ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГООБРАЗОВАНИЯ «ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра организации производства и

моделирования экономических систем

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.ДВ.12.01 Экономическое моделирование в АПК

Направление подготовки: Менеджмент

Профиль образовательной программыУправленческий и финансовый учет

Форма обучения: очная

Оренбург 201_ г.

Содержание

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.1 Лекция №1 (2 часа)
Тема: « Модели и экономико-математическое моделирование»

1.1.1 Вопросы лекции:
1. Принцип аналогии в моделировании. Общее понятие модели.
2. Экономико-математические модели.
3. Этапы моделирования. Линейная экономико-математическая модель.

1.1.2 Краткое содержание вопросов
1. Принцип аналогии в моделировании. Общее понятие модели.

Термин модель происходит от латинского слова *modulus* – образец, норма, мера. Понятие модели основано на принципе аналогии. Рассматривая свойства различных объектов, явлений, процессов, можно обнаружить, что некоторые из них имеют определенное сходство, подобие. Это сходство проявляется либо во внешних формах, либо в структуре, либо в изменении характера поведения при одинаковых воздействиях.

С точки зрения управления хозяйственными процессами наибольший интерес представляют модели, основанные на сходстве поведения систем, подобии их реакций на изменение воздействия. Модель в наиболее общем определении - это некоторый аналог той системы, которой мы должны управлять, основываясь на знаниях из исследования данного аналога. Оригиналом служит реальный объект исследования – то или иное явление, процесс производства и т.д. Модель отображает те свойства исследуемой системы, которые представляют интерес, прежде всего с точки зрения управленческих воздействий на нее, т.е. модель служит средством познания оригинала.

Для решения практических задач недостаточно подобия. Необходима возможность экспериментировать на модели. Это достигается прежде всего упрощением системы, ограничением исследуемых свойств.

Воспроизведение некоторого ограниченного множества существенных свойств поведения системы называют имитацией.

Различают ряд способов имитации:

аналоговый – замена носителей базовых свойств реальной системы другими физическими носителями;

аналитический – замена материальных носителей базовых характеристик исследуемой системы абстрактными математическими соотношениями;

машинный - построение численных моделей поведения систем на основе алгоритмов;

ситуационный - путем отображения свойств, деловых игр.

В зависимости от способа отображения свойств исследуемой системы через те или иные носители все множество моделей можно подразделить на две большие группы: материальные (физические) и абстрактные. По своей природе физические модели могут быть механическими, электрическими, гидравлическими, и т.д. Физические модели строятся на принципах прямой аналогии, когда оригинал и модель могут отличаться лишь масштабами, или косвенной, когда меняются носители базовых свойств.

Моделирование – есть научный метод исследования систем, рассматриваемых как оригиналы, на их аналогах-моделях. Цель моделирования является углубление знаний для распространения этих знаний на систему-оригинал при управлении ее поведением.

По своей сущности научные понятия "модель" и "моделирование" представляют собой категории познания системных свойств исследуемых объектов.

Имитация поведения исследуемых систем есть наиболее общая форма моделирования.

Принцип аналогии состоит именно в получении выводов, суждений об управляемой системе на основе исследования поведения другой системы, сходной в некотором отношении с оригиналом

Формализованное представление закономерностей поведения реальных экономических систем в виде абстрактных математических аналогов – системы уравнений и неравенств – получило название математического моделирования.

2. Экономико-математические модели.

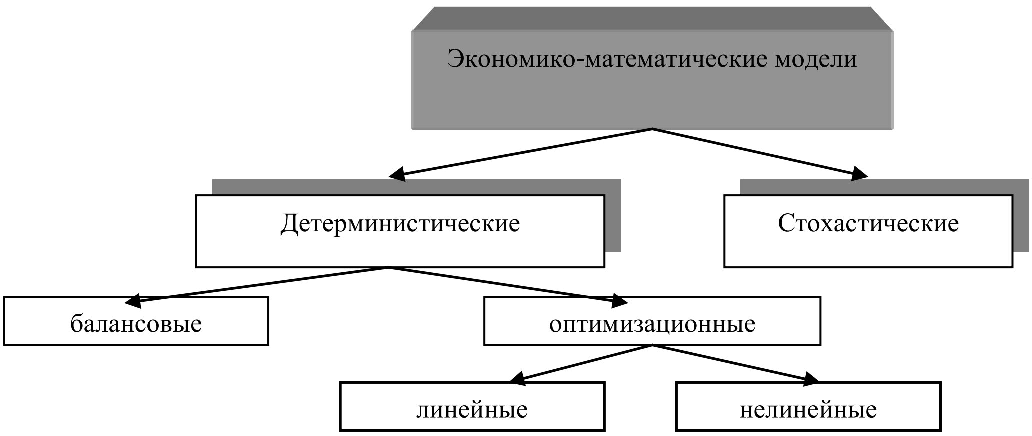
При разработке экономико-математических моделей принимают во внимание наиболее значимые, существенные характеристики управляемых систем, а детали второстепенного характера опускаются.

Модель позволяет имитировать поведение системы в широком диапазоне изменяющихся условий. Отпадает необходимость в дорогостоящих натуральных экспериментах. При исследовании очень сложных систем с большой длительностью протекающих в них процессов моделирование служит единственным средством обоснования управленческих решений на перспективу. Основной эффект моделирования заключается именно в научно обоснованном принятии управленческих решений – в выборе наилучшего (оптимального) варианта развития системы.

Модель всегда проще оригинала. Исследователь стремиться воспроизвести прежде всего те свойства системы, которые важны для решения стоящих перед ним задач. Степень достоверности выводов при этом зависит от детализации исходной информации о свойствах системы, глубины проработки и изученности закономерностей поведения этой системы.

Экономико-математическая модель - это концентрированное выражение существенных взаимосвязей и закономерностей процесса функционирования экономической системы в математической форме

В планово-экономической работе используются разнообразные типы моделей, различающиеся целевым назначением, характером задач, степенью охвата явлений, математическим аппаратом и т.д. Существует множество экономико-математических моделей. Возникает необходимость в их классификации.



Все имеющиеся экономико-математические модели делятся на детерминистические и стохастические.

К детерминистическим относятся модели, в которых результат полностью и однозначно определяется набором независимых переменных. Эти модели строятся на основе правил линейной алгебры и представляют собой систему уравнений, совместно решаемых для получения результатов.

Детерминистические модели подразделяются на модели балансовые и модели оптимизационные. Балансовые модели, как правило, характеризуются системой балансовых таблиц, которые обычно имеют форму шахматного баланса и могут быть записаны в виде квадратных матриц. Оптимизационные модели отличаются от балансовых тем, что целью их построения является не столько описание структуры экономической системы, сколько математическое описание условий функционирования.

Оптимизационные модели бывают линейные и нелинейные.

Стохастические модели описывают случайные процессы, подчиняющиеся законам теории вероятности. В этих моделях исходные данные, либо искомый результата выражаются не определенными величинами, а в виде некоторой статической функции распределения этих величин. Изучаемый процесс условно рассматривается как детерминистический, но в модель входят элементы оценки вероятности полученных результатов.

3. Этапы моделирования. Линейная экономико-математическая модель.

Математическое моделирование имеет два существенных преимущества: 1) дает быстрый ответ на поставленный вопрос, на что в реальной обстановке могут потребоваться иногда даже годы; 2) предоставляет возможность широкого экспериментирования, осуществить которое на реальном объекте зачастую просто невозможно.

Содержательная постановка задачи часто оказывается перенасыщенной сведениями, которые совершенно излишни для ее последующей формализации. Чтобы моделирование было успешным, надо учитывать главные свойства моделируемого объекта, пренебрегать его второстепенными свойствами и уметь отделить их друг от друга.

Формализовать постановку задачи, т.е. перевести ее на язык математики, причем с конечным количеством неизвестных и возможных ограничений. При этом необходимо провести различие между теми величинами, значениями которых можно варьировать и выбирать с целью достижения наилучшего результата (*управляемымипеременными*), и величинами, которые фиксированы или определяются внешними факторами. Одни и те же величины, в зависимости от выбранных границ оптимизируемой системы и уровня детализации ее описания, могут оказаться либо управляемыми переменными, либо нет.

Определение тех значений управляемых переменных, которым соответствует наилучшая (*оптимальная*)ситуация, и представляет собой задачу оптимизации.

Модель экономической задачи оптимизации состоит из 3-х частей:

I. Целевая функция (критерий оптимальности). Здесь описывается конечная цель, преследуемая при решении задачи. В качестве такой цели может быть или максимум получения каких-либо показателей или минимум затрат.

II. Система ограничений.

Ограничения бывают основные и дополнительные. Основные, как правило, описывают расход основных производственных ресурсов (это консервативная часть модели). В модели они обязательно присутствуют. Дополнительные – могут иметь различный характер, являются изменяемой частью модели и отражают особенность моделирования задачи.

III. Условие неотрицательности переменных величин. А также граничные условия, которые показывают, в каких пределах могут быть значения искомых переменных в оптимальном решении.

Решение задачи, удовлетворяющее всем ограничениям и граничным условиям, называется *допустимым.* Если математическая модель задачи оптимизации составлена правильно, то задача будет иметь целый ряд допустимых решений. Чтобы из всех возможных решений выбрать только одно, необходимо договориться, по какому признаку мы это будем делать. То есть речь идет о критерии оптимальности, который выбирает человек, принимающий решение. Таким образом, оптимальное решение – это решение, наилучшее из допустимых с точки зрения выбранного признака.

Однако, следует иметь в виду, что решение не всех оптимизационных проблем сводится к построению математических моделей и соответствующим вычислениям. Это связано с тем, что могут появиться обстоятельства, являющиеся существенными для решения проблемы, но, тем не менее, не поддающиеся математической формализации и, следовательно, не учитываемые в математической модели. Одним из таких обстоятельств является человеческий фактор.

Базовая модель включает следующие элементы: исходные значения ресурсов; переменные величины, значение которых должны определяться в результате моделирования; технико-экономические коэффициенты и нормативы, необходимые для отображения закономерных взаимосвязей ресурсов с выходными показателями; условия (ограничения), описывающие характер и логику взаимосвязей в модели; критерий оптимальности, определяющий качество функционирования исследуемой системы.

Разработка экономико-математической модели осуществляется поэтапно в определенной последовательности.

1. Постановка задачи и обоснование критерия оптимальности.
2. Определение перечня переменных и ограничений.
3. Сбор информации и разработка технико-экономических коэффициентов и констант.
4. Построение модели и ее математическая запись.
5. Кодирование перенесение информации на машинные носители, решение задачи на компьютере.
6. Анализ результатов решения, корректировка модели, повторное решение задачи на компьютере по скорректированной модели.
7. Экономический анализ различных вариантов и выбор проекта плана.

В конкретных условиях в зависимости от характера задачи последовательность этапов моделирования может изменяться.

1.2 Лекция №2 (2 часа)

Тема: «Приемы моделирования»

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Моделирование объемов ресурсов, работ, продукции
2. Моделирование условий с помощью переменных и коэффициентов
3. Моделирование с изменяющимися коэффициентами
4. Приемы сокращения числовой модели

1.2.2. Краткое содержание вопросов

1. Моделирование объемов ресурсов, работ, продукции

Приемы моделирования – это способы отражений в модели условий, зависимостей моделируемой системы.

При решении практических задач возникает множество ситуаций. Многообразие состояний моделируемых систем требует знания широкого арсенала приемов моделирования. Накопление необходимого разнообразия приемов и получение навыков умелого их применения приходят по мере приобретения опыта работы по решению оптимизационных задач. В лекции рассмотрены наиболее распространенные приемы моделирования.

<u>Моделирование объемов ресурсов, работ, продукции.</u>

<u>*Запись ограничений с не изменяющимися объемами ресурсов, работ, производимой продукции*</u>

Первое и наиболее общее ограничение для любого аграрного производства это условие, что под посевы выращиваемых культур можно отвести пашни не более чем имеется. Это условие записывается так: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq 480$,

где x_1, x_2, x_n-площади посева отдельных сельскохозяйственных культур, 480 – площадь пашни, которую можно занять под посевы.

Пусть, x_2 - площадь озимых, в этом году под озимые можно отвести не более 100 га. В модели это можно отразить как $x_2 \leq 100$.

смысл приема состоит в том, что свободный член неравенства фиксированное число – его величина в процессе решения задачи не изменяется. Этим приемом пользуются при моделировании использования производственных ресурсов, отражении в модели объемов выполняемых работ, количества поставляемой продукции, и во всех других случаях, когда моделируемая величина фиксирована.

Запись ограничений с изменяющимися объемами

На практике встречаются случаи, когда в модели производственных ресурсов, выполняемых работ или количество продукции необходимо отразить не фиксированным числом, а предусмотреть возможность их изменения в определенных пределах. Например: занять под посевы зерновых культур не менее 200 га, но не более 300; произвести не менее 5000 т картофеля, но не более 700 т. Записать эти условия одной строкой, одним линейным неравенством нельзя, здесь можно применять прием двусторонних ограничений. Запись таких условий осуществляется в виде двух ограничений с использованием соотношения типа "≥" и "≤".

В нашем примере можно записать:

по посевам зерновых: $\begin{cases} x_1 \geq 200 \\ x_1 \leq 300 \end{cases}$ по производству картофеля $\begin{cases} x_2 \geq 500 \\ x_2 \leq 700 \end{cases}$

В тех случаях, когда объем производственных ресурсов, работ или продукции частично не известен и должен быть найден, в процессе решения задачи применяют прием - введение вспомогательной переменной.

Допустим, фермер выращивает пшеницу и картофель на площади x_1, x_2 га соответственно. Ограничение по затратам труда в модели выражено соотношением $30x_1 + 400x_2 \leq 6000$, где $30x_1$ - затраты труда в человеко-часах на возделывание пшеницы; $400x_2$ - на возделывании картофеля, 6000 – запас труда членов хозяйства в человеко-часах. Необходимо в модели отразить привлечение сезонных работников на время уборки картофеля, причем объем привлекаемых трудовых ресурсов находится в процессе решения задачи. Это условие можно записать так: $30x_1 + 400x_2 \leq 6000 + x_3$, где x_3- вспомогательная переменная, обозначающая объем дополнительно привлекаемых трудовых ресурсов выраженная в человеко-часах. Если преобразовать это выражение получим: $30x_1 + 400x_2 - x_3 \leq 6000$.

2. Моделирование условий с помощью переменных и коэффициентов

Моделирование условий с помощью переменных и коэффициентов.

Запись ограничений с помощью отраженной переменной.

Для моделирования расчетных величин, которые не являются основными переменными, но необходимы для нахождения основных переменных, в модель вводят вспомогательные переменные, которые обычно отражают общее количество и получили название – отраженных переменных.

Пусть в состав стада КРС в хозяйстве входят: x_1 - поголовье коров, x_2 - поголовье нетелей, x_3 - поголовье телок, x_4 - поголовье бычков старше одного года. По условию задачи необходимо выполнить условие, что удельный вес коров в стаде может колебаться в от 40 до 50% общего поголовья стада. Данное требование можно выразить так:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_5 \\ x_1 \geq 0{,}4x_5 \\ x_1 \leq 0{,}5x_5 \end{cases},$$

где x_5 - общее поголовье стада крупного рогатого скота. После преобразования выражения примет вид:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 0{,}4x_5 \geq 0 \\ x_1 - 0{,}5x_5 \leq 0 \end{cases}$$

Запись ограничений с помощью коэффициентов пропорциональности

В модели часто приходится отражать соотношения между отдельными переменными и их группами. Это необходимо для моделирования экономических, агротехнических, зоотехнических, биологических и других особенностей производства.

Например в модели необходимо учесть, что в предприятии возможно возделывать сельскохозяйственные культуры по двум схемам севооборотов. Соотношение посевных площадей под этими севооборотами равно 1:2. Это условно может быть сформулировано в виде равенства: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{2}$, где x_1 - площадь первого севооборота, x_2 - площадь второго севооборота. Если преобразовать то имеем равенство $2x_1 = x_2$ или $2x_1 - x_2 = 0$.

Этим приемом пользуются при моделировании структуры посевных площадей, структуры стада и рационов кормления животных, баланса кормов, минеральных и органических удобрений.

3. Моделирование с изменяющимися коэффициентами

Запись условий с изменяющимися коэффициентами, числовые значения которых при разработке модели неизвестны.

Обычно в оптимизационных моделях предполагается, что значение технико-экономических коэффициентов всегда известно и их числовые значения на протяжении решения задачи не изменяются. Однако встречаются случаи, когда желательно, чтобы технико-экономические коэффициенты рассчитывались в процессе решения задачи с учетом комплекса факторов, отраженных в модели. Для этого пользуются специальными приемами моделирования, позволяющими отражать условия в модели в такой форме, которая дает возможность рассчитать значения технико-экономических коэффициентов по ходу решения задачи. Расчет ведется методами среднего взвешенного или суммирования и вычитания коэффициентов.

Метод среднего взвешенного коэффициента

Суть приема можно рассмотреть на примере, когда в модель вводится одна и та же отрасль, но с двумя уровнями урожайности и, соответственно, двумя уровнями затрат. В этом случае истинное значение урожайности находится после решения задачи путем определения средневзвешенной величины. Пусть x_1 и x_2 - площадь посева озимой пшеницы при разных уровнях производственных затрат и урожайности, допустим 18 и 25 ц с га соответственно. По каждой из переменных в ограничениях записываются соответствующие коэффициенты производственных затрат при урожайности 18 и 25 ц с га. При решении задачи возможны три варианта результатов:

$x_1 > 0, \quad x_2 = 0$ - урожайность будет равна 18 ц с га.

$x_1 = 0, \quad x_2 > 0$ - урожайность будет равна 25 ц с га.

$x_1 > 0, \quad x_2 > 0$ - урожайность следуют определять как средневзвешенную величину. Допустим в решении $x_1 = 100, \quad x_2 = 250$, урожайность в этом случае будет равна $\frac{18x_1 + 25x_2}{x_1 + x_2} = \frac{18*100 + 25*250}{100 + 250} = 23$

Метод суммирования коэффициентов.

Моделирование экономических условий с последующим расчетом истинных значений коэффициентов по методу их суммирования осуществляется с помощью введения вспомогательной переменной и вспомогательного ограничения.

Известно, что для получения удоя в 20 ц на фуражную корову должно быть затрачено 30 ц кормовых единиц. При скармливании коровам по 38 ц к. ед. удои повысятся до 35 ц. Выход кормов с 1 га кормовой площади составляет 17 ц к. ед. Необходимо рассчитать какой уровень кормления принять оптимальным.

Обозначим через x_1 - поголовье коров, через x_2 - площадь под кормовыми культурами. Тогда кормовой баланс, при минимальном уровне удоя и потреблении кормов можно выразить как: $30x_1 \le 17x_2$, где $30x_1$ - это потребление кормов, а $17x_2$ - это производство кормов.

Введем дополнительную переменную x_3, которая выражает потребность в кормах, расходуемых сверх минимального уровня. Тогда баланс кормов будет иметь вид: $30x_1 + x_3 \le 17x_2$ или $30x_1 - 17x_2 + x_3 \le 0$. Переменная x_3 должна быть ограничена, поскольку максимальный расход кормов на одну голову составляет 38 ц к.ед. разница соответственно 8 ц к. ед. это можно записать так:

$x_3 \le (38 - 30)x_1$ или $8x_1 - x_3 \ge 0$. x_3 - величина определяемая, так как может оказаться целесообразным включение в рацион дополнительных кормов. В результате решения этой задачи были получены следующие значения переменных: $x_1 = 20$ - поголовье коров, $x_2 = 40$ га – площадь под кормовыми культурами, $x_3 = 80$ ц. к. ед. – дополнительные корма. Расход кормов на одну голову составит $30 + \frac{80}{20} = 34$ ц к. ед.

До решения задачи было видно, что в модели предусматривается возможное значение этого коэффициента от 30 до 38. По решению задачи расход кормов на одну корову необходимо планировать 34 ц к. ед. Эта величина определилась суммированием минимального уровня 30 ц к. ед. и 4 ц к. ед., что представляет собой превышение сверх минимально-необходимого уровня.

Прием вычитания коэффициентов

Прием, обратный методу их суммирования. Его можно использовать, например, при моделировании случаев, когда капитальные вложения в ту или иную отрасль приводят к снижению норм затрат ресурсов, то есть значение технико-экономических коэффициентов в конечном случае уменьшается. Формально применение этого метода не представляет трудностей. Но фактически он применяется крайне редко из-за недостатка информации. На практике трудно получить достоверные данные о повышении производительности труда, при внедрении того или иного комплекса машин и механизмов, все методы таких сравнений предусматривают равенство прочих условий, а на практике такого равенства почти не бывает.

4. Приемы сокращения размеров числовой модели.

При реализации моделей с большим количеством переменных и ограничений иногда возникают трудности из-за ограниченных возможностей программы или недостаточной емкости памяти ЭВМ. Поэтому возникает потребность в сокращении размера числовой модели. В этих целях можно использовать прием агрегирования отраслей и видов деятельности или введение ограничений через единичный вектор и другие приемы.

Прием агрегирования заключается в качественном укрупнении показателей, отражающих переменные, что приводит к сокращению количества переменных в модели, а ее размер как бы сжимается. Например, скотоводство можно ввести в модель не в разрезе половозрастных групп КРС, а тремя переменными – основное стадо, молодняк, скот на откорме, или даже одной переменной – поголовье структурных коров. Для этого показателя все поголовье скота переводят в коров, затраты и выход продукции делят на поголовье коров и получают коэффициенты затрат и выхода продукции на структурную голову.

Прием ограничений через единичный вектор состоит в том, что в модель вводится единичный вектор с ограничением, гарантирующим, что в оптимальном плане этот вектор будет присутствовать. Переменные по этому вектору могут означать объем производственного ресурса, выход продукции и т.д. Например, моделируется использование земли в хозяйстве. Пастбища, естественные сенокосы, культурные пастбища в модели можно представить тремя отдельными переменными. но если исходить из предпосылки, что площадь каждого вида угодий известна и должна использоваться полностью, можно избежать этих ограничений, подсчитав по всем видам угодий общие затраты, выход кормов и отразив их через вектор по соответствующим ограничениям модели.

Прием поэтапного решения задачи.

Суть этапного решения состоит в том, что на первом этапе получают информацию, которая является входной на втором этапе и т.д.

Например, при составлении плана-прогноза развития аграрного производства в районе на первом этапе можно оптимизировать параметры типичных хозяйств, на втором – число хозяйств каждого производственного типа, их размещение – объемы производства продукции.

1.3Лекция №3 (2 часа)

Тема: «Моделирование кормового рациона»

1.3.1 Вопросы лекции:

1. Постановка задачи
2. Структурная модель
3. Исходная информация для числовой модели.

1.3.2 Краткое содержание вопросов

1. Постановка задачи.

Для успешного развития животноводства важное значение имеет организация кормовой базы. В себестоимости продукции животноводства затраты на корма занимают наибольший удельный вес (более50%). Поэтому одним из основных путей снижения себестоимости продукции животноводства является удешевление рационов кормления при высокой их питательной ценности.

Животные должны получать полноценные рационы, сбалансированные по содержанию кормовых единиц, переваримого протеина, каротина и других элементов. Кормовые рационы должны не только полностью удовлетворять потребности животных в питательных веществах, но и быть наиболее дешевыми, то есть оптимальными.

цель задачи можно выразить следующим образом: из имеющихся в сельскохозяйственном предприятии кормов составить такой рацион кормления, который полностью отвечал бы требованиям животных по содержанию в нем питательных веществ, соотношению отдельных видов и групп кормов и одновременно был самым дешевым для хозяйства. Критерием оптимальности чаще всего служит показатель минимум стоимости (себестоимости) рациона.

Основными переменными в экономико-математической задачи являются корма, имеющиеся в хозяйстве, а также корма, кормовые и минеральные добавки, которые хозяйство может приобрести. Единица измерения этих переменных являются весовые единицы – кг, ц в зависимости от периода, на который составляется, - сутки, год.

В экономико-экономической задаче, кроме основных, могут быть также вспомогательные переменные. Они чаще всего выражают суммарное количество кормовых единиц или переваримого протеина в рационе. С помощью этих переменных записывают условия по структуре рациона (удельному весу отдельных групп кормов).

Основные ограничения необходимы для записи условий по балансу питательных веществ. Технико-экономические коэффициенты в этих ограничениях обозначают содержание соответствующих питательных веществ в единице корма. Константы (объемы ограничений) показывают количество питательных веществ, которое должно содержаться в рационе.

С помощью дополнительных ограничений в задаче записывают условия по соотношению отдельных групп кормов в рационе и отдельных видов кормов внутри групп.

С помощью вспомогательных ограничений записывают условия по суммарному количеству кормовых единиц и переваримого протеина. Технико-экономические коэффициенты по основным переменным (так же, как и в основных ограничениях) отражают содержание питательных веществ в единице корма или кормовых добавок, по вспомогательным переменным минус 1. Константами в этих ограничениях являются нули.

2. Структурная модель

Введем обозначения.

j – индекс переменной;

J – множество, включающее номера переменных по видам кормов в рационе;

x_j - количество корма j-го вида, входящего в рацион;

v_{ij} - содержание i-го элемента питания в единице j-го корма;

b_i - допустимое количество i-го питательного вещества в рационе;

i – индекс ограничения;

c_j - стоимость (себестоимость) единицы корма j-го вида.

Цель задачи - составить наиболее дешевый рацион для данного вида скота, то есть минимизировать целевую функцию:

$$\sum_{j \in J} c_j x_j \to \min$$

Первая группа ограничений показываете, что рацион должен содержать питательных веществ не менее допустимого количества:

$$\sum_{j \in J} v_{ij} x_j \geq b_i \,, \quad (i \in I_1)\,,$$

где I_1 - множество, включающее номера ограничений по содержанию питательных веществ.

Вторая группа ограничений обеспечивает содержание сухого вещества в рационе не более допустимого количества:

$$\sum_{j \in J} v_{ij} x_j \leq b_i \,, \quad (i \in I_2)\,,$$

I_2 - множество, включающее номера ограничений по содержанию сухого вещества в рационе.

Третья группа ограничений обеспечивает удельный вес отдельных отдельных групп кормов в зоотехничеки допустимых пределах:

$$b_i^{'} \leq \sum_{j \in H} x_j \leq b_i^{''} \,, \quad (i \in I_3)\,,$$

H - множество, включающее номера переменных по видам кормов одной группы;

$b_i^{'}$ и $b_i^{''}$ - минимальное и максимальное допустимое количество кормов данной группы в рационе;

I_3 - множество, включающее номера ограничений по содержанию отдельных групп кормов в рационе.

Четвертая группа ограничений обеспечивает определенный удельный вес отдельных видов кормов внутри соответствующих групп кормов:

$$\sum_{j \in H} x_j \begin{Bmatrix} \geq \\ \overline{\leq} \end{Bmatrix} w_{ij} \sum_{j \in H} x_j \,, \quad (i \in I_4)\,,$$

где w_{ij} - коэффициент пропорциональности;

I_4 - множество, включающее номера ограничений по удельному весу отдельных видов кормов внутри групп.

Пятая группа ограничений – неотрицательность переменных величин:

$x_j \geq 0$, $(j \in J)$.

3. Исходная информация для числовой модели.

Для составления экономико-математической модели оптимального рациона кормления скота (птицы) необходимы следующие данные:

1. Вид или половозрастная группа скота (птицы), для которой рассчитывается рацион (кормовая смесь); живой вес одной головы; планируемая продуктивность.

2. Требуемое содержание питательных веществ в рационе, или потребность животного в зависимости от его продуктивности, живого веса, физиологического состояния (эти нормативные данные берут из справочников).

3. Предельные нормы скармливания отдельных видов и групп кормов данному виду скота (птицы) или допустимые зоотехнические нормы потребления кормов (эти данные также берут из справочной литературы).

4. Виды кормов и кормовых добавок, из которых могут быть составлены кормовые рационы (смеси).

5. Содержание питательных веществ в единице корма или кормовой добавки по всем учитываемым в задаче видам питательных веществ (эти данные берут на основе анализа кормов, проведению в агрохоимлаборатории, или из справочных таблиц по питательности кормов).

6. Стоимость (себестоимость) весовой единицы корма и добавок.

1.4 Лекция №4 (2 часа)

Тема: «Моделирование производства кормов»

1.4.1 Вопросы лекции:

1. Постановка задачи
2. Структурная модель
3. Исходная информация

1.4.2 Краткое содержание вопросов

1. Постановка задачи

Создание прочной кормовой базы – важнейшая проблема хозяйства. Одним из основных путей ее решения является внедрение оптимальной структуры кормопроизводства. Разработка экономико-математической модели предусматривает расчет площадей кормовых культур с учетом требований севооборота, экономических и технологических условий и задач, стоящих перед хозяйством.

Критерием оптимальности данной задачи является минимум посевной площадикормовых культур. Кроме того, могут использоваться критерии минимизации материально-денежных или трудовых затрат на кормопроизводство.

Возможны различные постановки задачи в зависимости от предъявляемых к ней требований. В частности, допустима постановка задачи при заданных рационах и с их оптимизацией в процессе ее решения.

Установим перечень неизвестных показателей плана кормопроизводства, которые должны быть определены в процессе решения задачи.

Составными элементами кормовой базы, как известно, являются: 1) производство кормов на пашне, 2) производство кормов на естественных угодьях, 3) покупные корма, 4) отходы товарных отраслей.

В соответствии с этим в процессе решения задачи и следует определить состав и долю каждой из перечисленных групп кормов.

Далее необходимо выяснить, какие условия влияют на состав кормовой базы, какие требования, взаимосвязи необходимо предусмотреть в модели, чтобы план являлся оптимальным с математической и с экономической точки зрения. Все условия, которые должны быть учтены при разработке экономико-математической модели оптимизации плана кормопроизводства, можно разбить на три группы: зоотехнические, агротехнические и экономические.

Зоотехнические условия включают требования:

сбалансированности кормления животных по важнейшим элементам питания (кормовым единицам, переваримому протеину и др.);

разнообразия кормов, то есть подбора таких рационов, которые отвечают биологическим потребностям животных;

равномерности поступления зеленых кормов в летний период.

Агротехнические условия требуют учета особенностей выращивания кормовых культур, их требований к предшественникам и т. д.

Экономические условия предусматривают учет объема наличных ресурсов, выделенных на кормопроизводство, возможностей покупки кормов, производственного направления и перспектив развития хозяйства.

2. Структурная модель

Переменные задачи. В процессе решения данной задачи определяются:

1. Посевные площади возделываемых в хозяйстве кормовых культур (га).
2. Площади естественных кормовых угодий по видам (га).
3. Количество покупных кормов и минеральных добавок по видам (ц).

Обозначим номера переменных, входящих в первую группу, через множество A_1; соответственно номера переменных, входящих во вторую и третью группы, – A_2 и A_3. Множество, включающее номера всех переменных задачи, обозначим А.

Критерий оптимизации имеет следующий вид:

$$\sum_{j \in A} c_j x_j \rightarrow \min,$$

где c_j - коэффициент, характеризующий затраты пашни, материально-денежных средств или труда в расчете на единицу измерения переменных.

Ограничения задачи. Система ограничений экономико-математической модели оптимизации плана кормопроизводства представляет выраженные в математическом виде зоотехнические, агротехнические и экономические условия.

Важнейшей задачей кормопроизводства является обеспечение потребностей животных основными элементами питания. Это требование вводим в модель в виде следующего неравенства:

$$\sum_{j \in A} v_{ij} x_j \geq Q_i, (i \in I_1),$$

где i – индекс элемента питания (кормовые единицы, переваримый протеин и т. д.);
j – индекс переменной;
v_{ij} – содержание i-го вида элемента питания в j-м виде корма в расчете на принятую единицу измерения;
x_j – объем производства j-го вида корма;
Q_i – общая потребность животноводства вi-м элементе питания;
I_1 – множество, включающее номера ограничений по балансам основных элементов питания

В соответствии с биологическими требованиями скота и птицы кормовой баланс должен быть не только полноценным по питательности, но и разнообразным по составу кормов. Это требование отражается в балансах отдельных групп кормов (концентрированные, грубые, сочные, зеленые и др.).

Алгебраическое выражение соответствующих ограничений имеет следующий вид:

$$\sum_{j \in A} v_{ij} x_j \geq D_i, (i \in I_2),$$

где D_i – общая потребность животноводства в i-й группе кормов;
I_2 – множество, включающее номера ограничений по балансам отдельных групп кормов.

Ограничения этой группы, как правило, вводят в модель в кормовых единицах. В отличие от остальных групп ограничение по зеленым кормам желательно дифференцировать по месяцам пастбищного периода, что позволит отыскать план, гарантирующий равномерное поступление зеленой массы в соответствии с потребностью:

$$\sum_{j \in A} v_{ijt} x_j \geq P_{it}, (i \in I_3),$$

где t – индекс месяца пастбищного периода;

P_{it} – общая потребность в зеленых кормах в t-й период, корм. ед.;

v_{ijt} – содержание питательных веществ в зеленом корме j-й культуры, используемой в t-й период;

I_3 – множество, включающее номера ограничений по зеленому конвейеру.

Оптимальная структура кормопроизводства должна определяться с учетом агротехнических и биологических особенностей отдельных кормовых культур, их требований к предшественникам и технологии производства. Взаимосвязь отдельных культур или их групп выражается следующим неравенством:

$$\sum_{j \in A_1} q'_{ij} x'_j - \sum_{j \in A_1} q''_{ij} x''_j \leq 0, (i \in I_1),$$

где $x_j^{'}$, $x_j^{''}$ – площади кормовых культур, связанных между собой технологической зависимостью;

$q_j^{'}$, $q_j^{''}$ – коэффициенты взаимосвязи культур;

I_4 – множество, включающее номера ограничений по агротехническим особенностям кормовых культур.

Если одним из элементов кормовой базы являются покупные корма, их объем должен быть ограничен в соответствии с планом приобретения хозяйством (в натуре или стоимостном выражении):

$$x_j \leq B_j, (j \in A_3),$$

где B_j—максимальный объем покупки j-го вида корма.

Важный источник получения кормов — естественные и улучшенные кормовые угодья. Однако, учитывая, что площади этих угодий ограничены, в модель необходимо ввести соответствующие неравенства.

Модель может быть дополнена группой ограничений по наличию и использованию производственных ресурсов, выделенных на кормопроизводство (труда техники средств и др.).

3.Исходная информация.

Для разработки экономико-математической модели по оптимизации кормопроизводства необходимо иметь следующую информацию:

1. Перечень кормовых культур, возделываемых в хозяйстве, их урожайность;
2. Поголовье скота и птицы, научно обоснованные нормы кормления по основным элементам питания и группам кормов;
3. Перечень и объем кормов, приобретаемых со стороны;
4. Количество побочной продукции и отходов, которое может быть использовано на корм с посевов товарных сельскохозяйственных культур;
5. Нормативные данные: содержание питательных веществ в 1 ц основной и побочной продукции, нормы потерь кормов при уборке, хранении, переработке и перевозках, стоимость единицы покупаемых кормов и др.;
6. Площадь пашни и естественных кормовых угодий по видам;
7. Допустимые в соответствии с экономическими условиями хозяйства объемы

производства отдельных кормов, нормы потребления и выход зеленых кормов в пастбищный период по месяцам.

1.5 Лекция №5 (2 часа)

Тема: «Моделирование производственной структуры аграрного предприятия»

1.5.1 Вопросы лекции:

1. Особенности постановки и формализации задачи.
2. Структурная модель.
3. Схема числовой модели и ее основные ограничения.

1.5.2 Краткое содержание вопросов

1. Особенности постановки и формализации задачи

Экономико-математическая модель оптимизации производственной структуры – одна из основных в системе моделей оптимального планирования сельскохозяйственного производства.

Оптимальная специализация и сочетание отраслей в сельскохозяйственных предприятиях предполагает такие количественные соотношения между отдельными отраслями, которые позволяют эффективно использовать землю, труд и технику, то есть получить максимум продукции при данных ресурсах и обеспечить минимум затрат на единицу продукции.

В качестве критерия оптимальности чаще других выступает чистый доход.

Формализуем задачу. Введем условные обозначения:

Индексация:

- j – номер отрасли в хозяйстве ($j = 1 \ldots n$);
- J – множество, элементы которого номера отраслей;
- J_1 - множество, элементы которого номера отраслей в растениеводстве;
- J_2 - множество, элементы которого номера отраслей в животноводстве;
- i – номер ограничения;
- I_1 – множество, элементы которого – номера ограничений по использованию сельскохозяйственных угодий;
- I_2 – множество, элементы которого – номера ограничений по использованию трудовых ресурсов;
- I_3 – множество, элементы которого номера ограничений по определению оптимальных объемов производственных затрат;
- I_4 – множество, элементы которого – номера ограничений по органическим удобрениям;
- I_5 – множество, элементы которого – номера ограничений по кормовым ресурсам;
- I_6 – множество, элементы которого – номера ограничений по гарантированным объемам производства;
- I_7 – множество, элементы которого – номера ограничений, учитывающих агробиологические особенности производства.

Известные величины:

a_{ij} – коэффициенты затрат *i-го* вида ресурсов на единицу измерения по j-тому виду деятельности;

V_{ij} – коэффициенты выхода продукции *i-го* вида в расчете на единицу j-го вида деятельности;

B_i – объемы производственного ресурса i-го вида;

$V_{ij} = q_{ij}d_j$ по кормовым культурам, где

q_{ij} – содержание *i-го* вида питательного вещества в единице j-го корма;

d_j – доля продукции $j^{й}$ культуры используемая на корма;

Q_i – гарантированный объем производства *i-го* вида продукции;

C_j – денежное выражение товарной продукции, получаемой в расчете на единицу измерения j-го вида деятельности;

c_i – цена реализации продукции на особых условиях поставки;

$W^{/}_{ij}$, $W^{//}_{ij}$ – коэффициенты связки, для отражения агробиологических особенностей производства.

Например: размещение посевов по предшественникам.

Переменные величины:

x_j – искомое значение размеров отраслей и интенсивности $j^{го}$ вида деятельности;

$\bar{x}_i$ - искомое значение производственных затрат.

2. Структурная модель

Требуется найти:

$$C = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \bar{x}_i \rightarrow \max \qquad (1)$$

(где *i* при $\bar{x}_i$ принадлежит I_3)

При условиях:

1. Использование сельскохозяйственных угодий.

$$\sum_{j \in J_1} a_{ij} x_j \le B_i \quad где\, i \in I_1 \qquad (2)$$

Условия этого вида гарантируют, что земельных ресурсов потребуется не больше чем их имеется. a_{ij}- *равно 1, если* x_j *измеряется в га, или обратному показателю урожайности, если* x_j *измеряется в ц.*

Обычно ограничения этой группы учитывают несколько условий – использование пашни различного качества, сенокосов и пастбищ различной продуктивности, орошаемых и неорошаемых земель.

2. Использование трудовых ресурсов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le в_i \qquad где \quad i \in I_2 \qquad (3)$$

Это условие обычно представляется несколькими ограничениями по наиболее напряженным периодам работ и в целом на весь период.

Иногда возникает необходимость в определении целесообразности привлечения в отдельные периоды дополнительных трудовых ресурсов. Тогда вводится переменная, искомое значение которой – количество привлекаемых ресурсов труда в отдельные периоды.

3. Производственные затраты:

$$\sum_{J=1}^{n} \mathrm{a}_{ij} x_j = \bar{x}_i \quad где \quad i \in I_3 \qquad (4)$$

или после преобразования: $\sum_{J=1}^{n} \mathrm{a}_{ij} x_j - \bar{x}_i = 0$

С помощью этих ограничений можно определить оптимальную структуру и объемы производственных затрат всех видов. Однако в целевой функции представлены только суммарные денежно-материальные затраты.

4. Использование органических удобрений:

$$\sum_{J \in J_1} a_{ij} x_j \leq \sum_{j \in J_2} v_{ij} x_j \qquad где i \in I_4 \tag{5}$$

Левая часть ограничений представляет собой расход органических удобрений в растениеводческих отраслях, а правая – объем его выхода в отраслях животноводства. Ограничения этого вида гарантируют, что органических удобрений потребуется растениеводству не больше, чем будет их получено в животноводстве.

после преобразования: $\sum_{J \in J_1} a_{ij} x_j - \sum_{j \in J_2} v_{ij} x_j \leq 0$

5. Производство и использование кормов.

Обычно ограничения по этим условиям формируют оптимальный кормовой баланс для каждого вида животных и птицы. Модель этого процесса рассматривается в отдельной лекции.

Часто в модель предусматривают только балансирование по отдельным видам питательных веществ.

$$\sum_{j \in J_2} a_{ij} x_j \leq \sum_{j \in J_i} v_{ij} x_j + в_i \qquad где \quad i \in I_5 \tag{6}$$

где $В_i$ – наличие кормов в хозяйстве.

В левой части показан расход кормов в животноводстве.

В правой части ограничения представлен объем производства кормов и их наличие в хозяйстве.

Производство кормов можно показать и более детально. Если вместо v_{ij} записать их значения $q_{ij}d_j$, то $\sum_{j \in J_i} q_{ij} d_j x_j$ – объем производства кормов в питательном веществе, например, производство белка.

В целом условие предусматривает, что животноводству потребуется кормов не больше, чем будет произведено растениеводством плюс наличный объем кормов.

После преобразования: $\sum_{j \in J_2} a_{ij} x_j - \sum_{j \in J_i} v_{ij} x_j + в_i \leq 0$

6. Гарантированные объемы производства. Объемы производства сельскохозяйственной продукции, обеспечивающие выполнение договорных обязательств и внутрихозяйственную потребность, минимально допустимый уровень концентрации поголовья скота и птицы и т.д. $\sum_{j=1}^{n} v_{ij} x_j \geq Q_i \qquad где \quad i \in I_6$ (7)

В правой части показан гарантированный объем производства продукции и реализация продукции сельского хозяйства. В левой части – производство этой продукции.

7. Условия по соотношению размеров производства по отдельным видам деятельности. Запись условий по агробиологическим особенностям производства, условия севооборотов, размещение культур по предшественникам, зеленый конвейер, повторные посевы и т.п.

$$\sum_{j \in J} W_{ij}^{/} x_j \leq \sum_{j \in J} W_{ij}^{//} x_j \quad где i \in I_7 \tag{8}$$

8. Условия неотрицательности переменных $x_{ij} \geq 0$; $\bar{x}_i \geq 0$ (9)

Здесь приведены основные типы ограничений задачи оптимизации производственной структуры. При решении конкретных задач все они включаются в модель, однако, кроме этого требуется в модели отразить и специфику предприятия, его производственное направление, стратегию ведения хозяйства, особенности местных условий. Например, модель зернового хозяйства и модель специализированного молочного хозяйства требуют разной инфраструктуры.

3. Схема числовой модели и ее основные ограничения

Схема числовой модели

Номер огранич.	Ограничения	Переменные				Тип ограничений	Св. члены
		x $J \in J_1$	x $j \in J_2$		$\bar{x}_i$		
I_1 1	Использование сельхоз угодий	a_{ij}				$\leq$	B_i
I_2	Использование трудовых ресурсов	a_{ij}	a_{ij}			$\leq$	B_i
I_3	Производственные затраты	$-a_{ij}$	$-a_{ij}$		+1	=	0
I_4	Использование органических удобрений	a_{ij}	$-v_{ij}$			$\leq$	0
I_5	Производство и использование кормов	v_{ij}	$-a_{ij}$			$\geq$	0
I_6	Гарантированные объемы производства	v_{ij}	v_{ij}			$\geq$ = $\leq$	Q_i Q_i Q_i
I_7	Условия по соотношению размеров	W'_{ij}	W''_{ij}				
	Целевая функция C	C_j	C_j	C_j	-1	$\rightarrow$	max

В числовой модели задачи оптимизации производственной структуры предприятия обычно представляются следующие ограничения:

1. баланс пашни;
2. использование сенокосов;
3. использование пастбищ;
4. баланс труда всего;
5. баланс труда в напряженный период сельскохозяйственных работ;
6. баланс кормовых единиц и переваримого протеина в кормах стойлового периода;
7. баланс кормовых единиц и переваримого протеина в кормах летнего периода;
8. баланс концентрированных кормов;
9. баланс грубых кормов;
10. дополнительные ограничения по соотношению в грубых кормах сена и соломы;
11. баланс кормов группы корнеплодов;
12. баланс силосных кормов;
13. баланс зеленых кормов;
14. ограничения балансирующие потребность в зеленых кормах по периодам (декады, месяцы);
15. баланс органических удобрений;

16. ограничения по специализации. Их можно задать в виде гарантированных объемов производства отдельных видов продукции, предусмотрев необходимые или минимальные уровни концентрации производства;
17. группа ограничений которыми записываются агротехнические требования;

например: посев озимых культур не должен превышать площади пара или 11-16% севооборота;

- площадь зерновых не должна превышать 70% паншни.

