ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГООБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра организации производства и

моделирования экономических систем

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.ДВ.12.02 Математическое моделирование в менеджменте

Направление подготовки:Менеджмент

Профиль образовательной программыУправленческий и финансовый учет

Форма обучения: очная

Оренбург 201_ г.

Содержание

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.1 Лекция №1 (2 часа)
Тема: «Экономико-математические методы и модели»

1.1 Вопросы лекции:
1. Основные понятия.
2. Классификация оптимизационных методов.
3. Цель и задачи курса.

1.1.2 Краткое содержание вопросов

1. Основные понятия.

Искусство принятия наилучших решений, основанное на опыте и интуиции, является сущностью любой сферы человеческой деятельности. Человек хорошо или плохо решает все возникающие перед ним задачи. Лицо, принимающее решение, должно всегда выбирать альтернативу с максимально ожидаемой полезностью. Рационализировать процесс принятия решений – это цель общей теории принятия решений, которая как самостоятельная дисциплина сформировалась в начале 60-х годов XX века. Сам процесс принятия решений может быть ненормализованным и формализованным.

Принятие ненормализованных решений–это своего рода творчество. Чтобы принять такое решение, человеку достаточно подумать и решить, однако, никакой гарантии правильности решения при этом нет.

Принятие формализованных решений – это наука и этому можно научить. Формализованные решения принимаются по четким рекомендациям, руководствуясь которыми различные люди будут принимать одни и те же решения. В настоящее время теория принятия решений применяется преимущественно для анализа тех деловых проблем, которые можно легко и однозначно формализовать, а результаты исследования адекватно интерпретировать. Так, например, методы теории принятия решений используют в самых различных областях управления: при проектировании сложных технических и организационных систем, планировании развития городов, выборе программ развития экономики и энергетики регионов и т.п. Принятие формализованных решений базируется на двух основных методах: логическом моделировании и оптимизации.

При логическом моделировании используются составленные высококвалифицированными специалистами правила с применением логических функций: И, ИЛИ, ЕСЛИ, НЕ. Правила определяют, что надо делать в тех или иных случаях. Применяют их те люди, кто должен принимать решения.

Оптимизация – это целенаправленная деятельность, заключающаяся в получении наилучших результатов при соответствующих условиях. Оптимизация решения – это процесс перебора множества факторов, влияющих на результат. Оптимальное решение – это выбранное по какому-либо критерию оптимизации наиболее эффективное из всех альтернативных вариантов решение. В математике оптимизация связана с нахождением оптимума (т.е. максимума или минимума) некоторой функции. В данном контексте *методы оптимизации* будем рассматривать как средства принятия оптимальных решений. Они входят в состав экономико-математических методов.

Термин *экономико-математические методы* понимается как обобщающее название комплекса экономических и математических научных дисциплин, объединенных для изучения социально-экономических систем и процессов.

Под *социально-экономической системой* будем понимать сложную вероятностную динамическую систему, охватывающую процессы производства, обмена, распределения и потребления материальных и других благ. Она относится к классу кибернетических систем, т.е. систем управляемых.

Единого определения понятия *система* нет, но возможна следующая формулировка: *системой* называется комплекс взаимосвязанных элементов вместе с отношениями, как между элементами, так и между их атрибутами. Исследуемое множество элементов можно рассматривать как систему, если выявлены следующие четыре признака:

1) целостность системы, т.е. принципиальная несводимость свойств системы к сумме свойств составляющих ее элементов;

2) наличие цели и критерия исследования данного множества элементов;

3) наличие более крупной, внешней по отношению к данной, системы, называемой «средой»;

4) возможность выделения в данной системе взаимосвязанных частей (подсистем).

Основным методом исследования систем является *метод моделирования*, т.е. способ теоретического анализа и практического действия, направленный на разработку и использование моделей. *Экономико-математическое моделирование* – это описание знаковыми математическими средствами социально-экономических систем. Практическими задачами экономико-математического моделирования являются:

– анализ экономических объектов и процессов;

– экономическое прогнозирование, предвидение развития экономических процессов;

– выработка управленческих решений на всех уровнях хозяйственной иерархии.

При разработке и принятии управленческих решений применяется сложный комплекс экономико-математических моделей, которые решаются при помощи определенных методов моделирования.

В составе экономико-математических методов можно выделить следующие разделы:

1) *экономическая кибернетика* (системный анализ экономики, теория экономической информации и теория управляющих систем);

2) *математическая статистика* (выборочный метод, дисперсионный анализ, корреляционный анализ, регрессионный анализ, многомерный статистический анализ, факторный анализ, теория индексов и др.);

3) *математическая экономия* и изучающая те же вопросы с количественной стороны *эконометрия* (теория экономического роста, теория производственных функций, межотраслевые балансы, национальные счета, анализ спроса и потребления, региональный и пространственный анализ, глобальное моделирование и др.);

4) методы принятия оптимальных решений, в том числе исследование операций в экономике;

5) *методы и дисциплины, специфичные отдельно как для централизованно планируемой экономики, так и для рыночной (конкурентной) экономики* (оптимальное планирование, теория оптимального ценообразования, модели монополии, модели индикативного планирования, модели теории фирмы и т.д.). Многие из методов, разработанных для централизованно планируемой экономики, могут оказаться полезными и при экономико-математическом моделировании в условиях рыночной экономики;

6) *методы экспериментального изучения экономических явлений* (математические методы анализа и планирования экономических экспериментов, методы машинной имитации (имитационное моделирование), деловые игры, методы экспертных оценок).

Экономико-математические методы следует понимать как инструмент, а экономико-математические модели – как продукт процесса экономико-математического моделирования.

2. Классификация оптимизационных методов.

Перечисленные выше методы применяются адаптивно к задачам, возникающим в процессе принятия того или иного решения. Остановимся подробнее на четвертом разделе (*методы принятия оптимальных решений*), который является наиболее объемным, включающим в себя такие дисциплины и методы, как: оптимальное (математическое) программирование, методы ветвей и границ, сетевые методы планирования и управления, программно-целевые методы планирования и управления, теорию и методы управления запасами, теорию массового обслуживания, теорию игр, теорию расписаний.

Оптимальное (математическое) программирование – раздел прикладной математики, изучающий задачи условной оптимизации. В экономике такие задачи возникают при практической реализации принципа оптимальности в планировании и управлении. В оптимальное (математическое) программирование входят:

а) линейное программирование,
б) нелинейное программирование,
в) динамическое программирование,
г) дискретное (целочисленное) программирование,
д) дробно-линейное программирование,
е) параметрическое программирование,
ж) сепарабельное программирование,
з) стохастическое программирование,
и) геометрическое программирование.

Для успешного принятия оптимального решения необходимо знать, что такое математическая модель, уметь отбирать данные для ее построения и представлять, каким образом компьютер находит это решение (т.е. владеть информацией о возможных методах решения различных типов моделей и применяемых при этом алгоритмов).

Математическое моделирование имеет два существенных преимущества: 1) дает быстрый ответ на поставленный вопрос, на что в реальной обстановке могут потребоваться иногда даже годы; 2) предоставляет возможность широкого экспериментирования, осуществить которое на реальном объекте зачастую просто невозможно.

Содержательная постановка задачи часто оказывается перенасыщенной сведениями, которые совершенно излишни для ее последующей формализации. Чтобы моделирование было успешным, надо учитывать главные свойства моделируемого объекта, пренебрегать его второстепенными свойствами и уметь отделить их друг от друга.

Формализовать постановку задачи, т.е. перевести ее на язык математики, причем с конечным количеством неизвестных и возможных ограничений. При этом необходимо провести различие между теми величинами, значениями которых можно варьировать и выбирать с целью достижения наилучшего результата (*управляемымипеременными*), и величинами, которые фиксированы или определяются внешними факторами. Одни и те же величины, в зависимости от выбранных границ оптимизируемой системы и уровня детализации ее описания, могут оказаться либо управляемыми переменными, либо нет.

Определение тех значений управляемых переменных, которым соответствует наилучшая (*оптимальная*)ситуация, и представляет собой задачу оптимизации.

Модель экономической задачи оптимизации состоит из 3-х частей:

I. Целевая функция (критерий оптимальности). Здесь описывается конечная цель, преследуемая при решении задачи. В качестве такой цели может быть или максимум получения каких-либо показателей или минимум затрат.

II. Система ограничений.

Ограничения бывают основные и дополнительные. Основные, как правило, описывают расход основных производственных ресурсов (это консервативная часть модели). В модели они обязательно присутствуют. Дополнительные – могут иметь различный характер, являются изменяемой частью модели и отражают особенность моделирования задачи.

III. Условие неотрицательности переменных величин. А также граничные условия, которые показывают, в каких пределах могут быть значения искомых переменных в оптимальном решении.

Решение задачи, удовлетворяющее всем ограничениям и граничным условиям, называется *допустимым.* Если математическая модель задачи оптимизации составлена правильно, то задача будет иметь целый ряд допустимых решений. Чтобы из всех возможных решений выбрать только одно, необходимо договориться, по какому признаку мы это будем делать. То есть речь идет о критерии оптимальности, который выбирает человек, принимающий решение. Таким образом, оптимальное решение – это решение, наилучшее из допустимых с точки зрения выбранного признака.

Однако, следует иметь в виду, что решение не всех оптимизационных проблем сводится к построению математических моделей и соответствующим вычислениям. Это связано с тем, что могут появиться обстоятельства, являющиеся существенными для решения проблемы, но, тем не менее, не поддающиеся математической формализации и, следовательно, не учитываемые в математической модели. Одним из таких обстоятельств является человеческий фактор. В этой связи можно вспомнить о так называемой **«проблеме лифта»**.Служащие одной из фирм жаловались на слишком долгое ожидание лифта. Была попытка решить эту проблему математическими методами. Решение в силу ряда причин оказалось неприемлемым, а дальнейшие исследования показали, что время ожидания лифта невелико. Тогда возникла идея поставить на каждом этаже рядом со входом в лифт большие зеркала. Как только это было сделано, жалобы прекратились. Теперь люди рассматривали себя в зеркале и забывали о долгом ожидании лифта. Этот пример показывает необходимость правильно оценивать возможности математического описания исследуемых процессов и помнить, что в сфере организационного управления не все и не всегда поддается математической формализации и может быть адекватно отражено в математической модели.

3. Цель и задачи курса.

Целями освоения дисциплины «Математическое моделирование в менеджменте» являются:

- ознакомить студентов с основными методами решения базовых моделей, овладение будущими экономистами теорией, научными знаниями и практическими навыками по моделированию экономических систем;

- сформировать у студентов представление о принципах моделирования;

- научить решать модели задач математического программирования и выполнять экономический анализ вариантов их решения;

- научить студента системно обосновывать и ставить экономическую задачу, математически строго формализовать условия функционирования управляемой системы в экономической среде с определенными ограничениями, выражать эти условия в форме взаимосвязанной и непротиворечивой системы математических уравнений и неравенств;

- привить устойчивые профессиональные навыки подбора необходимой информации, овладеть методическими приемами конструирования конкретных экономико-математических моделей и синтеза их в целостные иерархические системы.

1.2 Лекция №2 (2 часа)

Тема: «Линейное программирование»

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Классификация методов линейного программирования.

2. Основная задача линейного программирования и её модель в различных формах записи.

1.2.2. Краткое содержание вопросов

1. Классификация методов линейного программирования.

Большое число экономических задач сводится к линейным математическим моделям. Традиционно оптимизационные линейные математические модели называются моделями линейного программирования. Этот термин появился, когда программирование на компьютере еще не было развито, и соответственно не очень удачному переводу английского «programmation». Линейное программирование возникло в СССР. В конце 30-х годов XX в. советский экономист-математик Леонид Витальевич Канторович открыл класс этих задач и придумал некоторые частные методы их решения. В 1975 г. фактически за это открытие он был удостоен Нобелевской премии по экономике, что уже свидетельствует о большой важности задач линейного программирования.

С чисто математической точки зрения задачи линейного программирования интересны тем, что здесь неприменимы методы нахождения экстремумов с помощью производной.

Под *линейным программированием* понимается линейное планирование, т.е. получение оптимального плана-решения в задачах с линейной структурой.

Задачами линейного программирования называются задачи, в которых линейны как целевая функция, так и ограничения в виде равенств и неравенств и для которых методы математического анализа оказываются непригодными. Линейное программирование представляет собой наиболее часто используемый метод оптимизации.

Методы линейного программирования подразделяются на группы:

1) *группа симплексных методов (точные);*
2) группа распределительных методов (точные и приближённые).

Точные – методы перебора вариантов решения задачи в итоге дающие оптимальный вариант. Используются при машинном решении задач.

Приближённые – позволяют получить только один из допустимых вариантов решения задачи. Используются для получения первого варианта в точных распределительных методах или для ручного решения задачи.

Каждая группа методов имеет свою базовую задачу. Для группы симплекс-методов базовой является «Основная задача линейного программирования», для группы распределительных методов – «Транспортная задача».

2. Основная задача линейного программирования и ее модель в различных формах записи.

Постановка задачи.

Пусть некоторое предприятие имеет m видов производственных ресурсов. Порядковый номер ресурсов – i, т.е. i=1, 2,…, m.

Наличие каждого вида ресурсов известно и обозначается b_i.

Предположим, что предприятие может производить n видов продукции. Порядковый номер продукции – j, т.е. j=1, 2, …, n.

Необходимо определить какое количество единиц продукции каждого вида надо производить (x_j), чтобы получить максимум этой продукции в стоимостном выражении, если известны затраты на производство единицы продукции каждого вида ресурса (a_{ij}) и цена реализации (c_j).

Развернутая форма записи модели.

I. Целевая функция – описывает выход продукции в стоимостном выражении:

$Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\to\max.$

II. Система основных ограничений – описывает с помощью математической зависимости тот факт, что расходы производственных ресурсов не должны превышать их наличие:

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\le b_1$;
$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\le b_2$;
…………………………
$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\le b_m$.

III. Условие неотрицательности переменных величин:

$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ \ldots,\ x_n\ge 0$.

Замечание: в постановке с выбором другого критерия оптимальности целевая функция может стремиться к минимуму. Кроме того система ограничений может быть смешанной, т.е. содержать не только неравенства (≤,≥), но и равенства.

Структурная форма записи модели.

В такой форме модели даются в специализированной литературе. В этой форме записи отражается структура и тип ограничений, структура функции, какие переменные входят в функцию Z и в ограничения.

I. $Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$.

II. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$, $i=1,2,\ldots,m$.

III. $x_j\ge 0,\ j=1,2,\ldots,n$.

Замечание: одной формулой можно описать ограничения, имеющие одинаковую структуру и тип и включающие в себя одни и те же переменные.

Существуют также векторная, матричная и табличная формы записи модели.

1.3Лекция №3,4 (4 часа)

Тема: «Методы решения задач линейного программирования»

1.3.1 Вопросы лекции:

1. Общая характеристика симплекс-метода и подготовка модели к решению.
2. Особые случаи при решении задач.
3. Графический метод решения задач линейного программирования.

1.3.2 Краткое содержание вопросов

1. Общая характеристика симплекс-метода и подготовка модели к решению.

Среди универсальных методов решения задач линейного программирования наиболее распространен *симплексный метод* (или *симплекс-метод),* разработанный американским ученым Дж. Данцигом. Суть этого метода заключается в том, что вначале получают допустимый вариант, удовлетворяющий всем ограничениям, но необязательно оптимальный (так называемое *начальное опорное решение).*Оптимальность достигается последовательным улучшением этого решения за определенное число этапов (итераций). Нахождение начального опорного решения и переход к следующему опорному решению проводятся на основе применения метода Жордана-Гаусса (мы будем работать с его модифицированным вариантом) для системы линейных уравнений в канонической форме, в которой должна быть предварительно записана исходная задача линейного программирования. Направление перехода от одного опорного решения к другому выбирается на основе критерия оптимальности (целевой функции) исходной задачи.

Весь путь решения задачи симплекс-методом условно можно разбить на три этапа.

I *этап*. Нахождение исходного варианта и исследование его на допустимость, т.е. получение начального опорного решения.

Допустимымвариантом решения задачи будем считать такие значения x_j, при которых выполняются все требования системы ограничений (все неравенства верны и непротиворечивы).

Если исходный вариант допустим, то опорное решение найдено и переходим на второй этап. Иначе, осуществляем перебор вариантов решения задачи до получения допустимого (если такое возможно. Если нет, то задача решения не имеет).

II *этап*. Исследования допустимого варианта на оптимальность.

Оптимальный вариант – это такое значение переменной x_jпри котором будут выполняться не только требования системы ограничений, но и требования целевой функции.

Если допустимый вариант окажется оптимальным, то задача решена, иначе переходим на третий этап.

III *этап*. Перебор вариантов решения задачи до получения оптимального варианта (если такое возможно. Если нет, то задача не имеет оптимального решения).

Сам симплекс-метод выбирать варианты не умеет, он только показывает направление перебора вариантов (в нашем случае позволяет осуществить выбор разрешающего элемента). Для расчёта же, в качестве вычислительного аппарата, привлекаются другие методы. Мы будем использовать метод модифицированных Жордановых исключений (МЖИ). Так как данный метод – это метод решения систем линейных уравнений, а модель представляет собой систему линейных неравенств, то модель предварительно должна быть подготовлена.

Суть подготовки заключается в том, чтобы перейти от системы неравенств к системе уравнений в канонической форме. Для этого в каждое ограничение-неравенство вводится дополнительная переменнаяy_i, как разность между большей и меньшей частями неравенства. Очевидно, что значение y_i не может быть отрицательным.

Подготовленная модель основной задачи линейного программирования будет выглядеть следующим образом:

I. $Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\rightarrow\max$.

II. $y_1=-a_{11}x_1-a_{12}x_2-\ldots-a_{1n}x_n+b_1$;

$y_2=-a_{21}x_1-a_{22}x_2-\ldots-a_{2n}x_n+b_2$;

………………………………………………

$y_m=-a_{m1}x_1-a_{m2}x_2-\ldots-a_{mn}x_n+b_m$.

III. $x_1\geq0,\ x_2\geq0,\ \ldots,\ x_n\geq0$.

Из этого вида данные заносятся в табличную форму для осуществления решения.

2. Особые случаи при решении задач.

1.Неразрешимость модели (система неравенств не имеет решения).

В этом случае невозможно найти допустимый вариант (в разрешающей строке симплекс-таблицы нет ни одного отрицательного элемента). С экономической точки зрения это значит, что ограничения модели являются взаимоисключающими, противоречащими друг другу требованиями. Задача не имеет решения.

2.Неограниченность функционала (функция не имеет экстремального значения).

В этом случае в симплекс-таблице находится допустимый, но не оптимальный вариант и в разрешающем столбце нет ни одного положительного элемента. С экономической точки зрения речь идее о неограниченности какого-либо вида ресурса. Задача не имеет оптимального решения.

3.Альтернативный оптимум.

Такая ситуация возникает в случае возможности неоднозначного выбора разрешающего элемента при соблюдении всех правил решения (т.е. разрешающим элементом в равной степени может выступать не одно значение). В этом случае вычисления, организованные по разным траекториям, могут привести как к полному совпадению ответов, так и к варианту совпадения значений целевых функций при разных наборах значений переменных. Именно в последнем случае говорят об альтернативности решения. С экономической точки зрения это означает, например, что если ассортимент выпускаемой нами продукции при разных его наборах дает одинаковая прибыль, то выбор управленческого решения остается за руководителем предприятия с учетом маркетинговой стратегии.

4. Случай вырожденности.

В симплекс-таблице будет находиться вырожденный вариант, если среди свободных членов (кроме строки *Z*), появится ноль.

Если вырожденный вариант не допустим, то разрешающий элемент находится обычным образом. Если вырожденный вариант будет допустимым, но не оптимальным, то необходимо после выбора разрешающего столбца посмотреть на коэффициент, находящийся на пересечении вырожденной строки и разрешающего столбца. Если этот коэффициент с положительным знаком, то мы берём его разрешающим элементом (в этом случае в следующей таблице мы получим те же значения свободных членов при различном наборе базисных переменных), если нет, то вырожденная строка не берётся в качестве разрешающей. Тогда разрешающая строка выбирается по общему правилу, но среди других строк таблицы.

5. Смешанная система ограничений.

Система является смешанной, когда среди ограничений модели присутствуют строгие равенства. Такие модели решаются сначала методом модифицированных жордановых исключений, а потом симплекс-методом.

В симплекс-таблице в качестве разрешающей строки берётся строка, в которой было записано строгое равенство, разрешающий элемент в этой строке берётся произвольно. Сделав шаг с этим разрешающим элементом, столбец, соответствующий разрешающему элементу, следует вычеркнуть из таблицы. Такие шаги повторяются для каждой строки, соответствующей строгому равенству.

В симплекс-таблице, в которой был исключён последний столбец, соответствующий равенству, вариант исследуется на допустимость и оптимальность, продолжая решение симплекс-методом.

3. Графический метод решения задачи линейного программирования.

Графический метод основан на геометрической интерпретации задач линейного программирования и применяется в основном при решении задач *двумерного пространства*, так как довольно трудно, а чаще практически невозможно изобразить графически многогранник решений, который образуется в результате пересечения полупространств. Поэтому, сущность графического метода решения задач линейного программирования рассмотрим на примере задачи, заданной в двумерном пространстве, т.е. ее ограничения содержат две переменные.

Задача. Найти максимальное значение линейной функции:

$$z = 50x_1 + 40x_2$$

при ограничениях

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 5x_2 \le 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{array}\right\}$$

Решение

Построим многоугольник решений (рис.1), для этого в системе координат $x_1 0 x_2$на плоскости изобразим граничные прямые:

$$2x_1 + 5x_2 = 20 \ (l_1)$$
$$8x_1 + 5x_2 = 40 \ (l_2)$$
$$5x_1 + 6x_2 = 30 \ (l_3)$$
$$x_1 = 0; x_2 = 0$$

Эти прямые рекомендуется строить по двум точкам пересечения с осями координат. Например, для l_1 такими точками будут точки $A(0;4)$ и $E(10;0)$.

Взяв какую-нибудь точку (удобнее всего взять начало координат), устанавливаем, какую полуплоскость определяет каждое из неравенств, соответствующее уравнениям граничных прямых (эти полуплоскости на рис.1 показаны стрелками, штриховкой выделяется общая часть (пересечение) указанных полуплоскостей). Многоугольником решений или *областью допустимых решений* данной задачи является ограниченный пятиугольник $OABCD$.

Далее строим одну из линий уровня целевой функции как прямую линию, соответствующую уравнению Z=const. В нашей задаче можно построить прямую $50x_1 + 40x_2 = 200$ (l_4). Через точку O проводим прямую, параллельную l_4, ей соответствует уравнение Z=0 или $50x_1 + 40x_2 = 0$. Таким образом, определяем направление движения по линиям уровня целевой функции, соответствующее ее наибыстрейшему возрастанию (на рис.1 это направление отмечено стрелкой на прямой l_4). Осуществляя перемещение прямой l_4 параллельно самой себе в выбранном направлении, получаем, что функция Z принимает максимальное значение на многоугольнике решений в точке C.Этот вывод следует из ***теоремы: если оптимальное решение задачи существует, то оно достигается, по крайней мере, в одной из вершин области допустимых решений.***

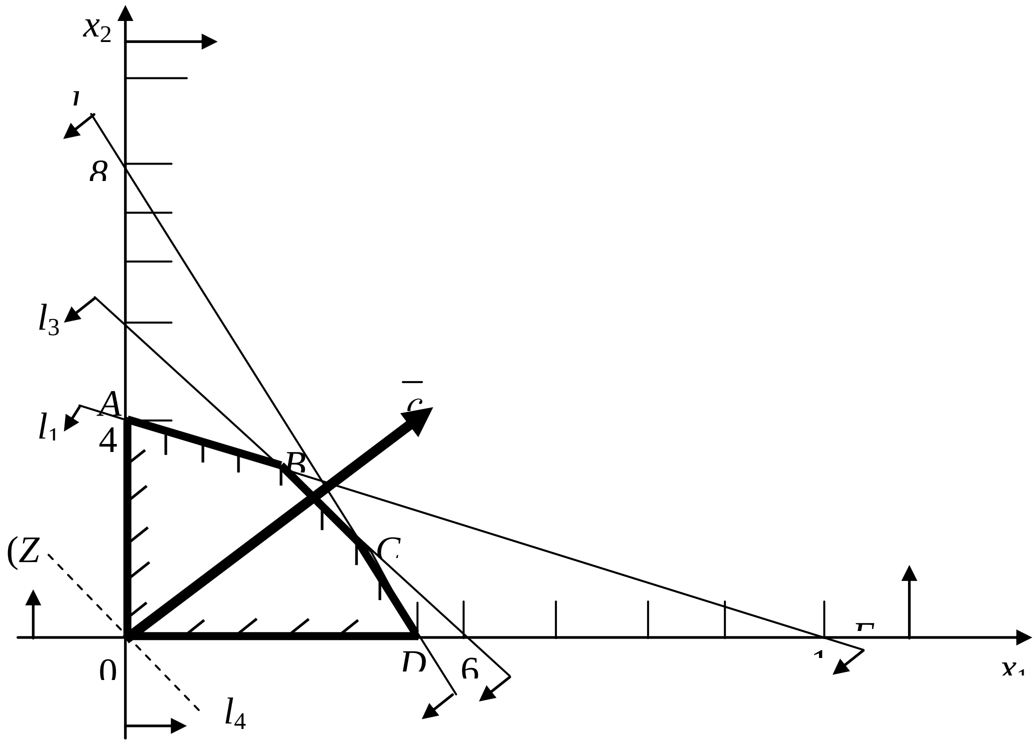


Рисунок 1 – Многоугольник решений

Точка Cлежит на пересечении прямых l_2 и l_3 и, следовательно, для определения ее координат нужно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 = 40 \\ 5x_1 + 6x_2 = 30 \end{cases}$$

Подставим найденные значения x_1 и x_2 в функцию Z $(50 \cdot 90/23 + 40 \cdot 40/23)$.

Ответ: оптимальное решение задачи$Z_{max} = 6100/23$ при $x_1 = 90/23$; $x_2 = 40/23$.

Замечания:

1) область допустимых решений системы неравенств может быть пустой, одной точкой, выпуклым многоугольником или неограниченной выпуклой многоугольной областью;

2) уравнение $c_1x_1 + c_2x_2 = Z$ при фиксированном значении Z определяет прямую, а при изменении Z – семейство параллельных прямых с параметром Z. Вектор $\overline{c}$ =(c_1, c_2), перпендикулярный ко всем этим прямым, показывает направление возрастания параметра Z;

3) если бы при тех же исходных данных требовалось достичь минимума функции Z, то, очевидно, линию уровня следовало бы перемещать в направлении, противоположном вектору $\overline{C}$. Получили бы оптимальное решение в точке O (0, 0), которой соответствует $Z_{min} = 0$;

4) если экспериментальное значение Z достигается в двух вершинах (случай альтернативного оптимума), то тоже экстремальное значение достигается в любой точке, лежащей на отрезке, соединяющем эти вершины;

5) в случае неограниченной области максимум (минимум) функцииZ либо не существует (еслиZ неограниченна сверху (снизу)), либо достигается по крайней мере в одной из вершин области.

1.4Лекция №5 (2 часа)

Тема: «Целочисленноепрограммирование»

1.4.1 Вопросы лекции:

1. Постановкаи модель задачи.
2. Решение целочисленных задач симплекс-методом.

1.4.2 Краткое содержание вопросов

1 Постановка и модель задачи.

Большая группа экономических задач, решаемых методами линейного программирования, требует целочисленного решения. Например, при определении оптимального выпуска машин, агрегатов, размещения оборудования, если речь идет о фасованной продукции в определенном объеме и пр. переменные характеризуют физически неделимые единицы и поэтому должны принимать только целые значения.

Целочисленное программирование – это разновидность линейного программирования, подразумевающая, что искомые значения должны быть целыми числами.

Постановка целочисленной задачи звучит также, как и постановка основной задачи линейного программирования и добавляется только одно условие – целочисленность x_j.

Пусть некоторое предприятие имеет n видов производственных ресурсов. Порядковый номер ресурсов – i, т.е. $i = 1, 2, \ldots, m$. Наличие каждого вида ресурсов известно и обозначается b_i. Предположим, что предприятие может производить m видов продукции. Порядковый номер продукции – j, т.е. $j = 1, 2, \ldots, n$. Необходимо определить какое количество единиц продукции каждого вида надо производить (x_j), чтобы получить максимум этой продукции в стоимостном выражении, если известно, что затраты на производство единицы продукции каждого вида ресурса равны a_{ij} единиц, а цена реализации – c_j. Единицы производимой продукции должны принимать целые значения. Тогда модель задачи будет выглядеть следующим образом:

I) $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \max$.

II) $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1$,

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2$,

………………………………

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m$.

III) $x_j \ge 0$ и x_j– целые, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Методы решения задач линейного программирования не гарантируют целочисленности решения.

2 Решение целочисленных задач симплекс-методом.

Иногда задачи целочисленного программирования решают приближенно. Сначала, отбросив условие целочисленности, решают задачу методом линейного программирования, а затем в полученном оптимальном решении округляют переменные до целых чисел. Такой прием можно использовать, если значения переменных достаточно велики и погрешностью округления можно пренебречь. Если значения переменных невелики, то округление может привести к значительному расхождению с оптимальным решением. Поэтому разработаны специальные методы решения целочисленных задач, среди которых можно выделить два направления: методы отсечения (отсекающих плоскостей) и комбинаторные методы.

Представление о комбинаторных методах дает широко используемый на практике метод ветвей и границ. Мы будем рассматривать метод отсекающих плоскостей, который состоит в построении дополнительных ограничений.

К методу отсекающих плоскостей относится аналитический метод решения полностью целочисленных задач – метод Гомори. Основная его идея заключается в том, что задача сначала решается без ограничения целочисленности. Если решение получается целочисленным, то задача решена, если нет, то к задаче присоединяют новое дополнительное ограничение, которое называют сечением. Получают новую задачу, для которой множество допустимых решений будет меньше, чем для исходной задачи, но будет содержать все допустимые целочисленные решения.

Дополнительное ограничение отсекает часть области, содержащую нецелочисленное оптимальное решение.

Вновь полученную задачу решают методом линейного программирования. Процесс построения сечений и решения задачи повторяется до получения целочисленного оптимального решения.

Таким образом, сначала задачу будем решать симплексным методом без учета требования о целочисленности до получения оптимального варианта. Если значение всех x_j будут целыми, то задача решена. Если же есть хотя бы одно дробное значение, то составляется дополнительное ограничение по целочисленности этой переменной x_j, которое присоединяется к исходным ограничениям задачи, и вновь находится новый оптимальный вариант. Алгоритм Гомори позволяет прийти к оптимальному целочисленному решению за конечное число шагов.

Предположим, что на каком-то шаге мы получили таблицу с оптимальным вариантом решения задачи (таблица 2).

Таблица 2 – Оптимальный вариант для исходной задачи без ограничения по целочисленности

	$-x_1$	$-y_1$	…	$-x_n$	Свободные члены
x_2	a_{11}'	a_{12}'	…	a_{1n}'	b_1'
y_2	a_{21}'	a_{22}'	…	a_{2n}	b_2'

…	…	…	…	…	…
y_m	a_{m1}'	a_{m2}'	…	a_{mn}'	b_m'
Z	c_1'	c_2'	…	c_n'	Q

$b_i \geq 0$, $c_j \geq 0$.

Предположим, что в полученном оптимальном варианте среди переменных x_j есть дробное значение. Составим дополнительное ограничение по целочисленности этой переменной.

Обозначим через β_{ij} целое число, не превосходящие коэффициенты и свободный член в строке, в которой находится переменная x_j с дробным значением.

Для каждого коэффициента и свободного члена составим разность $\alpha_{ij} = a_{ij} - \beta_{ij}$ (если само a_{ij} целое, то $\beta_{ij} = a_{ij}$ и $\alpha_{ij} = 0$).

Очевидно, что все значения $\alpha_{ij} \geq 0$.

Возьмем α_{ij} в качестве коэффициентов нового дополнительного ограничения:

$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}y_1 + \ldots + \alpha_{in}x_n \geq \alpha_i$

Запишем это дополнительное ограничение в виде равенства введя дополнительную переменную $s_i \geq 0$:

$s_i = \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \ldots + \alpha_{in}x_n - \alpha_i$.

Далее составляется расширенная симплекс-таблица, т.е. в таблицу с оптимальным вариантом вводится дополнительная строка, в которой записывается дополнительное ограничение (таблица 3), после чего вычисления продолжаются.

Таблица 3 – Вариант решения для исходной задачи с добавленным ограничением

	$-x_1$	$-y_1$	…	$-x_n$	Свободные члены
x_2	a_{11}'	a_{12}'	…	a_{1n}'	b_1'
y_2	a_{21}'	a_{22}'	…	a_{2n}'	b_2'
…	…	…	…	…	…
y_m	a_{m1}'	a_{m2}'	…	a_{mn}'	b_m'
s_i	$-\alpha_{i1}$	$-\alpha_{i2}$	…	$-\alpha_{in}$	$-\alpha_i$
Z	c_1'	c_2'	…	c_n'	Q

Далее задача решается симплекс-методом с получением допустимого и оптимального варианта. В случае необходимости в таблицу вводятся еще ограничения.

Замечание: при работе с линейными целочисленными задачами оптимизации необходимо иметь ввиду: 1) условие целочисленности распространяется только на основные переменные x_j, а дополнительные переменные (остаток ресурсов) и целевая функция (выход продукции в стоимостном выражении) не обязательно должны принимать целые значения; 2) условие целочисленности может только «ухудшить» результат решения задачи; 3) существует ряд задач, которые без дополнительных ограничений сразу являются целочисленными или вовсе не могут быть решены с условием целочисленности, но из постановки задачи это сложно увидеть заранее.

1.5Лекция №6 (2 часа)

Тема: «Двойственность в линейном программировании»

1.5.1 Вопросы лекции:

1. Постановка и модель двойственной задачи. Понятие двойственности
2. Решение двойственных задач симплекс-методом.
3. Основные теоремы теории двойственности.

1.5.2 Краткое содержание вопросов

1 Постановка и модель двойственной задачи. Понятие двойственности.

С каждой задачей линейного программирования тесно связана другая линейная задача, называемая *двойственной*. Первоначальная задача называется исходной (или прямой). Связь исходной и двойственной задач заключается, в частности, в том, что решение одной из них может быть получено непосредственно из решения другой.

Напомним, что в основе задачи линейного программирования рассматривается предприятие, имеющее ресурсы b_i, где $i = 1, 2, \ldots, m$. Оно тратит их на изготовление готовой продукции и эту продукцию реализует. При этом ставится цель – получить максимум продукции в стоимостном выражении не перерасходуя ресурсы. Модель задачи выглядит следующим образом:

I) $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$.

II) $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1$,

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2$,

……………………………

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m$.

III) $x_j \ge 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Предположим, что некоторое предприятие решило не тратить ресурсы на изготовление продукции, а продать эти ресурсы. Тогда возникает вопрос: по какой цене продавать ресурсы? Цена должна устраивать как продавца, так и покупателя. Интерес покупающей стороны заключается в том, чтобы заплатить за ресурсы как можно меньше, а интерес продающей стороны – в том, чтобы получить за ресурсы не меньше того, что она получила бы за реализованный готовый товар.

Тогда, в так называемой двойственной модели, целевая функция будет описывать интерес покупающей стороны, система ограничений – интерес продающей стороны (необходимо оценить ресурсы, которые пошли бы на изготовление единицы продукции и стоимость этих ресурсов ограничить ценой реализованной единицы продукции). Третье условие (неотрицательность переменных величин) будет выполняться в силу того, что цена единицы ресурса не может быть отрицательной. Введя в качестве цены единицы ресурса величину $u_i \ge 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, ее еще называют оценкой ресурса (или двойственной оценкой), получим следующую модель:

I) $F = b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots + b_mu_m \to \min$.

II) $a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m \ge c_1$,

$a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{m2}u_m \ge c_2$,

……………………………

$a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{mn}u_m \ge c_n$.

III) $u_i \ge 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Сопоставим обе задачи:

- первая – задача на максимум ($Z \to \max$), вторая – на минимум ($F \to \min$);

- в первой система ограничений типа ≤, во второй ≥;

- в первой задаче n неизвестных и m ограничений, во второй m неизвестных и n ограничений;

- коэффициенты в целевых функциях и величины в правых частях неравенств при переходе из одной задачи в другую меняются местами (в первой задаче c_j – коэффициенты целевой функции, во второй c_j – свободные члены; в первой задаче b_i – свободные члены, во второй b_i – коэффициенты целевой функции);

- матрицы коэффициентов в первой и второй задаче являются транспонированными относительно друг друга (строки и столбцы поменялись местами).

Таким образом, видно, что обе задачи тесно связаны между собой. Они образуют пару задач, называемую в линейном программировании *двойственной парой*. Первую из них обычно называют прямой (или исходной) задачей, а вторую – двойственной задачей (с чисто математической точки зрения за исходную может быть принята любая из задач двойственной пары).

Алгоритм составления двойственной задачи:

1) тип экстремума целевой функции меняется;

2) каждому ограничению исходной задачи ставится в соответствие переменная двойственной задачи;

3) свободные члены исходной задачи становятся коэффициентами при переменных в целевой функции двойственной задачи;

4) каждый столбец коэффициентов в системе ограничений формирует ограничение двойственной задачи, при этом тип неравенства меняется; коэффициенты при переменных в целевой функции исходной задачи становятся свободными членами в соответствующих неравенствах двойственной задачи.

Рассмотрим конкретный пример построения двойственной модели:

исходная задача:

I) $Z = 6x_1 + 4x_2 \to \max$.
II) $2x_1 + 4x_2 \le 8$,
$2x_1 + x_2 \le 6$.
III) $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

двойственная задача:

I) $F = 8u_1 + 6u_2 \to \min$.
II) $2u_1 + 2u_2 \ge 6$,
$4u_1 + u_2 \ge 4$.
III) $u_1 \ge 0$, $u_2 \ge 0$.

