)$$

$$x_1 = 0;\ x_2 = 0$$

Эти прямые рекомендуется строить по двум точкам пересечения с осями координат. Например, для l_1 такими точками будут точки $A(0;4)$ и $E(10;0)$.

Взяв какую-нибудь точку (удобнее всего взять начало координат), устанавливаем, какую полуплоскость определяет каждое из неравенств, соответствующее уравнениям граничных прямых (эти полуплоскости на рис.1 показаны стрелками, штриховкой выделяется общая часть (пересечение) указанных полуплоскостей). Многоугольником решений или *областью допустимых решений* данной задачи является ограниченный пятиугольник *OABCD*.

Далее строим одну из линий уровня целевой функции как прямую линию, соответствующую уравнению Z=const. В нашей задаче можно построить прямую $50x_1 + 40x_2 = 200$ (l_4). Через точку O проводим прямую, параллельную l_4, ей соответствует уравнение Z=0 или $50x_1 + 40x_2 = 0$. Таким образом, определяем направление движения по линиям уровня целевой функции, соответствующее ее наибыстрейшему возрастанию (на рис.1 это направление отмечено стрелкой на прямой l_4). Осуществляя перемещение прямой l_4 параллельно самой себе в выбранном направлении, получаем, что функция Z принимает максимальное значение на многоугольнике решений в точке C. Этот вывод следует из ***теоремы: если оптимальное решение задачи существует, то оно достигается, по крайней мере, в одной из вершин области допустимых решений.***

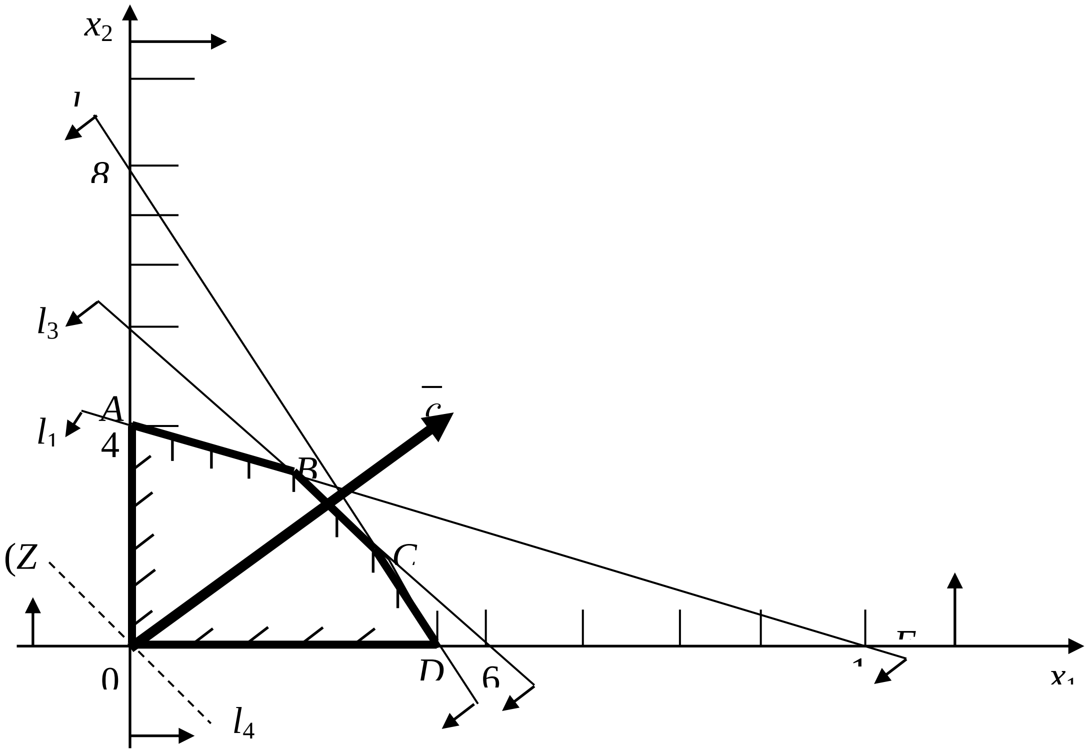


Рисунок 1 – Многоугольник решений

Точка C лежит на пересечении прямых l_2 и l_3 и, следовательно, для определения ее координат нужно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 = 40 \\ 5x_1 + 6x_2 = 30 \end{cases}$$

Подставим найденные значения x_1 и x_2 в функцию Z ($50 \cdot 90/23 + 40 \cdot 40/23$).

Ответ: оптимальное решение задачи $Z_{max} = 6100/23$ при $x_1 = 90/23$; $x_2 = 40/23$.

Замечания:

1) область допустимых решений системы неравенств может быть пустой, одной точкой, выпуклым многоугольником или неограниченной выпуклой многоугольной областью;

2) уравнение $c_1x_1 + c_2x_2 = Z$ при фиксированном значении Z определяет прямую, а при изменении Z – семейство параллельных прямых с параметром Z. Вектор $\bar{c} = (c_1, c_2)$, перпендикулярный ко всем этим прямым, показывает направление возрастания параметра Z;

3) если бы при тех же исходных данных требовалось достичь минимума функции Z, то, очевидно, линию уровня следовало бы перемещать в направлении, противоположном вектору $\bar{C}$. Получили бы оптимальное решение в точке O (0, 0), которой соответствует $Z_{min} = 0$;

4) если экспериментальное значение Z достигается в двух вершинах (случай альтернативного оптимума), то тоже экстремальное значение достигается в любой точке, лежащей на отрезке, соединяющем эти вершины;

5) в случае неограниченной области максимум (минимум) функции Z либо не существует (если Z неограниченна сверху (снизу)), либо достигается по крайней мере в одной из вершин области.

2. Решение задач линейного программирования в MS Excel.

Задача 1

Для производства продукции типа $П_1$ и $П_2$ предприятие использует два вида сырья: C_1 и C_2. Данные об условиях производства приведены в таблице.

Сырье	Расход сырья на единицу продукции, кг/ед.		Количество сырья, кг
	$П_1$	$П_2$	
C_1	1	3	300
C_2	1	1	150
Прибыль на единицу продукции, тыс. руб.	2	3	-

Составить план производства по критерию максимум прибыли.

Решение

1. Состав переменных

x_1 – количество (единиц) продукции $П_1$;

x_2 – количество (единиц) продукции $П_2$.

2. Числовая модель

I. Целевая функция. Критерий оптимальности получение максимума прибыли от производственной деятельности. Следовательно,

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

II. Основные ограничения

В таблице представлены данные по расходу основных производственных ресурсов (сырье C_1 и C_2) на производство продукции $П_1$ и $П_2$. Используя данные таблицы, составим ограничения:

$1x_1 + 3x_2 \le 300$

$1x_1 + 1x_2 \le 150$

III. Условие неотрицательности переменных

$x_1 \ge 0$

$x_2 \ge 0$

3. Общий вид экономико-математической модели

I. $Z = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max$

II. $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2$

III. $x_j \ge 0$, (j=1, 2)

4. Структурная форма экономико-математической модели

I. $$Z = \sum_{j=1}^{2} c_j x_j \to \max$$

II. $$\sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,2$$

III. $$x_j \ge 0, \qquad j = 1,2$$

5. Решение задачи с использованием табличного редактора MS Excel

Чтобы решить задачу, используя табличный редактор MS Excel необходимо:

- Открыть табличный редактор (Пуск → Программы → MS Excel);
- Запишем числовую модель задачи на рабочий лист (рисунок 1.1). Для этого необходимо выбрать ячейки в которых будут находиться переменные. Допустим $x_1 \rightarrow C1$ $x_2 \rightarrow C2$ (выбор ячеек произволен).