1.6 Лекция №6 (2 часа)

Тема: «Моделирование использования средств механизации»

1.6.1 Вопросы лекции:

1. Постановка и формализация задач.

2.Экономико- математические модели.

3. Исходная информация и особенности построения числовой модели задачи.

1.6.2 Краткое содержание вопросов

1. Постановка и формализация задачи.

Для этой аудитории я думаю излишне говорить о роли техники в развитии сельского хозяйства. Эпоха трактора и автомобиля еще не закончилась. Судьба планов развития , как и экономические показатели производства во многом представляются составом и состоянием использования техники.

Любому хозяйству на практике приходится определять потребность в технике. Эта задача решается каждым хозяйством, независимо от того хорошо или плохо оно работает. Причем потребность в технике определяется как на текущий период, так и на перспективу.

Определение потребности в технике состоит в выборе такого состава МТП и такого плана его использования, при котором обеспечивается выполнение всех заданных объемов работ в положенные сроки с минимальными общими затратами.

Здесь выделяется три момента:

- потребность хозяйства в технике для выполнения заданного объема работ;
- требование выполнения работ в срок;
- требование выполнения работ с min затратами.

Нетрудно убедится, что игнорирование любого из трех требований, как и абсолютизация любого из них, может привести к абсурдным результатам.

Например. всю пашню любого хозяйства можно вспахать одним трактором.

В условиях конкретного хозяйства встречаются **<u>три варианта</u>** постановки задачи оптимизации состава МТП.

1. Задача определения оптимального состава МТП при условии, что в хозяйстве полностью отсутствуют машины, то есть задача **комплектования** парка, или наиболее целесообразного его приобретения.

Такая постановка возникает у всех вновь образованных хозяйств.

2. Задача определения оптимального состава МТП при условии, что некоторый парк машин в хозяйстве уже имеется , то есть задача **доукомплектования** имеющегося парка.

Это самый распространенный вариант задачи, так как и техника постоянно совершенствуется , производство тоже не стоит на месте. Парк стареет и физически отслужившие машины требует замены новыми.

3. Задача определения плана наилучшего использования имеющегося в хозяйстве парка машин, при условии, что хозяйство не имеет возможности закупать новые машины. Отслужившие срок машины можно списывать.

При кажущейся искусственности постановки задача все же встречается не так уж редко. Не всегда имеются возможности купить нужные машины - или нужных машин нет, или купить не за что.

С экономической точки зрения наиболее обоснованным критерием оптимизации состава машинно-тракторного парка является минимум приведенных затрат на производство данных работ. приведенные затраты представляют собой сумму текущих затрат на содержание и эксплуатацию МТП и его балансовой стоимости, умноженной на нормативный коэффициент эффективности, который представляет собой величину обратную сроку окупаемости.

Иногда в качестве критерия оптимальности используют показатель - min машин;

- min расход горючего;

- - min эксплуатационных расходов;

Рассмотрим каждую из трех названных задач.

2. Экономико-математические модели.

Модель оптимального комплектования МТП

Предположим, что парк комплектуется заново из возможных марок тракторов и сельскохозяйственных машин.

Пусть:

m- количество марок тракторов и сельскохозяйственных машин из которых будет комплектоваться МТП.

Напомню, что международная система машин для комплексной механизации сельского и лесного хозяйства в странах СЭВ включает 1035 названий машин. а с учетом всех модификаций - 2446 названий.

"Правда" 15 сентября 1986 года.

Номера марок машин обозначим через i. Значит i-(1,2,3,...i...m)

n- количество всех сельскохозяйственных работ выполняемых в данном хозяйстве с помощью сельскохозяйственных машин и тракторов.

j- номер механизированной работы;

t - номера, T - количество расчетных периодов, на которые следует разбить весь срок, отведенный на выполнение всего комплекса работ;

P_{it}- объем работы j за период t;

k - номера, а K- количество всех возможных агрегатов в хозяйстве;

a_K- производительность агрегата k на работе j за период t;

x_K- количество агрегатов с номером k, требующихся для выполнения работы j за период t;

x_i - количество машин марки i которое необходимо купить;

b_{ikj} - количество машин марки i входящих в агрегат k выполняющих, выполняющих работу j;

β - нормативный коэффициент капитальных вложений;

c_i - балансовая стоимость машин марки i ;

p_i - стоимость содержания машин марки i ;

c_{kjt} - прямые затраты на один агрегат k, выполняющих работу j ;

Запишем структурную модель.

Требуется найти min $C = \sum_{i=1}^{T} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{K} c_{kjt} x_{kjt} + \sum_{i=1}^{m} (\beta c_i + p_i) x_i \to \min$ (1)

При условиях:

1. Условие, гарантирующее выполнение всего заданного объема работ.

$$\sum_{k=1}^{K} a_{kjt} x_{kjt} = P_{jt}, \quad \text{где } j = 1 \ldots n, t = 1 \ldots T \tag{2}$$

2. Условие, что каждый данный момент потребуется машин марки i для выполнения работ периода не больше, чем их будет куплено.

$$\sum_{j \in J_1} \sum_{k=1}^{K} b_{ikj} x_{kjt} \le x_i, \quad \text{где } i = 1 \ldots m, t = 1 \ldots T \tag{3}$$

J_t- множество, которому принадлежат работы, выполняемые за период t.

3. Условие неотрицательности переменных.

$$X_i \ge 0 \quad X_{kjt} \ge 0 \tag{4}$$

Модель оптимального доукомплектования машинно-тракторного парка.

Предположим, что хозяйство имеет некоторый парк машин, располагает возможностью приобретать новые машины. требуется найти, сколько и каких машин требуется купить, чтобы выполнить весь объем работ в положенные сроки с наименьшими затратами.

Введем дополнительные обозначения:

y_i - количество машин марки i, которое следует списать;

d_i - количество машин марки i, которое имеется в хозяйстве;

p'_i - остаточная стоимость одной машины марки i при снятии ее с баланса.

Модель должна предусматривать возможность списания отслуживших срок машин.

Используя принятые обозначения, запишем структурную модель:

Найти min функции:

$$C = \sum_{i=1}^{T} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{K} c_{kjt} x_{kjt} + \sum_{i=1}^{m} \beta(c_i + p_i) x_i - \sum_{i=1}^{m} p'_i y_i \to \min \tag{1}$$

При условиях:

1. Выполнения заданного объема механизированных работ.

$$\sum_{k=1}^{K} a_{kjt} x_{kjt} = P_{jt}, \quad \text{где } j = 1 \ldots n, t = 1 \ldots T \tag{2}$$

2. Условие, что в каждый период потребуется машин марки i не больше чем имеется в хозяйстве, плюс будет куплено, минус будет списано.

$$\sum_{j \in J_1} \sum_{k=1}^{K} b_{ikj} x_{kjt} \le d_i + x_i - y_i, \quad \text{где } i = 1 \ldots m, t = 1 \ldots T \tag{3}$$

3. Условие неотрицательности переменных.

$$X_i \ge 0, \quad X_{kjt} \ge 0, \quad y_i \ge 0. \tag{4}$$

Модель оптимального использования МТП

Напомню постановку задачи.

Хозяйство располагает достаточным парком машин и не располагает возможностью покупать новые машины. Задача заключается в том, чтобы определить такой план использования имеющегося парка, при котором обеспечивается выполнение всего заданного комплекса работ в установленные сроки с минимальными эксплуатационными затратами.

Модель должна предусматривать возможность списания старых машин.

Структурная модель задачи оптимизации использования МТП (иногда её называют задачей распределения имеющейся техники, подразумевая распределение техники по видам работ) .может быть представлена так:

$$C = \sum_{i=1}^{T} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{K} c_{kjt} x_{kjt} - \sum_{i=1}^{m} p'_i y_i \to \min \qquad (1)$$

При условии:

1. Условие выполнения объема работ:

$$\sum_{k=1}^{K} a_{kjt} x_{kjt} = P_{jt}, \quad \text{где } j = 1...n, t = 1...T \qquad (2)$$

2. $$\sum_{j \in J_1} \sum_{k=1}^{K} b_{ikj} x_{kjt} \le d_i - y_i, \quad \text{где } i = 1...m, t = 1...T \qquad (3)$$

Условие , что количество машин выполняющих работу в любой период не будет превышать имеющихся в хозяйстве машин с учетом их списания.

3. Условие неотрицательности переменных

$$X_{kjt} \ge 0, \quad y_i \ge 0. \qquad (4)$$

При внимательном рассмотрении не трудно заметит, что все три модели однотипны, и что первая и третья являются частными случаями задачи доукомплектования парка.

3. Исходная информация и особенности построения числовой модели.

Для решения задачи оптимизации состава МТП требуется следующая информация:

1. объем механизированных работ по отдельным технологическим операциям;
2. агротехнические сроки проведения механизированных работ;
3. цены на таратора, автомобили, сельскохозяйственные машины;
4. нормы выработки на механизированные работы;
5. прямые эксплуатационные затраты по видам работ и способам их выполнения.

Задача оптимизации состава МТП имеет ряд особенностей:

1. Данную задачу следует составлять только после оптимизации отраслевой структуры предприятия.

2. Определяющим моментом задачи являются сроки проведения механизированных работ. Значит, задачу можно составлять только тогда, когда отработана перспективная технология для каждой культуры, учитывающая новые типы тракторов и машин.

3. Размер задачи зависит от сроков выполнения работ и числа расчетных периодов.

Так, если за расчетный период принять один день, то задача будет на столько громоздкой, что ее будет трудно, а то невозможно реализовать даже на самых мощных ЭВМ.

Поэтому при практической разработке стремятся к выбору более длительных периодов и сокращению их числа . Обычно в практических задачах стремятся выделить периоды:

- весеннего посева;
- ухода за растениями;
- уборки;
- послеуборочная обработка почв.

Иногда за период принимают пятидневку, но задачу решают по напряженным периодам года.
4. Существует много разновидностей модели оптимизации состава МТП, но все они однотипны, отличаются в основном критериями оптимизации и особенностями формирования отдельных условий.
5. Числовая модель задачи имеет большой размер, но малую плотность. Практически плотность всегда меньше 10%. Модель содержит большой удельный вес постоянной информации для зоны, района.
6. Задача относится к классу целочисленных, поскольку тракторы и сельскохозяйственные машины нельзя дробить. Есть специальные методы решения таких задач, можно поступить просто - дробные результаты решения округлить до целых чисел.

1.7 Лекция №7 (2 часа)

Тема: «Моделирование посевов и использования удобрений»

1.7.1 Вопросы лекции:

1. Моделирование размещения посевов по участкам земли различного плодородия.
2. Моделирование севооборотов.
3. Моделирование использования минеральных удобрений

1.7.2 Краткое содержание вопросов

1. Моделирование размещения посевов по участкам земли различного плодородия.

Задача оптимизации структуры посевных площадей может рассматриваться и как составная часть планирования производства предприятия, где она моделируется во взаимосвязи с животноводством и как самостоятельная задача. Разработка самостоятельной задачи оптимизации структуры посевных площадей имеет практический смысл, когда рассматривается задача размещения посевов по участкам земли различного плодородия, размещение зерновых культур в зерновом севообороте, кормовых культур в кормовом севообороте и.д.

Рассмотрим отдельные постановки задачи размещения и структуры посевов.

Для определения оптимального размещения посевов по отдельным участкам земли различного плодородия может быть применен распределительный метод. Задачу можно разработать на основе транспортной зпдачи.

Сформулировать задачу можно так: требуется разместить посевы сельскохозяйственных культур по участкам земли так, чтобы посевные площади по всем культурам равнялись плановым объемам, все пашни должны быть заняты под посев при этом стоимость валовой продукции была бы максимальной.

В качестве критерия оптимальности в этой задачи можно принять максимум стоимости валовой продукции сельского хозяйства, чистый доход, прибыль.

Введем условные обозначения:

m – число участков земли;

i – номер участков земли;

n – число культур;

j –номера культур;

S_i - площадь i-го участка;

S_j -площадь отведенная под j-ю культуру;

c_{ij} - стоимость j-й продукции с одного гектара i-го;

x_{ij} - площадь посева j-й культуры на ii-том участке.

Структурная модель задачи:

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \max$$

при условиях:

1. Первое условие обеспечивает, что площадь посева всех культур на каждом участке будет равна его площади.

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = S_i$, где i=1…m.

2. Второе условие гарантирует, что под каждую культуру будет отведена плановая площадь.

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = S_j$, где j=1…n.

3. Третье условие обеспечивает равенство имеющейся земли и площади посевов всех сельскохозяйственных культур.

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} S_j$$

1. Условие неотрицательности переменных:

$$x_{ij} \geq 0$$

Числовая модель составляется по типу транспортной задачи, то есть заполняется платежная матрица, по строкам размещаются участки, а по столбцам культуры. Задача имеет практический смысл решения лишь тогда, когда фактически имеются участки различного плодородия.

2. Моделирование севооборотов.

Уточним понятие севооборота. Под севооборотом понимают площадь земли с обоснованным чередованием культур во времени и пространстве.

Стоит задача: определить площадь севооборотов хозяйства, которая обеспечивала бы размещение плановых посевных площадей на севооборотной площади и позволяла получить максимальный экономический эффект.

За критерий оптимальности можно принять максимум прибыли, чистого дохода, валового дохода, стоимости валовой продукции.

Формализация задачи.

n – количество севооборотов различных видов, введение которых возможно в данных условиях;

j – номера севооборотов;

i – номера культур;

m – количество культур;

x_j - площадь J-го севооборота в гектарах;

c_j - прибыль, чистый или валовой доход, стоимость валовой продукции с одного гектара в j-том севообороте;

β_{ij} - доля посевов I-й культуры в j-том севообороте;

S_i - общая заданная площадь посева I-й культуры;

S – площадь пашни в хозяйстве.

Структурная модель:

$$C = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

при условиях:

1. первое условие обеспечивает посев плановой площади по каждой культуре

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} x_j = S_i \text{, где i=1…m}$$

2.Второе условие предусматривает, что для вводимых севооборотов потребуется площади пашни не больше, чем ее имеется в хозяйстве.

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \le S$$

3. Условие неотрцательности переменных

$$x_{ij} \ge 0\ .$$

3. Моделирование использования минеральных удобрений

Пусть в хозяйстве имеется некоторое количество минеральных удобрений, требуется найти такой план их использования, который обеспечивал бы максимальную прибавку урожая.

По сути речь идет о распределении между культурами.

Формализуем задачу:

a_{ij} - норма внесения действующего вещества i-го вида для получения единицы прибавки урожая j-й культуры;

$в_к$ - количество удобрений к- го вида (в натуре), имеющееся в хозяйстве (к=1…К);

q_{ik} - содержание i-го действующего вещества в единице к-го удобрения;

c_j -цена единицы j-й продукции;

x_j - количество полученной прибавки j-й продукции за счет внесения минеральных удобрений;

Q_j - максимально-возможный объем прибавки j-ой продукции за счет внесения минеральных удобрений – при данной площади посева j-й культуры.

Целевая функция.

$$C = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

Так максимизируется прибавка урожая в денежном выражении:

При условиях:

1. Расход действующего вещества ii-го вида для получения всей прибавки урожая по j-й культуре не должны превышать наличия действующего вещества i-го вида в к-том удобрении

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} xj \leq \sum_{\kappa=1}^{K} q_{ik} в_{\kappa}$$

По сути ограничения данного вида сводят баланс по действующему веществу. Это прежде всего баланс азота, калия, фосфора и т.п.

2. Нижний и верхний пределы изменения переменной

$$0 \leq x_j \leq Q_j .$$

Эффективность удобрений зависит не только от культуры, под которую оно вносится, но т и от характера удобряемого участка, то есть от наличия действующего вещества в почке.

Доказана зависимость прибавки урожая от способа внесения удобрений.

Рассмотрим модель с этими ограничениями.

Пусть р – номера, а Р – количество способов внесения минеральных удобрений.

r - номера, а R – количество участков земли, отличающихся по содержанию питательных элементов в почве.

Модель имеет вид:

$$C = \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{R} \sum_{p=1}^{P} c_j x_{jrp} \to \max$$

При условии:

1. $\sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{R} \sum_{p=1}^{P} a_{ij} xj \leq \sum_{\kappa=1}^{K} q_{ik} в_{\kappa}$

2. $0 \leq x_{jrp} \leq Q_{jrp}$

Нетрудно заметить, что введение ограничений по учету способов внесения минеральных удобрений, характера удобряемого участка не усложнили модель. Два типа ограничений остались, возросло лишь число индексов. Естественно, потребуется новая входная информация, но заметно возрастает и выходная информация, будуд получены новые, более ценные сведения. Здесь в качестве примера показано, как учесть дополнительные условия в модели. По такому же принципу можно учесть сроки внесения минеральных удобрений.

1.8 Лекция №8 (2 часа)

Тема: «Функции полезности»

1.8.1 Вопросы лекции:

1. Определение функции полезности и ее свойства.
2. Решение задачи потребительского выбора.

1.8.2 Краткое содержание вопросов

1. Определение функции полезности и ее свойства.

Потребитель располагает доходом I, который он полностью тратит на приобретение благ. Цены благ считаются заданными. Учитывая структуру цен, доход и собственные предпочтения, потребитель приобретает определенное количество благ и математическая модель такого его поведения называется моделью потребительского выбора. Рассмотрим модель с двумя видами благ. Такая модель удобна прежде всего возможностью графической интерпретации, сохраняя при этом все принципиальные свойства общей модели.

Рассмотрим потребительские наборы их двух благ. Потребительский набор - это вектор (x_1,x_2), координата x_1 которого равна количеству единиц первого блага, а координата x_2 равна количеству единиц второго блага. Выбор потребителя характеризуется отношением предпочтения, суть которого состоит в том, что потребитель про каждые два набора может сказать, что, либо один из них более желателен, чем другой, либо потребитель не видит между ними разницы.

На множестве потребительских наборов (x_1,x_2) определена функция u(x_1,x_2), значение которой на потребительском наборе (x_1,x_2) равно потребительской оценке индивидуума для этого набора. Эта функция называется функцией полезности.

Свойства функции полезности:

1) Возрастание потребления одного продукта при постоянном потреблении другого продукта ведет к росту потребительской оценки. т.е. если $x_1 + \Delta x_1 > x_1$, то $u(x_1 + \Delta x_1, x_2) > u(x_1, x_2)$.
если $x_2 + \Delta x_2 > x_2$, то $u(x_1, x_2 + \Delta x_2) > u(x_1, x_2)$.

$$\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1} = u_1^{'} > 0, \qquad \frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2} = u_2^{'} > 0$$

Первые частные производные называются предельными полезностями продуктов: $u_1^{'}$-предельная полезность первого продукта, $u_2^{'}$- предельная полезность второго продукта. Для предельных полезностей используется также символика $M_1u(x_1,x_2)$, $M_2u(x_1,x_2)$.

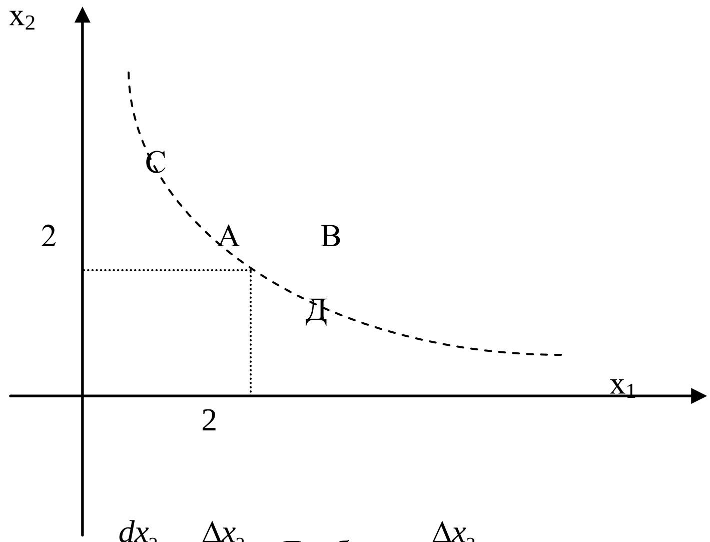
2) Предельная полезность каждого продукта уменьшается, если объем его потребления растет (это свойство предельной полезности называется законом убывающей предельной полезности).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^{\ 2}} = u_{11}^{''} < 0 \ , \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^{\ 2}} = u_{22}^{''} < 0 .$$

3) Предельная полезность каждого продукта увеличивается, если растет количество другого продукта. В этом случае продукт, количество которого фиксировано, оказывается относительно дефицитным. Поэтому дополнительная его единица приобретает большую ценность и может быть потреблена более эффективно. Данное свойство справедливо не для всех благ.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = u_{12}^{''} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} = u_{21}^{''} > 0$$

Линия, соединяющая потребительские наборы (x_1,x_2), имеющие один и тот же уровень удовлетворения потребностей индивидуума, называется ***линией безразличия***. Линия безразличия есть не что иное, как линия уровня полезности, множество линий безразличия называется картой линий безразличия. Линии безразличия не касаются и не пересекаются. Чем "северо-восточнее" расположена линия безразличия, тем большему уровню удовлетворения потребности она соответствует.

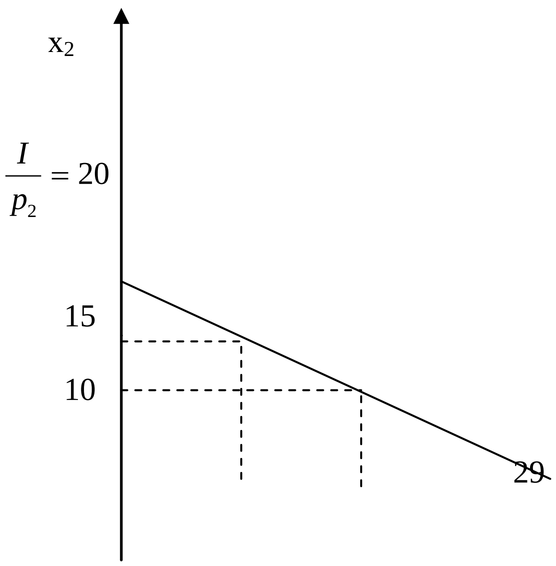


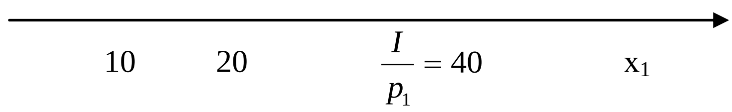
Величина $\frac{dx_2}{dx_1} \approx \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$. Дробь - $\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ принято называть нормой замены первого продукта вторым на потребительском наборе (x_1,x_2), а производную - $\frac{dx_2}{dx_1}$ - предельной нормой замены первого продукта вторым.

2. Решение задачи потребительского выбора.

Задача потребительского выбора (задача рационального поведения потребителя на рынке) заключается в выборе такого потребительского набора (x_1,x_2), который максимизирует его функцию полезности при заданном бюджетном ограничении.

Чтобы понять, как бюджет ограничивает выбор потребителя, рассмотрим ситуацию, когда женщина располагает фиксированным доходом I, который может быть потрачен на два вида товаров – продукты питания и одежду. x_1 – количество продуктов питания, x_2 – количество предметов одежды, p_1 и p_2 - рыночные цены товаров, тогда p_1x_1 - сумма денег, затраченных на питание, а p_2x_2 - на одежду. Все сочетания x_1 и x_2, при которых сумма затрат меньше или равна доходу будут соответствовать бюджетному ограничению. Если предположить, что расходы равны бюджету, то должно выполняться равенство $p_1x_1 + p_2x_2 = I$, иначе говоря, комбинации продуктов и одежды, которые может приобрести женщина будут лежать на прямой, которая называется бюджетной линией.





Допустим, доход женщины. составляет 400 руб., цена продуктов питания 10 руб. за единицу, а цена одежды 20 руб. за единицу, тогда на эту сумму она могла бы купить 10 единиц продуктов питания и 15 единиц одежды (10*10+15*20=400) или 20 единиц продуктов питания и 10 единиц одежды (20*10+10*20=400) . Если она решила весь бюджет потратить только на один вид продуктов, то самое большее, что она смогла бы купить - это 40 единиц продуктов питания (400/10=40) или 20 единиц одежды.

Бюджетное ограничение означает, что денежные расходы на продукты не могут превышать денежного дохода, т.е. $p_1x_1 + p_2x_2 \le I$, где p_1 и p_2 - рыночные цены одной единицы первого и второго продуктов, а I - доход индивидуума, который он готов потратить на приобретение первого и второго продуктов.

Формально задача потребительского выбора имеет вид:

$$u(x_1, x_2) \to \max$$

при условиях $p_1x_1 + p_2x_2 \le I$,

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$

В приведенной постановке задача потребительского выбора является задачей нелинейного программирования.

Набор (x_1,x_2), максимизирующий функцию полезности, должен обращать бюджетное ограничение в равенство, т.е. $p_1x_1 + p_2x_2 = I$. Графически это означает, что решение задачи потребительского выбора должно лежать на бюджетной прямой. Мы также будем считать, что условие неотрицательности в оптимальной точке будет выполняться автоматически.

Итак, задачу потребительского выбора можно заменить задачей на условный экстремум (экстремум – это минимальное и максимальное значение функции).

$$u(x_1, x_2) \to \max$$

при условиях $p_1x_1 + p_2x_2 = I$,

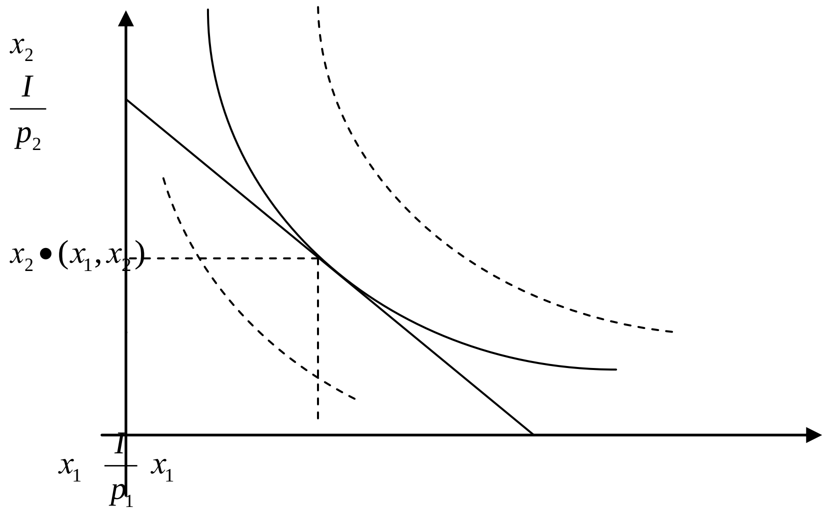
для решения этой задачи возможно применение метода Лагранжа, в результате получим систему двух уравнений с двумя неизвестными x_1и x_2

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{u_1'}{u_2'} = \dfrac{p_1}{p_2}, \\ p_1x_1 + p_2x_2 = I . \end{array}\right\}$$

Подставив решение (x_1,x_2), в левую часть равенства

$\dfrac{u_1'(x_1, x_2)}{u_2'(x_1, x_2)} = \dfrac{p_1}{p_2}$,получим, что в точке ($x_1$,$x_2$), локального рыночного равновесия отношение предельных полезностей равно отношению рыночных цен на эти продукты.

Геометрически решение можно интерпретировать как точку касания линии безразличия функции полезности $u(x_1, x_2)$ с бюджетной прямой $p_1x_1 + p_2x_2 = I$.



Координаты x_1 и x_2 решения задачи потребительского выбора есть функции параметров p_1, p_2 и I:

$$x_1 = x_1(p_1, p_2, I),$$

$$x_2 = x_2(p_1, p_2, I)$$

полученные функции называются функциями спроса на первый и второй продукт. Важным свойством функций спроса является их однородность относительно цен и дохода, т.е. значение функций спроса инвариантны по отношению к пропорциональным изменениям цен и дохода.

$$x_1(\alpha p_1, \alpha p_2, \alpha I) = x_1(p_1, p_2, I),$$

$$x_2(\alpha p_1, \alpha p_2, \alpha I) = x_2(p_1, p_2, I)$$

для любого числа $\alpha>0$. Это означает, что если все цены и доход изменятся в одно и тоже число раз, величина спроса на продукт (первый или второй – безразлично) останется неизменной.

1.9 Лекция №9 (2 часа)

Тема: «Функции спроса»

1.9.1 Вопросы лекции:

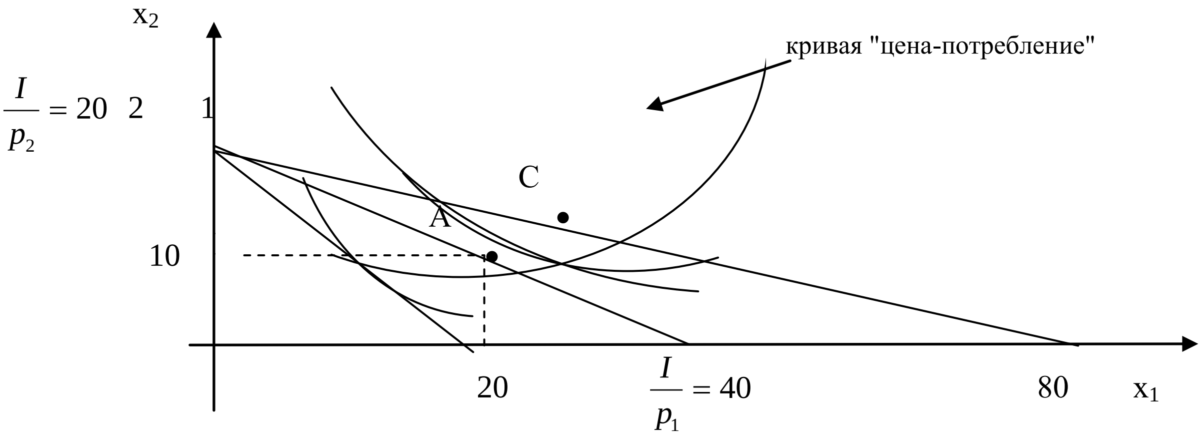
1. Изменение цен. Изменение дохода.
2. Эффекты компенсации. Уравнение Слуцкого

.

1.9.2 Краткое содержание вопросов

1. Изменение цен. Изменение дохода.

Рассмотрим то, как меняется потребление товаров под влиянием изменения цен. Вернемся к задаче рассмотренной в предыдущей лекции про продукты питания и одежду. Напомню, что первоначальная цена продуктов питания (x_1) составляла 10 руб. за единицу, цена одежды (x_2) – 20 руб. за единицу, Доход был равен 400 руб. Решение задачи потребительского выбора находится в точке А. Здесь потребитель приобретает 20 единиц продуктов питания (x_1=20) и 10 единиц одежды (x_2=10)



Предположим, что цена на продукты питания возросла и составила 20 руб. Тогда изменился и угол наклона бюджетной линии ($\frac{I}{p_1} = \frac{400}{20} = 20$). Потребитель теперь достигает максимальной полезности в точке В, которая расположена на кривой безразличия 2. так как цена продуктов питания поднялась , покупательная способность потребитель достигаемая полезность снизились). Так в точке В покупатель выбирает 10 единиц продуктов питания и 13 единиц одежды. Что произойдет когда цена на продукты питания снизится до 5 рублей? Угол наклона бюджетной линии опять изменится ($\frac{I}{p_1} = \frac{400}{5} = 80$) и потребитель выберет точку С соответствующую более высокому уровню полезности (30 единиц продуктов питания и 15 единиц одежды).

Линия, соединяющая максимально-полезные наборы продуктов при каждом изменении цены называется кривой "цена-потребление".

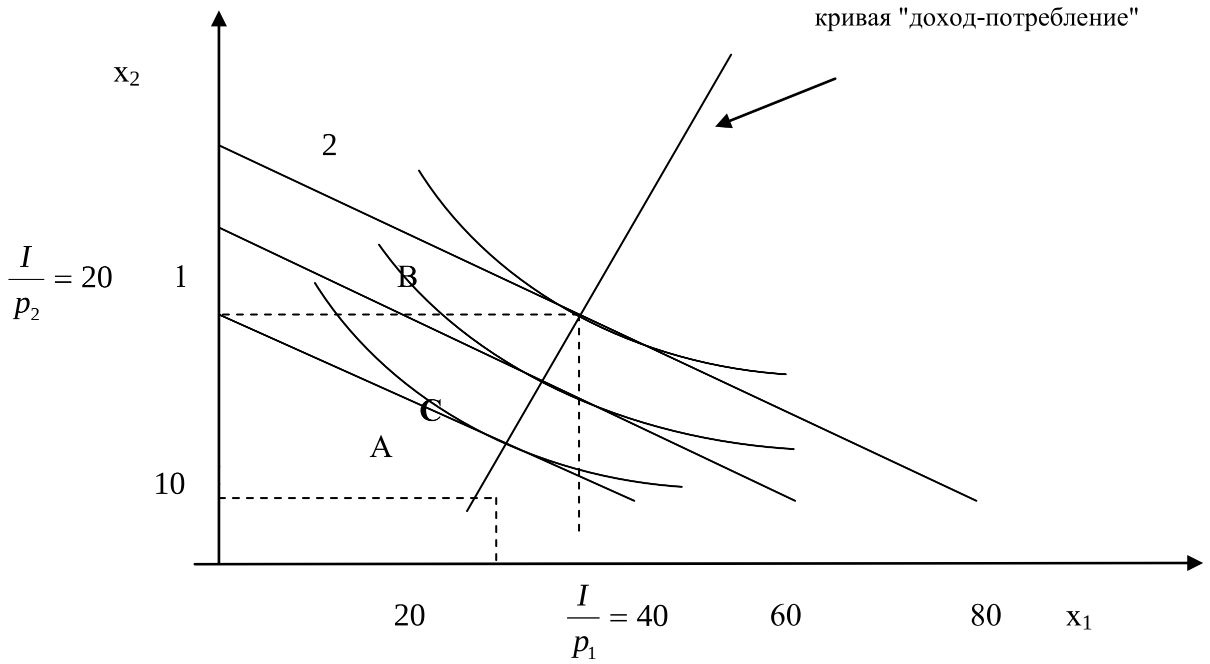
Итак, при снижении цены на продовольствие достигаемая полезность растет и потребитель покупает больше продуктов питания. Потребление одежды при этом может как расти так и падать.

Кривая спроса (функция спроса задается как функция параметров $x_1(p_1, p_2, I),\quad x_2(p_1, p_2, I)$) обладает двумя важными свойствами:

1) Уровень полезности меняется по мере нашего движения вдоль кривой. Чем ниже цена товара, тем выше уровень полезности.

2) В каждой точке на кривой спроса потребитель максимизирует полезность, отвечая условию, что предельная норма замещения одежды продуктами питания равна соотношению цен продуктов питания и одежды $\frac{u_1'}{u_2'} = \frac{p_1}{p_2}$. Другими словами, в каждой точке кривой спроса можно определить сколько готов заплатить потребитель за дополнительную единицу того или иного продукта.

Мы рассмотрели пример изменения потребительского выбора при изменении цены на один из продуктов. Рассмотрим, как влияет изменение дохода на потребительский выбор.



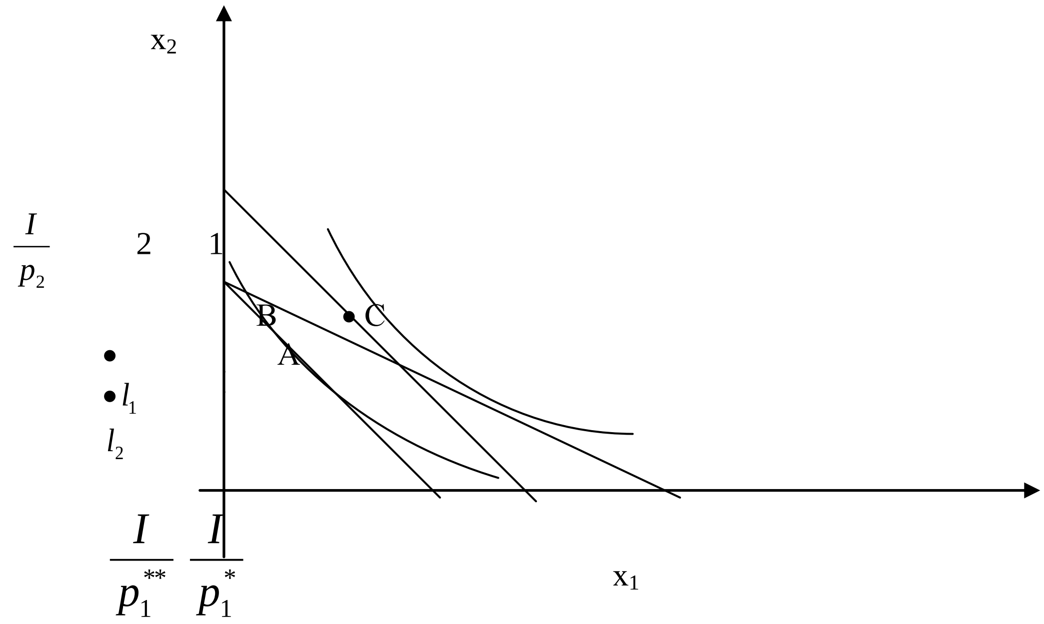
Пусть первоначально доход потребителя равнялся 400 руб., тогда максимизирующий полезность потребительский набор находится в точке A (20 единиц продуктов питания и 10 единиц одежды). Доход потребителя изменился и составил 800 руб. Тогда бюджетная линия сместилась вправо параллельно первоначальной бюджетной линии. Оптимальный выбор потребителя теперь находится в точке B, где он приобретает 30 единиц продуктов питания и 21 единицу одежды. если доход потребителя составит 600 руб., то его выбор переместится в точку C.

Можно продолжить перебирать варианты изменения дохода и соответственно спроса на товары. Все возможные решения будут находится на кривой "доход-потребление". Кривая "доход-потребление" движется на "северо-восток", потому что потребление как продовольствия так и одежды увеличивается с ростом дохода.

***Если кривая "доход-потребление" имеет положительный угловой коэффициент (с ростом дохода растет потребление), то такой товар называется нормальным. в ряде случаев спрос падает по мере роста дохода. Такие товары называются "низкокачественными".

2. Эффекты компенсации. Уравнение Слуцкого.

Перекрестные функции спроса от цен характеризуют такие свойства товара, как взаимозаменяемость и взаимодополняемость. Если при росте цены на один товар при снижении его спроса, растет спрос на другой товар, то эти товары взаимозаменяемые. Наоборот, если спрос на другой товар также падает, то они взаимодополняемы. Заметим, что реальная взаимозаменяемость может искажаться общим снижение благосостояния при росте цены на один из товаров. Первый товар может заменять второй в потреблении, но спрос на него может не расти, поскольку просто снизился доход. Для снятия этого искажения используют понятие компенсированного изменения цены, то есть такого, которое сопровождается увеличением дохода потребителя, позволяющим ему поддерживать прежний уровень благосостояния.



Пусть цена первого блага повысилась с p_1^* до p_1^{**}, тогда бюджетная линия l_1 изменит свое положение, и перейдет в l_2. Точка А лини безразличия 1, касающаяся бюджетного ограничения l_1, будет заменена новой точкой оптимума В, где новая линия безразличия 2 касается новой бюджетной линии l_2. Если мы хотим компенсировать потребителю потерю благосостояния, то увеличим его доход так, чтобы новая бюджетная прямая l_3,(параллельная l_2) коснулась в некоторой точке С прежней линии безразличия 1.

Направленный отрезок АС показывает "эффект замены" при росте цены, то есть изменение структуры спроса при условии поддержания прежнего уровня благосостояния. Направленный отрезок СВ отражает "эффект дохода", то есть изменение потребительского спроса при сохранении соотношения цен благ и изменении уровня дохода. Общий результат роста цены (при отсутствии компенсации) выражается направленным отрезком АВ.

Одним из основных в теории потребительского выбора является уравнение Слуцкого, опубликованное российским математиком Е.Е.Слуцким в 1915 году. Это уравнение позволяет увязать действие эффекта замены и эффекта дохода с результирующим изменением спроса. Уравнение Слуцкого имеет следующий вид:

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \left[\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right]_{comp} - \left[\frac{\partial x_i}{\partial I}\right] x_j ,$$

где первое слагаемое в правой части описывает действие эффекта замены, второе – действие эффекта дохода, слева записано результирующее воздействие на спрос, складывающееся из изменения структуры спроса и общего его изменения при изменении уровня реального дохода.

Для ценных (нормальных ?) товаров величина $\left[\frac{\partial x_i}{\partial I}\right] > 0$, т.е. спрос растет при росте дохода. В этом случае, согласно уравнению Слуцкого, $\frac{\partial x_i}{\partial p_j} < \left[\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right]_{comp}$: если спрос растет, то он растет больше при наличии компенсации, если он падает, то в меньшей степени.

Уравнение Слуцкого может рассматриваться как при разных, так и при совпадающих i и j.

Рассмотрим теперь более подробно эластичности функции спроса. Эластичность спроса по цене равна $e_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} : \frac{x_i}{p_j}$, Эластичность спроса по доходу $e_{iI} = \frac{\partial x_i}{\partial I} : \frac{x_i}{I}$.

Выполняется равенство $\sum_j e_{ij} + e_{iI} = 0$, то есть сумма всех эластичностей спроса по цене и доходу должна равняться 0.

1.10 Лекция №10,11 (3 часа)

Тема: «Производственные функции»

1.10.1 Вопросы лекции:

1. Основные понятия
2. Формальные свойства производственных функций
3. Предельные и средние значения производственной функции

1.10.2 Краткое содержание вопросов

1. Основные понятия

Производственными функциями называют соотношение между используемыми производственными ресурсами и выпускаемой продукцией.

Производственные функции предназначены для моделирования процесса производства некоторой хозяйственной единицы: отдельной фирмы, отрасли или всей экономики государства в целом.

С помощью производственных функций решают задачи:

оценки отдачи ресурсов в производственном процессе;

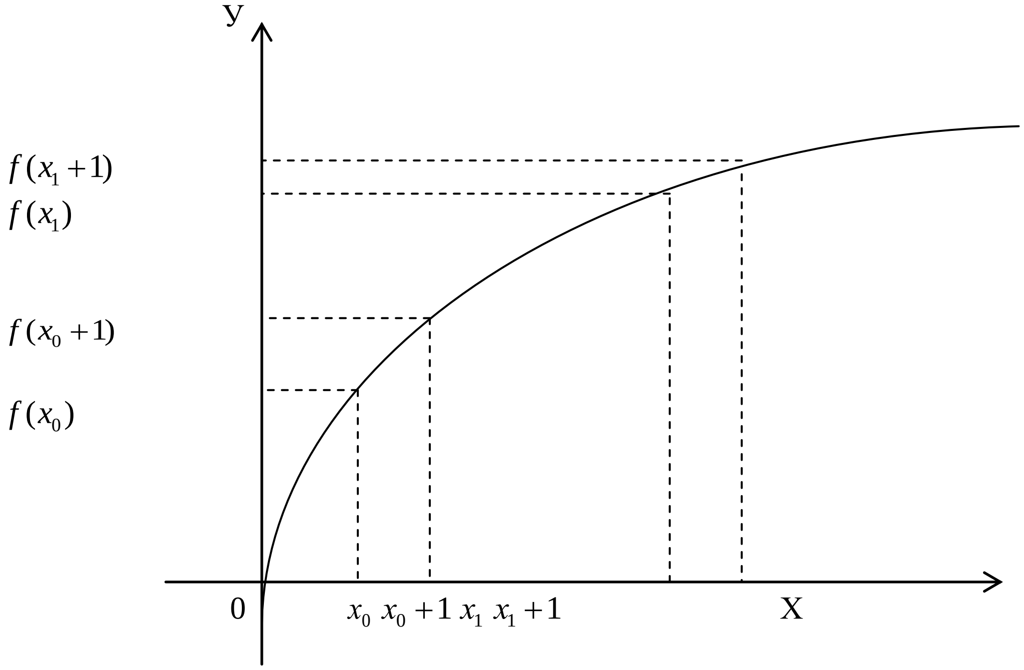
прогнозирование экономического роста;

разработки вариантов плана развития производства;

оптимизации функционирования хозяйственной единицы при условии заданного критерия и ограничений по ресурсам.

<u>Производственная функция одной переменной</u>. Возьмем производственную функцию F в виде $F(x) = a_1 x^{a_2}$, где x- величина затрачиваемого ресурса (например, рабочего времени), F(x) –объем выпускаемой продукции (например, число готовых холодильников). Величины a_1 и a_2 – параметры производственной функции (вектор параметров есть двумерный вектор (a_1 , a_2)). Здесь a_1 и a_2 – положительные числа и число a_2 <=1. Данная функция является функцией одной переменной x. В связи с этим

производственная функция называется одноресурсной или однофакторной. Ее область определения - множество неотрицательных действительных чисел т.е. x>=0. График производственной функции $y = a_1 x^{a_2}$ выглядит следующим образом.