Следует отметить, что:

- математические модели пары двойственных задач могут быть симметричными и несимметричными. В несимметричных двойственных задачах система ограничений исходной задачи задается в виде равенств, а двойственной – в виде неравенств, причем в последней переменные могут быть и отрицательными. В симметричных задачах система ограничений как исходной, так и двойственной задачи задается неравенствами, причем на двойственные переменные налагается условие неотрицательности. Чаще рассматриваются симметричные взаимодвойственные задачи;

- каждая из задач двойственной пары формально является самостоятельной задачей линейного программирования и может решаться независимо от другой. Однако, использование симплексного метода решения одной из двойственных задач двойственной пары автоматически приводит к решению другой задачи. Наглядным обоснованием данного положения может служить возможность использования двойственной симплекс-таблицы для отыскания искомых значений целевых функций.

2 Решение двойственных задач симплекс-методом.

Каждая из задач двойственной пары может решаться отдельно. При этом используется как симплексный метод, так и графический (в случае если задача содержит две переменные). Одновременное решение задач реализуется с использованием, так называемой, двойственной симплекс-таблицы.

Подготовленные для записи в симплекс таблицу модели будут выглядеть следующим образом:

исходная задача (введем $y_i \ge 0$):

I) $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$.
II) $y_1 = -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n + b_1$,
$y_2 = -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \ldots - a_{2n}x_n + b_2$,
…………………………………..
$y_m = -a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - \ldots - a_{mn}x_n + b_m$.
III) $x_j \ge 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

двойственная задача (введем $v_j \ge 0$):

I) $F = b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots + b_mu_m \to \min$.
II) $v_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m - c_1$,
$v_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{m2}u_m - c_2$,
……………………………………
$v_n = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{mn}u_m - c_n$.
III) $u_i \ge 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Обе модели записываются в двойственную симплекс-таблицу следующим образом (таблица 4):

Таблица 4 – Двойственная симплексная таблица

		v_1	v_2	…	v_n	F
		$-x_1$	$-x_2$	…	$-x_n$	Свободные члены
u_1	y_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
u_2	y_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…	…
u_m	y_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
Свободные члены	Z	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_n$	0

Замечания:

- коэффициенты подготовленной двойственной модели располагаются по столбцам, то есть в одной таблице записаны обе двойственные модели. Решая модель прямой задачи симплекс-методом, параллельно решается и модель двойственной задачи. Получив оптимальный вариант для прямой задачи, мы получаем оптимальный вариант и для двойственной;

- прежде чем составлять модель двойственной задачи, необходимо у исходной модели «выровнять» знаки, т.е. если целевая функция стремится к max, то все знаки в системе ограничений должны быть $\leq$, а если к min, то $\geq$. Система приводится в соответствие путем домножения обеих частей «неподходящего» неравенства на (-1). Например, чтобы записать модель, двойственную к приведенной модели

I) $Z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min$.

II) $-4x_1 - 3x_2 + x_3 \leq -4$,

$5x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6$.

III) $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$,

необходимо исходную переписать в виде:

I) $Z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min$.

II) $4x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 4$,

$5x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6$.

III) $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$.

Тогда двойственная задача будет выглядеть так:

I) $F = 4u_1 + 6u_2 \to \max$.

II) $4u_1 + 5u_2 \leq 4$,

$3u_1 + u_2 \leq 2$,

$-u_1 + 2u_2 \leq 3$.

III) $u_1 \geq 0; u_2 \geq 0$;

- в центр двойственной симплекс-таблицы (таблицы 4) всегда ставится задача на max, вне зависимости от того какова целевая функция исходной задачи.

3. Основные теоремы теории двойственности.

В качестве *основной теоремы двойственности* выделяют следующую формулировку: если одна из взаимно двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая также имеет оптимальное решение, при этом соответствующие им оптимальные значения целевых функций равны (т.е. max Z = min F).

Кроме этого варианта возможны следующие взаимоисключающие случаи:

- в одной из пары двойственных задач допустимое множество не пусто, а целевая функция на этом множестве не ограничена, то у другой задачи из этой пары будет пустое допустимое множество (т.е. если в одной задаче функционал не ограничен, то задача ей двойственная не имеет решения);

- обе из рассматриваемых задач имеют пустые допустимые множества (т.е. обе не имеют решения).

С экономической стороны решение прямой задачи дает оптимальный план выпуска продукции, а решение двойственной задачи – оптимальную систему условных (или *двойственных*) *оценок* применяемых ресурсов.

Для экономических задач часто представляет интерес то, как повлияет на оптимальное решение изменение запасов сырья и изменение прибыли от единицы продукции. В связи с этим посредством двойственных оценок можно выяснить: увеличение объемов какого вида ресурсов наиболее выгодно; на сколько можно увеличить запас сырья для улучшения полученного оптимального значения целевой функции; каков диапазон изменения того или иного коэффициента целевой функции, при котором не происходит изменение оптимального решения; целесообразность включения в план новых изделий.

Центральный вопрос, который рассматривается в теории двойственности, – это вопрос о ценности ресурса. Но ценности его не рыночной, а исключительно с внутренней точки зрения данного предприятия, с точки зрения эффективного использования этого ресурса в сложившейся структуре производства, определяемой технологической матрицей и удельными прибылями. При этом оценка ценности производится только в процессе использования ресурса в одном цикле производства. Это является элементом условности. Однако из всего этого вытекает основополагающая оценка ценности ресурса – сколько прибыли может принести вовлечение в производство еще одной единицы данного ресурса.

Двойственные оценки отражают сравнительную дефицитность различных видов ресурсов в отношении принятого в задаче показателя эффективности. Двойственные оценки могут служить тонким инструментом анализа и принятия правильных управленческих решений в условиях постоянно изменяющегося производства. Приведем некоторые общие положения, вытекающие из экономического смысла двойственности задач линейного программирования и свойств оценок оптимального плана:

- исчисленные в оптимальных оценках суммарные затраты на производства каждого ингредиента не могут быть меньше, чем оценка данного ингредиента в конечном продукте;

- в оптимальном плане, обеспечивающем максимум выпуска конечного продукта при изменяющихся ресурсах, суммарные затраты ресурсов на единицу конечной продукции минимальны (иначе за счет более экономичного их использования можно было бы увеличить выпуск и тем самым улучшить оптимальный план, что противоречит понятию оптимального плана как наилучшего с точки зрения принятого критерия);

- абсолютные значения оценок можно трактовать как некоторые расчетные «цены» ресурсов и потребностей, выраженные в тех же единицах, что и критерий, а знак «+» или «–» при этих «ценах» показывает, ведет ли увеличение данного фактора к возрастанию или уменьшению значения критерия;

- использование двойственных оценок целесообразно, когда ограничивающие условия не меняются, но возникает необходимость определить целесообразность применения тех или иных новых технологических способов.

Различные виды ресурсов, ходящие в модель оптимального планирования, имеют свое конкретное содержание и специфику. Соответствующие им оценки также специфичны и рассматриваются в отдельности по каждой качественно отличной группе ресурсов.

Таким образом, двойственные оценки являются важнейшим результатом, вытекающим из теории двойственности, которая широко применяется на практике.

1.6 Лекция №7,8 (4 часов)

Тема: «Транспортная задача»

1.6.1 Вопросы лекции:

1. Постановка и модель транспортной задачи.
2. Алгоритм метода потенциалов задачи.
3 Приближенные распределительные методы.

1.6.2 Краткое содержание вопросов

1. Постановка и модель транспортной задачи.

Среди проблем, для исследования которых успешно применяется линейное программирование, важное значение имеет так называемая транспортная задача.

Общая постановка этой задачи применительно к экономической проблеме экономии издержек производства формулируется так: имеется несколько пунктов назначения (предприятий, потребителей); требуется перевезти некоторое количество однородного товара из различных пунктов отправления в несколько пунктов назначения; каждый из поставщиков может выделить только определенное количество единиц товара и каждому потребителю требуется также определенное количество единиц этого товара; известны расстояния или стоимости перевозки единицы товара от каждого поставщика к каждому потребителю. Задача состоит в том, чтобы найти такие маршруты перевозок, из всех возможных связей поставщиков и потребителей, при которых общие транспортные расходы были бы минимальными (транспортная задача также может быть сформулирована с целевой функцией, стремящейся к максимуму).

Таким образом, пусть имеем m пунктов, в которых находится известное количество однородных грузов (поставщики). Порядковый номер поставщика обозначается i, то есть i=1,2,…,m. Наличие грузов у поставщика b_i. Имеется n пунктов испытывающих потребность в этих грузах (потребителей). Порядковый номер потребителя j=1,2,…,n. Потребность в грузах каждого потребителя a_j. Известна «цена» перевозки единицы груза от каждого поставщика к каждому потребителю (c_{ij}). Необходимо составить план перевозки грузов от поставщиков к потребителю, т.е. определить: какое количество груза необходимо перевезти от каждого поставщика к каждому потребителю (x_{ij}), причем значения x_{ij} должны отвечать следующим требованиям:

1) общие затраты на перевозку грузов должны быть минимальными;
2) все грузы от поставщиков должны быть вывезены;
3) потребности потребителей в грузах должны быть удовлетворены.

Требования 2-3 одновременно могут быть выполнены только в том случае, когда сумма грузов у всех поставщиков равна суммарной потребности всех потребителей, то есть:

$$\sum_{i=1}^{m} b_i = \sum_{j=1}^{n} a_j$$ – условие разрешимости задачи.

Если условие разрешимости выполняется, то задача будет являться задачей, так называемого закрытого типа (сбалансированной). Иначе – задача открытого типа (несбалансированная). Для того чтобы решить задачу открытого типа, надо её «закрыть» (то есть привести к закрытому типу). Для этого вводится или фиктивный поставщик или фиктивный потребитель.

В случае, когда *суммарные запасы превышают суммарные потребности*, необходим дополнительный фиктивный пункт потребления, который будет формально потреблять существующий излишек запасов, то есть:

$$a_ф = \sum_{i=1}^{m} b_i - \sum_{j=1}^{n} a_j \ .$$

Если *суммарные потребности превышают суммарные запасы*, то необходим дополнительный *фиктивный* пункт отправления, формально восполняющий существующий недостаток продукции в пунктах отправления:

$$b_ф = \sum_{j=1}^{n} a_j - \sum_{i=1}^{m} b_i \ .$$

Введение фиктивного потребителя или отправителя повлечет необходимость формального задания *фиктивных*тарифов $c_{ij}^{ф}$ (реально не существующих) для фиктивных перевозок. Поскольку нас интересует определение наиболее выгодных *реальных* перевозок, то необходимо предусмотреть, чтобы при решении задачи (при нахождении опорных планов) *фиктивные* перевозки не рассматривались до тех пор, пока не будут определены все реальные перевозки. Для этого надо фиктивные перевозки сделать невыгодными, чтобы при поиске решения задачи их рассматривали в самую последнюю очередь. Таким образом, если целевая функция стремится к min, то затраты берутся во всех фиктивных клетках таблицы произвольные, одинаковые и на порядок выше настоящих цен, т.е. величина фиктивных тарифов должна превышать максимальный из реальных тарифов, используемых в модели: $c_{ij}^{ф} > \max c_{ij} \ \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$. Если целевая функция стремится kmax, то $c_{ij}^{ф}$ берётся равная нулю.

Развёрнутая форма записи модели транспортной задачи.

Для удобства, прежде чем писать модель, запишем в виде матрицы цен все значения c_{ij}. А также в виде матрицы грузоперевозок переменные x_{ij}.

Матрица цен:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11}\ c_{12}\ \ldots c_{1n} \\ c_{21}\ c_{22} \ldots c_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{m1}\ c_{m2} \ldots c_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица $C = (c_{ij})_{m*n}$называется также матрицей тарифов (издержек или транспортных расходов).

Матрица грузоперевозок:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11}\ x_{12}\ \ldots x_{1n} \\ x_{21}\ x_{22} \ldots x_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1}\ x_{m2} \ldots x_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица $X = (x_{ij})_{m*n}$ еще называется планом транспортной задачи.

Модель транспортной задачи будет выглядеть следующим образом.

I. Целевая функция описывает затраты на перевозку грузов:

$Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{2n}x_{2n} + \ldots$

$+ c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn} \rightarrow \min.$

II. Система ограничений описывает второе и третье требования для x_{ij} из постановки задачи.

1 группа: условие полного вывоза грузов от поставщиков (сумма грузов, вывезенных от поставщика должна быть равна наличию):

$x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}= b_1$,
$x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n}= b_2$,
……………………
$x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}= b_m$;

2 группа: условие удовлетворения потребителя (сумма грузов привезённых потребителю должна быть равна его потребности):

$x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{m1}=a_1$,
$x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{m2}=a_2$,
…………………….
$x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}= a_n$.

III. Условие неотрицательности переменных величин $x_{11}\geq 0$, $x_{12}\geq 0$, …, $x_{mn}\geq 0$.

Структурная форма записи модели транспортной задачи.

В специализированной литературе модели даются в структурной форме.

I. $Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$.

II.

1) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i,\ i = 1,2,\ldots,m$

2) $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_j,\ j = 1,2,\ldots,n$

III. $x_{ij}\geq 0$ ($i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$).

Табличная форма записи модели транспортной задачи.

Общепринято в таблице информацию по поставщикам располагать по строкам, по потребителю – по столбцам.

Размер таблицы: строк m+2, столбцов n+2.

Матрицы транспортных расходов и перевозок совмещают обычно в одну двойную матрицу – *матрицу планирования*.

Если в таблицу записана только исходная информация и нет значений x_{ij}, то это рабочая таблица или *макет* задачи. Если значения x_{ij} проставлены, то получаем первый вариант решения задачи. В такой форме задачи решаются.

Таблица 5 – Общий вид транспортной матрицы

потребители

поставщики

	1	2	…	n	b_i
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	b_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	b_m
a_j	a_1	a_2	…	a_n	$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{i=1}^{m} b_i$

Кроме основных условий, в транспортных задачах может встретиться ряд дополнительных, ограничивающих количественные связи между отдельными потребителями и поставщиками. Характер этих ограничений и способы решения задачи при наличии дополнительных ограничений заключаются в следующем.

1. Полное отсутствие связи между поставщиком и потребителем, то есть $x_{ij}= 0$. Это означает, что в данной клетке матрицы искомый объем перевозок должен быть равен нулю. В этом случае оценка переменной завышается на большую величину, обычно обозначаемую буквой M, и «попадание» груза в эту клетку нежелательно, так как целевая функция стремиться к минимуму (и занижается, если $Z\to$max).

2. Наличие частной заранее фиксированной связи между поставщиками и потребителями, то есть $x_{ij}= q$ (искомый объем перевозок от i-го поставщика к j-му потребителю должен быть строго равен q). Тогда, до начала решения задачи от величины грузов соответствующего поставщика и потребителя вычитается величина q, затем в соответствующую клетку пересечения поставщика и потребителя записывается завышенная оценка M (при Z$\to$min и заниженная при Z$\to$max) и задача решается обычным методом.

3. $x_{ij} \geq q$, то есть искомый объем перевозок от i-го поставщика к j-му потребителю должен быть не меньше величины q. В этом случае до начала решения от величины грузов соответствующего поставщика и потребителя вычитается величина q, затем задача решается обычным путем.

Модель транспортной задачи позволяет решать любые задачи, в которых параметры имеют одинаковые единицы измерения. Такие модели называются однопродуктовыми. К ним можно отнести задачу оптимизации использования машинно-тракторного парка в отдельные агротехнические сроки, задачу оптимального размещения посевов сельскохозяйственных культур по участкам с различным плодородием почв и т.д.

2. Алгоритм метода потенциалов.

Математическая модель транспортной задачи относится к задачам линейного программирования и может быть решена симплексным методом. Однако ввиду исключительной практической важности этой задачи и специфики ограничений (ограничения заданы в виде уравнений; каждая неизвестная входит лишь в два уравнения; коэффициенты при неизвестных – единицы) для ее решения созданы специальные алгоритмы. Самым распространенным методом решения транспортной задачи является метод потенциалов.

Решение транспортной задачи разбивается на два этапа:

1) определение начального допустимого базисного решения (первого опорного плана) – первоначальное распределение поставок. Достигается посредством распределительных методов;

2) построение последовательных итераций (шагов), улучшающих опорные планы (каждый новый план не должен увеличивать суммарные затраты при $Z\to$min и уменьшать при $Z\to$max). Достигается посредством метода потенциалов.

После выполнения первого этапа шаги второго этапа проводятся до тех пор, пока не будет найдено оптимальное распределение поставок.

1-ый этап. Построение первоначального опорного плана

План составляется последовательным заполнением по одной клетке в таблице так, что каждый раз либо полностью удовлетворяется потребность одного из потребителей, либо полностью вывозится груз от некоторого поставщика. В теории доказывается, что базисное решение системы ограничений (из $m+n$ уравнений с mn переменными) в условиях транспортной задачи имеет $m+n-1$ базисных переменных (ее ранг равен $m+n-1$), поэтому, совершив $m+n-1$ указанных шагов, получим первый опорный план. Опорные планы получают несколькими методами, называемыми распределительными. Среди них можно выделить: метод северо-западного угла, метод наилучших цен и метод аппроксимации. Последние два метода относятся также к приближенным распределительным методам и будут рассмотрены в третьей части данного раздела.

Пример.

$b_1 = 1500$ $a_1 = 800$

$b_2 = 1000$ $a_2 = 1200$

$b_3 = 2000$ $a_3 = 1400$

$a_4 = 1100$

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 15 & 16 \\ 17 & 15 & 14 & 13 \\ 15 & 14 & 13 & 16 \end{pmatrix}$$

Решить на минимум, заполнив рабочую таблицу методом северо-западного угла.

Таблица 6 – Заполнение рабочей таблицы методом северо-западного угла

	1	2	3	4	b_i
1	13 800	12 700	15	16	1500
2	17	15 500	14 500	13	1000
3	15	14	13 900	16 1100	2000
a_j	800	1200	1400	1100	4500

$Z_{\min} = 800*13 + 700*12 + 500*15 + 500*14 + 900*13 + 1100*16 = 62600.$

При этом методе на каждом шаге построения первого опорного плана заполняется верхняя левая клетка («северо-западный угол») оставшейся части таблицы. При таком методе заполнение таблицы начинается с клетки (1,1) и заканчивается в клетке (m,n), то есть идет как бы по диагонали таблицы перевозок.

Методы наилучших цен и аппроксимации также можно использовать на данном этапе.

2-ой этап. Метод потенциалов. Оптимальность базисного решения.

Полученный одним из распределительных методов опорный план сначала необходимо проверить на вырожденность. Вариант будет невырожденным, если число заполненных клеток N равно сумме поставщиков и потребителей за вычетом единицы:

$$N = m + n - 1.$$

Если на каком-то этапе решения получится вырожденный план (т.е. $N < m + n - 1$), то его необходимо пополнить, проставив в недостающем числе клеток ноль. Поскольку этим дополнительным клеткам будут отвечать нулевые перевозки, то общий баланс и суммарная стоимость перевозок плана при этом не изменится. Однако проводить пополнение плана, выбирая клетки произвольно, нельзя. Необходимо учитывать условие ацикличности. План называется ациклическим, если его базисные клетки (заполненные грузом) не содержат циклов. Циклом в транспортной таблице называется несколько клеток, соединенных замкнутой ломаной линией так, что две соседние вершины ломаной расположены либо в одной строке, либо в одном столбце. Ломаная может иметь точки самопересечения, но не в клетках цикла.

Невырожденный вариант необходимо проверить на оптимальность.

Теорема об оптимальности. Вариант решения задачи будет оптимальным, если найдется такая система абстрактных чисел, называемых потенциалами поставщиков и потенциалами потребителей, при которой для всех клеток таблицы будет выполняться условие:

$$v_j - u_i \le c_{ij} \text{(при } Z \to \min) \text{ и } v_j - u_i \ge c_{ij} \text{ (при } Z \to \max),$$

где v_j – потенциалы потребителей,

u_i– потенциалы поставщиков,

c_{ij} – цена перевозки единицы груза (условные т/км).

Причем, $v_j - u_i = c_{ij}$для занятых клеток и $v_j - u_i \le c_{ij}$ (или $v_j - u_i \ge c_{ij}$) для свободных клеток.

На основании этой теоремы исследование на оптимальность проводится в 2 этапа:

1) для каждой занятой клетки составляется уравнение $v_j - u_i = c_{ij}$ в результате чего получается система из $m+n-1$ таких уравнений. Решается эта система относительно потенциалов. Так как в данной системе число уравнений меньше числа неизвестных (т.е. система имеет бесчисленное множество решений), а нам надо найти одно любое решение, то какому-либо потенциалу можно присвоить произвольное число и относительно него рассчитать остальные значения. Для удобства расчетов чаще всего берут u_1=0;

2) для свободных клеток таблицы проверяется условие $v_j - u_i \le c_{ij}$ (или $v_j - u_i \ge c_{ij}$). Вариант будет оптимальным, если для всех свободных клеток это условие выполнится.

Для каждой клетки, в которой не выполняется условие $v_j - u_i \le c_{ij}$ (или $v_j - u_i \ge c_{ij}$), рассчитывается оценка $\alpha_{ij} = |(v_j - u_i) - c_{ij}|$.Клетка, содержащая α_{ij}, называется «плохой», а полученная оценка используется при перераспределении грузов.

То есть исследование на оптимальность не только отвечает на вопрос, оптимален вариант или нет, но еще и подсказывает, в каком направлении надо его улучшать при необходимости.

Перераспределение грузов и получение нового варианта.

Смысл перераспределения заключается в том, чтобы в самую «плохую» клетку (т.е. значение α_{ij}наибольшее) перераспределить какое-то количество груза. Перераспределение грузов должно отвечать следующим требованиям:

1) должны выполняться требования системы ограничений модели;

2) вариант решения задачи должен остаться ациклическим, т.е. не должна появиться лишняя заполненная клетка;

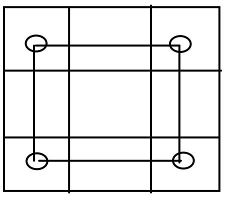
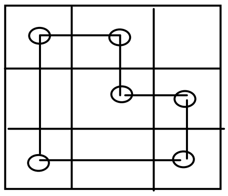
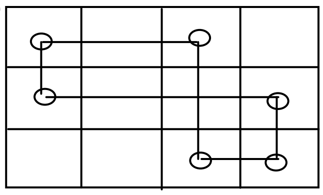
3) должно выполняться условие неотрицательности в модели, т.е. $x_{ij} \ge 0$.

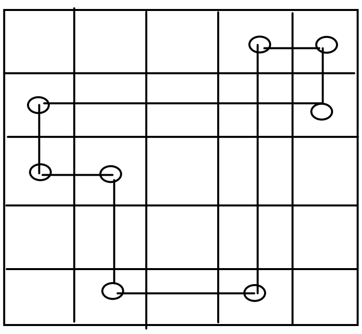
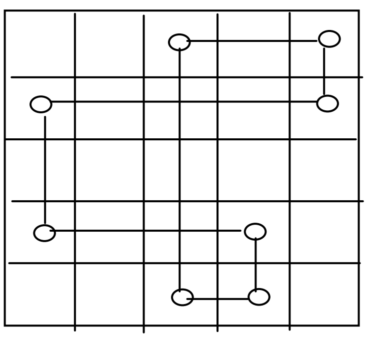
С учетом данных требований, *алгоритм перераспределения* будет состоять из двух шагов:

1) наметить маршрут перераспределения груза.

Для этого в таблице строится цикл перераспределения объектов перевозок. Цикл представляет собой замкнутую ломаную линию, которая начинается в той свободной клетке, где условие оптимальности нарушается наиболее сильно (т.е. там, где α_{ij}наибольшая).

Некоторые разновидности циклов.

а)  б)  в) 

г)  д) 

При построении цикла можно проходить как через занятые, так и через свободные клетки таблицы, но повороты делаются только в занятых клетках и под прямым углом;

2) определить порядок изменения объемов перевозок в вершинах цикла.

Для этого в вершинах цикла расставляют знаки «+» и «–», причем в начале цикла (клетка, где α_{ij}наибольшая) ставится знак «+», в следующей «–», в следующей «+» и т.д. Получаем чередование знаков. Направление движения при расстановке знаков от свободной клетки безразлично, так как количество вершин цикла является четной величиной. Наличие знака «+» в вершине цикла показывает, что объем перевозок необходимо увеличить, а «–» – уменьшить. Увеличение и уменьшение объемов перевозок в вершинах цикла производится на одинаковую величину, которая выбирается равной наименьшему из объемов перевозок в тех клетках, где в вершине цикла стоит знак «–». Таким образом, из отрицательной вершины контура необходимо выбрать наименьшее значение x_{ij}. В новой рабочей таблице получаем следующий вариант решения задачи: выбранное значение x_{ij} из отрицательных вершин контура предыдущей таблицы отнимаем, а к положительным – прибавляем. Заполненные клеточки, не являющиеся вершинами контура, не меняют свое значение.

В итоге получаем новый вариант. Следующие шаги поиска оптимального варианта совершаются по аналогии вышеизложенного.

Замечание: алгоритм перераспределения одинаков и при $Z\rightarrow$min и при $Z\rightarrow$max.

3. Приближенные распределительные методы

К приближенным распределительным методам можно отнести метод наилучших цен и метод аппроксимации. Приближенными они называются вследствие того, что полученное при помощи этих методов распределение груза в таблице не требует дополнительной проверки на оптимальность, так как либо сразу оказывается оптимальным, либо максимально к нему приближено.

Метод наилучших цен

Метод наилучших цен позволяет получить более выгодный опорный план, чем метод северо-западного угла. При распределении груза на каждом шаге этого метода выбирается клетка с *наилучшей ценой*. Наилучшей считается минимальная цена при $Z\rightarrow$min, и максимальная цена при $Z\rightarrow$max. Если существует несколько клеток с одинаковыми лучшими тарифами, то из них для определенности можно выбрать клетку, находящуюся левее и выше остальных.

Алгоритм метода наилучших цен:

1) рассматривая рабочую таблицу, найти клетку с наилучшей ценой;

2) проставить в эту клетку максимально допустимое значение x_{ij};

3) вычеркнуть свободные нерабочие клетки;

4) откорректировать клетки b_i и a_j.

На этом заканчивается один шаг (итерация) метода.

Из оставшихся свободных рабочих клеток снова выбрать клетку с наилучшей ценой и повторять до тех пор, пока полностью не будет распределен весь груз.

Таблица 7 – Заполнение рабочей таблицы методом наилучших цен

	1	2	3	4	b_i
1	13 300	12 1200	15	16	1500

2	17	15	14	13 1000	1000
3	15 500	14	13 1400	16 100	2000
a_j	800	1200	1400	1100	4500

$Z_{\min}$= 300*13 + 1200*12 + 1000*13 + 500*15 + 1400*13 + 100*16 = 58600.

Замечание. Предлагаемый алгоритм метода можно использовать для решения задач небольшого размера. При решении задач большого размера алгоритм этого метода применяется не для всей рабочей таблицы, а или для каждой стоки, или каждого столбца.

Метод аппроксимации

Данный метод, также как и предыдущий, использует понятие «наилучшая цена», но в отличие от него позволяет более однозначно сделать выбор между равнозначными клетками при распределении груза.

Алгоритм метода аппроксимации:

1) в рабочей таблице задачи берем дополнительную строку и столбец «разностей»;

2) заполняем эти строку и столбец разностями между двумя наилучшими ценами по каждой строке и каждому столбцу;

3) из всех разностей строки и столбца выбрать наибольшую, указать номер итерации;

4) в соответствующей строке или столбце выбираем клетку с наилучшей ценой, проставляем в эту клетку максимальное значение x_{ij};

5) корректируем свободные члены и вычеркиваем нерабочие свободные клетки;

6) из оставшихся неиспользованных разностей снова выбрать наибольшую и так до тех пор, пока или не будут использованы все разности или не будет распределен весь груз.

Если разности будут использованы все, а груз распределен не до конца, то в малых задачах дораспределение груза производится вручную. В больших же задачах приходится дочерчивать строку и столбец "разностей" и заполнять их, но теперь разности берутся между двумя наилучшими ценами, но только по свободным рабочим клеткам.

Таблица 8 – Заполнение рабочей таблицы методом аппроксимации

	1	2	3	4	b_i	Столбец разностей
1	13 300	12 1200	15	16	1500	1
2	17	15	14	13 1000	1000	1
3	15 500	14	13 1400	16 100	2000	1
a_j	800	1200	1400	1100	4500	
Строка разностей	2_3	2_2	1	3_1		

$Z_{\min}$= 300*13 + 1200*12 + 1000*13 + 500*15 + 1400*13 + 100*16 = 58600.

Разность 3_1 означает, что заполнение таблицы начинать следует с клетки (2,4) (столбец выбран с учетом наибольшей разности, клетка в этом столбце выбрана с наименьшей ценой, так как $Z \to \min$).

При заполнении таблицы следует помнить, что:

1) если разности использованы все, а грузы распределены не до конца, то если существует единственный вариант, дораспределение происходит вручную. Если же дораспределять грузы можно разными способами, то чертится еще одна строка и столбец разностей и заполняются они разностями между наилучшими ценами только по свободным клеткам. Далее алгоритм действий повторяется;

2) если в строке и столбце окажется несколько одинаковых разностей, то предпочтение надо отдать той, которая будет иметь «оптимальный элемент». «Оптимальный элемент» – это цена, которая является наилучшей, как по строке, так и по столбцу, на пересечении которых она стоит. Исследование на наличие «оптимального элемента» проводить после каждой итерации;

3) если оптимальный элемент имеется у нескольких одинаковых разностей, то предпочтение отдать тому «оптимальному элементу», который будет иметь наибольшую сумму «разностей» по строке и столбцу, на пересечении которых он стоит. Если и сумма окажется одинаковой, то заполнять можно клетку с любым «оптимальным элементом»;

4) если мы имеем несколько одинаковых разностей и ни одна из них не имеет «оптимального элемента», то тогда в соответствующих строках и столбцах исчисляются новые разности, но между 1-ой и 3-ей наилучшими ценами.

Замечание. В качестве недостатка этого метода можно отметить необходимость в знании всех его особенностей, а также некоторую громоздкость таблиц.

1.7 Лекция №9 (2 часа)

Тема: «Балансовый модели»

1.7.1 Вопросы лекции:

1. Схема межотраслевого баланса производства и распределения продукта.

1.7.1 Краткое содержание вопросов

1. Схема межотраслевого баланса производства и распределения продукта.

Балансовые модели, как статические так и динамические, широко применяются при экономико-математическом моделировании экономических систем и процессов. В основе создания этих моделей лежит балансовый метод, т.е. метод взаимного сопоставления имеющихся материальных, трудовых и финансовых ресурсов и потребностей в них.

Под ***балансовой моделью*** понимают систему уравнений, которые удовлетворяют требованиям соответствия наличия ресурса и его использования. Кроме приведенного выше требования соответствия производства каждого продукта и потребности в нем, можно указать такие примеры балансового соответствия, как соответствие наличия рабочей силы и количества рабочих мест, платежеспособного спроса населения и предложения товаров и услуг и т.д. При этом соответствие понимается либо как равенство, либо менее жестко – как достаточность ресурсов для покрытия потребности и, следовательно, наличие некоторого резерва.

Важнейшие виды балансовых моделей:

- частные материальные, трудовые и финансовые балансы для народного хозяйства и отдельных отраслей;
- межотраслевые балансы;
- матричные техпромфинпланы предприятий и фирм.

Основу информационного обеспечения балансовых моделей в экономике составляет матрица коэффициентов затрат ресурсов по конкретным направлениям их использования. Например, в модели межотраслевого баланса такую роль играет так называемая *технологическая матрица* – таблица межотраслевого баланса, составленноая из коэффициентов (нормативов) прямых затрат на производство единицы продукции в натуральном выражении. По многим причинам исходные данные реальных хозяйственных объектов не могут быть использованы в балансовых моделях непосредственно, поэтому подготовка информации для ввода в модель является весьма серьезной проблемой. Так, при построении модели межотраслевого баланса используется специфическое понятие чистой (или технологической) отрасли, т.е. условной отрасли, объединяющей все производство данного продукта независимо от ведомственной (административной) подчиненности и форм собственности предприятий и фирм. Переход от хозяйственных отраслей к чистым отраслям требует специального преобразования реальных данных хозяйственных объектов, например, агрегирования отраслей, исключения внутриотраслевого оборота и др.

Балансовые модели строятся в виде числовых матриц – прямоугольных таблиц чисел. В связи с этим балансовые модели относятся к тому типу экономико-математических моделей, которые называются матричными.

Принципиальная схема межотраслевого баланса производства и распределения совокупного общественного продукта в стоимостном выражении представлена в таблице.

Таблица – Принципиальная схема межотраслевого баланса (МОБ)

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли					Конечный продукт	Валовой продукт
	1	2	3	…	n		
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	…	x_{1n}	Y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	…	x_{2n}	Y_2	X_2
3	x_{31}	x_{23}	x_{33}	…	x_{3n}	Y_3	X_3
…	…	…	…	…	…	…	…
n	x_{n1}	x_{n1}	x_{n3}	…	x_{nn}	Y_n	X_n
Амортизация	c_1	c_2	c_3	…	c_n		
Оплата труда	v_1	v_2	v_3	…	v_n		
Чистый доход	m_1	m_2	m_3	…	m_n		
Валовой продукт	X_1	X_2	X_3	…	X_n	$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{n} X_j$	

В основу этой схемы положено разделение совокупного продукта на две части: промежуточный и конечный продукт. Все народное хозяйство представлено в виде совокупности n отраслей (имеются в виду чистые отрасли), при этом каждая отрасль фигурирует в балансе как производящая и как потребляющая.

в МОБ выделяют четыре части, имеющие различное экономическое содержание, они называются ***квадрантами*** баланса.

Первый квадрант МОБ – это шахматная таблица межотраслевых материальных связей. Показатели, помещенные на пересечениях строк и столбцов, представляют собой величины межотраслевых потоков продукции и в общем виде обозначаются x_{ij}, где I и j – соответственно номера отраслей производящих и потребляющих. Так, величина x_{32} понимается как стоимость средств производства, произведенных в отрасли с номером 3 и потребленных в качестве материальных затрат в отрасли с номером 2. Таким образом, первый квадрант по форме представляет собой квадратную матрицу порядка n, сумма всех элементов которой равняется годовому фонду возмещения затрат средств производства в материальной сфере.

Во втором квадранте представлена конечная продукция всех отраслей материального производства, при этом под конечной понимается продукция, выходящая из сферы производства в область конечного использования (на потребление и накопление). В таблице этот раздел дан укрупнено в виде одного столбца величин Y_i . второй квадрант характеризует отраслевую материальную структуру национального дохода, а в развернутом виде – также распределение национального дохода на фонд накопления и фонд потребления, структуру потребления и накопления по отраслям производства и потребления.

Третий квадрант МОБ также характеризует национальный доход, но со стороны его стоимостного состава как сумму чистой продукции и амортизации; чистая продукция понимается при этом как сумма оплаты труда и чистого дохода отраслей. Сумма амортизации (c_j) и чистой продукции (v_j+m_j) некоторой I-ой отрасли будем называть условно чистой продукцией этой отрасли и обозначать в дальнейшем Z_j.

Четвертый квадрант баланса находится на пересечении столбцов второго квадранта (конечной продукции) и строк третьего квадранта (условно чистой продукции). Этим определяется содержание квадранта: оон отражает конечное распределение и использование национального дохода. В результате перераспределения первоначально созданного национального дохода образуются конечные доходы населения, предприятий, государства. Данные четвертого квадранта важны для отражения в межотраслевой модели баланса доходов и расходов населения, источников финансирования капиталовложений, текущих затрат непроизводственной сферы, для анализа общей структуры конечных доходов по группам потребителей. Общий итог четвертого квадранта, так же как второго и третьего, должен быть равен созданному за год национальному доходу.

Таким образом, в целом межотраслевой баланс в рамках единой модели объединяет балансы отраслей материального производства, баланс совокупного общественного продукта балансы национального дохода, финансовый, баланс доходов и расходов населения.

Следует особо отметить, что хотя валовая продукция отраслей не входит в рассмотренные выше четыре квадранта, она представлена на принципиальной схеме МОБ в двух местах в виде столбца, расположенного справа от второго квадранта, и в виде строки ниже третьего квадранта. Эти столбец и строка валовой продукции замыкают схему МОБ и играют важную роль как для проверки правильности заполнения квадрантов (т.е. проверки самого баланса), так и для разработки экономико-математической модели межотраслевого баланса. Если как показано на схеме, обозначить валовой продукт некоторой отрасли буквой X с индексом, равным номеру данной отрасли, то можно записать два важнейших соотношения, отражающих сущность МОБ и являющихся основой его экономико-математической модели.

Во-первых, рассматривая схему баланса по столбцам, можно сделать вывод, что итог материальных затрат любой потребляющей отрасли и ее условно чистой продукции равен валовой продукции этой отрасли. Данный вывод можно записать в виде соотношения:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + Z_j; \qquad j = \overline{1,n}. \qquad (1)$$

Напомним, что величина условно чистой продукции Zj равна сумме амортизации, оплаты труда и чистого дохода j-й отрасли.

Во-вторых, рассматривая схему МОБ по строкам для каждой производящей отрасли, можно видеть, что валовая продукция той или иной отрасли равна сумме материальных затрат потребляющих ее продукцию отраслей и конечной продукции данной отрасли:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i; \qquad i = \overline{1,n}. \qquad (2)$$

Формула описывает систему из n уравнений, которые называются уравнениями распределения продукции отраслей материального производства по направлениям использования.