В ячейке A1 запишем целевую функцию $Z = 2x_1 + 3x_2$: A1: =2*C1+3*C2

Примечание: запись формул всегда начинается со знака «=».

В ячейку B1 запишем левую часть 1-го ограничения ($1x_1 + 3x_2$)

B1: =C1+3*C2

В ячейку B2 запишем левую часть 2-го ограничения ($1x_1 + 1x_2$)

B2:=C1+C2

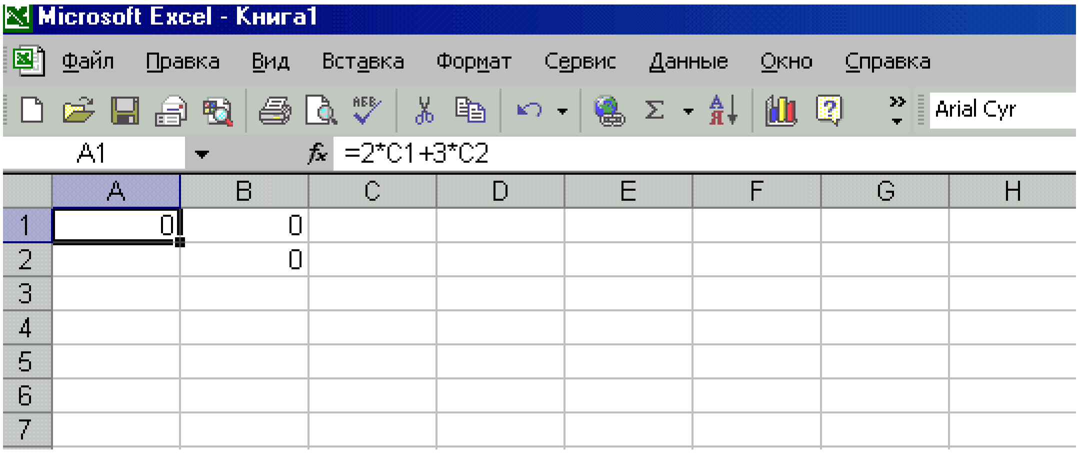


Рисунок 1.1 – Запись числовой модели на рабочем листе MS Excel

- После как числовая модель записана, необходимо установить курсор в ячейку A1 (в ней расположена целевая функция). Выбираем вкладку «Сервис» → «Поиск решения…», при этом откроется диалоговое окно функции «Поиск решения».
- В открывшемся окне необходимо установить целевую ячейку, а поскольку у вас курсор стоял на ячейке A1, то значение целевой ячейки будет правильным. В противном случае установите в ручную адрес целевой ячейки (в данном случае программа использует абсолютные адреса т.е. ячейка A1 имеет абсолютный адрес $A$1) (рисунок 1.2).
- Установите маркер в положение, соответствующие критерию оптимальности: максимальному или минимальному значению.
- В окне «Изменяя ячейки» нужно указать адреса ячеек соответствующие переменным. Для этого необходимо выделить диапазон ячейки с C1 по C2 (рисунок 1.2).

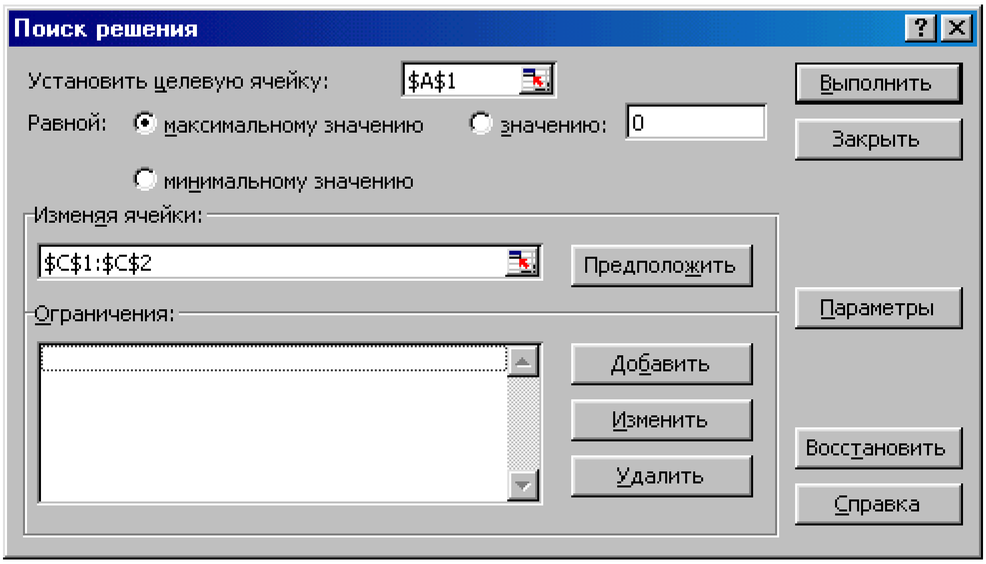


Рисунок 1.2 – Работа в диалоговом окне «Поиск решения»

- В окне «Ограничения» активировать кнопку «Добавить». Откроется окно «Добавить ограничения» (рисунок 1.3). Вводим первое ограничение: в окне «Ссылка на ячейку» указывают адрес ячейки, где находится левая часть 1-го ограничения - $B$1, затем выбирают знак ограничения « ≤ » и значение – 300.

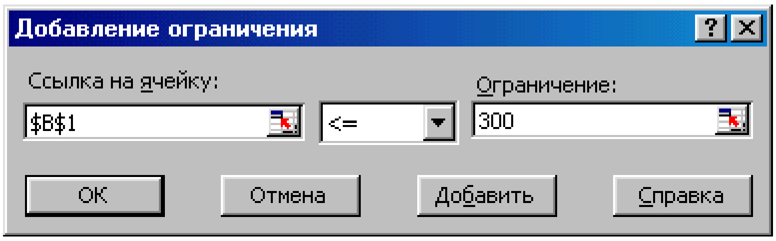


Рисунок 1.3 – Диалоговое окно «Добавление ограничения»

- Активируем клавишу «добавить» и аналогично вводим второе ограничение. Затем вводим условие неорицательности. Для этого в окне «Ссылка на ячейку» указываем диапазон ячеек, в которых находятся переменные ($C$1:$C$2). После добавления всех ограничений выбираем «ОК». Программа возвращается в диалоговое окно «Поиск решения». Ввод числовой модели закончен (рисунок 1.4).

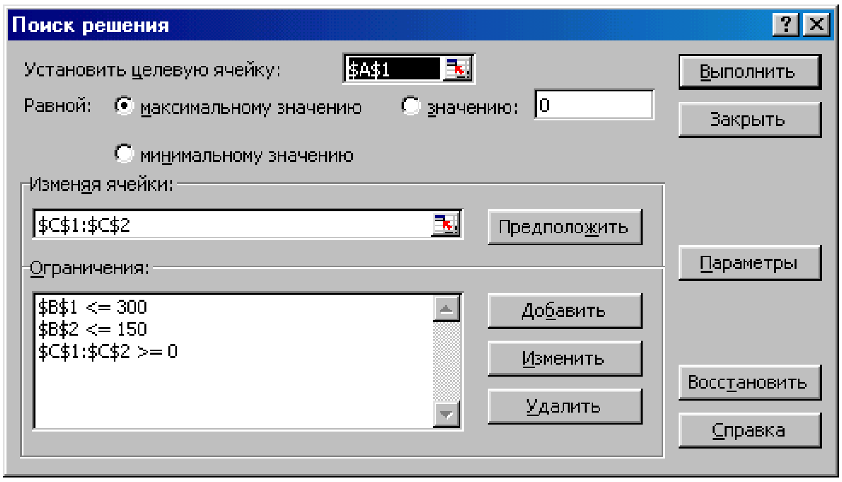


Рисунок 1.4 – Завершение ввода числовой модели в диалоговом окне «Поиск решения»

- Выбираем команду «Выполнить». На экране появится окно «Результаты поиска решения» (рисунок 1.5). Если модель составлена правильно и имеет решение, в открывшемся окне будет сообщение: «Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены». В окне «Тип отчета» выберите «Результаты» и нажмите «ОК».