На графике видно, что с ростом величины затрачиваемого ресурса x объем выпуска y растет, однако при этом каждая дополнительная единица ресурса дает все меньше прирост объема y выпускаемой продукции. Отмеченное обстоятельство (рост объема y и уменьшение прироста объема y с ростом величины x) отражает фундаментальное положение экономической теории (хорошо подтверждаемое практикой), называемое законом убывающей эффективности. Производственная функция $y = a_1 x^{a_2}$ является типичным представителем широкого класса однофакторных производственных функций.

Производственная функция нескольких переменных - это функция , независимые переменные $x_1, \ldots, x_n$ которой принимают значения объемов затрачиваемых или используемых ресурсов (число переменных n равно числу ресурсов), а значение функции имеет смысл величин объемов выпуска:

$$y = f(x, a).$$

Подчеркнем еще раз, что в данной формуле величина y – скалярная, x и a – векторные величины т.е. $x = (x_1, \ldots, x_n)$ (под вектором понимается упорядоченный набор чисел). В связи с этим производственную функцию называют многоресурсной или многофакторной. По экономическому смыслу $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$, следовательно, областью определения многофакторной производственной функции $f(x) = (x_1, \ldots, x_n)$ является множество n-мерных векторов x, все координаты $x_1, \ldots, x_n$ которых неотрицательные числа. Для отдельного предприятия, выпускающего однородный продукт, производственная функция $f(x) = (x_1,..., x_n)$ может связывать объем выпуска (в натуральном или стоимостном выражении) с затратами рабочего времени по различным видам трудовой деятельности, различных видов сырья, комплектующих изделий, энергии, основного капитала. Производственные функции такого типа характеризуют действующую технологию предприятия.

При построении производственной функции для региона или страны в целом в качестве величины годового выпуска Y (на макроуровне обозначают большой буквой) чаще берут совокупный продукт региона или страны, исчисляемый обычно в неизменных, а не в текущих ценах, в качестве ресурсов рассматривают основной капитал ($x_1(=K)$- объем используемого в течение года основного капитала) живой труд ($x_2(=L)$- количество единиц затрачиваемого в течении года живого труда), исчисляемые обычно в стоимостном выражении. Строят двухфакторную производственную функцию $f(x) = (x_1, x_2)$ или $Y = f(K,L)$. От двухфакторных производственных функций переходят к трехфакторным. В качестве третьего фактора иногда вводят объемы используемых природных ресурсов. Кроме того, если производственная функция строится по данным временных рядов, то в качестве особого фактора роста производства может быть включен технический прогресс.

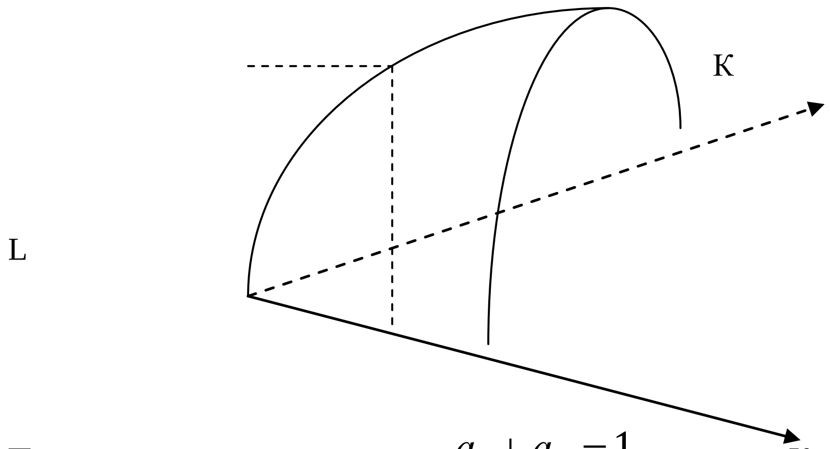
Производственная функция $y = (x_1, x_2)$ называется *статической* если ее параметры и ее характеристика f не зависят от времени t, хотя объемы ресурсов и объемы выпуска могут зависеть от времени t, т.е. могут иметь представление в виде временных рядов: $x_1(0), x_1(1),..., x_1(T)$; $x_2(0), x_2(1),..., x_2(T)$; $y(0), y(1),..., y(T)$;

$y(t) = f(x_1(t), x_2(t))$. Здесь t – номер года, t=0,1,…,T. t=0 – базовый год временного промежутка, охватывающий годы 1,2,…,T.

Пример Для моделирования отдельного региона или страны в целом (т.е. для решения задач на макроэкономическом, микроэкономическом уровне) часто используют производственную функцию вида $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$, где a_0, a_1, a_2 - параметры производственной функции. Это положительные постоянные числа (часто a_1 и a_2 таковы, что $a_1 + a_2 = 1$). Производственная функция данного вида называется производственная функция Кобба-Дугласа по имени двух американских экономистов, предложивших ее использовать в 1929 году. Производственная функция Кобба-Дугласа активно применяется для решения разнообразных теоретических и прикладных задач благодаря своей структурной простате. В данной модели $x_1 = K$ равно объему используемого основного капитала (объему используемых основных фондов – в отечественной терминологии), $x_2 = L$ - затратам живого труда, тогда производственная функция Кобба-Дугласа приобретает вид часто используемый в литературе:

$y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$ или если выполняется равенство $a_1 + a_2 = 1$, то $Y = bK^{\alpha}, L^{\alpha-1}$

Графиком двухфакторной производственной функции будет являться поверхность в трехмерном пространстве.



При выполнении равенства $a_1 + a_2 = 1$ модель Кобба-Дугласа можно записать несколько в ином виде:

$$\frac{Y}{L} = \frac{a_0 K^{a_1} L^{a_2}}{L} = \frac{a_0 K^{a_1}}{L^{1-a_2}} = \frac{a_0 K^{a_1}}{L^{a_1}} = a_0 \left[\frac{K}{L}\right]^{a_1}, \text{ т.е } \frac{Y}{L} = a_0 \left[\frac{K}{L}\right]^{a_1}$$

Дроби $\frac{Y}{L} = z$ и $\frac{K}{L} = k$ называются соответственно производительностью труда и капиталовооруженностью труда. Используя новые символы, получим $z = a_0 k^{a_1}$, т.е из двухфакторной производственной функции Кобба-Дугласа получим формально однофакторную производственную функцию Кобба-Дугласа. В связи с тем, что $0 < a_1 < 1$, из последней формулы следует, что производительность труда Z растет медленнее его капиталовооруженности. Однако этот вывод справедлив для случая статической производственной функции Кобба-Дугласа в рамках существующей технологии и ресурсов. Отметим, что дробь $\frac{Y}{K}$ называется производительностью капитала или капиталоотдачей, обратные дроби $\frac{K}{Y}$ и $\frac{L}{Y}$ называются соответственно капиталоемкостью и трудоемкостью выпуска.

Производственная функция называется динамической, если:

1) время T фигурирует в качестве самостоятельной переменной величины (как бы самостоятельного фактора производства), влияющего на объем выпускаемой продукции;
2) параметры производственной функции и ее характеристикаF зависят от времени T.

При построении производственной функции НТП может быть учтен с помощью введения множителя НТП e^{pt}, где параметр p(p>0) характеризует темп прироста под влиянием НТП:

$$y(t) = e^{pt} f(x_1(t), x_2 t) \text{ где } (t = 0,1,...,T).$$

Эта простейший пример динамической производственной функции; она включает нейтральный, то есть не материализованный в одном из факторов, технический прогресс. В более сложных случаеях технический прогресс может воздействовать непосредственно на производительность труда или капитала (капиталоотдачу): $Y(t) = f(A(t) \cdot L(t), K(t))$ или $Y(t) = f(A(t) \cdot K(t), L(t))$. Он называется, соответственно, трудосберегающим или капиталосберегающим НТП

Пример На основании данных по экономике СССР (динамики национального дохода, численности занятых в материальном производстве и объеме основных фондов), опубликованных за 1960-1985 гг., макроэкономической производственной функции

Кобба-Дугласа без учета НТП и с учетом НТП. Без учета НТП функция имеет вид $Y = 1{,}022K^{0{,}5382}L^{0{,}4618}$, с учетом НТП $Y = 1{,}038e^{0{,}0294t}K^{0{,}9749}L^{0{,}2399}$.

Выделение существенных видов ресурсов (факторов производства) и выбор аналитической формы функции называется спецификацией.

Преобразование реальных и экспертных данных в модельную информацию, т.е.расчет численных значений параметров на базе статистических данных с помощью регрессионного и корреляционного анализа, называют параметризацией.

Проверка истинности (адекватности) функции называют ее верификацией.

2. Формальные свойства производственных функций

Производственная функция $f(x_1, x_2)$ имеющая область определения $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ имеет следующие свойства.

1. Производство невозможно при отсутствии хотя бы одного ресурса, т.е. $f(0, x_2) = f(x_1, 0) = 0$

2. При увеличении затрат производственных ресурсов выпуск продукции растет. x(1) $x(1) > x(0)$ $f(x(1)) > (fx(0))$, если функция дифференцирована, то можно записать $x > 0 \;\; \Rightarrow \;\; \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} > 0 \; (i = 1{,}2), \quad x = (x_1, x_2)$ или первая частная производная $\left[\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right]$ положительна.

3. По мере увеличения количества одного ресурса при постоянных количествах других предельная эффективность использования этого ресурса не возрастает. Математически это требование для дважды дифференцируемых производственных функций выглядит так. $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right) \leq 0$. В нашем примере рассмотренном ранее это означает, что рост вооруженности средствами производства приводит к росту выпуска продукции, но темп роста выпуска продукции все время падает (закон убывающей эффективности).

4. Производственная функция характеризуется определенной отдачей от расширения масштабов производства. Отдача от расширения масштабов производства характеризует производственную функцию с точки зрения изменения выпуска продукции при пропорциональном изменении затрат ресурсов, которое математически выражается в умножении всех компонент вектора x на положительный скаляр t. Принято говорить, что скалярная функция является однородной функцией степени δ (дельта), если для любого вектора x и любого скаляра t она удовлетворяет условию $f(tx) = t^{\delta} f(x)$

Математически четвертое предположение состоит в требовании однородности производственной функции. Если $\delta > 1$, то говорят, что производственная функция характеризуется возрастающей отдачей от расширения масштабов производства; если $\delta = 1$ - постоянной отдачей (наиболее часто встречающийся случай), а при $\delta < 1$ - убывающей отдачей.

Пример

Возьмем производственную функцию $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$, $a_1 + a_2 = 1$. Для нее выполняются все четыре свойства.

1. при $x_1 = 0$ $y = a_0 0^{a_1} x_2^{a_2} = 0$ при $x_2 = 0$ $y = a_0 x_1^{a_1} 0^{a_2} = 0$

2. $a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} < a_0 (x_1 + 1)^{a_1} x_2^{a_2}$ или

$a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} < a_0 x_1^{a_1} (x_2 + 1)^{a_2}$

Первая частная производная положительна.

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = a_0 x_2^{a_2} a_1 x_1^{a_1 - 1} \geq 0$$

3. $y^{Э}_{ч_1} = a_0 x_2^{\,a_2} a_1 (a_1 - 1) x_1^{\,a_1 - 2} \leq 0$ Вторая частная производная не положительна т.к. $a_0 \geq 0, \quad 0 \leq a_1 \leq 1$

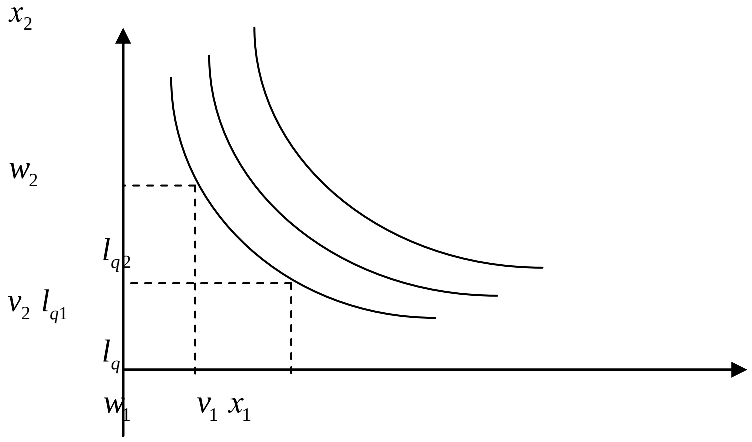
4. $a_0 (tx_1)^{a_1} (tx_2)^{a_2} = t^{a_1 + a_2} (a_0 x_1^{\,a_1} x_2^{\,a_2})$.

Если рассмотреть линейную производственную функцию $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$ для нее свойства 1 и 4 не выполняются.

3. Предельные и средние значения производственной функции

Возможность взаимного замещения ресурсов означает, что одно и то же количество продукта у может быть произведено при различных сочетаниях ресурсов. Совокупность таких сочетаний ресурсов, при которых может быть произведено определенное количество продукции q, называется изоквантой.

Различные наборы (v_1, v_2) и (w_1, w_2) затрачиваемых ресурсов, принадлежащие одной и той же изокванте l_q (т.е. $q = f(v_1, v_2) = f(w_1, w_2)$), дают один и тот же объем выпуска q.



Свойства изоквант:

1. Изокванты не пересекаются друг с другом.
2. Изокванта l_q разбивает пространства ресурсов на два множества, в одном из которых $q_0 < q$, в другом $q_1 > q$, причем граница между этими множествами проходит по изокванте l_q.

3. Большему выпуску продукции соответствует изокванта, более удаленная от начала координат.
4. Изоквнты не имеют общих точек с осями координат.

Средней производительностью I-го ресурса (фактора производства) или средним выпуском по i-му ресурсу (фактору производства) называют отношение значения функции к величине I-го ресурса. Символика:

$A_i = \dfrac{f(x)}{x_i}$, где $(i = 1,2)$ или $f(x) = f(x_1, x_2)$

В случае двухфакторной производственной функции Кобба-Дугласа для средних производительностей $\dfrac{Y}{K}$ и $\dfrac{Y}{L}$ основного капитала и труда были использованы соответственно термины капиталоотдача и производительность труда.

Предельной (маржинальной) производительностью i-го ресурса (фактора производства) или предельным выпуском по i-му ресурсу (фактору производства) называют первую частную производную функции $f(x) = f(x_1, x_2)$. Символика $M_i = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ Предельная производительность показывает, на сколько единиц увеличивается объем выпуска y, если объем затрат x_i i-го ресурса вырастает на одну единицу при неизменных объемах другого затрачиваемого ресурса.

Найдем средние (A_1, A_2) и предельные (M_1, M_2)значение для производственной функции Кобба-Дугласа.

1. $A_1 = \dfrac{f(x)}{x_1} = a_0 x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2}$; $A_2 = \dfrac{f(x)}{x_2} = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2 - 1}$

2. $M_1 = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} = a_0 a_1 x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2} = a_1 A_1$; $M_2 = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2} = a_2 A_2$;

$\dfrac{M_1}{A_1} = a_1 \le 1 \;\Rightarrow M_1 \le A_1$ и $\dfrac{M_2}{A_2} = a_2 \le 1 \;\Rightarrow M_2 \le A_2$ т.е. предельная производительность i-го ресурса не больше средней производительности этого ресурса. Это положение обычно выполняется и для других производственных функций.

Отношение предельной производительности M_i i-го ресурса к его средней производительности A_i называется эластичностью выпуска по i-му ресурсу (по фактору производства). Символика:

$E_i = \dfrac{M_i}{A_i} = \dfrac{x_i}{f(x)} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ $(i = 1,2)$.

Сумма $E_1 + E_2 = E_x$ называется эластичностью производства.

E_i показывает, на сколько процентов увеличится выпуск, если затраты i-го ресурса увеличатся на один процент при неизменных объемах другого ресурса..

Рассчитаем для производственной функции Кобба-Дугласа эластичность каждого ресурса и эластичность выпуска (E_1 , E_2, E_x).

Имеем : $E_1 = a_1$, $E_2 = a_2$, $E_x = E_1 + E_2 = a_1 + a_2$

Предельной нормой замены (замещения) i-го ресурса (фактора производства) j-м называется выражение:

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i} \ (i, j = 1,2)$$

при постоянной y. i – номер заменяемого ресурса, j - номер замещающего ресурса или

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}}$$

Для двухфакторной производственной функции справедливо равенство:

$R_{12} = \frac{E_1}{E_2}\frac{x_2}{x_1}$, т.е. придельная норма замены первого ресурса вторым равна отношению эластичностей выпуска по первому и второму ресурсам, умноженному на отношение объема второго ресурса к объему первого ресурса.

Для производственной функции Кобба-Дугласа $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$ запишем предельную норму замены первого ресурса вторым R_{12} и предельную норму замены второго ресурса первым R_{21}.

$$R_{12} = \left[\frac{\partial f(x)}{x_1}\right] \Big/ \left[\frac{\partial f(x)}{x_2}\right] = \frac{a_0 x_2^{a_2} a_1 x_1^{a_1 - 1}}{a_0 x_1^{a_1} a_2 x_2^{a_2 - 1}} = \frac{a_1}{a_2}\frac{x_2}{x_1},\ R_{21} = \frac{a_2}{a_1}\frac{x_1}{x_2}.$$

1.11 Лекция №12,13 (3 часа)

Тема: «Задачи оптимизации производства»

1.11.1 Вопросы лекции:

1. Основные понятия.
2. Максимизация прибыли в случае долговременного промежутка.
3. Максимизация прибыли в случае кратковременного промежутка

1.11.2 Краткое содержание вопросов

1. Основные понятия

Доходом (выручкой) фирмы в определенном периоде называется произведение общего объема выпускаемой фирмой продукции на рыночную цену этой продукции

$R = p_0 y$, где R – доход фирмы, p_0 - цена продукции, y – объем выпускаемой фирмой продукции ($y = f(x_1, x_2)$).

Издержками фирмы называют общие выплаты в определенном временном периоде за все виды затрат $C = p_1 x_1 + p_2 x_2$, где x_1 и x_2 - объемы используемых фирмой ресурсов (факторов производства), p_1 и p_2 - рыночные цены на эти ресурсы (факторы производства).

Прибылью фирмы называют разность между полученным фирмой доходом R и ее издержками производства

$PR = R - C$ или $PR(x_1, x_2) = p_0 f(x_1, x_2) - (p_1 x_1 + p_2 x_2)$.

В теории фирмы принято считать, что если фирма функционирует в условиях чистой (совершенной) конкуренции, на рыночные цены p_0, p_1 и p_2. она влиять не может. Фирма соглашается с ценами. Основная цель фирмы заключается в максимизации прибыли путем рационального распределения используемых ресурсов. Формально задача максимизации прибыли в определенном временном периоде имеет вид: PR→max. такая постановка задачи максимизации прибыли зависит от того, какой временной промежуток (долговременный или кратковременный) предшествует периоду, в котором фирма максимизирует свою прибыль.

В случае долговременного промежутка фирма может свободно выбирать любой вектор затрат $x = (x_1, x_2)$ из пространства затрат, поэтому задача максимизации прибыли в случае долговременного промежутка имеет следующий вид:

$$p_0 f(x_1, x_2) - (p_1 x_1 + p_2 x_2) = PR(x_1, x_2) \to \max$$

при условии, что $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ (x_1 и x_2 - объемы используемых фирмой ресурсов).

в случае краткосрочного промежутка фирма должна учитывать неизбежные лимиты на объемы используемых ею ресурсов, которые формально могут быть записаны в виде нелинейного неравенства

$$g(x_1, x_2) \leq b$$

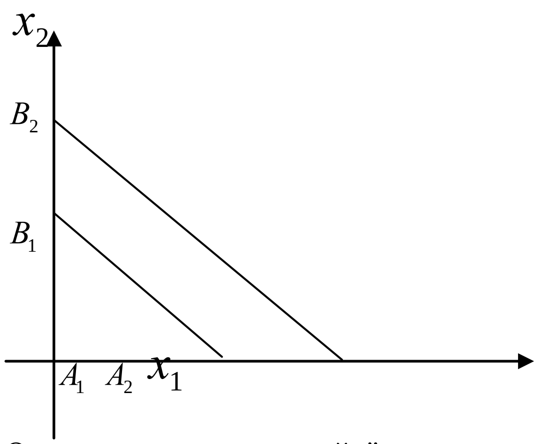
(ограничений вида $g(x_1, x_2) \leq b$ моет быть несколько). Следовательно задача максимизации прибыли для краткосрочного промежутка имеет вид задачи математического программирования:

$$p_0 f(x_1, x_2) - (p_1 x_1 + p_2 x_2) = PR(x_1, x_2) \to \max$$

при условии, что $g(x_1, x_2) \leq b$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Линия уровня функции издержек производства $z = p_1 x_1 + p_2 x_2$ называется *изокостой*. В связи с тем, что по экономическому смыслу $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ изокоста есть отрезок прямой , попадающий в неотрицательный ортант плоскости Ox_1x_2.



Отрезок расположенный "северо-восточнее" соответствует большим издержкам производства.

Если для отрезка A_1B_1 издержки производства равны C_1, то его аналитическое представление имеет вид $C_1 = p_1 x_1 + p_2 x_2$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

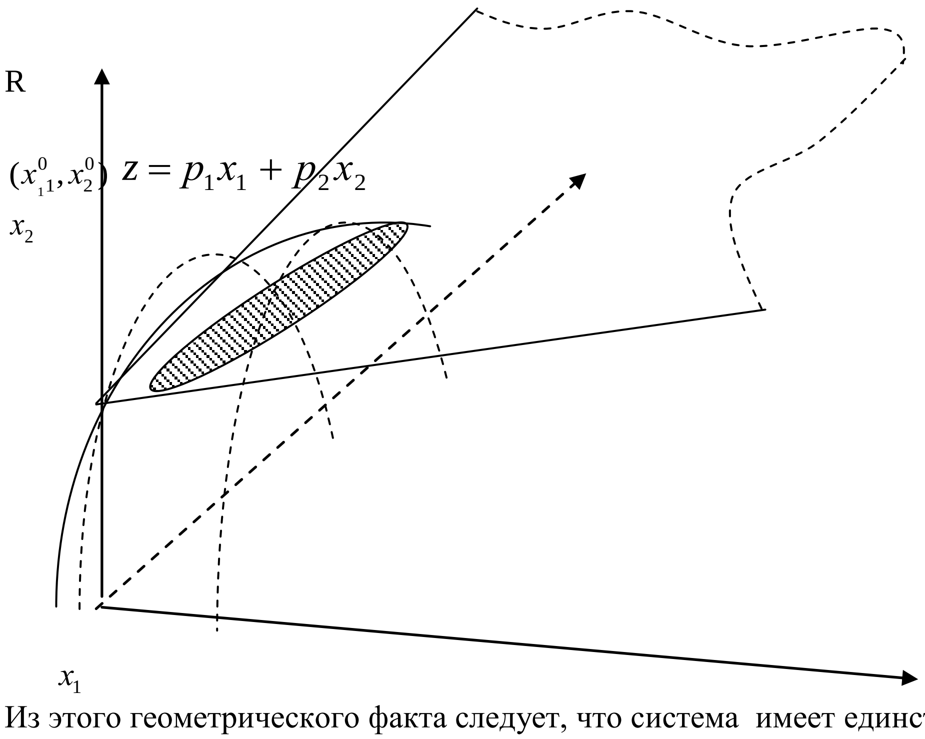
2. Максимизация прибыли в случае долговременного промежутка.

В связи с тем, что, как правило, $f(x_1,0)=f(0,x_2)=0$, экономически осмысленным является следующие утверждение $x_1>0,\quad x_2>0$. Поэтому в случае долговременного промежутка задача максимизации прибыли собой обычную задачу на глобальный абсолютный максимум при $x_1>0,\quad x_2>0$. Из математического анализа известно, что точки локального абсолютного максимума следует искать только среди точек (x_1,x_2), которые удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial PR(x_1,x_2)}{\partial x_1}=0, \\ \dfrac{\partial PR(x_1,x_2)}{\partial x_2}=0. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \dfrac{\partial(p_0 f(x_1,x_2)-(p_1x_1+p_2x_2)}{\partial x_1}=0, \\ \dfrac{\partial(p_0 f(x_1,x_2)-(p_1x_1+p_2x_2)}{\partial x_1}=0. \end{cases} \quad \begin{cases} p_0\dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}-p_1=0, \\ p_0\dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}-p_2=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_0\dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}=p_1, \\ p_0\dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}=p_2. \end{cases}$$

Если выполняется условие, что вторые частные производные меньше 0, то графиком функции $y=f(x_1,x_2)$ в трехмерном пространстве есть поверхность, выпуклая вверх. Следовательно, график прибыли $PR(x_1,x_2)=p_0 f(x_1,x_2)-(p_1x_1+p_2x_2)$, получаемой путем вычитания из графика функции $p_0 f(x_1,x_2)$ плоскости $z=p_1x_1+p_2x_2$, являющейся графиком издержек производства, имеет вид "шапочки", у которой есть "макушка". "Макушка" соответствует глобальному максимуму прибыли.



Из этого геометрического факта следует, что система имеет единственное решение в точке (x_1^0,x_2^0), которое является точкой не только локального, но и глобального максимума прибыли. Точка (x_1^0,x_2^0) (где x_1^0,x_2^0- затраты ресурсов), которая является решением задачи максимизации прибыли, называется локальным (частичным) рыночным равновесием фирмы (в случае долговременного промежутка).

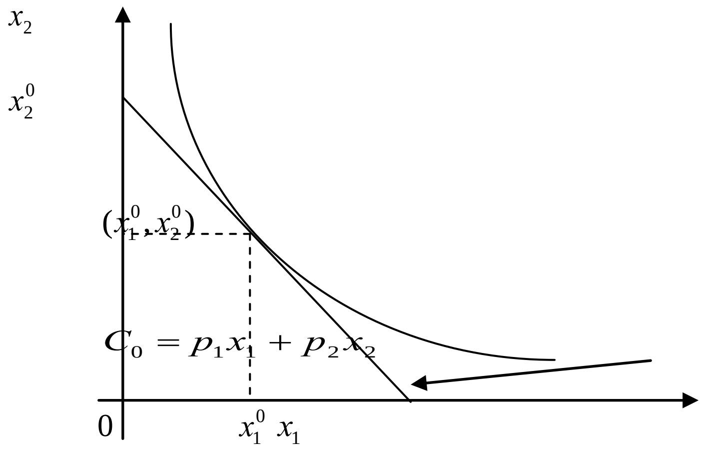
Подставив значения. (x_1^0, x_2^0) в уравнение, получим тождества:

$p_0 \dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} = p_1, \quad p_0 \dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} = p_2$, откуда путем почленного деления первого тождества на второе получаем:

$$\frac{\dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2},$$

т.е. в точке (x_1^0, x_2^0) локального рыночного равновесия фирмы отношение предельной производительности первого ресурса к предельной производительности второго ресурса равно отношению рыночных цен на эти ресурсы.

Проведем через точку (x_1^0, x_2^0) изокванту и изокосту, которые эту точку содержат. Уравнение изокванты имеет вид $y_0 = f(x_1^0, x_2^0)$, уравнение изокосты имеет вид $C_0 = p_1 x_1 + p_2 x_2$. Графически решение задачи максимизации прибыли (если рассмотреть плоскость) будет выглядеть так.



Получена важная геометрическая характеристика локального рыночного равновесия фирмы – касание в точке равновесия изокванты и изокосты.

Отметим, что, приступая к решению задачи максимизации прибыли мы не имели конкретных изокванты и изокосты, которые касаются друг друга в точке (x_1^0, x_2^0), так как не имели самой этой точки. Касающиеся друг друга изокванта и изокоста появляются после того, как аналитически найдено локальное рыночное равновесие (x_1^0, x_2^0) путем решения системы уравнений.

Левая ("четырехэтажная") дробь есть не что иное, как предельная норма замены первого ресурса вторым $R_{12}(x_1^0, x_2^0)$ в точке .

Само равенство выражает следующее фундаментальное положение теории фирмы: в точке локального рыночного равновесия (x_1^0, x_2^0) предельная норма замены первого ресурса вторым равна отношению рыночных цен на эти ресурсы.

Поскольку x_1^0, x_2^0 есть функции цен (p_0, p_1, p_2), т.е. $x_1^0 = d_1(p_0, p_1, p_2)$, $x_2^0 = d_2(p_0, p_1, p_2)$, то они называются функциями спроса на ресурсы. Их значения x_1^0, x_2^0 выражают оптимальнные выборы затрат ресурсов как функции цены как функции цены выпускаемой продукции и цен на ресурсы.

Подставив функции спроса на ресурсы в производственную функцию $y = f(x_1, x_2)$, получим выражение $y^0 = f(d_1(p_0, p_1, p_2), d_{21}(p_0, p_1, p_2)) = s(p_0, p_1, p_2)$, которое называется функцией предложения выпуска.

Функции спроса на ресурсы и функция предложения выпуска являются однородными нулевой степени по всем своим аргументам p_0, p_1, p_2, т.е.

$d_1(tp_0, tp_1, tp_2) = d_1(p_0, p_1, p_2)$,

$d_2(tp_0, tp_1, tp_2) = d_2(p_0, p_1, p_2)$,

$s(tp_0, tp_1, tp_2) = s(p_0, p_1, p_2)$, для любого $t > 0$. свойство однородности означает, что одновременное изменение всех цен p_0, p_1, p_2 в одно и тоже число раз t (изменение масштаба, но не структуры цен)не меняет x_1^0, x_2^0 и y_0.

3. Максимизация прибыли в случае кратковременного промежутка

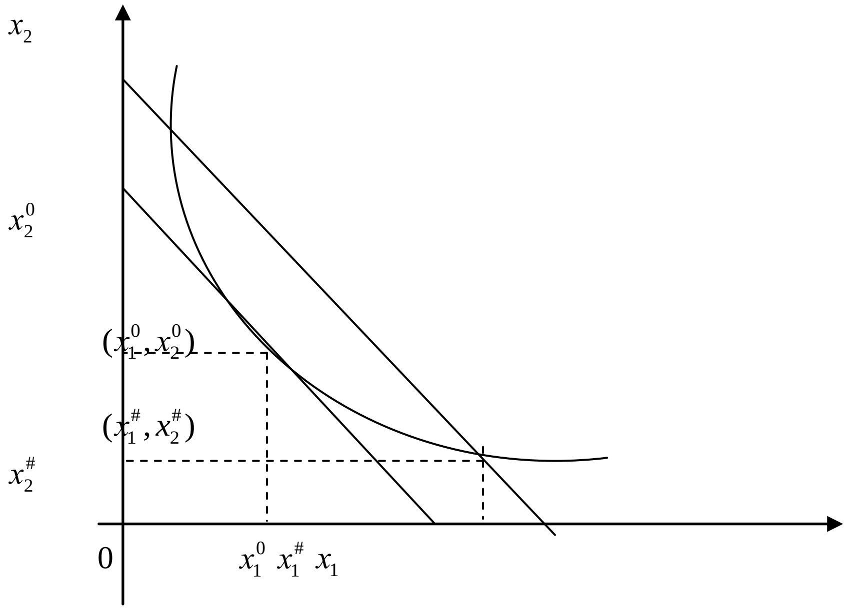
В случае краткосрочного промежутка рассмотрим конкретный пример, когда второй ресурс фирма может использовать только в объеме, равном $x_2^{\#} > 0$. Тогда задача максимизации прибыли превращается в задачу максимизации функции одной переменной:

$$p_0 f(x_1, x_2^{\#}) - (p_1 x_1 + p_2 x_2^{\#}) = PR(x_1, x_2^{\#}) \to \max,$$

и вместо системы уравнений появляется только одно уравнение

$$\frac{\partial PR(x_1, x_2^{\#})}{\partial x_1} = 0, \text{ или } p_0 \frac{\partial f(x_1, x_2^{\#})}{\partial x_1} = p_1.$$

Полученной уравнение имеет единственное решение $x_1 = x_1^{\#}$ ($x_1^{\#}$ зависит от $x_2^{\#}$, следовательно в случае краткосрочного промежутка локальное рыночное равновесие есть вектор $(x_1^{\#}, x_2^{\#})$. Геометрическое решение задачи будет иметь следующий вид:



Если бы объем второго ресурса не был лимитирован, то, локальным рыночным равновесием была бы точка касания (x_1^0, x_2^0), в которой тот же объем выпускаемой продукции (изокванта одна и та же) получился бы с меньшими издержками производства. Изокоста, содержащая точку $(x_1^{\#}, x_2^{\#})$, находится более "северо-западнее", аследовательнее соответствует большим издержкам производства. В точке $(x_1^{\#}, x_2^{\#})$ локального рыночного равновесия, содержащие ее изокванта и изокоста пересекаются, но не касаются . В рассматриваемом случае $x_1^{\#} = x_1^{\#}(x_2^{\#}, p_0, p_1, p_2)$, это и есть функция спроса на первый ресурс при фиксированном объеме $x_2^{\#}$ второго ресурса. Функция предложения имеет вид $y = f(x_1^{\#}(x_2^{\#}, p_0, p_1, p_2), x_2^{\#})$.

1.12 Лекция №13 (2 часа)

Тема: «Балансовый метод принципиальная схема межпродуктового баланса»

1.12.1 Вопросы лекции:

1. Основные понятия балансового метода
2 Схема межпродуктового баланса

1.12.2 Краткое содержание вопросов

1. Основные понятия балансового метода

Балансовые модели, как статические так и динамические, широко применяются при экономико-математическом моделировании экономических систем и процессов. В основе создания этих моделей лежит балансовый метод, т.е. метод взаимного сопоставления имеющихся материальных, трудовых и финансовых ресурсов и потребностей в них.

Под ***балансовой моделью*** понимают систему уравнений, которые удовлетворяют требованиям соответствия наличия ресурса и его использования. Кроме приведенного выше требования соответствия производства каждого продукта и потребности в нем, можно указать такие примеры балансового соответствия, как соответствие наличия рабочей силы и количества рабочих мест, платежеспособного спроса населения и предложения товаров и услуг и т.д. При этом соответствие понимается либо как равенство, либо менее жестко – как достаточность ресурсов для покрытия потребности и, следовательно, наличие некоторого резерва.

Важнейшие виды балансовых моделей:

- частные материальные, трудовые и финансовые балансы для народного хозяйства и отдельных отраслей;
- межотраслевые балансы;
- матричные техпромфинпланы предприятий и фирм.

Основу информационного обеспечения балансовых моделей в экономике составляет матрица коэффициентов затрат ресурсов по конкретным направлениям их использования. Например, в модели межотраслевого баланса такую роль играет так называемая *технологическая матрица* – таблица межотраслевого баланса, составленноая из коэффициентов (нормативов) прямых затрат на производство единицы продукции в натуральном выражении. По многим причинам исходные данные реальных хозяйственных объектов не могут быть использованы в балансовых моделях непосредственно, поэтому подготовка информации для ввода в модель является весьма серьезной проблемой. Так, при построении модели межотраслевого баланса используется специфическое понятие чистой (или технологической) отрасли, т.е. условной отрасли, объединяющей все производство данного продукта независимо от ведомственной (административной) подчиненности и форм собственности предприятий и фирм. Переход от хозяйственных отраслей к чистым отраслям требует специального преобразования реальных данных хозяйственных объектов, например, агрегирования отраслей, исключения внутриотраслевого оборота и др.

Балансовые модели строятся в виде числовых матриц – прямоугольных таблиц чисел. В связи с этим балансовые модели относятся к тому типу экономико-математических моделей, которые называются матричными.

2. Схема межпродуктового баланса

Принципиальная схема межотраслевого баланса производства и распределения совокупного общественного продукта в стоимостном выражении представлена в таблице.

Таблица – Принципиальная схема межотраслевого баланса (МОБ)

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли					Конечный продукт	Валовой продукт
	1	2	3	…	n		
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	…	x_{1n}	Y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	…	x_{2n}	Y_2	X_2
3	x_{31}	x_{23}	x_{33}	…	x_{3n}	Y_3	X_3
…	…	…	…	…	…	…	…
n	x_{n1}	x_{n1}	x_{n3}	…	x_{nn}	Y_n	X_n
Амортизация	c_1	c_2	c_3	…	c_n		
Оплата труда	v_1	v_2	v_3	…	v_n		
Чистый доход	m_1	m_2	m_3	…	m_n		
Валовой продукт	X_1	X_2	X_3	…	X_n	$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{n} X_j$	

В основу этой схемы положено разделение совокупного продукта на две части: промежуточный и конечный продукт. Все народное хозяйство представлено в виде совокупности n отраслей (имеются в виду чистые отрасли), при этом каждая отрасль фигурирует в балансе как производящая и как потребляющая.

в МОБ выделяют четыре части, имеющие различное экономическое содержание, они называются ***квадрантами*** баланса.

Первый квадрант МОБ – это шахматная таблица межотраслевых материальных связей. Показатели, помещенные на пересечениях строк и столбцов, представляют собой величины межотраслевых потоков продукции и в общем виде обозначаются x_{ij}, где I и j – соответственно номера отраслей производящих и потребляющих. Так, величина x_{32} понимается как стоимость средств производства, произведенных в отрасли с номером 3 и потребленных в качестве материальных затрат в отрасли с номером 2. Таким образом, первый квадрант по форме представляет собой квадратную матрицу порядка n, сумма всех элементов которой равняется годовому фонду возмещения затрат средств производства в материальной сфере.

Во втором квадранте представлена конечная продукция всех отраслей материального производства, при этом под конечной понимается продукция, выходящая из сферы производства в область конечного использования (на потребление и накопление). В таблице этот раздел дан укрупнено в виде одного столбца величин Y_i . второй квадрант характеризует отраслевую материальную структуру национального дохода, а в развернутом виде – также распределение национального дохода на фонд накопления и фонд потребления, структуру потребления и накопления по отраслям производства и потребления.

Третий квадрант МОБ также характеризует национальный доход, но со стороны его стоимостного состава как сумму чистой продукции и амортизации; чистая продукция понимается при этом как сумма оплаты труда и чистого дохода отраслей. Сумма амортизации (c_j) и чистой продукции (v_j+m_j) некоторой I-ой отрасли будем называть условно чистой продукцией этой отрасли и обозначать в дальнейшем Z_j.

Четвертый квадрант баланса находится на пересечении столбцов второго квадранта (конечной продукции) и строк третьего квадранта (условно чистой продукции). Этим определяется содержание квадранта: оон отражает конечное распределение и использование национального дохода. В результате перераспределения первоначально созданного национального дохода образуются конечные доходы населения, предприятий, государства. Данные четвертого квадранта важны для отражения в межотраслевой модели баланса доходов и расходов населения, источников финансирования капиталовложений, текущих затрат непроизводственной сферы, для анализа общей структуры конечных доходов по группам потребителей. Общий итог четвертого квадранта, так же как второго и третьего, должен быть равен созданному за год национальному доходу.

Таким образом, в целом межотраслевой баланс в рамках единой модели объединяет балансы отраслей материального производства, баланс совокупного общественного продукта балансы национального дохода, финансовый, баланс доходов и расходов населения.

Следует особо отметить, что хотя валовая продукция отраслей не входит в рассмотренные выше четыре квадранта, она представлена на принципиальной схеме МОБ в двух местах в виде столбца, расположенного справа от второго квадранта, и в виде строки ниже третьего квадранта. Эти столбец и строка валовой продукции замыкают схему МОБ и играют важную роль как для проверки правильности заполнения квадрантов (т.е. проверки самого баланса), так и для разработки экономико-математической модели межотраслевого баланса. Если как показано на схеме, обозначить валовой продукт некоторой отрасли буквой X с индексом, равным номеру данной отрасли, то можно записать два важнейших соотношения, отражающих сущность МОБ и являющихся основой его экономико-математической модели.

Во-первых, рассматривая схему баланса по столбцам, можно сделать вывод, что итог материальных затрат любой потребляющей отрасли и ее условно чистой продукции равен валовой продукции этой отрасли. Данный вывод можно записать в виде соотношения:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + Z_j; \qquad j = \overline{1,n}. \tag{1}$$

Напомним, что величина условно чистой продукции Zj равна сумме амортизации, оплаты труда и чистого дохода j-й отрасли.

Во-вторых, рассматривая схему МОБ по строкам для каждой производящей отрасли, можно видеть, что валовая продукция той или иной отрасли равна сумме материальных затрат потребляющих ее продукцию отраслей и конечной продукции данной отрасли:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i; \qquad i = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Формула описывает систему из n уравнений, которые называются уравнениями распределения продукции отраслей материального производства по направлениям использования.

Просуммируем по всем отраслям уравнения (1), в результате получим:

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} Z_j.$$

Аналогичное суммирование уравнений (2) дает:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Левые части обоих равенств равны, так как представляют собой весь валовой общественный продукт. Первые слагаемые правых частей этих равенств также равны, их величина равна итогу первого квадранта. Следовательно, должно соблюдаться соотношение

$$\sum_{j=1}^{n} Z_j = \sum_{i=1}^{n} Y_i .$$

Левая часть данного уравнения есть сумма третьего квадранта, а правая часть итог второго квадранта. В целом же это уравнение показывает, что в межотраслевом балансе соблюдается важнейший принцип единства материального и стоимостного состава национального дохода.

1.13 Лекция №14,15,16 (6 часа)

Тема: «Балансовая модель»

1.13.1 Вопросы лекции:

1. Экономико-математическая модель межотраслевого баланса
2. Коэффициенты прямых и полных материальных затрат
3. Межотраслевые балансы модели в анализе экономических показателей

1.13.2 Краткое содержание вопросов

1. Экономико-математическая модель межотраслевого баланса.

Основу информационного обеспечения модели межотраслевого баланса составляет технологическая матрица, содержащая коэффициенты прямых материальных затрат на производство единицы продукции. Эта матрица является также основой экономико-математической модели межотраслевого баланса. Предполагается, что для производства единицы продукции в j-й отрасли требуется определенное количество затрат промежуточной продукции i-й отрасли, равное a_{ij}. Оно не зависит от объема производства в отрасли и является довольно стабильной величиной во времени. Величины a_{ij} называются *коэффициентами прямых материальных затрат* и рассчитываются следующим образом:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}; \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{1}$$

Определение 1. Коэффициента прямых материальных затрат показывает, какое количество продукции i-й отрасли необходимо, если учитывать только прямые затраты, для производства единицы продукции j-й отрасли.

С учетом формулы (1) систему уравнений баланса можно переписать в виде

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_i; \quad i = \overline{1, n}. \tag{2}$$

Если ввести в рассмотрение матрицу коэффициентов прямых материальных затрат $A=(a_{ij})$, вектор-столбец валовой продукции X и вектор-столбец конечной продукции Y:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix},$$

то система уравнений (2) в матричной форме примет вид

$$X = AX + Y. \tag{3}$$

Система уравнений (2), или в матричной форме (3), называется экономико-математической моделью межотраслевого баланса (моделью Леонтьева, моделью (затраты – выпуск»). С помощью этой модели можно выполнять три варианта расчетов:

- Задав в модели величины валовой продукции каждой отрасли (X_i), можно определить объемы конечной продукции каждой отрасли (Y_i):
$$Y = (E - A)\, X. \tag{4}$$
- Задав величины конечной продукции всех отраслей (Y_i), можно определить величины валовой продукции каждой отрасли (X_i):
$$Y = (E - A)^{-1}\, Y. \tag{5}$$
- Для ряда отраслей задав величины валовой продукции, а для всех остальных отраслей задав объемы конечной продукции, можно найти величины конечной продукции первых отраслей и объемы валовой продукции вторых, в этом варианте расчета удобнее пользоваться не матричной формой модели (3), а системой линейных уравнений (2). В формулах (4) и (5) Е обозначает единичную матрицу n-гопорядка, а $(E - A)^{-1}$ обозначает матрицу, обратную матрице (Е – А). Если определитель матрицы $(E - A)$ не равен нулю, т.е. эта матрица невырожденная, то обратная к ней матрица существует. Обозначим эту обратную матрицу через B, тогда систему уравнений в матричной форме (5) можно записать в виде
$$X = BY. \tag{5'}$$

Элементы матрицы В будем обозначать через b_{ij}, тогда из матричного уравнения (5') для любой i-й отрасли можно получить следующее соотношение:

$$X_1 = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} Y_j, \quad i = \overline{1, n}. \tag{6}$$

Из соотношений (6) следует, что валовая продукция выступает как взвешенная сумма величин конечной продукции, причем весами являются коэффициенты b_{ij}, которые показывают, сколько всего нужно произвести продукции i-й отрасли для выпуска в сферу конечного использования единицы продукции j-й отрасли. В отличии от коэффициентов прямых затрат a_{ij} коэффициенты b_{ij} называются *коэффициентами полных материальных затрат* и включает в себя как прямые, так и косвенные затраты всех порядков. Если прямые затраты отражают количество средств производства, израсходованных непосредственно при изготовлении данного продукта, то косвенные относятся в предшествующим стадиям производства и входят в производство продукта не прямо, а через другие (промежуточные) средства производства.