Просуммируем по всем отраслям уравнения (1), в результате получим:

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} Z_j .$$

Аналогичное суммирование уравнений (2) дает:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} Y_i .$$

Левые части обоих равенств равны, так как представляют собой весь валовой общественный продукт. Первые слагаемые правых частей этих равенств также равны, их величина равна итогу первого квадранта. Следовательно, должно соблюдаться соотношение

$$\sum_{j=1}^{n} Z_j = \sum_{i=1}^{n} Y_i .$$

Левая часть данного уравнения есть сумма третьего квадранта, а правая часть итог второго квадранта. В целом же это уравнение показывает, что в межотраслевом балансе соблюдается важнейший принцип единства материального и стоимостного состава национального дохода.

1.8 Лекция №10 (2 часа)

Тема: «Балансовые модели»

1.8.1 Вопросы лекции:

1. Межотраслевые балансовые модели в анализе экономических показателей

1.8.1 Краткое содержание вопросов

1. Межотраслевые балансовые модели в анализе экономических показателей

Основу информационного обеспечения модели межотраслевого баланса составляет технологическая матрица, содержащая коэффициенты прямых материальных затрат на производство единицы продукции. Эта матрица является также основой экономико-математической модели межотраслевого баланса. Предполагается, что для производства единицы продукции в j-й отрасли требуется определенное количество затрат промежуточной продукции i-й отрасли, равное a_{ij}. Оно не зависит от объема производства в отрасли и является довольно стабильной величиной во времени. Величины a_{ij} называются *коэффициентами прямых материальных затрат* и рассчитываются следующим образом:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}; \quad i, j = \overline{1, n}. \qquad (1)$$

Определение 1. Коэффициента прямых материальных затрат показывает, какое количество продукции i-й отрасли необходимо, если учитывать только прямые затраты, для производства единицы продукции j-й отрасли.

С учетом формулы (1) систему уравнений баланса можно переписать в виде

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_i; \quad i = \overline{1, n}. \tag{2}$$

Если ввести в рассмотрение матрицу коэффициентов прямых материальных затрат $A=(a_{ij})$, вектор-столбец валовой продукции X и вектор-столбец конечной продукции Y:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix},$$

то система уравнений (2) в матричной форме примет вид

$$X = AX + Y. \tag{3}$$

Система уравнений (2), или в матричной форме (3), называется экономико-математической моделью межотраслевого баланса (моделью Леонтьева, моделью (затраты – выпуск»). С помощью этой модели можно выполнять три варианта расчетов:

- Задав в модели величины валовой продукции каждой отрасли (X_i), можно определить объемы конечной продукции каждой отрасли (Y_i):

$$Y = (E - A)\, X. \tag{4}$$

- Задав величины конечной продукции всех отраслей (Y_i), можно определить величины валовой продукции каждой отрасли (X_i):

$$Y = (E - A)^{-1}\, Y. \tag{5}$$

- Для ряда отраслей задав величины валовой продукции, а для всех остальных отраслей задав объемы конечной продукции, можно найти величины конечной продукции первых отраслей и объемы валовой продукции вторых, в этом варианте расчета удобнее пользоваться не матричной формой модели (3), а системой линейных уравнений (2). В формулах (4) и (5) Е обозначает единичную матрицу n-гопорядка, а $(E - A)^{-1}$ обозначает матрицу, обратную матрице (Е – А). Если определитель матрицы $(E - A)$ не равен нулю, т.е. эта матрица невырожденная, то обратная к ней матрица существует. Обозначим эту обратную матрицу через B, тогда систему уравнений в матричной форме (5) можно записать в виде

$$X=BY. \tag{5$'$}$$

Элементы матрицы В будем обозначать через b_{ij}, тогда из матричного уравнения (5$'$) для любой i-й отрасли можно получить следующее соотношение:

$$X_1 = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} Y_j, \quad i = \overline{1, n}. \tag{6}$$

Из соотношений (6) следует, что валовая продукция выступает как взвешенная сумма величин конечной продукции, причем весами являются коэффициенты b_{ij}, которые показывают, сколько всего нужно произвести продукции i-й отрасли для выпуска в сферу конечного использования единицы продукции j-й отрасли. В отличии от коэффициентов прямых затрат a_{ij} коэффициенты b_{ij} называются *коэффициентами полных материальных затрат* и включает в себя как прямые, так и косвенные затраты всех порядков. Если прямые затраты отражают количество средств производства, израсходованных непосредственно при изготовлении данного продукта, то косвенные относятся в предшествующим стадиям производства и входят в производство продукта не прямо, а через другие (промежуточные) средства производства.

Определение 2. Коэффициенты полных материальных затрат b_{ij} показывает, какое количество продукции i-й отрасли нужно произвести, чтобы с учетом прямых и косвенных затрат этой продукции получить единицу конечной продукции j-й отрасли.

Коэффициенты полных материальных затрат можно применять, когда необходимо определить, как скажется на валовом выпуске некоторой отрасли предполагаемое изменение объемов конечной продукции всех отраслей:

$$\Delta X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \Delta Y_j , \qquad (7)$$

где ΔX_i и ΔY_i – изменения (приросты) величин валовой и конечной продукции соответственно.

Переходя к анализу модели межотраслевого баланса, необходимо прежде всего рассмотреть основные свойства матрицы коэффициентов прямых материальных затрат A. Коэффициенты прямых затрат по определению являются неотрицательными, следовательно, матрица A в целом может быть названа неотрицательной: $A \geq 0$. Так как процесс воспроизводства нельзя было бы осуществлять, если бы для собственного воспроизводства в отрасли затрачивалось большее количество продукта, чем создавалось, то очевидно, что диагональные элемента матрицы A меньше единицы: $a_{ij}<1$.

Система уравнений межотраслевого баланса является отражение реальных экономических процессов, в которых содержательный смысл могут иметь лишь неотрицательные значения валовых выпусков; таким образом, вектор валовой продукции состоит из неотрицательных компонентов и называется неотрицательным: $X \geq 0$. встает вопрос, при каких условиях экономическая система способна обеспечивать положительный конечный выпуск по всем отраслям. Ответ на этот вопрос связан с понятием ***продуктивности***матрицы коэффициентов прямых материальных затрат.

Будем называть неотрицательную матрицу A продуктивной, если существует такой неотрицательный вектор $X \geq 0$, что

$$X > AX. \qquad (8)$$

Очевидно, что условие (8) означает существование положительного вектора конечной продукции $Y > 0$ для модели межотраслевого баланса (3).

Проблема продуктивности матрицы исследована в экономико-математической литературе достаточно детально. Сформулируем основные результаты в виде следующего утверждения.

Для того чтобы матрица коэффициентов прямых материальных затрат A была продуктивной, необходимо и достаточно чтобы выполнялось условие:

матрица (Е – А) неотрицательно обратима, т.е. существует обратная матрица $(E - A)^{-1} \geq 0$.

Более простым, но только достаточным признаком продуктивности матрицы A является ограничение на величину ее нормы, т.е. на величину наибольшей суммы элементов матрицы A в каждом столбце. Если норма матрицы A строго меньше единицы, то эта матрица продуктивна; повторим, что данное условие является только достаточным, и матрица A может оказаться продуктивной и в случае, когда ее норма больше единицы.

Перейдем к анализу матрицы коэффициентов полных материальных затрат, т.е. матрицы $B = (E - A)^{-1}$. Согласно определению 2 из предыдущего параграфа коэффициент этой матрицы показывает, сколько всего нужно произвести продукции i-й отрасли, чтобы получить единицу конечной продукции j-й отрасли.

Дадим другое определение коэффициента полных материальных затрат исходя из того, что кроме прямых затрат существуют косвенные затраты той или иной продукции при производстве продукции данной отрасли. Рассмотрим в качестве примера формирование затрат электроэнергии на выпуск стального проката, при этом ограничимся технологической цепочкой «руда-чугун-сталь-прокат». Затраты электроэнергии при получении проката из стали будут называться прямыми затратами, те же затраты при получении стали из чугуна будут называться косвенными затратами 1-го порядка, а затраты электроэнергии при получении стали из чугуна будут называться косвенными затратами электроэнергии на выпуск стального проката 2-го порядка и т.д. В связи со сказанным выше имеет место следующее определение.

Определение 3. Коэффициентом полных материальных затрат c_{ij} называется сумма прямых затрат и косвенных затрат продукции i-й отрасли для производства единицы продукции j-й отрасли через все промежуточные продукты на всех предшествующих стадиях производства. Если коэффициент косвенных материальных затрат k-го порядка обозначить через $a_{ij}^{(k)}$, то имеет место формула

$$c_{ij} = a_{ij} + a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} + \ldots + a_{ij}^{(k)} + \ldots, \qquad (9)$$

а если ввести в рассмотрение матрицу коэффициентов полных материальных затрат $C=(c_{ij})$ и матрицы коэффициентов косвенных материальных затрат различных порядков $A^{(k)}=(a_{ij}^{(k)})$, то поэлементную формулу (9) можно записать в более общем матричном виде:

$$C = A + A^{(1)} + A^{(2)} + \ldots + A^{(k)} + \ldots \qquad (10)$$

Исходя из содержательного смысла коэффициентов косвенных затрат можно записать ряд матричных соотношений:

$A^{(1)} = AA = A^2$; $A^{(2)} = AA^{(1)} = AA^2 = A^3$;

$A^{(k)} = AA^{(k-1)} = AA^k = A^{k+1}$,

с использованием которых матричная формула (10) может быть переписана в следующем виде:

$$C = A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{k+1} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} A^k. \qquad (11)$$

Различные модификации рассмотренной выше модели межотраслевого баланса производства и распределения продукции в народном хозяйстве позволяют расширить круг показателей, охватываемых моделью. Рассмотрим применение межотраслевого балансового метода для анализа таких важных экономических показателей, как труд, фонды и цены.

К числу важнейших аналитических возможностей данного метода относится определение прямых и полных затрат труда на единицу продукции и разработка на этой основе балансовых продуктово-трудовых моделей, исходной моделью при этом служит отчетный межпродуктовый баланс в натуральном выражении. В этом балансе по строкам представлено распределение каждого отдельного продукта на производство других продуктов и конечное потребление (первый и второй квадранты схемы межотраслевого баланса). Отдельной строкой дается распределение затрат живого труда в производстве всех видов продукции; предполагается, что трудовые затраты выражены в единицах труда одинаковой степени сложности.

Обозначим затраты живого труда в производстве j-го продукта через L_j, а объем производства этого продукта (валовой выпуск), как и раньше, через X_j. Тогда прямые затраты труда на единицу j-го вида продукции (коэффициент прямой трудоемкости) можно задать следующей формулой:

$$t_j = \frac{L_j}{X_j}; \quad j = \overline{1, n}. \qquad (12)$$

Введем понятие полных затрат труда как суммы прямых затрат живого труда и затрат овеществленного труда, перенесенных на продукт через израсходованные средства производства. Если обозначить величину полных затрат труда на единицу продукции j-го вида через T_j, то произведения вида $a_{ij}T_j$ отражают затраты овеществленного труда, перенесенного на единицу j-го продукта через i-е средство производства; при этом предполагается, что коэффициенты прямых материальных затрат a_{ij} выражены в натуральных единицах. Тогда полные трудовые затраты на единицу j-го вида продукции (коэффициент полной трудоемкости) будут равны

$$T_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} T_i + t_j; \quad j = \overline{1,n}. \qquad (13)$$

Введем в рассмотрение вектор-строку коэффициентов прямой трудоемкости $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ и вектор-строку коэффициентов полной трудоемкости $T = (T_1, T_2, \ldots, T_n)$.

Тогда с использованием уже рассматриваемой выше матрицы коэффициентов прямых материальных затрат A (в натуральном выражении) систему уравнений (13) можно переписать в матричном виде:

$$T = TA + t. \qquad (14)$$

Произведя очевидные матричные преобразования с использованием единичной матрицы E

$$T - TA = TE - TA = T(E - A) = t,$$

получим следующее соотношение для вектора коэффициентов полной трудоемкости:

$$T = t(E - A)^{-1}. \qquad (15)$$

Матрица $(E - A)$ нам уже знакома, это матрица В коэффициентов полных материальных затрат, так что последнее равенство можно переписать в виде

$$T = tB \qquad (15')$$

Обозначим через L величину совокупных затрат живого труда по всем видам продукции, которая с учетом формулы (12) будет равна

$$L = \sum_{j=1}^{n} L_j = \sum_{j=1}^{n} t_j X_j = tX \qquad (16)$$

Используя соотношения (16), приходим к следующему неравенству:

$$tX = TY, \qquad (17)$$

здесь t и T – вектор-строки коэффициентов прямой валовой и конечной продукции соответственно.

Соотношение (17) представляет собой основание балансовое равенство в теории межотраслевого баланса труда. В данном случае его конкретное экономическое содержание заключается в том, что стоимость конечной продукции, оцененной по полным затратам труда, равна совокупным затратам живого труда. Сопоставляя потребительский эффект различных взаимозаменяемых продуктов с полными трудовыми затратами на их выпуск, можно судить о сравнительной эффективности их производства. С помощь показателей полной трудоемкости более полно и точно, чем при использовании существующих стоимостных показателей, выявляется структура затрат на выпуск различных видов продукции и прежде всего соотношение между затратами живого и овеществленного труда.

На основе коэффициентов прямой и полной трудоемкости могут быть разработаны межотраслевые и межпродуктовые балансы затрат труда и использования трудовых ресурсов. Схематически эти балансы строятся по общему типу матричных моделей, однако все показатели в них (межотраслевые связи, конечный продукт, условно истая продукция и др.)

Пример 1. Пусть дан межотраслевой баланс производства и распределения продукции

Таблица 1– Межотраслевой баланс производства и распределения продукции

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				
	1	2	3	*Конечная продукция*	*Валовая продукция*
1	232,6	51,0	291,8	200,0	775,3
2	155,1	255,0	0,0	100,0	510,1
3	232,6	51,0	145,9	300,0	729,6
Условно чистая	155,0	153,1	291,9	600,0	

продукция					
Валовая продукция	775,3	510,1	729,6		2015,0

Заданы затраты живого труда (трудовые ресурсы) в трех отраслях: L_1 = 1160, L_2 = 460, L_3 = 875 в некоторых единицах измерения трудовых затрат. Требуется определить коэффициенты прямой и полной трудоемкости и составить межотраслевой баланс затрат труда.

1. Воспользовавшись формулой (1) и исходным балансом, находим коэффициенты прямой трудоемкости:

$$t_1 = \frac{1160}{775{,}3} = 1{,}5; \qquad t_2 = \frac{460}{510{,}1} = 0{,}9; \qquad t_3 = \frac{875}{729{,}6} = 1{,}2.$$

2. По формуле ($4'$), в которой в качестве матрицы В берется матрица коэффициента полных материальных затрат,

3. Матрицу коэффициентов полных материальных затрат рассчитывается как $B = (E - A)^{-1}$ найденная, и будет иметь следующий вид:

$$B = \begin{pmatrix} 2{,}041 & 0{,}612 & 1{,}020 \\ 0{,}816 & 2{,}245 & 0{,}408 \\ 0{,}816 & 0{,}510 & 1{,}684 \end{pmatrix}$$

Находим коэффициенты полной трудоемкости:

$$T = (1{,}5;\ 0{,}9; 1{,}2) \cdot \begin{pmatrix} 2{,}041 & 0{,}612 & 1{,}020 \\ 0{,}816 & 2{,}245 & 0{,}408 \\ 0{,}816 & 0{,}510 & 1{,}684 \end{pmatrix} = (4{,}84;\ 3{,}55; 3{,}92).$$

4. Умножая первую, вторую и третью строки первого и второго квадрантов межотраслевого материального баланса, на соответствующие коэффициенты прямой трудоемкости, получаем схему межотраслевого баланса труда (в трудовых измерителях) (табл. 2).

Таблица 2 – Межотраслевой баланс затрат труда

Производящие отрасли	*Потребляющие отрасли*				
	Межотраслевые затраты овеществленного труда			*Затраты труда на конечную продукцию*	*Затраты труда в отраслях (трудовые ресурсы)*
	1	2	3		
1	348,9	76,5	437,7	300,0	1163,0
2	139,6	229,5	0,0	90,0	459,1
3	279,1	61,2	175,1	360,0	875,5

Незначительные расхождения между данными таблицы и исходными данными вызваны погрешностями округления при вычислении.

Развитие основной модели межотраслевого баланса достигается также путем включения в нее показателей фондоемкости продукции. В простейшем случае модель дополняется отдельной строкой, в которой указаны в стоимостном выражении объемы производственных фондов Φ_j, занятые в каждой j-й отрасли. На основании этих данных и объемов валовой продукции всех отраслей определяются коэффициенты прямой фондоемкости продукции j-й отрасли:

$$f_j = \frac{\Phi_j}{X_j}; \quad j = \overline{1,n}. \tag{18}$$

Коэффициент прямой фондоемкости показывает величину производственных фондов, непосредственно занятых в производстве данной отрасли, в расчете на единицу ее валовой продукции. В отличии от этого показателя коэффициент полной фондоемкости Fj отражает объем фондов, необходимых во всех отраслях для выпуска единицы конечной продукции j-й отрасли. Если a_{ij} – коэффициент прямых материальных затрат, то для коэффициента полной фондоемкости справедливо равенство, аналогичное равенству (13) для коэффициента полной трудоемкости:

$$F_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} F_i + f_j; \quad j = \overline{1, n}, \tag{19}$$

Если ввести в рассмотрение вектор-строку коэффициентов прямой фондоемкости $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ и вектор-строку коэффициентов полной фондоемкости $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$, то систему уравнений (19) можно переписать в матричной форме:

$$F = FA + f, \tag{20}$$

откуда с помощью преобразований, аналогичных применяемым выше для коэффициентов трудоемкости, можно получить матричное соотношение

$$F = fB, \tag{21}$$

где $B = (E - A)^{-1}$ – матрица коэффициентов полных материальных затрат.

Для более глубокого анализа необходимо дифференцировать фонды на основные и оборотные, а в пределах основных – на здания, сооружения, производственное оборудование, транспортные средства и т.д.

Пусть в целом все производственные фонды разделены на m групп. Тогда характеристика занятых в народном хозяйстве фондов задается матрицей показателей Φ_{kj}, отражающих объем фондов k-ой группы, занятых в j-й отрасли:

$$(\Phi_{kj}) = \begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \ldots & \Phi_{1n} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \ldots & \Phi_{2n} \\ . & . & . & . \\ \Phi_{m1} & \Phi_{m2} & \ldots & \Phi_{mn} \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты прямой фондоемкости также образуют матрицу размерности mxn, элементы которой определяют величину производственных фондов k-й группы, непосредственно используемых при производстве единицы продукции j-й отрасли:

$$f_{kj} = \frac{\Phi_{kj}}{X_j}.$$

Для каждой j-й отрасли могут быть вычислены коэффициенты полной фондоемкости F_{kj}, отражающие полную потребность в фондах k-й группы для выпуска единицы конечной продукции этой отрасли:

$$F_{kj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} F_{ki} + f_{kj}; \quad k = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}.$$

Решение системы данных уравнений позволяет представить коэффициенты полной фондоемкости по каждой из m групп фондов как функцию коэффициентов прямой фондоемкости:

$$F_{kj} = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} f_{ki}; \quad k = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}.$$

В этих формулах величины a_{ij} и b_{ij}– уже известные коэффициенты прямых и полных материальных затрат.

Коэффициенты фондоемкости в межотраслевом балансе позволяют увязать планируемый выпуск продукции с имеющимися производственными мощностями. Так, потребность в функционирующих фондах *k*-й группы для достижения заданного объема материального производства X_j по всем отраслям задается формулой:

$$\Phi_k = \sum_{j=1}^{n} f_{kj} X_j; \quad k = \overline{1, m}.$$

1.9 Лекция №11 (2 часа)

Тема: «Функции полезности. Задачи потребительского выбора»

1.9.1 Вопросы лекции:

1 Определение функции полезности и ее свойства.

2.Решение задачи потребительского выбора

1.9.1 Краткое содержание вопросов

1. Определение функции полезности и ее свойства.

Потребитель располагает доходом I, который он полностью тратит на приобретение благ. Цены благ считаются заданными. Учитывая структуру цен, доход и собственные предпочтения, потребитель приобретает определенное количество благ и математическая модель такого его поведения называется моделью потребительского выбора. Рассмотрим модель с двумя видами благ. Такая модель удобна прежде всего возможностью графической интерпретации, сохраняя при этом все принципиальные свойства общей модели.

Рассмотрим потребительские наборы их двух благ. Потребительский набор - это вектор (x_1,x_2), координата x_1 которого равна количеству единиц первого блага, а координата x_2 равна количеству единиц второго блага. Выбор потребителя характеризуется отношением предпочтения, суть которого состоит в том, что потребитель про каждые два набора может сказать, что, либо один из них более желателен, чем другой, либо потребитель не видит между ними разницы.

На множестве потребительских наборов (x_1,x_2) определена функция $u(x_1,x_2)$, значение которой на потребительском наборе (x_1,x_2) равно потребительской оценке индивидуума для этого набора. Эта функция называется функцией полезности.

Свойства функции полезности:

1) Возрастание потребления одного продукта при постоянном потреблении другого продукта ведет к росту потребительской оценки. т.е. если $x_1 + \Delta x_1 > x_1$, то $u(x_1 + \Delta x_1, x_2) > u(x_1, x_2)$.
если $x_2 + \Delta x_2 > x_2$, то $u(x_1, x_2 + \Delta x_2) > u(x_1, x_2)$.

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} = u_1^{'} > 0, \qquad \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = u_2^{'} > 0$$

Первые частные производные называются предельными полезностями продуктов: $u_1^{'}$-предельная полезность первого продукта, $u_2^{'}$- предельная полезность второго продукта. Для предельных полезностей используется также символика $M_1u(x_1, x_2)$, $M_2u(x_1, x_2)$.

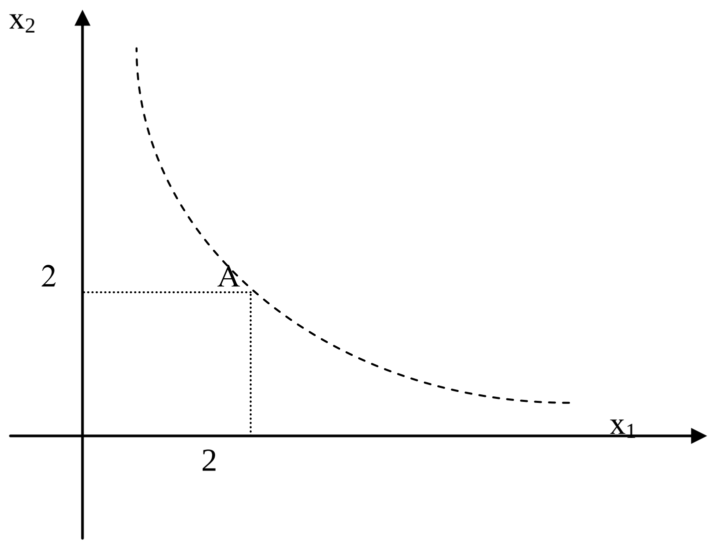
2) Предельная полезность каждого продукта уменьшается, если объем его потребления растет (это свойство предельной полезности называется законом убывающей предельной полезности).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^{\ 2}} = u_{11}'' < 0\ , \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^{\ 2}} = u_{22}'' < 0.$$

3) Предельная полезность каждого продукта увеличивается, если растет количество другого продукта. В этом случае продукт, количество которого фиксировано, оказывается относительно дефицитным. Поэтому дополнительная его единица приобретает большую ценность и может быть потреблена более эффективно. Данное свойство справедливо не для всех благ.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = u_{12}'' = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} = u_{21}'' > 0$$

Линия, соединяющая потребительские наборы (x_1,x_2), имеющие один и тот же уровень удовлетворения потребностей индивидуума, называется ***линией безразличия***. Линия безразличия есть не что иное, как линия уровня полезности, множество линий безразличия называется картой линий безразличия. Линии безразличия не касаются и не пересекаются. Чем "северо-восточнее" расположена линия безразличия, тем большему уровню удовлетворения потребности она соответствует.



Величина $\frac{dx_2}{dx_1} \approx \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$. Дробь - $\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ принято называть нормой замены первого продукта вторым на потребительском наборе (x_1,x_2), а производную - $\frac{dx_2}{dx_1}$ - предельной нормой замены первого продукта вторым.

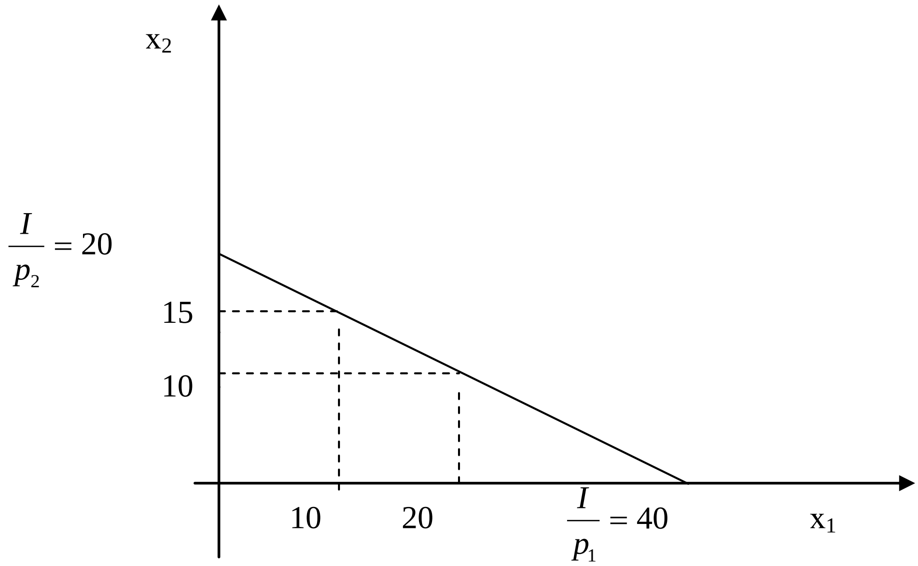
2. Решение задачи потребительского выбора

Задача потребительского выбора (задача рационального поведения потребителя на рынке) заключается в выборе такого потребительского набора (x_1,x_2), который максимизирует его функцию полезности при заданном бюджетном ограничении.

Чтобы понять, как бюджет ограничивает выбор потребителя, рассмотрим ситуацию, когда женщина располагает фиксированным доходом I, который может быть потрачен на два вида товаров – продукты питания и одежду. x_1 – количество продуктов питания, x_2 – количество предметов одежды, p_1 и p_2 - рыночные цены товаров, тогда

p_1x_1 - сумма денег, затраченных на питание, а p_2x_2 - на одежду. Все сочетания x_1 и x_2, при которых сумма затрат меньше или равна доходу будут соответствовать бюджетному ограничению. Если предположить, что расходы равны бюджету, то должно выполняться равенство $p_1x_1 + p_2x_2 = I$, иначе говоря, комбинации продуктов и одежды, которые может приобрести женщина будут лежать на прямой, которая называется бюджетной линией.

Допустим, доход женщины. составляет 400 руб., цена продуктов питания 10 руб. за единицу, а цена одежды 20 руб. за единицу, тогда на эту сумму она могла бы купить 10 единиц продуктов питания и 15 единиц одежды (10*10+15*20=400) или 20 единиц продуктов питания и 10 единиц одежды (20*10+10*20=400) . Если она решила весь бюджет потратить только на один вид продуктов, то самое большее, что она смогла бы купить - это 40 единиц продуктов питания (400/10=40) или 20 единиц одежды.



Бюджетное ограничение означает, что денежные расходы на продукты не могут превышать денежного дохода, т.е. $p_1x_1 + p_2x_2 \le I$, где p_1 и p_2 - рыночные цены одной единицы первого и второго продуктов, а I - доход индивидуума, который он готов потратить на приобретение первого и второго продуктов.

Формально задача потребительского выбора имеет вид:

$$u(x_1, x_2) \to \max$$

при условиях $p_1x_1 + p_2x_2 \le I$,

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$

В приведенной постановке задача потребительского выбора является задачей нелинейного программирования.

Набор (x_1,x_2), максимизирующий функцию полезности, должен обращать бюджетное ограничение в равенство, т.е. $p_1x_1 + p_2x_2 = I$. Графически это означает, что решение задачи потребительского выбора должно лежать на бюджетной прямой. Мы также будем считать, что условие неотрицательности в оптимальной точке будет выполняться автоматически.

Итак, задачу потребительского выбора можно заменить задачей на условный экстремум (экстремум – это минимальное и максимальное значение функции).

$$u(x_1, x_2) \to \max$$

при условиях $p_1x_1 + p_2x_2 = I$,

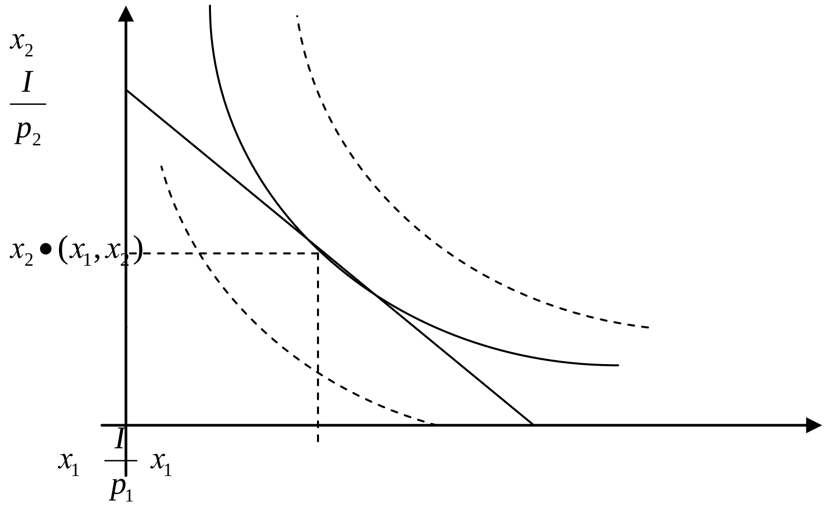
для решения этой задачи возможно применение метода Лагранжа, в результате получим систему двух уравнений с двумя неизвестными x_1 и x_2

$$\begin{cases} \dfrac{u_1'}{u_2'} = \dfrac{p_1}{p_2}, \\ p_1x_1 + p_2x_2 = I. \end{cases}$$

Подставив решение (x_1,x_2), в левую часть равенства

$\dfrac{u_1'(x_1,x_2)}{u_2'(x_1,x_2)} = \dfrac{p_1}{p_2}$, получим, что в точке (x_1,x_2), локального рыночного равновесия отношение предельных полезностей равно отношению рыночных цен на эти продукты.

Геометрически решение можно интерпретировать как точку касания линии безразличия функции полезности $u(x_1,x_2)$ с бюджетной прямой $p_1x_1 + p_2x_2 = I$.



Координаты x_1 и x_2 решения задачи потребительского выбора есть функции параметров p_1, p_2 и I:

$$x_1 = x_1(p_1, p_2, I),$$
$$x_2 = x_2(p_1, p_2, I)$$

полученные функции называются функциями спроса на первый и второй продукт. Важным свойством функций спроса является их однородность относительно цен и дохода, т.е. значение функций спроса инвариантны по отношению к пропорциональным изменениям цен и дохода.

$$x_1(\alpha p_1, \alpha p_2, \alpha I) = x_1(p_1, p_2, I),$$
$$x_2(\alpha p_1, \alpha p_2, \alpha I) = x_2(p_1, p_2, I)$$

для любого числа $\alpha>0$. Это означает, что если все цены и доход изменятся в одно и тоже число раз, величина спроса на продукт (первый или второй – безразлично) останется неизменной.

1.10 Лекция №12 (2 часа)

Тема: «Функции спроса»

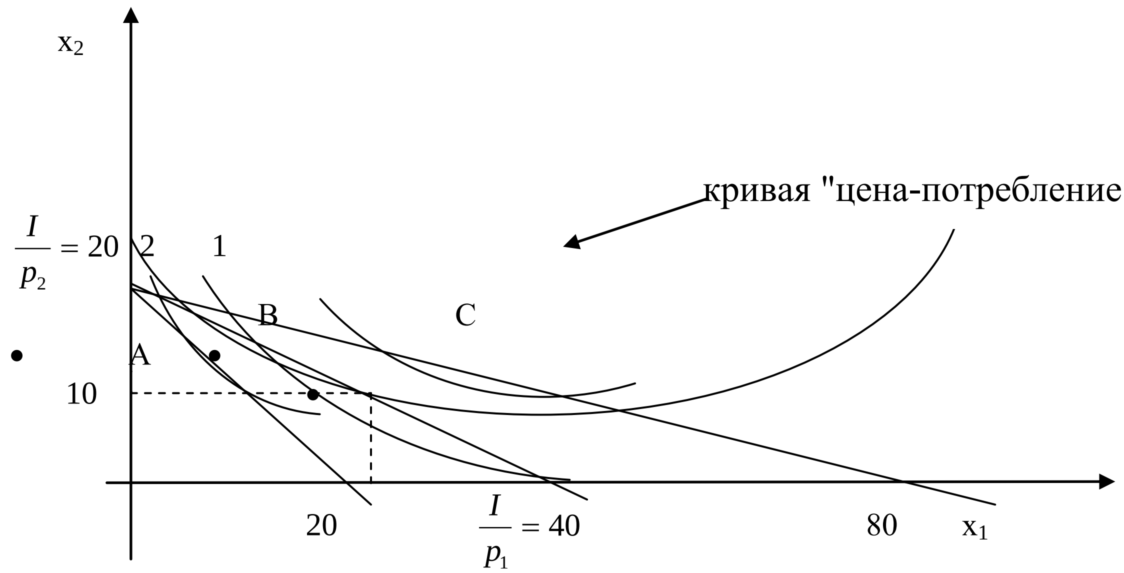
1.10.1 Вопросы лекции:

1. Изменение цен. Изменение дохода.
2.Эффекты компенсации. Уравнение Слуцкого

1.10.1 Краткое содержание вопросов

1. Изменение цен. Изменение дохода.

Рассмотрим то, как меняется потребление товаров под влиянием изменения цен. Вернемся к задаче рассмотренной в предыдущей лекции про продукты питания и одежду. Напомню, что первоначальная цена продуктов питания (x_1) составляла 10 руб. за единицу, цена одежды (x_2) – 20 руб. за единицу, Доход был равен 400 руб. Решение задачи потребительского выбора находится в точке А. Здесь потребитель приобретает 20 единиц продуктов питания (x_1=20) и 10 единиц одежды (x_2=10)



Предположим, что цена на продукты питания возросла и составила 20 руб. Тогда изменился и угол наклона бюджетной линии ($\frac{I}{p_1} = \frac{400}{20} = 20$). Потребитель теперь достигает максимальной полезности в точке В, которая расположена на кривой безразличия 2. так как цена продуктов питания поднялась , покупательная способность потребитель достигаемая полезность снизились). Так в точке В покупатель выбирает 10 единиц продуктов питания и 13 единиц одежды. Что произойдет когда цена на продукты питания снизится до 5 рублей? Угол наклона бюджетной линии опять изменится ($\frac{I}{p_1} = \frac{400}{5} = 80$) и потребитель выберет точку С соответствующую более высокому уровню полезности (30 единиц продуктов питания и 15 единиц одежды).

Линия, соединяющая максимально-полезные наборы продуктов при каждом изменении цены называется кривой "цена-потребление".

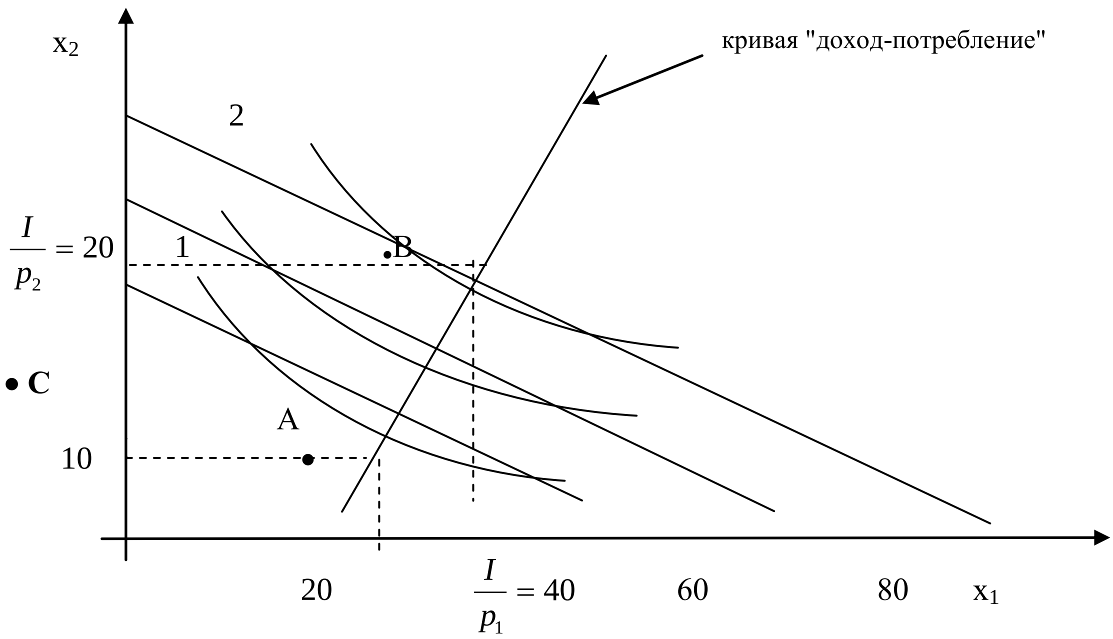
Итак, при снижении цены на продовольствие достигаемая полезность растет и потребитель покупает больше продуктов питания. Потребление одежды при этом может как расти так и падать.

Кривая спроса (функция спроса задается как функция параметров $x_1(p_1, p_2, I)$, $x_2(p_1, p_2, I)$) обладает двумя важными свойствами:

1) Уровень полезности меняется по мере нашего движения вдоль кривой. Чем ниже цена товара, тем выше уровень полезности.

2) В каждой точке на кривой спроса потребитель максимизирует полезность, отвечая условию, что предельная норма замещения одежды продуктами питания равна соотношению цен продуктов питания и одежды $\frac{u_1'}{u_2'} = \frac{p_1}{p_2}$. Другими словами, в каждой точке кривой спроса можно определить сколько готов заплатить потребитель за дополнительную единицу того или иного продукта.