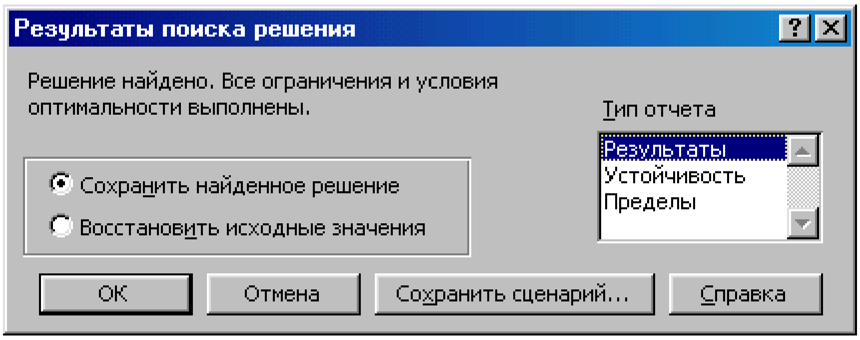


Рисунок 1.5 – Окно «Результаты поиска решения»

Результат решения задачи представлен в «Отчете по результатам» (рисунок 1.6). Решение задачи окончено.

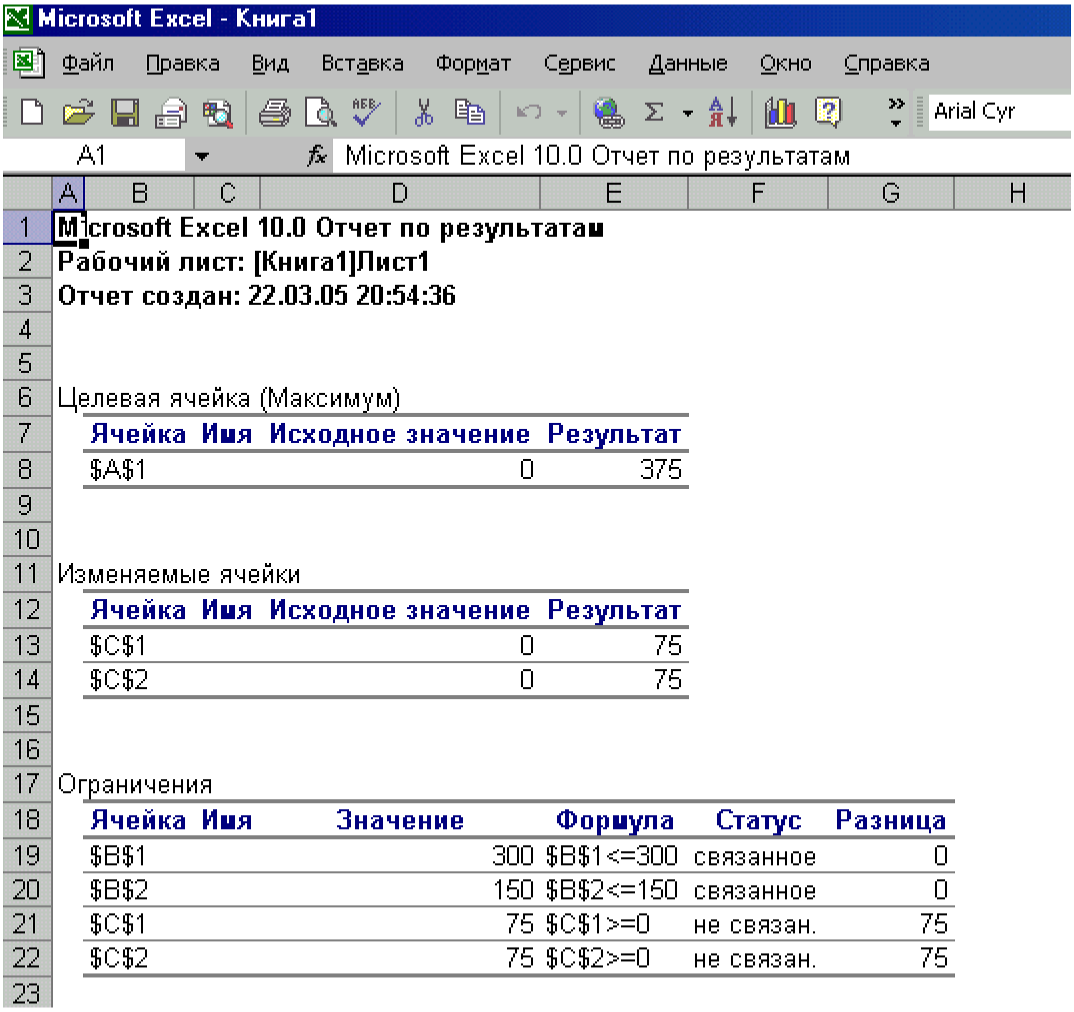


Рисунок 1.6 – Отчет по результатам

- Решение задачи окончено, результаты можно распечатать.

Примечание

Если поиск не может найти оптимальное решение, в диалоговом окне **Результаты поиска решения** выводится одно из следующих сообщений.

Поиск не может улучшить текущее решение. Все ограничения выполнены.

В процессе поиска решения нельзя найти такой набор значений влияющих ячеек, который был бы лучше текущего решения. Приблизительное решение найдено, но либо дальнейшее уточнение невозможно, либо погрешность, заданная в диалоговом окне **Параметры поиска решения** слишком высока. Измените погрешность на меньшее число и запустите процедуру поиска решения снова.

Поиск остановлен (истекло заданное на поиск время).

Время, отпущенное на решение задачи, исчерпано, но достичь удовлетворительного решения не удалось. Чтобы при следующем запуске процедуры поиска решения не повторять выполненные вычисления, установите переключатель **Сохранить найденное решение** или **Сохранить сценарий**.

Поиск остановлен (достигнуто максимальное число итераций).

Произведено разрешенное число итераций, но достичь удовлетворительного решения не удалось. Увеличение числа итераций может помочь, однако следует рассмотреть результаты, чтобы понять причины остановки. Чтобы при следующем запуске процедуры поиска решения не повторять выполненные вычисления, установите переключатель **Сохранить найденное решение** или нажмите кнопку **Сохранить сценарий**.

Значения целевой ячейки не сходятся.

Значение целевой ячейки неограниченно увеличивается (или уменьшается), даже если все ограничения соблюдены. Возможно следует в задаче снять одно ограничение или сразу несколько. Изучите процесс расхождения решения, проверьте ограничения и запустите задачу снова.

Поиск не может найти подходящего решения.