Определение 2. Коэффициенты полных материальных затрат b_{ij} показывает, какое количество продукции i-й отрасли нужно произвести, чтобы с учетом прямых и косвенных затрат этой продукции получить единицу конечной продукции j-й отрасли.

Коэффициенты полных материальных затрат можно применять, когда необходимо определить, как скажется на валовом выпуске некоторой отрасли предполагаемое изменение объемов конечной продукции всех отраслей:

$$\Delta X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \Delta Y_j, \tag{7}$$

где ΔX_i и ΔY_i – изменения (приросты) величин валовой и конечной продукции соответственно.

2. Коэффициенты прямых и полных материальных затрат

Переходя к анализу модели межотраслевого баланса, необходимо прежде всего рассмотреть основные свойства матрицы коэффициентов прямых материальных затрат *A*. Коэффициенты прямых затрат по определению являются неотрицательными, следовательно, матрица *A* в целом может быть названа неотрицательной: $A \geq 0$. Так как процесс воспроизводства нельзя было бы осуществлять, если бы для собственного воспроизводства в отрасли затрачивалось большее количество продукта, чем создавалось, то очевидно, что диагональные элемента матрицы *A* меньше единицы: $a_{ij}<1$.

Система уравнений межотраслевого баланса является отражение реальных экономических процессов, в которых содержательный смысл могут иметь лишь неотрицательные значения валовых выпусков; таким образом, вектор валовой продукции состоит из неотрицательных компонентов и называется неотрицательным: $X \geq 0$. встает вопрос, при каких условиях экономическая система способна обеспечивать положительный конечный выпуск по всем отраслям. Ответ на этот вопрос связан с понятием ***продуктивности***матрицы коэффициентов прямых материальных затрат.

Будем называть неотрицательную матрицу *A* продуктивной, если существует такой неотрицательный вектор $X \geq 0$, что

$$X > AX. \tag{8}$$

Очевидно, что условие (8) означает существование положительного вектора конечной продукции $Y > 0$ для модели межотраслевого баланса (3).

Проблема продуктивности матрицы исследована в экономико-математической литературе достаточно детально. Сформулируем основные результаты в виде следующего утверждения.

Для того чтобы матрица коэффициентов прямых материальных затрат *A* была продуктивной, необходимо и достаточно чтобы выполнялось условие:

матрица (E – A) неотрицательно обратима, т.е. существует обратная матрица $(E - A)^{-1} \geq 0$.

Более простым, но только достаточным признаком продуктивности матрицы *A* является ограничение на величину ее нормы, т.е. на величину наибольшей суммы элементов матрицы *A* в каждом столбце. Если норма матрицы *A* строго меньше единицы, то эта матрица продуктивна; повторим, что данное условие является только достаточным, и матрица *A* может оказаться продуктивной и в случае, когда ее норма больше единицы.

Перейдем к анализу матрицы коэффициентов полных материальных затрат, т.е. матрицы $B = (E - A)^{-1}$. Согласно определению 2 из предыдущего параграфа коэффициент этой матрицы показывает, сколько всего нужно произвести продукции i-й отрасли, чтобы получить единицу конечной продукции j-й отрасли.

Дадим другое определение коэффициента полных материальных затрат исходя из того, что кроме прямых затрат существуют косвенные затраты той или иной продукции при производстве продукции данной отрасли. Рассмотрим в качестве примера формирование затрат электроэнергии на выпуск стального проката, при этом ограничимся технологической цепочкой «руда-чугун-сталь-прокат». Затраты электроэнергии при получении проката из стали будут называться прямыми затратами, те же затраты при получении стали из чугуна будут называться косвенными затратами 1-го порядка, а затраты электроэнергии при получении стали из чугуна будут называться косвенными затратами электроэнергии на выпуск стального проката 2-го порядка и т.д. В связи со сказанным выше имеет место следующее определение.

Определение 3. Коэффициентом полных материальных затрат c_{ij} называется сумма прямых затрат и косвенных затрат продукции i-й отрасли для производства единицы продукции j-й отрасли через все промежуточные продукты на всех предшествующих стадиях производства. Если коэффициент косвенных материальных затрат k-го порядка обозначить через $a_{ij}^{(k)}$, то имеет место формула

$$c_{ij} = a_{ij} + a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} + \ldots + a_{ij}^{(k)} + \ldots, \qquad (9)$$

а если ввести в рассмотрение матрицу коэффициентов полных материальных затрат $C=(c_{ij})$ и матрицы коэффициентов косвенных материальных затрат различных порядков $A^{(k)}=(a_{ij}^{(k)})$, то поэлементную формулу (9) можно записать в более общем матричном виде:

$$C = A + A^{(1)} + A^{(2)} + \ldots + A^{(k)} + \ldots \qquad (10)$$

Исходя из содержательного смысла коэффициентов косвенных затрат можно записать ряд матричных соотношений:

$A^{(1)} = AA = A^2$; $A^{(2)} = AA^{(1)} = AA^2 = A^3$;

$A^{(k)} = AA^{(k-1)} = AA^k = A^{k+1}$,

с использованием которых матричная формула (10) может быть переписана в следующем виде:

$$C = A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{k+1} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} A^k. \qquad (11)$$

3.Межотраслевые балансы модели в анализе экономических показателей

К числу важнейших аналитических возможностей данного метода относится определение прямых и полных затрат труда на единицу продукции и разработка на этой основе балансовых продуктово-трудовых моделей, исходной моделью при этом служит отчетный межпродуктовый баланс в натуральном выражении. В этом балансе по строкам представлено распределение каждого отдельного продукта на производство других продуктов и конечное потребление (первый и второй квадранты схемы межотраслевого баланса). Отдельной строкой дается распределение затрат живого труда в производстве всех видов продукции; предполагается, что трудовые затраты выражены в единицах труда одинаковой степени сложности.

Обозначим затраты живого труда в производстве j-го продукта через L_j, а объем производства этого продукта (валовой выпуск), как и раньше, через X_j. Тогда прямые затраты труда на единицу j-го вида продукции (коэффициент прямой трудоемкости) можно задать следующей формулой:

$$t_j = \frac{L_j}{X_j}; \quad j = \overline{1,n}. \qquad (1)$$

Введем понятие полных затрат труда как суммы прямых затрат живого труда и затрат овеществленного труда, перенесенных на продукт через израсходованные средства производства. Если обозначить величину полных затрат труда на единицу продукции j-го вида через T_j, то произведения вида $a_{ij}T_j$ отражают затраты овеществленного труда, перенесенного на единицу j-го продукта через i-е средство производства; при этом предполагается, что коэффициенты прямых материальных затрат a_{ij} выражены в натуральных единицах. Тогда полные трудовые затраты на единицу j-го вида продукции (коэффициент полной трудоемкости) будут равны

$$T_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} T_i + t_j; \quad j = \overline{1,n}. \qquad (2)$$

Введем в рассмотрение вектор-строку коэффициентов прямой трудоемкости $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ и вектор-строку коэффициентов полной трудоемкости $T = (T_1, T_2, \ldots, T_n)$.

Тогда с использованием уже рассматриваемой выше матрицы коэффициентов прямых материальных затрат *A* (в натуральном выражении) систему уравнений (2) можно переписать в матричном виде:

$$T = TA + t. \qquad (3)$$

Произведя очевидные матричные преобразования с использованием единичной матрицы E

$$T - TA = TE - TA = T(E - A) = t,$$

получим следующее соотношение для вектора коэффициентов полной трудоемкости:

$$T = t(E - A)^{-1}. \qquad (4)$$

Матрица (E – A) нам уже знакома, это матрица В коэффициентов полных материальных затрат, так что последнее равенство можно переписать в виде

$$T = tB \qquad (4')$$

Обозначим через L величину совокупных затрат живого труда по всем видам продукции, которая с учетом формулы (1) будет равна

$$L = \sum_{j=1}^{n} L_j = \sum_{j=1}^{n} t_j X_j = tX \qquad (5)$$

Используя соотношения (5), приходим к следующему неравенству:

$$tX = TY, \qquad (6)$$

здесь t и T – вектор-строки коэффициентов прямой валовой и конечной продукции соответственно.

Соотношение (6) представляет собой основание балансовое равенство в теории межотраслевого баланса труда. В данном случае его конкретное экономическое содержание заключается в том, что стоимость конечной продукции, оцененной по полным затратам труда, равна совокупным затратам живого труда. Сопоставляя потребительский эффект различных взаимозаменяемых продуктов с полными трудовыми затратами на их выпуск, можно судить о сравнительной эффективности их производства. С помощь показателей полной трудоемкости более полно и точно, чем при использовании существующих стоимостных показателей, выявляется структура затрат на выпуск различных видов продукции и прежде всего соотношение между затратами живого и овеществленного труда.

На основе коэффициентов прямой и полной трудоемкости могут быть разработаны межотраслевые и межпродуктовые балансы затрат труда и использования трудовых ресурсов. Схематически эти балансы строятся по общему типу матричных моделей, однако все показатели в них (межотраслевые связи, конечный продукт, условно истая продукция и др.)

Развитие основной модели межотраслевого баланса достигается также путем включения в нее показателей фондоемкости продукции. В простейшем случае модель дополняется отдельной строкой, в которой указаны в стоимостном выражении объемы производственных фондов Φ_j, занятые в каждой j-й отрасли. На основании этих данных и объемов валовой продукции всех отраслей определяются коэффициенты прямой фондоемкости продукции j-й отрасли:

$$f_j = \frac{\Phi_j}{X_j}; \quad j = \overline{1, n}. \qquad (7)$$

Коэффициент прямой фондоемкости показывает величину производственных фондов, непосредственно занятых в производстве данной отрасли, в расчете на единицу ее валовой продукции. В отличии от этого показателя коэффициент полной фондоемкости Fj отражает объем фондов, необходимых во всех отраслях для выпуска единицы конечной продукции j-й отрасли. Если a_{ij} – коэффициент прямых материальных затрат, то для коэффициента полной фондоемкости справедливо равенство, аналогичное равенству (2) для коэффициента полной трудоемкости:

$$F_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} F_i + f_j; \quad j = \overline{1, n}, \qquad (8)$$

Если ввести в рассмотрение вектор-строку коэффициентов прямой фондоемкости $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ и вектор-строку коэффициентов полной фондоемкости $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$, то систему уравнений (8) можно переписать в матричной форме:

$$F = FA + f, \qquad (9)$$

откуда с помощью преобразований, аналогичных применяемым выше для коэффициентов трудоемкости, можно получить матричное соотношение

$$F = fB, \qquad (10)$$

где $B = (E - A)^{-1}$ – матрица коэффициентов полных материальных затрат.

Для более глубокого анализа необходимо дифференцировать фонды на основные и оборотные, а в пределах основных – на здания, сооружения, производственное оборудование, транспортные средства и т.д.

1.14 Лекция №17,18 (6 часа)

Тема: «Модели экономического роста»

1.14.1 Вопросы лекции:

1. Однофакторные модели экономического роста
2. Многофакторная модель экономического роста Солоу

1.14.2 Краткое содержание вопросов

1. Однофакторные модели экономического роста

Макроэкономика изучает функционирование экономической системы как единого целого, с точки макроподхода.

При макроподходе объект (будь это такая сложная система как народное хозяйство, или его составные части : промышленность. сельское хозяйство, транспорт и т.д.) рассматриваются как единое целое и как бы снаружи, со стороны.

Макроэкономическая модель представляет собой математически формализованную концепцию функционирования народного хозяйства как единого целого. Макромодели используются для теоретического анализа наиболее общих закономерностей функционирования и развития национальной экономики. Важным полем применения макроэкономических моделей является прогнозирование народнохозяйственных процессов. Для этого используют производственные функции, модели оптимизации соотношения норм накопления и норм потребления, оптимизации национального дохода, валовых капиталовложений и др.

Основные назначения макромоделей:

- анализ структуры и динамики народного хозяйства;
- прогнозирование развития народного хозяйства;
- исследование экономических циклов;
- повышение эффективности государственного регулирования экономики;
- формирование основы для разработки оптимальных планов развития экономических систем.

В теоретической экономике , применяющей математический аппарат для моделирования и исследования социально-экономических процессов и явлений, разработаны и применяются два основных принципа моделирования: экономического роста и экономического равновесия.

Принцип экономического роста позволяет моделировать динамику социально-экономических процессов, принцип экономического равновесия – статику.

Исследование проблем экономического роста можно проводить, используя аппарат математического моделирования. Модель экономического роста – это обычно математико-статистическая модель, описывающая темпы роста, пропорции, направления и условия развития экономики. Эти модели позволяют проводить анализ отдельных зависимостей и тенденций в экономике, а также прогнозировать и планировать ее развитие. Часто объектом исследования являются темпы равновесного роста, в которых равновесие понимается в смысле устойчивых темпов роста при соблюдении определенных пропорций, балансирующих экономику страны. К таким пропорциям относят: соотношение между накоплением и потреблением в национальном доходе, между численностью населения в трудоспособном возрасте и числом занятых в общественном производстве, между наличным фондом капитальных вложений и потребным объемом производственных фондов и т.д. К основным факторам, которые определяют экономический рост в моделях, обычно относят: капиталовложения, производственные фонды, производительность труда, численность и динамику населения, научно-технический прогресс и некоторые другие.

Выделяют однофакторные (односекторные) и многофакторные модели экономического роста.

Однофакторную модель экономического роста можно назвать моделью естественного роста. Предполагается, что прирост продукции, выпускаемой экономической системой, в последующую единицу времени, обычно год, пропорционален абсолютному значению этого показателя.

Пусть прирост национального дохода за год пропорционален величине самого национального дохода Y_t с постоянным коэффициентом n т.е.

$$Y_{t+1} - Y_t = nY_t .$$

В этом случае, зная значение национального дохода в базисном году Y_0 , можно вычислить значение Y для любого t:

$$Y_1 = Y_0 + nY_0 = Y_0(1+n) ,$$

$$Y_2 = Y_1 + nY_1 = Y_0(1+n)^2 ,$$

……………………………….

$$Y_t = Y_0(1+n)^t .$$

Если принять, что рост национального дохода – непрерывная и непрерывно дифференцируемая функция времени t, то прирост национального дохода можно выразить в виде производной:

$$\frac{dY_t}{dt} = nY_t .$$

Преобразовав это уравнение к виду $\frac{dY_t}{Y_t} = ndt$ и проинтегрировав его, получим: $InY_t = nt + InY_0$ или $In(Y_t/Y_0) = nt$, откуда $Y_t = Y_0e^{nt}$.Данная модель отражает рост национального дохода во времени, но не выявляет факторы роста и механизм их взаимодействия.

Одним из важнейших факторов роста экономики считают капитальные вложения, поскольку именно этот фактор дает возможность строить и развивать производственные предприятия, приобретать новые станки и оборудование, осваивать новые месторождения и т.п.

Роль капитальных вложений можно отразить с помощью следующей простейшей модели Дж.М.Кейнса, в которой центральное место занимает понятие мультипликатора.

Под мультипликатором понимается количественное соотношение, выражающее зависимость между динамикой капиталовложений и вызываемым ею темпом роста национального дохода.

Мультипликатор представляет собой коэффициент, показывающий, во сколько раз возрастает доход при данном росте инвестиций. Так, если ΔY есть прирост национального дохода, а ΔК – прирост инвестиций, то выполняется соотношение

$$\Delta Y = k\Delta K$$

где k – коэффициент мультипликации, или мультипликатор.

Из равенства следует, что $k = \Delta Y/\Delta K$. С другой стороны, согласно кейнсианской теории, общий объем национального дохода, выраженного в данном случае в приросте, используется для покрытия расходов на непроизводственное потребление (ΔC) и новые инвестиции (ΔК). Заменяя в последнем равенстве ΔК на разность (ΔY-ΔC), получаем

$$k = \Delta Y/(\Delta Y - \Delta C).$$

Разделив числитель и знаменатель на одну и ту же величину, приходим к окончательной записи формулы мультипликатора:

$$k = 1/(1 - \Delta C/\Delta Y),$$

где $\Delta C/\Delta Y$ есть доля прироста фонда потребления в приросте национального дохода. Кейнс и его последователи называют эту величину "предельной склонностью к потреблению". Приняв определенные условия и измерив численно "предельную склонность к потреблению", можно проследить множественный эффект, производимый данным приростом инвестиций на прирост национального дохода ΔY. В самом деле, обозначив «предельную склонность к потребителю» $\Delta C/\Delta Y$ через n и подставив ее в значение мультипликатора k, полученное в, будем и меть

$$\Delta Y = \Delta K/(1 - n).$$

В уравнении прирост национального дохода выражен как функция от прироста инвестиций.

2. Многофакторная модель экономического роста Солоу

Состояние экономики в модели Солоу задается пятью переменными состояния: Y – конечный продукт, L – наличные трудовые ресурсы, K – производственные фонды, I – инвестиции, C – размер непроизводственного потребления. Все переменные взаимосвязано изменяются во времени, т.е. являются функциями времени t, но аргумент t будет часто опускаться, хотя и будет подразумеваться по умолчанию.

Время будет предполагаться непрерывным. Для мгновенных показателей K, L можно считать, что K, L – соответственно фонды и трудовые ресурсы в момент t или, чтобы избежать сезонных изменений числа занятых и всплеска фондов при вводе новых мощностей, K и L можно считать средними значениями этих величин за год, серединой которого служит t. Для величин же Y, C, I их значения в момент t можно себе представить, как их объемы, накопленные за год, серединой которого служит момент t (но и в этом случае они остаются функциями времени и их же лучше воспринимать как мощность производства и мгновенные скорости потребления и инвестирования).

Считается, что ресурсы (производственные и трудовые) используются полностью. Годовой конечный продукт в каждый момент времени является функцией среднегодовых фондов и труда:

$Y = F(K, L)$.

Таким образом, $Y = F(K, L)$ – производственная функция народного хозяйства.

Конечный продукт используется на непроизводственное потребление и инвестиции:

$Y = C + I$.

Назовем нормой накопления ρ долю конечного продукта, используемого на инвестиции, тогда

$I = \rho Y$, $C = (1 - \rho)Y$.

В дальнейшем норма накопления будет считаться постоянной: $\rho = \text{const}$, $0 < \rho < 1$.

Инвестиции используются на восстановление выбывших фондов и на их прирост. Если принять, что выбытие происходит с постоянным коэффициентом выбытия μ, $0 < \mu < 1$ (в расчете на год), то

$K = K(t + \Delta t) - K(t) = \rho Y \Delta t - \mu K \Delta t,$

поэтому $dK/dt = \rho Y - \mu K$.

Если считать, что прирост трудовых ресурсов пропорционален наличными трудовыми ресурсами, т.е. $\Delta L = vL \cdot \Delta t$, то получаем дифференциальное уравнение

$\mathrm{d}L/\mathrm{d}t = vL$ и, решая его, получаем $L = L_0 e^{vt}$, где $L_0 = L(0)$ – трудовые ресурсы в начале наблюдения, при $t = 0$.

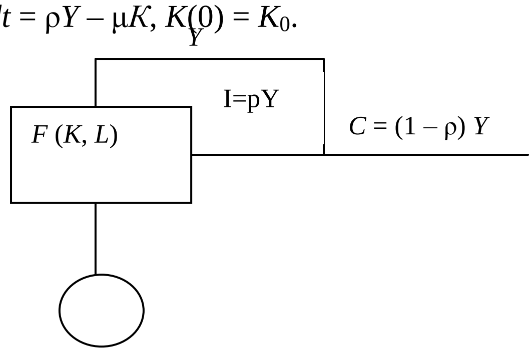
Таким образом, модель Солоу задается схемой или системой уравнений:

$C = (1 - \rho)\, Y;$

$Y = F\,(K, L);$

$L = L_0 e^{vt};$

$dK/dt = \rho Y - \mu K,\ K(0) = K_0.$



Функция $F\,(K, L)$;удовлетворяет требованиям к производственным функциям и считается линейно-однородной, т.е. $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F\,(K, L)$. Пользуясь ее однородностью и обозначив среднюю производительность труда $y = Y/L$ и среднюю фондовооруженность $k = K/L$, получаем

$y = Y/L = F\,(K, L)/L = F\,(K/L, 1) = F\,(k,1),$

а если обозначим последнюю функцию $f(k)$, то получаем $y = f(k)$.

Далее найдем производную от k по t:

$dk/dt = \mathrm{d}(K/L)/\mathrm{d}t = (K^{/}L - KL^{/})/L^2 = K^{/}/L - K(L^{/}/L^2) =$

$=(\rho Y - \mu K)/L - Kv/L = \rho y - (\mu + v)k.$

Окончательно:

$$dk/dt = \rho f(k) - (\mu + v)k,\ k(0) = k_0 = K_0/L_0.$$

Поведение макропоказателей модели целиком определятся данным уравнением и динамикой трудовых ресурсов $L = L_0 e^{vt}$.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

2.1 Лабораторная работа 1 (2 часа)

Тема: «Модели и экономико-математическое моделирование»

2.1.1 Цель работы: Сформировать навыки моделирования экономических процессов при помощи линейного программирования

2.1.2 Задачи работы:

1. Экономико-математические модели.
2. Изучить этапы разработки экономико-математической модели

2.1.3 Описание (ход) работы:

Для изучения различных экономических явлений экономисты используют их упрощенные формальные описания, называемые экономическими моделями. Примерами экономических моделей являются модели потребительского выбора, модели фирмы, модели экономического роста, модели равновесия на товарных, факторных и финансовых рынках и многие другие.

Большое число экономических задач сводится к линейным математическим моделям. Традиционно оптимизационные линейные математические модели называются моделями линейного программирования. Под линейным программированием понимается линейное планирование, т.е. получение оптимально плана решения в задачах, имеющих линейную структуру.

Основная задача линейного программирования звучит следующим образом:

Пусть некоторое предприятие имеет m видов производственных ресурсов, порядковый номер ресурсов – i, т.е. i=1, 2, 3,…, m.

Наличие каждого вида ресурсов известно и обозначаетсяb_i.

Предположим, что предприятие может производить n видов продукции, порядковый номер продукции – j, т.е. j=1, 2, 3,…, n.

Необходимо определить какое количество единиц продукции каждого вида надо производить (x_j). Чтобы получить максимум этой продукции в стоимостном выражении, если известно, что затраты на производство единицы продукции каждого вида ресурса (a_{ij}) единиц и цена реализации – c_j.

Модель экономической задачи состоит из трех частей:

1. Целевая функция (критерий оптимальности), описывающая конечную цель, преследуемую при решении задачи.
2. Система ограничений, которая включает основные и дополнительные ограничения. Основные ограничения описывают расход производственных ресурсов (консервативная часть модели), дополнительные – имеют различный характер (изменяемая часть модели, с помощью которой отражаются особенности моделируемой задачи).
3. Условие неотрицательности переменных величин.

Этапы разработки экономико-математической модели

1. Постановка задачи и обоснование критерия оптимальности;
2. Определение перечня переменных и ограничений;
3. Сбор информации и разработка технико-экономических коэффициентов и констант;
4. Построение модели и ее математическая запись;
5. Перенесение информации на машинные носители, решение задачи на ЭВМ;
6. Анализ результатов решения, корректировка модели, повторное решение задачи на ЭВМ по скорректированной модели;
7. Экономический анализ различных вариантов и выбор проекта плана.

В конкретных условиях в зависимости от характера задачи последовательность этапов моделирования экономических процессов может изменяться.

Постановка задачи и обоснование критерия оптимальности

Постановка задачи предполагает четкую экономическую формулировку, включающую цель решения, установления планового периода, выяснение известных параметров объекта и тех, количественное значение которых нужно определить, их производственно-экономических связей, а также множества факторов и условий, отражающих моделируемый процесс.

Цель решения задачи выражается количественно конкретным показателем, называемым критерием оптимальности. Он должен соответствовать экономической сущности решаемой задачи.

Существует достаточно большое количество локальных критериев оптимизации, используемых как в промышленном производстве, так и в сельском хозяйстве:

- максимум производства валовой продукции в стоимостном выражении;
- максимум валового дохода, представляющего разницу между валовой продукцией в стоимостном выражении и суммой материальных затрат на ее производство;
- максимум чистого дохода, измеряемого разницей между стоимостью валовой продукции и суммой издержек производства;
- максимум прибыли, измеряемой разницей между суммой денежных поступлений от реализации продукции и ее полной себестоимостью;
- минимум производственных затрат на заданный план производства продукции, исчисляемых по формуле:

$C=S + ak$,

где S – текущие производственные затраты; k – удельные капиталовложения; a – норма эффективности капиталовложений;

- максимум приведенной прибыли, измеряемой разницей между валовой выручкой за реализованную продукцию и приведенными затратами на ее производство;
- максимум денежных поступлений от реализации продукции;
- минимум производственных затрат на заданный план производства продукции.

Определение перечня переменных и ограничений.

Основные элементы базовой экономико-математической модели

Базовая модель включает в себя следующие элементы: переменные, целевая функция, ограничения, коэффициенты переменных в ограничениях модели и целевой функции, объемные показатели ограничений.

В постановке задачи должно быть четко определено, что является неизвестным, какие переменные величины и их численные значения необходимо найти в процессе решения.

Перечень переменных величин должен отражать характер, основное содержание моделируемого экономического процесса.

Количество переменных зависит от выбора планового периода (долгосрочный, среднесрочный, текущий), который оказывает существенное влияние на степень их детализации. Чем ближе период, на который составляется модель, тем больше детализация переменных. При планировании на более отдаленную перспективу (пятилетний план, план организационно-хозяйственного устройства на перспективу) необходимости в столь подробной детализации переменных нет.

Кроме того, количество переменных зависит и от того, насколько подробно в модели должны быть представлены следующие признаки: вид продукции; направление ее использования; способы, каналы и сроки производства и реализации продукции.

По экономической роли в моделируемом процессе все переменные классифицируются на *основные* и *вспомогательные*. Возможная классификация основных переменных приведена в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Виды основных переменных в экономико-математических моделях

Для промышленного производства	Для сельского хозяйства
1. Объемы производства продукции (бытовой техники, строительных и отделочных материалов, мебели, автомобилей и т.д.)	1. Объемы производства продукции отраслей растениеводства и животноводства
2. Количество сырья, используемого для промышленного производства	2. Поголовье сельскохозяйственных животных
3. Количество промышленного оборудования	3. Площади посева сельскохозяйственных культур, площади сельскохозяйственных угодий
	4. Количество сельскохозяйственной техники
	5. Количество минеральных удобрений
	6. Количество кормов

Вспомогательные переменные привлекают для облегчения математической формулировки условий, определения расчетных величин (объемов производства, показателей эффективности производства и т.д.).

При математической реализации задач для преобразования неравенств в равенства вводятся дополнительные переменные, которые используются при анализе промежуточных решений и оптимального варианта.

Единицы измерения переменных. Для каждой переменной устанавливают конкретную единицу измерения (шт., га, ц, чел.-ч. и т.д.). При этом руководствуются следующими требованиями.

1. Целесообразно выбирать одинаковые единицы измерения по однотипным группам переменных.
2. Единицыизмерения не должны затруднять анализ оптимального решения и вызывать дополнительные расчеты.
3. Технико-экономические коэффициенты нецелесообразно представлять слишком большими или слишком малыми числами.

После установления состава переменных определяют систему ограничений модели, отражающих условия реализации задачи. Ограничения, представленные в виде линейных неравенств и уравнений, отражают организационно-экономические и технологические условия и требования, которые характеризуют данное производство.

Ограничения записываются тремя типами линейных соотношений: меньше или равно (≤), больше или равно (≥) и равно(=). По своей роли в модели они подразделяются на основные, дополнительные и вспомогательные.

Основные ограничения выражают главные, наиболее существенные условия задачи. Они накладываются на все или большинствопеременных моделей. К основным относятся ограничения по использованию производственных ресурсов (сырья и материалов, энергоресурсов, оборудования, земли, рабочей силы, машинно-тракторного парка, удобрений, кормов, финансовых ресурсов и т. д.).

Дополнительные ограничения накладываются на небольшое количество переменных величин или отдельные переменные. Обычно они формулируются в виде неравенств, ограничивающих снизу и сверху потребление животными отдельных групп кормов, объемы производства некоторых видов промышленной и сельскохозяйственной продукции, удельный вес культур в полях севооборота, а также использование тракторов и сельскохозяйственной техники по маркам (промышленности – различных видов оборудования), площади под сельскохозяйственными культурами и др. При этом не следует перегружать модель дополнительными ограничениями, так как это приведет к сужению области допустимых решений.

Вспомогательные ограничения вводят для облегчения разработки числовой модели, обеспечения правильной формулировки экономических требований. Самостоятельного экономического значения не имеют. С помощью вспомогательных ограничений могут быть записаны условия пропорциональной связи между переменными или их группами.

Размерность величин каждого ограничения определяется размерностью его правой части. Если она, например, означает запас ресурсов труда в человеко-часах, то в левой части ограничения показатели по использованию трудовых ресурсов по всем видам деятельности также выражаются в человеко-часах.

Сбор информации и разработка технико-экономических коэффициентов

В зависимости от задачи и объекта, по которому эта задача должна быть построена, необходимо определить характер и объем информации, источники ее сбора и методы обработки.

Источниками информации служат годовые отчеты, производственно-финансовые и перспективные планы, планы организационно-хозяйственного устройства, данные первичного учета, технологические карты производства различных видов продукции, а также различные нормативные справочники.

Целью переработки исходной информации являются разработка и обоснование системы технико-экономических характеристик объекта или процесса. Для любой модели эти характеристики формируются в виде технико-экономических коэффициентов a_{ij}, коэффициентов целевой функции c_j и констант или объемных показателей ресурсов или продуктов b_i.

Технико-экономические коэффициенты представляют собой основную часть входной информации, которая поступает в модель как в преобразованном, так и не преобразованном виде. Коэффициенты можно подразделить на три группы: удельные нормативы затрат или выхода продукции; коэффициенты пропорциональности.

Удельные нормативы затрат или выхода продукции представляют собой технико-экономическую характеристику видов (способов) деятельности. По экономическому содержанию выделяют коэффициенты, характеризующие затраты i-го ресурса на единицу j-го вида деятельности – a_{ij}(затраты труда на единицу произведенной продукции, на 1 га, на голову скота и т. д.) и коэффициенты выхода – v_{ij} (урожайность сельскохозяйственных культур, продуктивность животных, содержание питательных веществ в единице корма и т.д.).

Удельные коэффициенты затрат и выхода рассчитывают на основе нормативных справочников, технологических карт, с использованием методов математической статистики и другими способами. От их достоверности зависит результат решения задачи. Единицы измерения этих величин определяются отношением единицы измерения b_i, к единице измерения x_j. Если, например, ограничение отражает условие по использованию трудовых ресурсов, а переменные выражены в штуках, то величины a_{ij} означают затраты трудовых ресурсов в человеко-часах на 1 штуку.

Коэффициенты пропорциональности (W_{ij}) – это коэффициенты при переменных в тех ограничениях, которые предусматривают определенные пропорции (соотношения) между зависимыми переменными.

Экономическое содержание коэффициентов в целевой функции (c_j) определяется характером критерия оптимальности Числовое значение критерия оптимальности чаще всего исчисляется как сумма произведений коэффициентов целевой функции и значений переменных, то есть $\sum c_j x_j$.

Построение модели и ее математическая запись. Символика обозначений

Модель можно описать развернуто в виде системы неравенств и уравнений.

Однако при достаточно большом числе переменных и ограничений такая запись громоздка, уменьшает обозримость и затрудняет чтение. Для более компактной записи используют общепринятую систему условных обозначений переменных величин, технико-экономических коэффициентов, констант и коэффициентов при переменных в целевой функции.

Для обозначения переменных величин наиболее употребительным символом является строчная или заглавная латинская буква *x, X.* Каждая конкретная переменная вводится в модель с соответствующим подстрочным индексом – порядковым номером – 1, 2, 3, ..., *n.* Она обозначается $x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n$, где *n* – порядковый номер последней переменной Символ *n*показывает общее количество переменных в модели. Используя общий индекс *j*, необходимо указать, в каких пределах изменяются номера переменных. Например, вместо обозначения переменных с порядковыми номерами вводится x_j ($j=1, 2, ..., n$), то есть *j*изменяется от 1 до *n.* Такая запись показывает, что в группу с индексом *j* входит *n* переменных. Это же выражение можно записать с использованием символа принадлежности к некоторому множеству ($\in$). Например, x_j($j \in A$). Здесь индекс *j* принадлежит множеству *A,* в которое входят переменные x_1, x_2, ..., x_n. Для обозначения множества используют заглавные или строчные буквы латинского алфавита — *A, B, D, E, I, J, M* и др. Символы, обозначающие множества, могут иметь числовые или буквенные индексы. Например**,** $A_1, A_2, ..., A_n$.

Для обозначения правых частей ограничений (или констант) чаще всего используют строчную или заглавную латинскую букву *B, b.* Как правило, все константы имеют один индекс, показывающий принадлежность к конкретному ограничению. Например, $b_1, b_2, ..., b_m$. Для обозначения порядкового номера ограничения используют чаще всего индекс *i*. Количество ограничений обозначается буквой *m* ($i=l, 2, ..., m$). В общем виде константа записывается так: b_i - ($i= 1, 2, .., i,... m$), или b_i($i \in M$), где *M*— множество, включающее номера указанных ограничений от 1 до *m.*

Технико-экономические коэффициенты (типа удельных затрат) чаще всего обозначаются строчной латинской буквой a_{ij}, где *i* – номер ограничения, *j* – номер переменной. Коэффициенты могут также обозначать норму выпуска, выхода продукции (урожайность сельскохозяйственных культур, производительность оборудования и т. д.), производительность машин и др. – строчная латинская буква v_{ij}. Коэффициенты пропорциональности, с помощью которых записывают соотношения между отдельными переменными величинами или их группами, чаще всего обозначаются символом W_{ij}.

В общем случае коэффициенты в ограничениях обозначаются соответственно a_{ij}, v_{ij}, W_{ij}.

Размерность указанных технико-экономических нормативов затрат — выпуска и коэффициентов должна соответствовать размерности, принятой для *i*-го ограничения константы (b_i), деленной на размерность переменной x_j. Например, переменная x_5означает площадь посева многолетних трав на сено в гектарах, а константа b_7 – объем кормов, выраженный в ц корм. ед., тогда размерность коэффициента в седьмом ограничении при пятой переменной (v_{75}) будет выражаться в ц корм. ед. на 1 га.

Коэффициент при переменных в целевой функции чаще всего имеет один индекс, который показывает его принадлежность *j*-ой переменной. Обозначается коэффициент целевой функции латинской строчной буквой ***c***. Например, по переменным x_4, x_5, x_6он будет обозначаться соответственно c_4, c_5, c_6, или в общем случае c_j($j=4, 5, 6$).

Для компактной записи условий модели используют арифметические знаки «+», «-», знаки умножения и суммирования $\sum$. Так, произведение технико-экономического коэффициента a_{11} и переменной x_1 записывают $a_{11} \cdot x_1$, а в общем случае $a_{ij} \cdot x_j$; произведение коэффициента целевой функции c_1 и переменной $x_1 – c_1x_1$, а в общем виде c_jx_j. Если нужно записать суммы произведений коэффициентов и значений переменных, используют знак суммирования $\sum$. Например, компактную запись левой части условия $a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3$

$+ \ldots + a_{18} \cdot x_8$ можно осуществить так:

$$\sum_{j=1}^{8} a_{1j} x_j$$

Под индексом суммирования записывают индекс переменных, по которым идет суммирование, а над ним — номер последней переменной. Та же запись может быть осуществлена иначе:

$$\sum_{j \in A_1} a_{1j} x_j$$

где A_1—множество, включающее в себя номера переменных (1,2,...,8).

Ограничения по использованию производственных ресурсов в компактном виде записывают следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{8} a_{ij} x_j \le b_i \qquad (i = 1,2,\ldots,m)$$

или иначе:

$$\sum_{j \in A_1} a_{ij} x_j \le b_i \qquad (i \in I)$$

где I — множество ограничении (например, по использованию трудовых ресурсов, оборудования, земельных угодий).

Оба вида математической записи показывают, что сумма затрат i-го ресурса по всем переменным от 1 до n (первая запись) или по всем переменным, номера которых входят во множество A_1 (вторая запись), не должна превышать заданного объема этого ресурса b_i. Справа от последнего неравенства в скобках указывают, каким номерам ограничений соответствует данное условие. Как видно из первой записи, таких условий в модели m. Вторая запись показывает, что количество ограничений входит во множество I.

Наряду с математической записью системы линейных соотношений должны быть текстовые пояснения, разъясняющие содержание индексов. Рассмотрим запись условий по использованию производственных ресурсов и пояснения к ней:

$$\sum_{j \in A_1} a_{ij} x_j \le b_i \qquad (i \in I_1)$$

где j – индекс (или номер) переменной; A_1 – множество, включающее в себя номера этих переменных; i – индекс (номер) ограничения в модели; I_1 – множество, элементами которого являются номера ограничений по использованию производственных ресурсов; x_j – искомый размер переменной j-го вида; b_i – константы, обозначающие заданный объем производственного ресурса i-го вида; a_{ij} – технико-экономический коэффициент, отражающий заданные удельные затраты производственных ресурсов i-го вида в расчете на единицу j-й переменной.

Запись ограничений по заданному (гарантированному) объему выполнения работ или производства продукции осуществляется с использованием второго типа ограничений ($\ge$):

$$\sum_{j \in A_2} \upsilon_{ij} x_j \ge b_i \qquad (i \in I_2)$$

где A_2 – множество, включающее в себя номера переменных, обеспечивающих обязательное выполнение заданных объемов i-го вида работ или j-го вида продукции; I_2 – множество, включающее в себя номера ограничений по гарантированным объемам работ или продукции; v_{ij} – технико-экономический коэффициент, отражающий норму выпуска (выхода) продукции i-го вида или производительность по i-й работе в расчете на единицу j-й переменной.

Запись ограничений по соотношениям между переменными величинами может быть осуществлена следующим образом:

$$\sum_{j \in A_3} \upsilon_{ij} x_j \geq \sum_{j \in D_1} a_{ij} x_j \qquad (i \in I_3)$$

где A_3 – множество, включающее номера переменных по растениеводству; D_1 – множество, элементами которого являются номера переменных по животноводству; I_3 – множество, включающее номера ограничений по балансу кормов; v_{ij} – технико-экономические коэффициенты, означающие выход питательных веществ i-го вида в расчете на единицу j-й переменной по отраслям растениеводства; a_{ij} – технико-экономические коэффициенты, отражающие потребность в питательных веществах i-го вида в расчете на единицу j-й переменной по отраслям животноводства.

В данной математической записи условий по кормовому балансу показано, что общий выход кормов в отраслях растениеводства должен быть не менее потребности в них отраслей животноводства.

Для записи условий по соотношениям между переменными используют коэффициенты пропорциональности. Например, ограничение по удельному весу озимой ржи в общей площади зерновых культур записывается так:

$$x_j \leq\geq W_{ij} \sum_{j \in \grave{A}_1} x_j \qquad (i \in I_4)$$

где A_1 – множество, включающее в себя номера переменных, обозначающих площади посева зерновых культур; I_4 – множество, элементами которого являются номера ограничений по соотношениям посевных площадей сельскохозяйственных культур; W_{ij}– коэффициенты пропорциональности, отражающие удельный вес ограничиваемых культур в общей площади культур соответствующих групп.

Целевую функцию можно записать по-разному:

$$f(x) = \sum_{j \in A} c_j x_j \to \max(\min)$$

или

$$z = \sum_{j \in A} c_j x_j \to \max(\min)$$

где c_j – коэффициент целевой функции, конкретно выражающий критерий оптимальности на единицу j-й переменной

Так, при математической записи целевой функции, обеспечивающей максимум валовой продукции в денежном выражении, коэффициент ее c_jбудет выражать стоимость валовой продукции. Произведение $c_j x_j$ даст объем валовой продукции в стоимостном выражении, а сумма произведений $\sum_{j \in A} c_j x_j$ выражает общую стоимость валовой продукции по всем переменным, входящим в множество A.

Таким образом, разработку экономико-математических моделей различных производственных, хозяйственных, социально-экономических и других процессов необходимо осуществлять с использованием предложенной выше последовательности.

2.2 Лабораторная работа№ 2 (2 часа)

Тема: «Приемы моделирования»

2.2.1 Цель работы:Изучить приемы моделирования особенности их применения

2.2.2 Задачи работы:

1. Построение модели и ее математическая запись. Символика обозначений
2. Использование табличного редактора Excel для решения задач линейного программирования

2.2.3 Описание (ход) работы:

Упражнения

Задача 1

Для производства продукции типа $П_1$ и $П_2$ предприятие использует два вида сырья: $С_1$ и $С_2$. Данные об условиях производства приведены в таблице.

Сырье	Расход сырья на единицу продукции, кг/ед.		Количество сырья, кг
	$П_1$	$П_2$	
$С_1$	1	3	300
$С_2$	1	1	150
Прибыль на единицу продукции, тыс. руб.	2	3	-

Составить план производства по критерию максимум прибыли.

Решение

1. Состав переменных

x_1 – количество (единиц) продукции $П_1$;
x_2 – количество (единиц) продукции $П_2$.

2. Числовая модель

I. Целевая функция. Критерий оптимальности получение максимума прибыли от производственной деятельности. Следовательно,

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

II. Основные ограничения

В таблице представлены данные по расходу основных производственных ресурсов (сырье $С_1$ и $С_2$) на производство продукции $П_1$ и $П_2$. Используя данные таблицы, составим ограничения:

$1x_1 + 3x_2 \leq 300$
$1x_1 + 1x_2 \leq 150$

III. Условие неотрицательности переменных

$x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$

3. Общий вид экономико-математической модели

I. $Z = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max$

II. $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$

III. $x_j \geq 0$, (j=1, 2)

4. Структурная форма экономико-математической модели

I. $$Z = \sum_{j=1}^{2} c_j x_j \to \max$$

II. $$\sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,2$$

III. $$x_j \ge 0, \qquad j = 1,2$$

5. Решение задачи с использованием табличного редактора MSExcel

Чтобы решить задачу, используя табличный редактор MSExcel необходимо:

- Открыть табличный редактор (Пуск → Программы → MSExcel);
- Запишем числовую модель задачи на рабочий лист (рисунок 1.1). Для этого необходимо выбрать ячейки в которых будут находиться переменные. Допустим x_1→C1 x_2→C2 (выбор ячеек произволен).

В ячейке A1 запишем целевую функцию $Z = 2x_1 + 3x_2$: A1:=2*C1+3*C2

Примечание:запись формул всегда начинается со знака «=».

В ячейку B1 запишем левую часть 1-го ограничения ($1x_1 + 3x_2$)

B1:=C1+3*C2

В ячейку B2 запишем левую часть 2-го ограничения ($1x_1 + 1x_2$)

B2:=C1+C2

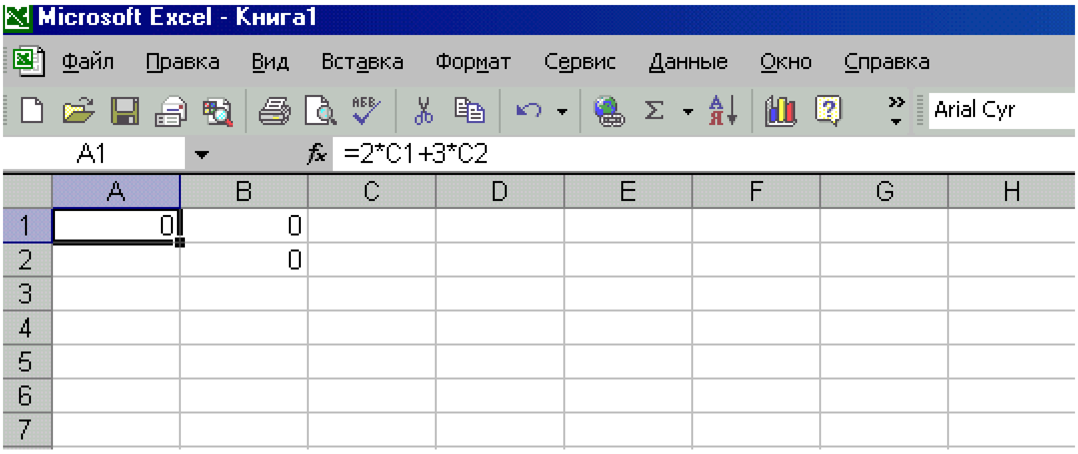


Рисунок 1.1 – Запись числовой модели на рабочем листе MSExcel

- После как числовая модель записана, необходимо установить курсор в ячейку A1 (в ней расположена целевая функция). Выбираем вкладку «Сервис» → «Поиск решения…», при этом откроется диалоговое окно функции «Поиск решения».
- В открывшемся окне необходимо установить целевую ячейку, а поскольку у вас курсор стоял на ячейке A1, то значение целевой ячейки будет правильным. В противном случае установите в ручную адрес целевой ячейки (в данном случае программа использует абсолютные адреса т.е. ячейка A1 имеет абсолютный адрес $A$1) (рисунок 1.2).
- Установите маркер в положение, соответствующие критерию оптимальности: максимальному или минимальному значению.