Мы рассмотрели пример изменения потребительского выбора при изменении цены на один из продуктов. Рассмотрим, как влияет изменение дохода на потребительский выбор.



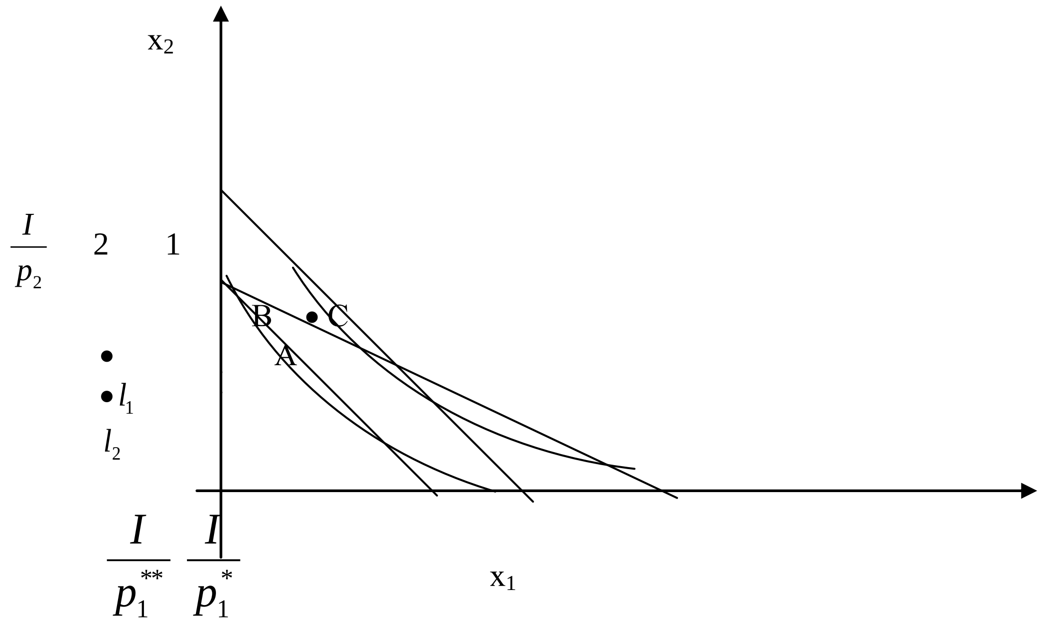
Пусть первоначально доход потребителя равнялся 400 руб., тогда максимизирующий полезность потребительский набор находится в точке А (20 единиц продуктов питания и 10 единиц одежды). Доход потребителя изменился и составил 800 руб. Тогда бюджетная линия сместилась вправо параллельно первоначальной бюджетной линии. Оптимальный выбор потребителя теперь находится в точке В, где он приобретает 30 единиц продуктов питания и 21 единицу одежды. если доход потребителя составит 600 руб., то его выбор переместится в точку С.

Можно продолжить перебирать варианты изменения дохода и соответственно спроса на товары. Все возможные решения будут находится на кривой "доход-потребление". Кривая "доход-потребление" движется на "северо-восток", потому что потребление как продовольствия так и одежды увеличивается с ростом дохода.

***Если кривая "доход-потребление" имеет положительный угловой коэффициент (с ростом дохода растет потребление), то такой товар называется нормальным. в ряде случаев спрос падает по мере роста дохода. Такие товары называются "низкокачественными".

2. Эффекты компенсации. Уравнение Слуцкого.

Перекрестные функции спроса от цен характеризуют такие свойства товара, как взаимозаменяемость и взаимодополняемость. Если при росте цены на один товар при снижении его спроса, растет спрос на другой товар, то эти товары взаимозаменяемые. Наоборот, если спрос на другой товар также падает, то они взаимодополняемы. Заметим, что реальная взаимозаменяемость может искажаться общим снижение благосостояния при росте цены на один из товаров. Первый товар может заменять второй в потреблении, но спрос на него может не расти, поскольку просто снизился доход. Для снятия этого искажения используют понятие компенсированного изменения цены, то есть такого, которое сопровождается увеличением дохода потребителя, позволяющим ему поддерживать прежний уровень благосостояния.



Пусть цена первого блага повысилась с p_1^* до p_1^{**}, тогда бюджетная линия l_1 изменит свое положение, и перейдет в l_2. Точка A лини безразличия 1, касающаяся бюджетного ограничения l_1, будет заменена новой точкой оптимума B, где новая линия безразличия 2 касается новой бюджетной линии l_2. Если мы хотим компенсировать потребителю потерю благосостояния, то увеличим его доход так, чтобы новая бюджетная прямая l_3,(параллельная l_2) коснулась в некоторой точке C прежней линии безразличия 1.

Направленный отрезок AC показывает "эффект замены" при росте цены, то есть изменение структуры спроса при условии поддержания прежнего уровня благосостояния. Направленный отрезок CB отражает "эффект дохода", то есть изменение потребительского спроса при сохранении соотношения цен благ и изменении уровня дохода. Общий результат роста цены (при отсутствии компенсации) выражается направленным отрезком AB.

Одним из основных в теории потребительского выбора является уравнение Слуцкого, опубликованное российским математиком Е.Е.Слуцким в 1915 году. Это уравнение позволяет увязать действие эффекта замены и эффекта дохода с результирующим изменением спроса. Уравнение Слуцкого имеет следующий вид:

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \left[\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right]_{comp} - \left[\frac{\partial x_i}{\partial I}\right] x_j ,$$

где первое слагаемое в правой части описывает действие эффекта замены, второе – действие эффекта дохода, слева записано результирующее воздействие на спрос, складывающееся из изменения структуры спроса и общего его изменения при изменении уровня реального дохода.

Для ценных (нормальных ?) товаров величина $\left[\frac{\partial x_i}{\partial I}\right] > 0$, т.е. спрос растет при росте дохода. В этом случае, согласно уравнению Слуцкого, $\frac{\partial x_i}{\partial p_j} < \left[\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right]_{comp}$: если спрос растет, то он растет больше при наличии компенсации, если он падает, то в меньшей степени.

Уравнение Слуцкого может рассматриваться как при разных, так и при совпадающих i и j.

Рассмотрим теперь более подробно эластичности функции спроса. Эластичность спроса по цене равна $e_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} : \frac{x_i}{p_j}$, Эластичность спроса по доходу $e_{iI} = \frac{\partial x_i}{\partial I} : \frac{x_i}{I}$.

Выполняется равенство $\sum_j e_{ij} + e_{iI} = 0$, то есть сумма всех эластичностей спроса по цене и доходу должна равняться 0.

1.11 Лекция №13 (2 часа)

Тема: «Производственные функции»

1.11.1 Вопросы лекции:

1. Основные понятия. Свойства.
2. Эластичность выпуска. Производственная функция Кобба-Дугласа

1.11.2 Краткое содержание вопросов

1. Основные понятия. Свойства.

Производственными функциями называют соотношение между используемыми производственными ресурсами и выпускаемой продукцией.

Производственные функции предназначены для моделирования процесса производства некоторой хозяйственной единицы: отдельной фирмы, отрасли или всей экономики государства в целом.

С помощью производственных функций решают задачи:

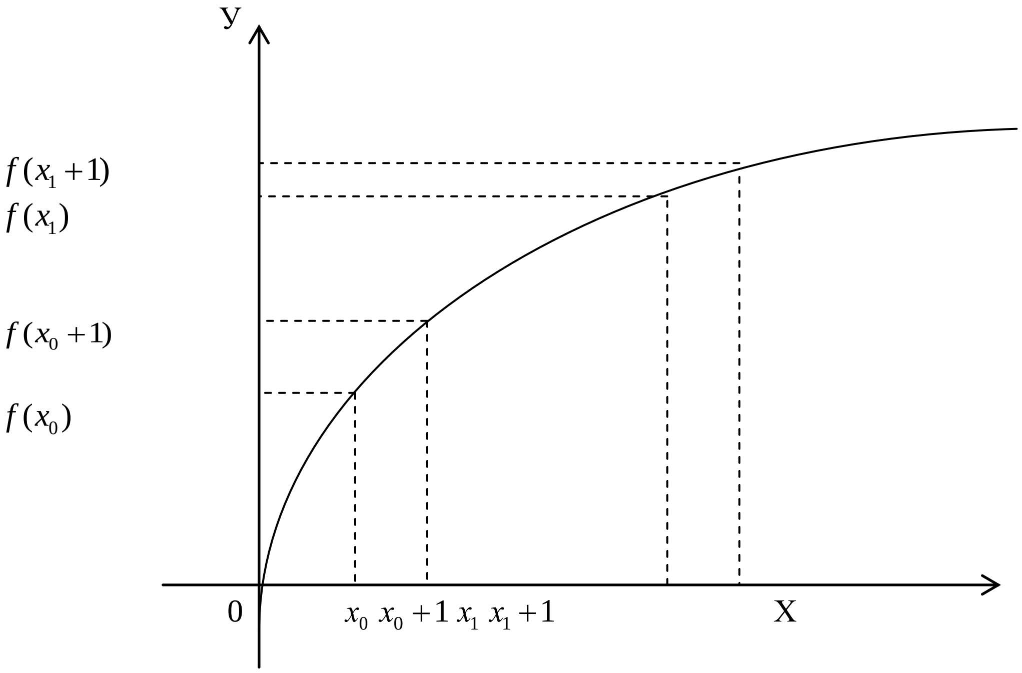
оценки отдачи ресурсов в производственном процессе;

прогнозирование экономического роста;

разработки вариантов плана развития производства;

оптимизации функционирования хозяйственной единицы при условии заданного критерия и ограничений по ресурсам.

Производственная функция одной переменной. Возьмем производственную функцию F в виде $F(x) = a_1 x^{a_2}$, где x- величина затрачиваемого ресурса (например, рабочего времени), F(x) –объем выпускаемой продукции (например, число готовых холодильников). Величины a_1 и a_2 – параметры производственной функции (вектор параметров есть двумерный вектор (a_1 , a_2)). Здесь a_1 и a_2 – положительные числа и число a_2 <=1. Данная функция является функцией одной переменной x. В связи с этим производственная функция называется одноресурсной или однофакторной. Ее область определения - множество неотрицательных действительных чисел т.е. x>=0. График производственной функции $y = a_1 x^{a_2}$ выглядит следующим образом.



На графике видно, что с ростом величины затрачиваемого ресурса x объем выпуска y растет, однако при этом каждая дополнительная единица ресурса дает все меньше прирост объема y выпускаемой продукции. Отмеченное обстоятельство (рост объема y и уменьшение прироста объема y с ростом величины x) отражает фундаментальное положение экономической теории (хорошо подтверждаемое практикой), называемое законом убывающей эффективности. Производственная функция $y = a_1 x^{a_2}$ является типичным представителем широкого класса однофакторных производственных функций.

Производственная функция нескольких переменных - это функция , независимые переменные $x_1,\ldots,x_n$ которой принимают значения объемов затрачиваемых или используемых ресурсов (число переменных n равно числу ресурсов), а значение функции имеет смысл величин объемов выпуска:

$$y = f(x,a).$$

Подчеркнем еще раз, что в данной формуле величина y – скалярная, x и a – векторные величины т.е. $x = (x_1,\ldots,x_n)$ (под вектором понимается упорядоченный набор чисел). В связи с этим производственную функцию называют многоресурсной или многофакторной. По экономическому смыслу $x_1 \geq 0,\ldots,x_n \geq 0$, следовательно, областью определения многофакторной производственной функции $f(x) = (x_1,\ldots,x_n)$

является множество n-мерных векторов x, все координаты $x_1,\dots,x_n$ которых неотрицательные числа. Для отдельного предприятия, выпускающего однородный продукт, производственная функция $f(x)=(x_1,\dots,x_n)$ может связывать объем выпуска (в натуральном или стоимостном выражении) с затратами рабочего времени по различным видам трудовой деятельности, различных видов сырья, комплектующих изделий, энергии, основного капитала. Производственные функции такого типа характеризуют действующую технологию предприятия.

При построении производственной функции для региона или страны в целом в качестве величины годового выпуска Y (на макроуровне обозначают большой буквой) чаще берут совокупный продукт региона или страны, исчисляемый обычно в неизменных, а не в текущих ценах, в качестве ресурсов рассматривают основной капитал ($x_1(=K)$- объем используемого в течение года основного капитала) живой труд ($x_2(=L)$- количество единиц затрачиваемого в течении года живого труда), исчисляемые обычно в стоимостном выражении. Строят двухфакторную производственную функцию $f(x)=(x_1,x_2)$ или $Y=f(K,L)$. От двухфакторных производственных функций переходят к трехфакторным. В качестве третьего фактора иногда вводят объемы используемых природных ресурсов. Кроме того, если производственная функция строится по данным временных рядов, то в качестве особого фактора роста производства может быть включен технический прогресс.

Производственная функция $y=(x_1,x_2)$ называется *статической* если ее параметры и ее характеристика f не зависят от времени t, хотя объемы ресурсов и объемы выпуска могут зависеть от времени t, т.е. могут иметь представление в виде временных рядов: $x_1(0),x_1(1),\dots,x_1(T)$; $x_2(0),x_2(1),\dots,x_2(T)$; $y(0),y(1),\dots,y(T)$;
$y(t)=f(x_1(t),x_2(t))$. Здесь t – номер года, t=0,1,…,T. t=0 – базовый год временного промежутка, охватывающий годы 1,2,…,T.

Производственная функция $f(x_1,x_2)$ имеющая область определения $x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$ имеет следующие свойства.

1. Производство невозможно при отсутствии хотя бы одного ресурса, т.е. $f(0,x_2)$ = $f(x_1,0)$ =0

2. При увеличении затрат производственных ресурсов выпуск продукции растет. x(1) $x(1)>x(0)$ $f(x(1))>(fx(0))$, если функция дифференцирована, то можно записать $x>0 \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}>0\;(i=1,2),\quad x=(x_1,x_2)$ или первая частная производная $\left[\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right]$ положительна.

3. По мере увеличения количества одного ресурса при постоянных количествах других предельная эффективность использования этого ресурса не возрастает. Математически это требование для дважды дифференцируемых производственных

функций выглядит так. $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \le 0$. В нашем примере рассмотренном ранее это означает, что рост вооруженности средствами производства приводит к росту выпуска продукции, но темп роста выпуска продукции все время падает (закон убывающей эффективности).

4. Производственная функция характеризуется определенной отдачей от расширения масштабов производства. Отдача от расширения масштабов производства характеризует производственную функцию с точки зрения изменения выпуска продукции при пропорциональном изменении затрат ресурсов, которое математически выражается в умножении всех компонент вектора x на положительный скаляр t. Принято говорить, что скалярная функция является однородной функцией степени δ (дельта), если для любого вектора x и любого скаляра t она удовлетворяет условию $f(tx) = t^{\delta} f(x)$

Математически четвертое предположение состоит в требовании однородности производственной функции. Если $\delta > 1$, то говорят, что производственная функция характеризуется возрастающей отдачей от расширения масштабов производства; если $\delta = 1$ - постоянной отдачей (наиболее часто встречающийся случай), а при $\delta < 1$ - убывающей отдачей.

Пример

Возьмем производственную функцию $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$, $a_1 + a_2 = 1$. Для нее выполняются все четыре свойства.

1. при $x_1 = 0$ $y = a_0 0^{a_1} x_2^{a_2} = 0$ при $x_2 = 0$ $y = a_0 x_1^{a_1} 0^{a_2} = 0$

2. $a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} < a_0 (x_1 + 1)^{a_1} x_2^{a_2}$ или

$a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} < a_0 x_1^{a_1} (x_2 + 1)^{a_2}$

Первая частная производная положительна.

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = a_0 x_2^{a_2} a_1 x_1^{a_1 - 1} \ge 0$$

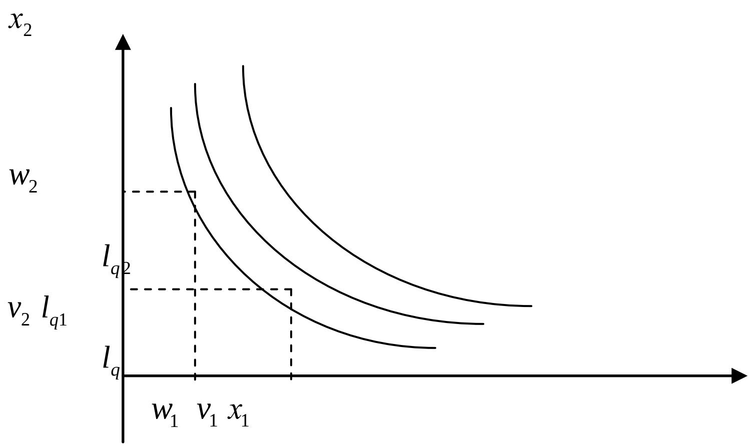
3. $y_{ч_1}^{Э} = a_0 x_2^{a_2} a_1 (a_1 - 1) x_1^{a_1 - 2} \le 0$ Вторая частная производная не положительна т.к. $a_0 \ge 0, \quad 0 \le a_1 \le 1$

4. $a_0 (tx_1)^{a_1} (tx_2)^{a_2} = t^{a_1 + a_2} (a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2})$.

Если рассмотреть линейную производственную функцию $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$ для нее свойства 1 и 4 не выполняются.

Возможность взаимного замещения ресурсов означает, что одно и то же количество продукта y может быть произведено при различных сочетаниях ресурсов. Совокупность таких сочетаний ресурсов, при которых может быть произведено определенное количество продукции q, называется изоквантой.

Различные наборы (v_1, v_2) и (w_1, w_2) затрачиваемых ресурсов, принадлежащие одной и той же изокванте l_q (т.е. $q = f(v_1, v_2) = f(w_1, w_2)$), дают один и тот же объем выпуска q.



Свойства изоквант:

1. Изокванты не пересекаются друг с другом.
2. Изокванта l_q разбивает пространства ресурсов на два множества, в одном из которых $q_0 < q$, в другом $q_1 > q$, причем граница между этими множествами проходит по изокванте l_q.
3. Большему выпуску продукции соответствует изокванта, более удаленная от начала координат.
4. Изоквнты не имеют общих точек с осями координат.

Средней производительностью I-го ресурса (фактора производства) или средним выпуском по i-му ресурсу (фактору производства) называют отношение значения функции к величине I-го ресурса. Символика:

$$A_i = \frac{f(x)}{x_i}, \text{ где } (i = 1,2) \quad \text{или} \quad f(x) = f(x_1, x_2)$$

Предельной (маржинальной) производительностью i-го ресурса (фактора производства) или предельным выпуском по i-му ресурсу (фактору производства) называют первую частную производную функции $f(x) = f(x_1, x_2)$. Символика $M_i = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ Предельная производительность показывает, на сколько единиц увеличивается объем выпуска у, если объем затрат x_i i-го ресурса вырастает на одну единицу при неизменных объемах другого затрачиваемого ресурса.

Найдем средние (A_1, A_2) и предельные (M_1, M_2)значение для производственной функции Кобба-Дугласа.

1. $A_1 = \frac{f(x)}{x_1} = a_0 x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2}$; $A_2 = \frac{f(x)}{x_2} = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2 - 1}$
2. $M_1 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = a_0 a_1 x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2} = a_1 A_1$; $M_2 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = a_2 A_2$;

$\frac{M_1}{A_1} = a_1 \le 1 \quad \Rightarrow M_1 \le A_1$ и $\frac{M_2}{A_2} = a_2 \le 1 \quad \Rightarrow M_2 \le A_2$ т.е. предельная производительность i-го ресурса не больше средней производительности этого ресурса. Это положение обычно выполняется и для других производственных функций.

2. Эластичность выпуска. Производственная функция Кобба-Дугласа

Отношение предельной производительности M_i i-го ресурса к его средней производительности A_i называется эластичностью выпуска по i-му ресурсу (по фактору производства). Символика:

$$E_i = \frac{M_i}{A_i} = \frac{x_i}{f(x)} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \ (i = 1{,}2).$$

Сумма $E_1 + E_2 = E_x$ называется эластичностью производства.

E_i показывает, на сколько процентов увеличится выпуск, если затраты i-го ресурса увеличатся на один процент при неизменных объемах другого ресурса..

Имеем : $E_1 = a_1$, $E_2 = a_2$, $E_x = E_1 + E_2 = a_1 + a_2$

Предельной нормой замены (замещения) i-го ресурса (фактора производства) j-м называется выражение:

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i} \ (i, j = 1{,}2)$$

при постоянной y. i – номер заменяемого ресурса, j - номер замещающего ресурса или

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}}$$

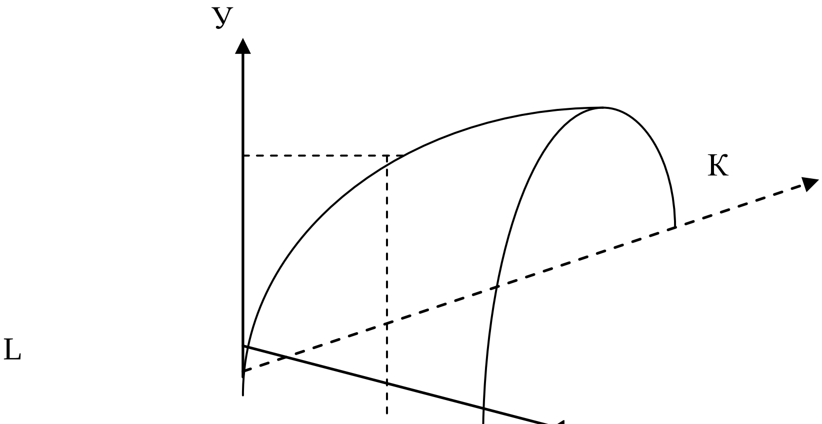
Для двухфакторной производственной функции справедливо равенство:

$R_{12} = \frac{E_1}{E_2} \frac{x_2}{x_1}$, т.е. придельная норма замены первого ресурса вторым равна отношению эластичностей выпуска по первому и второму ресурсам, умноженному на отношение объема второго ресурса к объему первого ресурса.

.Для моделирования отдельного региона или страны в целом (т.е. для решения задач на макроэкономическом, микроэкономическом уровне) часто используют производственную функцию вида $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$, где a_0, a_1, a_2 - параметры производственной функции. Это положительные постоянные числа (часто a_1 и a_2 таковы, что $a_1 + a_2 = 1$). Производственная функция данного вида называется производственная функция Кобба-Дугласа по имени двух американских экономистов, предложивших ее использовать в 1929 году. Производственная функция Кобба-Дугласа активно применяется для решения разнообразных теоретических и прикладных задач благодаря своей структурной простате. В данной модели $x_1 = K$ равно объему используемого основного капитала (объему используемых основных фондов – в отечественной терминологии), $x_2 = L$ - затратам живого труда, тогда производственная функция Кобба-Дугласа приобретает вид часто используемый в литературе:

$y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$ или если выполняется равенство $a_1 + a_2 = 1$, то $Y = bK^{\alpha}, L^{\alpha - 1}$

Графиком двухфакторной производственной функции будет являться поверхность в трехмерном пространстве.



При выполнении равенства $a_1 + a_2 = 1$ модель Кобба-Дугласа можно записать несколько в ином виде:

$$\frac{Y}{L} = \frac{a_0 K^{a_1} L^{a_2}}{L} = \frac{a_0 K^{a_1}}{L^{1-a_2}} = \frac{a_0 K^{a_1}}{L^{a_1}} = a_0 \left[\frac{K}{L}\right]^{a_1} \text{, т.е } \frac{Y}{L} = a_0 \left[\frac{K}{L}\right]^{a_1}$$

Дроби $\frac{Y}{L} = z$ и $\frac{K}{L} = k$ называются соответственно производительностью труда и капиталовооруженностью труда. Используя новые символы, получим $z = a_0 k^{a_1}$, т.е из двухфакторной производственной функции Кобба-Дугласа получим формально однофакторную производственную функцию Кобба-Дугласа. В связи с тем, что $0 < a_1 < 1$, из последней формулы следует, что производительность труда Z растет медленнее его капиталовооруженности. Однако этот вывод справедлив для случая статической производственной функции Кобба-Дугласа в рамках существующей технологии и ресурсов. Отметим, что дробь $\frac{Y}{K}$ называется производительностью капитала или капиталоотдачей, обратные дроби $\frac{K}{Y}$ и $\frac{L}{Y}$ называются соответственно капиталоемкостью и трудоемкостью выпуска.

Производственная функция называется динамической, если:

1) время Т фигурирует в качестве самостоятельной переменной величины (как бы самостоятельного фактора производства), влияющего на объем выпускаемой продукции;
2) параметры производственной функции и ее характеристикаF зависят от времени Т.

При построении производственной функции НТП может быть учтен с помощью введения множителя НТП e^{pt}, где параметр p(p>0) характеризует темп прироста под влиянием НТП:

$$y(t) = e^{pt} f(x_1(t), x_2 t) \text{ где } (t = 0,1,...,T).$$

Эта простейший пример динамической производственной функции; она включает нейтральный, то есть не материализованный в одном из факторов, технический прогресс. В более сложных случаеях технический прогресс может воздействовать непосредственно на производительность труда или капитала (капиталоотдачу): $Y(t) = f(A(t) \cdot L(t), K(t))$ или $Y(t) = f(A(t) \cdot K(t), L(t))$. Он называется, соответственно, трудосберегающим или капиталосберегающим НТП

Пример На основании данных по экономике СССР (динамики национального дохода, численности занятых в материальном производстве и объеме основных фондов), опубликованных за 1960-1985 гг., макроэкономической производственной функции Кобба-Дугласа без учета НТП и с учетом НТП. Без учета НТП функция имеет вид $Y = 1{,}022K^{0{,}5382}L^{0{,}4618}$, с учетом НТП $Y = 1{,}038e^{0{,}0294t}K^{0{,}9749}L^{0{,}2399}$.

Выделение существенных видов ресурсов (факторов производства) и выбор аналитической формы функции называется спецификацией.

Преобразование реальных и экспертных данных в модельную информацию, т.е.расчет численных значений параметров на базе статистических данных с помощью регрессионного и корреляционного анализа, называют параметризацией.

Проверка истинности (адекватности) функции называют ее верификацией.

1.12 Лекция №14 (2 часа)

Тема: «Задачи и модели оптимизации»

1.12.1 Вопросы лекции:

1. Основные понятия.
2. Максимизация прибыли в случае долговременного промежутка.
3. Максимизация прибыли в случае кратковременного промежутка.

1.12.2 Краткое содержание вопросов

1. Основные понятия.

Доходом (выручкой) фирмы в определенном периоде называется произведение общего объема выпускаемой фирмой продукции на рыночную цену этой продукции

$R = p_0 y$, где R – доход фирмы, p_0 - цена продукции, y – объем выпускаемой фирмой продукции ($y = f(x_1, x_2)$).

Издержками фирмы называют общие выплаты в определенном временном периоде за все виды затрат $C = p_1x_1 + p_2x_2$, где x_1 и x_2 - объемы используемых фирмой ресурсов (факторов производства), p_1 и p_2 - рыночные цены на эти ресурсы (факторы производства).

Прибылью фирмы называют разность между полученным фирмой доходом R и ее издержками производства

$PR = R - C$ или $PR(x_1, x_2) = p_0 f(x_1, x_2) - (p_1x_1 + p_2x_2)$.

В теории фирмы принято считать, что если фирма функционирует в условиях чистой (совершенной) конкуренции, на рыночные цены p_0, p_1 и p_2. она влиять не может. Фирма соглашается с ценами. Основная цель фирмы заключается в максимизации прибыли путем рационального распределения используемых ресурсов. Формально задача максимизации прибыли в определенном временном периоде имеет вид: PR→max. такая постановка задачи максимизации прибыли зависит от того, какой временной промежуток (долговременный или кратковременный) предшествует периоду, в котором фирма максимизирует свою прибыль.

В случае долговременного промежутка фирма может свободно выбирать любой вектор затрат $x=(x_1,x_2)$ из пространства затрат, поэтому задача максимизации прибыли в случае долговременного промежутка имеет следующий вид:

$$p_0 f(x_1,x_2)-(p_1x_1+p_2x_2)=PR(x_1,x_2)\to \max$$

при условии, что $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0$ (x_1 и x_2 - объемы используемых фирмой ресурсов).

в случае краткосрочного промежутка фирма должна учитывать неизбежные лимиты на объемы используемых ею ресурсов, которые формально могут быть записаны в виде нелинейного неравенства

$$g(x_1,x_2)\le b$$

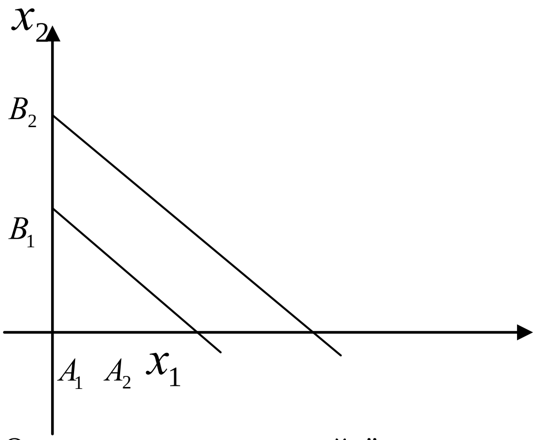
(ограничений вида $g(x_1,x_2)\le b$ моет быть несколько). Следовательно задача максимизации прибыли для краткосрочного промежутка имеет вид задачи математического программирования:

$$p_0 f(x_1,x_2)-(p_1x_1+p_2x_2)=PR(x_1,x_2)\to \max$$

при условии, что $g(x_1,x_2)\le b$

$x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0$.

Линия уровня функции издержек производства $z=p_1x_1+p_2x_2$ называется *изокостой*. В связи с тем, что по экономическому смыслу $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0$ изокоста есть отрезок прямой , попадающий в неотрицательный ортант плоскости Ox_1x_2.



Отрезок расположенный "северо-восточнее" соответствует большим издержкам производства.

Если для отрезка A_1B_1 издержки производства равны C_1, то его аналитическое представление имеет вид $C_1=p_1x_1+p_2x_2$, $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0$.

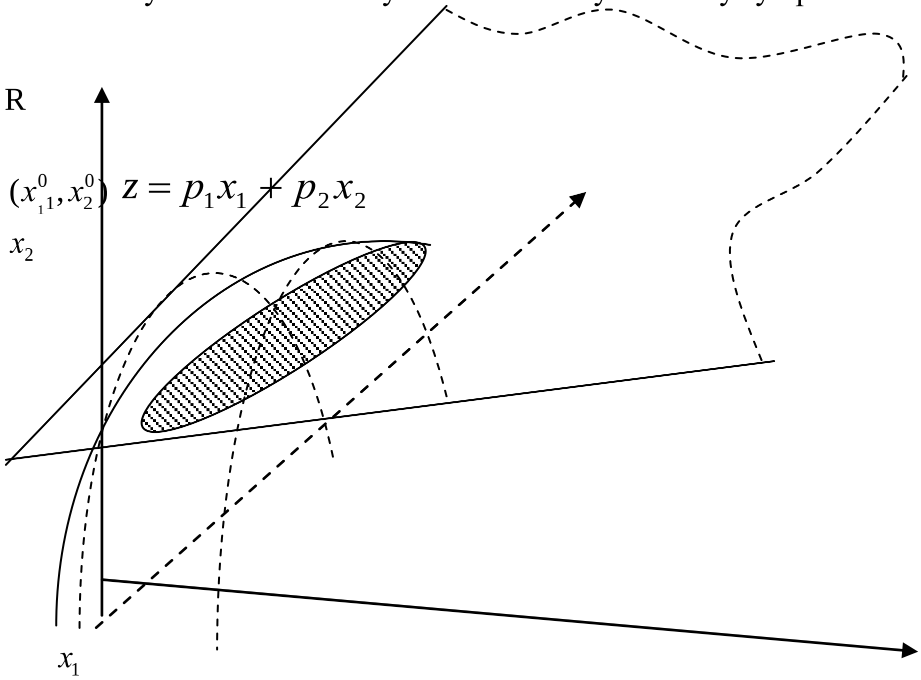
2. Максимизация прибыли в случае долговременного промежутка.

В связи с тем, что, как правило, $f(x_1,0)=f(0,x_2)=0$, экономически осмысленным является следующие утверждение $x_1>0,\quad x_2>0$. Поэтому в случае долговременного промежутка задача максимизации прибыли собой обычную задачу на глобальный абсолютный максимум при $x_1>0,\quad x_2>0$. Из математического анализа известно, что точки локального абсолютного максимума следует искать только среди точек (x_1,x_2), которые удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial PR(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial PR(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0. \end{cases} \text{ или } \quad \begin{cases} \dfrac{\partial (p_0 f(x_1, x_2) - (p_1 x_1 + p_2 x_2)}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial (p_0 f(x_1, x_2) - (p_1 x_1 + p_2 x_2)}{\partial x_1} = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} p_0 \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} - p_1 = 0, \\ p_0 \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} - p_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_0 \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = p_1, \\ p_0 \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = p_2. \end{cases}$$

Если выполняется условие, что вторые частные производные меньше 0, то графиком функции $y = f(x_1, x_2)$ в трехмерном пространстве есть поверхность, выпуклая вверх. Следовательно, график прибыли $PR(x_1, x_2) = p_0 f(x_1, x_2) - (p_1 x_1 + p_2 x_2)$, получаемой путем вычитания из графика функции $p_0 f(x_1, x_2)$ плоскости $z = p_1 x_1 + p_2 x_2$, являющейся графиком издержек производства, имеет вид "шапочки", у которой есть "макушка". "Макушка" соответствует глобальному максимуму прибыли.



Из этого геометрического факта следует, что система имеет единственное решение в точке (x_1^0, x_2^0), которое является точкой не только локального, но и глобального максимума прибыли. Точка (x_1^0, x_2^0) (где x_1^0, x_2^0- затраты ресурсов), которая является решением задачи максимизации прибыли, называется локальным (частичным) рыночным равновесием фирмы (в случае долговременного промежутка).

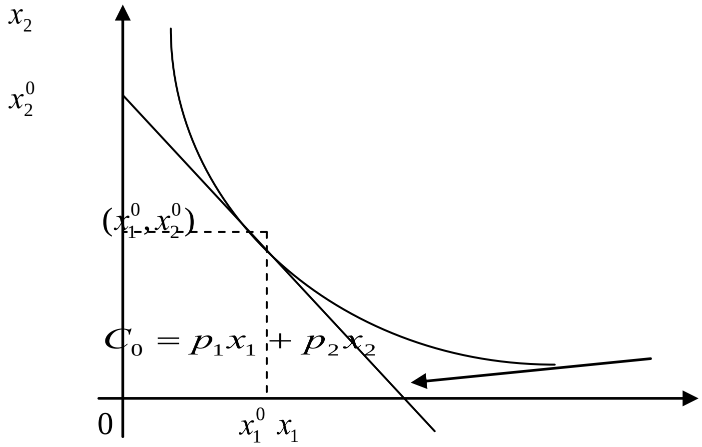
Подставив значения. (x_1^0, x_2^0) в уравнение, получим тождества:

$p_0 \dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} = p_1$, $\quad p_0 \dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} = p_2$, откуда путем почленного деления первого тождества на второе получаем:

$$\frac{\dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2},$$

т.е. в точке (x_1^0, x_2^0) локального рыночного равновесия фирмы отношение предельной производительности первого ресурса к предельной производительности второго ресурса равно отношению рыночных цен на эти ресурсы.

Проведем через точку (x_1^0, x_2^0) изокванту и изокосту, которые эту точку содержат. Уравнение изокванты имеет вид $y_0 = f(x_1^0, x_2^0)$, уравнение изокосты имеет вид $C_0 = p_1 x_1 + p_2 x_2$. Графически решение задачи максимизации прибыли (если рассмотреть плоскость) будет выглядеть так.



Получена важная геометрическая характеристика локального рыночного равновесия фирмы – касание в точке равновесия изокванты и изокосты.

Отметим, что, приступая к решению задачи максимизации прибыли мы не имели конкретных изокванты и изокосты, которые касаются друг друга в точке (x_1^0, x_2^0), так как не имели самой этой точки. Касающиеся друг друга изокванта и изокоста появляются после того, как аналитически найдено локальное рыночное равновесие (x_1^0, x_2^0) путем решения системы уравнений.

Левая ("четырехэтажная") дробь есть не что иное, как предельная норма замены первого ресурса вторым $R_{12}(x_1^0, x_2^0)$ в точке .

Само равенство выражает следующее фундаментальное положение теории фирмы: в точке локального рыночного равновесия (x_1^0, x_2^0) предельная норма замены первого ресурса вторым равна отношению рыночных цен на эти ресурсы.

Поскольку x_1^0, x_2^0 есть функции цен (p_0, p_1, p_2), т.е. $x_1^0 = d_1(p_0, p_1, p_2)$, $x_2^0 = d_2(p_0, p_1, p_2)$, то они называются функциями спроса на ресурсы. Их значения x_1^0, x_2^0 выражают оптимальнные выборы затрат ресурсов как функции цены как функции цены выпускаемой продукции и цен на ресурсы.

Подставив функции спроса на ресурсы в производственную функцию $y = f(x_1, x_2)$, получим выражение $y^0 = f(d_1(p_0, p_1, p_2), d_{21}(p_0, p_1, p_2)) = s(p_0, p_1, p_2)$, которое называется функцией предложения выпуска.

Функции спроса на ресурсы и функция предложения выпуска являются однородными нулевой степени по всем своим аргументам p_0, p_1, p_2, т.е.

$d_1(tp_0, tp_1, tp_2) = d_1(p_0, p_1, p_2)$,

$d_2(tp_0, tp_1, tp_2) = d_2(p_0, p_1, p_2)$,

$s(tp_0, tp_1, tp_2) = s(p_0, p_1, p_2)$, для любого $t > 0$. свойство однородности означает, что одновременное изменение всех цен p_0, p_1, p_2 в одно и тоже число раз t (изменение масштаба, но не структуры цен)не меняет x_1^0, x_2^0 и y_0.