В процессе поиска решения нельзя сделать итерацию, которая удовлетворяла бы всем ограничениям при заданной точности. Вероятно, ограничения противоречивы. Исследуйте лист на предмет возможных ошибок в формулах ограничений или в выборе ограничений.

Поиск остановлен по требованию пользователя.

Нажата кнопка **Стоп** в диалоговом окне **Текущее состояние поиска решения** после прерывания поиска решения в процессе выполнения итераций.

Условия для линейной модели не удовлетворяются.

Установлен флажок **Линейная модель**, однако итоговый пересчет порождает такие значения, которые не согласуются с линейной моделью. Это означает, что решение недействительно для данных формул листа. Чтобы проверить линейность задачи, установите флажок **Автоматическое масштабирование** и повторно запустите задачу. Если это сообщение опять появится на экране, снимите флажок **Линейная модель** и снова запустите задачу.

При поиске решения обнаружено ошибочное значение в целевой ячейке или в ячейке ограничения.

При пересчете значений ячеек обнаружена ошибка в одной формуле или в нескольких сразу. Найдите целевую ячейку или ячейку ограничения, порождающие ошибку, и измените их формулы так, чтобы они возвращали подходящее числовое значение.

Набрано неверное имя или формула в окне **Добавить ограничение** или в окне **Изменить ограничение**, либо в поле **Ограничение** было задано целое или двоичное ограничение. Чтобы ограничить значения ячейки множеством целых чисел выберите оператор **целого** ограничения в списке условных операторов. Чтобы установить двоичное ограничение, выберите оператор для **двоичного** ограничения.

3. Экономическая интерпретация результатов решения задач.

Интерпретация результатов задачи

Полученные значения в ячейках, содержащих формулы целевой функции или ограничений, являются результатом расчета целевой функции и соответствующих ограничений.

Результат, полученный в ячейке А1 означает прибыль, полученную от производства продукции.

Ячейки С1, С2 указывают нам на количество произведенной продукции.

В ячейке В1 записано 1-ое ограничение, характеризующее расход сырья C_1 на производство всех видов продукции. При этом получился результат равный 300, разница равна 0, что указывает на полный расход сырья данного вида.

В ячейке В2 записано второе ограничение, характеризующее расход сырья C_2 на производство продукции $П_1$ и $П_2$. Результат равен 150, разница равна 0, что полностью соответствует заданному ограничению (т.е. сырье C_2 израсходовано полностью).

Значение ячеек С1, С2 превышают 0, т.е. условие неотрицательности переменных выполнено.

Ответ

Максимальная прибыль возможна в размере 375 единиц.

Объем выпуска продукции: $П_1$ - 75 штук, $П_2$ - 75 штук.

Сырье С1 иС2 израсходовано полностью, условие неотрицательности выполнено.

Порядок оформления задачи

1. Состав переменных

x_1 – количество продукции $П_1$, единиц;

x_2 – количество продукции $П_2$, единиц.

2. Числовая модель

I. $Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

II. $1x_1 + 3x_2 \le 300$

$1x_1 + 1x_2 \le 150$

III. $x_1 \ge 0$

$x_2 \ge 0$

3. Общий вид экономико-математической модели

I. $Z = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max$

II. $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2$

III. $x_j \ge 0$, $(j=1, 2)$

4. Структурная форма экономико-математической модели

I. $$Z = \sum_{j=1}^{2} c_j x_j \to \max$$

II. $$\sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,2$$

III. $$x_j \ge 0, \qquad j = 1,2$$

5. Ответ: **м**аксимальная прибыль возможна в размере 375 единиц;
объем выпуска продукции: $П_1$ - 75 штук, $П_2$ - 75 штук;
сырье С1 иС2 израсходовано полностью,
условие неотрицательности выполнено.

Задача 2

Для выпуска четырех видов продукции требуются затраты сырья, рабочего времени и оборудования. Исходные данные приведены в таблице.

Тип ресурса	Нормы затрат ресурсов на единицу продукции				Наличие ресурсов
	1	2	3	4	
Сырье	3	5	2	4	60
Рабочее время	22	14	18	30	400
Оборудование	10	14	8	16	128
Прибыль на единицу продукции	30	25	8	16	

Необходимо формулировать экономико-математическую модель задачи на максимум прибыли и найти оптимальный план выпуска продукции.

Задача 3

Для выпуска четырех видов продукции P_1, P_2, P_3, P_4 на предприятии используют три вида сырья S_1, S_2 и S_3. объемы выделенного сырья, нормы расхода сырья и прибыль на единицу продукции при изготовлении каждого вида продукции приведены в таблице. Требуется определить план выпуска продукции, обеспечивающий наибольшую прибыль.

Составим экономико-математическую модель задачи оптимального использования ресурсов на максимум прибыли. В качестве неизвестных примем выпуска продукции j-го вида x_j (j = 1,2,3,4).

Вид сырья	Запасы сырья	Вид продукции			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	35	4	2	2	3
S_2	30	1	1	2	3
S_3	40	3	1	2	1
Прибыль		14	10	14	11

Задача 4

Фабрика выпускает три вида тканей, причем суточное плановое задание составляет не менее 90 м тканей первого вида, 70 м – второго и 60 м – третьего. Суточные ресурсы следующие: 780 единиц производственного оборудования,850 единиц сырья, 790 единиц электроэнергии, расход которых на один метр ткани представлен в таблица.

Ресурсы	*Ткани*		
	I	II	III

Оборудование	2	3	4
Сырье	1	4	5
Электроэнергия	3	4	2

Цена за один метр ткани вида I равна 80 денежным единицам, II – 70 денежным единицам, III – 60 денежным единицам.

Необходимо определить, сколько метров ткани каждого вида следует выпустить, чтобы общая стоимость выпускаемой продукции была максимальной.

Задача 5

На основании информации, приведенной в таблице, составить план производства, максимизирующий объем прибыли.

Ресурсы	Затраты ресурсов на единицу продукции		Наличие ресурсов
	А	Б	
Труд	2	4	2000
Сырье	4	1	1400
Оборудование	2	1	800
Прибыль на единицу продукции	40	60	

Задача 6

Составить рацион для молочных коров весом 500 кг, с суточным удоем 10 кг так, чтобы стоимость рациона была минимальной. Исходные данные представлены в таблицах 1.2 и 1.3.

Таблица 1.2 - Потребность в питательных элементах

Питательные элементы	Затраты питательных элементов на поддержание жизни	Затраты питательных элементов на 1кг молока
Кормовые единицы, кг	5	0,5
Протеин, г	300	70
Кальций, г	20	3
Фосфор, г	10	4
Каротин, мг	150	25

Таблица 1.3 - Питательность и себестоимость 1 кг корма

Показатели	Концентрированные	Сочные	Грубые	Минеральные и прочие
Кормовые единицы, кг	1,0	0,2	0,4	-
Протеин, г	100	10	20	-
Кальций, г	5	1	2	100
Фосфор, г	5	1	2	200
Каротин, мг	2	10	5	5
Себестоимость, руб.	5	2	3	5

Физиологические ограничения: дача сочных кормов в сутки не более 30 кг.

Экономические требования: дача концентрированных кормов в размере не менее 200 г, на каждый кг молока суточного удоя.

Решение

Расчет рациона производится на 1 животное, исходя из средних физиологических характеристик животных.

1. Состав переменных

x_1 – количество концентрированных кормов, кг;
x_2 – количество сочных, кг;
x_3 – количество грубых, кг;
x_4 – количество минеральных и прочих кормов, кг.