- В окне «Изменяя ячейки» нужно указать адреса ячеек соответствующие переменным. Для этого необходимо выделить диапазон ячейки с С1 по С2 (рисунок 1.2).

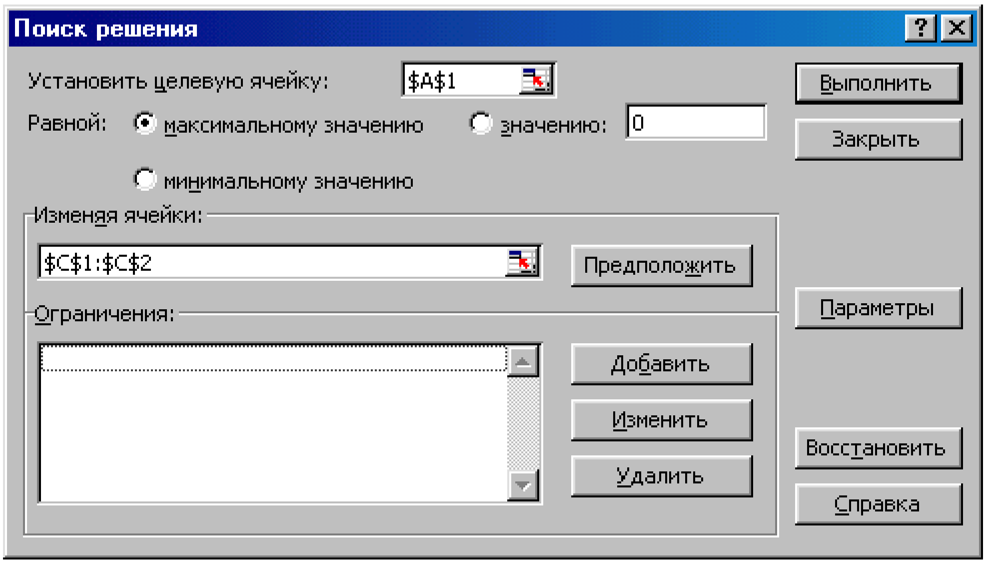


Рисунок 1.2 – Работа в диалоговом окне «Поиск решения»

- В окне «Ограничения» активировать кнопку «Добавить». Откроется окно «Добавить ограничения» (рисунок 1.3). Вводим первое ограничение: в окне «Ссылка на ячейку» указывают адрес ячейки, где находится левая часть 1-го ограничения - $B$1, затем выбирают знак ограничения « ≤ » и значение – 300.

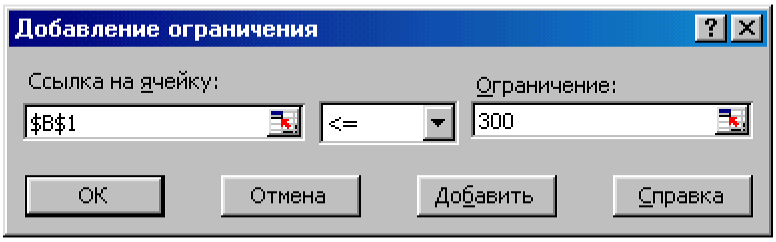


Рисунок 1.3 – Диалоговое окно «Добавление ограничения»

- Активируем клавишу «добавить» и аналогично вводим второе ограничение. Затем вводим условие неорицательности. Для этого в окне «Ссылка на ячейку» указываем диапазон ячеек, в которых находятся переменные ($C$1:$C$2). После добавления всех ограничений выбираем «ОК». Программа возвращается в диалоговое окно «Поиск решения». Ввод числовой модели закончен (рисунок 1.4).

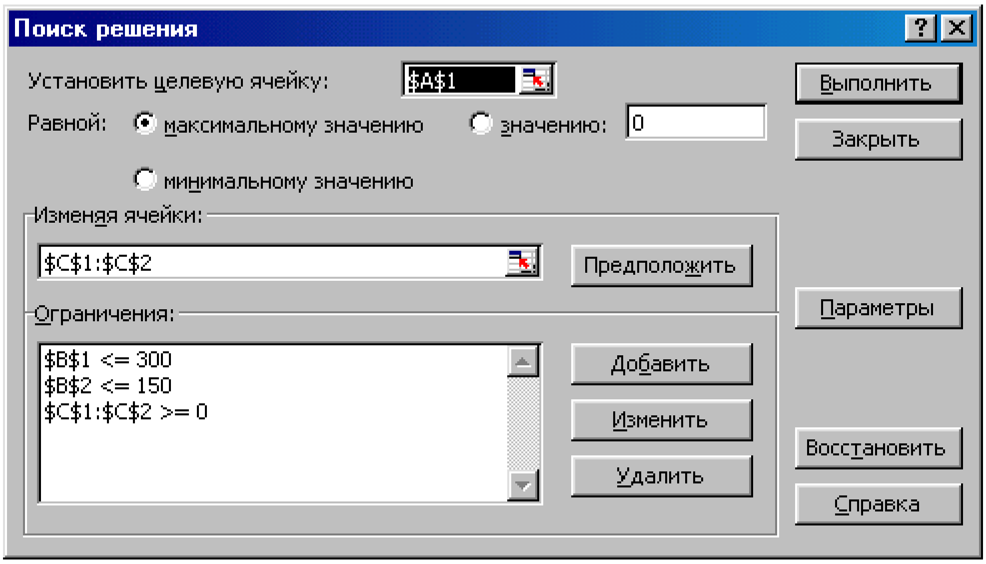


Рисунок 1.4 – Завершение ввода числовой модели в диалоговом окне «Поиск решения»

- Выбираем команду «Выполнить». На экране появится окно «Результаты поиска решения» (рисунок 1.5). Если модель составлена правильно и имеет решение, в открывшемся окне будет сообщение: «Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены». В окне «Тип отчета» выберите «Результаты» и нажмите «ОК».

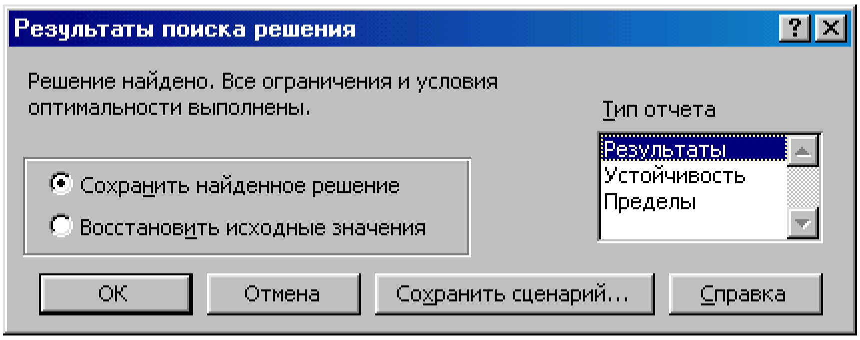


Рисунок 1.5 – Окно «Результаты поиска решения»

Результат решения задачи представлен в «Отчете по результатам» (рисунок 1.6). Решение задачи окончено.

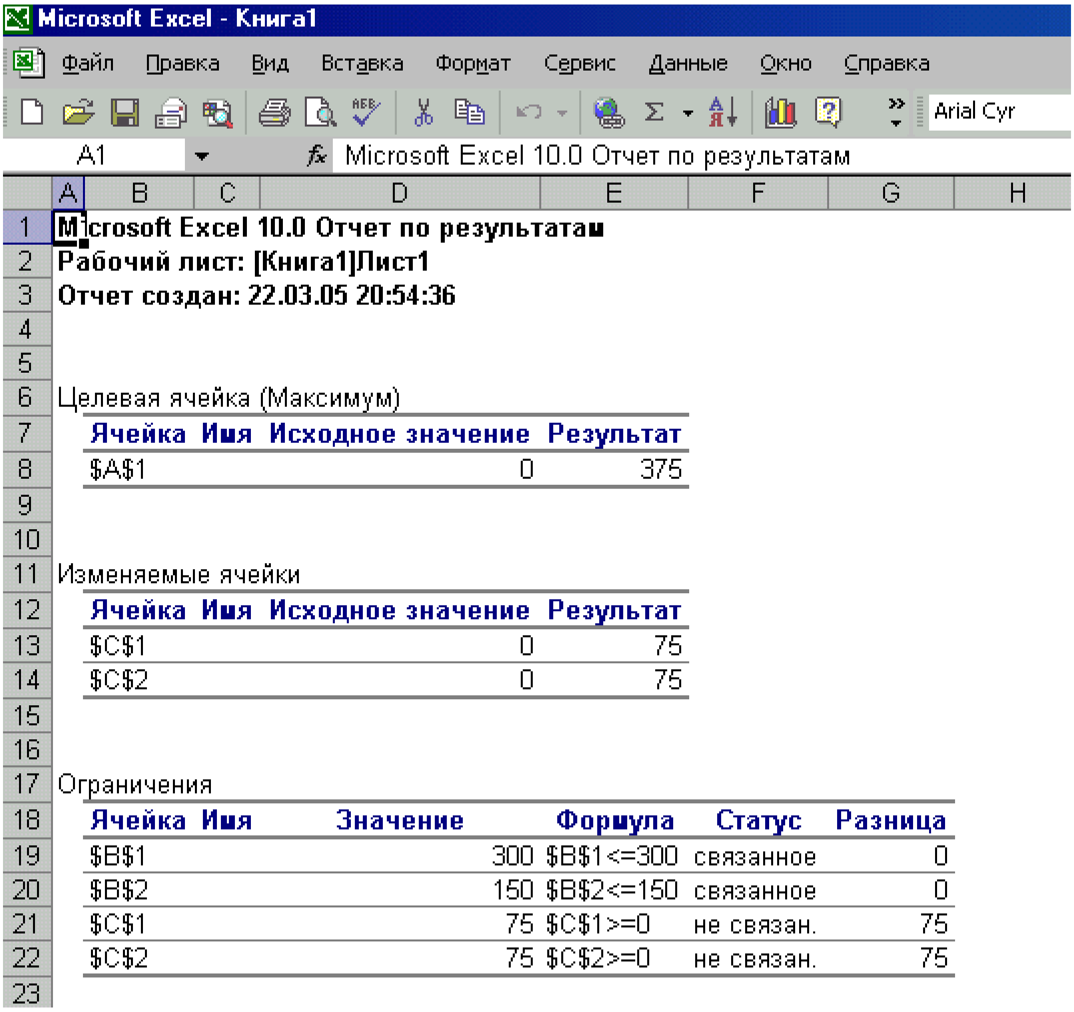


Рисунок 1.6 – Отчет по результатам

- Решение задачи окончено, результаты можно распечатать.

Примечание

Если поиск не может найти оптимальное решение, в диалоговом окне **Результаты поиска решения** выводится одно из следующих сообщений.

Поиск не может улучшить текущее решение. Все ограничения выполнены.

В процессе поиска решения нельзя найти такой набор значений влияющих ячеек, который был бы лучше текущего решения. Приблизительное решение найдено, но либо дальнейшее уточнение невозможно, либо погрешность, заданная в диалоговом окне **Параметры поиска решения** слишком высока. Измените погрешность на меньшее число и запустите процедуру поиска решения снова.

Поиск остановлен (истекло заданное на поиск время).

Время, отпущенное на решение задачи, исчерпано, но достичь удовлетворительного решения не удалось. Чтобы при следующем запуске процедуры поиска решения не повторять выполненные вычисления, установите переключатель **Сохранить найденное решение** или **Сохранить сценарий**.

Поиск остановлен (достигнуто максимальное число итераций).

Произведено разрешенное число итераций, но достичь удовлетворительного решения не удалось. Увеличение числа итераций может помочь, однако следует рассмотреть результаты, чтобы понять причины остановки. Чтобы при следующем запуске процедуры поиска решения не повторять выполненные вычисления, установите переключатель **Сохранить найденное решение** или нажмите кнопку **Сохранить сценарий**.

Значения целевой ячейки не сходятся.

Значение целевой ячейки неограниченно увеличивается (или уменьшается), даже если все ограничения соблюдены. Возможно следует в задаче снять одно ограничение или сразу несколько. Изучите процесс расхождения решения, проверьте ограничения и запустите задачу снова.

Поиск не может найти подходящего решения.

В процессе поиска решения нельзя сделать итерацию, которая удовлетворяла бы всем ограничениям при заданной точности. Вероятно, ограничения противоречивы. Исследуйте лист на предмет возможных ошибок в формулах ограничений или в выборе ограничений.

Поиск остановлен по требованию пользователя.

Нажата кнопка **Стоп** в диалоговом окне **Текущее состояние поиска решения** после прерывания поиска решения в процессе выполнения итераций.

Условия для линейной модели не удовлетворяются.

Установлен флажок **Линейная модель**, однако итоговый пересчет порождает такие значения, которые не согласуются с линейной моделью. Это означает, что решение недействительно для данных формул листа. Чтобы проверить линейность задачи, установите флажок **Автоматическое масштабирование** и повторно запустите задачу. Если это сообщение опять появится на экране, снимите флажок **Линейная модель** и снова запустите задачу.

При поиске решения обнаружено ошибочное значение в целевой ячейке или в ячейке ограничения.

При пересчете значений ячеек обнаружена ошибка в одной формуле или в нескольких сразу. Найдите целевую ячейку или ячейку ограничения, порождающие ошибку, и измените их формулы так, чтобы они возвращали подходящее числовое значение.

Набрано неверное имя или формула в окне **Добавить ограничение** или в окне **Изменить ограничение**, либо в поле **Ограничение** было задано целое или двоичное ограничение. Чтобы ограничить значения ячейки множеством целых чисел выберите оператор **целого** ограничения в списке условных операторов. Чтобы установить двоичное ограничение, выберите оператор для **двоичного** ограничения.

Интерпретация результатов задачи

Полученные значения в ячейках, содержащих формулы целевой функции или ограничений, являются результатом расчета целевой функции и соответствующих ограничений.

Результат, полученный в ячейке A1 означает прибыль, полученную от производства продукции.

Ячейки C1, C2 указывают нам на количество произведенной продукции.

В ячейке B1 записано 1-ое ограничение, характеризующее расход сырья C_1 на производство всех видов продукции. При этом получился результат равный 300, разница равна 0, что указывает на полный расход сырья данного вида.

В ячейке B2 записано второе ограничение, характеризующее расход сырья C_2 на производство продукции $П_1$ и $П_2$. Результат равен 150, разница равна 0, что полностью соответствует заданному ограничению (т.е. сырье C_2 израсходовано полностью).

Значение ячеек C1, C2 превышают 0, т.е. условие неотрицательности переменных выполнено.

Ответ

Максимальная прибыль возможна в размере 375 единиц.

Объем выпуска продукции: $П_1$ - 75 штук, $П_2$ - 75 штук.

Сырье C1 иC2 израсходовано полностью, условие неотрицательности выполнено.

Порядок оформления задачи

1. Состав переменных

x_1 – количество продукции $П_1$, единиц;

x_2 – количество продукции $П_2$, единиц.

2. Числовая модель

I. $Z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$

II. $1x_1 + 3x_2 \leq 300$

$1x_1 + 1x_2 \leq 150$

III. $x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

3. Общий вид экономико-математической модели

I. $Z = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max$

II. $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$

III. $x_j \geq 0$, (j=1, 2)

4. Структурная форма экономико-математической модели

I. $$Z = \sum_{j=1}^{2} c_j x_j \rightarrow \max$$

II. $$\sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1,2$$

III. $$x_j \geq 0, \qquad j = 1,2$$

5. Ответ: **м**аксимальная прибыль возможна в размере 375 единиц;

объем выпуска продукции: $П_1$ - 75 штук, $П_2$ - 75 штук;

сырье С1 иС2 израсходовано полностью,

условие неотрицательности выполнено.

Задача 2

Для выпуска четырех видов продукции требуются затраты сырья, рабочего времени и оборудования. Исходные данные приведены в таблице.

Тип ресурса	Нормы затрат ресурсов на единицу продукции				Наличие ресурсов
	1	2	3	4	
Сырье	3	5	2	4	60
Рабочее время	22	14	18	30	400
Оборудование	10	14	8	16	128
Прибыль на единицу продукции	30	25	8	16	

Необходимо формулировать экономико-математическую модель задачи на максимум прибыли и найти оптимальный план выпуска продукции.

Задача 3

Для выпуска четырех видов продукции P_1, P_2, P_3, P_4 на предприятии используют три вида сырья S_1, S_2 и S_3. объемы выделенного сырья, нормы расхода сырья и прибыль на единицу продукции при изготовлении каждого вида продукции приведены в таблице. Требуется определить план выпуска продукции, обеспечивающий наибольшую прибыль.

Составим экономико-математическую модель задачи оптимального использования ресурсов на максимум прибыли. В качестве неизвестных примем выпуска продукции j-го вида x_j (j = 1,2,3,4).

Вид сырья	Запасы сырья	Вид продукции			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	35	4	2	2	3
S_2	30	1	1	2	3
S_3	40	3	1	2	1
Прибыль		14	10	14	11

Задача 4

Фабрика выпускает три вида тканей, причем суточное плановое задание составляет не менее 90 м тканей первого вида, 70 м – второго и 60 м – третьего. Суточные ресурсы следующие: 780 единиц производственного оборудования,850 единиц сырья, 790 единиц электроэнергии, расход которых на один метр ткани представлен в таблица.

Ресурсы	Ткани		
	I	II	III
Оборудование	2	3	4
Сырье	1	4	5
Электроэнергия	3	4	2

Цена за один метр ткани вида I равна 80 денежным единицам, II – 70 денежным единицам, III – 60 денежным единицам.

Необходимо определить, сколько метров ткани каждого вида следует выпустить, чтобы общая стоимость выпускаемой продукции была максимальной.

Задача5

На основании информации, приведенной в таблице, составить план производства, максимизирующий объем прибыли.

Ресурсы	Затраты ресурсов на единицу продукции		Наличие ресурсов
	А	Б	
Труд	2	4	2000
Сырье	4	1	1400
Оборудование	2	1	800
Прибыль на единицу продукции	40	60	

2.3 Лабораторная работа №3(2 часа)

Тема: «Моделирование кормового рациона»

2.3.1 Цель работы: «Изучить особенности построения модели кормового рациона и ее решения»

2.3.2 Задачи работы:

1. Постановка задачи

2. Структурная модель

2.3.3 Описание (ход) работы:

4. Анализ и экономическая интерпретация полученных результатов

цель задачи можно выразить следующим образом: из имеющихся в сельскохозяйственном предприятии кормов составить такой рацион кормления, который полностью отвечал бы требованиям животных по содержанию в нем питательных веществ, соотношению отдельных видов и групп кормов и одновременно был самым дешевым для хозяйства. Критерием оптимальности чаще всего служит показатель минимум стоимости (себестоимости) рациона.

Основными переменными в экономико-математической задачи являются корма, имеющиеся в хозяйстве, а также корма, кормовые и минеральные добавки, которые хозяйство может приобрести. Единица измерения этих переменных являются весовые единицы – кг, ц в зависимости от периода, на который составляется, - сутки, год.

В экономико-экономической задаче, кроме основных, могут быть также вспомогательные переменные. Они чаще всего выражают суммарное количество кормовых единиц или переваримого протеина в рационе. С помощью этих переменных записывают условия по структуре рациона (удельному весу отдельных групп кормов).

Основные ограничения необходимы для записи условий по балансу питательных веществ. Технико-экономические коэффициенты в этих ограничениях обозначают содержание соответствующих питательных веществ в единице корма. Константы (объемы ограничений) показывают количество питательных веществ, которое должно содержаться в рационе.

С помощью дополнительных ограничений в задаче записывают условия по соотношению отдельных групп кормов в рационе и отдельных видов кормов внутри групп.

С помощью вспомогательных ограничений записывают условия по суммарному количеству кормовых единиц и переваримого протеина. Технико-экономические коэффициенты по основным переменным (так же, как и в основных ограничениях) отражают содержание питательных веществ в единице корма или кормовых добавок, по вспомогательным переменным минус 1. Константами в этих ограничениях являются нули.

Задача

Составить рацион для молочных коров весом 500 кг, с суточным удоем 10 кг так, чтобы стоимость рациона была минимальной. Исходные данные представлены в таблицах 1.2 и 1.3.

Таблица 1.2 - Потребность в питательных элементах

Питательные элементы	Затраты питательных элементов на поддержание жизни	Затраты питательных элементов на 1кг молока
Кормовые единицы, кг	5	0,5
Протеин, г	300	70
Кальций, г	20	3
Фосфор, г	10	4
Каротин, мг	150	25

Таблица 1.3 - Питательность и себестоимость 1 кг корма

Показатели	Концентрир	Сочные	Грубые	Минеральн

	ованные			ые и прочие
Кормовые единицы, кг	1,0	0,2	0,4	-
Протеин, г	100	10	20	-
Кальций, г	5	1	2	100
Фосфор, г	5	1	2	200
Каротин, мг	2	10	5	5
Себестоимость, руб.	5	2	3	5

Физиологические ограничения: дача сочных кормов в сутки не более 30 кг.
Экономические требования: дача концентрированных кормов в размере не менее 200 г, на каждый кг молока суточного удоя.

Решение

Расчет рациона производится на 1 животное, исходя из средних физиологических характеристик животных.

1. Состав переменных

x_1 – количество концентрированных кормов, кг;
x_2 – количество сочных, кг;
x_3 – количество грубых, кг;
x_4 – количество минеральных и прочих кормов, кг.

2. Числовая модель

I. Целевая функция должна выражать стоимость рациона. Причем стоимость должна быть минимальной, следовательно

$Z = 5x_1+2x_2+3x_3+5x_4 \rightarrow \min$

II. Основные ограничения

Первый вид ограничения будет выражать суточную потребность животных в кормовых единицах. Количество кормовых единиц, получаемых животным из концентрированных кормов составит 1,0 x_1, из сочных соответственно 0,2 x_2, из грубых – 0,4 x_3. Минеральные корма не содержат кормовые единицы. Следовательно животное в день может получить из различных видов кормов $1{,}0x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}4x_3$ кг кормовых единиц.

Потребность животного в кормовых единицах в сутки составит 10 кг (5+0,5·10, т.к. 5 кг тратится на поддержание жизни, 0,5·10 кг необходимо для производства молока). Тогда ограничение по содержанию кормовых единиц в суточном рационе животного будет иметь вид:

$1{,}0x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}4x_3 \geq 10$

Аналогично составляем ограничения по содержанию других питательных веществ:

по протеину: $100x_1 + 10x_2 + 20x_3 \geq 1000$
по кальцию: $5x_1 + 1{,}0x_2 + 2x_3 + 100x_4 \geq 50$
по фосфору: $5x_1 + 1{,}0x_2 + 2x_3 + 200x_4 \geq 50$
по каротину: $2{,}0x_1 + 10x_2 + 5x_3 + 5x_4 \geq 400$

Дополнительные ограничения

Условие, что суточная норма сочных кормов не должна превышать 30 кг будет иметь вид: $x_2 \leq 30$.

Условие, что на каждый 1 кг суточного удоя должно приходится не менее 200 г концентрированных кормов, будет иметь вид: $x_1 \geq 2$.

III. Условие неотрицательности переменных

$x_2 \geq 0$

$x_3 \geq 0$
$x_4 \geq 0$

3. Общий вид экономико-математической модели

I. $Z = c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4 \to \min$

II. $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \geq b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \geq b_2$
$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \geq b_3$
$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \geq b_4$
$a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 \geq b_5$

$x_2 \leq b_6$
$x_1 \geq b_7$

III. $x_j \geq 0$, j=2,3,4.

4. Структурная форма экономико-математической модели

I. $$Z = \sum_{j=1}^{4} c_j x_j \to \min$$

II. $$\sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1,2$$

$$\sum_{j=1}^{4} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 3,...,5$$

$$x_j \leq b_i, \qquad j = 2, i = 6$$

$$x_j \geq b_i, \qquad j = 1, i = 7$$

III. $$x_j \geq 0, \qquad j = 2,3,4$$

Ответ

Оптимальный рацион для коров 500 кг и суточный удой 10 кг, концентрированные – 3,26 кг, сочные – 30,00 кг, грубые - 18,70 кг, минеральные -0 кг. Минимальная стоимость рациона 132,39 руб.

Содержание кормовых единиц в рационе превышает минимально допустимую норму на 6,74 кг, кальция – на 33,7 г, фосфора – 33,7 г, содержание протеина и каротина в рационе строго соответствует норме.

Количество сочных кормов в рационе составило 30 кг, что соответствует максимальной норме. Количество концентратов превысило минимальный уровень (2кг) на 1,26 кг.

Минеральные вещества не вошли в рацион животных, потребность в минеральных веществах (кальций, фосфор) удовлетворяется другими, более экономически эффективными кормами.

2.4 Лабораторная работа №4,5 (4 часа)

Тема: «Моделирование производственной структуры аграрного предприятия»

2.4.1 Цель работы: Изучить особенности построения числовой модели производственной структуры аграрного предприятия

2.1.3 Описание (ход) работы:

1. Особенности постановки и формализации задачи.
2. Структурная модель.

2.4.3 Описание (ход) работы:

Экономико-математическая модель оптимизации производственной структуры – одна из основных в системе моделей оптимального планирования сельскохозяйственного производства.

Оптимальная специализация и сочетание отраслей в сельскохозяйственных предприятиях предполагает такие количественные соотношения между отдельными отраслями, которые позволяют эффективно использовать землю, труд и технику, то есть получить максимум продукции при данных ресурсах и обеспечить минимум затрат на единицу продукции.

В качестве критерия оптимальности чаще других выступает чистый доход.

Формализуем задачу. Введем условные обозначения:

Индексация:

- j – номер отрасли в хозяйстве ($j = 1 \ldots n$);
- J – множество, элементы которого номера отраслей;
- J_1 - множество, элементы которого номера отраслей в растениеводстве;
- J_2 - множество, элементы которого номера отраслей в животноводстве;
- i – номер ограничения;
- I_1 – множество, элементы которого – номера ограничений по использованию сельскохозяйственных угодий;
- I_2 – множество, элементы которого – номера ограничений по использованию трудовых ресурсов;
- I_3 – множество, элементы которого номера ограничений по определению оптимальных объемов производственных затрат;
- I_4 – множество, элементы которого – номера ограничений по органическим удобрениям;
- I_5 – множество, элементы которого – номера ограничений по кормовым ресурсам;
- I_6 – множество, элементы которого – номера ограничений по гарантированным объемам производства;
- I_7 – множество, элементы которого – номера ограничений, учитывающих агробиологические особенности производства.

Известные величины:

a_{ij} – коэффициенты затрат *i-го* вида ресурсов на единицу измерения по j-тому виду деятельности;

V_{ij} – коэффициенты выхода продукции *i-го* вида в расчете на единицу j-го вида деятельности;

B_i – объемы производственного ресурса i-го вида;

$V_{ij} = q_{ij} d_j$ по кормовым культурам, где

q_{ij} – содержание *i-го* вида питательного вещества в единице j-го корма;

d_j – доля продукции $j^{й}$ культуры используемая на корма;

Q_i – гарантированный объем производства *i-го* вида продукции;

C_j – денежное выражение товарной продукции, получаемой в расчете на единицу измерения j-го вида деятельности;

c_i – цена реализации продукции на особых условиях поставки;

W'_{ij}, W''_{ij} – коэффициенты связки, для отражения агробиологических особенностей производства.

Например: размещение посевов по предшественникам.

Переменные величины:

x_j – искомое значение размеров отраслей и интенсивности $j^{го}$ вида деятельности;

$\bar{x}_i$ - искомое значение производственных затрат.

2. Структурная модель

Требуется найти:

$$C = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \bar{x}_i \rightarrow \max \tag{1}$$

(где i при $\bar{x}_i$ принадлежит I_3)

При условиях:

9. Использование сельскохозяйственных угодий.

$$\sum_{j \in J_1} a_{ij} x_j \le B_i \quad где \, i \in I_1 \tag{2}$$

Условия этого вида гарантируют, что земельных ресурсов потребуется не больше чем их имеется. a_{ij}- *равно 1, если* x_j *измеряется в га, или обратному показателю урожайности, если* x_j *измеряется в ц.*

Обычно ограничения этой группы учитывают несколько условий – использование пашни различного качества, сенокосов и пастбищ различной продуктивности, орошаемых и неорошаемых земель.

10. Использование трудовых ресурсов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le в_i \qquad где \quad i \in I_2 \tag{3}$$

Это условие обычно представляется несколькими ограничениями по наиболее напряженным периодам работ и в целом на весь период.

Иногда возникает необходимость в определении целесообразности привлечения в отдельные периоды дополнительных трудовых ресурсов. Тогда вводится переменная, искомое значение которой – количество привлекаемых ресурсов труда в отдельные периоды.

11. Производственные затраты:

$$\sum_{J=1}^{n} \mathrm{a}_{ij} x_j = \bar{x}_i \quad где \quad i \in I_3 \tag{4}$$

или после преобразования: $\sum_{J=1}^{n} \mathrm{a}_{ij} x_j - \bar{x}_i = 0$

С помощью этих ограничений можно определить оптимальную структуру и объемы производственных затрат всех видов. Однако в целевой функции представлены только суммарные денежно-материальные затраты.

12. Использование органических удобрений:

$$\sum_{J \in J_1} a_{ij} x_j \le \sum_{j \in J_2} v_{ij} x_j \qquad где \, i \in I_4 \tag{5}$$

Левая часть ограничений представляет собой расход органических удобрений в растениеводческих отраслях, а правая – объем его выхода в отраслях животноводства. Ограничения этого вида гарантируют, что органических удобрений потребуется растениеводству не больше, чем будет их получено в животноводстве.

после преобразования: $\sum_{J \in J_1} a_{ij} x_j - \sum_{j \in J_2} v_{ij} x_j \leq 0$

13. Производство и использование кормов.

Обычно ограничения по этим условиям формируют оптимальный кормовой баланс для каждого вида животных и птицы. Модель этого процесса рассматривается в отдельной лекции.

Часто в модель предусматривают только балансирование по отдельным видам питательных веществ.

$$\sum_{j \in J_2} a_{ij} x_j \leq \sum_{j \in J_i} v_{ij} x_j + в_i \qquad где \quad i \in I_5 \tag{6}$$

где B_i – наличие кормов в хозяйстве.

В левой части показан расход кормов в животноводстве.

В правой части ограничения представлен объем производства кормов и их наличие в хозяйстве.

Производство кормов можно показать и более детально. Если вместо v_{ij} записать их значения $q_{ij}d_j$, то $\sum_{j \in J_i} q_{ij} d_j x_j$ – объем производства кормов в питательном веществе, например, производство белка.

В целом условие предусматривает, что животноводству потребуется кормов не больше, чем будет произведено растениеводством плюс наличный объем кормов.

После преобразования: $\sum_{j \in J_2} a_{ij} x_j - \sum_{j \in J_i} v_{ij} x_j + в_i \leq 0$

14. Гарантированные объемы производства. Объемы производства сельскохозяйственной продукции, обеспечивающие выполнение договорных обязательств и внутрихозяйственную потребность, минимально допустимый уровень концентрации поголовья скота и птицы и т.д. $\sum_{j=1}^{n} v_{ij} x_j \geq Q_i \qquad где \quad i \in I_6$ (7)

В правой части показан гарантированный объем производства продукции и реализация продукции сельского хозяйства. В левой части – производство этой продукции.

15. Условия по соотношению размеров производства по отдельным видам деятельности. Запись условий по агробиологическим особенностям производства, условия севооборотов, размещение культур по предшественникам, зеленый конвейер, повторные посевы и т.п.

$$\sum_{j \in J} W_{ij}^{/} x_j \leq \sum_{j \in J} W_{ij}^{//} x_j \quad где i \in I_7 \tag{8}$$

16. Условия неотрицательности переменных$x_{ij} \geq 0$; $\bar{x}_i \geq 0$ (9)

Здесь приведены основные типы ограничений задачи оптимизации производственной структуры. При решении конкретных задач все они включаются в модель, однако, кроме этого требуется в модели отразить и специфику предприятия, его производственное направление, стратегию ведения хозяйства, особенности местных условий. Например, модель зернового хозяйства и модель специализированного молочного хозяйства требуют разной инфраструктуры.

Задача 7

Определить оптимальное сочетание отраслей сельского хозяйства: растениеводства и животноводства, таким образом, чтобы получить максимальный выход товарной продукции (в качестве товарной - выступает продукция отрасли животноводства). Вся продукция отрасли растениеводства идет на корм скоту.

Производственные ресурсы:

пашня – 8000 га

трудовые ресурсы – 7500 ч. дн

энергоресурсы – 1000 тр. смен

Урожайность зерновых 10 ц/га (содержание кормовых единиц в 1 ц – 1,2 ц к.ед.), урожайность кукурузы на силос 150 ц/га (содержание кормовых единиц в 1ц – 0,2 ц к.ед.). Годовой удой 1 коровы 2500 кг, годовой прирост 1 свиньи 0,9 ц.

Таблица 1.4 - Удельные затраты производственных ресурсов

Показатели	Затраты труда, чел. дн.	Энергетические ресурсы, тр. смены	Расход кормовых единиц на 1ц продукции, ц к.ед
На 1 га зерновых	2	0,4	-
На 1 га кукурузы	20	4,0	-
На 1 ц молока	0,1	0,01	1,2
На 1 ц прироста живой массы свиней	1,5	0,02	7,0

Цена реализации 1 ц продукции:

зерна – 8 руб.,

силоса – 1 руб.,

молока – 18 руб.,

прирост свиней – 120 руб.

Валовое производство продукции животноводства равно произведению продуктивности животных (прирост живой массы от 1 головы, удой от 1 коровы) на поголовье.

Задача 8

Определить оптимальное сочетание отраслей сельского хозяйства: растениеводства и животноводства так, чтобы получить максимальный выход товарной продукции (в качестве товарной - выступает продукция отрасли животноводства – мясо КРС и свиней, молоко; продукция отрасли растениеводства – зерно). На корм идет 20% валового сбора зерна и весь силос.

Производственные ресурсы:

пашня – 10000 га,

трудовые ресурсы – 85000 ч. дн,

энергоресурсы – 15000 тр. смен,

пастбища – 1500 га.

Урожайность зерновых 20 ц/га (содержание кормовых единиц в 1 ц – 1,2 ц к.ед.), кукурузы на силос - 150 ц/га (содержание кормовых единиц в 1ц – 0,2 ц к.ед.). С 1 гаестественных пастбищ возможно получение 5 ц к.ед. Годовой удой 1 коровы 2500 кг, прирост живой массы 1 коровы – 2,5 ц, свиньи – 0,9 ц.

Таблица 1.5 - Удельные затраты производственных ресурсов

Показатели	Затраты труда, чел. дн.	Энергетические ресурсы, тр. смены	Расход кормовых единиц на 1ц продукции, ц к.ед
На 1 га зерновых	2,1	0,4	-
На 1 га кукурузы	20	4,0	-
На 1 ц молока	0,1	0,01	1,2
На 1 ц прироста живой массы КРС	2,0	0,01	5,0
На 1 ц прироста живой массы свиней	1,5	0,02	7,0
На 1 га естественных пастбищ	0,8	0,01	-

Цена реализации 1 ц продукции: зерна – 8 руб., силоса – 1 руб., молока – 16 руб., прироста КРС – 120 руб., прироста свиней – 80 руб.
Продать государству: зерна не менее 2600 ц, молока не менее – 800 ц, мяса – 150 ц.

Задача 9

Определить оптимальное сочетание отраслей сельского хозяйства: растениеводства и животноводства таким образом, чтобы получить максимальный выход товарной продукции (в качестве товарной - выступает продукция отрасли животноводства – мясо КРС и свиней, молоко; продукция отрасли растениеводства – зерно).

Производственные ресурсы: пашня – 10000 га,
трудовые ресурсы – 85000 ч. дн,
энергоресурсы – 15000 тр. смен,
пастбища – 1500 га.
Возможная распашка естественных пастбищ до 400 га.

Урожайность зерновых 20 ц/га (содержание кормовых единиц в 1 ц – 1,2 ц к.ед.), кукурузы на силос - 150 ц/га (содержание кормовых единиц в 1ц – 0,2 ц к.ед.). С 1 га естественных пастбищ возможно получение 5 ц к.ед. Годовой удой 1 коровы 2500 кг, прирост живой массы 1 коровы – 2,5 ц, свиньи – 0,9 ц. Содержание кормовых единиц в 1ц молока, которое идет на корм - 0,4 ц к.ед.

Таблица 1.6 - Удельные затраты производственных ресурсов

Показатели	Затраты труда, чел. дн.	Энергетические ресурсы, тр. смены	Расход кормовых единиц на 1ц продукции, ц к.ед
На 1 га зерновых	2,1	0,4	-
На 1 га кукурузы	20	4,0	-
На 1 ц молока	0,1	0,01	1,2
На 1 ц прироста живой массы КРС	2,0	0,01	5,0
На 1 ц прироста живой массы свиней	1,5	0,02	7,0
На 1 га естественных	0,8	0,01	-

пастбищ			
На 1 га освоения пастбищ	1,5	1,2	-

Структура использования продукции:
а) зерна: продажа государству – 40%,
на корм скоту – 50%,
прочая реализация – 10%.
б) молока: продажа государству – 80%,
на корм скоту – 10%,
прочая реализация – 10%.
в) мяса: продажа государству – 90%,
на внутрихозяйственные нужды – 10 %.

Планировать продажу продукции государству не менее: зерна – 12000 ц, молока – 1200 ц, мяса – 800 т.

Цена реализации государству 1 ц продукции : зерна – 8 руб., молока – 18 руб., прироста КРС – 180 руб., прироста свиней – 120 руб.

Прочая цена реализации 1 ц продукции : зерна – 9 руб., молока – 19 руб., прироста КРС – 190 руб., прироста свиней – 130 руб.

2.5Лабораторная работа 6 (2 часа)

Тема: «Моделирование использования средств механизации»

2.5.1 Цель работы: Сформировать навыки моделирования экономических процессов при помощи стандартной транспортной задачи

2.5.2 Задачи работы:

1. Освоить этапы построения модели транспортной задачи
2. Построение модели и ее математическая запись. Символика обозначений
3. Использование табличного редактора Excel для решения задач транспортного типа
4. Анализ и экономическая интерпретация полученных результатов.

2.5.3 Описание (ход) работы:

Среди проблем, для исследования которых успешно применяется линейное программирование, важное значение имеет так называемая транспортная задача.

Общая постановка этой задачи применительно к экономической проблеме экономии издержек производства формулируется так: имеется несколько пунктов назначения (предприятий, потребителей); требуется перевезти некоторое количество однородного товара из различных пунктов отправления в несколько пунктов назначения; каждый из поставщиков может выделить только определенное количество единиц товара и каждому потребителю требуется также определенное количество единиц этого товара; известны расстояния или стоимости перевозки единицы товара от каждого поставщика к каждому потребителю. Задача состоит в том, чтобы найти такие маршруты перевозок, из всех возможных связей поставщиков и потребителей, при которых общие транспортные расходы были минимальными.

Транспортная задача может быть решена с помощью одного из распределительных методов. С помощью алгоритма транспортной задачи решаются многие экономические задачи, не имеющие характера перевозок, но условия которых укладываются в модель транспортной задачи (распределение посевных площадей, составление различных смесей, размещение предприятий, раскрой материалов и т.д.).

В общей постановке транспортная задача выглядит следующим образом.

Имеется nпунктов отправления с запасами b_iединиц груза в каждом. Имеется m пунктов назначения с потребностями в грузахb_j. Стоимость перевозки одной единицы груза по соответствующему маршруту равна c_{ij}.

Для записи модели транспортной задачи примем следующие обозначения:

b_i- наличие груза у i-го поставщиков (i = 1, 2, 3, …, m);

a_j - потребность j-го потребителя (j= 1, 2, 3, …, n);

c_{ij} – стоимость перевозки единицы груза от i-гопоставщика к j-му потребителю.

Матрица $(c_{ij})_{m*n}$называется матрицей тарифов (издержек или транспортных расходов).

Планом транспортной задачи называется матрица $X = (x_{ij})_{m*n}$, где каждое число x_{ij}обозначает количество единиц груза, которое надо доставить из i-гопункта отправления в j-й пункт назначения. Матрица X называется еще матрицей перевозок. Чаще всего матрицы тарифов и перевозок совмещают в одну двойную матрицу (таблица 3.1).

Таблица 3.1 – Общий вид транспортной матрицы

Поставщики	Потребители					Запасы, [ед.прод.]
	1	*2*	*3*	…	n	
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	…	c_{1n} x_{1n}	b_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	…	c_{2n} x_{2n}	b_2
3	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	…	c_{3n} x_{3n}	b_3
…	…	…	…	…	…	…
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{m3} x_{m3}	…	c_{mn} x_{mn}	b_n
Потребность в грузе [ед.прод.]	a_1	a_2	a_3	…	a_n	

Этапы построения модели транспортной задачи

1. Проверка сбалансированности задачи.
2. Определение переменных.
3. Построение сбалансированной транспортной матрицы.
4. Задание целевой функции.
5. Задание ограничений.
6. Решение задачи в Excel.
7. Анализ результатов решения задачи.

Исходные параметры модели транспортной задачи

a) m – количество пунктов отправления,n – количество пунктов назначения.

b) b_i– запас продукции в пункте отправления (i = 1, 2, 3, …, m);

c) a_j – спрос на продукцию в пункте назначения (j= 1, 2, 3, …, n);

d) c_{ij} – тариф (стоимость) перевозки единицы продукции из i-гопункта отправления в j-ый пункт назначения.

Если наличие грузов и потребности равны между собой, то задача является закрытой (сбалансированной)

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{i=1}^{m} b_i \, . \tag{3.1}$$

Если наличие грузов и потребностей не совпадают между собой, задача является открытой (несбалансированной)

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \neq \sum_{i=1}^{m} b_i \; . \qquad (3.2)$$

В случае, когда *суммарные запасы превышают суммарные потребности*, необходим дополнительный фиктивный пункт потребления, который будет формально потреблять существующий излишек запасов, то есть

$$a_ф = \sum_{i=1}^{m} b_i - \sum_{j=1}^{n} a_j \; . \qquad (3.3)$$

Если *суммарные потребности превышают суммарные запасы*, то необходим дополнительный *фиктивный* пункт отправления, формально восполняющий существующий недостаток продукции в пунктах отправления:

$$b_ф = \sum_{j=1}^{n} a_j - \sum_{i=1}^{m} b_i \; . \qquad (3.4)$$

Искомые параметры модели транспортной задачи

1. x_{ij}– количество продукции, перевозимой из i-гопункта отправления в j-ый пункт назначения. Если по условию задачи введен фиктивный поставщик или потребитель, то необходимо ввести фиктивные переменные, которые обозначаются $x_{ij}^{ф}$.

2. $F(X)$ – транспортные расходы на перевозку всей продукции [руб.].

Задача сводится к тому, чтобы отыскать неотрицательные значения x_{ij} , при которых:

I. Целевая функция стремится к минимуму

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \rightarrow \min \; . \qquad (3.5)$$

Введение фиктивного потребителя или отправителя повлечет необходимость формального задания *фиктивных*тарифов $c_{ij}^{ф}$ (реально не существующих) для фиктивных перевозок. Поскольку нас интересует определение наиболее выгодных *реальных* перевозок, то необходимо предусмотреть, чтобы при решении задачи (при нахождении опорных планов) *фиктивные* перевозки не рассматривались до тех пор, пока не будут определены все реальные перевозки. Для этого надо фиктивные перевозки сделать невыгодными, то есть дорогими, чтобы при поиске решения задачи их рассматривали в самую последнюю очередь. Таким образом, величина фиктивных тарифов должна превышать максимальный из реальных тарифов, используемых в модели, то есть

$$c_{ij}^{ф} > \max c_{ij} \left(i = \overline{1,m};\; j = \overline{1,n} \right). \qquad (3.6)$$

II. Необходимо выполнение следующих основных условий:

от каждого поставщика можно вывести столько груза, сколько у него имеется, то есть сумма искомых перевозок от каждого поставщика равна наличию у них груза (условия вывоза всех грузов из пунктов отправления)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i \; ; \qquad (3.7)$$

каждому потребителю можно перевезти необходимое ему количество груза, то есть сумма искомых объемов перевозок равна потребности потребителей (условия полного удовлетворения потребностей потребителей)

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_j; \tag{3.8}$$

III. Условия неотрицательности переменных, исключающие обратные перевозки

$$\forall x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}\right). \tag{3.9}$$

Ограничения модели (3.7, 3.8, 3.9) могут быть выполнены только при сбалансированной задаче.