3. Максимизация прибыли в случае кратковременного промежутка.

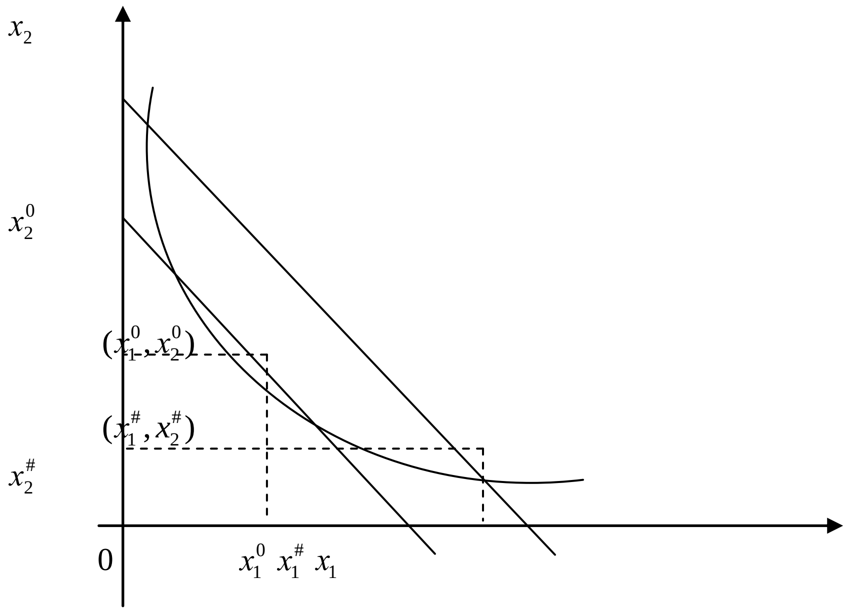
В случае краткосрочного промежутка рассмотрим конкретный пример, когда второй ресурс фирма может использовать только в объеме, равном $x_2^{\#} > 0$. Тогда задача максимизации прибыли превращается в задачу максимизации функции одной переменной:

$p_0 f(x_1, x_2^{\#}) - (p_1 x_1 + p_2 x_2^{\#}) = PR(x_1, x_2^{\#}) \to \max$,

и вместо системы уравнений появляется только одно уравнение

$$\frac{\partial PR(x_1, x_2^{\#})}{\partial x_1} = 0, \text{ или } p_0 \frac{\partial f(x_1, x_2^{\#})}{\partial x_1} = p_1.$$

Полученной уравнение имеет единственное решение $x_1 = x_1^{\#}$ ($x_1^{\#}$ зависит от $x_2^{\#}$, следовательно в случае краткосрочного промежутка локальное рыночное равновесие есть вектор $(x_1^{\#}, x_2^{\#})$. Геометрическое решение задачи будет иметь следующий вид:



Если бы объем второго ресурса не был лимитирован, то, локальным рыночным равновесием была бы точка касания (x_1^0, x_2^0), в которой тот же объем выпускаемой продукции (изокванта одна и та же) получился бы с меньшими издержками производства. Изокоста, содержащая точку $(x_1^{\#}, x_2^{\#})$, находится более "северо-западнее", аследовательнее соответствует большим издержкам производства. В точке $(x_1^{\#}, x_2^{\#})$ локального рыночного равновесия, содержащие ее изокванта и изокоста пересекаются, но не касаются . В рассматриваемом случае $x_1^{\#} = x_1^{\#}(x_2^{\#}, p_0, p_1, p_2)$, это и есть функция спроса на первый ресурс при фиксированном объеме $x_2^{\#}$ второго ресурса. Функция предложения имеет вид $y = f(x_1^{\#}(x_2^{\#}, p_0, p_1, p_2), x_2^{\#})$.

1.13 Лекция №15 (2 часа)

Тема: «Динамическое программирование»

1.13.1 Вопросы лекции:

1. Основные понятия динамического программирования
2. Принципы решения задач

1.13.2. Краткое содержание вопросов

1. Основные понятия динамического программирования

В задачах линейного и нелинейного программирования, рассмотренных в предыдущих главах, экономический процесс считался статическим, т.е. не зависящим от времени, поэтому оптимальное решение находилось только на один этап планирования. Такие задачи получили название *одноэтапных* или *одношаговых.*

В задачах динамического программирования экономический процесс зависит от времени (от нескольких периодов (этапов) времени), поэтому находится ряд оптимальных решений (последовательно для каждого этапа), обеспечивающих оптимальное развитие всего процесса в целом. Задачи динамического программирования называются *многоэтапными* или *многошаговыми.*

Динамическое программирование представляет собой математический аппарат (разработанный для решения некоторого класса задач математического программирования путем их разложения на относительно небольшие и, следовательно, менее сложные задачи), позволяющий осуществлять оптимальное планирование многошаговых управляемых процессов и процессов, зависящих от времени.

Экономический процесс называется *управляемым,* если можно влиять на ход его развития. *Управлением* называется совокупность решений, принимаемых на каждом этапе для влияния на ход процесса. В экономических процессах управление заключается в распределении и перераспределении средств на каждом этапе. Например, выпуск продукции любым предприятием – управляемый процесс, так как он определяется изменением состава оборудования, объемом поставок сырья, величиной финансирования и т.д. Совокупность решений, принимаемых в начале каждого года планируемого периода по обеспечению предприятия сырьем, замене оборудования, размерам финансирования и т.д., является управлением.

С одной стороны, для получения максимального объема выпускаемой продукции проще всего вложить максимально возможное количество средств и использовать на полную мощность оборудование. Но, с другой – это привело бы к быстрому изнашиванию оборудования и, как следствие, к уменьшению выпуска продукции. Следовательно, выпуск продукции надо спланировать так, чтобы избежать нежелательных эффектов. Необходимо предусмотреть мероприятия, обеспечивающие пополнение оборудования по мере изнашивания, т.е. по периодам времени. Последнее хотя и приводит к уменьшению первоначального объема выпускаемой продукции, но обеспечивает в дальнейшем возможность расширения производства.

Таким образом, экономический процесс выпуска продукции можно считать состоящим из нескольких *этапов* (*шагов*), на каждом из которых осуществляется влияние на его развитие.

Началом этапа (шага) управляемого процесса считается момент принятия решения (о величине капитальных вложений, о замене оборудования определенного вида и т.д.). Под этапом обычно понимают хозяйственный год.

Планируя многоэтапный процесс, исходят из интересов всего процесса в целом, т.е. при принятии решения на отдельном этапе всегда необходимо иметь в виду *конечную цель*.

Для большинства задач динамического программирования классические методы анализа или вариационного исчисления оказываются неэффективными, поскольку приводят первоначально поставленную задачу отыскания максимального значения функции к задаче, которая не проще, а сложнее исходной.

Динамическое программирование, используя *поэтапное планирование*, позволяет не только упростить решение задач, но и решить те из них, к которым нельзя применить методы математического анализа. Упрощение решения достигается за счет значительного уменьшения количества исследуемых вариантов, так как вместо того, чтобы один раз решать сложную многовариантную задачу, метод поэтапного планирования предполагает многократное решение относительно простых задач.

Однако динамическое программирование имеет и свои *недостатки*. В отличие от линейного программирования, в котором симплексный метод является универсальным, в динамическом программировании такого метода не существует. Каждая задача имеет свои трудности, и в каждом случае необходимо найти наиболее подходящую методику решения. Недостаток динамического программирования заключается также в трудоемкости решения многомерных задач.

2. Принципы решения задач

Пусть некоторая физическая управляемая система S находится в первоначальном состоянии $S_0 \in \tilde{S}_0$ (где $\tilde{S}_0$ – область начальных состояний). С течением времени ее состояние меняется и система приходит в конечное состояние $S_k \in \tilde{S}_k$ (где $\tilde{S}_k$ – область конечных состояний). С процессом изменения состояния системы связан некоторый численный критерий W. Необходимо так организовать процесс, чтобы критерий достиг оптимального значения.

Обозначим множество возможных управлений через U. Тогда задача состоит в том, чтобы из множества возможных управлений U найти такое управление U^*, которое позволит перевести систему S из начального состояния $S_0 \in \tilde{S}_0$ в конечное $S_k \in \tilde{S}_k$ так, что критерий $W(U)$ принимает оптимальное значение W^*.

Некоторые операции естественно распадаются на этапы, в других это деление приходится вводить искусственно. Примером «естественно многоэтапной» операции может служить планирование работы предприятия на некоторый период времени, состоящий из нескольких хозяйственных лет или кварталов.

Принцип динамического программирования предполагает, что управление на каждом шаге должно выбираться с учетом всех его последствий в будущем. Однако из этого правила есть исключение. Среди всех шагов существует один, который может планироваться «без оглядки на будущее» – это *последний шаг*. Спланировав оптимальным образом этот *последний шаг*, можно к нему «пристраивать» предпоследний, затем предыдущий и т. д.

Поэтому процесс динамического программирования разворачивается от конца к началу. Сначала делаются различные предположения о том, чем кончился предпоследний шаг, и для каждого из них выбирается управление на последнем. Затем делаются различные предположения о том, чем кончился предпредпоследний шаг, т.е. рассматриваются различные состояния системы на третьем от конца шаге и выбирается управление на втором от концы шаге так, чтобы оно вместе в уже выбранным управлением на последнем шаге обеспечивало наилучший эффект на двух последних шагах, и так далее, вплоть до первого от начала шага, с которого начинался процесс.

В начале процесса состояние системы нам известно, и делать какие-то предположения не нужно. Поэтому, имея в виду, что все последующие шаги спланированы для различных состояний системы, остается выбрать управление на первом шаге так, чтобы оно было оптимальным с учетом всех управлений, уже принятых наилучшим образом на всех последующих шагах.

Принцип, положенный в основу построения такого решения (искать всегда оптимальное продолжение процесса относительно того состояния, которое достигнуто в данный момент), принято называть *принципом оптимальности*.

1.14 Лекция №16 (2 часа)

Тема: «Сетевое планирование и управление»

1.14.1 Вопросы лекции:

1. Основные понятия сетевого планирования и управления.
2. Принципы решения задач.

1.14.2 Краткое содержание вопросов

1.Основные понятия сетевого планирования и управления.

Сетевое Планирование и Управление – это комплекс графических и расчетных методов, организационных мероприятий, обеспечивающих моделирование, анализ и динамическую перестройку плана выполнения сложных проектов и разработок, например, таких как: строительство и реконструкция каких-либо объектов; выполнение научно-исследовательских и конструкторских работ; подготовка производства к выпуску продукции; перевооружение армии; развертывание системы медицинских или профилактических мероприятий.

Характерной особенностью таких проектов является то, что они состоят из ряда отдельных, элементарных *работ*. Они обуславливают друг друга так, что выполнение некоторых работ не может быть начато раньше, чем завершены некоторые другие. Например, укладка фундамента не может быть начата раньше, чем будут доставлены необходимые материалы; эти материалы не могут быть доставлены раньше, чем будут построены подъездные пути; любой этап строительства не может быть начат без составления соответствующей технической документации и т.д.

Сетевое Планирование и Управление включает три основных этапа:

1. структурное планирование;
2. календарное планирование;
3. оперативное управление.

Структурное планирование начинается с разбиения проекта на четко определенные операции, для которых определяется продолжительность. Затем строится сетевой график, который представляет взаимосвязи работ проекта. Это позволяет детально анализировать все работы и вносить улучшения в структуру проекта еще до начала его реализации.

Календарное планирование предусматривает построение календарного графика, определяющего моменты начала и окончания каждой работы и другие временные характеристики сетевого графика. Это позволяет, в частности, выявлять критические операции, которым необходимо уделять особое внимание, чтобы закончить проект в директивный срок. Во время календарного планирования определяются временные характеристики всех работ с целью проведения в дальнейшем *оптимизации* сетевой модели, которая позволит улучшить эффективность использования какого-либо ресурса.

В ходе *оперативного управления* используются сетевой и календарный графики для составления периодических отчетов о ходе выполнения проекта. При этом сетевая модель может подвергаться оперативной корректировке, вследствие чего будет разрабатываться новый календарный план остальной части проекта.

Основными понятиями сетевых моделей являются понятия «*события»* и «*работы»*.

Работа – это некоторый процесс, приводящий к достижению определенного результата, требующий затрат каких-либо ресурсов и имеющий протяженность во времени. По своей физической природе работы можно рассматривать как:

- *действие*: разработка чертежа, изготовление детали, заливка фундамента бетоном, изучение конъюнктуры рынка;
- *процесс*: старение отливок, выдерживание вина;
- *ожидание*: ожидание поставки комплектующих.

По количеству затрачиваемого времени работа может быть:

- *действительной*, т.е. требующей затрат времени;
- *фиктивной*, т.е. формально не требующей затрат времени и представляющей связь между какими-либо работами, например: передача измененных чертежей от конструкторов к технологам; сдача отчета о технико-экономических показателях работы цеха вышестоящему подразделению.

Событие – это момент времени, когда завершаются одни работы и начинаются другие. Например, фундамент залит бетоном, комплектующие поставлены, отчеты сданы и т.д. Событиепредставляет собой результат проведенных работ и, в отличие от работ, не имеет протяженности во времени.

На этапе структурного планирования взаимосвязь работ и событий, необходимых для достижения конечной цели проекта, изображается с помощью *сетевого графика* (сетевой модели). На сетевом графике работы изображаются *стрелками*, которые соединяют *вершины*, изображающие события. Начало и окончание любой работы описываются парой событий, которые называются *начальным* и *конечным* событиями. Поэтому для идентификации конкретной работы используют код работы $(2,4)$, состоящий из номеров начального (i-го) и конечного (j-го) событий (см. рис.1.).

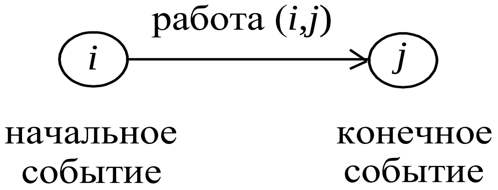


Рисунок 1– Кодирование работы

Любое событие может считаться наступившим только тогда, когда закончатся *все* входящие в него работы. Поэтому, работы, выходящие из некоторого события не могут начаться, пока не будут завершены *все* работы, входящие в это событие.

Событие, не имеющее предшествующих ему событий, т.е. с которого начинается проект, называют ***исходным***. Событие, которое не имеет последующих событий и отражает конечную цель проекта, называется ***завершающим***.

При построении сетевого графика необходимо следовать следующим правилам:

1) длина стрелки не зависит от времени выполнения работы;
2) стрелка может не быть прямолинейным отрезком;
3) для действительных работ используются сплошные, а для фиктивных - пунктирные стрелки;
4) каждая операция должна быть представлена только одной стрелкой;
5) между одними и теми же событиями не должно быть параллельных работ, т.е. работ с одинаковыми кодами;
6) следует избегать пересечения стрелок;
7) не должно быть стрелок, направленных справа налево;
8) номер начального события должен быть меньше номера конечного события;

9) не должно быть *висячих* событий (т.е. не имеющих предшествующих событий), кроме исходного;

10) не должно быть *тупиковых* событий (т.е. не имеющих последующих событий), кроме завершающего;

11) не должно быть циклов.

Важное значение для анализа сетевых моделей имеет понятие пути. ***Путь*** – это любая последовательность работ в сетевом графике (в частном случае это одна работа), в которой конечное событие одной работы совпадает с начальным событием следующей за ней работы. Различают следующие виды путей.

Полный путь – это путь от исходного события до завершающего. ***Критический путь*** – максимальный по продолжительности полный путь. Работы, лежащие на критическом пути, называют *критическими*.***Подкритический путь*** – полный путь, ближайший по длительности к критическому пути.

Построение сети является лишь первым шагом на пути к построению календарного плана. Вторым шагом является расчет сетевой модели, который выполняют прямо на сетевом графике, пользуясь простыми правилами.

2. Принципы решения задач.

К временным **параметрам событий** относятся:

- $T_p(i)$ – ранний срок наступления события i. Это время, которое необходимо для выполнения всех работ, предшествующих данному событию *i*. Оно равно наибольшей из продолжительности путей, предшествующих данному событию.
- $T_{.}(i)$ – поздний срок наступления события *i*. Это такое время наступления события *i*, превышение которого вызовет аналогичную задержку наступления завершающего события сети. Поздний срок наступления любого события i равен разности между продолжительностью критического пути и наибольшей из продолжительностей путей, следующих за событием *i*.
- $R(i)$ – резерв времени наступления события *i*. Это такой промежуток времени, на который может быть отсрочено наступление события *i* без нарушения сроков завершения проекта в целом. Начальные и конечные события критических работ имеют нулевые резервы событий.

Рассчитанные численные значения временных параметров записываются прямо в вершины сетевого графика (см. рис.2).

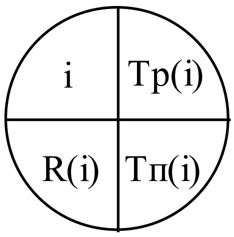


Рисунок 2 – Отображение временных параметров событий
в вершинах сетевого графика

Расчет ***ранних*** сроков свершения событий $T_p(i)$ ведется *от исходного (И) к завершающему* (*З*) событию.

Примечание. Поскольку длительность работы может быть как нормальной $T_{.}$, так и ускоренной $T_{\_}$ (см. п. 3), то для общности изложения будем в дальнейшем обозначать текущую длительность работы буквой t с соответствующим кодом работы, например, $t(i, j)$, $t(k, j)$ и т.д.

1. Для исходного события И $T_р(И) = 0$.

2. Для всех остальных событий i $T_р(i) = \max[T_р(k) + t(k,i)]$, где максимум берется по всем работам (k,i), входящим в событие i.

Иными словами, ранний срок наступления событий – это максимальная суммарная длина пути от исходного события до данного события.

Поздние сроки свершения событий $T_п(i)$ рассчитываются *от завершающего к исходному* событию.

3. Для завершающего события З $T_п(З) = T_р(З)$.

4. Для всех остальных событий $T_п(i) = \min[T_п(j) - t(i,j)]$, где минимум берется по всем работам (i,j), выходящим из события i.

5. $R(i) = T_п(i) - T_р(i)$.

Иными словами, поздний срок наступления событий есть разность между продолжительностью критического пути и максимальной продолжительностью работ, лежащих на пути от данного события до завершающего

К наиболее важным временным **параметрам работ** относятся:

- $T_{рн}(i,j)$ - ранний срок начала работы;
- $T_{пн}(i,j)$ - поздний срок начала работы;
- $T_{ро}(i,j)$ - ранний срок окончания работы;
- $T_{по}(i,j)$ - поздний срок окончания работы;

Для критических работ $T_{рн}(i,j) = T_{пн}(i,j)$ и $T_{ро}(i,j) = T_{по}(i,j)$.

- $R_п(i,j)$ - полный резерв работы показывает максимальное время, на которое может быть увеличена продолжительность работы (i,j) или отсрочено ее начало, чтобы продолжительность проходящего через нее максимального пути не превысила продолжительности критического пути. Важнейшее свойство полного резерва работы (i,j) заключается в том, что его частичное или полное использование уменьшает полный резерв у работ, лежащих с работой (i,j) на одном пути. Таким образом, полный резерв принадлежит не одной данной работе (i,j), а всем работам, лежащим на путях, проходящим через эту работу.

- $R_с(i,j)$ – свободный резерв работы показывает максимальное время, на которое можно увеличить продолжительность работы (i,j) или отсрочить ее начало, не меняя ранних сроков начала последующих работ. Использование свободного резерва одной из работ не меняет величины свободных резервов остальных работ сети.

Временные параметры работ сети определяются на основе ранних и поздних сроков событий.

1) $T_{рн}(i,j) = T_р(i)$;

2) $T_{ро}(i,j) = T_р(i) + t(i,j)$ или $T_{ро}(i,j) = T_{рн}(i,j) + t(i,j)$;

3) $T_{по}(i,j) = T_п(j)$;

4) $T_{пн}(i,j) = T_п(j) - t(i,j)$ или $T_{пн}(i,j) = T_{по}(i,j) - t(i,j)$;

5) $R_п(i,j) = T_п(j) - T_р(i) - t(i,j)$;

6) $R_с(i,j) = T_р(j) - T_р(i) - t(i,j)$.

Временные параметры работ вносятся в таблицу. При этом коды работ записывают в определенном порядке: сначала записываются все работы, выходящие из исходного, т.е. первого, события, затем - выходящие из второго события, потом - из третьего и т.д.

Резервами времени, кроме работ и событий, обладают полные пути сетевой модели. Разность между продолжительность критического пути $T(L_{кр})$ и продолжительностью любого другого полного пути $T(L_п)$ называется полным резервом времени пути $L_п$, т.е. $R(L_п) = T(L_{кр}) - T(L_п)$. Этот резерв показывает, на сколько в сумме может быть увеличена продолжительность всех работ данного пути L, чтобы при этом не изменился общий срок окончания всех работ.

Методика оптимизации загрузки сетевых моделей по критерию "минимум исполнителей".

При оптимизации использования ресурса рабочей силы чаще всего сетевые работы стремятся организовать таким образом, чтобы:

- количество одновременно занятых исполнителей было минимальным;
- выровнять потребность в людских ресурсах на протяжении срока выполнения проекта.

Суть оптимизации загрузки сетевых моделей по критерию "минимум исполнителей" заключается в следующем: необходимо таким образом организовать выполнения сетевых работ, чтобы количество одновременно работающих исполнителей было минимальным. Для проведения подобных видов оптимизации необходимо построить и проанализировать *график привязки* и *график загрузки*.

График привязки отображает взаимосвязь выполняемых работ во времени и строится на основе данных либо о продолжительности работ (в данной лабораторной это $T_Н$), либо о ранних сроках начала и окончания работ. При первом способе построения необходимо помнить, что выполнение работы (i, j) может начаться только после того, как будут выполнены все предшествующие ей работы (k, j). ***По вертикальной оси графика привязки*** откладываются ***коды работ***, ***по горизонтальной оси - длительность работ*** (раннее начало и раннее окончание работ).

На *графике загрузки**по горизонтальной оси откладывается время***, например в днях, ***по вертикальной - количество человек***, занятых работой в каждый конкретный день. Для построения графика загрузки необходимо:

- на графике привязки над каждой работой написать количество ее исполнителей;
- подсчитать количество работающих в каждый день исполнителей и отложить на графике загрузки.

Для удобства построения и анализа графики загрузки и привязки следует располагать один над другим.

Описанные виды оптимизации загрузки выполняются за счет сдвига во времени некритических работ, т.е. работ, имеющих полный и/или свободный резервы времени. Полный и свободный резервы любой работы можно определить без специальных расчетов, анализируя только график привязки. Сдвиг работы означает, что она будет выполняться уже в *другие дни* (т.е. изменится время ее начала и окончания), что в свою очередь приведет к изменению количества исполнителей, работающих одновременно (т.е. уровня ежедневной загрузки сети).

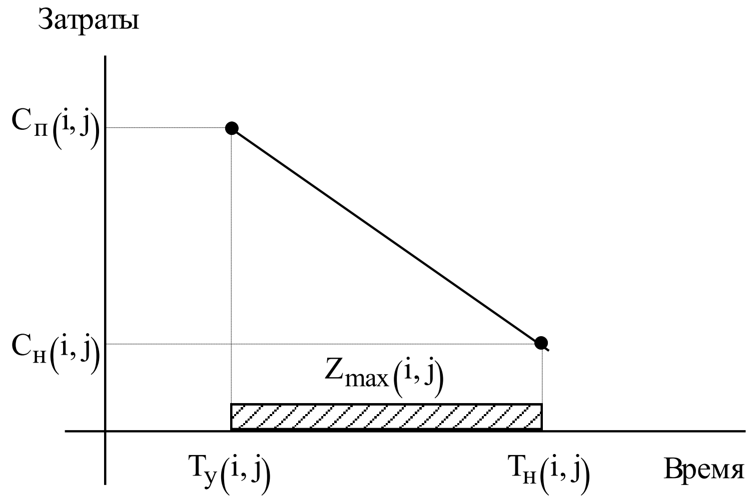
Методика оптимизации сетевых моделей по критерию "время-затраты"

Целью оптимизации по критерию "Время - затраты" является сокращение времени выполнения проекта в целом. Эта оптимизация имеет смысл только в том случае, когда время выполнения работ может быть уменьшено за счет подключения дополнительных ресурсов, что приводит к повышению затрат на выполнение работ (см. рис.3). Для оценки величины дополнительных затрат, связанных с ускорением выполнения той или иной работы, используются либо нормативы, либо данные о выполнении аналогичных работ в прошлом. Под параметрами работ $C_{Н}$ (i, j) и $C_{П}$ (i, j) понимаются так называемые *прямые* затраты, непосредственно связанные с выполнением конкретной работы.

$C_{Н}$ (i, j) – прямые затраты при нормальном течении событий;

$C_{П}$ (i, j) – прямые затраты при сокращении времени совершения событий до уровня подкритического.

Таким образом, *косвенные* затраты типа административно-управленческих в процессе сокращения длительности проекта во внимание не принимаются, однако их влияние учитывается при выборе окончательного календарного плана проекта.



где $T_{У}$(i, j) – ускоренное время выполнения события,

$T_{н}$(i, j) – нормальное время выполнения события.

Рисунок 3 - Зависимость прямых затрат на работу от времени ее выполнения

Важными параметрами работы (i, j) при проведении данного вида оптимизации являются:

- *коэффициент нарастания затрат*

$$k(i,j) = \frac{C_{П}(i,j) - C_{Н}(i,j)}{T_{Н}(i,j) - T_{У}(i,j)},$$

который показывает затраты денежных средств, необходимые для сокращения длительности работы (i,j) на один день;

- *запас времени* для сокращения длительности работы в текущий момент времени

$$Z_{Т}(i,j) = t_{Т}(i,j) - T_{У}(i,j),$$

где $t_{Т}(i,j)$ - длительность работы (i,j) на текущий момент времени.

Максимально возможное значение запаса времени работы равно

$$Z_{max}(i,j) = T_{Н}(i,j) - T_{У}(i,j).$$

Эта ситуация имеет место, когда длительность работы (i, j) еще ни разу не сокращали, т.е. $t_{Т}(i,j) = T_{Н}(i,j)$.

Общая схема проведения оптимизации "время - затраты"

1. Исходя из нормальных длительностей работ $T_н(i, j)$, определяются критические $L_{кр}$ и подкритические $L_п$ пути сетевой модели и их длительности $T_{кр}$ и $T_п$.

2. Определяется сумма прямых затрат на выполнение всего проекта $C^0_{пр}$ при нормальной продолжительности работ.

3. Рассматривается возможность сокращения продолжительности проекта, для чего анализируются параметры критических работ проекта.

3.1. Для сокращения выбирается критическая работа с min коэффициентом нарастания затрат $k(i, j)$, имеющая ненулевой запас времени сокращения $Z_т(i, j)$.

3.2. Время $\Delta t(i, j)$, на которое необходимо сжать длительность работы (i, j), определяется как

$$\Delta t(i, j) = \min[Z_{т}(i, j), \Delta T],$$

где $\Delta T = T_{кр} - T_п$ – разность между длительностью критического и подкритического путей в сетевой модели.

Необходимость учета параметра ΔT вызвана нецелесообразностью сокращения критического пути более чем на ΔT единиц времени. В этом случае критический путь перестанет быть таковым, а подкритический путь наоборот станет критическим, т.е. длительность проекта в целом принципиально не может быть сокращена больше, чем на ΔT.

4. В результате сжатия критической работы временные параметры сетевой модели изменяются, что может привести к появлению других критических и подкритических путей. Вследствие удорожания ускоренной работы общая стоимость проекта увеличивается на величину

$$\Delta C_{пр} = k(i, j)\Delta t(i, j).$$

5. Для измененной сетевой модели определяются новые критические и подкритические пути и их длительности, после чего необходимо продолжить оптимизацию с шага 3. При наличии ограничения в денежных средствах, их исчерпание является причиной окончания оптимизации. Если не учитывать подобное ограничение, то оптимизацию можно продолжать до тех пор, пока у работ, которые могли бы быть выбраны для сокращения, не будет исчерпан запас времени сокращения.

1.15 Лекция №17 (2 часа)

Тема: «Элементы теории игр в задачах моделирования экономических процессов»

1.15.1 Вопросы лекции:

1. Основные понятия теории игр.
2. Принципы решения задач

1.15.2 Краткое содержание вопросов

1.Основные понятия теории игр

В последние годы значение теории игр существенно возросло во многих областях экономических и социальных наук. В экономике она применима не только для решения общехозяйственных задач, но и для анализа стратегических проблем предприятий, разработок организационных структур и систем стимулирования.

В 1944 г. Нейман в соавторстве с экономистом Принстонского университета Оскаром Моргенштерном опубликовал ныне широко известную работу "Теория игр и экономическое поведение". Данную публикацию считают моментом зарождения теории игр. Новый подход был чисто математическим. Многие предсказали революцию в экономических науках благодаря его использованию. Эти прогнозы нельзя было считать излишне смелыми, так как с самого начала данная теория претендовала на описание рационального поведения при принятии решений во взаимосвязанных ситуациях, что характерно для большинства актуальных проблем в экономических и социальных науках. Такие тематические области, как стратегическое поведение, конкуренция, кооперация, риск и неопределенность, являются ключевыми в теории игр и непосредственно связаны с управленческими задачами.

Чтобы описать игру, необходимо сначала выявить ее участников. Это условие легко выполнимо, когда речь идет об обычных играх типа шахмат, канасты и т.п. Иначе обстоит дело с “рыночными играми”. Здесь не всегда просто распознать всех игроков, т.е. действующих или потенциальных конкурентов. Практика показывает, что не обязательно идентифицировать всех игроков, надо обнаружить наиболее важных.

Игры охватывают, как правило, несколько периодов, в течение которых игроки предпринимают последовательные или одновременные действия. Эти действия обозначаются термином “ход”. Действия могут быть связаны с ценами, объемами продаж, затратами на научные исследования и разработки и т.д. Периоды, в течение которых игроки делают свои ходы, называются этапами игры. Выбранные на каждом этапе ходы в конечном счете определяют “платежи” (выигрыш или убыток) каждого игрока, которые могут выражаться в материальных ценностях или деньгах (преимущественно дисконтированная прибыль).

Еще одним основным понятием данной теории является стратегия игрока. Под ней понимаются возможные действия, позволяющие игроку на каждом этапе игры выбирать из определенного количества альтернативных вариантов такой ход, который представляется ему “лучшим ответом” на действия других игроков. Относительно концепции стратегии следует заметить, что игрок определяет свои действия не только для этапов, которых фактически достигла конкретная игра, но и для всех ситуаций, включая и те, которые могут и не возникнуть в ходе данной игры.

Важна и форма предоставления игры. Обычно выделяют нормальную, или матричную, форму и развернутую, заданную в виде дерева. Эти формы для простой игры представлены на рис. 1а и 1б.

Чтобы установить первую связь со сферой управления, игру можно описать следующим образом. Два предприятия, производящие однородную продукцию, стоят перед выбором. В одном случае они

2 / 1	Низкая цена	Высокая цена
Низкая цена	$П_w$ / $П_w$	$П_G$ / $П_M$
Высокая цена	$П_M$ / $П_G$	$П_K$ / $П_K$

Рис. 1а. Нормальная форма игры

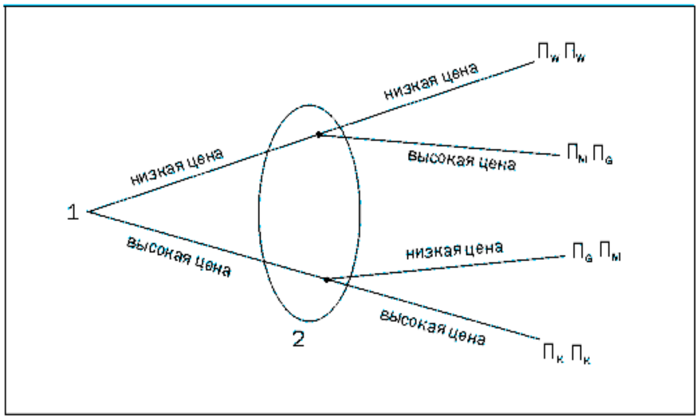


Рис. 1б. Развернутая форма игры

могут закрепиться на рынке благодаря установлению высокой цены, которая обеспечит им среднюю картельную прибыль $П_K$. При вступлении в жесткую конкурентную борьбу оба получают прибыль $П_W$. Если один из конкурентов устанавливает высокую цену, а второй – низкую, то последний реализует монопольную прибыль $П_M$, другой же несет убытки $П_G$. Подобная ситуация может, например, возникнуть когда обе фирмы должны объявить свою цену, которая впоследствии не может быть пересмотрена.

При отсутствии жестких условий обоим предприятиям выгодно назначить низкую цену. Стратегия "низкой цены" является доминирующей для любой фирмы: вне зависимости от того, какую цену выбирает конкурирующая фирма, самой всегда предпочтительней устанавливать низкую цену. Но в таком случае перед фирмами возникает дилемма, так как прибыль $П_K$(которая для обоих игроков выше, чем прибыль $П_W$) не достигается.

Стратегическая комбинация "низкие цены/низкие цены" с соответствующими платежами представляет собой равновесие Нэша, при котором ни одному из игроков невыгодно сепаратно отходить от выбранной стратегии. Подобная концепция равновесия является принципиальной при разрешении стратегических ситуаций, но при определенных обстоятельствах она все же требует усовершенствования.

Что касается указанной выше дилеммы, то ее разрешение зависит, в частности, от оригинальности ходов игроков. Если предприятие имеет возможность пересмотреть свои стратегические переменные (в данном случае цену), то может быть найдено кооперативное решение проблемы даже без жесткого договора между игроками. Интуиция подсказывает, что при многократных контактах игроков появляются возможности добиться приемлемой "компенсации". Так, при известных обстоятельствах нецелесообразно стремиться к краткосрочным высоким прибылям путем ценового демпинга, если в дальнейшем может возникнуть "война цен".

Как отмечалось, оба рисунка характеризуют одну и ту же игру. Предоставление игры в нормальной форме в обычном случае отражает "синхронность". Однако это не означает "одновременность" событий, а указывает на то, что выбор стратегии игроком осуществляется в условиях неведения о выборе стратегии соперником. При развернутой форме такая ситуация выражается через овальное пространство (информационное поле). При отсутствии этого пространства игровая ситуация приобретает иной характер: сначала решение должен бы принимать один игрок, а другой мог бы делать это вслед за ним.

Классификацию игр можно проводить: по количеству игроков, количеству стратегий, характеру взаимодействия игроков, характеру выигрыша, количеству ходов, состоянию информации и т.д.

В зависимости от количества игроков различают игры двух и n игроков. Первые из них наиболее изучены. Игры трёх и более игроков менее исследованы из-за возникающих принципиальных трудностей и технических возможностей получения решения. Чем больше игроков - тем больше проблем.

По количеству стратегий игры делятся на конечные и бесконечные. Если в игре все игроки имеют конечное число возможных стратегий, то она называется конечной. Если же хотя бы один из игроков имеет бесконечное количество возможных стратегий, игра называется бесконечной.

По характеру взаимодействия игры делятся на:

1) бескоалиционные: игроки не имеют права вступать в соглашения, образовывать коалиции;

2) коалиционные (кооперативные) – игроки могут вступать в коалиции.

В кооперативных играх коалиции определены заранее.

По характеру выигрышей игры делятся на: игры с нулевой суммой («антагонистические», общий капитал всех игроков не меняется, а перераспределяется между игроками; сумма выигрышей всех игроков равна нулю) и игры с ненулевой суммой.

По виду функций выигрыша игры делятся на: матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые, сепарабельные, типа дуэлей и др.

Матричная игра – это конечная игра двух игроков с нулевой суммой, в которой задаётся выигрыш игрока 1 в виде матрицы (строка матрицы соответствует номеру применяемой стратегии игрока 1, столбец – номеру применяемой стратегии игрока 2; на пересечении строки и столбца матрицы находится выигрыш игрока 1, соответствующий применяемым стратегиям).

Для матричных игр доказано, что любая из них имеет решение и оно может быть легко найдено путём сведения игры к задаче линейного программирования.

Биматричная игра – это конечная игра двух игроков с ненулевой суммой, в которой выигрыши каждого игрока задаются матрицами отдельно для соответствующего игрока (в каждой матрице строка соответствует стратегии игрока 1, столбец – стратегии игрока 2, на пересечении строки и столбца в первой матрице находится выигрыш игрока 1, во второй матрице – выигрыш игрока 2.)

Для биматричных игр также разработана теория оптимального поведения игроков, однако решать такие игры сложнее, чем обычные матричные.

Непрерывной считается игра, в которой функция выигрышей каждого игрока является непрерывной в зависимости от стратегий. Доказано, что игры этого класса имеют решения, однако не разработано практически приемлемых методов их нахождения.

Если функция выигрышей является выпуклой, то такая игра называется выпуклой. Для них разработаны приемлемые методы решения, состоящие в отыскании чистой оптимальной стратегии (определённого числа) для одного игрока и вероятностей применения чистых оптимальных стратегий другого игрока. Такая задача решается сравнительно легко.

2. Принципы решения зазач.

Оптимальные стратегии легко находятся для небольших игр, но вычисления становятся достаточно сложными с ростом числа стратегий. Для поиска оптимальных стратегий используется несколько приемов.

Первый прием состоит в уменьшении размерности игры за счет определения доминирующих строк и столбцов в платежной матрице. Доминирующим столбцом (строкой) называется столбец, в котором все выигрыши не меньше выигрышей в некотором другом столбце.

Обозначим через $G(X,Y,A)$ игру двух лиц с нулевой суммой, в которой игрок 1 выбирает стратегию $x \in X$, игрок 2 –$y \in Y$, после чего игрок 1 получает выигрыш $A = A\ (x, y)$ за счёт игрока 2.