2. Числовая модель

I. Целевая функция должна выражать стоимость рациона. Причем стоимость должна быть минимальной, следовательно

$Z = 5x_1+2x_2+3x_3+5x_4 \rightarrow \min$

II. Основные ограничения

Первый вид ограничения будет выражать суточную потребность животных в кормовых единицах. Количество кормовых единиц, получаемых животным из концентрированных кормов составит 1,0 x_1, из сочных соответственно 0,2 x_2, из грубых – 0,4 x_3. Минеральные корма не содержат кормовые единицы. Следовательно животное в день может получить из различных видов кормов $1{,}0x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}4x_3$ кг кормовых единиц.

Потребность животного в кормовых единицах в сутки составит 10 кг (5+0,5·10, т.к. 5 кг тратится на поддержание жизни, 0,5·10 кг необходимо для производства молока). Тогда ограничение по содержанию кормовых единиц в суточном рационе животного будет иметь вид:

$1{,}0x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}4x_3 \geq 10$

Аналогично составляем ограничения по содержанию других питательных веществ:

по протеину: $100x_1 + 10x_2 + 20x_3 \geq 1000$
по кальцию: $5x_1 + 1{,}0x_2 + 2x_3 + 100x_4 \geq 50$
по фосфору: $5x_1 + 1{,}0x_2 + 2x_3 + 200x_4 \geq 50$
по каротину: $2{,}0x_1 + 10x_2 + 5x_3 + 5x_4 \geq 400$

Дополнительные ограничения

Условие, что суточная норма сочных кормов не должна превышать 30 кг будет иметь вид: $x_2 \leq 30$.

Условие, что на каждый 1 кг суточного удоя должно приходится не менее 200 г концентрированных кормов, будет иметь вид: $x_1 \geq 2$.

III. Условие неотрицательности переменных

$x_2 \geq 0$
$x_3 \geq 0$
$x_4 \geq 0$

3. Общий вид экономико-математической модели

I. $Z = c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4 \rightarrow \min$

II. $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \geq b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \geq b_2$
$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \geq b_3$

$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \geq b_4$
$a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 \geq b_5$

$x_2 \leq b_6$
$x_1 \geq b_7$

III. $x_j \geq 0$, j=2,3,4.

4. Структурная форма экономико-математической модели

I. $$Z = \sum_{j=1}^{4} c_j x_j \to \min$$

II. $$\sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1,2$$

$$\sum_{j=1}^{4} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 3,...,5$$

$$x_j \leq b_i, \qquad j = 2, i = 6$$

$$x_j \geq b_i, \qquad j = 1, i = 7$$

III. $$x_j \geq 0, \qquad j = 2,3,4$$

Ответ

Оптимальный рацион для коров 500 кг и суточный удой 10 кг, концентрированные – 3,26 кг, сочные – 30,00 кг, грубые - 18,70 кг, минеральные -0 кг. Минимальная стоимость рациона 132,39 руб.

Содержание кормовых единиц в рационе превышает минимально допустимую норму на 6,74 кг, кальция – на 33,7 г, фосфора – 33,7 г, содержание протеина и каротина в рационе строго соответствует норме.

Количество сочных кормов в рационе составило 30 кг, что соответствует максимальной норме. Количество концентратов превысило минимальный уровень (2кг) на 1,26 кг.

Минеральные вещества не вошли в рацион животных, потребность в минеральных веществах (кальций, фосфор) удовлетворяется другими, более экономически эффективными кормами.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

3.1 Практическое занятие 1 (2 часа)

Тема: «Транспортная задача»

3.1.1 Задание для работы:

1. Подготовка и модель транспортной задачи.
3. Решение транспортной задачи в MS Excel.

3.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Подготовка и модель транспортной задачи.
2. Алгоритм метода потенциалов.
3. Решение транспортной задачи в MS Excel.

2.3.3 Описание (ход) работы:

1. Подготовка и модель транспортной задачи.

Среди проблем, для исследования которых успешно применяется линейное программирование, важное значение имеет так называемая транспортная задача.

Общая постановка этой задачи применительно к экономической проблеме экономии издержек производства формулируется так: имеется несколько пунктов назначения (предприятий, потребителей); требуется перевезти некоторое количество однородного товара из различных пунктов отправления в несколько пунктов назначения; каждый из поставщиков может выделить только определенное количество единиц товара и каждому потребителю требуется также определенное количество единиц этого товара; известны расстояния или стоимости перевозки единицы товара от каждого поставщика к каждому потребителю. Задача состоит в том, чтобы найти такие маршруты перевозок, из всех возможных связей поставщиков и потребителей, при которых общие транспортные расходы были бы минимальными (транспортная задача также может быть сформулирована с целевой функцией, стремящейся к максимуму).

Таким образом, пусть имеем m пунктов, в которых находится известное количество однородных грузов (поставщики). Порядковый номер поставщика обозначается i, то есть i=1,2,…,m. Наличие грузов у поставщика b_i. Имеется n пунктов испытывающих потребность в этих грузах (потребителей). Порядковый номер потребителя j=1,2,…,n. Потребность в грузах каждого потребителя a_j. Известна «цена» перевозки единицы груза от каждого поставщика к каждому потребителю (c_{ij}). Необходимо составить план перевозки грузов от поставщиков к потребителю, т.е. определить: какое количество груза необходимо перевезти от каждого поставщика к каждому потребителю (x_{ij}), причем значения x_{ij} должны отвечать следующим требованиям:

1) общие затраты на перевозку грузов должны быть минимальными;
2) все грузы от поставщиков должны быть вывезены;
3) потребности потребителей в грузах должны быть удовлетворены.

Требования 2-3 одновременно могут быть выполнены только в том случае, когда сумма грузов у всех поставщиков равна суммарной потребности всех потребителей, то есть:

$$\sum_{i=1}^{m} b_i = \sum_{j=1}^{n} a_j$$ – условие разрешимости задачи.

Если условие разрешимости выполняется, то задача будет являться задачей, так называемого закрытого типа (сбалансированной). Иначе – задача открытого типа (несбалансированная). Для того чтобы решить задачу открытого типа, надо её «закрыть» (то есть привести к закрытому типу). Для этого вводится или фиктивный поставщик или фиктивный потребитель.

В случае, когда *суммарные запасы превышают суммарные потребности*, необходим дополнительный фиктивный пункт потребления, который будет формально потреблять существующий излишек запасов, то есть:

$$a_{\phi} = \sum_{i=1}^{m} b_i - \sum_{j=1}^{n} a_j \ .$$

Если *суммарные потребности превышают суммарные запасы*, то необходим дополнительный *фиктивный* пункт отправления, формально восполняющий существующий недостаток продукции в пунктах отправления:

$$b_{\phi} = \sum_{j=1}^{n} a_j - \sum_{i=1}^{m} b_i \ .$$

Введение фиктивного потребителя или отправителя повлечет необходимость формального задания *фиктивных* тарифов c_{ij}^{ϕ} (реально не существующих) для фиктивных перевозок. Поскольку нас интересует определение наиболее выгодных *реальных* перевозок, то необходимо предусмотреть, чтобы при решении задачи (при нахождении опорных планов) *фиктивные* перевозки не рассматривались до тех пор, пока не будут определены все реальные перевозки. Для этого надо фиктивные перевозки сделать невыгодными, чтобы при поиске решения задачи их рассматривали в самую последнюю очередь. Таким образом, если целевая функция стремится к min, то затраты берутся во всех фиктивных клетках таблицы произвольные, одинаковые и на порядок выше настоящих цен, т.е. величина фиктивных тарифов должна превышать максимальный из реальных тарифов, используемых в модели: $c_{ij}^{\phi} > \max c_{ij} \left(i = \overline{1,m};\, j = \overline{1,n}\right)$. Если целевая функция стремится к max, то c_{ij}^{ϕ} берётся равная нулю.