Если условие задачи таково, что в результате ее решения искомые переменные должны будут иметь целые значения, то необходимо введение дополнительного условия целочисленности:

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ, НА ОСНОВЕ СТАНДАРТНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Кроме основных условий, в транспортных задачах может встретиться ряд дополнительных, ограничивающих количественные связи между отдельными потребителями и поставщиками. Характер этих ограничений и способы решения задачи при наличии дополнительных ограничений заключаются в следующем.

1. Полное отсутствие связи между поставщиком и потребителем, то есть $x_{ij}= 0$. Это означает, что в данной клетке матрицы искомый объем перевозок должен быть равен нулю. Оценка переменной завышается на большую величину, обычно обозначаемую буквой М, и «попадание» груза в эту клетку нежелательно, так как целевая функция всегда стремиться к минимуму.

2. Наличие частной заранее фиксированной связи между поставщиками и потребителями, то есть $x_{ij}= q$, искомый объем перевозок от i-го поставщика к j-му потребителю должен быть строго равен q. До начала решения задачи от соответствующего поставщика и потребителя вычитается величина q, затем в соответствующую клетку пересечения поставщика и потребителя записывается завышенная оценка М и задача решается обычным методом.

3. $x_{ij}>q$, то есть искомый объем перевозок от i-го поставщика к j-му потребителю должен быть не меньше величины q. До начала решения от соответствующего поставщика и потребителя вычитается величина q, затем задача решается обычным путем.

Модель транспортной задачи позволяет решать любые задачи, в которых параметры имеют одинаковые единицы измерения. Такие модели называются однопродуктовыми. К ним можно отнести задачу оптимизации использования машинно-тракторного парка в отдельные агротехнические сроки, задачу оптимального размещения посевов сельскохозяйственных культур по участкам с различным плодородием почв и т.д.

Упражнения

Задача 1

Требуется перевезти одноименный груз из трех пунктов отправления в три пункта назначения. Количество грузов, подлежащих отправлению с каждого склада, потребности в них каждого потребителя и расстояния в километрах от каждого пункта отправления в каждый пункт назначения приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2 – Расстояния перевозки, км

Поставщики	Потребители			Наличие грузов, т
	1	2	3	
1	15	17	23	900

2	9	19	8	800
3	24	21	32	550
Потребность в грузах, т	700	800	750	2250 / 2250

Нужно определить, из какого пункта отправления следует удовлетворять спрос потребителей, чтобы общая сумма объема перевозок (ткм) была минимальной.

Решение:

1. Проверка сбалансированности задачи

Просуммируем наличие грузов у поставщиков

$$\sum_{i=1}^{3} b_i = 900+800+550=2250$$

Просуммируем потребности потребителей в грузах

$$\sum_{j=1}^{3} a_j = 700+800+750=2250$$

$\sum_{i=1}^{3} b_i = \sum_{j=1}^{3} a_j$, следовательно, задача сбалансированная (закрытого типа).

2. Определение переменных

Обозначим через x_{ij} [т] количество грузов, которые будут перевезены от i-го поставщика j-му потребителю.

3. I. Целевая функция

Формальная целевая функция имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(X) = 15x_{11} + 17x_{12} + 23x_{13} + \\ + 9x_{21} + 19x_{22} + 8x_{23} + \\ + 24x_{31} + 21x_{32} + 32x_{33} \to \min \end{aligned}$$

II. Основные ограничения

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 900, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 800, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 550, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 700, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 800, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 750. \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности

$$\forall x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,3}\right).$$

4. Модель задачи в общем виде:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad \mathrm{F}(X) = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + \\ + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + \\ + c_{31}x_{31} + c_{32}x_{32} + c_{33}x_{33} \to \min \end{aligned}$$

$$
II.\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=b_1, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=b_2, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}=b_3, \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=a_1, \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=a_2, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=a_3\,. \end{cases}
$$

$$
III.\quad \forall x_{ij}\ge 0 \quad \left(i=\overline{1,3};\quad j=\overline{1,3}\right)
$$

5. Модель задачи в структурной форме:

$$
I.\quad F(x)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}\,x_{ij}\to \min\,,
$$

$$
II.\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{3} x_{ij}=b_i, \quad i=\overline{1,3} \\ \sum_{i=1}^{3} x_{ij}=a_j, \quad j=\overline{1,3} \end{cases},
$$

$$
III.\ \forall x_{ij}\ge 0 \quad \left(i=\overline{1,3};\quad j=\overline{1,3}\right)
$$

6. Для решения данной задачи в Excel необходимо:
1) под запись целевой функции отвести ячейку А1;
2) под запись ограничений – ячейки столбца В (количество ячеек совпадает с количеством ограничений): В1, В2, В3, В4, В5, В6;
3) под запись искомых переменных отвести ячейки столбцов C, D, E (количество потребителей совпадает с количеством столбцов,
количество поставщиков – с количеством строк).

**Примечание:* искомые переменные x_{ij} будут находиться в следующих ячейках:
($x_{11}\rightarrow$ *C1*$x_{12}\rightarrow$ *D1*$x_{13}\rightarrow$ *E1*
$x_{21}\rightarrow$ *C2*$x_{22}\rightarrow$ *D2*$x_{23}\rightarrow$ *E2*
$x_{31}\rightarrow$ *C3*$x_{31}\rightarrow$ *D2*$x_{33}\rightarrow$ *E3*).

<u>Порядок выполнения работы:</u>

1. Ввести в ячейку А1 формулу целевой функции (рисунок 3.1):
=15*C1+17*D1+23*E1+
+ 9*C2+19*D2 + 8*E2+
+24*C3+21*D3+32*E3;

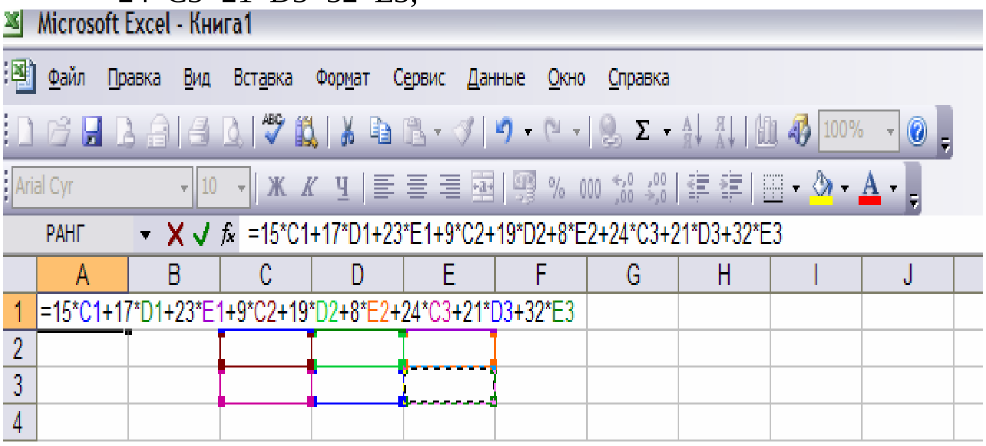
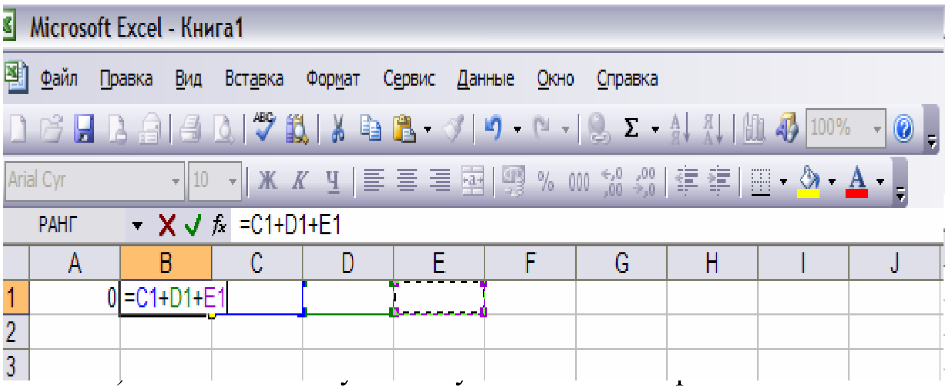


Рисунок 3.1 – Ввод целевой функции в Excel

2. а) Ввести в ячейку В1 левую часть 1-го ограничения: = C1+D1+E1 (рисунок 3.2)



= C2+D2+E2

в) Ввести в ячейку В3 левую часть 3-го ограничения:

= C3+D3+E3

г) Ввести в ячейку В4 левую часть 4-го ограничения:

= C1+C2+C3

д) Ввести в ячейку В5 левую часть 5-го ограничения:

= D1+D2+D3

е) Ввести в ячейку В6 левую часть 6-го ограничения:

= E1+E2+E3

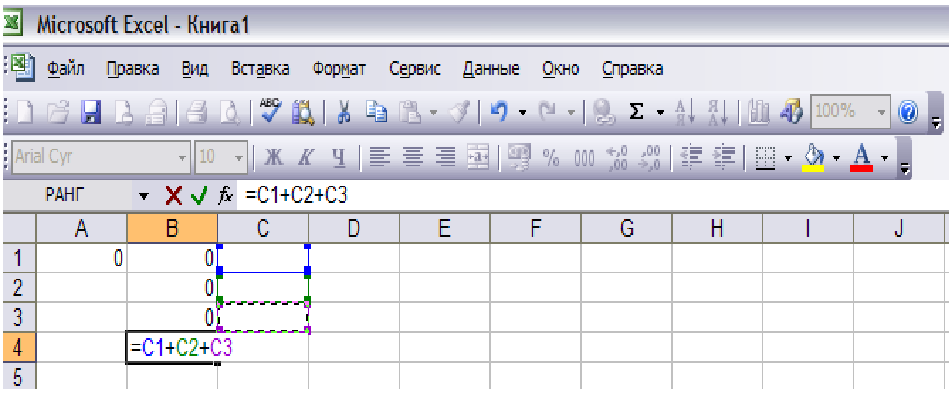


Рисунок 3.3 – Ввод ограничений в Excel

3. На панели инструментов выбрать опцию "Сервис", а в ней вкладку "Поиск решения"

Примечание

Если "Поиск решения" отсутствует, нужно выполнить команду "Сервис"–"Надстройки". В окне диалога "Надстройки" нужно установить флажок напротив строки "Поиск решения".

4. В окне диалога "Поиск решения" в поле ввода "Установить целевую ячейку" нужно ввести ссылку на ячейку А1. Необходимо выбрать способ адресации ячеек в абсолютной системе координат (т.е. указать не А1, а $А$1). Также нужно поступать с другими переменными.

5. В окне диалога "Поиск решения" нужно установить переключатель (рисунок 3.4).

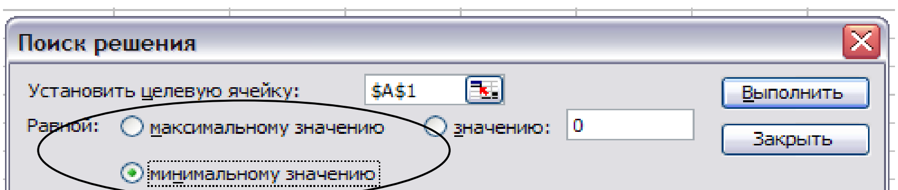


Рисунок 3.4 – Работа в диалоговом окне «Поиск решения»

6. В поле ввода "Изменяя ячейки" нужно указать ссылки на ячейки, содержащие искомые переменные, т.е. диапазон ячеек $C$1: $E$3 (рисунок 3.5).

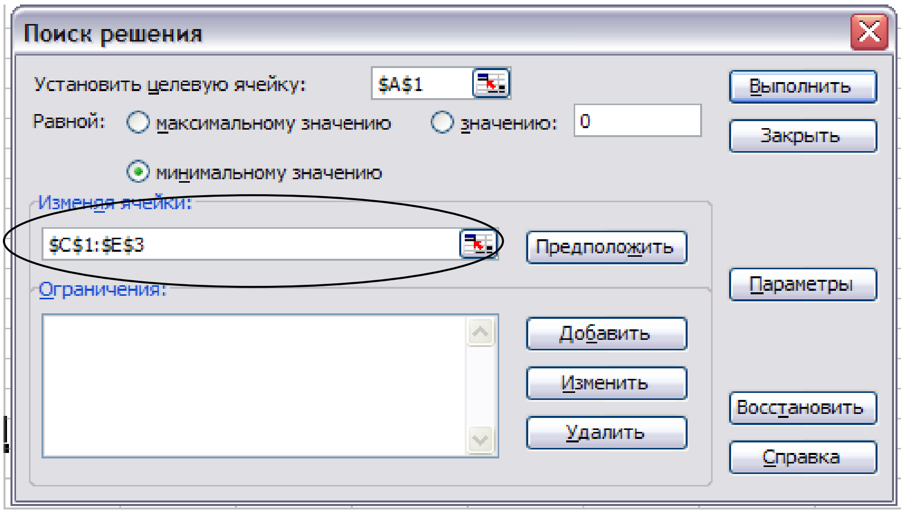


Рисунок 3.5 – Поле ввода ячеек, обозначающих искомые переменные

7. В поле ввода "Ограничения" при нажатии кнопки "Добавить" появляется окно диалога "Добавить ограничения". В поле ввода "Ссылка на ячейку" вводится $B$1. В поле ввода "Ограничение" вводится = и число 900. При помощи кнопки "Добавить" таким же образом вводятся все остальные ограничения (ячейки $B$2:$B$6) (рисунок 3.6).

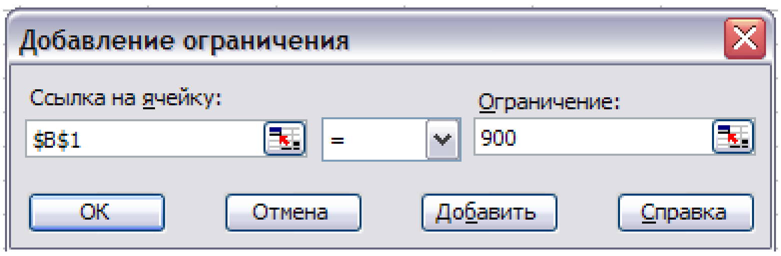


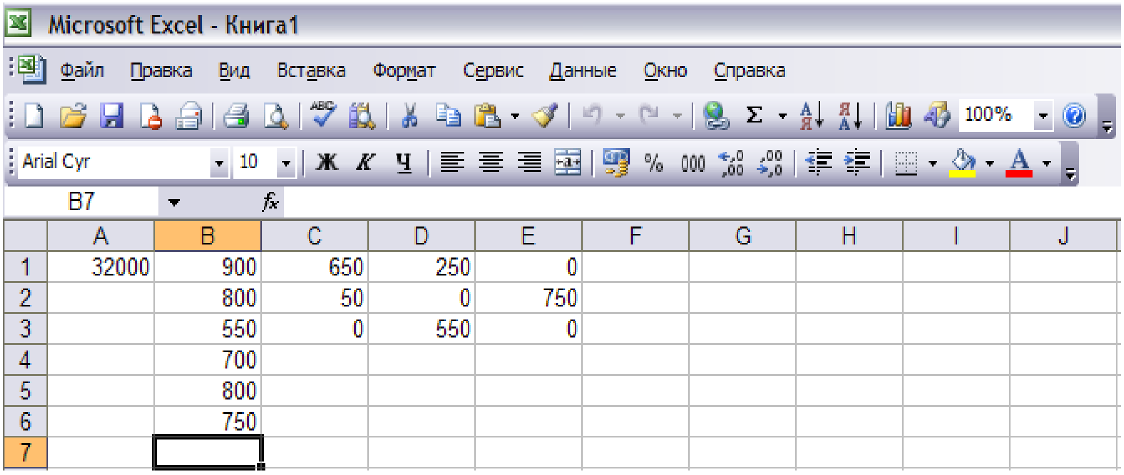
Рисунок 3.6 – Диалоговое окно «Добавление ограничения»

8. Для ввода ограничений на неотрицательность искомых переменных в окне диалога "Добавить ограничения" в поле ввода "Ссылка на ячейку" нужно ввести ссылку на ячейку $C$1, а в поле ввода "Ограничения" нужно ввести >= и число 0. При помощи кнопки "Добавить" таким же образом вводятся условия неотрицательности оставшихся искомых переменных. Либо выделяется диапазон ячеек $C$1: $E$3 и задается >= и число 0. После ввода последнего ограничения нажмите «ОК».

Примечание

Если в задаче имеется условие целочисленности искомых переменных, то в диалоговом окне «Добавление ограничений» в поле ввода "Ссылка на ячейку" нужно ввести ссылку на ячейку $C$1, а в поле ввода знака ограничения нужно ввести «цел». При помощи кнопки "Добавить" таким же образом вводятся условия целочисленности оставшихся искомых переменных. Либо выделяется диапазон ячеек $C$1: $E$3 и задается «цел». После ввода последнего ограничения нажмите «ОК».

После нажатия кнопки "Выполнить" Excel рассчитывает результат и открывает окно диалога "Результаты поиска решения". В этом диалоге в окне "Тип отчета" нужно выбрать "Результаты" и нажать Ok. Перед листом, где записана постановка задачи, будет вставлен лист "Отчет по результатам 1", а на экране будет выдан результат решения задачи (рисунок 3.7).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	32000	900	650	250	0					
2		800	50	0	750					
3		550	0	550	0					
4		700								
5		800								
6		750								
7										

Рисунок 3.7 – Результаты решения задачи

Интерпретация результатов задачи

Полученные значения в ячейках, содержащих формулы целевой функции и ограничений, являются результатом расчета целевой функции и соответствующих ограничений.

Результат, полученный в ячейке A1, означает общую сумму объема грузоперевозок в ткм.

Ячейки B1, B2, B3 показывают выполнение условия полного вывоза груза от поставщика. Ячейки B4, B5, B6 показывают выполнение условия полного удовлетворения потребностей потребителя.

Значения ячеек в диапазоне $C$1: $E$3 показывают количество груза (в т), перевезенного от соответствующего поставщика, соответствующему потребителю. Значения данного диапазона превышают 0, следовательно условие неотрицательности искомых переменных выполнено.

Ответ

Оптимальные перевозки грузов предусматривают перевозку от 1-го поставщика 1-му потребителю 650 т, от 1-го поставщика 2-му потребителю – 250 т, от 2-го поставщика 1-му потребителю – 50 т, а 3-му потребителю – 750 т. 3-й поставщик отвезет свой груз только 2-му потребителю в количестве 550 т. Минимальный объем перевозок составит 32000 т км.

Порядок оформления задачи

1. Проверка сбалансированности задачи

$$\sum_{i=1}^{3} b_i = 900+800+550=2250$$

$$\sum_{j=1}^{3} a_j = 700+800+750=2250$$

$\sum_{i=1}^{3} b_i = \sum_{j=1}^{3} a_j$, задача закрытого типа

2. Состав переменных

x_{ij}– количество продукции (т), перевозимой из i-гопункта отправления в j-ый пункт назначения

3. Числовая модель

$$\text{I.}\quad \begin{aligned} F(X) &= 15x_{11} + 17x_{12} + 23x_{13} + \\ &+ 9x_{21} + 19x_{22} + 8x_{23} + \\ &+ 24x_{31} + 21x_{32} + 32x_{33} \to \min \end{aligned}$$

$$\text{II.}\ \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 900, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 800, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 550, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 700, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 800, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 750. \end{cases}$$

$$\text{III.}\ \forall x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,3}\right).$$

4. Общий вид экономико-математической модели

$$\text{I.}\quad \begin{aligned} F(X) &= c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + \\ &+ c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + \\ &+ c_{31}x_{31} + c_{32}x_{32} + c_{33}x_{33} \to \min \end{aligned}$$

$$II.\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = b_1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = b_2, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = b_3, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = a_1, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = a_2, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = a_3. \end{cases}$$

$$III.\quad \forall x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,3}\right).$$

5. Структурная форма экономико-математической модели

$$I.\quad F(x) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}\, x_{ij} \to \min,$$

$$II.\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = b_i, \quad i = \overline{1,3} \\ \sum_{i=1}^{3} x_{ij} = a_j, \quad j = \overline{1,3} \end{cases},$$

$$III.\ \forall x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,3}\right).$$

6. Ответ: Минимальный объем перевозок составит 32000 т км. При этом матрица грузоперевозок будет выглядеть следующим образом:

$$X = \begin{pmatrix} 650 & 250 & 0 \\ 50 & 0 & 750 \\ 0 & 550 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 2

Составить план перевозки картофеля из 3 хозяйств 4 магазинам так, чтобы сумма расстояний на перевозку была минимальной. Наличие картофеля, потребность магазинов и расстояние от хозяйств до магазинов приведены в таблице 3.3.

Таблица 3.3 – Расстояния перевозок, км

Хозяйства	Магазин				Запасы, т
	1	2	3	4	
1	8	6	9	2	280
2	4	5	4	5	520
3	3	4	6	4	400
Потребности, т	300	250	340	210	

Задача 3

Составьте план перевозок нефтепродуктов из 3-х пунктов отправления в 4 пункта назначения. План должен обеспечить минимальные транспортные издержки и полностью удовлетворить спрос потребителей на нефтепродукты. Запас, потребности и стоимость перевозки 1т нефтепродуктов приведены в таблице 3.4.

Таблица 3.4 – Стоимость перевозок, руб.

Пункт отправления	Пункты назначения				Запасы, т
	1	2	3	4	
1	9	7	5	3	175
2	1	2	4	6	125
3	8	10	12	1	140
Потребности, т	180	110	60	40	

Задача 4

Четырем предприятиям необходимо сырье в количестве 110, 100, 80 и 40 т соответственно. Запасы сырья сосредоточены в трех пунктах хранения в количестве 90, 100 и 140 т соответственно. Известна матрица С расстояний между пунктами хранения и предприятиями. Нужно составить план перевозок сырья так, чтобы общий объем перевозок (т-км) был минимальным.

$$C = \begin{pmatrix} 20 & 40 & 60 & 100 \\ 10 & 30 & 70 & 40 \\ 40 & 80 & 130 & 70 \end{pmatrix}$$

Задача 7

Требуется перевезти однородный груз из трех пунктов отправления в три пункта назначения. Качество груза, подлежащих отправлению с каждого склада, потребности в нем каждого потребителя и расстояния перевозки от каждого пункта отправления до каждого пункта назначения приведены в таблице 3.8.

Таблица 3.8 – Расстояние перевозок, км

Поставщики	Потребители			Наличие, т
	1	2	3	
I	15	17	23	900
II	9	19	8	800
III	24	21	32	550
Потребность, т	500	700	650	

Необходимо составить оптимальный план перевозок, так чтобы объем транспортных работ (т км) был минимальным. При этом обязательна поставка от первого поставщика первому потребителю установлена в количестве 300т, второй поставщик должен поставить второму потребителю не менее 200т, а первый поставщик третьему – не более 400т.

Задача 8

Необходимо составить оптимальный план проведения весенне-полевых работ, для имеющейся техники в хозяйстве. Объем работ в гектарах мягкой пахоты, производительность имеющейся техники за период (гектары мягкой пахоты), затраты на единицу работы представлены в таблице 3.9.

Таблица 3.9 – Затраты на 1 га мягкой пахоты, руб.

Виды работ	Марки тракторов				Объем работ, га м. п.
	ДТ–75М	МТЗ-821	Т - 4А	ДТ-175С	
Раннее боронование зяби	5,5	5,7	5,8	5,9	210
Предпосевная культивация	4,8	5,0	5,7	6,0	1000
Посев яровых зерновых	5,5	5,7	5,8	5,9	75
Боронование озимой пшеницы	5,1	6,5	6,4	7,0	135
Прикатывание	*M*	5,4	5,3	5,6	40
Объем работ, га м. п.	470	400	270	320	

Затраты на проведение весенне-полевых работ должны быть минимальными.

Ответы

№2 $X = \begin{pmatrix} 0 & 70 & 0 & 210 & 0 \\ 0 & 80 & 340 & 0 & 100 \\ 300 & 100 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad F(x) = 3900$

$$\textbf{№3}\ X = \begin{pmatrix} 0 & 110 & 60 & 0 & 5 \\ 125 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 55 & 0 & 0 & 40 & 45 \end{pmatrix} \qquad F(x) = 1675$$

$$\textbf{№4}\ X = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 80 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 100 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix} \qquad F(x) = 14800$$

$$\textbf{№6}\ X = \begin{pmatrix} 4503 & 981 & 2884 & 0 & 817 \\ 0 & 0 & 0 & 2800 & 2783 \\ 0 & 1114 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 65 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad F(x) = 330608{,}2$$

$$№7\ X = \begin{pmatrix} 300 & 500 & 51 & 49 \\ 1 & 200 & 599 & 0 \\ 199 & 0 & 0 & 351 \end{pmatrix} \qquad F(x) = 27550$$

$$\textbf{№8}\ X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 210 \\ 335 & 400 & 232 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 75 \\ 135 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 38 & 2 \end{pmatrix} \qquad F(x) = 7711$$

2.6 Лабораторная работа №7 (2 часа)

Тема: «Моделирование посевов и использования удобрений»

2.6.1 Цель работы:Изучить особенности построение модели задачи размещение посевов по участкам земли различного плодородия

2.6.2 Задачи работы:

1. Моделирование размещения посевов по участкам земли различного плодородия.
2. Моделирование севооборотов.
3. Моделирование использования минеральных удобрений

2.6.3 Описание (ход) работы:

1. Моделирование размещения посевов по участкам земли различного плодородия.

Задача оптимизации структуры посевных площадей может рассматриваться и как составная часть планирования производства предприятия, где она моделируется во взаимосвязи с животноводством и как самостоятельная задача. Разработка самостоятельной задачи оптимизации структуры посевных площадей имеет практический смысл, когда рассматривается задача размещения посевов по участкам земли различного плодородия, размещение зерновых культур в зерновом севообороте, кормовых культур в кормовом севообороте и.д.

Рассмотрим отдельные постановки задачи размещения и структуры посевов.

Для определения оптимального размещения посевов по отдельным участкам земли различного плодородия может быть применен распределительный метод. Задачу можно разработать на основе транспортной зпдачи.

Сформулировать задачу можно так: требуется разместить посевы сельскохозяйственных культур по участкам земли так, чтобы посевные площади по всем культурам равнялись плановым объемам, все пашни должны быть заняты под посев при этом стоимость валовой продукции была бы максимальной.

В качестве критерия оптимальности в этой задачи можно принять максимум стоимости валовой продукции сельского хозяйства, чистый доход, прибыль.

Введем условные обозначения:

m – число участков земли;

i – номер участков земли;

n – число культур;

j –номера культур;

S_i - площадь i-го участка;

S_j -площадь отведенная под j-ю культуру;

c_{ij} - стоимость j-й продукции с одного гектара i-го;

x_{ij} - площадь посева j-й культуры на ii-том участке.

Структурная модель задачи:

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \max$$

при условиях:

1. Первое условие обеспечивает, что площадь посева всех культур на каждом участке будет равна его площади.

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = S_i$, где i=1…m.

2. Второе условие гарантирует, что под каждую культуру будет отведена плановая площадь.

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = S_j$, где j=1…n.

3. Третье условие обеспечивает равенство имеющейся земли и площади посевов всех сельскохозяйственных культур.

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} S_j$$

2. Условие неотрицательности переменных:

$$x_{ij} \geq 0$$

Числовая модель составляется по типу транспортной задачи, то есть заполняется платежная матрица, по строкам размещаются участки, а по столбцам культуры. Задача имеет практический смысл решения лишь тогда, когда фактически имеются участки различного плодородия.

2. Моделирование севооборотов.

Уточним понятие севооборота. Под севооборотом понимают площадь земли с обоснованным чередованием культур во времени и пространстве.

Стоит задача: определить площадь севооборотов хозяйства, которая обеспечивала бы размещение плановых посевных площадей на севооборотной площади и позволяла получить максимальный экономический эффект.

За критерий оптимальности можно принять максимум прибыли, чистого дохода, валового дохода, стоимости валовой продукции.

Формализация задачи.

n – количество севооборотов различных видов, введение которых возможно в данных условиях;

j – номера севооборотов;

i – номера культур;

m – количество культур;

x_j - площадь J-го севооборота в гектарах;

c_j - прибыль, чистый или валовой доход, стоимость валовой продукции с одного гектара в j-том севообороте;

β_{ij} - доля посевов I-й культуры в j-том севообороте;

S_i - общая заданная площадь посева I-й культуры;

S – площадь пашни в хозяйстве.

Структурная модель:

$$C = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

при условиях:

1. первое условие обеспечивает посев плановой площади по каждой культуре

$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} x_j = S_i$, где i=1…m

2.Второе условие предусматривает, что для вводимых севооборотов потребуется площади пашни не больше, чем ее имеется в хозяйстве.

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \le S$$

3. Условие неотрцательности переменных

$x_{ij} \ge 0$.

3. Моделирование использования минеральных удобрений

Пусть в хозяйстве имеется некоторое количество минеральных удобрений, требуется найти такой план их использования, который обеспечивал бы максимальную прибавку урожая.

По сути речь идет о распределении между культурами.

Формализуем задачу:

a_{ij} - норма внесения действующего вещества i-го вида для получения единицы прибавки урожая j-й культуры;

$в_к$ - количество удобрений к- го вида (в натуре), имеющееся в хозяйстве (к=1…К);

q_{ik} - содержание i-го действующего вещества в единице к-го удобрения;

c_j -цена единицы j-й продукции;

x_j - количество полученной прибавки j-й продукции за счет внесения минеральных удобрений;

Q_j - максимально-возможный объем прибавки j-ой продукции за счет внесения минеральных удобрений – при данной площади посева j-й культуры.

Целевая функция.

$$C = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

Так максимизируется прибавка урожая в денежном выражении:

При условиях:

1. Расход действующего вещества ii-го вида для получения всей прибавки урожая по j-й культуре не должны превышать наличия действующего вещества i-го вида в к-том удобрении

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} xj \le \sum_{\kappa=1}^{K} q_{ik} в_{\kappa}$$

По сути ограничения данного вида сводят баланс по действующему веществу. Это прежде всего баланс азота, калия, фосфора и т.п.

2. Нижний и верхний пределы изменения переменной

$$0 \le x_j \le Q_j .$$

Эффективность удобрений зависит не только от культуры, под которую оно вносится, но т и от характера удобряемого участка, то есть от наличия действующего вещества в почке.

Доказана зависимость прибавки урожая от способа внесения удобрений.

Рассмотрим модель с этими ограничениями.

Пусть p – номера, а P – количество способов внесения минеральных удобрений.

r - номера, а R – количество участков земли, отличающихся по содержанию питательных элементов в почве.

Модель имеет вид:

$$C = \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{R} \sum_{p=1}^{P} c_j x_{jrp} \to \max$$

При условии:

1. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{R} \sum_{p=1}^{P} a_{ij} xj \le \sum_{\kappa=1}^{K} q_{ik} в_{\kappa}$

2. $0 \le x_{jrp} \le Q_{jrp}$

Нетрудно заметить, что введение ограничений по учету способов внесения минеральных удобрений, характера удобряемого участка не усложнили модель. Два типа ограничений остались, возросло лишь число индексов. Естественно, потребуется новая входная информация, но заметно возрастает и выходная информация, будуд получены новые, более ценные сведения. Здесь в качестве примера показано, как учесть дополнительные условия в модели. По такому же принципу можно учесть сроки внесения минеральных удобрений.

Задача 6

Необходимо разместить сорта озимой пшеницы по предшественникам таким образом, чтобы сбор озимой ржи был максимальным.

Символ *М* указывает на отсутствие данных урожайности *i*-го сорта по соответствующему *j*–му предшественнику (клетки с этим символом являются запретными).

Таблица 3.7 – Урожайность озимой ржи, ц/га

Сорта озимой пшеницы	Предшественники					Всего, га
	Чистый пар	Кукуруза, убранная в стадии молочно-восковой спелости	Однолетние травы на зеленый корм	Бобовые культуры	Стерневые посевы	
Безостая 1	30,7	13,6	18,4	18,9	16,1	9185
Одесская 16	26,5	*М*	16,8	19,2	15,2	5583
Белоцерковская 198	*М*	14,4	14,1	*М*	16,5	1114
Мичуринка	16,8	10,8	*М*	*М*	*М*	65
Всего, га	4503	2160	2884	2800	3600	

2.7Лабораторная работа 8(2 часа)

Тема: «Функции полезности»

2.7.1 Цель работы: Сформировать навыки моделирования экономических процессов при помощи функции полезности

2.7.2 Задачи работы:

1. Построение модели и ее математическая запись. Символика обозначений
2. Исследование свойств функции полезности
3. Решение задачи потребительского выбора

2.3.3 Описание (ход) работы:

На множестве потребительских наборов (x_1,x_2) определена функция $u(x_1,x_2)$, значение которой на потребительском наборе (x_1,x_2) равно потребительской оценке индивидуума для этого набора. Эта функция называется функцией полезности.

Свойства функции полезности:

1. Возрастание потребления одного продукта при постоянном потреблении другого продукта ведет к росту потребительской оценки. т.е.

если $x_1 + \Delta x_1 > x_1$, то $u(x_1 + \Delta x_1, x_2) > u(x_1, x_2)$.

если $x_2 + \Delta x_2 > x_2$, то $u(x_1, x_2 + \Delta x_2) > u(x_1, x_2)$.

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} = u_1^{/} > 0, \quad \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = u_2^{/} > 0 \qquad (4.1)$$

Первые частные производные называются предельными полезностями продуктов: $u_1^{/}$ - предельная полезность первого продукта, $u_2^{/}$ - предельная полезность второго продукта. Для предельных полезностей используется также символика M_1, M_2.

2. Предельная полезность каждого продукта уменьшается, если объем его потребления растет (это свойство предельной полезности называется законом убывающей предельной полезности).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1{}^2} = u_{11}^{//} < 0 \;, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2{}^2} = u_{22}^{//} < 0 \,. \qquad (4.2)$$

3. Предельная полезность каждого продукта увеличивается, если растет количество другого продукта. В этом случае продукт, количество которого фиксировано, оказывается относительно дефицитным. Поэтому дополнительная его единица приобретает большую ценность и может быть потреблена более эффективно. Данное свойство справедливо не для всех благ.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = u_{12}^{//} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} = u_{21}^{//} > 0 \qquad (4.3)$$

Линия, соединяющая потребительские наборы (x_1,x_2), имеющие один и тот же уровень удовлетворения потребностей индивидуума, называется *линией безразличия* (рисунок 4.1). Линия безразличия есть не что иное, как линия уровня полезности, множество линий безразличия называется картой линий безразличия. Линии безразличия не касаются и не пересекаются. Чем "северо-восточнее" расположена линия безразличия, тем большему уровню удовлетворения потребности она соответствует.

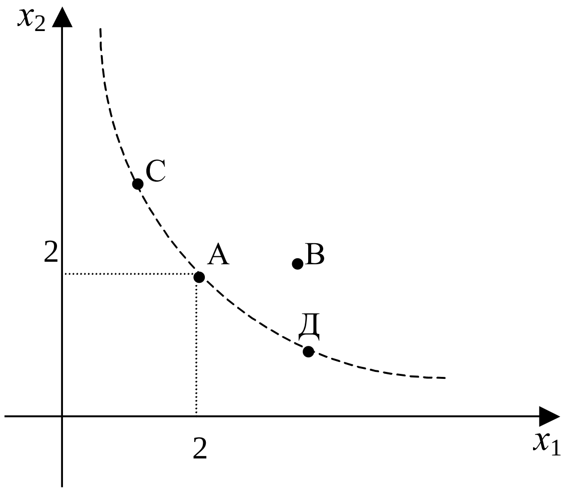


Рисунок 4.1 – Линия безразличия

Формально задача потребительского выбора имеет вид:

I. $u(x_1, x_2) \to \max$

II. при условиях $p_1 x_1 + p_2 x_2 \le I$,

III. $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$

p_1 и p_2 – рыночные цены на первый и второй товар соответственно,
I – доход покупателя.

В приведенной постановке задача потребительского выбора является задачей нелинейного программирования.

Набор (x_1,x_2), максимизирующий функцию полезности, должен обращать бюджетное ограничение в равенство, т.е. $p_1x_1 + p_2x_2 = I$. Графически это означает, что решение задачи потребительского выбора должно лежать на бюджетной прямой. Мы также будем считать, что условие неотрицательности в оптимальной точке будет выполняться автоматически.

Итак, задачу потребительского выбора можно заменить задачей на условный экстремум (экстремум – это минимальное и максимальное значение функции).

I. $u(x_1, x_2) \to \max$

II. при условии $p_1x_1 + p_2x_2 = I$,

для решения этой задачи возможно применение метода Лагранжа, в результате получим систему двух уравнений с двумя неизвестными x_1 и x_2

$$\begin{cases} \dfrac{u_1^/}{u_2^/} = \dfrac{p_1}{p_2}, \\ p_1x_1 + p_2x_2 = I \end{cases}$$

Подставив решение (x_1,x_2), в левую часть равенства

$$\frac{u_1^/(x_1, x_2)}{u_2^/(x_1, x_2)} = \frac{p_1}{p_2}$$

,получим, что в точке (x_1,x_2), локального рыночного равновесия отношение предельных полезностей равно отношению рыночных цен на эти продукты.

Геометрически решение можно интерпретировать как точку касания линии безразличия функции полезности u (x_1,x_2) с бюджетной прямой $p_1x_1 + p_2x_2 = I$ (рисунок 4.2).

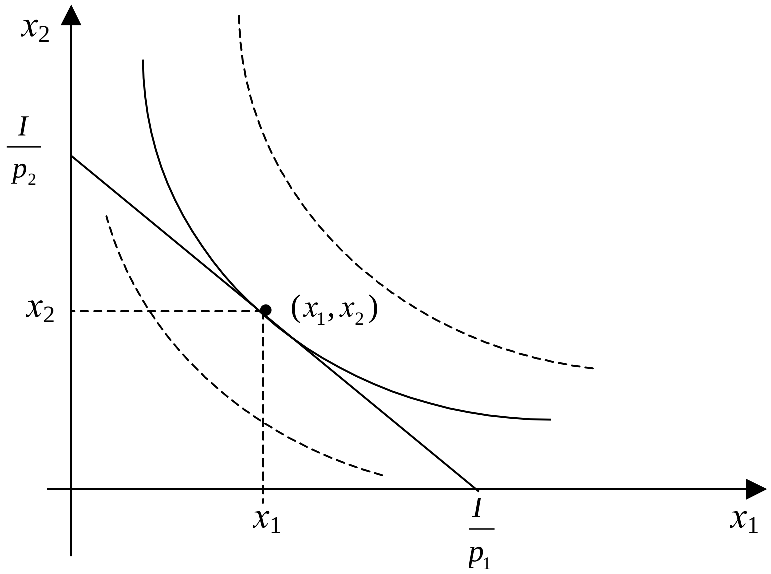


Рисунок 4.2 – Графическое решение задачи потребительского выбора

Координаты x_1и x_2 решения задачи потребительского выбора есть функции параметров p_1, p_2 и I:

$x_1 = x_2 (p_1, p_2, I)$,

$x_2 = x_2 (p_1, p_2, I)$

полученные функции называются функциями спроса на первый и второй продукт.

Упражнения

Задача 1

Для функции полезности $u=x_1 \cdot x_2$построить несколько кривых безразличия.

Решение

По определению кривой безразличия *u=const*, тогда из заданного уравнения функции полезности $u=x_1 \cdot x_2$, необходимо выразить одну переменную через другую. Допустим, выразим x_2через x_1 : $x_2 = \dfrac{u}{x_1}$. Данное уравнение выражает общий вид линии безразличия. Поскольку в задаче не указано, какому уровню должны соответствовать линии безразличия, уровень безразличия выбираем произвольно, например *u=4* , тогда уравнение линии безразличия

имеет вид $x_2 = \dfrac{4}{x_1}$.

Выбираем произвольно несколько точек.

x_1	0,5	1	2	4	8
x_2	8	4	2	1	0,5

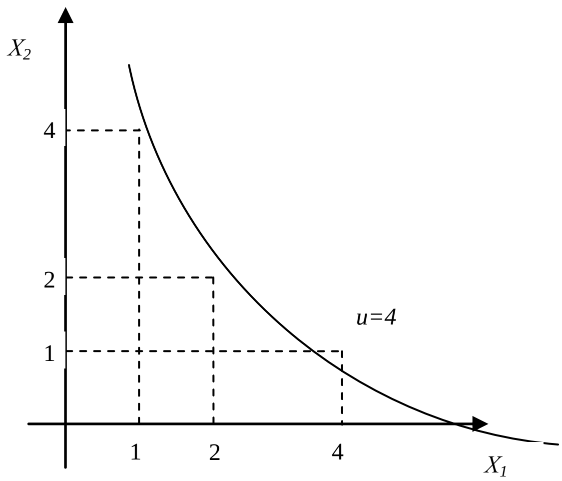


Рисунок 4.3 – Построение линии безразличия

Аналогично строятся линии безразличия любого уровня полезности.

Задача 2

Для функции полезности $u = \sqrt{x_1 x_2}$ постройте несколько кривых безразличия.

Задача 3

Для функции полезности $u = x_1^{2/3} x_2^{1/2}$ постройте несколько кривых безразличия.

Задача 4

Для функции полезности $u = x_1^{3/4} x_2^{1/4}$ постройте несколько кривых безразличия.

Задача 5

Для функции полезности $u = x_1^{1/2} x_2^{1/3}$ найти а) предельные полезности в общем виде; б) предельные полезности в точках (1,1), (1,2), (2,1); в) проверить убывание предельных полезностей.

Решение

а) $M_1 = u_1^{/} = \dfrac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}$, $M_2 = u_2^{/} = \dfrac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}$.

$$M_1 = u_1^{/} = (x_1^{1/2} x_2^{1/3})_{x_1}^{/} = \frac{x_2^{1/3}}{2x_1^{1/2}},\ M_2 = u_2^{/} = (x_1^{1/2} x_2^{1/3})_{x_2}^{/} = \frac{x_1^{1/2}}{3x_2^{2/3}};$$

б) в точке (1,1)

$$M_1 = \frac{x_2^{1/3}}{2x_1^{1/2}} = \frac{1^{1/3}}{2\cdot 1^{1/2}} = \frac{1}{2} = 0{,}5,\ M_2 = \frac{x_1^{1/2}}{3x_2^{2/3}} = \frac{1^{1/2}}{3\cdot 1^{2/3}} = \frac{1}{3} = 0{,}33;$$

в точке (1,2)

$$M_1 = \frac{x_2^{1/3}}{2x_1^{1/2}} = \frac{2^{1/3}}{2\cdot 1^{1/2}} = 0{,}63,\ M_2 = \frac{x_1^{1/2}}{3x_2^{2/3}} = \frac{1^{1/2}}{3\cdot 2^{2/3}} = 0{,}21;$$

в точке (2,1)

$$M_1 = \frac{x_2^{1/3}}{2x_1^{1/2}} = \frac{1^{1/3}}{2\cdot 2^{1/2}} = 0{,}35,\ M_2 = \frac{x_1^{1/2}}{3x_2^{2/3}} = \frac{2^{1/2}}{3\cdot 1^{2/3}} = 0{,}47;$$

в) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} = u_{11}^{//} < 0$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2} = u_{22}^{//} < 0$.

$$u_{11}^{//} = ((x_1^{1/2} x_2^{1/3})_{x_1}^{/})_{x_1}^{/} = \left(\frac{x_2^{1/3}}{2x_1^{1/2}}\right)_{x_1}^{/} = -\frac{x_2^{1/3}}{4x_1^{3/2}},$$

$-\dfrac{x_2^{1/3}}{4x_1^{3/2}} < 0$ - предельная полезность 1-го товара убывает;

$$u_{22}^{//} = ((x_1^{1/2} x_2^{1/3})_{x_2}^{/})_{x_2}^{/} = \left(\frac{x_1^{1/2}}{3x_2^{2/3}}\right)_{x_2}^{/} = -\frac{2x_1^{1/2}}{9x_2^{5/3}},$$

$-\dfrac{2x_1^{1/2}}{9x_2^{5/3}} < 0$ - предельная полезность 2-го товара убывает.