Определение. Стратегия x^1 игрока 1 *доминирует* (*строго доминирует*) над стратегией x^2, если

$$A\ (x^1, y) \geq A\ (x^2, y)(A\ (x^1, y) > A\ (x^2, y)),\ y \in Y.$$

Стратегия y^1 игрока 2 *доминирует* (*строго доминирует*) над стратегией y^2, если

$$A\ (x, y^1) \leq A\ (x, y^2)(A\ (x, y^1) < A\ (x, y^2)),\ x \in X.$$

При этом стратегии x^2и y^2 называются *доминируемыми* (*строго доминируемыми*).

Доминируемый столбец может быть заведомо удален из дальнейшего рассмотрения.

Второй подход состоит также в упрощении матрицы выигрышей за счет того, что аффинное преобразование матрицы платежей (т.е. преобразование всех элементов платежной матрицы по правилу $W^*=aW+b$, $a\neq 0$) не изменяет решения игры. Это свойство используется для упрощения и придания наглядности матрице выигрышей (платежей).

Спектром смешанной стратегии игрока в конечной антагонистической игре называется множество всех его чистых стратегий, вероятность которых согласно этой стратегии положительна.

<u>*Свойство 1*</u>. Если чистая стратегия одного из игроков содержится в спектре некоторой его оптимальной стратегии, то выигрыш этого игрока в ситуации, образованной данной чистой стратегией и любой оптимальной стратегией другого игрока, равен значению конечной антагонистической игры.

<u>*Свойство 2*</u>. Ни одна строго доминируемая чистая стратегия игрока не содержится в спектре его оптимальной стратегии (данное свойство вытекает из определения доминируемых стратегий).

Приведем определение подматрицы: Игра $G' = (X', Y', A')$ называется подыгрой игры $G(X,Y,A)$, если $X' \subset X$, $Y' \subset Y$, а матрица A' является <u>подматрицей</u> матрицы A. Матрица A' при этом строится следующим образом. В матрице A остаются доминирующие строки и столбцы, соответствующие стратегиям X' и Y', а остальные “вычеркиваются”. Всё то что “останется” после этого в матрице A и будет матрицей A'. Подматрицы используются для упрощения игры.

<u>*Свойство 3*</u>. Пусть $G = (X,Y,A)$ – конечная антагонистическая игра, $G' = (X \setminus x', Y, A)$ – подыгра игры G, а x'– чистая стратегия игрока 1 в игре G, доминируемая некоторой стратегией $\bar{x}$, спектр которой не содержит x'. Тогда всякое решение (x^o, y^o, υ) игры G' является решением игры G.

<u>*Свойство 4*</u>. Пусть $G = (X,Y,A)$ – конечная антагонистическая игра, $G' = (X, Y \setminus y', A)$ – подыгра игры G, а y'– чистая стратегия игрока 2 в игре G, доминируемая некоторой стратегией $\bar{y}$, спектр которой не содержит y'.Тогда всякое решение игры G'является решением G.

<u>*Свойство 5*</u>. Если для чистой стратегии x' игрока 1 выполнены условия свойства 3, а для чистой стратегии y' игрока 2 выполнены условия свойства 4, то всякое решение игры $G' = (X \setminus x', Y \setminus y', A)$ является решением игры $G = (X,Y,A)$. (Иными словами, решение подматрицы игры является решением матрицы данной игры).

<u>*Свойство 6*</u>. Тройка (x^o, y^o, υ) является решением игры $G = (X,Y,A)$ тогда и только тогда, когда $(x^o, y^o, \kappa\upsilon + a)$ является решением игры $G(X,Y,\kappa A + a)$, где a– любое вещественное число, $\kappa > 0$. (Аффинное преобразование не влияет на результат истинного решения матричной игры)

<u>*Свойство 7*</u>. Для того, чтобы $x^o = (x_1^o, ..., x_i^o, ..., x_m^o)$ была <u>*оптимальной смешаннойстратегией*</u> матричной игры с матрицей A и ценой игры υ, необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^o \geq \upsilon \qquad (j = \overline{1,n}) \qquad \underline{\underline{(*)}}$$

Аналогично для игрока 2 : чтобы $y^o = (y_1^o, ..., y_j^o, ..., y_n^o)$ была оптимальной смешанной стратегией игрока 2 необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^o \leq \upsilon \qquad (i = \overline{1,m}) \qquad \underline{\underline{(**)}}$$

Из последнего свойства вытекает: чтобы установить, является ли предполагаемые (x, y) и υ решением матричной игры, достаточно проверить, удовлетворяют ли они неравенствам (*) и (**). С другой стороны, найдя неотрицательные решения неравенств (*) и (**) совместно со следующими уравнениями

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \ \underline{\underline{(***)}}$$

получим решение матричной игры.

Таким образом, решение матричной игры сводится к нахождению неотрицательных параметров решений линейных неравенств (*) (**) и линейных уравнений (***). Однако это требует большого объёма вычислений, которое растёт с увеличением числа чистых стратегий игроков. (Например для матрицы 3×3 имеем систему из 6 неравенств и 2 уравнений). Поэтому в первую очередь следует, по возможности используя свойства 2 и 3, уменьшить число чистых стратегий игроков. Затем следует во всех случаях проверить выполнение неравенства

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} .$$

Если оно выполняется, то игроки имеют чистые оптимальные стратегии (игрок 1 – чистую максиминная, а игрок 2 – чистую минимаксная). В противном случае хотя бы у одного игрока оптимальные стратегии будут смешанные. Для матричных игр небольшого размера эти решения можно найти, применяя свойства 1 – 5.

Замечание. Отметим, что исключение доминируемых (*не* строго) стратегий может привести к потере некоторых решений. Если же исключаются только строго доминируемые стратегии, то множество решений игры не изменится.

1.16 Лекция №18 (2 часа)

Тема: «Моделирование систем массового обслуживания»

1.16.1 Вопросы лекции:

1. Основные понятия моделирования систем массового обслуживания.
2. Принципы решения задач.

1.16.2 Краткое содержание вопросов

1. Основные понятия моделирования систем массового обслуживания.

Многие экономические задачи связаны с *системами массового обслуживания* (СМО), т.е. такими системами, в которых, с одной стороны, возникают массовые запросы (требования) на выполнение каких-либо услуг, с другой — происходит удовлетворение этих запросов.

СМО включает в себя следующие элементы: *источник требований, **входящий поток требований**, **очередь**, **обслуживающие устройства** (каналы обслуживания), выходящий поток требований*. Методами теории массового обслуживания могут быть решены многие задачи исследования процессов, происходящих в экономике. Так, в организации торговли эти методы позволяют определить оптимальное количество торговых точек данного профиля, численность продавцов, частоту завоза товаров и другие параметры.

Основным признаком систем массового обслуживания является наличие некоторой ***обслуживающей системы***, которая предназначена для осуществления действий согласно требованиям поступающих в **систему *заявок***. Заявки поступают в систему случайным образом. Поскольку обслуживающая система, как правило, имеет ограниченную пропускную способность, а заявки поступают нерегулярно, то периодически создается очередь заявок в ожидании обслуживания, а иногда обслуживающая система простаивает в ожидании заявок. И то и другое в экономических системах влечет непроизводительные издержки (потери), поэтому при проектировании систем массового обслуживания возникает задача нахождения рациональной пропускной способности системы, при которой достигается приемлемый компромисс между издержками от простоя в ожидании выполнения заявки и простоя системы от недогрузки. Впервые задачи такого типа были решены в работах А. К. Эрланга в начале прошлого века и легли в основу “Теории массового обслуживания”, которая успешно развивается в настоящее время.

Таким образом, система массового обслуживания состоит из следующих основных элементов: 1) ***блока обслуживания, 2) потока заявок* и *3) очереди***в ожидании обслуживания.

Системы массового обслуживания могут быть классифицированы по ряду признаков.

1. В зависимости от условий ожидания начала обслуживания различают:

•**СМО с *потерями* (отказами),**

•**СМО с** ***ожиданием***.

В СМО с потерями (отказами) требования, поступающие в момент, когда все каналы обслуживания заняты, получают отказ и теряются. Классическим примером системы с отказами является телефонная станция. Если вызываемый абонент занят, то требование на соединение с ним получает отказ и теряется.

В СМО с ожиданием требование, застав все обслуживающие каналы занятыми, становится в очередь и ожидает, пока не освободится один из обслуживающих каналов.

СМО, допускающие очередь, но с ограниченным числом требований в ней, называются ***системами с ограниченной длиной очереди***.

СМО, допускающие очередь, но с ограниченным сроком пребывания каждого требования в ней, называются ***системами с ограниченным временем ожидания***.

2. По числу каналов обслуживания СМО делятся на:

•***одноканальные;***

•***многоканальные***.

3. По месту нахождения источника требований СМО делятся на:

•***разомкнуты**е*, когда источник требования находится вне системы;

•***замкнутые***, когда источник находится в самой системе.

Примером разомкнутой системы может служить ателье по ремонту телевизоров. Здесь неисправные телевизоры — это источник требований на их обслуживание, находятся вне самой системы, число требований можно считать неограниченным. К замкнутым СМО относится, например, станочный участок, в котором станки являются источником неисправностей, а следовательно, источником требований на их обслуживание, например, бригадой наладчиков.

По дисциплине обслуживания выделяют ***однофазные и многофазные*** СМО. Методы и модели, применяющиеся в теории массового обслуживания, можно условно разделить на аналитические и имитационные. Аналитические методы теории массового обслуживания позволяют получить характеристики системы как некоторые функции параметров ее функционирования. Благодаря этому появляется возможность проводить качественный анализ влияния отдельных факторов на эффективность работы СМО. Имитационные методы основаны на моделировании процессов массового обслуживания на ЭВМ и применяются, если невозможно применение аналитических моделей.

2. Принципы решения задач.

В настоящее время теоретически наиболее разработаны и удобны в практических приложениях методы решения таких задач массового обслуживания, в которых входящий поток требований является *простейшим (пуассоновским).*

Для простейшего потока частота поступления требований в систему подчиняется закону Пуассона, т.е. вероятность поступления за время t ровно k требований задается формулой:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} .$$

Простейший поток обладает тремя основными свойствами: ординарности, стационарности и отсутствием последействия.

Ординарность потока означает практическую невозможность одновременного поступления двух и более требований. Например, достаточно малой является вероятность того, что из группы станков, обслуживаемых бригадой ремонтников, одновременно выйдут из строя сразу несколько станков.

Стационарным называется поток, для которого математическое ожидание числа требований, поступающих в систему в единицу времени (обозначим λ), не меняется во времени. Таким образом, вероятность поступления в систему определенного количества требований в течение заданного промежутка времени Δt зависит от его величины и не зависит от начала его отсчета на оси времени.

Отсутствие последействия означает, что число требований, поступивших в систему до момента t, не определяет того, сколько требований поступит в систему за промежуток времени от t до $t + \Delta t$.

Важная характеристика СМО — время обслуживания требований в системе. Время обслуживания одного требования является, как правило, случайной величиной и, следовательно, может быть описано законом распределения. Наибольшее распространение в теории и, особенно, в практических приложениях получил *экспоненциальный закон распределения времени обслуживания.* Функция распределения для этого закона имеет вид:

$$F(t) = 1 - e^{-\mu t},$$

где μ – параметр экспоненциального закона распределения времени обслуживания требований в системе (соответствует среднему количеству клиентов в системе в единицу времени), $1/\mu$ – среднее время обслуживания одного клиента.

Рассмотрим аналитические модели наиболее распространенных СМО с ожиданием, т.е. таких СМО, в которых требования, поступившие в момент, когда все обслуживающие каналы заняты, ставятся в очередь и обслуживаются по мере освобождения каналов.

Общая постановка задачи состоит в следующем. Система имеет n обслуживающих каналов, каждый из которых может одновременно обслуживать только одно требование.

В систему поступает простейший (пуассоновский) поток требований с параметром λ (λ - количество поступающих заявок в единицу времени, $1/\lambda$ - среднее время появления одного клиента). Если в момент поступления очередного требования в системе на обслуживании уже находится не меньше *n* требований (т.е. все каналы заняты), то это требование становится в очередь и ждет начала обслуживания.

Время обслуживания каждого требования $1/\mu$ — случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром μ (количество обслуживаемых клиентов в единицу времени).

СМО с ожиданием можно разбить на две большие группы: замкнутые и разомкнутые. К *замкнутым* относятся системы, в которых поступающий поток требований возникает в самой системе и ограничен. Если питающий источник обладает бесконечным числом требований, то системы называются *разомкнутыми.* Примерами подобных систем могут служить магазины, кассы вокзалов, портов и др. Для этих систем поступающий поток требований можно считать неограниченным. Расчет характеристик работы СМО различного вида может быть проведен на основе расчета вероятностей состояний СМО (так называемые *формулы Эрланга).*

Рассмотрим алгоритмы расчета показателей качества функционирования разомкнутой системы массового обслуживания с ожиданием.

При изучении таких систем рассчитывают различные показатели эффективности обслуживающей системы. В качестве основных показателей могут быть вероятность того, что все каналы свободны или заняты, математическое ожидание длины очереди (средняя длина очереди), коэффициенты занятости и простоя каналов обслуживания и др.

Введем в рассмотрение параметр $\alpha = \lambda/\mu$ - нагрузка системы (среднее количество каналов, необходимое для обслуживания всех поступающих в единицу времени требований). Заметим, что если α/ n< 1, то очередь не растет безгранично. Это условие означает, что число обслуживающих каналов должно быть больше среднего числа каналов, необходимых для того, чтобы за единицу времени обслужить все поступившие требования. Для одноканальной системы (n =1) данное условие будет выглядеть α<1. Тогда основные характеристики системы массового обслуживания определяются по формулам:

1. Вероятность того, что все обслуживающие каналы свободны:

$$P_0 = \left[\sum_{k}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!(1-\alpha/n)} \right]^{-1}.$$

2. Вероятность того, что занято ровноk обслуживающих каналов при условии, что общее число требований, находящихся на обслуживании, не превосходит числа обслуживающих аппаратов:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0, \text{ при } 1 \le k \le n.$$

3. Вероятность того, что в системе находитсяk требований в случае, когда их число больше числа обслуживающих каналов:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{n! n^{k-n}} P_0, \text{ при } k \ge n.$$

4. Вероятность того, что все обслуживающие каналы заняты:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{n!(1-\alpha/n)} P_0; \qquad (\alpha/n < 1).$$

5. Среднее время ожидания требованием начала обслуживания в системе (коэффициент простоя очереди):

$$E_1 = \frac{P_n}{\mu(n-a)}; \qquad (\alpha/n < 1)$$

6. Средняя длина очереди:

$$E_2 = \frac{\alpha P_n}{n(1-\alpha/n)} = \frac{\alpha^{n+1}}{n! n(1-\alpha/n)^2} P_0; \qquad (\alpha/n < 1)$$

7. Среднее число свободных от обслуживания каналов:

$$E_3 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{k!} \alpha^k P_0$$

8. Коэффициент простоя каналов:

$$E_{np} = \frac{E_3}{n}.$$

9. Среднее число занятых обслуживанием каналов:

$$E_4 = n - E_3$$

10. Коэффициент загрузки каналов:

$$K_p = \frac{E_4}{n}$$

Для замкнутых систем вышеописанные характеристики рассчитываются несколько иначе (разобрать самостоятельно).

Вышеописанные характеристики удобно использовать при проектировании СМО. После проведенных вычислений данные по различным полученным вариантам сводят в таблицы. Окончательное решение о выборе дисциплины очереди, количестве каналов их пропускной способности принимается лицом принимающим решение (ЛПР) и может зависеть от множества, в том числе и субъективных факторов.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

2.1 Лабораторная работа 1,2,3,4,5 (10 часов)

Тема: «Решение задач линейного программирования.»

2.1.1 Цель работы: Изучить алгоритм решения задач линейного программирования

2.1.2 Задачи работы:

1. Графический метод решения задачи линейного программирования.
2. Решение задач линейного программирования в MSExcel.
3. Экономическая интерпретация результатов решения задач.

2.1.3 Описание (ход) работы:

1. Графический метод решения задачи линейного программирования.

Графический метод основан на геометрической интерпретации задач линейного программирования и применяется в основном при решении задач *двумерного пространства*, так как довольно трудно, а чаще практически невозможно изобразить графически многогранник решений, который образуется в результате пересечения полупространств. Поэтому, сущность графического метода решения задач линейного программирования рассмотрим на примере задачи, заданной в двумерном пространстве, т.е. ее ограничения содержат две переменные.

Задача. Найти максимальное значение линейной функции:

$$z = 50x_1 + 40x_2$$

при ограничениях

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 5x_2 \le 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{array}\right\}$$

Решение

Построим многоугольник решений (рис.1), для этого в системе координат $x_1 0 x_2$на плоскости изобразим граничные прямые:

$$\begin{array}{c} 2x_1 + 5x_2 = 20 \; (l_1) \\ 8x_1 + 5x_2 = 40 \; (l_2) \\ 5x_1 + 6x_2 = 30 \; (l_3) \\ x_1 = 0; x_2 = 0 \end{array}$$

Эти прямые рекомендуется строить по двум точкам пересечения с осями координат. Например, для l_1 такими точками будут точки $A(0;4)$ и $E(10;0)$.

Взяв какую-нибудь точку (удобнее всего взять начало координат), устанавливаем, какую полуплоскость определяет каждое из неравенств, соответствующее уравнениям граничных прямых (эти полуплоскости на рис.1 показаны стрелками, штриховкой выделяется общая часть (пересечение) указанных полуплоскостей). Многоугольником решений или *областью допустимых решений* данной задачи является ограниченный пятиугольник *OABCD*.

Далее строим одну из линий уровня целевой функции как прямую линию, соответствующую уравнению Z=const. В нашей задаче можно построить прямую $50x_1 + 40x_2 = 200$ (l_4). Через точку O проводим прямую, параллельную l_4, ей соответствует уравнение Z=0 или $50x_1 + 40x_2 = 0$. Таким образом, определяем направление движения по линиям уровня целевой функции, соответствующее ее наибыстрейшему возрастанию (на рис.1 это направление отмечено стрелкой на прямой l_4). Осуществляя перемещение прямой l_4 параллельно самой себе в выбранном направлении, получаем, что функция Z принимает максимальное значение на многоугольнике решений в точке C.Этот вывод следует из ***теоремы: если оптимальное решение задачи существует, то оно достигается, по крайней мере, в одной из вершин области допустимых решений.***

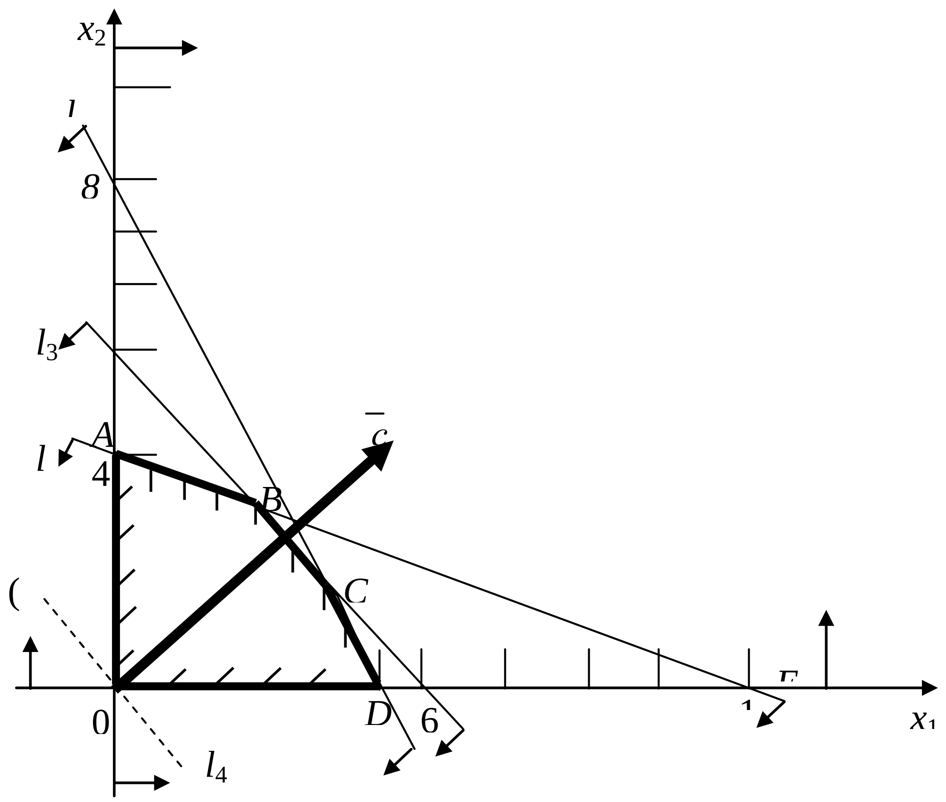


Рисунок 1 – Многоугольник решений

Точка Cлежит на пересечении прямых l_2 и l_3 и, следовательно, для определения ее координат нужно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 = 40 \\ 5x_1 + 6x_2 = 30 \end{cases}$$

Подставим найденные значения x_1 и x_2 в функцию Z ($50 \cdot 90/23 + 40 \cdot 40/23$).

Ответ: оптимальное решение задачи$Z_{max} = 6100/23$ при $x_1 = 90/23$; $x_2 = 40/23$.

Замечания:

6) область допустимых решений системы неравенств может быть пустой, одной точкой, выпуклым многоугольником или неограниченной выпуклой многоугольной областью;

7) уравнение $c_1x_1 + c_2x_2 = Z$ при фиксированном значении Z определяет прямую, а при изменении Z – семейство параллельных прямых с параметром Z. Вектор $\bar{c} = (c_1, c_2)$, перпендикулярный ко всем этим прямым, показывает направление возрастания параметра Z;

8) если бы при тех же исходных данных требовалось достичь минимума функции Z, то, очевидно, линию уровня следовало бы перемещать в направлении, противоположном вектору $\bar{C}$. Получили бы оптимальное решение в точке O (0, 0), которой соответствует $Z_{min} = 0$;

9) если экспериментальное значение Z достигается в двух вершинах (случай альтернативного оптимума), то тоже экстремальное значение достигается в любой точке, лежащей на отрезке, соединяющем эти вершины;

10) в случае неограниченной области максимум (минимум) функцииZ либо не существует (еслиZ неограниченна сверху (снизу)), либо достигается по крайней мере в одной из вершин области.

2. Решение задач линейного программирования в MSExcel.

Задача 1

Для производства продукции типа $П_1$ и $П_2$ предприятие использует два вида сырья: C_1 и C_2. Данные об условиях производства приведены в таблице.

Сырье	Расход сырья на единицу продукции, кг/ед.		Количество сырья, кг
	$П_1$	$П_2$	
C_1	1	3	300
C_2	1	1	150
Прибыль на единицу продукции, тыс. руб.	2	3	-

Составить план производства по критерию максимум прибыли.

Решение

1. Состав переменных

x_1 – количество (единиц) продукции $П_1$;

x_2 – количество (единиц) продукции $П_2$.

2. Числовая модель

I. Целевая функция. Критерий оптимальности получение максимума прибыли от производственной деятельности. Следовательно,

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

II. Основные ограничения

В таблице представлены данные по расходу основных производственных ресурсов (сырье C_1 и C_2) на производство продукции $П_1$ и $П_2$. Используя данные таблицы, составим ограничения:

$1x_1 + 3x_2 \leq 300$

$1x_1 + 1x_2 \leq 150$

III. Условие неотрицательности переменных

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

3. Общий вид экономико-математической модели

I. $Z = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max$

II. $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$

III. $x_j \geq 0$, (j=1, 2)

4. Структурная форма экономико-математической модели

I. $$Z = \sum_{j=1}^{2} c_j x_j \to \max$$

II. $$\sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,2$$

III. $$x_j \ge 0, \qquad j = 1,2$$

5. Решение задачи с использованием табличного редактора MSExcel

Чтобы решить задачу, используя табличный редактор MSExcel необходимо:

- Открыть табличный редактор (Пуск → Программы → MSExcel);
- Запишем числовую модель задачи на рабочий лист (рисунок 1.1). Для этого необходимо выбрать ячейки в которых будут находиться переменные. Допустим $x_1 \to C1$ $x_2 \to C2$ (выбор ячеек произволен).

В ячейке A1 запишем целевую функцию $Z = 2x_1 + 3x_2$: A1:=2*C1+3*C2

Примечание:запись формул всегда начинается со знака «=».

В ячейку B1 запишем левую часть 1-го ограничения ($1x_1 + 3x_2$)

B1:=C1+3*C2

В ячейку B2 запишем левую часть 2-го ограничения ($1x_1 + 1x_2$)

B2:=C1+C2

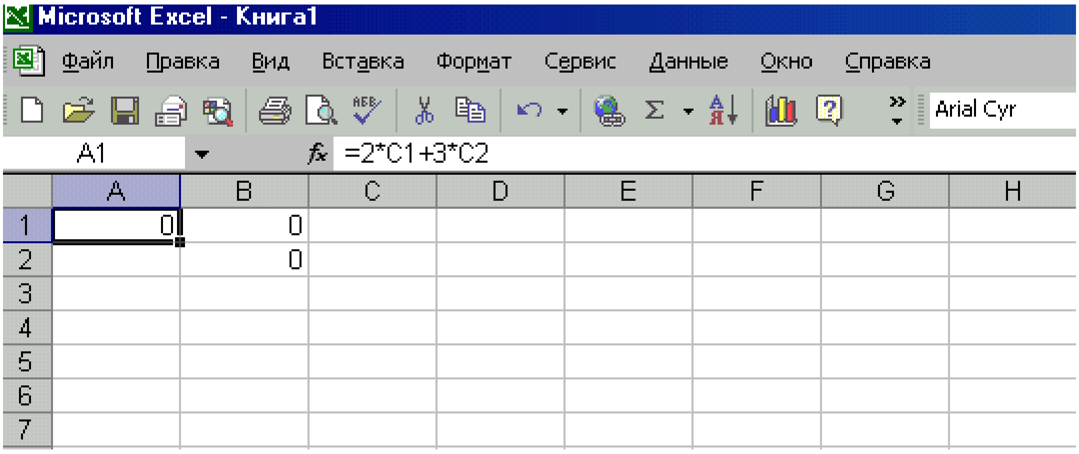


Рисунок 1.1 – Запись числовой модели на рабочем листе MSExcel

- После как числовая модель записана, необходимо установить курсор в ячейку A1 (в ней расположена целевая функция). Выбираем вкладку «Сервис» → «Поиск решения…», при этом откроется диалоговое окно функции «Поиск решения».
- В открывшемся окне необходимо установить целевую ячейку, а поскольку у вас курсор стоял на ячейке A1, то значение целевой ячейки будет правильным. В противном случае установите в ручную адрес целевой ячейки (в данном случае программа использует абсолютные адреса т.е. ячейка A1 имеет абсолютный адрес $A$1) (рисунок 1.2).
- Установите маркер в положение, соответствующие критерию оптимальности: максимальному или минимальному значению.
- В окне «Изменяя ячейки» нужно указать адреса ячеек соответствующие

переменным. Для этого необходимо выделить диапазон ячейки с С1 по С2 (рисунок 1.2).

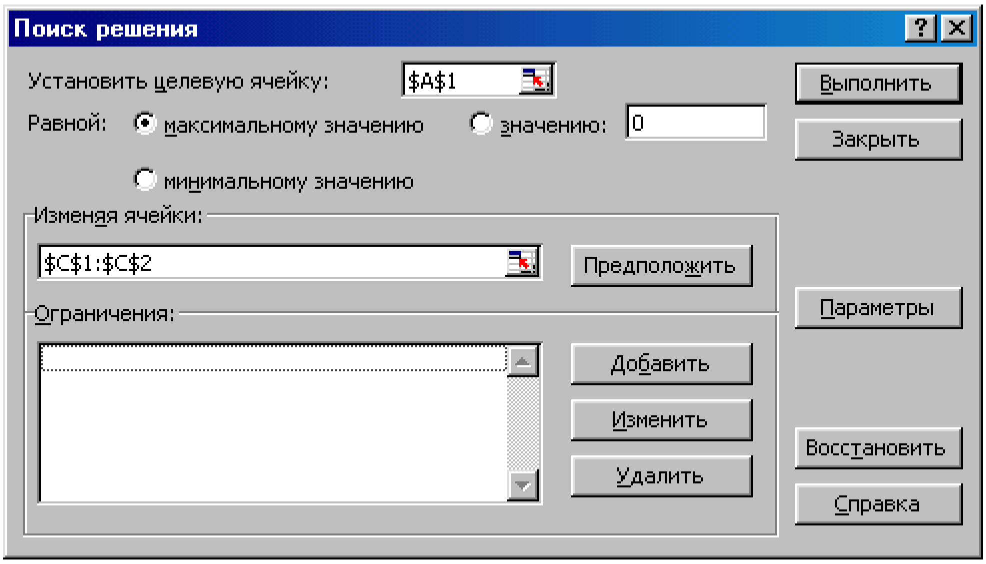


Рисунок 1.2 – Работа в диалоговом окне «Поиск решения»

- В окне «Ограничения» активировать кнопку «Добавить». Откроется окно «Добавить ограничения» (рисунок 1.3). Вводим первое ограничение: в окне «Ссылка на ячейку» указывают адрес ячейки, где находится левая часть 1-го ограничения - $B$1, затем выбирают знак ограничения « ≤ » и значение – 300.

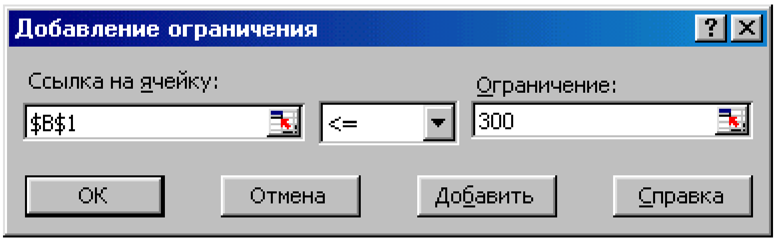


Рисунок 1.3 – Диалоговое окно «Добавление ограничения»

- Активируем клавишу «добавить» и аналогично вводим второе ограничение. Затем вводим условие неорицательности. Для этого в окне «Ссылка на ячейку» указываем диапазон ячеек, в которых находятся переменные ($C$1:$C$2). После добавления всех ограничений выбираем «ОК». Программа возвращается в диалоговое окно «Поиск решения». Ввод числовой модели закончен (рисунок 1.4).

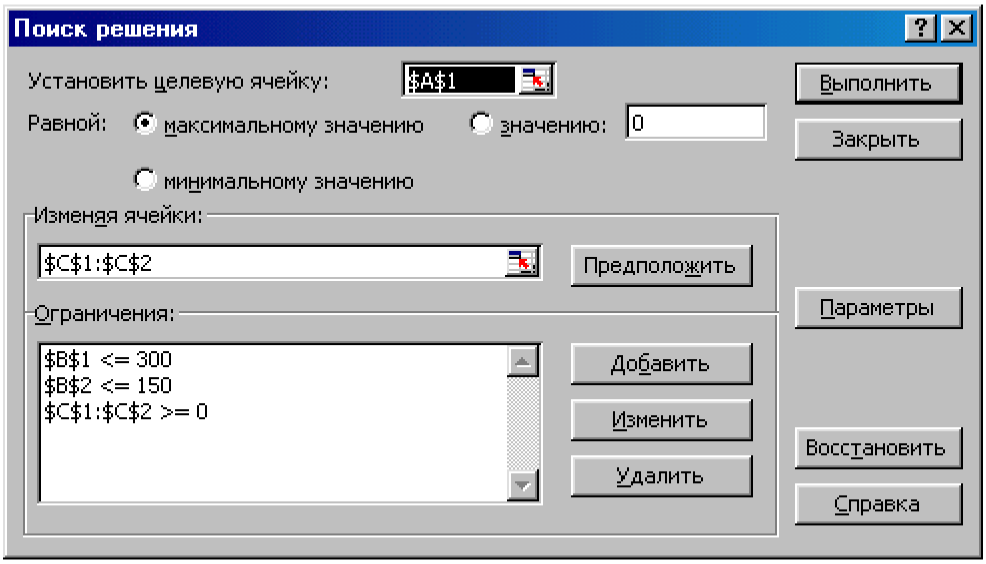


Рисунок 1.4 – Завершение ввода числовой модели в диалоговом окне «Поиск решения»

- Выбираем команду «Выполнить». На экране появится окно «Результаты поиска решения» (рисунок 1.5). Если модель составлена правильно и имеет решение, в открывшемся окне будет сообщение: «Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены». В окне «Тип отчета» выберите «Результаты» и нажмите «ОК».

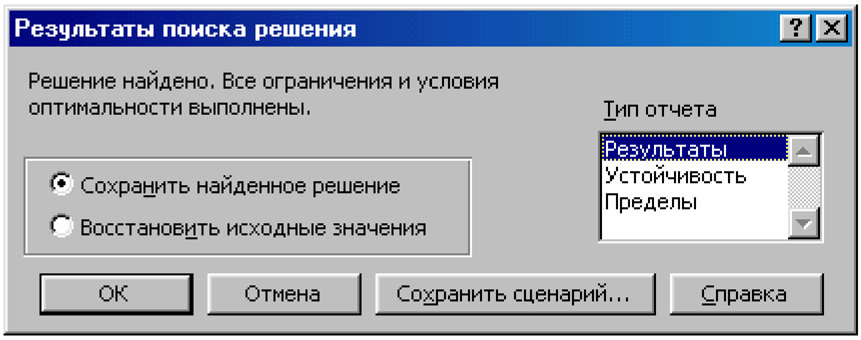


Рисунок 1.5 – Окно «Результаты поиска решения»

Результат решения задачи представлен в «Отчете по результатам» (рисунок 1.6). Решение задачи окончено.

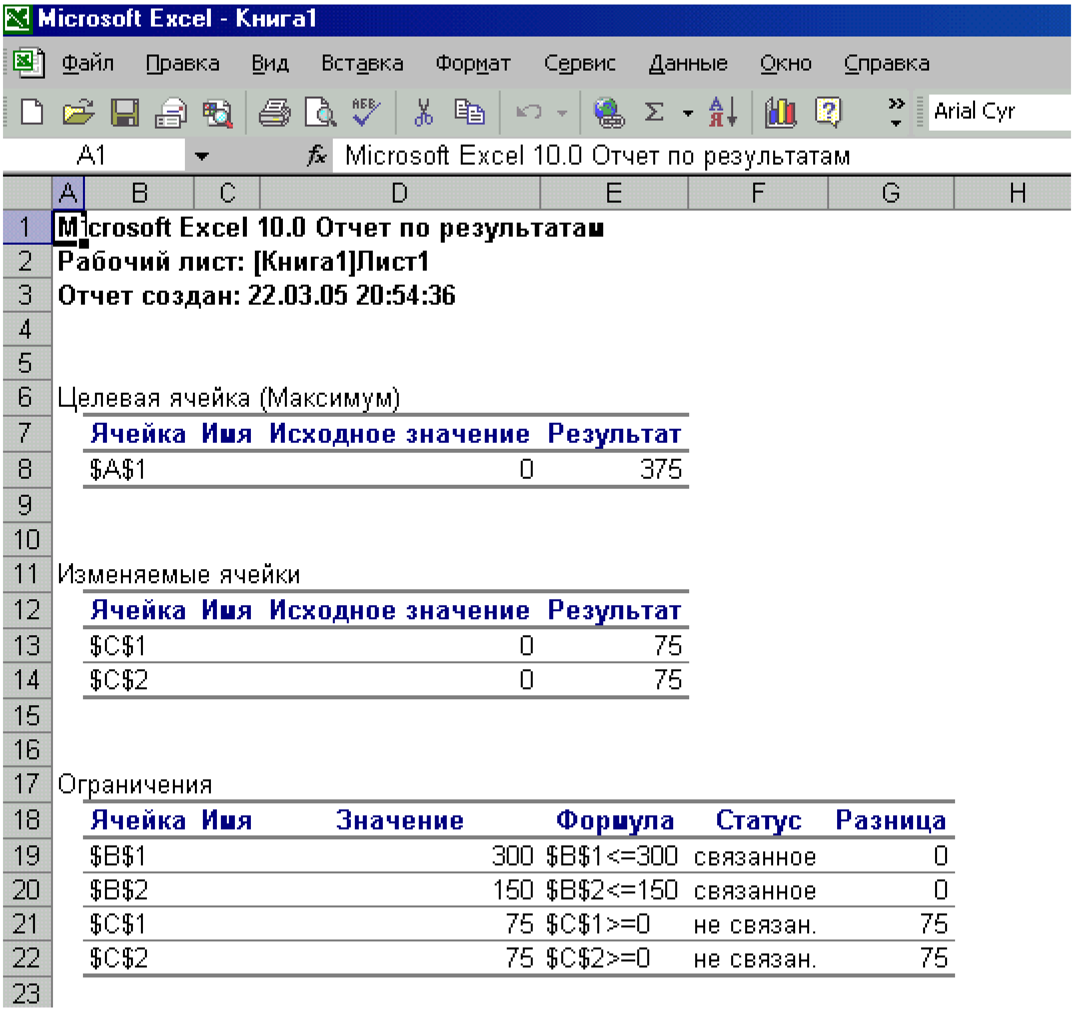


Рисунок 1.6 – Отчет по результатам

- Решение задачи окончено, результаты можно распечатать.

Примечание

Если поиск не может найти оптимальное решение, в диалоговом окне **Результаты поиска решения** выводится одно из следующих сообщений.

Поиск не может улучшить текущее решение. Все ограничения выполнены.

В процессе поиска решения нельзя найти такой набор значений влияющих ячеек, который был бы лучше текущего решения. Приблизительное решение найдено, но либо дальнейшее уточнение невозможно, либо погрешность, заданная в диалоговом окне **Параметры поиска решения** слишком высока. Измените погрешность на меньшее число и запустите процедуру поиска решения снова.

Поиск остановлен (истекло заданное на поиск время).