Развёрнутая форма записи модели транспортной задачи.

Для удобства, прежде чем писать модель, запишем в виде матрицы цен все значения c_{ij}. А также в виде матрицы грузоперевозок переменные x_{ij}.

Матрица цен:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11}\ c_{12}\ \ldots c_{1n} \\ c_{21}\, c_{22} \ldots c_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{m1}\ c_{m2} \ldots c_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица $C = (c_{ij})_{m*n}$ называется также матрицей тарифов (издержек или транспортных расходов).

Матрица грузоперевозок:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11}\ x_{12}\ \ldots x_{1n} \\ x_{21}\, x_{22} \ldots x_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1}\ x_{m2} \ldots x_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица $X = (x_{ij})_{m*n}$ еще называется планом транспортной задачи.

Модель транспортной задачи будет выглядеть следующим образом.

I. Целевая функция описывает затраты на перевозку грузов:

$$Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{2n}x_{2n} + \ldots$$
$$+ c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn} \to \min.$$

II. Система ограничений описывает второе и третье требования для x_{ij} из постановки задачи.

1 группа: условие полного вывоза грузов от поставщиков (сумма грузов, вывезенных от поставщика должна быть равна наличию):

$x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = b_1$,

$x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = b_2$,

……………………

$x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn} = b_m$;

2 группа: условие удовлетворения потребителя (сумма грузов привезённых потребителю должна быть равна его потребности):

$x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{m1}=a_1$,

$x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{m2}=a_2$,

…………………….

$x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn} = a_n$.

III. Условие неотрицательности переменных величин $x_{11}\geq 0$, $x_{12}\geq 0$, …, $x_{mn}\geq 0$.

Структурная форма записи модели транспортной задачи.

В специализированной литературе модели даются в структурной форме.

I. $Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\rightarrow\min$.

II.

1) $\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=b_i,\ i=1,2,\ldots,m$

2) $\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=a_j,\ j=1,2,\ldots,n$

III. $x_{ij}\geq 0$ ($i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$).

Табличная форма записи модели транспортной задачи.

Общепринято в таблице информацию по поставщикам располагать по строкам, по потребителю – по столбцам.

Размер таблицы: строк m+2, столбцов n+2.

Матрицы транспортных расходов и перевозок совмещают обычно в одну двойную матрицу – *матрицу планирования*.

Если в таблицу записана только исходная информация и нет значений x_{ij}, то это рабочая таблица или *макет* задачи. Если значения x_{ij} проставлены, то получаем первый вариант решения задачи. В такой форме задачи решаются.

Таблица 5 – Общий вид транспортной матрицы

потребители

поставщики

	1	2	…	n	b_i
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	b_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	b_m
a_j	a_1	a_2	…	a_n	$\sum_{j=1}^{n}a_j=\sum_{i=1}^{m}b_i$

Кроме основных условий, в транспортных задачах может встретиться ряд дополнительных, ограничивающих количественные связи между отдельными потребителями и поставщиками. Характер этих ограничений и способы решения задачи при наличии дополнительных ограничений заключаются в следующем.

1. Полное отсутствие связи между поставщиком и потребителем, то есть $x_{ij} = 0$. Это означает, что в данной клетке матрицы искомый объем перевозок должен быть равен нулю. В этом случае оценка переменной завышается на большую величину, обычно

обозначаемую буквой *M*, и «попадание» груза в эту клетку нежелательно, так как целевая функция стремиться к минимуму (и занижается, если $Z \to \max$).

2. Наличие частной заранее фиксированной связи между поставщиками и потребителями, то есть $x_{ij} = q$ (искомый объем перевозок от i-го поставщика к j-му потребителю должен быть строго равен q). Тогда, до начала решения задачи от величины грузов соответствующего поставщика и потребителя вычитается величина q, затем в соответствующую клетку пересечения поставщика и потребителя записывается завышенная оценка M (при $Z \to \min$ и заниженная при $Z \to \max$) и задача решается обычным методом.

3. $x_{ij} \geq q$, то есть искомый объем перевозок от i-го поставщика к j-му потребителю должен быть не меньше величины q. В этом случае до начала решения от величины грузов соответствующего поставщика и потребителя вычитается величина q, затем задача решается обычным путем.

Модель транспортной задачи позволяет решать любые задачи, в которых параметры имеют одинаковые единицы измерения. Такие модели называются однопродуктовыми. К ним можно отнести задачу оптимизации использования машинно-тракторного парка в отдельные агротехнические сроки, задачу оптимального размещения посевов сельскохозяйственных культур по участкам с различным плодородием почв и т.д.

2. Решение транспортной задачи в MS Excel.

Задача 1

Требуется перевезти одноименный груз из трех пунктов отправления в три пункта назначения. Количество грузов, подлежащих отправлению с каждого склада, потребности в них каждого потребителя и расстояния в километрах от каждого пункта отправления в каждый пункт назначения приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2 – Расстояния перевозки, км

Поставщики	Потребители			Наличие грузов, т
	1	2	3	
1	15	17	23	900
2	9	19	8	800
3	24	21	32	550
Потребность в грузах, т	700	800	750	2250 / 2250

Нужно определить, из какого пункта отправления следует удовлетворять спрос потребителей, чтобы общая сумма объема перевозок (ткм) была минимальной.

Решение:

1. Проверка сбалансированности задачи

Просуммируем наличие грузов у поставщиков

$$\sum_{i=1}^{3} b_i = 900+800+550=2250$$

Просуммируем потребности потребителей в грузах

$$\sum_{j=1}^{3} a_j = 700+800+750=2250$$

$\sum_{i=1}^{3} b_i = \sum_{j=1}^{3} a_j$, следовательно, задача сбалансированная (закрытого типа).

2. Определение переменных

Обозначим через x_{ij} [т] количество грузов, которые будут перевезены от i-го поставщика j-му потребителю.

3. I. Целевая функция

Формальная целевая функция имеет вид:

$$\begin{aligned} F(X) = {} & 15x_{11} + 17x_{12} + 23x_{13} + \\ & + 9x_{21} + 19x_{22} + 8x_{23} + \\ & + 24x_{31} + 21x_{32} + 32x_{33} \to \min \end{aligned}$$

II. Основные ограничения

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 900, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 800, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 550, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 700, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 800, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 750. \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности

$$\forall x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,3}\right).$$

4. Модель задачи в общем виде:

$$\text{I.} \quad \begin{aligned} F(X) = {} & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + \\ & + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + \\ & + c_{31}x_{31} + c_{32}x_{32} + c_{33}x_{33} \to \min \end{aligned}$$

$$II. \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = b_1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = b_2, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = b_3, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = a_1, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = a_2, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = a_3. \end{cases}$$

$$III. \quad \forall x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,3}\right).$$

5. Модель задачи в структурной форме:

$$I. \quad F(x) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

$$II. \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = b_i, & i = \overline{1,3} \\ \sum_{i=1}^{3} x_{ij} = a_j, & j = \overline{1,3} \end{cases},$$

$$III. \ \forall \, x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,3}\right).$$

6. Для решения данной задачи в Excel необходимо:

1) под запись целевой функции отвести ячейку A1;

2) под запись ограничений – ячейки столбца B (количество ячеек совпадает с количеством ограничений): B1, B2, B3, B4, B5, B6;

3) под запись искомых переменных отвести ячейки столбцов C, D, E (количество потребителей совпадает с количеством столбцов,
количество поставщиков – с количеством строк).