Задача 6

Для функции полезности $u = \sqrt{x_1 x_2}$ найти предельные полезности в общем виде и в точках (1,1), (1,2), (2,1). Проверьте убывание предельных полезностей.

Задача 7

Для функции полезности $u = x_1^{2/3} x_2^{1/2}$ найти предельные полезности в общем виде и в точках (1,1), (1,2), (2,1). Проверьте убывание предельных полезностей.

Задача 8

Для функции полезности $u = x_1^{3/4} x_2^{1/4}$ найти предельные полезности в общем виде и в точках (1,1), (1,2), (2,1). Проверьте убывание предельных полезностей.

Задача 9

Решить задачу потребительского выбора, если функция полезности задана формулой $u=x_1 \cdot x_2$, цены на товары соответственно равны $p_1=4$, $p_2=6$, доход $I=40$.

Решение

Формально задача потребительского выбора имеет вид:

$$u(x_1,x_2)=x_1 \cdot x_2 \to max,$$

при условиях $p_1 x_1 + p_2 x_2 \le I$,

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Для решения этой задачи возможно применение метода Лагранжа, в результате получим систему двух уравнений с двумя неизвестными x_1 и x_2

$$\begin{cases} \dfrac{u_1'}{u_2'} = \dfrac{p_1}{p_2}, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = I \end{cases} \qquad u_1' = (x_1 \cdot x_2)'_{x_1} = x_2 \; u_2' = (x_1 \cdot x_2)'_{x_2} = x_1 .$$

Подставляем в систему значения производных.

$$\begin{cases} \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{p_1}{p_2}, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = I. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 \cdot p_2 = x_1 \cdot p_1, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = I. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 p_1 + x_1 p_1 = I, \\ p_2 x_2 + p_2 x_2 = I. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{I}{2p_1}, \\ x_2 = \dfrac{I}{2p_2}. \end{cases}$$

$x_1 = \dfrac{I}{2p_1}$ - функция спроса на 1-ый товар,

$x_2 = \dfrac{I}{2p_2}$ - функция спроса на 2-ый товар.

Подставив значения цен и дохода, находим значения x_1и x_2:

$$x_1 = \frac{I}{2p_1} = \frac{40}{2 \cdot 4} = 5, \; x_2 = \frac{I}{2p_2} = \frac{40}{2 \cdot 6} = 3{,}33 .$$

Задача 10

Решить задачу потребительского выбора, если функция полезности задана формулой $u = \sqrt{x_1 x_2}$, цены на товары соответственно равны p_1=4, p_2=1, доход I=40.

Задача 11

Решить задачу потребительского выбора, если функция полезности задана формулой $u = x_1^{3/4} x_2^{1/4}$, цены на товары соответственно равны p_1=10, p_2=5, доход I=60. Изобразите графически решение задачи.

Задача 12

Решить задачу потребительского выбора, если функция полезности задана формулой $u = x_1^{1/2} x_2^{2/3}$, цены на товары соответственно равны p_1=10, p_2=5, доход I=60. Изобразите графически решение задачи.

2.8Лабораторная работа 9 (2 часа)

Тема: «Функции спроса»

2.8.1 Цель работы: Изучить действие функций спроса

2.8.2 Задачи работы:

1. Изучить уравнение Слуцкого
2. Расчет действия изменения цены на изменение спроса
3. Расчет эластичности спроса

2.8.3 Описание (ход) работы:

Одним из основных в теории потребительского выбора является уравнение Слуцкого, опубликованное российским математиком Е.Е.Слуцким в 1915 году. Это уравнение позволяет увязать действие эффекта замены и эффекта дохода с результирующим изменением спроса. Уравнение Слуцкого имеет следующий вид:

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \left[\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right]_{comp} - \left[\frac{\partial x_i}{\partial I}\right] x_j , \qquad (4.4)$$

где первое слагаемое в правой части описывает действие эффекта замены, то есть, изменение спроса при условии поддержания прежнего уровня благосостояния, второе – действие эффекта дохода, то есть изменение потребительского спроса при сохранении цен и изменении дохода, слева записано результирующее воздействие на спрос, складывающееся из изменения структуры спроса и общего его изменения при изменении уровня реального дохода.

Эластичность спроса по цене равна:

$$e_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} : \frac{x_i}{p_j} \qquad (4.5)$$

Эластичность спроса по доходу:

$$e_{iI}=\frac{\partial x_i}{\partial I}:\frac{x_i}{I} \qquad (4.6)$$

Выполняется равенство:

$$\sum_j e_{ij}+e_{iI}=0 \qquad (4.7)$$

То есть сумма всех эластичностей спроса по цене и доходу должна равняться 0.

Задача 13

Функция спроса на товар x_1 задана формулой $\frac{I}{2p_1}$. Как изменится спрос на 1-й товар при изменении цены (p_1) и наличии компенсации?

Решение

Данная задача решается при помощи уравнения Слуцкого, т.е. из уравнения

$\frac{\partial x_i}{\partial p_j}=\left[\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right]_{comp}-\left[\frac{\partial x_i}{\partial I}\right]x_j$ найдем $\left[\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right]_{comp}$.

В нашем случае *i=1, j=1*.

Тогда $\frac{\partial x_1}{\partial p_1}=\left[\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right]_{comp}-\left[\frac{\partial x_1}{\partial I}\right]x_1\Rightarrow\left[\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right]_{comp}=\frac{\partial x_1}{\partial p_1}+\left[\frac{\partial x_1}{\partial I}\right]x_1$

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1}=\left(\frac{I}{2p_1}\right)'_{p_1}=-\frac{I}{2p_1^2}, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial I}=\left(\frac{I}{2p_1}\right)'_{I}=\frac{1}{2p_1},$$

$$\left[\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right]_{comp}=-\frac{I}{2p_1^2}+\frac{1}{2p_1}x_1=-\frac{I}{2p_1^2}+\frac{1}{2p_1}\cdot\frac{I}{2p_1}=-\frac{2I}{4p_1^2}+\frac{I}{4p_1^2}=-\frac{I}{4p_1^2}.$$

Задача 14

Функция спроса на товар x_1 задана формулой $\frac{2I}{3p_1}$. Как изменится спрос на 1-й товар при изменении цены (p_1) и наличии компенсации?

Задача 15

Функция спроса на 1-ый товар задана формулой $\frac{2I}{3p_1}$, на 2-ой товар $\frac{I}{3p_2}$, необходимо рассчитать:

а) как изменится спрос на 1-ый товар при изменении цены на 1-ый товар и сохранении прежнего уровня благосостояния;

б) как изменится спрос на 1-ый товар при изменении цены на 2-ой товар и сохранении прежнего уровня благосостояния;

в) как изменится спрос на 2-ой товар при изменении цены на 1-ый товар и сохранении прежнего уровня благосостояния;

г) как изменится спрос на 2-ой товар при изменении цены на 2-ой товар и сохранении прежнего уровня благосостояния.

Задача 16

Рассчитаем эластичность спроса по ценам и эластичность спроса по доходу для функции спроса $x_1 = \frac{I}{2p_1}$.

Решение

$$e_{11} = \frac{\partial x_1}{\partial p_1} : \frac{x_1}{p_1} = \left(\frac{I}{2p_1}\right)'_{p_1} : \frac{I}{2p_1 \cdot p_1} = -\frac{I}{2p_1^2} : \frac{I}{2p_1^2} = -1$$

$$e_{12} = \frac{\partial x_1}{\partial p_2} : \frac{x_1}{p_2} = \left(\frac{I}{2p_1}\right)'_{p_2} : \frac{I}{2p_1 \cdot p_2} = 0 : \frac{I}{2p_1 p_2} = 0$$

$$e_{1I} = \frac{\partial x_1}{\partial I} : \frac{x_1}{I} = \left(\frac{I}{2p_1}\right)'_{I} : \frac{I}{2p_1 \cdot I} = \frac{1}{2p_1} : \frac{1}{2p_1} = 1$$

$$\sum_j e_{ij} + e_{iI} = e_{11} + e_{12} + e_{1I} = -1 + 0 + 1 = 0$$

Задача 17

Рассчитаем эластичность спроса по ценам и эластичность спроса по доходу для функции спроса $x_1 = \frac{3I}{7p_1}$.

Задача 18

Рассчитаем эластичность спроса по ценам и эластичность спроса по доходу для функции спроса $x_1 = \frac{4I}{7p_1}$.

Задача 19

Функция полезности задана формулой $u = x_1^{2/3} x_2^{1/3}$. Рассчитаем эластичность спроса по ценам и эластичность спроса по доходу для функции спроса на первый товар.

Рекомендации к решению

1. Необходимо найти функцию спроса на 1-ый товар. Это можно сделать решив задачу потребительского выбора (см. решение задачи 9).
2. Зная как формируется спрос на первый товар, по используемым ранее формулам рассчитываем эластичности (см решение задачи 16).

Задача 20

Равнозначно ли воздействие на потребительский спрос увеличение дохода в *K* раз и сокращение в *K* раз всех цен? Сделайте выводы для рассматриваемой модели.

а) $u = x_1 \cdot x_2$

б) $u = x_1^{1/2} \cdot x_2^{2/3}$

2.9Лабораторная работа 10,11,12 (6 часов)

Тема: «Производственные функции»

2.9.1 Цель работы: Сформировать навыки моделирования экономических процессов при помощи производственных функций

2.9.2 Задачи работы:

1. Понятие производственной функции, модель и ее математическая запись. Символика обозначений.

2. Расчет средней, предельной производительностиресурса, эластичности выпуска по ресурсам

3. Расчет предельной нормы замены ресурсов.

2.9.3 Описание (ход) работы:

Производственными функциями называют соотношение между используемыми производственными ресурсами и выпускаемой продукцией.

Производственная функция $f(x_1, x_2)$ имеющая область определения $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ имеет следующие свойства.

1. Производство невозможно при отсутствии хотя бы одного ресурса, т.е. $f(0, x_2) = f(x_1, 0) = 0$.

2. При увеличении затрат производственных ресурсов - выпуск продукции растет $x(1) > x(0) \Rightarrow f(x(1)) > (fx(0))$, если функция дифференцирована, то можно записать $x > 0 \ \Rightarrow \ \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} > 0 \ (i = 1,2)$, или первая частная производная $\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right]$ положительна.

3. По мере увеличения количества одного ресурса при постоянных количествах других предельная эффективность использования этого ресурса не возрастает. Математически это требование для дважды дифференцируемых производственных функций выглядит так: $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_{ii}^2} \leq 0$.

В нашем примере рассмотренном ранее это означает, что рост вооруженности средствами производства приводит к росту выпуска продукции, но темп роста выпуска продукции все время падает (закон убывающей эффективности).

4. Производственная функция характеризуется определенной отдачей от расширения масштабов производства. Отдача от расширения масштабов производства характеризует производственную функцию с точки зрения изменения выпуска продукции при пропорциональном изменении затрат ресурсов, которое математически выражается в умножении всех компонент вектора x на положительный скаляр *t*. Принято говорить, что скалярная функция является однородной функцией степени *p*, если для любого вектора x и любого скаляра t она удовлетворяет условию $f(tx) = t^p f(x)$

Математически четвертое предположение состоит в требовании однородности производственной функции. Если $p > 1$, то говорят, что производственная функция характеризуется возрастающей отдачей от расширения масштабов производства; если $p = 1$ - постоянной отдачей (наиболее часто встречающийся случай), а при $p < 1$ - убывающей отдачей.

Средней производительностью I-го ресурса (фактора производства) или средним выпуском по i-му ресурсу (фактору производства) называют отношение значения функции к величине I-го ресурса. Символика:

$$A_i = \frac{f(x)}{x_i}, \text{ где } (i = 1{,}2) \quad \text{или} \quad f(x) = f(x_1, x_2) \tag{5.1}$$

Предельной (маржинальной) производительностью *i*-го ресурса (фактора производства) или предельным выпуском по *i*-му ресурсу (фактору производства) называют первую частную производную функции $f(x) = f(x_1, x_2)$, символика: $M_i = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$. Предельная производительность показывает, на сколько единиц увеличивается объем выпуска y, если объем затрат x_i i-го ресурса вырастает на одну единицу при неизменных объемах другого затрачиваемого ресурса.

Отношение предельной производительности M_i *i*-го ресурса к его средней производительности A_i называется эластичностью выпуска по *i*-му ресурсу (по фактору производства). Символика:

$$E_i = \frac{M_i}{A_i} = \frac{x_i}{f(x)} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \quad (i = 1{,}2) \tag{5.2}$$

Сумма $E_1 + E_2 = E_x$ называется эластичностью производства. E_i показывает, на сколько процентов увеличится выпуск, если затраты *i*-го ресурса увеличатся на один процент при неизменных объемах другого ресурса.

Возможность взаимного замещения ресурсов означает, что одно и то же количество продукта y может быть произведено при различных сочетаниях ресурсов. Совокупность таких сочетаний ресурсов, при которых может быть произведено определенное количество продукции *q*, называется *изоквантой*.

Предельной нормой замены (замещения) i-го ресурса (фактора производства) j-м называется выражение:

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}}, \quad (i, j = 1{,}2) \tag{5.3}$$

при постоянной y. *i* – номер заменяемого ресурса, *j* - номер замещающего ресурса

Упражнения

Задача 1

Производственная функция имеет вид $y = 5 \cdot x^{\frac{1}{2}}$, где y – объем выпускаемой продукции, x – величина затрачиваемого ресурса. Определить в общем виде среднюю и предельную производительность ресурса, рассчитать эластичность выпуска. Найти значение средней и предельной производительности ресурса в точках x=1; x=4; x=9; x=16. Рассчитать в этих точках эластичность выпуска.

Решение

$$Ax=\frac{f(x)}{x}=\frac{5*x^{1/2}}{x}=\frac{5}{\sqrt{x}};\ M_x=\frac{\partial f(x)}{\partial x}=(5*x^{1/2})'=5*\frac{1}{2}x^{(\frac{1}{2}-1)}=\frac{5}{2\sqrt{x}};$$

$$E_x=\frac{M_x}{A_x}=\frac{5}{2\sqrt{x}}:\frac{5}{\sqrt{x}}=\frac{5*\sqrt{x}}{2\sqrt{x}*5}=\frac{1}{2}$$

при x=1 $A_x=\frac{5}{\sqrt{x}}=\frac{5}{\sqrt{1}}=\frac{5}{1}=5$, $M_x=\frac{5}{2\sqrt{x}}=\frac{5}{2\sqrt{1}}=\frac{5}{2\cdot1}=2{,}5$, $E_x=\frac{1}{2}$;

при x=4 $A_x=\frac{5}{\sqrt{x}}=\frac{5}{\sqrt{4}}=\frac{5}{2}=2{,}5$, $M_x=\frac{5}{2\sqrt{x}}=\frac{5}{2\sqrt{4}}=\frac{5}{2\cdot2}=1{,}25$, $E_x=\frac{1}{2}$;

при x=16 $A_x=\frac{5}{\sqrt{x}}=\frac{5}{\sqrt{16}}=\frac{5}{4}=1{,}25$, $M_x=\frac{5}{2\sqrt{x}}=\frac{5}{2\sqrt{16}}=\frac{5}{2\cdot4}=0{,}625$, $E_x=\frac{1}{2}$.

Задача 2

Производственная функция имеет вид $y=3\cdot x^{\frac{1}{3}}$, где y – объем выпускаемой продукции, x – величина затрачиваемого ресурса. Определить в общем виде среднюю и предельную производительность ресурса, рассчитать эластичность выпуска. Найти значение средней и предельной производительности ресурса в точках x=8; x=27; x=64. Рассчитать в этих точках эластичность выпуска.

Задача 4

Производственная функция имеет вид $y=L^{\frac{1}{4}}K^{\frac{3}{4}}$, где L –затраты труда, K-затраты капитала (затраты основных производственных фондов). Определить среднюю и предельную производительность ресурсов, при фиксированных значениях $L_1=2;\ K_1=32;\ L_2=40{,}5;\ K_2=0{,}5$. Рассчитать эластичность выпуска по ресурсам и эластичность производства Построить изокванты при фиксированном выпуске $y=2$; $y=3$.

Задача 5

Производственная функция имеет вид $y=L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{1}{2}}$, где L –затраты труда, K-затраты капитала (затраты основных производственных фондов). Определить среднюю и предельную производительность ресурсов, при фиксированных значениях $L_1=27;\ K_1=9;\ L_2=64;\ K_2=16$. Рассчитать эластичность выпуска по ресурсам и эластичность производства. Построить изокванты при фиксированном выпуске $y=1$; y = 2; y = 3.

Задача 6

Производственная функция есть функция Кобба-Дугласа. Чтобы увеличить выпуск продукции на 3%, надо увеличить фонды на 6% или численность рабочих на 9%. Средняя производительность одного работника за месяц 1 млн. руб., а всего работников 1000. Основные фонды оценивались на 10 млрд. руб. Какой вид имеет производственная функция, чему равна средняя фондоотдача.

Решение

Функция Кобба-Дугласа имеет вид $y=a_0K^{a_1}L^{a_2}$. Требуется найти параметры уравнения a_0, a_1, a_2 и A_K.

Эластичность выпуска по i-му ресурсу (E_i) показывает, на сколько процентов увеличится выпуск, если затраты i-го ресурса увеличатся на один процент при неизменных объемах другого ресурса, $E_K = 3\% : 6\% = \frac{1}{2}$.

$$E_K = \frac{M_K}{A_K}$$

$$M_K = \frac{\partial y}{\partial K} = (a_0 K^{a_1} L^{a_2})'_K = a_0 L^{a_2} a_1 K^{(a_1 - 1)}, \quad A_K = \frac{y}{K} = \frac{a_0 K^{a_1} L^{a_2}}{K} = a_0 K^{(a_1 - 1)} L^{a_2},$$

$$E_K = \frac{a_0 a_1 K^{(a_2 - 1)} L^{a_2}}{a_0 K^{(a_1 - 1)} L^{a_2}} = a_1, \text{ т.е.}$$

$$E_K = a_1 = \frac{1}{2}.$$

$$A_K = \frac{y}{K} = \frac{a_0 K^{a_1} L^{a_2}}{K} = a_0 K^{(a_1 - 1)} L^{a_2}$$

Аналогично определяем $a_2 = \frac{1}{3}$.

Средняя производительность одного работника $A_L = \frac{Y}{L} = 1\,000\,000 \Rightarrow \ Y = 1\,000\,000 * L$, т.к $L = 1000$ $Y = 1\,000\,000 * 1000 = 10^9$. По условию задачи $K = 10^{10}$, подставляем значения в формулу $10^9 = a_0 * \left(10^{10}\right)^{\frac{1}{2}} * \left(10^3\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow a_0 = 1000$.

Производственная функция будет иметь вид $Y = 1000 * K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{3}}$, Средняя фондоотдача $A_K = \frac{Y}{K} = \frac{10^9}{10^{10}} = 0{,}1$.

Задача 7

Производственная функция есть функция Кобба-Дугласа. Чтобы увеличить выпуск продукции на 1%, надо увеличить фонды на 3% или численность рабочих на 3%. Один работник за месяц производит продукции на 10 млн. руб., а всего работников 1000. Основные фонды оценивались на 1 млрд. руб. Какой вид имеет производственная функция, чему равна средняя фондоотдача.

Задача 8

Производственная функция есть функция Кобба-Дугласа. Чтобы увеличить выпуск продукции на 2%, надо увеличить фонды на 5% или численность рабочих на 5%. Один работник за месяц производит продукции на 1 млн. руб., а всего работников 32. Основные фонды оценивались на 10 млрд. руб. Какой вид имеет производственная функция, чему равна средняя фондоотдача.

Задача 9

Производственная функция есть функция Кобба-Дугласа. Чтобы увеличить выпуск продукции на 1%, надо увеличить фонды на 2% или численность рабочих на 4%. Один работник за месяц производит продукции на 10 млн. руб., а всего работников 625. Основные фонды оценивались на 100 млн. руб. Какой вид имеет производственная функция, чему равна средняя фондоотдача.

Задача 10

Производственная функция имеет вид $y = 0{,}9L + 1{,}8K$, рассчитать предельную норму замены труда капиталом (R_{LK}) и предельную норму замены капитала трудом (R_{KL}).

Решение:

$$R_{LK} = \frac{\frac{\partial y}{\partial L}}{\frac{\partial y}{\partial K}} = \frac{(0{,}9L + 1{,}8K)'_L}{(0{,}9L + 1{,}8K)'_K} = \frac{0{,}9}{1{,}8} = 0{,}5$$

$$R_{KL} = \frac{\frac{\partial y}{\partial K}}{\frac{\partial y}{\partial L}} = \frac{(0{,}9L + 1{,}8K)'_K}{(0{,}9L + 1{,}8K)'_L} = \frac{1{,}8}{0{,}9} = 2$$

Задача 11

Производственная функция имеет вид $y = L^{\frac{1}{3}} K^{\frac{1}{2}}$, рассчитать предельную норму замены труда капиталом (R_{LK}) и предельную норму замены капитала трудом (R_{KL}).

Задача 12

Производственная функция имеет вид $y = L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{3}{4}}$, рассчитать предельную норму замены труда капиталом (R_{LK}) и предельную норму замены капитала трудом (R_{KL}).

Задача 13

Производственная функция имеет вид $y = L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}$, рассчитать предельную норму замены труда капиталом (R_{LK}) и предельную норму замены капитала трудом (R_{KL}).

Задача 14

Производственная функция имеет вид $y = L^{\frac{1}{3}} K^{\frac{2}{3}}$, рассчитать предельную норму замены труда капиталом (R_{LK}) и предельную норму замены капитала трудом (R_{KL}).

Ответы

№2 $Ax = \frac{3}{x^{2/3}}$, $M_x = \frac{1}{x^{2/3}}$, $E_x = \frac{1}{3}$; при х =8 $A_x = \frac{3}{4}$, $M_x = \frac{1}{4}$; при х =27 $A_x = \frac{1}{3}$, $M_x = \frac{1}{9}$; при х =64 $A_x = \frac{3}{16}$, $M_x = \frac{1}{16}$. №3 $A_L = 0{,}9 + 1{,}8\frac{K}{L}$, $A_K = 1{,}8 + 0{,}9\frac{L}{K}$, $M_L = 0{,}9$, $M_K = 1{,}8$;

$E_L=\dfrac{L}{L+2K}$, $E_K=\dfrac{2K}{2K+L}, E=1$; при L=3; K=3,5; $E_L=\dfrac{7}{15}\approx 0{,}467$; $E_K=0{,}7$; $E=\dfrac{7}{6}\approx 1{,}167$; при L=4; K=3; $E_L=\dfrac{2}{5}=0{,}4$; $E_K=\dfrac{3}{4}=0{,}75$; $E=1{,}15$; при L=5; K=2,5; $E_L=\dfrac{1}{2}=0{,}5$; $E_L=\dfrac{1}{2}=0{,}5$; $E=1$. №4 $A_L=\left(\dfrac{K}{L}\right)^{\frac{3}{4}}$, $A_K=\left(\dfrac{L}{K}\right)^{\frac{1}{4}}$, $M_L=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{K}{L}\right)^{\frac{3}{4}}$, $M_K=\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{L}{K}\right)^{\frac{1}{4}}$; при L=2; K=32; $A_L=8$, $A_K=\dfrac{1}{2}$, $M_L=32$, $M_K=\dfrac{3}{8}$; при L=40,5, K=0,5, $A_L=\dfrac{1}{27}$, A_K=3, $M_L=\dfrac{1}{108}$, $M_K=\dfrac{9}{4}$; $E_L=\dfrac{1}{4}$; $E_K=\dfrac{3}{4}$; $E=1$; уравнения изоквант при у=2 $L=\dfrac{16}{K^3}$, при у=3 $L=\dfrac{81}{K^3}$. №5 $A_L=\dfrac{K^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{2}{3}}}$, $A_K=\dfrac{L^{\frac{1}{3}}}{K^{\frac{1}{2}}}$, $M_L=\dfrac{K^{\frac{1}{2}}}{3L^{\frac{2}{3}}}$, $M_K=\dfrac{L^{\frac{1}{3}}}{2K^{\frac{1}{2}}}$, при L=27, K=9 $A_L=\dfrac{1}{3}$, A_K=1, $M_L=\dfrac{1}{9}$, $M_K=\dfrac{1}{2}$; при L=64, K=16 $A_L=\dfrac{1}{4}$, A_K=1, $M_L=\dfrac{1}{12}$, $M_K=\dfrac{1}{2}$; $E_L=\dfrac{1}{3}$; $E_K=\dfrac{1}{2}$; $E=\dfrac{5}{6}$; уравнения изоквант: при у=1 $L=\dfrac{1}{K^{3/2}}$, при у=2 $L=\dfrac{8}{K^{3/2}}$, при у=3.№7 $y=10^6\cdot L^{\frac{1}{3}}\cdot K^{\frac{1}{3}}$; $A_K=10$. №8 $y=800\cdot L^{\frac{2}{5}}\cdot K^{\frac{2}{5}}; A_K=0{,}0032$. №9 $y=125000\cdot L^{\frac{1}{4}}\cdot K^{\frac{1}{2}}; A_K=62{,}5$.

№11 $R_{LK}=\dfrac{2K}{3L}, R_{KL}=\dfrac{3L}{2K}$. №12 $R_{LK}=\dfrac{K}{3L}, R_{KL}=\dfrac{3L}{K}$. №13 $R_{LK}=\dfrac{K}{L}, R_{KL}=\dfrac{L}{K}$.

№14 $R_{LK}=\dfrac{K}{2L}, R_{KL}=\dfrac{2L}{K}$.

2.10Лабораторная работа 13 (2 часов)

Тема: «Принципиальная схема межпродуктового баланса»

2.10.1 Цель работы: Изучить основные пропорции межотраслевого баланса

2.10.2 Задачи работы:

1. Изучить основные части балансовой схемы
2. Построение схемы, математическая запись. Символика обозначений
3. Основные балансовые пропорции

2.10.3 Описание (ход) работы:

Принципиальная схема межотраслевого баланса производства и распределения совокупного общественного продукта в стоимостном выражении представлена в таблице.

Таблица 6.1 – Принципиальная схема межотраслевого баланса (МОБ)

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли					Конечный продукт	Валовой продукт
	1	2	3	…	n		
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	…	x_{1n}	Y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	…	x_{2n}	Y_2	X_2
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	…	x_{3n}	Y_3	X_3
…	…	…	…	…	…	…	…

n	x_{n1}	x_{n1}	x_{n3}	…	x_{nn}	Y_n	X_n
Амортизация	c_1	c_2	c_3	…	c_n		
Оплата труда	v_1	v_2	v_3	…	v_n		
Чистый доход	m_1	m_2	m_3	…	m_n		
Валовой продукт	X_1	X_2	X_3	…	X_n	$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{n} X_j$	

В МОБ выделяют четыре части, имеющие различное экономическое содержание, они называются *квадрантами* баланса.

Первый квадрант МОБ – это шахматная таблица межотраслевых материальных связей. Показатели, помещенные на пересечениях строк и столбцов, представляют собой величины межотраслевых потоков продукции и в общем виде обозначаются x_{ij}, где i и j– соответственно номера отраслей производящих и потребляющих. Таким образом, первый квадрант по форме представляет собой квадратную матрицу порядка n, сумма всех элементов которой равняется годовому фонду возмещения затрат средств производства в материальной сфере.

Во втором квадранте представлена конечная продукция всех отраслей материального производства, при этом под конечной понимается продукция, выходящая из сферы производства в область конечного использования (на потребление и накопление). В таблице этот раздел дан укрупнено в виде одного столбца величин Y_i

Третий квадрант МОБ также характеризует национальный доход, но со стороны его стоимостного состава как сумму чистой продукции и амортизации; чистая продукция понимается при этом как сумма оплаты труда и чистого дохода отраслей. Сумма амортизации (c_j) и чистой продукции (v_j+m_j) некоторой j-ой отрасли будем называть условно чистой продукцией этой отрасли и обозначать в дальнейшем Z_j.

Четвертый квадрант баланса находится на пересечении столбцов второго квадранта (конечной продукции) и строк третьего квадранта (условно чистой продукции). Этим определяется содержание квадранта: он отражает конечное распределение и использование национального дохода. В результате перераспределения первоначально созданного национального дохода образуются конечные доходы населения, предприятий, государства. Данные четвертого квадранта важны для отражения в межотраслевой модели баланса доходов и расходов населения, источников финансирования капиталовложений, текущих затрат непроизводственной сферы, для анализа общей структуры конечных доходов по группам потребителей. Общий итог четвертого квадранта, так же как второго и третьего, должен быть равен созданному за год национальному доходу.

Таким образом, в целом межотраслевой баланс в рамках единой модели объединяет балансы отраслей материального производства, баланс совокупного общественного продукта балансы национального дохода, финансовый, баланс доходов и расходов населения.

Итог материальных затрат любой потребляющей отрасли и ее условно чистой продукции равен валовой продукции этой отрасли. Данный вывод можно записать в виде соотношения:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + Z_j\ , \qquad j = 1,\dots,n \tag{6.1}$$

Напомним, что величина условно чистой продукции Zj равна сумме амортизации, оплаты труда и чистого дохода j-й отрасли.

Валовая продукция той или иной отрасли равна сумме материальных затрат потребляющих ее продукцию отраслей и конечной продукции данной отрасли:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i\ , \qquad i = 1,...,n \tag{6.2}$$

Формула описывает систему из n уравнений, которые называются уравнениями распределения продукции отраслей материального производства по направлениям использования.

Просуммируем по всем отраслям уравнения (6.1), в результате получим:

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} Z_j$$

Аналогичное суммирование уравнений (6.2) дает:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} Y_i \tag{6.3}$$

Левые части обоих равенств равны, так как представляют собой весь валовой общественный продукт. Первые слагаемые правых частей этих равенств также равны, их величина равна итогу первого квадранта. Следовательно, должно соблюдаться соотношение

$$\sum_{j=1}^{n} Z_j = \sum_{i=1}^{n} Y_i \tag{6.4}$$

Левая часть данного уравнения есть сумма третьего квадранта, а правая часть итог второго квадранта.

Упражнения

Задача 1

Закончите составление схемы отчетного баланса по имеющимся данным.

Производящие отрасли	*Потребляющие отрасли*		*Конечный продукт* $У_i$	*Валовой продукт* X_i
	1	2		
1	20		30	
2	60	10		
Условно чистая продукция Z_j		70		
Валовой продукт X_j	100			

Решение

1) если $i=j$, то $X_j=X_i \Rightarrow$ если $i=j=1$, то $X_j=X_i=100$.

2) $$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i \qquad \Rightarrow x_{12} = X_1 - У_1 - x_{11},\ x_{12} = 100 - 30 - 20 = 50.$$

3) $$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + Z_j \quad \Rightarrow X_2 = \sum_{i=1}^{2} x_{i2} + Z_2,\ X_2 = 50 + 10 + 70 = 130,$$

$$\Rightarrow Z_1 = X_1 - \sum_{i=1}^{2} x_{i1},\ Z_1 = 100 - (20 + 60) = 20.$$

4) $X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i \Rightarrow Y_2 = X_2 - \sum_{j=1}^{2} x_{2j}$, $Y_2 = 130 - (60 + 10) = 60$.

Производящие отрасли	*Потребляющие отрасли*		*Конечный продукт* $У_i$	*Валовой продукт* X_i
	1	2		
1	20	**50**	30	**100**
2	60	10	**60**	**130**
Условно чистая продукция Z_j	**20**	70		
Валовой продукт X_j	100	**130**		

Задача 2

Закончите составление схемы отчетного баланса по имеющимся данным.

Производящие отрасли	*Потребляющие отрасли*		*Конечный продукт*	*Валовой продукт*
	1	2		
1		176		370
2	222			457
Условно чистая продукция	74	245		
Валовой продукт				

Задача 3

Закончите составление схемы отчетного баланса по имеющимся данным.

Производящие отрасли	*Потребляющие отрасли*		*Конечный продукт*	*Валовой продукт*
	1	2		
1		100		
2	55			450
Условно чистая продукция	215	185		
Валовой продукт	300			

Задача 4

Закончите составление схемы отчетного баланса по имеющимся данным.

Производящие отрасли	*Потребляющие отрасли*			*Конечный продукт*	*Валовой продукт*
	1	2	3		
1	15	33	50		
2	28		27	233	315
3	15	17		121	
Условно чистая продукция	230		76		
Валовой продукт			172		

Задача 5

Закончите составление схемы отчетного баланса по имеющимся данным.

Производящие отрасли	*Потребляющие отрасли*			*Конечный продукт*	*Валовой продукт*
	1	2	3		
1				712	
2	103	57			1100
3	200	78	35	675	988
Условно чистая продукция	645	853	700		
Валовой продукт	1015				

2.11Лабораторная работа 14,15,16,17,18 (10 часов)

Тема: «Балансовая модель»

2.11.1 Цель работы: Исследовать основные свойства балансовой модели

2.11.2 Задачи работы:

1. Расчет коэффициентов прямых материальных затрат
2. Расчет коэффициентов полных материальных затрат
4. Применение табличного редактора Excel для расчетов коэффициентов прямых и полных материальных затрат

2.11.4 Описание (ход) работы:

Коэффициенты прямых материальных затрат и коэффициенты полных материальных затрат

Величины a_{ij} называются *коэффициентами прямых материальных затрат* и рассчитываются следующим образом:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \quad i = 1,\dots,n\,,\ j = 1,\dots,n. \tag{6.5}$$

Определение 1 Коэффициента прямых материальных затрат показывает, какое количество продукции i-й отрасли необходимо, если учитывать только прямые затраты, для производства единицы продукции j-й отрасли.

С учетом формулы (6.5) систему уравнений баланса можно переписать в виде

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_i; \quad i = 1,\dots,n \tag{6.6}$$

система уравнений (6.6) в матричной форме примет вид

$$X = AX + Y \tag{6.7}$$

Система уравнений (6.6), или в матричной форме (6.7), называется экономико-математической моделью межотраслевого баланса (моделью Леонтьева, моделью (затраты – выпуск»). С помощью этой модели можно выполнять три варианта расчетов:

- Задав в модели величины валовой продукции каждой отрасли (X_i), можно определить объемы конечной продукции каждой отрасли (Y_i):

$$Y = (E - A)\,X \tag{6.8}$$

- Задав величины конечной продукции всех отраслей (Y_i), можно определить величины валовой продукции каждой отрасли (X_i):

$$X = (E - A)^{-1}\,Y \tag{6.9}$$

- Для ряда отраслей задав величины валовой продукции, а для всех остальных отраслей задав объемы конечной продукции, можно найти величины конечной продукции первых отраслей и объемы валовой продукции вторых, в этом варианте расчета удобнее пользоваться не матричной формой модели (6.7), а системой линейных уравнений (6.6). В формулах (6.8) и (6.9) Е обозначает единичную матрицу n-го порядка, а $(E-A)^{-1}$ обозначает матрицу, обратную матрице $(E-A)$. Если определитель матрицы $(E-A)$ не равен нулю, т.е. эта матрица невырожденная, то обратная к ней матрица существует. Обозначим эту обратную матрицу через B, тогда систему уравнений в матричной форме (6.9) можно записать в виде

$$X=BY. \tag{6.9$'$}$$

Элементы матрицы В будем обозначать через b_{ij}, тогда из матричного уравнения (6.9$'$) для любой i-й отрасли можно получить следующее соотношение:

$$X_i=\sum_{j=1}^{n} b_{ij}Y_i, \quad i=\overline{1,n}. \tag{6.10}$$

Из соотношений (6.10) следует, что валовая продукция выступает как взвешенная сумма величин конечной продукции, причем весами являются коэффициенты b_{ij}, которые показывают, сколько всего нужно произвести продукции i-й отрасли для выпуска в сферу конечного использования единицы продукции j-й отрасли. В отличии от коэффициентов прямых затрат a_{ij} коэффициенты b_{ij} называются *коэффициентами полных материальных затрат* и включает в себя как прямые, так и косвенные затраты всех порядков. Если прямые затраты отражают количество средств производства, израсходованных непосредственно при изготовлении данного продукта, то косвенные относятся в предшествующим стадиям производства и входят в производство продукта не прямо, а через другие (промежуточные) средства производства.

Определение 2 Коэффициенты полных материальных затрат b_{ij} показывают, какое количество продукции i-й отрасли нужно произвести, чтобы с учетом прямых и косвенных затрат этой продукции получить единицу конечной продукции j-й отрасли.

основные свойства матрицы коэффициентов прямых материальных затрат A. Коэффициенты прямых затрат по определению являются неотрицательными, следовательно, матрица A в целом может быть названа неотрицательной: $A \geq 0$. Так как процесс воспроизводства нельзя было бы осуществлять, если бы для собственного воспроизводства в отрасли затрачивалось большее количество продукта, чем создавалось, то очевидно, что диагональные элемента матрицы A меньше единицы: $a_{ij}<1$.

Понятие *продуктивности*матрицы коэффициентов прямых материальных затрат.

Будем называть неотрицательную матрицу A продуктивной, если существует такой неотрицательный вектор $X \geq 0$, что

$$X > AX. \tag{6.11}$$

Очевидно, что условие (6.11) означает существование положительного вектора конечной продукции $Y>0$ для модели межотраслевого баланса (6.7).

Для того чтобы матрица коэффициентов прямых материальных затрат A была продуктивной, необходимо и достаточно чтобы выполнялось условие:

матрица $(E-A)$ неотрицательно обратима, т.е. существует обратная матрица $(E-A)^{-1} \geq 0$.

Более простым, но только достаточным признаком продуктивности матрицы A является ограничение на величину ее нормы, т.е. на величину наибольшей суммы элементов матрицы A в каждом столбце. Если норма матрицы A строго меньше единицы, то эта матрица продуктивна; повторим, что данное условие является только достаточным, и матрица A может оказаться продуктивной и в случае, когда ее норма больше единицы.

Задача 6

Используя данные баланса, определите объемы производства валовой продукции, коэффициенты прямых и полных материальных затрат.

Производящие отрасли	*Потребляющие отрасли*		Конечный *продукт*
	1	2	
1	90	100	60
2	50	110	40

Решение

1) определяем объемы производства валовой продукции (X_i) по формуле:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i, \qquad i = 1,\ldots,n.$$

$X_1 = 90+100+60=250; \quad X_2 = 50+110+40=200.$

2) вычислим коэффициенты прямых затрат (a_{ij})по формуле

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \quad i = 1,\ldots,n, \; j = 1,\ldots,n.$$

a_{11}=90 : 250 =0,36; a_{12}=100 : 200 =0,5;
a_{21}= 50 : 250 = 0,2; a_{22}=110 : 200 = 0,55.

3) Рассчитаем матрицу полных материальных затрат по формуле:

$$B=(E-A)^{-1}$$

а) найдем матрицу Е-А

$$E - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,36 & 0,5 \\ 0,2 & 0,55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,64 & -0,5 \\ -0,2 & 0,45 \end{bmatrix}$$

б) рассчитаем определитель матрицы

Определителем квадратной матрицы 2-го порядка А называется число $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$. Определитель обозначается Δ(A) или $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Δ(Е-А)=0,64·0,45-(-0,5)·(-0,2)=0,288-0,1=0,188.

в) вместо каждого элемента матрицы поставим его *алгебраическое дополнение*: $\begin{bmatrix} 0,45 & 0,2 \\ 0,5 & 0,64 \end{bmatrix}$

Алгебраическим дополнением некоторого элемента определителя называется *минор* этого элемента, умноженный на $(-1)^s$, где s- сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент.

Минором некоторого элемента определителя называется определитель, получаемый из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент.

г) полученную матрицу транспонируем

$$\begin{bmatrix} 0,45 & 0,5 \\ 0,2 & 0,64 \end{bmatrix}$$

д) каждый элемент полученной матрицы делим на определитель исходной матрицы и получаем матрицу обратную данной:

$$B = (E - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 2{,}39 & 2{,}66 \\ 1{,}06 & 3{,}40 \end{bmatrix}.$$

В качестве проверки можно рассчитать матрицу X.

$$X = BY = \begin{bmatrix} 2{,}39 & 2{,}66 \\ 1{,}06 & 3{,}40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 60 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 \\ 200 \end{bmatrix}$$

X_1=2,39·60+2,66·40=249,8;

X_2=1,06·60+3,40·40=199,6.

Выполненные расчеты, возможно провести с использованием специализированных программ или более широко распространенных инструментов, таких как Excel. Рассмотрим решение этого примера в среде Excel. При этом будут использованы такие функции как МОБР (расчет обратной матрицы) и МУМНОЖ (умножение матриц).

Решение

Заносим исходные данные на рабочий лист Excel (рис. 6.1).

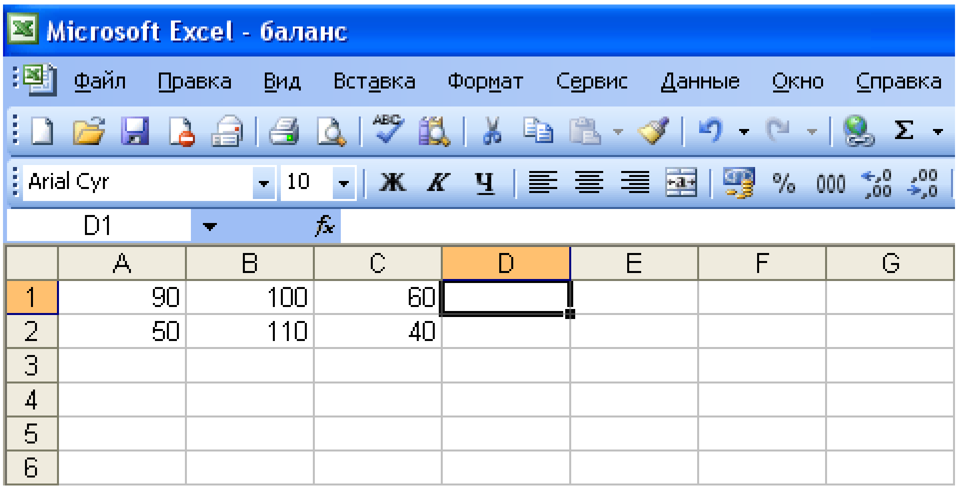


Рисунок 6.1 – Исходные данные

1) определяем объемы производства валовой продукции (X_i) по формуле:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i, \qquad i = 1,\dots,n.$$

Для этого в ячейку D1 заносим формулу: =СУММА(A1:C1), в ячейку D2: =СУММА(A2:C2) (рис.6.2).

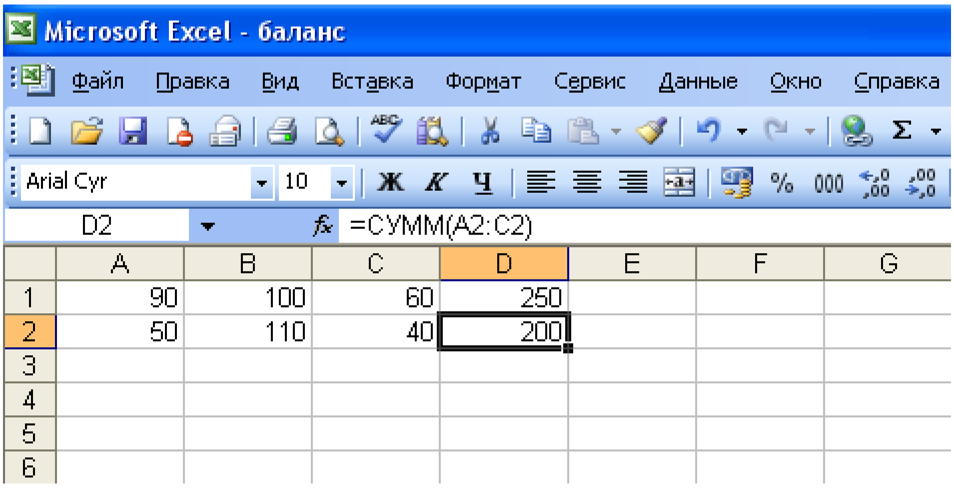


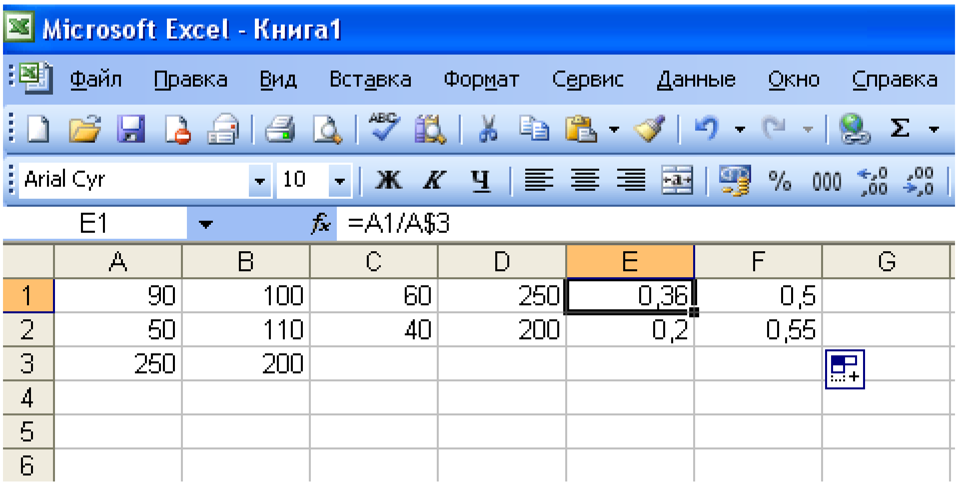
Рисунок 6.2 – Расчет X_i

2) вычислим коэффициенты прямых затрат (a_{ij})по формуле

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \quad i = 1,\ldots,n, \; j = 1,\ldots,n.$$

Для этого в ячейки A3 и B3 переносим значения X_i, рассчитанные в столбце D (можно набрать с клавиатуры, можно использовать функцию «Правка→ специальная вставка… →вставить значения, транспонировать»,).