Время, отпущенное на решение задачи, исчерпано, но достичь удовлетворительного решения не удалось. Чтобы при следующем запуске процедуры поиска решения не повторять выполненные вычисления, установите переключатель **Сохранить найденное решение** или **Сохранить сценарий**.

Поиск остановлен (достигнуто максимальное число итераций).

Произведено разрешенное число итераций, но достичь удовлетворительного решения не удалось. Увеличение числа итераций может помочь, однако следует рассмотреть результаты, чтобы понять причины остановки. Чтобы при следующем запуске процедуры поиска решения не повторять выполненные вычисления, установите переключатель **Сохранить найденное решение** или нажмите кнопку **Сохранить сценарий**.

Значения целевой ячейки не сходятся.

Значение целевой ячейки неограниченно увеличивается (или уменьшается), даже если все ограничения соблюдены. Возможно следует в задаче снять одно ограничение или сразу несколько. Изучите процесс расхождения решения, проверьте ограничения и запустите задачу снова.

Поиск не может найти подходящего решения.

В процессе поиска решения нельзя сделать итерацию, которая удовлетворяла бы всем ограничениям при заданной точности. Вероятно, ограничения противоречивы. Исследуйте лист на предмет возможных ошибок в формулах ограничений или в выборе ограничений.

Поиск остановлен по требованию пользователя.

Нажата кнопка **Стоп** в диалоговом окне **Текущее состояние поиска решения** после прерывания поиска решения в процессе выполнения итераций.

Условия для линейной модели не удовлетворяются.

Установлен флажок **Линейная модель**, однако итоговый пересчет порождает такие значения, которые не согласуются с линейной моделью. Это означает, что решение недействительно для данных формул листа. Чтобы проверить линейность задачи, установите флажок **Автоматическое масштабирование** и повторно запустите задачу. Если это сообщение опять появится на экране, снимите флажок **Линейная модель** и снова запустите задачу.

При поиске решения обнаружено ошибочное значение в целевой ячейке или в ячейке ограничения.

При пересчете значений ячеек обнаружена ошибка в одной формуле или в нескольких сразу. Найдите целевую ячейку или ячейку ограничения, порождающие ошибку, и измените их формулы так, чтобы они возвращали подходящее числовое значение.

Набрано неверное имя или формула в окне **Добавить ограничение** или в окне **Изменить ограничение**, либо в поле **Ограничение** было задано целое или двоичное ограничение. Чтобы ограничить значения ячейки множеством целых чиселвыберите оператор **целого** ограничения в списке условных операторов. Чтобы установить двоичное ограничение, выберите оператор для **двоичного** ограничения.

3. Экономическая интерпретация результатов решения задач.

Интерпретация результатов задачи

Полученные значения в ячейках, содержащих формулы целевой функции или ограничений, являются результатом расчета целевой функции и соответствующих ограничений.

Результат, полученный в ячейке А1 означает прибыль, полученную от производства продукции.

Ячейки С1, С2 указывают нам на количество произведенной продукции.

В ячейке В1 записано 1-ое ограничение, характеризующее расход сырья C_1 на производство всех видов продукции. При этом получился результат равный 300, разница равна 0, что указывает на полный расход сырья данного вида.

В ячейке В2 записано второе ограничение, характеризующее расход сырья C_2 на производство продукции $П_1$ и $П_2$. Результат равен 150, разница равна 0, что полностью соответствует заданному ограничению (т.е. сырье C_2 израсходовано полностью).

Значение ячеек С1, С2 превышают 0, т.е. условие неотрицательности переменных выполнено.

Ответ

Максимальная прибыль возможна в размере 375 единиц.

Объем выпуска продукции: $П_1$ - 75 штук, $П_2$ - 75 штук.

Сырье С1 иС2 израсходовано полностью, условие неотрицательности выполнено.

Порядок оформления задачи

1. Состав переменных

x_1 – количество продукции $П_1$, единиц;

x_2 – количество продукции $П_2$, единиц.

2. Числовая модель

I. $Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

II. $1x_1 + 3x_2 \le 300$

$1x_1 + 1x_2 \le 150$

III. $x_1 \ge 0$

$x_2 \ge 0$

3. Общий вид экономико-математической модели

I. $Z = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max$

II. $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2$

III. $x_j \ge 0$, (j=1, 2)

4. Структурная форма экономико-математической модели

I. $Z = \sum_{j=1}^{2} c_j x_j \to \max$

II. $\sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,2$

III. $x_j \ge 0, \qquad j = 1,2$

5. Ответ: **м**аксимальная прибыль возможна в размере 375 единиц;

объем выпуска продукции: $П_1$ - 75 штук, $П_2$ - 75 штук;

сырье С1 иС2 израсходовано полностью,

условие неотрицательности выполнено.

Задача 2

Для выпуска четырех видов продукции требуются затраты сырья, рабочего времени и оборудования. Исходные данные приведены в таблице.

Тип ресурса	Нормы затрат ресурсов на единицу продукции				Наличие ресурсов
	1	2	3	4	
Сырье	3	5	2	4	60
Рабочее время	22	14	18	30	400
Оборудование	10	14	8	16	128
Прибыль на единицу продукции	30	25	8	16	

Необходимо формулировать экономико-математическую модель задачи на максимум прибыли и найти оптимальный план выпуска продукции.

Задача 3

Для выпуска четырех видов продукции P_1, P_2, P_3, P_4 на предприятии используют три вида сырья S_1, S_2 и S_3. объемы выделенного сырья, нормы расхода сырья и прибыль на единицу продукции при изготовлении каждого вида продукции приведены в таблице. Требуется определить план выпуска продукции, обеспечивающий наибольшую прибыль.

Составим экономико-математическую модель задачи оптимального использования ресурсов на максимум прибыли. В качестве неизвестных примем выпуска продукции j-го вида x_j (j = 1,2,3,4).

Вид сырья	Запасы сырья	Вид продукции			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	35	4	2	2	3
S_2	30	1	1	2	3
S_3	40	3	1	2	1
Прибыль		14	10	14	11

Задача 4

Фабрика выпускает три вида тканей, причем суточное плановое задание составляет не менее 90 м тканей первого вида, 70 м – второго и 60 м – третьего. Суточные ресурсы следующие: 780 единиц производственного оборудования,850 единиц сырья, 790 единиц электроэнергии, расход которых на один метр ткани представлен в таблица.

Ресурсы	*Ткани*		
	I	II	**III**
Оборудование	2	3	4
Сырье	1	4	5
Электроэнергия	3	4	2

Цена за один метр ткани вида I равна 80 денежным единицам, II – 70 денежным единицам, III – 60 денежным единицам.

Необходимо определить, сколько метров ткани каждого вида следует выпустить, чтобы общая стоимость выпускаемой продукции была максимальной.

Задача5

На основании информации, приведенной в таблице, составить план производства, максимизирующий объем прибыли.

Ресурсы	Затраты ресурсов на единицу продукции		Наличие ресурсов
	А	Б	
Труд	2	4	2000
Сырье	4	1	1400
Оборудование	2	1	800
Прибыль на единицу продукции	40	60	

Задача 6

Составить рацион для молочных коров весом 500 кг, с суточным удоем 10 кг так, чтобы стоимость рациона была минимальной. Исходные данные представлены в таблицах 1.2 и 1.3.

Таблица 1.2 - Потребность в питательных элементах

Питательные элементы	Затраты питательных элементов на поддержание жизни	Затраты питательных элементов на 1кг молока
Кормовые единицы, кг	5	0,5
Протеин, г	300	70
Кальций, г	20	3
Фосфор, г	10	4
Каротин, мг	150	25

Таблица 1.3 - Питательность и себестоимость 1 кг корма

Показатели	Концентрированные	Сочные	Грубые	Минеральные и прочие
Кормовые единицы, кг	1,0	0,2	0,4	-
Протеин, г	100	10	20	-
Кальций, г	5	1	2	100
Фосфор, г	5	1	2	200
Каротин, мг	2	10	5	5
Себестоимость, руб.	5	2	3	5

Физиологические ограничения: дача сочных кормов в сутки не более 30 кг.
Экономические требования: дача концентрированных кормов в размере не менее 200 г, на каждый кг молока суточного удоя.

Решение

Расчет рациона производится на 1 животное, исходя из средних физиологических характеристик животных.

1. Состав переменных

x_1 – количество концентрированных кормов, кг;
x_2 – количество сочных, кг;
x_3 – количество грубых, кг;
x_4 – количество минеральных и прочих кормов, кг.

2. Числовая модель

I. Целевая функция должна выражать стоимость рациона. Причем стоимость должна быть минимальной, следовательно

$Z = 5x_1+2x_2+3x_3+5x_4 \rightarrow \min$

II. Основные ограничения

Первый вид ограничения будет выражать суточную потребность животных в кормовых единицах. Количество кормовых единиц, получаемых животным из концентрированных кормов составит 1,0 x_1, из сочных соответственно 0,2 x_2, из грубых – 0,4 x_3. Минеральные корма не содержат кормовые единицы. Следовательно животное в день может получить из различных видов кормов $1{,}0x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}4x_3$ кг кормовых единиц.

Потребность животного в кормовых единицах в сутки составит 10 кг (5+0,5·10, т.к. 5 кг тратится на поддержание жизни, 0,5·10 кг необходимо для производства молока). Тогда ограничение по содержанию кормовых единиц в суточном рационе животного будет иметь вид:

$$1{,}0x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}4x_3 \geq 10$$

Аналогично составляем ограничения по содержанию других питательных веществ:

по протеину: $100x_1 + 10x_2 + 20x_3 \geq 1000$

по кальцию: $5x_1 + 1{,}0x_2 + 2x_3 + 100x_4 \geq 50$

по фосфору: $5x_1 + 1{,}0x_2 + 2x_3 + 200x_4 \geq 50$

по каротину: $2{,}0x_1 + 10x_2 + 5x_3 + 5x_4 \geq 400$

Дополнительные ограничения

Условие, что суточная норма сочных кормов не должна превышать 30 кг будет иметь вид: $x_2 \leq 30$.

Условие, что на каждый 1 кг суточного удоя должно приходится не менее 200 г концентрированных кормов, будет иметь вид: $x_1 \geq 2$.

III. Условие неотрицательности переменных

$x_2 \geq 0$

$x_3 \geq 0$

$x_4 \geq 0$

3. Общий вид экономико-математической модели

I. $Z = c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4 \to \min$

II. $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \geq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \geq b_2$

$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \geq b_3$

$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \geq b_4$

$a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 \geq b_5$

$x_2 \leq b_6$

$x_1 \geq b_7$

III. $x_j \geq 0$, $j=2,3,4$.

4. Структурная форма экономико-математической модели

I. $$Z = \sum_{j=1}^{4} c_j x_j \to \min$$

II. $$\sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1,2$$

$$\sum_{j=1}^{4} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 3,...,5$$

$$x_j \leq b_i, \qquad j = 2, i = 6$$

$$x_j \geq b_i, \qquad j = 1, i = 7$$

III. $$x_j \geq 0, \qquad j = 2,3,4$$

Ответ

Оптимальный рацион для коров 500 кг и суточный удой 10 кг, концентрированные – 3,26 кг, сочные – 30,00 кг, грубые - 18,70 кг, минеральные -0 кг. Минимальная стоимость рациона 132,39 руб.

Содержание кормовых единиц в рационе превышает минимально допустимую норму на 6,74 кг, кальция – на 33,7 г, фосфора – 33,7 г, содержание протеина и каротина в рационе строго соответствует норме.

Количество сочных кормов в рационе составило 30 кг, что соответствует максимальной норме. Количество концентратов превысило минимальный уровень (2кг) на 1,26 кг.

Минеральные вещества не вошли в рацион животных, потребность в минеральных веществах (кальций, фосфор) удовлетворяется другими, более экономически эффективными кормами.

2.2 Лабораторная работа 6 (2 часа)

Тема: «Целочисленное программирование»

2.2.1 Цель работы: Изучить особенности целочисленного программирования

2.2.2 Задачи работы:

1. Постановка и модель задачи.
2. Решение целочисленных задач.

2.2.3 Описание (ход) работы:

1. Постановка и модель задачи.

Большая группа экономических задач, решаемых методами линейного программирования, требует целочисленного решения. Например, при определении оптимального выпуска машин, агрегатов, размещения оборудования, если речь идет о фасованной продукции в определенном объеме и пр. переменные характеризуют физически неделимые единицы и поэтому должны принимать только целые значения.

Целочисленное программирование – разновидность линейного программирования, подразумевающая, что искомые значения должны быть целыми числами.

Постановка целочисленной задачи звучит также, как и постановка основной задачи линейного программирования и добавляется только одно условие – целочисленность x_j.

Пусть некоторое предприятие имеет n видов производственных ресурсов. Порядковый номер ресурсов – i, т.е. $i = 1, 2, \ldots, m$. Наличие каждого вида ресурсов известно и обозначается b_i. Предположим, что предприятие может производить m видов продукции. Порядковый номер продукции – j, т.е. $j = 1, 2, \ldots, n$. Необходимо определить какое количество единиц продукции каждого вида надо производить (x_j), чтобы получить максимум этой продукции в стоимостном выражении, если известно, что затраты на производство единицы продукции каждого вида ресурса равны a_{ij} единиц, цена реализации – c_j, единицы производимой продукции должны принимать целые значения. Тогда модель задачи будет выглядеть следующим образом:

I. $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \max.$

II. $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1,$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2,$

………………………………

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m.$

III. $x_j \ge 0$ и x_j– целые, $j = 1, 2, \ldots, n.$

Методы решения задач линейного программирования не гарантируют целочисленности решения.

Иногда задачи целочисленного программирования решают приближенно. Отбросив условие целочисленности, решают задачу методом линейного программирования, затем в полученном оптимальном решении округляют переменные до целых чисел. Такой прием можно использовать, если значения переменных достаточно велики и погрешностью округления можно пренебречь. Если значения переменных невелики, то округление может привести к значительному расхождению с оптимальным решением. Поэтому разработаны специальные методы решения целочисленных задач, среди которых можно выделить два направления: методы отсечения (отсекающих плоскостей) и комбинаторные методы.

Метод отсекающих плоскостей состоит в построении дополнительных ограничений. Представление о комбинаторных методах дает широко используемый на практике метод ветвей и границ.

К методу отсекающих плоскостей относится аналитический метод решения полностью целочисленных задач – метод Гомори. Основная его идея заключается в том, что задача сначала решается без ограничения целочисленности. Если решение получается целочисленным, то задача решена, если нет, то к задаче присоединяют новое дополнительное ограничение, которое называют сечением. Получают новую задачу, для которой множество допустимых решений будет меньше, чем для исходной задачи, но будет содержать все допустимые целочисленные решения.

Дополнительное ограничение отсекает часть области, содержащую нецелочисленное оптимальное решение.

Вновь полученную задачу решают методом линейного программирования. Процесс построения сечений и решения задачи повторяется до получения целочисленного оптимального решения.

Таким образом, сначала модель задачи решается симплексным методом без учета требования о целочисленности до получения оптимального варианта. Если значение всех x_j будут целыми, то задача решена. Если же есть хотя бы одно дробное значение, то составляется дополнительное ограничение по целочисленности этой переменной x_j, которое присоединяется к исходным ограничениям задачи, и вновь находится новый оптимальный вариант. Алгоритм Гомори позволяет прийти к оптимальному целочисленному решению за конечное число шагов.

При работе с линейными целочисленными задачами оптимизации необходимо иметь ввиду: 1) при решении задачи целочисленного программирования условие целочисленности распространяется только на основные переменные x_j, а дополнительные переменные (остаток ресурсов) и целевая функция (выход продукции в денежном выражении) не обязательно должны принимать целые значения; 2) условие целочисленности может только «ухудшить» результат решения задачи; 3) существует ряд задач, которые без дополнительных ограничений сразу являются целочисленными или вовсе не могут быть решены с условием целочисленности, но из условия задачи это увидеть заранее сложно.

2. Решение целочисленных задач.

Рассмотрим наиболее значимые формулировки целочисленных оптимизационных задач, которые подразумевают обязательное выполнение условия целочисленности переменных величин и применяются с различными модификациями в экономике.

Задача о ранце. Общий вес ранца заранее ограничен. Какие предметы положить в ранец, чтобы общая полезность отобранных предметов была максимальна? Вес каждого предмета известен.

Примем, что $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – предметы, $c_1, c_2, \ldots, c_n$– ценность каждого предмета, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – масса каждого предмета (или какой-то характерный важный размер). Ранец может выдержать общую массу не более b. Если предмет кладется в ранец, то ему присваивается значение, равное единице, если нет, то равное нулю. В итоге получим линейную целочисленную задачу оптимизации:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max .$$

I.

II. $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b.$

III. $x_j = \{0,1\}$, $j = 1, 2$.

Есть много эквивалентных формулировок. Например, можно вместо ранца рассматривать спутник, а в качестве предметов – научные приборы. Тогда задача интерпретируется как отбор приборов для запуска на орбиту. Правда, при этом предполагается решенной предварительная задача – оценка сравнительной ценности исследований, для которых нужны те или иные приборы. Или роль ранца может играть транспортный самолет.

Задача о выборе оборудования. Пусть для приобретения оборудования, размещаемого на производственной площади 38 м^2, фирма выделяет 20 млн. руб. Имеются единицы оборудования двух типов: типа А стоимостью 5 млн. руб., требующее производственную площадь 8 м^2 и имеющее производительность 7 тыс. единиц продукции за смену, и типа Б – стоимостью 2 млн. руб., занимающее площадь 4 м^2, и дающее за смену 3 тыс. единиц продукции. Требуется рассчитать оптимальный вариант приобретения оборудования, обеспечивающий максимум производительности участка.

Пусть x_1 и x_2 – количество приобретаемых машин типа А и типа Б соответственно, тогда модель задачи будет выглядеть следующим образом:

I. $Z = 7x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$.

II. $5x_1 + 2x_2 \le 20$,

$8x_1 + 4x_2 \le 38$.

III. $x_j \ge 0$ и x_j– целые, $j = 1, 2$.

Решая задачу в MSExcel без ограничения целочисленности, получим, что $Z = 29{,}5$, при $x_1 = 1$ и $x_2 = 7{,}5$.

Если же изначально при добавлении ограничений в соответствующем диалоговом окне в MSExcel дополнительно еще раз выбрать ячейки, соответствующие переменным величинам, и задать их целыми числами, то после активизации поиска решения ответ будет выглядеть так: $Z = 29$, при $x_1 = 2$ и $x_2 = 5$. Таким образом, приобретение двух машин типа А и пяти машин типа Б обеспечивает максимум производительности участка, равный 29 тыс. единиц продукции в смену. Заметим, что если бы в качестве пана был выбран вариант, получаемый в результате простого округления первоначального решения (т.е. $x_1 = 1$ и $x_2 = 7$), то суммарная производительность оказалась бы равной всего 28 тыс. единиц продукции.

К задачам целочисленного программирования также относятся:

- *задача оптимального раскроя материалов*: на предприятии производится раскрой нескольких различных партий материалов в заданных количествах единиц одинакового размера в каждой партии. Из материалов всех партий требуется изготовить максимальное число комплектов, в каждый из которых входит несколько различных видов деталей в заданном количестве, если известно, что каждую единицу материала можно раскроить на детали определенным количеством различных способов для получения деталей разного вида;

- *задача о назначениях*. С ее помощью можно получить ответ на вопросы типа: как распределить рабочих по станкам, чтобы общая выработка была наибольшей или затраты на заработную плату наименьшими; как наилучшим образом распределить экипажи самолетов; как назначить людей на различные должности и т.д. Математически такие задачи относятся к транспортным задачам, с той особенностью, что в них объемы наличных и требующихся ресурсов для выполнения каждой работы равны единице ($a_j = b_i = 1$), а все переменные x_{ij} либо равны единице, если i-ый работник назначен на j-ую работу, либо равны нулю в других случаях. Исходные данные задачи о назначениях группируются в таблице, которая называется матрицей оценок, а результаты – в матрице назначений. При решении задачи о назначениях используют алгоритмы и методы решения транспортных задач;

- *задача о коммивояжере*. Она относится к задачам предыдущего вида и может быть сформулирована следующим образом: имеется n городов, пронумерованных числами от 1 до n. Коммивояжер, выезжая из города 1, должен побывать в каждом городе ровно один раз и вернуться в исходный пункт при этом известны расстояния c_{ij} между городами ($i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, $i \neq j$). Требуется найти самый короткий маршрут.

К задачам целочисленного программирования приводят также многие оптимальные задачи *теории расписаний*, в которой рассматриваются методы оптимизации оперативно-календарного планирования (например, задача определения оптимальной очередности обработки изделий на различных станках или других рабочих местах и др.).

2.3 Лабораторная работа 8,9 (4часа)

Тема: «Транспортная задача»

2.3.1 Цель работы: Сформировать навыки моделирования экономических процессов при помощи линейного программирования

2.3.2 Задачи работы:

1. Подготовка и модель транспортной задачи.
2. Алгоритм метода потенциалов.
3. Решение транспортной задачи в MSExcel.

2.3.3 Описание (ход) работы:

1. Подготовка и модель транспортной задачи.

Среди проблем, для исследования которых успешно применяется линейное программирование, важное значение имеет так называемая транспортная задача.

Общая постановка этой задачи применительно к экономической проблеме экономии издержек производства формулируется так: имеется несколько пунктов назначения (предприятий, потребителей); требуется перевезти некоторое количество однородного товара из различных пунктов отправления в несколько пунктов назначения; каждый из поставщиков может выделить только определенное количество единиц товара и каждому потребителю требуется также определенное количество единиц этого товара; известны расстояния или стоимости перевозки единицы товара от каждого поставщика к каждому потребителю. Задача состоит в том, чтобы найти такие маршруты перевозок, из всех возможных связей поставщиков и потребителей, при которых общие транспортные расходы были бы минимальными (транспортная задача также может быть сформулирована с целевой функцией, стремящейся к максимуму).

Таким образом, пусть имеем m пунктов, в которых находится известное количество однородных грузов (поставщики). Порядковый номер поставщика обозначается i, то есть $i=1,2,\ldots,m$. Наличие грузов у поставщика b_i. Имеется n пунктов испытывающих потребность в этих грузах (потребителей). Порядковый номер потребителя $j=1,2,\ldots,n$. Потребность в грузах каждого потребителя a_j. Известна «цена» перевозки единицы груза от каждого поставщика к каждому потребителю (c_{ij}). Необходимо составить план перевозки грузов от поставщиков к потребителю, т.е. определить: какое количество груза необходимо перевезти от каждого поставщика к каждому потребителю (x_{ij}), причем значения x_{ij} должны отвечать следующим требованиям:

4) общие затраты на перевозку грузов должны быть минимальными;
5) все грузы от поставщиков должны быть вывезены;
6) потребности потребителей в грузах должны быть удовлетворены.

Требования 2-3 одновременно могут быть выполнены только в том случае, когда сумма грузов у всех поставщиков равна суммарной потребности всех потребителей, то есть:

$$\sum_{i=1}^{m} b_i = \sum_{j=1}^{n} a_j$$ – условие разрешимости задачи.

Если условие разрешимости выполняется, то задача будет являться задачей, так называемого закрытого типа (сбалансированной). Иначе – задача открытого типа (несбалансированная). Для того чтобы решить задачу открытого типа, надо её «закрыть» (то есть привести к закрытому типу). Для этого вводится или фиктивный поставщик или фиктивный потребитель.

В случае, когда *суммарные запасы превышают суммарные потребности*, необходим дополнительный фиктивный пункт потребления, который будет формально потреблять существующий излишек запасов, то есть:

$$a_{ф} = \sum_{i=1}^{m} b_i - \sum_{j=1}^{n} a_j \ .$$

Если *суммарные потребности превышают суммарные запасы*, то необходим дополнительный *фиктивный* пункт отправления, формально восполняющий существующий недостаток продукции в пунктах отправления:

$$b_{ф} = \sum_{j=1}^{n} a_j - \sum_{i=1}^{m} b_i \ .$$

Введение фиктивного потребителя или отправителя повлечет необходимость формального задания *фиктивных*тарифов $c_{ij}^{ф}$ (реально не существующих) для фиктивных перевозок. Поскольку нас интересует определение наиболее выгодных *реальных* перевозок, то необходимо предусмотреть, чтобы при решении задачи (при нахождении опорных планов) *фиктивные* перевозки не рассматривались до тех пор, пока не будут определены все реальные перевозки. Для этого надо фиктивные перевозки сделать невыгодными, чтобы при поиске решения задачи их рассматривали в самую последнюю очередь. Таким образом, если целевая функция стремится к min, то затраты берутся во всех фиктивных клетках таблицы произвольные, одинаковые и на порядок выше настоящих цен, т.е. величина фиктивных тарифов должна превышать максимальный из реальных тарифов, используемых в модели: $c_{ij}^{ф} > \max c_{ij} \ \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$. Если целевая функция стремится kmax, то $c_{ij}^{ф}$ берётся равная нулю.

Развёрнутая форма записи модели транспортной задачи.

Для удобства, прежде чем писать модель, запишем в виде матрицы цен все значения c_{ij}. А также в виде матрицы грузоперевозок переменные x_{ij}.

Матрица цен:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11}\ c_{12}\ \ldots c_{1n} \\ c_{21}\ c_{22} \ldots c_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{m1}\ c_{m2} \ldots c_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица $C = (c_{ij})_{m*n}$называется также матрицей тарифов (издержек или транспортных расходов).

Матрица грузоперевозок:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11}\ x_{12}\ \ldots x_{1n} \\ x_{21}\, x_{22} \ldots x_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1}\ x_{m2} \ldots x_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица $X = (x_{ij})_{m*n}$ еще называется планом транспортной задачи.

Модель транспортной задачи будет выглядеть следующим образом.

I. Целевая функция описывает затраты на перевозку грузов:

$Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{2n}x_{2n} + \ldots$

$+ c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn} \rightarrow \min$.

II. Система ограничений описывает второе и третье требования для x_{ij} из постановки задачи.

1 группа: условие полного вывоза грузов от поставщиков (сумма грузов, вывезенных от поставщика должна быть равна наличию):

$x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}= b_1$,

$x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n}= b_2$,

……………………

$x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}= b_m$;

2 группа: условие удовлетворения потребителя (сумма грузов привезённых потребителю должна быть равна его потребности):

$x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{m1}=a_1$,

$x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{m2}=a_2$,

…………………….

$x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}= a_n$.

III. Условие неотрицательности переменных величин $x_{11} \geq 0$, $x_{12} \geq 0$, …, $x_{mn} \geq 0$.

Структурная форма записи модели транспортной задачи.

В специализированной литературе модели даются в структурной форме.

II. $Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$.

II.

3) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i,\ i = 1,2,\ldots,m$

4) $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_j,\ j = 1,2,\ldots,n$

III. $x_{ij} \geq 0$ (i = 1,2,…,m, j = 1,2,…,n).

Табличная форма записи модели транспортной задачи.

Общепринято в таблице информацию по поставщикам располагать по строкам, по потребителю – по столбцам.

Размер таблицы: строк m+2, столбцов n+2.

Матрицы транспортных расходов и перевозок совмещают обычно в одну двойную матрицу – *матрицу планирования*.

Если в таблицу записана только исходная информация и нет значений x_{ij}, то это рабочая таблица или *макет* задачи. Если значения x_{ij} проставлены, то получаем первый вариант решения задачи. В такой форме задачи решаются.

Таблица 5 – Общий вид транспортной матрицы

$\overbrace{\hspace{20em}}^{\text{потребители}}$

	1	2	…	n	b_i
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	b_1
2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	b_2

поставщики

	x_{21}	x_{22}		x_{2n}	
…	…	…	…	…	…
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	b_m
a_j	a_1	a_2	…	a_n	$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{i=1}^{m} b_i$

Кроме основных условий, в транспортных задачах может встретиться ряд дополнительных, ограничивающих количественные связи между отдельными потребителями и поставщиками. Характер этих ограничений и способы решения задачи при наличии дополнительных ограничений заключаются в следующем.

1. Полное отсутствие связи между поставщиком и потребителем, то есть x_{ij}= 0. Это означает, что в данной клетке матрицы искомый объем перевозок должен быть равен нулю. В этом случае оценка переменной завышается на большую величину, обычно обозначаемую буквой *M*, и «попадание» груза в эту клетку нежелательно, так как целевая функция стремиться к минимуму (и занижается, если $Z \rightarrow$max).

2. Наличие частной заранее фиксированной связи между поставщиками и потребителями, то есть x_{ij}= q (искомый объем перевозок от i-го поставщика к j-му потребителю должен быть строго равен q). Тогда, до начала решения задачи от величины грузов соответствующего поставщика и потребителя вычитается величина q, затем в соответствующую клетку пересечения поставщика и потребителя записывается завышенная оценка M (при Z$\rightarrow$min и заниженная при Z$\rightarrow$max) и задача решается обычным методом.

3. $x_{ij} \geq$ q, то есть искомый объем перевозок от i-го поставщика к j-му потребителю должен быть не меньше величины q. В этом случае до начала решения от величины грузов соответствующего поставщика и потребителя вычитается величина q, затем задача решается обычным путем.

Модель транспортной задачи позволяет решать любые задачи, в которых параметры имеют одинаковые единицы измерения. Такие модели называются однопродуктовыми. К ним можно отнести задачу оптимизации использования машинно-тракторного парка в отдельные агротехнические сроки, задачу оптимального размещения посевов сельскохозяйственных культур по участкам с различным плодородием почв и т.д.

2. Алгоритм метода потенциалов.

Математическая модель транспортной задачи относится к задачам линейного программирования и может быть решена симплексным методом. Однако ввиду исключительной практической важности этой задачи и специфики ограничений (ограничения заданы в виде уравнений; каждая неизвестная входит лишь в два уравнения; коэффициенты при неизвестных – единицы) для ее решения созданы специальные алгоритмы. Самым распространенным методом решения транспортной задачи является метод потенциалов.

Решение транспортной задачи разбивается на два этапа:

3) определение начального допустимого базисного решения (первого опорного плана) – первоначальное распределение поставок. Достигается посредством распределительных методов;

4) построение последовательных итераций (шагов), улучшающих опорные планы (каждый новый план не должен увеличивать суммарные затраты при $Z \rightarrow$min и уменьшать при $Z \rightarrow$max). Достигается посредством метода потенциалов.

После выполнения первого этапа шаги второго этапа проводятся до тех пор, пока не будет найдено оптимальное распределение поставок.

1-ый этап. Построение первоначального опорного плана

План составляется последовательным заполнением по одной клетке в таблице так, что каждый раз либо полностью удовлетворяется потребность одного из потребителей, либо полностью вывозится груз от некоторого поставщика. В теории доказывается, что базисное решение системы ограничений (из $m+n$ уравнений с mn переменными) в условиях транспортной задачи имеет $m+n$–1 базисных переменных (ее ранг равен $m+n$–1), поэтому, совершив $m+n$–1 указанных шагов, получим первый опорный план. Опорные планы получают несколькими методами, называемыми распределительными. Среди них можно выделить: метод северо-западного угла, метод наилучших цен и метод аппроксимации. Последние два метода относятся также к приближенным распределительным методам и будут рассмотрены в третьей части данного раздела.

Пример.

$$b_1 = 1500 \quad a_1 = 800 \qquad\qquad C = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 15 & 16 \\ 17 & 15 & 14 & 13 \\ 15 & 14 & 13 & 16 \end{pmatrix}$$
$$b_2 = 1000 \quad a_2 = 1200$$
$$b_3 = 2000 \quad a_3 = 1400$$
$$a_4 = 1100$$

Решить на минимум, заполнив рабочую таблицу методом северо-западного угла.

Таблица 6 – Заполнение рабочей таблицы методом северо-западного угла

	1	2	3	4	b_i
1	13 800	12 700	15	16	1500
2	17	15 500	14 500	13	1000
3	15	14	13 900	16 1100	2000
a_j	800	1200	1400	1100	4500

Z_{min} = 800*13 + 700*12 + 500*15 + 500*14 + 900*13 + 1100*16 = 62600.

При этом методе на каждом шаге построения первого опорного плана заполняется верхняя левая клетка («северо-западный угол») оставшейся части таблицы. При таком методе заполнение таблицы начинается с клетки (1,1) и заканчивается в клетке (m,n), то есть идет как бы по диагонали таблицы перевозок.

Методы наилучших цен и аппроксимации также можно использовать на данном этапе.

2-ой этап. Метод потенциалов. Оптимальность базисного решения.

Полученный одним из распределительных методов опорный план сначала необходимо проверить на вырожденность. Вариант будет невырожденным, если число заполненных клеток N равно сумме поставщиков и потребителей за вычетом единицы:

$$N = m + n - 1.$$

Если на каком-то этапе решения получится вырожденный план (т.е. $N<m + n - 1$), то его необходимо пополнить, проставив в недостающем числе клеток ноль. Поскольку этим дополнительным клеткам будут отвечать нулевые перевозки, то общий баланс и суммарная стоимость перевозок плана при этом не изменится. Однако проводить пополнение плана, выбирая клетки произвольно, нельзя. Необходимо учитывать условие ацикличности. План называется ациклическим, если его базисные клетки (заполненные грузом) не содержат циклов. Циклом в транспортной таблице называется несколько клеток, соединенных замкнутой ломаной линией так, что две соседние вершины ломаной

расположены либо в одной строке, либо в одном столбце. Ломаная может иметь точки самопересечения, но не в клетках цикла.

Невырожденный вариант необходимо проверить на оптимальность.

Теорема об оптимальности. Вариант решения задачи будет оптимальным, если найдется такая система абстрактных чисел, называемых потенциалами поставщиков и потенциалами потребителей, при которой для всех клеток таблицы будет выполняться условие:

$$v_j - u_i \le c_{ij} \text{(при } Z \to \min) \text{ и } v_j - u_i \ge c_{ij} \text{ (при } Z \to \max),$$

где v_j – потенциалы потребителей,

u_i – потенциалы поставщиков,

c_{ij} – цена перевозки единицы груза (условные т/км).

Причем, $v_j - u_i = c_{ij}$ для занятых клеток и $v_j - u_i \le c_{ij}$ (или $v_j - u_i \ge c_{ij}$) для свободных клеток.

На основании этой теоремы исследование на оптимальность проводится в 2 этапа:

3) для каждой занятой клетки составляется уравнение $v_j - u_i = c_{ij}$ в результате чего получается система из $m+n-1$ таких уравнений. Решается эта система относительно потенциалов. Так как в данной системе число уравнений меньше числа неизвестных (т.е. система имеет бесчисленное множество решений), а нам надо найти одно любое решение, то какому-либо потенциалу можно присвоить произвольное число и относительно него рассчитать остальные значения. Для удобства расчетов чаще всего берут $u_1=0$;

4) для свободных клеток таблицы проверяется условие $v_j - u_i \le c_{ij}$ (или $v_j - u_i \ge c_{ij}$). Вариант будет оптимальным, если для всех свободных клеток это условие выполнится.

Для каждой клетки, в которой не выполняется условие $v_j - u_i \le c_{ij}$ (или $v_j - u_i \ge c_{ij}$), рассчитывается оценка $\alpha_{ij} = |(v_j - u_i) - c_{ij}|$. Клетка, содержащая α_{ij}, называется «плохой», а полученная оценка используется при перераспределении грузов.

То есть исследование на оптимальность не только отвечает на вопрос, оптимален вариант или нет, но еще и подсказывает, в каком направлении надо его улучшать при необходимости.

Перераспределение грузов и получение нового варианта.

Смысл перераспределения заключается в том, чтобы в самую «плохую» клетку (т.е. значение α_{ij} наибольшее) перераспределить какое-то количество груза. Перераспределение грузов должно отвечать следующим требованиям:

4) должны выполняться требования системы ограничений модели;

5) вариант решения задачи должен остаться ациклическим, т.е. не должна появиться лишняя заполненная клетка;

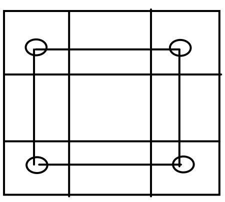
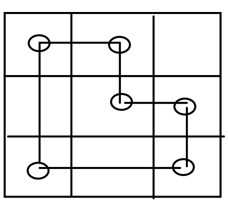
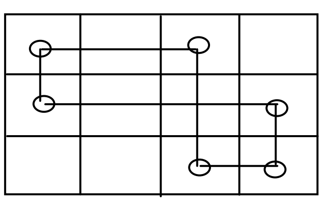
6) должно выполняться условие неотрицательности в модели, т.е. $x_{ij} \ge 0$.

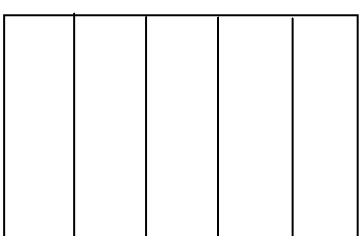
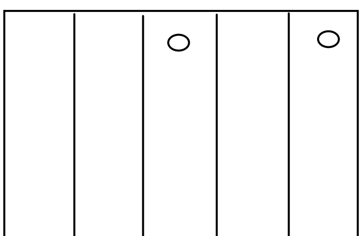
С учетом данных требований, *алгоритм перераспределения* будет состоять из двух шагов:

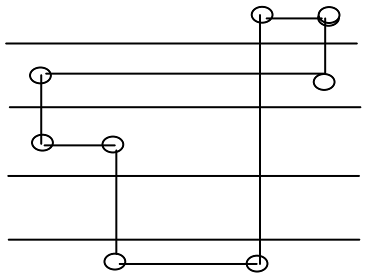
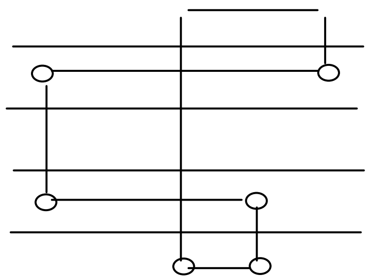
1) наметить маршрут перераспределения груза.

Для этого в таблице строится цикл перераспределения объектов перевозок. Цикл представляет собой замкнутую ломаную линию, которая начинается в той свободной клетке, где условие оптимальности нарушается наиболее сильно (т.е. там, где α_{ij} наибольшая).