**Примечание:* искомые переменные x_{ij} будут находиться в следующих ячейках:
($x_{11} \rightarrow C1$ $\quad x_{12} \rightarrow D1$ $\quad x_{13} \rightarrow E1$
$x_{21} \rightarrow C2$ $\quad x_{22} \rightarrow D2$ $\quad x_{23} \rightarrow E2$
$x_{31} \rightarrow C3$ $\quad x_{31} \rightarrow D2$ $\quad x_{33} \rightarrow E3$).

Порядок выполнения работы:

1. Ввести в ячейку A1 формулу целевой функции (рисунок 3.1):
=15*C1+17*D1+23*E1+
\+ 9*C2+19*D2 + 8*E2+
+24*C3+21*D3+32*E3;

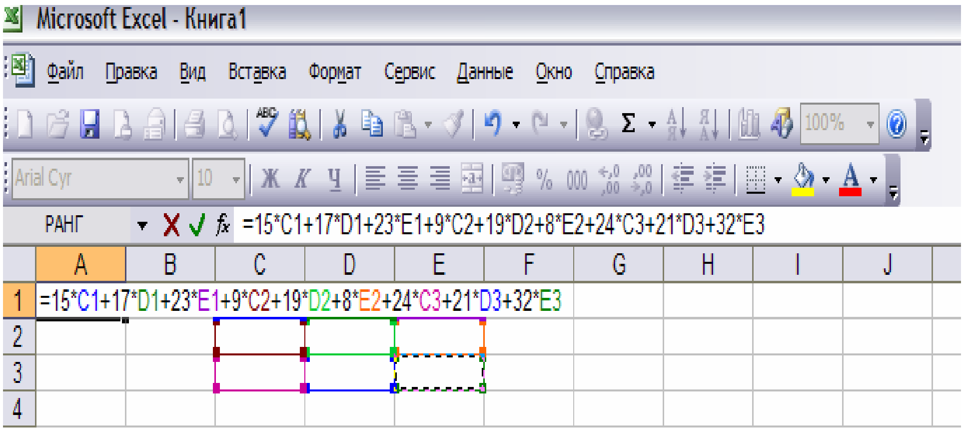


Рисунок 3.1 – Ввод целевой функции в Excel

2. а) Ввести в ячейку B1 левую часть 1-го ограничения: = C1+D1+E1 (рисунок 3.2)

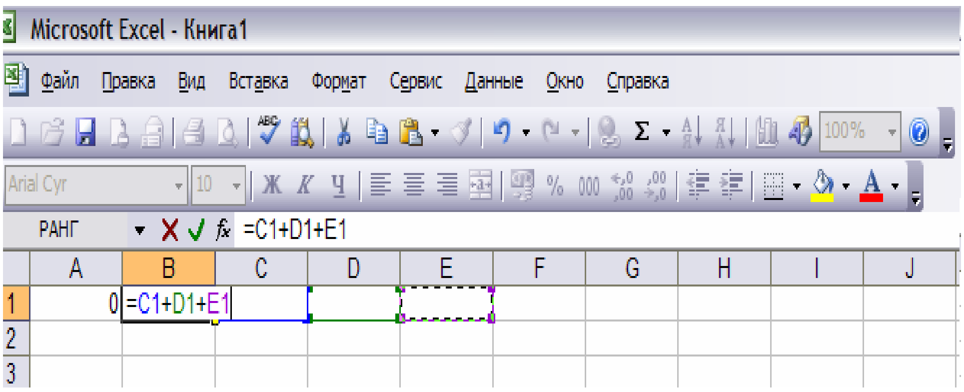


Рисунок 3.2 – Ввод ограничений в Excel

б) Ввести в ячейку В2 левую часть 2-го ограничения:
= С2+D2+E2
в) Ввести в ячейку В3 левую часть 3-го ограничения:
= С3+D3+E3
г) Ввести в ячейку В4 левую часть 4-го ограничения:
= С1+С2+С3
д) Ввести в ячейку В5 левую часть 5-го ограничения:
= D1+D2+D3
е) Ввести в ячейку В6 левую часть 6-го ограничения:
= E1+E2+E3

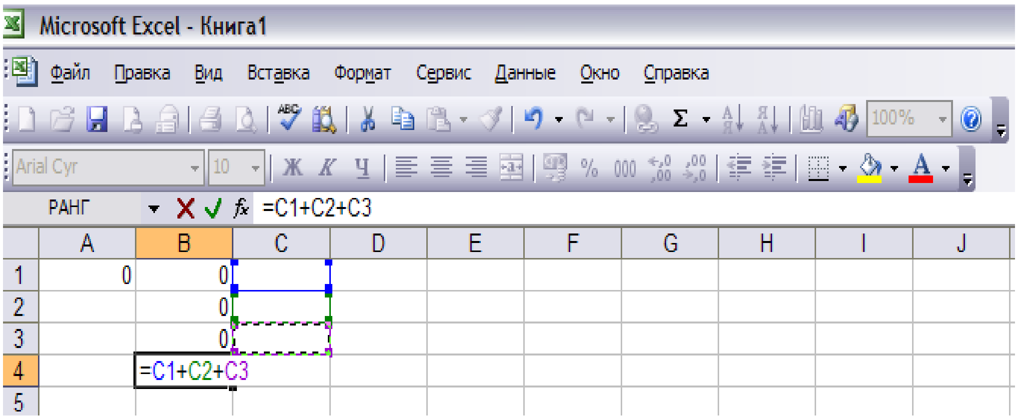


Рисунок 3.3 – Ввод ограничений в Excel

3. На панели инструментов выбрать опцию "Сервис", а в ней вкладку "Поиск решения"

Примечание

Если "Поиск решения" отсутствует, нужно выполнить команду "Сервис"–"Надстройки". В окне диалога "Надстройки" нужно установить флажок напротив строки "Поиск решения".

4. В окне диалога "Поиск решения" в поле ввода "Установить целевую ячейку" нужно ввести ссылку на ячейку А1. Необходимо выбрать способ адресации ячеек в абсолютной системе координат (т.е. указать не А1, а $A$1). Также нужно поступать с другими переменными.

5. В окне диалога "Поиск решения" нужно установить переключатель (рисунок 3.4).