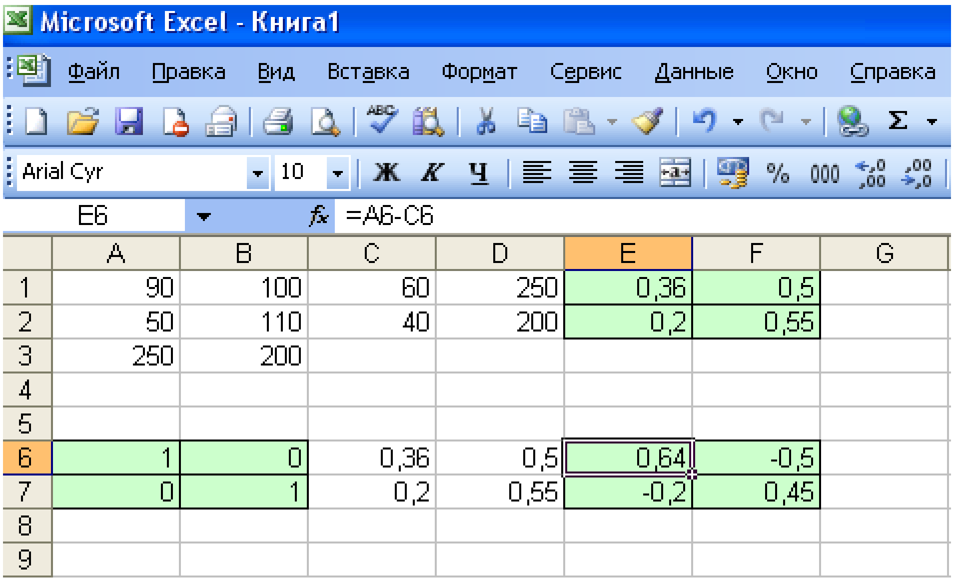
В ячейку E1 записываем формулу: =A1/A$3, копируем эту формулу в диапазоне E1:F2. Результатом будет являться матрица коэффициентов прямых A (рис. 6.3).



	A	B	C	D	E	F	G
1	90	100	60	250	0,36	0,5	
2	50	110	40	200	0,2	0,55	
3	250	200					
4							
5							
6							

Рисунок 6.3 – Расчет матрицы коэффициентов прямых затрат

3) Рассчитаем матрицу полных материальных затрат по формуле:
$B=(E-A)^{-1}$
а) найдем матрицу (E-A), в диапазоне A6:B7 запишем единичную матрицу и в диапазоне C6:D7 матрицу A. В ячейку E6 запишем формулу: =A1-C1, копируем эту формулу в диапазоне E6:F7, результатом является матрица (E-A).



	A	B	C	D	E	F	G
1	90	100	60	250	0,36	0,5	
2	50	110	40	200	0,2	0,55	
3	250	200					
4							
5							
6	1	0	0,36	0,5	0,64	-0,5	
7	0	1	0,2	0,55	-0,2	0,45	
8							
9							

Рисунок 6.4 – Расчет матрицы (Е-А)

б) найдем матрицу обратную (Е-А), для этого на листе Excel выделим диапазон G6:H7. Дадим команду «Вставка → Функция…». В открывшемся окне «Мастер функций» необходимо выбрать категорию «Математические», из математических – МОБР (рис.6.5).

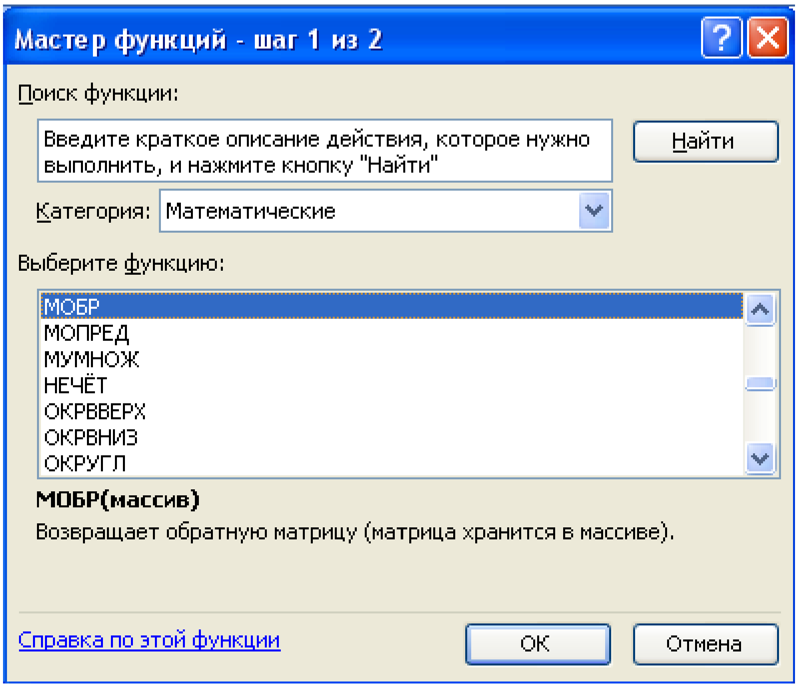


Рисунок 6.5 – Окно «Мастер функций»

Нажмите ОК. Откроется окно « Аргументы функции». Необходимо задать массив в котором находится матрица (Е-А). Вводим массив Е6:F7.

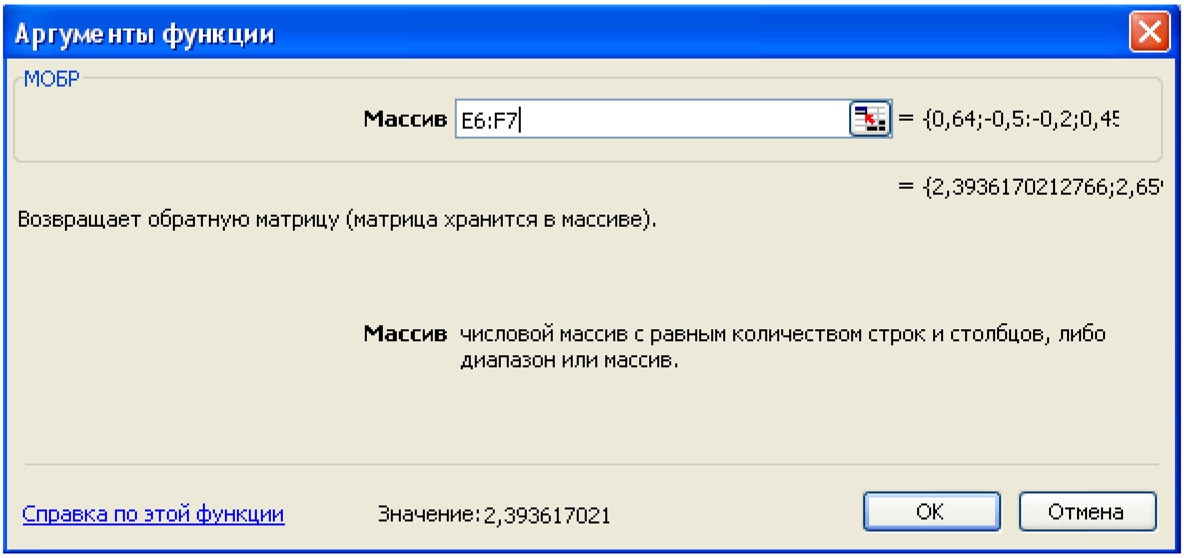


Рисунок 6.6 – Ввод данных, при расчете обратной матрицы

Для отображения результата в виде матрицы, нажмите Shift+Ctrl+Enter (если нажать ОК, то в ячейке G6 будет одно число). Массив G6:H7 будет содержать искомую матрицу $B=(E-A)^{-1}$ (рис.6.7).

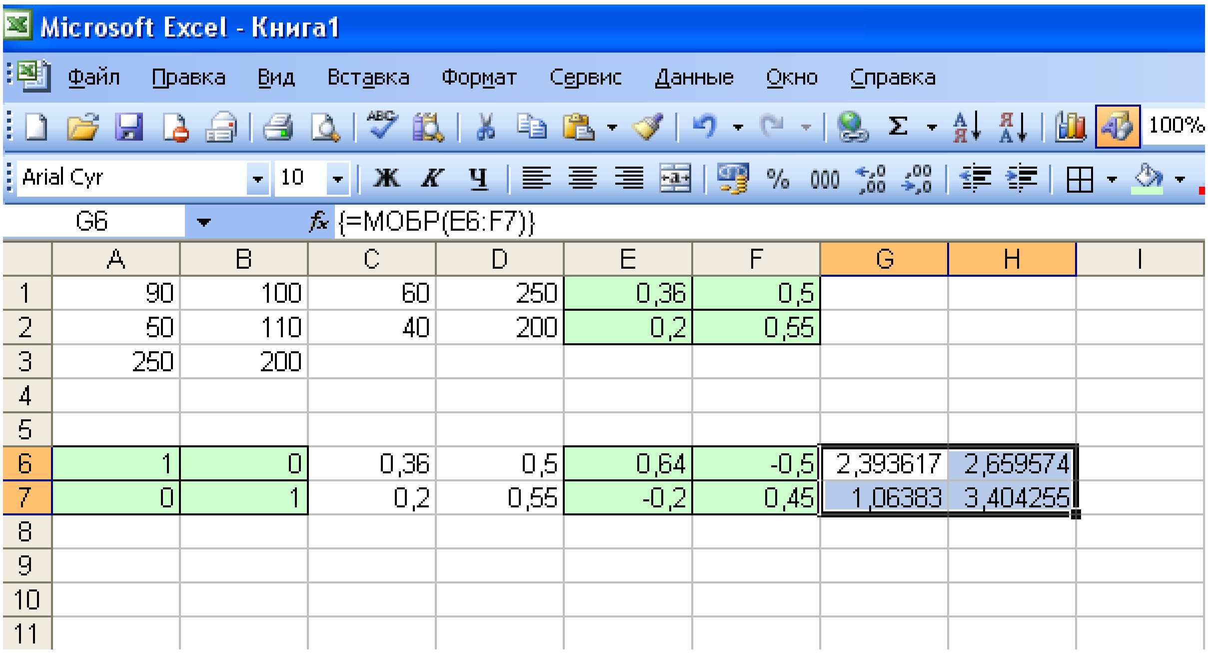


Рисунок 6.7 – Результат расчета обратной матрицы

В качестве проверки можно рассчитать матрицу X. Матрица X рассчитывается по формуле $X = BY$. Введем в диапазон I6:I7 матрицу У. Выделим диапазон J6:J7, выберем команду «Вставка → Функция…». В открывшемся окне «Мастер функций» выберем категорию «Математические» и из них МУМНОЖ (рис.6.8).

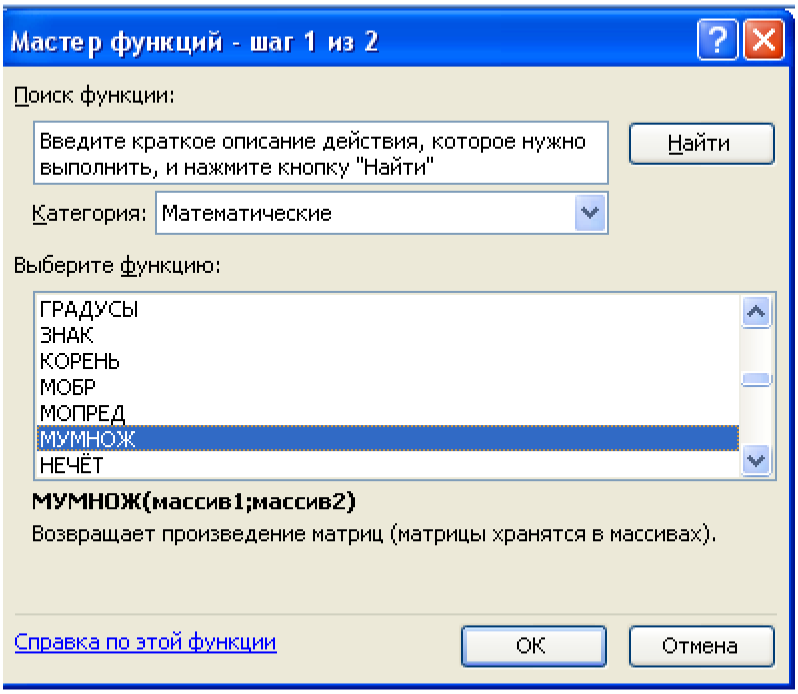


Рисунок 6.8 – Окно «Мастер функций»

Нажмите ОК. Откроется окно «Аргументы функции». Необходимо указать массивы, в которых находятся перемножаемые матрицы (порядок ввода массивов имеет значение), в нашем примере это массивы G6:H7 и I6:I7 (рис.6.9).

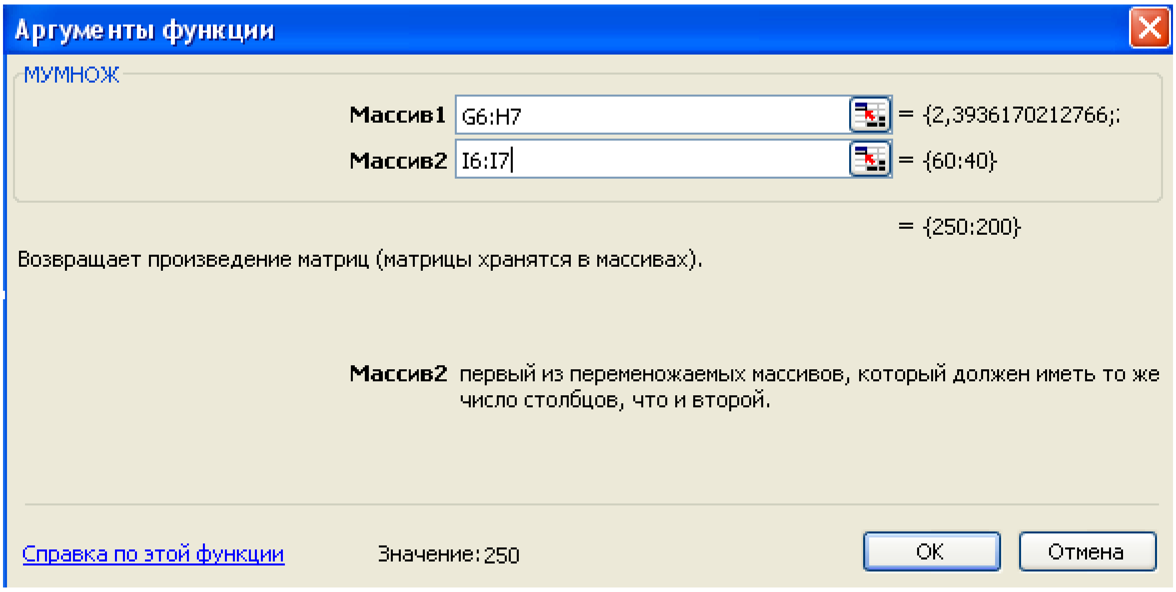


Рисунок 6.9 - Ввод данных, при перемножении матриц

После окончания ввода данных нажмите Shift+Ctrl+Enter. Массив J6:J7 будет содержать искомую матрицу X (рис.10).

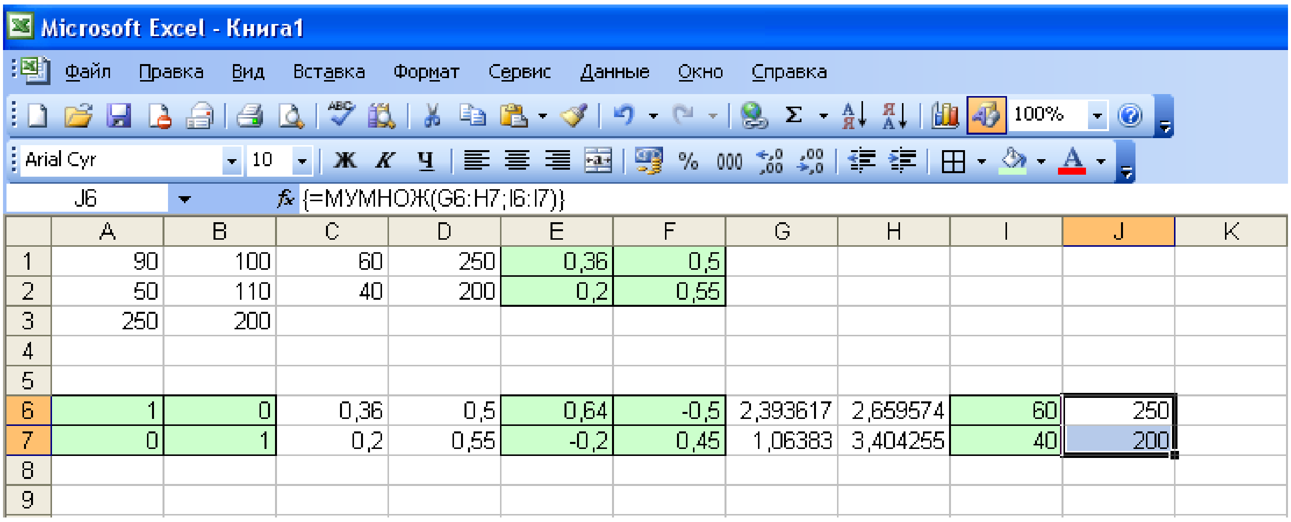


Рисунок 6.10 – Результат расчета матрицы X

Задача 7

Используя данные баланса, определите объемы производства валовой продукции, коэффициенты прямых и полных материальных затрат.

Производящие отрасли	*Потребляющие отрасли*		*Конечный продукт*
	1	2	
1	10	17	23
2	20	15	35

Задача 8

Используя данные баланса, определите объемы производства валовой продукции, коэффициенты прямых и полных материальных затрат.

Производящие отрасли	*Потребляющие отрасли*		*Конечный продукт*
	1	2	
1	70	45	25
2	25	30	40

Задача 9

Используя коэффициенты прямых материальных затрат и объемы конечного продукта

по отраслям рассчитать коэффициенты полных материальных затрат и объемы

производства валовой продукции.

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}22 & 0{,}54 \\ 0{,}38 & 0{,}26 \end{pmatrix},\ У = \begin{pmatrix} 20 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Задача 10

Используя коэффициенты прямых материальных затрат и объемы конечного продукта по отраслям рассчитать коэффициенты полных материальных затрат и объемы производства валовой продукции.

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}36 & 0{,}15 \\ 0{,}40 & 0{,}25 \end{pmatrix},\ У = \begin{pmatrix} 70 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Задача 11

На основании данных, приведенных в нижеследующих таблицах, рассчитать коэффициенты прямых и полных материальных затрат.

а)

Потребляющие отрасли	*Производящие отрасли*			*Конечный продукт*
	1	2	3	
1	50	60	80	60
2	25	90	40	105
3	25	60	40	85

б)

Потребляющие отрасли	*Производящие отрасли*			*Конечный продукт*
	1	2	3	
1	40	18	25	71
2	16	9	25	36
3	40	45	50	115

в)

Потребляющие отрасли	*Производящие отрасли*			*Конечный продукт*
	1	2	3	
1	18	36	25	61
2	45	90	25	20
3	36	36	50	30

Задача 12

Даны коэффициенты прямых материальных затрат и объемы конечной продукции в межотраслевом балансе для трех отраслей.

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}, \quad У = \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Требуется рассчитать коэффициенты полных материальных затрат и найти объемы валовой продукции отраслей.

Задача 13

Даны коэффициенты прямых материальных затрат и объемы конечной продукции в межотраслевом балансе для трех отраслей.

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}, \quad У = \begin{pmatrix} 40 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Требуется рассчитать коэффициенты полных материальных затрат и найти объемы валовой продукции отраслей.

Задача 14

На основе данных задачи 12 восстановите схему межотраслевого материального баланса.

Задача 15

На основе данных задачи 13 восстановите схему межотраслевого материального баланса.

Задача 16

Межотраслевой баланс производства и распределения продукции представлен в таблице.

Производящие отрасли	*Потребляющие отрасли*			*Конечная продукция*	*Валовая продукция*
	1	2	3		
1	232,6	51,0	291,8	200,0	775,3
2	155,1	255,0	0,0	100,0	510,1
3	232,6	51,0	145,9	300,0	729,6
Условно чистая продукция	155,0	153,1	291,9		
Валовая продукция	775,3	510,1	729,6		

Заданы затраты живого труда (трудовые ресурсы) в трех отраслях: L_1 = 1160, L_2 = 460, L_3 = 875 в некоторых единицах измерения трудовых затрат. Требуется определить коэффициенты прямой и полной трудоемкости.

Решение

1) находим коэффициенты прямой трудоемкости

$$t_j = \frac{L_j}{X_j} \Rightarrow t_1 = \frac{1160}{775{,}3} = 1{,}5; \qquad t_2 = \frac{460}{510{,}1} = 0{,}9; \qquad t_3 = \frac{875}{729{,}6} = 1{,}2.$$

2) рассчитываем матрицу коэффициентов полных материальных затрат

$$B = (E - A)^{-1} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 2{,}041 & 0{,}612 & 1{,}020 \\ 0{,}816 & 2{,}245 & 0{,}408 \\ 0{,}867 & 0{,}510 & 1{,}684 \end{pmatrix}.$$

3) находим коэффициенты полной трудоемкости

$$T = tB \Rightarrow T = (1{,}5;\, 0{,}9; 1{,}2) \cdot \begin{pmatrix} 2{,}041 & 0{,}612 & 1{,}020 \\ 0{,}816 & 2{,}245 & 0{,}408 \\ 0{,}867 & 0{,}510 & 1{,}684 \end{pmatrix} = (4{,}84;\, 3{,}55; 3{,}92).$$

Расчет элементов матрицы T :

$$\begin{aligned} &1{,}5 \cdot 2{,}041 + 0{,}9 \cdot 0{,}816 + 1{,}2 \cdot 0{,}867 = 4{,}84; \\ &1{,}5 \cdot 0{,}612 + 0{,}9 \cdot 2{,}245 + 1{,}2 \cdot 0{,}510 = 3{,}55; \\ &1{,}5 \cdot 1{,}020 + 0{,}9 \cdot 0{,}408 + 1{,}2 \cdot 1{,}684 = 3{,}92. \end{aligned}$$

Задача 17

По данным межотраслевого баланса, представленного в таблице и затратам живого труда $L_1 = 80$, $L_2 = 45$, $L_3 = 90$, определить коэффициенты прямой и полной трудоемкости.

Производящие отрасли	*Потребляющие отрасли*			*Конечная продукция*	*Валовая продукция*
	1	2	3		
1	18	7	5	21	51
2	6	8	2	20	36
3	3	15	14	23	55

Задача 18

По данным межотраслевого баланса, представленного в таблице и затратам живого труда $L_1 = 300$, $L_2 = 290$, $L_3 = 450$, определить коэффициенты прямой и полной трудоемкости.

Производящие отрасли	*Потребляющие отрасли*			*Конечная продукция*	*Валовая продукция*
	1	2	3		
1	90	56	64	240	450
2	45	85	210	310	650
3	83	98	101	518	800

Задача 19

По данным межотраслевого баланса, представленного в таблице и стоимости основных производственных фондов $Ф_1 = 1250$, $Ф_2 = 1700$, $Ф_3 = 1010$, определить коэффициенты прямой и полной фондоемкости.

Производящие отрасли	*Потребляющие отрасли*			*Конечная продукция*	*Валовая продукция*
	1	2	3		
1	180	210	115	405	748
2	250	80	170	620	1120
3	112	87	35	276	510

Задача 20

По данным межотраслевого баланса, представленного в таблице и стоимости основных производственных фондов $Ф_1 = 83$, $Ф_2 = 58$, $Ф_3 = 75$, определить коэффициенты прямой и полной фондоемкости.

Производящие отрасли	*Потребляющие отрасли*			*Конечная продукция*	*Валовая продукция*
	1	2	3		
1	9	5	6	37	57
2	4	7	1	23	35
3	11	8	6	45	70

Задача 21

По данным схемы межотраслевого баланса и затрат труда $L_1=1160$, $L_2=460$, $L_3=875$ составить схему межотраслевого баланса труда.

Производящие отрасли	*Потребляющие отрасли*			*Конечная продукция*	*Валовая продукция*
	1	2	3		
1	232,6	51,0	291,8	200,0	775,3
2	155,1	255,0	0,0	100,0	510,1
3	232,6	51,0	145,9	300,0	729,6
Условно чистая продукция	155,0	153,1	291,9		
Валовая продукция	775,3	510,1	729,6		

Решение

1) находим коэффициенты прямой трудоемкости

$$t_j = \frac{L_j}{X_j} \Rightarrow t_1 = \frac{1160}{775,3} = 1,5; \qquad t_2 = \frac{460}{510,1} = 0,9; \qquad t_3 = \frac{875}{729,6} = 1,2.$$

2) Умножая первую, вторую и третью строки первого и второго квадрантов межотраслевого материального баланса, на соответствующие коэффициенты прямой трудоемкости, получаем схему межотраслевого баланса труда (в трудовых измерителях)

$$l_{ij} = x_{ij} t_i$$

$$l_{11} = 232,6 \cdot 1,5 = 348,9, \; l_{12} = 51,0 \cdot 1,5 = 76,5, \; l_{13} = 291,8 \cdot 1,5 = 437,7,$$

$$l_{y1} = 200 \cdot 1,5 = 300,$$

$$l_{21} = 155,1 \cdot 0,9 = 139,6, \quad l_{22} = 255,0 \cdot 0,9 = 229,5, \quad l_{23} = 0,0 \cdot 0,9 = 0,$$
$$l_{y2} = 100 \cdot 0,9 = 90,$$
$$l_{31} = 232,6 \cdot 1,2 = 279,1, \quad l_{32} = 51,0 \cdot 1,2 = 61,2, \quad l_{33} = 145,9 \cdot 1,2 = 175,1,$$
$$l_{y3} = 300 \cdot 1,2 = 360.$$

Межотраслевой баланс затрат труда

Отрасль	*Межотраслевые затраты овеществленного труда*			*Затраты труда на конечную продукцию*	*Затраты труда в отраслях*
	1	2	3		
1	348,9	76,5	437,7	300,0	1163,0
2	139,6	229,5	0,0	90,0	459,1
3	279,1	61,2	175,1	360,0	875,5

Незначительные расхождения между данными таблицы и исходными данными вызваны погрешностями округления при вычислении.

Задача 22

По данным схемы межотраслевого баланса и затрат труда L_1=2950, L_2=3100, L_3=1500 составить схему межотраслевого баланса труда.

Производящие отрасли	*Потребляющие отрасли*			*Конечная продукция*	*Валовая продукция*
	1	2	3		
1	830	715	390	1980	3915
2	650	817	235	1200	2902
3	350	185	148	737	1420

Задача 23

По данным схемы межотраслевого баланса и затрат труда L_1=100, L_2=102, L_3=163 составить схему межотраслевого баланса труда.

Производящие отрасли	*Потребляющие отрасли*			*Конечная продукция*	*Валовая продукция*
	1	2	3		
1	15	22	12	31	80
2	17	13	23	15	68
3	35	15	10	37	97

Задача 24

По данным схемы межотраслевого баланса и стоимости основных производственных фондов каждой из отраслей $Ф_1$=1053, $Ф_2$=1200, $Ф_3$=3090, составить схему межотраслевого баланса производственных фондов.

Производящие отрасли	*Потребляющие отрасли*			*Конечная продукция*	*Валовая продукция*
	1	2	3		
1	250	345	127	682	1404
2	101	485	320	809	1715
3	713	305	513	1044	2575

Задача 25

По данным схемы межотраслевого баланса и стоимости основных производственных фондов каждой из отраслей $Ф_1$=809, $Ф_2$=673, $Ф_3$=1005, составить схему межотраслевого баланса производственных фондов.

Производящие отрасли	*Потребляющие отрасли*			*Конечная продукция*	*Валовая продукция*
	1	2	3		
1	310	218	415	790	1733
2	98	170	53	315	636
3	436	275	119	710	1540

Задача 26

На основании схемы отчетного баланса и стоимости основных производственных фондов отчетного периода $Ф_1$=40, $Ф_2$=12, $Ф_3$=38 определите, сколько потребуется капитальных вложений для производства конечного продукта в размере $Y_1 = 45$, $Y_2 = 36$, $Y_3 = 15$.

Потребляющие отрасли	***Производящие отрасли***			*Конечный продукт*
	1	2	3	
1	30	45	18	20
2	15	18	27	23
3	28	8	13	47

Задача 27

На основании схемы отчетного баланса и трудовых затрат отчетного периода L_1=290, L_2=204, L_3=56, определите сколько потребуется привлечь трудовых затрат для производства конечного продукта в размере $Y_1 = 200$, $Y_2 = 250$, $Y_3 = 190$

Потребляющие отрасли	***Производящие отрасли***			*Конечный продукт*
	1	2	3	
1	155	230	175	185
2	250	180	137	215
3	50	168	80	150

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

3.1Практическое занятие 1,2 (4 часа)

Тема: «Балансовая модель»
3.1.1Задание для работы:
1. Применение балансового метода в анализе экономических показателей
2. Интерпретация результатов решения

3.1.2Краткое описание проводимого занятия:

Обозначим затраты живого труда в производстве j-го продукта через L_j, а объем производства этого продукта (валовой выпуск), как и раньше, через X_j. Тогда прямые затраты труда на единицу j-го вида продукции (коэффициент прямой трудоемкости) можно задать следующей формулой:

$$t_j = \frac{L_j}{X_j}; \quad j = \overline{1, n}. \tag{6.12}$$

Из данной формулы следует, что

$$L_j = X_j t_j. \tag{6.13}$$

Если межотраслевые прямые затраты труда обозначить через l_{ij}, то они будут соответственно равны

$$l_{ij} = x_{ij} t_i \tag{6.14}$$

Введем понятие полных затрат труда как суммы прямых затрат живого труда и затрат овеществленного труда, перенесенных на продукт через израсходованные средства производства. Если обозначить величину полных затрат труда на единицу продукции j-го вида через T_j, то произведения вида $a_{ij}T_j$ отражают затраты овеществленного труда, перенесенного на единицу j-го продукта через i-е средство производства; при этом предполагается, что коэффициенты прямых материальных затрат a_{ij} выражены в натуральных единицах. Тогда полные трудовые затраты на единицу j-го вида продукции (коэффициент полной трудоемкости) будут равны

$$T_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} T_i + t_j; \quad j = \overline{1, n}. \tag{6.15}$$

Введем в рассмотрение вектор-строку коэффициентов прямой трудоемкости $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ и вектор-строку коэффициентов полной трудоемкости $T = (T_1, T_2, \ldots, T_n)$.

Тогда с использованием уже рассматриваемой выше матрицы коэффициентов прямых материальных затрат A (в натуральном выражении) систему уравнений (6.15) можно переписать в матричном виде:

$$T = TA + t. \tag{6.16}$$

Произведя очевидные матричные преобразования с использованием единичной матрицы E

$$T - TA = TE - TA = T(E - A) = t,$$

получим следующее соотношение для вектора коэффициентов полной трудоемкости:

$$T = t(E - A)^{-1}. \tag{6.17}$$

Матрица $(E - A)^{-1}$ нам уже знакома, это матрица B коэффициентов полных материальных затрат, так что последнее равенство можно переписать в виде

$$T = tB \tag{6.17'}$$

Обозначим через L величину совокупных затрат живого труда по всем видам продукции, которая с учетом формулы (6.12) будет равна

$$L = \sum_{j=1}^{n} L_j = \sum_{j=1}^{n} t_j X_j = tX \qquad (6.18)$$

Используя соотношения (6.18), приходим к следующему неравенству:

$$tX = TY, \qquad (6.19)$$

здесь t и T – вектор-строки коэффициентов прямой валовой и конечной продукции соответственно.

На основе коэффициентов прямой и полной трудоемкости могут быть разработаны межотраслевые и межпродуктовые балансы затрат труда и использования трудовых ресурсов. Схематически эти балансы строятся по общему типу матричных моделей.

Развитие основной модели межотраслевого баланса достигается также путем включения в нее показателей фондоемкости продукции. В простейшем случае модель дополняется отдельной строкой, в которой указаны в стоимостном выражении объемы производственных фондов Φ_j, занятые в каждой j-й отрасли. На основании этих данных и объемов валовой продукции всех отраслей определяются коэффициенты прямой фондоемкости продукции j-й отрасли:

$$f_j = \frac{\Phi_j}{X_j}; \quad j = \overline{1,n}. \qquad (6.20)$$

Стоимость производственных фондов, занятых в каждой j-ой отрасли соответственно равна:

$$\Phi_j = X_j f_j \qquad (6.21)$$

Стоимость производственных фондов j-ой отрасли, занятых при производстве продукции для i-ой отрасли будет равна:

$$\phi_{ij} = x_{ij} f_i \qquad (6.22)$$

Коэффициент прямой фондоемкости показывает величину производственных фондов, непосредственно занятых в производстве данной отрасли, в расчете на единицу ее валовой продукции. В отличии от этого показателя коэффициент полной фондоемкости Fj отражает объем фондов, необходимых во всех отраслях для выпуска единицы конечной продукции j-й отрасли. Если a_{ij} – коэффициент прямых материальных затрат, то для коэффициента полной фондоемкости справедливо равенство, аналогичное равенству (6.13) для коэффициента полной трудоемкости:

$$F_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} F_i + f_j; \quad j = \overline{1,n}, \qquad (6.23)$$

Если ввести в рассмотрение вектор-строку коэффициентов прямой фондоемкости $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ и вектор-строку коэффициентов полной фондоемкости $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$, то систему уравнений (6.23) можно переписать в матричной форме:

$$F = FA + f, \qquad (6.24)$$

откуда с помощью преобразований, аналогичных применяемым выше для коэффициентов трудоемкости, можно получить матричное соотношение

$$F = fB, \qquad (6.25)$$

где $B = (E - A)^{-1}$ – матрица коэффициентов полных материальных затрат.

Задача 16

Межотраслевой баланс производства и распределения продукции представлен в таблице.

Производящие отрасли	*Потребляющие отрасли*			*Конечная продукция*	*Валовая продукция*
	1	2	3		
1	232,6	51,0	291,8	200,0	775,3
2	155,1	255,0	0,0	100,0	510,1
3	232,6	51,0	145,9	300,0	729,6
Условно чистая продукция	155,0	153,1	291,9		
Валовая продукция	775,3	510,1	729,6		

Заданы затраты живого труда (трудовые ресурсы) в трех отраслях: L_1 = 1160, L_2 = 460, L_3 = 875 в некоторых единицах измерения трудовых затрат. Требуется определить коэффициенты прямой и полной трудоемкости.

Решение

1) находим коэффициенты прямой трудоемкости

$$t_j = \frac{L_j}{X_j} \Rightarrow t_1 = \frac{1160}{775{,}3} = 1{,}5; \qquad t_2 = \frac{460}{510{,}1} = 0{,}9; \qquad t_3 = \frac{875}{729{,}6} = 1{,}2.$$

2) рассчитываем матрицу коэффициентов полных материальных затрат

$$B = (E - A)^{-1} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 2{,}041 & 0{,}612 & 1{,}020 \\ 0{,}816 & 2{,}245 & 0{,}408 \\ 0{,}867 & 0{,}510 & 1{,}684 \end{pmatrix}.$$

3) находим коэффициенты полной трудоемкости

$$T = tB \Rightarrow T = (1{,}5; 0{,}9; 1{,}2) \cdot \begin{pmatrix} 2{,}041 & 0{,}612 & 1{,}020 \\ 0{,}816 & 2{,}245 & 0{,}408 \\ 0{,}867 & 0{,}510 & 1{,}684 \end{pmatrix} = (4{,}84; 3{,}55; 3{,}92).$$

Расчет элементов матрицы T :

$$1{,}5 \cdot 2{,}041 + 0{,}9 \cdot 0{,}816 + 1{,}2 \cdot 0{,}867 = 4{,}84;$$
$$1{,}5 \cdot 0{,}612 + 0{,}9 \cdot 2{,}245 + 1{,}2 \cdot 0{,}510 = 3{,}55;$$
$$1{,}5 \cdot 1{,}020 + 0{,}9 \cdot 0{,}408 + 1{,}2 \cdot 1{,}684 = 3{,}92.$$

Задача 17

По данным межотраслевого баланса, представленного в таблице и затратам живого труда L_1 = 80, L_2 = 45, L_3 = 90, определить коэффициенты прямой и полной трудоемкости.

Производящие отрасли	*Потребляющие отрасли*			*Конечная продукция*	*Валовая продукция*
	1	2	3		
1	18	7	5	21	51
2	6	8	2	20	36
3	3	15	14	23	55

Задача 18

По данным межотраслевого баланса, представленного в таблице и затратам живого труда L_1 = 300, L_2 = 290, L_3 = 450, определить коэффициенты прямой и полной трудоемкости.

Производящие отрасли	*Потребляющие отрасли*			*Конечная продукция*	*Валовая продукция*
	1	2	3		
1	90	56	64	240	450
2	45	85	210	310	650
3	83	98	101	518	800

Задача 19

По данным межотраслевого баланса, представленного в таблице и стоимости основных производственных фондов $Ф_1$ = 1250, $Ф_2$ = 1700, $Ф_3$ =1010, определить коэффициенты прямой и полной фондоемкости.

Производящие отрасли	*Потребляющие отрасли*			*Конечная продукция*	*Валовая продукция*
	1	2	3		
1	180	210	115	405	748
2	250	80	170	620	1120
3	112	87	35	276	510

Задача 20

По данным межотраслевого баланса, представленного в таблице и стоимости основных производственных фондов $Ф_1$ =83, $Ф_2$ =58, $Ф_3$ =75, определить коэффициенты прямой и полной фондоемкости.

Производящие отрасли	*Потребляющие отрасли*			*Конечная продукция*	*Валовая продукция*
	1	2	3		
1	9	5	6	37	57
2	4	7	1	23	35
3	11	8	6	45	70

Задача 21

По данным схемы межотраслевого баланса и затрат труда L_1=1160, L_2=460, L_3=875 составить схему межотраслевого баланса труда.

Производящие отрасли	*Потребляющие отрасли*			*Конечная продукция*	*Валовая продукция*
	1	2	3		
1	232,6	51,0	291,8	200,0	775,3
2	155,1	255,0	0,0	100,0	510,1
3	232,6	51,0	145,9	300,0	729,6
Условно чистая продукция	155,0	153,1	291,9		
Валовая продукция	775,3	510,1	729,6		

Решение

1) находим коэффициенты прямой трудоемкости

$$t_j = \frac{L_j}{X_j} \Rightarrow t_1 = \frac{1160}{775{,}3} = 1{,}5; \qquad t_2 = \frac{460}{510{,}1} = 0{,}9; \qquad t_3 = \frac{875}{729{,}6} = 1{,}2.$$

2) Умножая первую, вторую и третью строки первого и второго квадрантов межотраслевого материального баланса, на соответствующие коэффициенты прямой трудоемкости, получаем схему межотраслевого баланса труда (в трудовых измерителях)

$$l_{ij} = x_{ij} t_i$$

$$l_{11} = 232{,}6 \cdot 1{,}5 = 348{,}9, \; l_{12} = 51{,}0 \cdot 1{,}5 = 76{,}5, \; l_{13} = 291{,}8 \cdot 1{,}5 = 437{,}7,$$

$$l_{y1} = 200 \cdot 1{,}5 = 300,$$

$$l_{21} = 155{,}1 \cdot 0{,}9 = 139{,}6, \; l_{22} = 255{,}0 \cdot 0{,}9 = 229{,}5, \; l_{23} = 0{,}0 \cdot 0{,}9 = 0,$$

$$l_{y2} = 100 \cdot 0{,}9 = 90,$$

$$l_{31} = 232{,}6 \cdot 1{,}2 = 279{,}1, \; l_{32} = 51{,}0 \cdot 1{,}2 = 61{,}2, \; l_{33} = 145{,}9 \cdot 1{,}2 = 175{,}1,$$

$$l_{y3} = 300 \cdot 1{,}2 = 360.$$

Межотраслевой баланс затрат труда

Отрасль	*Межотраслевые затраты овеществленного труда*			*Затраты труда на конечную продукцию*	*Затраты труда в отраслях*
	1	2	3		
1	348,9	76,5	437,7	300,0	1163,0
2	139,6	229,5	0,0	90,0	459,1
3	279,1	61,2	175,1	360,0	875,5

Незначительные расхождения между данными таблицы и исходными данными вызваны погрешностями округления при вычислении.

Задача 22

По данным схемы межотраслевого баланса и затрат труда L_1=2950, L_2=3100, L_3=1500 составить схему межотраслевого баланса труда.

Производящие отрасли	*Потребляющие отрасли*			*Конечная продукция*	*Валовая продукция*
	1	2	3		
1	830	715	390	1980	3915
2	650	817	235	1200	2902
3	350	185	148	737	1420

Задача 23

По данным схемы межотраслевого баланса и затрат труда L_1=100, L_2=102, L_3=163 составить схему межотраслевого баланса труда.

Производящие отрасли	*Потребляющие отрасли*			*Конечная продукция*	*Валовая продукция*
	1	2	3		
1	15	22	12	31	80
2	17	13	23	15	68

3	35	15	10	37	97

Задача 24

По данным схемы межотраслевого баланса и стоимости основных производственных фондов каждой из отраслей $Ф_1$=1053, $Ф_2$=1200, $Ф_3$=3090, составить схему межотраслевого баланса производственных фондов.

Производящие отрасли	*Потребляющие отрасли*			*Конечная продукция*	*Валовая продукция*
	1	2	3		
1	250	345	127	682	1404
2	101	485	320	809	1715
3	713	305	513	1044	2575

Задача 25

По данным схемы межотраслевого баланса и стоимости основных производственных фондов каждой из отраслей $Ф_1$=809, $Ф_2$=673, $Ф_3$=1005, составить схему межотраслевого баланса производственных фондов.

Производящие отрасли	*Потребляющие отрасли*			*Конечная продукция*	*Валовая продукция*
	1	2	3		
1	310	218	415	790	1733
2	98	170	53	315	636
3	436	275	119	710	1540

Задача 26

На основании схемы отчетного баланса и стоимости основных производственных фондов отчетного периода $Ф_1$=40, $Ф_2$=12, $Ф_3$=38 определите, сколько потребуется капитальных вложений для производства конечного продукта в размере Y_1 = 45, Y_2 = 36, Y_3 = 15.

Потребляющие отрасли	***Производящие отрасли***			*Конечный продукт*
	1	2	3	
1	30	45	18	20
2	15	18	27	23
3	28	8	13	47

Задача 27

На основании схемы отчетного баланса и трудовых затрат отчетного периода L_1=290, L_2=204, L_3=56, определите сколько потребуется привлечь трудовых затрат для производства конечного продукта в размере Y_1 = 200, Y_2 = 250, Y_3 = 190

Потребляющие отрасли	***Производящие отрасли***			*Конечный продукт*
	1	2	3	
1	155	230	175	185

2	250	180	137	215
3	50	168	80	150

3.1.3 Результаты и выводы:

К числу важнейших аналитических возможностей балансового метода относится определение прямых и полных затрат труда на единицу продукции и разработка на этой основе балансовых продуктово-трудовых моделей, исходной моделью при этом служит отчетный межпродуктовый баланс в натуральном выражении. В этом балансе по строкам представлено распределение каждого отдельного продукта на производство других продуктов и конечное потребление (первый и второй квадранты схемы межотраслевого баланса). Отдельной строкой дается распределение затрат живого труда в производстве всех видов продукции; предполагается, что трудовые затраты выражены в единицах труда одинаковой степени сложности.