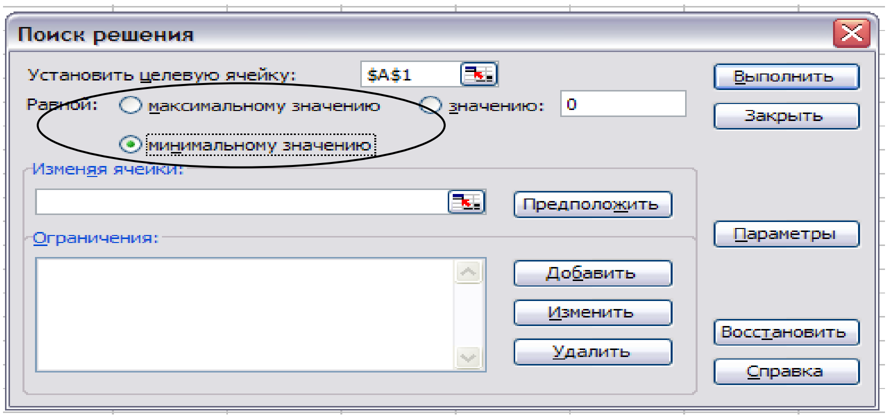
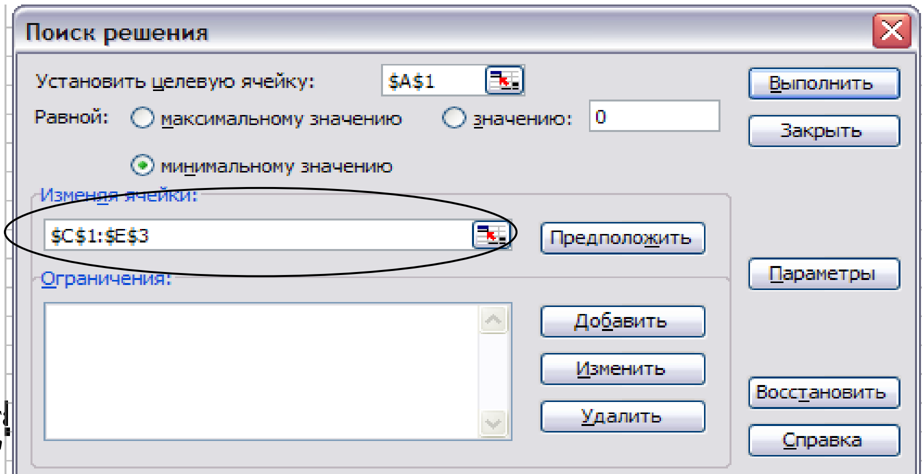


Рисунок 3.4 – Работа в диалоговом окне «Поиск решения»

6. В поле ввода "Изменяя ячейки" нужно указать ссылки на ячейки, содержащие искомые переменные, т.е. диапазон ячеек $C$1: $E$3 (рисунок 3.5).



ые
появляется окно
диалог
тся $B$1. В поле
ввода '
авить" таким же
образом вводятся все остальные ограничения (ячейки $B$2:$B$6) (рисунок 3.6).

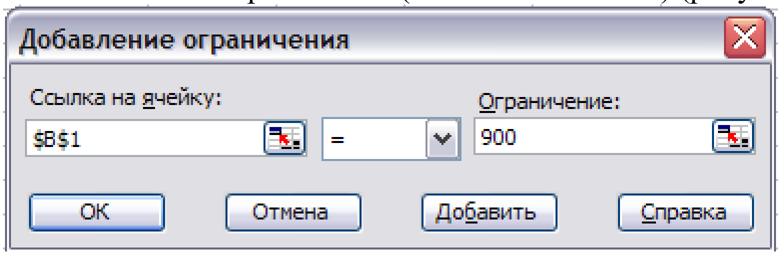


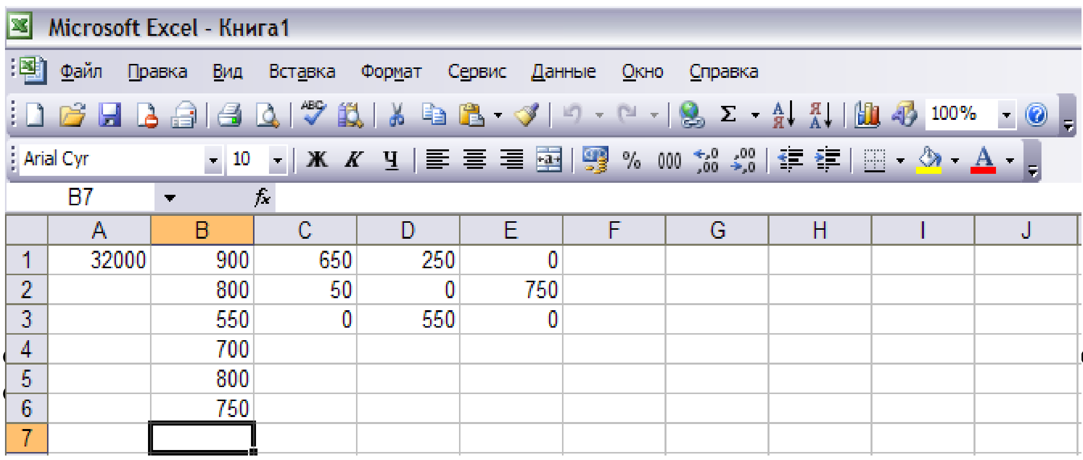
Рисунок 3.6 – Диалоговое окно «Добавление ограничения»

8. Для ввода ограничений на неотрицательность искомых переменных в окне диалога "Добавить ограничения" в поле ввода "Ссылка на ячейку" нужно ввести ссылку на ячейку $C$1, а в поле ввода "Ограничения" нужно ввести >= и число 0. При помощи кнопки "Добавить" таким же образом вводятся условия неотрицательности оставшихся искомых переменных. Либо выделяется диапазон ячеек $C$1: $E$3 и задается >= и число 0. После ввода последнего ограничения нажмите «ОК».

Примечание

Если в задаче имеется условие целочисленности искомых переменных, то в диалоговом окне «Добавление ограничений» в поле ввода "Ссылка на ячейку" нужно ввести ссылку на ячейку $C$1, а в поле ввода знака ограничения нужно ввести «цел». При помощи кнопки "Добавить" таким же образом вводятся условия целочисленности оставшихся искомых переменных. Либо выделяется диапазон ячеек $C$1: $E$3 и задается «цел». После ввода последнего ограничения нажмите «ОК».

9. После нажатия кнопки "Выполнить" Excel рассчитывает результат и открывает окно диалога "Результаты поиска решения". В этом диалоге в окне "Тип отчета" нужно выбрать "Результаты" и нажать Ok. Перед листом, где записана постановка задачи, будет вставлен лист "Отчет по результатам 1", а на экране будет выдан результат решения задачи (рисунок 3.7).



функции и
етствующих

Результат, полученный в ячейке A1, означает общую сумму объема грузоперевозок в ткм.

Ячейки B1, B2, B3 показывают выполнение условия полного вывоза груза от поставщика. Ячейки B4, B5, B6 показывают выполнение условия полного удовлетворения потребностей потребителя.

Значения ячеек в диапазоне $C$1: $E$3 показывают количество груза (в т), перевезенного от соответствующего поставщика, соответствующему потребителю. Значения данного диапазона превышают 0, следовательно условие неотрицательности искомых переменных выполнено.

Ответ

Оптимальные перевозки грузов предусматривают перевозку от 1-го поставщика 1-му потребителю 650 т, от 1-го поставщика 2-му потребителю – 250 т, от 2-го поставщика 1-му потребителю – 50 т, а 3-му потребителю – 750 т. 3-й поставщик отвезет свой груз только 2-му потребителю в количестве 550 т. Минимальный объем перевозок составит 32000 т км.

3.1.3 Результаты и выводы:

Общая постановка этой задачи применительно к экономической проблеме экономии издержек производства формулируется так: имеется несколько пунктов назначения (предприятий, потребителей); требуется перевезти некоторое количество однородного товара из различных пунктов отправления в несколько пунктов назначения; каждый из поставщиков может выделить только определенное количество единиц товара и каждому потребителю требуется также определенное количество единиц этого товара; известны расстояния или стоимости перевозки единицы товара от каждого поставщика к каждому потребителю. Задача состоит в том, чтобы найти такие маршруты перевозок, из всех возможных связей поставщиков и потребителей, при которых общие транспортные расходы были бы минимальными (транспортная задача также может быть сформулирована с целевой функцией, стремящейся к максимуму).