Некоторые разновидности циклов.

а)  б)  в) 

г)  д) 

При построении цикла можно проходить как через занятые, так и через свободные клетки таблицы, но повороты делаются только в занятых клетках и под прямым углом;

2) определить порядок изменения объемов перевозок в вершинах цикла.

Для этого в вершинах цикла расставляют знаки «+» и «–», причем в начале цикла (клетка, где α_{ij}наибольшая) ставится знак «+», в следующей «–», в следующей «+» и т.д. Получаем чередование знаков. Направление движения при расстановке знаков от свободной клетки безразлично, так как количество вершин цикла является четной величиной. Наличие знака «+» в вершине цикла показывает, что объем перевозок необходимо увеличить, а «–» – уменьшить. Увеличение и уменьшение объемов перевозок в вершинах цикла производится на одинаковую величину, которая выбирается равной наименьшему из объемов перевозок в тех клетках, где в вершине цикла стоит знак «–». Таким образом, из отрицательной вершины контура необходимо выбрать наименьшее значение x_{ij}. В новой рабочей таблице получаем следующий вариант решения задачи: выбранное значение x_{ij} из отрицательных вершин контура предыдущей таблицы отнимаем, а к положительным – прибавляем. Заполненные клеточки, не являющиеся вершинами контура, не меняют свое значение.

В итоге получаем новый вариант. Следующие шаги поиска оптимального варианта совершаются по аналогии вышеизложенного.

Замечание: алгоритм перераспределения одинаков и при $Z \to \min$ и при $Z \to \max$.

3. Решение транспортной задачи в MSExcel.

Задача 1

Требуется перевезти одноименный груз из трех пунктов отправления в три пункта назначения. Количество грузов, подлежащих отправлению с каждого склада, потребности в них каждого потребителя и расстояния в километрах от каждого пункта отправления в каждый пункт назначения приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2 – Расстояния перевозки, км

Поставщики	Потребители			Наличие грузов, т
	1	2	3	
1	15	17	23	900
2	9	19	8	800
3	24	21	32	550
Потребность в грузах, т	700	800	750	2250 / 2250

Нужно определить, из какого пункта отправления следует удовлетворять спрос потребителей, чтобы общая сумма объема перевозок (ткм) была минимальной.

Решение:

1. Проверка сбалансированности задачи

Просуммируем наличие грузов у поставщиков

$$\sum_{i=1}^{3} b_i = 900+800+550=2250$$

Просуммируем потребности потребителей в грузах

$$\sum_{j=1}^{3} a_j = 700+800+750=2250$$

$\sum_{i=1}^{3} b_i = \sum_{j=1}^{3} a_j$, следовательно, задача сбалансированная (закрытого типа).

2. Определение переменных

Обозначим через x_{ij} [т] количество грузов, которые будут перевезены от i-го поставщика j-му потребителю.

3. I. Целевая функция

Формальная целевая функция имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(X) = {} & 15x_{11} + 17x_{12} + 23x_{13} + \\ & + 9x_{21} + 19x_{22} + 8x_{23} + \\ & + 24x_{31} + 21x_{32} + 32x_{33} \to \min \end{aligned}$$

II. Основные ограничения

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 900, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 800, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 550, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 700, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 800, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 750. \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности

$$\forall x_{ij} \ge 0 \quad \left(i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,3}\right).$$

4. Модель задачи в общем виде:

$$\begin{aligned} \mathrm{I.} \quad \mathrm{F}(X) = {} & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + \\ & + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + \\ & + c_{31}x_{31} + c_{32}x_{32} + c_{33}x_{33} \to \min \end{aligned}$$

$$II. \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = b_1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = b_2, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = b_3, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = a_1, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = a_2, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = a_3. \end{cases}$$

$$III. \quad \forall x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,3}\right)$$

5. Модель задачи в структурной форме:

$$I. \quad F(x) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij} \to \min ,$$

$$II. \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = b_i , & i = \overline{1,3} \\ \sum_{i=1}^{3} x_{ij} = a_j , & j = \overline{1,3} \end{cases} ,$$

$$III. \forall x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,3}\right)$$

6. Для решения данной задачи в Excel необходимо:

1) под запись целевой функции отвести ячейку A1;

2) под запись ограничений – ячейки столбца B (количество ячеек совпадает с количеством ограничений): B1, B2, B3, B4, B5, B6;

3) под запись искомых переменных отвести ячейки столбцов C, D, E (количество потребителей совпадает с количеством столбцов,
количество поставщиков – с количеством строк).

**Примечание:* искомые переменные x_{ij} будут находиться в следующих ячейках:
($x_{11} \to C1 x_{12} \to D1 x_{13} \to E1$
$x_{21} \to C2 x_{22} \to D2 x_{23} \to E2$
$x_{31} \to C3 x_{31} \to D2 x_{33} \to E3$).

Порядок выполнения работы:

1. Ввести в ячейку A1 формулу целевой функции (рисунок 3.1):
=15*C1+17*D1+23*E1+
+ 9*C2+19*D2 + 8*E2+
+24*C3+21*D3+32*E3;

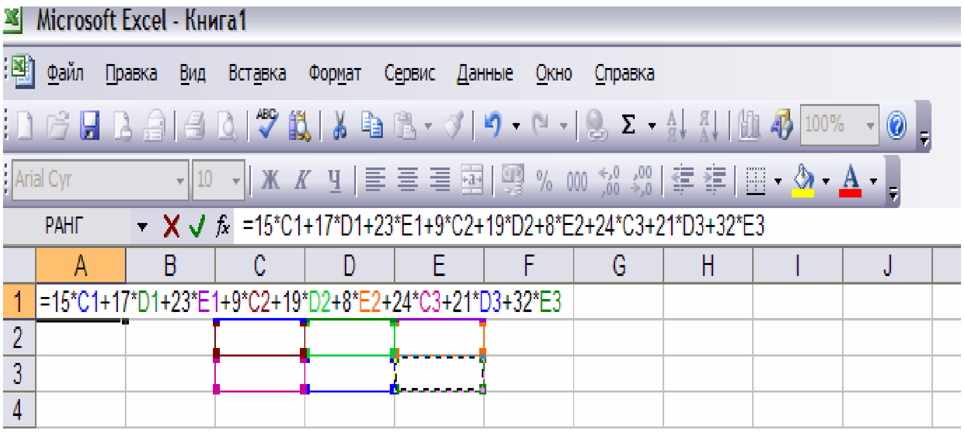


Рисунок 3.1 – Ввод целевой функции в Excel

2. а) Ввести в ячейку B1 левую часть 1-го ограничения: = C1+D1+E1 (рисунок 3.2)

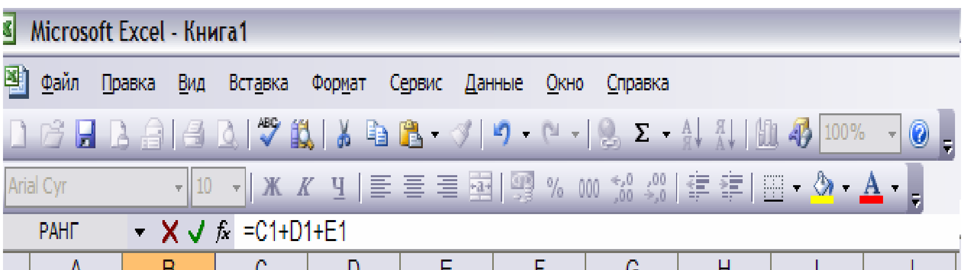


Рисунок 3.2 – Ввод ограничений в Excel

б) Ввести в ячейку B2 левую часть 2-го ограничения:
= C2+D2+E2
в) Ввести в ячейку B3 левую часть 3-го ограничения:
= C3+D3+E3
г) Ввести в ячейку B4 левую часть 4-го ограничения:
= C1+C2+C3
д) Ввести в ячейку B5 левую часть 5-го ограничения:
= D1+D2+D3
е) Ввести в ячейку B6 левую часть 6-го ограничения:
= E1+E2+E3

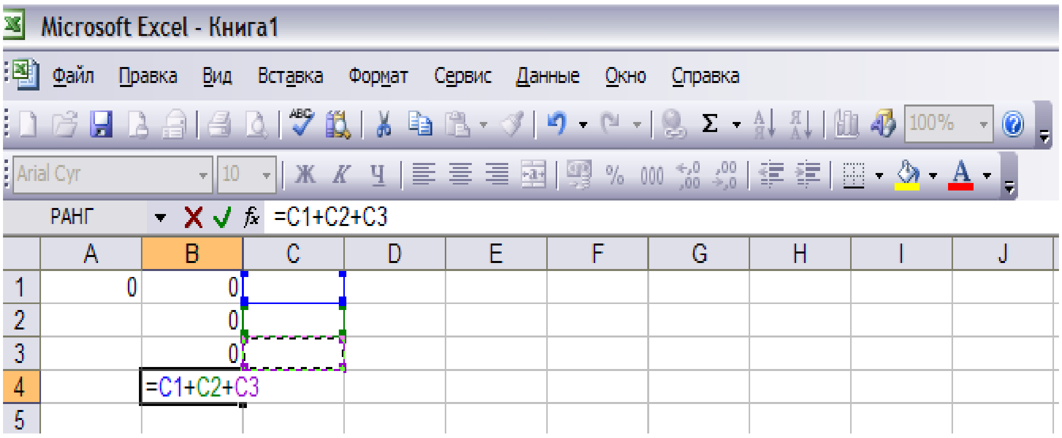


Рисунок 3.3 – Ввод ограничений в Excel

3. На панели инструментов выбрать опцию "Сервис", а в ней вкладку "Поиск решения"

Примечание

Если "Поиск решения" отсутствует, нужно выполнить команду "Сервис"–"Надстройки". В окне диалога "Надстройки" нужно установить флажок напротив строки "Поиск решения".

4. В окне диалога "Поиск решения" в поле ввода "Установить целевую ячейку" нужно ввести ссылку на ячейку A1. Необходимо выбрать способ адресации ячеек в абсолютной системе координат (т.е. указать не A1, а $A$1). Также нужно поступать с другими переменными.

5. В окне диалога "Поиск решения" нужно установить переключатель (рисунок 3.4).

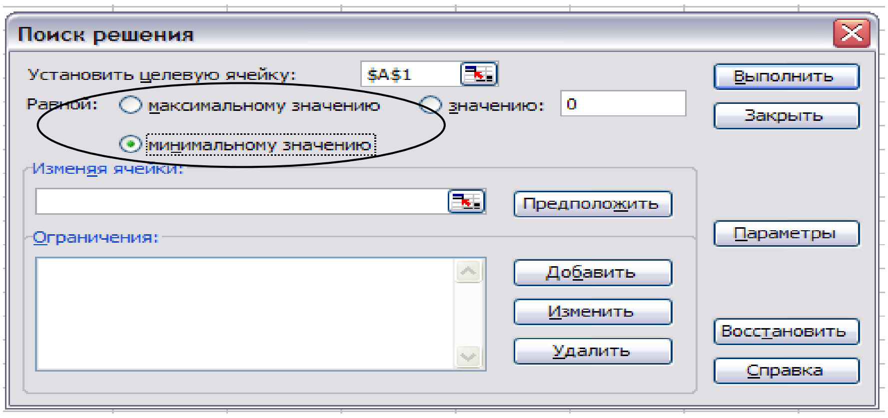


Рисунок 3.4 – Работа в диалоговом окне «Поиск решения»

6. В поле ввода "Изменяя ячейки" нужно указать ссылки на ячейки, содержащие искомые переменные, т.е. диапазон ячеек $C$1: $E$3 (рисунок 3.5).

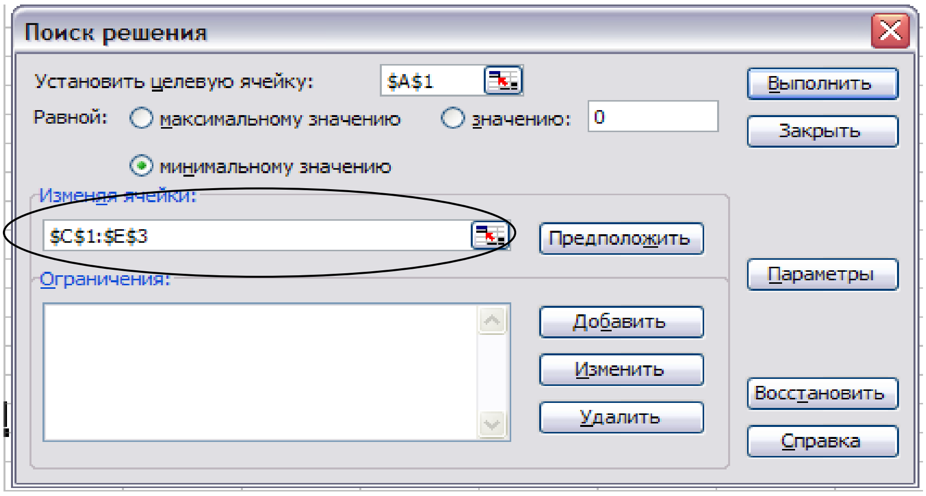


Рисунок 3.5 – Поле ввода ячеек, обозначающих искомые переменные

7. В поле ввода "Ограничения" при нажатии кнопки "Добавить" появляется окно диалога "Добавить ограничения". В поле ввода "Ссылка на ячейку" вводится $B$1. В поле ввода "Ограничение" вводится = и число 900. При помощи кнопки "Добавить" таким же образом вводятся все остальные ограничения (ячейки $B$2:$B$6) (рисунок 3.6).

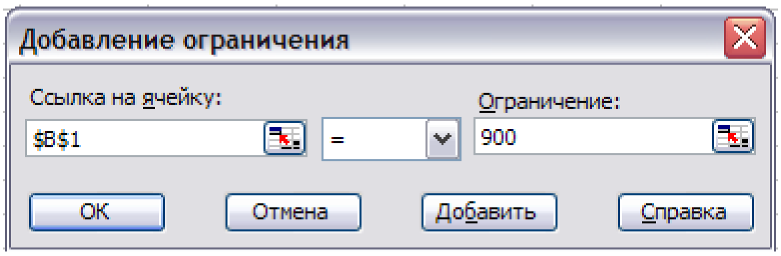


Рисунок 3.6 – Диалоговое окно «Добавление ограничения»

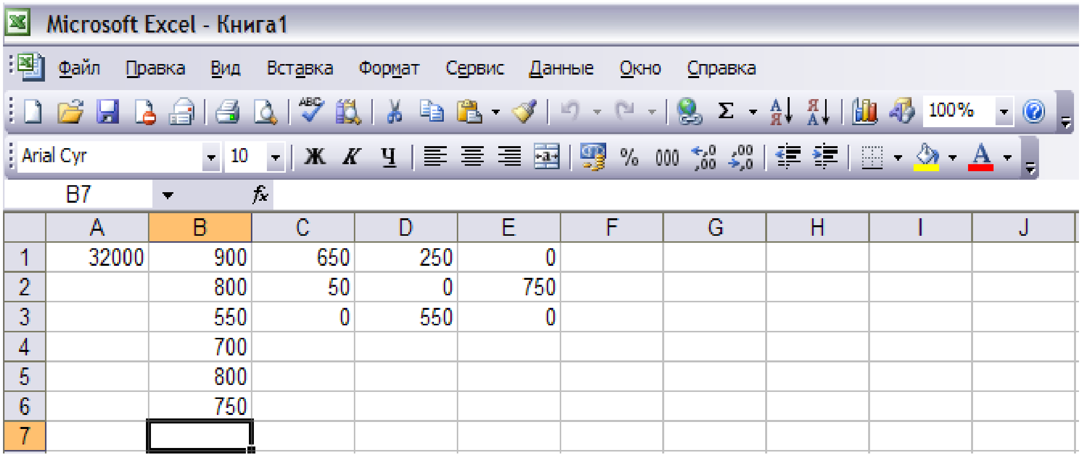
8. Для ввода ограничений на неотрицательность искомых переменных в окне диалога "Добавить ограничения" в поле ввода "Ссылка на ячейку" нужно ввести ссылку на ячейку $C$1, а в поле ввода "Ограничения" нужно ввести >= и число 0. При помощи кнопки "Добавить" таким же образом вводятся условия неотрицательности оставшихся искомых переменных. Либо выделяется диапазон ячеек $C$1: $E$3 и задается >= и число 0. После ввода последнего ограничения нажмите «ОК».

Примечание

Если в задаче имеется условие целочисленности искомых переменных, то в диалоговом окне «Добавление ограничений» в поле ввода "Ссылка на ячейку" нужно ввести ссылку на ячейку $C$1, а в поле ввода знака ограничения нужно ввести «цел». При помощи кнопки "Добавить" таким же образом вводятся условия целочисленности оставшихся искомых переменных. Либо выделяется диапазон ячеек $C$1: $E$3 и задается «цел». После ввода последнего ограничения нажмите «ОК».

9. После нажатия кнопки "Выполнить" Excel рассчитывает результат и открывает окно диалога "Результаты поиска решения". В этом диалоге в окне "Тип отчета" нужно

выбрать "Результаты" и нажать Ok. Перед листом, где записана постановка задачи, будет вставлен лист "Отчет по результатам 1", а на экране будет выдан результат решения задачи (рисунок 3.7).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	32000	900	650	250	0					
2		800	50	0	750					
3		550	0	550	0					
4		700								
5		800								
6		750								
7										

Рисунок 3.7 – Результаты решения задачи

Интерпретация результатов задачи

Полученные значения в ячейках, содержащих формулы целевой функции и ограничений, являются результатом расчета целевой функции и соответствующих ограничений.

Результат, полученный в ячейке A1, означает общую сумму объема грузоперевозок в ткм.

Ячейки B1, B2, B3 показывают выполнение условия полного вывоза груза от поставщика. Ячейки B4, B5, B6 показывают выполнение условия полного удовлетворения потребностей потребителя.

Значения ячеек в диапазоне $C$1: $E$3 показывают количество груза (в т), перевезенного от соответствующего поставщика, соответствующему потребителю. Значения данного диапазона превышают 0, следовательно условие неотрицательности искомых переменных выполнено.

Ответ

Оптимальные перевозки грузов предусматривают перевозку от 1-го поставщика 1-му потребителю 650 т, от 1-го поставщика 2-му потребителю – 250 т, от 2-го поставщика 1-му потребителю – 50 т, а 3-му потребителю – 750 т. 3-й поставщик отвезет свой груз только 2-му потребителю в количестве 550 т. Минимальный объем перевозок составит 32000 т км.

2.4Лабораторная работа 9,10 (4 часов)

Тема: «Транспортная задача»

2.4.1 Цель работы: Сформировать навыки моделирования экономических процессов при помощи линейного программирования

2.4.2 Задачи работы:

1. Решение транспортной задачи в MSExcel.
2. Экономическая интерпретация результатов решения задач.

2.4.3 Описание (ход) работы:

1. Решение транспортной задачи в MSExcel.

Требуется перевезти одноименный груз из трех пунктов отправления в три пункта назначения. Количество грузов, подлежащих отправлению с каждого склада, потребности в них каждого потребителя и расстояния в километрах от каждого пункта отправления в каждый пункт назначения приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2 – Расстояния перевозки, км

Поставщики	Потребители			Наличие грузов, т
	1	2	3	
1	15	17	23	900
2	9	19	8	800
3	24	21	32	550
Потребность в грузах, т	700	800	750	2250 / 2250

Нужно определить, из какого пункта отправления следует удовлетворять спрос потребителей, чтобы общая сумма объема перевозок (ткм) была минимальной.

Решение:

1. Проверка сбалансированности задачи

Просуммируем наличие грузов у поставщиков

$$\sum_{i=1}^{3} b_i = 900+800+550=2250$$

Просуммируем потребности потребителей в грузах

$$\sum_{j=1}^{3} a_j = 700+800+750=2250$$

$\sum_{i=1}^{3} b_i = \sum_{j=1}^{3} a_j$, следовательно, задача сбалансированная (закрытого типа).

2. Определение переменных

Обозначим через x_{ij} [т] количество грузов, которые будут перевезены от *i*-го поставщика *j*-му потребителю.

3. I. Целевая функция

Формальная целевая функция имеет вид:

$$\begin{aligned} F(X) = {} & 15x_{11} + 17x_{12} + 23x_{13} + \\ & + 9x_{21} + 19x_{22} + 8x_{23} + \\ & + 24x_{31} + 21x_{32} + 32x_{33} \to \min \end{aligned}$$

II. Основные ограничения

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=900, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=800, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}=550, \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=700, \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=800, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=750\,. \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности

$$\forall x_{ij} \geq 0 \quad \left(i=\overline{1,3}; \quad j=\overline{1,3}\right).$$

4. Модель задачи в общем виде:

$$\text{I.}\quad F(X)=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+c_{13}x_{13}+$$
$$+c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+c_{23}x_{23}+$$
$$+c_{31}x_{31}+c_{32}x_{32}+c_{33}x_{33}\to\min$$

$$II.\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=b_1, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=b_2, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}=b_3, \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=a_1, \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=a_2, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=a_3\,. \end{cases}$$

$$III.\quad \forall x_{ij} \geq 0 \quad \left(i=\overline{1,3}; \quad j=\overline{1,3}\right).$$

5. Модель задачи в структурной форме:

$$I.\quad F(x)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}c_{ij}\,x_{ij}\to\min\,,$$

$$II.\qquad \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{3}x_{ij}=b_i\,, \quad i=\overline{1,3} \\ \sum\limits_{i=1}^{3}x_{ij}=a_j\,, \quad j=\overline{1,3} \end{cases},$$

$$III.\ \forall x_{ij} \geq 0 \quad \left(i=\overline{1,3}; \quad j=\overline{1,3}\right).$$

6. Для решения данной задачи в Excel необходимо:

4) под запись целевой функции отвести ячейку А1;

5) под запись ограничений – ячейки столбца В (количество ячеек совпадает с количеством ограничений): B1, B2, B3, B4, B5, B6;

6) под запись искомых переменных отвести ячейки столбцов С, D, E (количество потребителей совпадает с количеством столбцов,

количество поставщиков – с количеством строк).

**Примечание:* искомые переменные x_{ij} будут находиться в следующих ячейках:

$(x_{11} \to C1 x_{12} \to D1 x_{13} \to E1$

$x_{21} \to C2 x_{22} \to D2 x_{23} \to E2$

$x_{31} \to C3 x_{31} \to D2 x_{33} \to E3)$.

Порядок выполнения работы:

1. Ввести в ячейку А1 формулу целевой функции (рисунок 3.1):

=15*C1+17*D1+23*E1+

\+ 9*C2+19*D2 + 8*E2+

+24*C3+21*D3+32*E3;

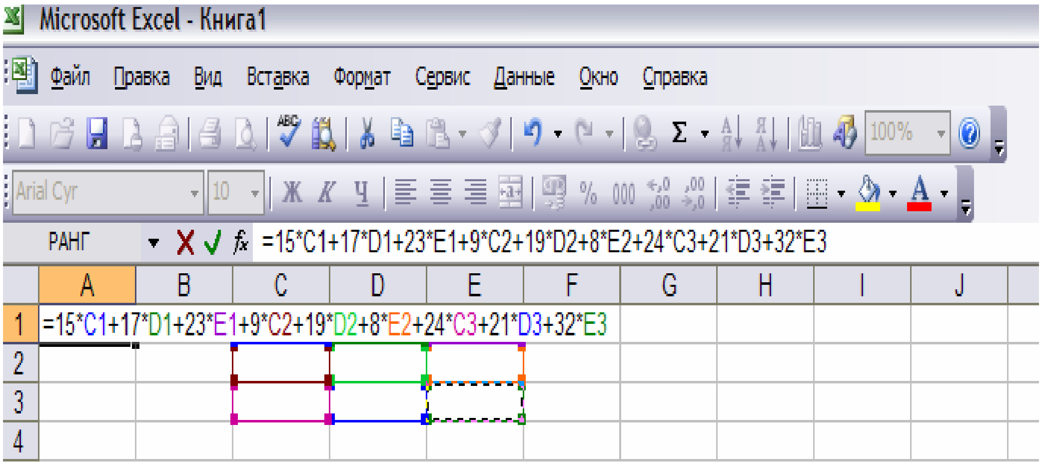


Рисунок 3.1 – Ввод целевой функции в Excel

2. а) Ввести в ячейку В1 левую часть 1-го ограничения: = С1+D1+E1 (рисунок 3.2)

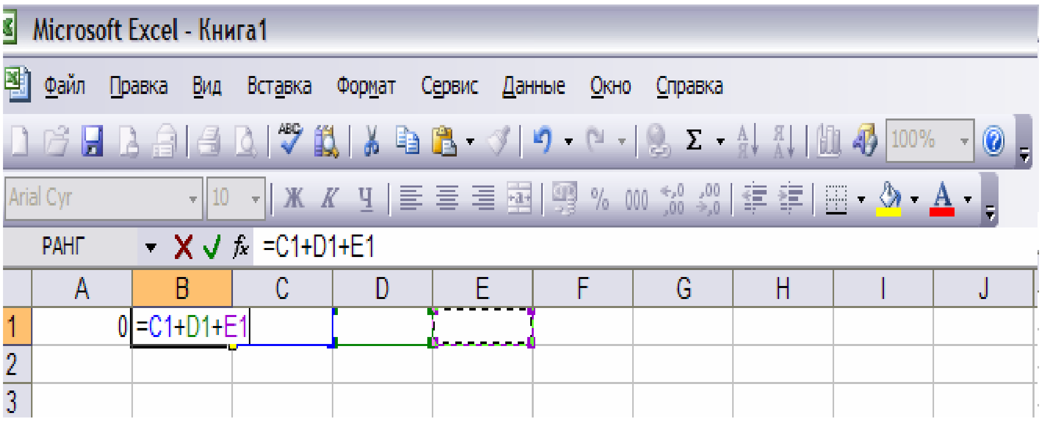


Рисунок 3.2 – Ввод ограничений в Excel

б) Ввести в ячейку В2 левую часть 2-го ограничения:

= С2+D2+E2

в) Ввести в ячейку В3 левую часть 3-го ограничения:

= С3+D3+E3

г) Ввести в ячейку В4 левую часть 4-го ограничения:

= C1+C2+C3
д) Ввести в ячейку B5 левую часть 5-го ограничения:
= D1+D2+D3
е) Ввести в ячейку B6 левую часть 6-го ограничения:
= E1+E2+E3

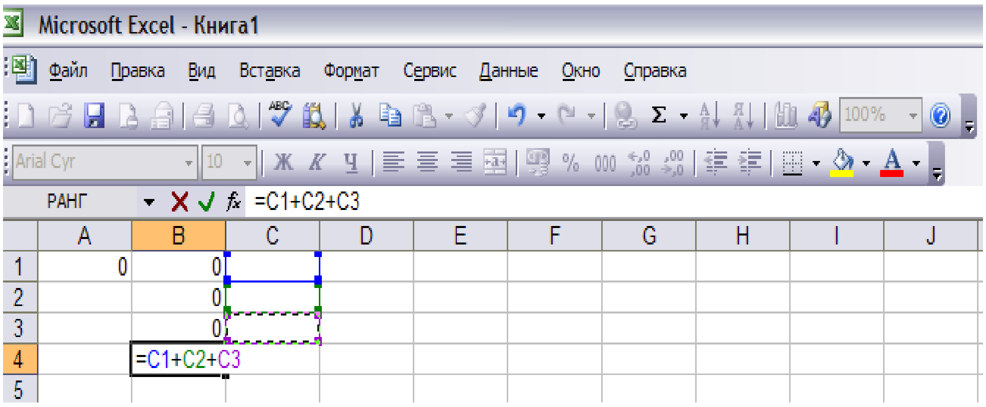


Рисунок 3.3 – Ввод ограничений в Excel

3. На панели инструментов выбрать опцию "Сервис", а в ней вкладку "Поиск решения"

Примечание

Если "Поиск решения" отсутствует, нужно выполнить команду "Сервис"–"Надстройки". В окне диалога "Надстройки" нужно установить флажок напротив строки "Поиск решения".

4. В окне диалога "Поиск решения" в поле ввода "Установить целевую ячейку" нужно ввести ссылку на ячейку A1. Необходимо выбрать способ адресации ячеек в абсолютной системе координат (т.е. указать не A1, а $A$1). Также нужно поступать с другими переменными.

5. В окне диалога "Поиск решения" нужно установить переключатель (рисунок 3.4).

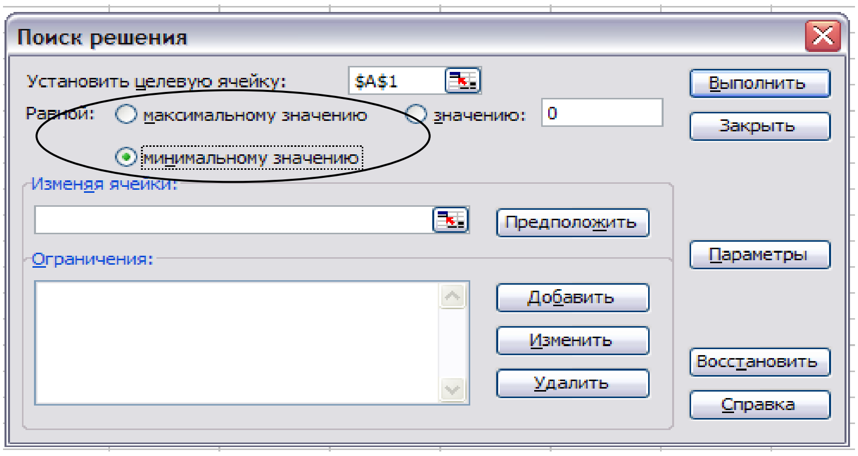


Рисунок 3.4 – Работа в диалоговом окне «Поиск решения»

6. В поле ввода "Изменяя ячейки" нужно указать ссылки на ячейки, содержащие искомые переменные, т.е. диапазон ячеек $C$1: $E$3 (рисунок 3.5).

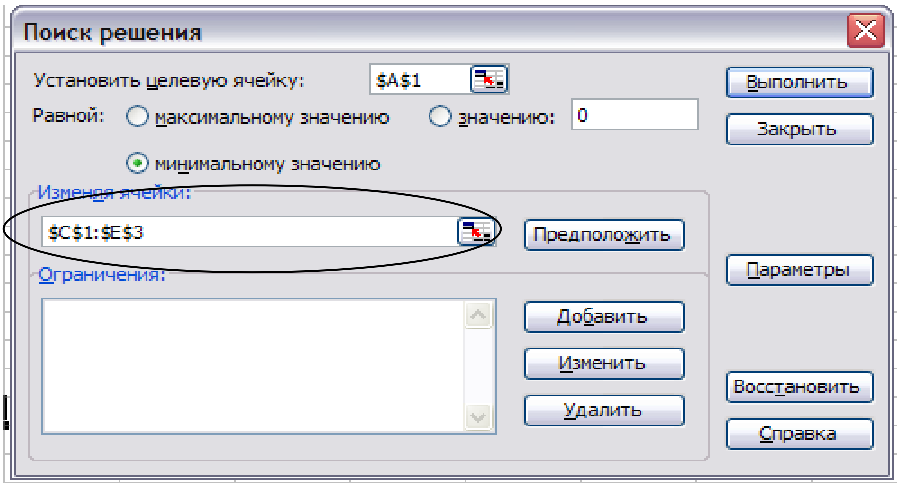


Рисунок 3.5 – Поле ввода ячеек, обозначающих искомые переменные

7. В поле ввода "Ограничения" при нажатии кнопки "Добавить" появляется окно диалога "Добавить ограничения". В поле ввода "Ссылка на ячейку" вводится $B$1. В поле ввода "Ограничение" вводится = и число 900. При помощи кнопки "Добавить" таким же образом вводятся все остальные ограничения (ячейки $B$2:$B$6) (рисунок 3.6).

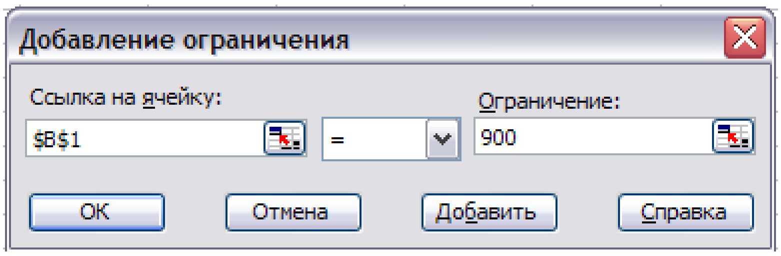


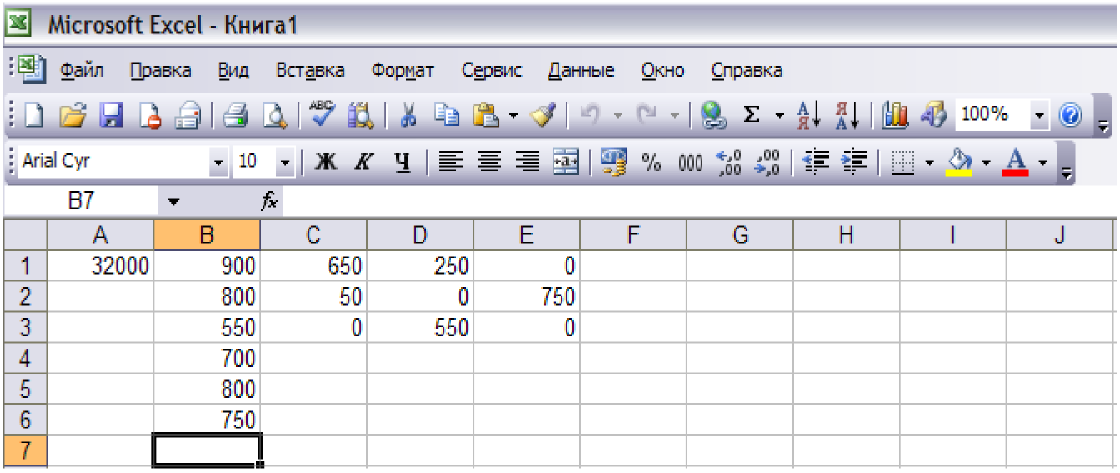
Рисунок 3.6 – Диалоговое окно «Добавление ограничения»

8. Для ввода ограничений на неотрицательность искомых переменных в окне диалога "Добавить ограничения" в поле ввода "Ссылка на ячейку" нужно ввести ссылку на ячейку $C$1, а в поле ввода "Ограничения" нужно ввести >= и число 0. При помощи кнопки "Добавить" таким же образом вводятся условия неотрицательности оставшихся искомых переменных. Либо выделяется диапазон ячеек $C$1: $E$3 и задается >= и число 0. После ввода последнего ограничения нажмите «ОК».

Примечание

Если в задаче имеется условие целочисленности искомых переменных, то в диалоговом окне «Добавление ограничений» в поле ввода "Ссылка на ячейку" нужно ввести ссылку на ячейку $C$1, а в поле ввода знака ограничения нужно ввести «цел». При помощи кнопки "Добавить" таким же образом вводятся условия целочисленности оставшихся искомых переменных. Либо выделяется диапазон ячеек $C$1: $E$3 и задается «цел». После ввода последнего ограничения нажмите «ОК».

9. После нажатия кнопки "Выполнить" Excel рассчитывает результат и открывает окно диалога "Результаты поиска решения". В этом диалоге в окне "Тип отчета" нужно выбрать "Результаты" и нажать Ok. Перед листом, где записана постановка задачи, будет вставлен лист "Отчет по результатам 1", а на экране будет выдан результат решения задачи (рисунок 3.7).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	32000	900	650	250	0					
2		800	50	0	750					
3		550	0	550	0					
4		700								
5		800								
6		750								
7										

Рисунок 3.7 – Результаты решения задачи

2. Экономическая интерпретация результатов решения задач.

Полученные значения в ячейках, содержащих формулы целевой функции и ограничений, являются результатом расчета целевой функции и соответствующих ограничений.

Результат, полученный в ячейке А1, означает общую сумму объема грузоперевозок в ткм.

Ячейки В1, В2, В3 показывают выполнение условия полного вывоза груза от поставщика. Ячейки В4, В5, В6 показывают выполнение условия полного удовлетворения потребностей потребителя.

Значения ячеек в диапазоне $C$1: $E$3 показывают количество груза (в т), перевезенного от соответствующего поставщика, соответствующему потребителю. Значения данного диапазона превышают 0, следовательно условие неотрицательности искомых переменных выполнено.

Ответ

Оптимальные перевозки грузов предусматривают перевозку от 1-го поставщика 1-му потребителю 650 т, от 1-го поставщика 2-му потребителю – 250 т, от 2-го поставщика 1-му потребителю – 50 т, а 3-му потребителю – 750 т. 3-й поставщик отвезет свой груз только 2-му потребителю в количестве 550 т. Минимальный объем перевозок составит 32000 т км.

Порядок оформления задачи

1. Проверка сбалансированности задачи

$$\sum_{i=1}^{3} b_i = 900+800+550=2250$$

$$\sum_{j=1}^{3} a_j = 700+800+750=2250$$

$$\sum_{i=1}^{3} b_i = \sum_{j=1}^{3} a_j \text{, задача закрытого типа}$$

2. Состав переменных

x_{ij}– количество продукции (т), перевозимой из i-гопункта отправления в j-ый пункт назначения

3. Числовая модель

$$\text{I.}\quad \begin{aligned} F(X) = {} & 15x_{11} + 17x_{12} + 23x_{13} + \\ & + 9x_{21} + 19x_{22} + 8x_{23} + \\ & + 24x_{31} + 21x_{32} + 32x_{33} \to \min \end{aligned}$$

$$\text{II.}\quad \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 900, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 800, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 550, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 700, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 800, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 750. \end{cases}$$

$$\text{III.}\quad \forall x_{ij} \ge 0 \quad \left(i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,3}\right).$$

4. Общий вид экономико-математической модели

$$\text{I.}\quad \begin{aligned} F(X) = {} & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + \\ & + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + \\ & + c_{31}x_{31} + c_{32}x_{32} + c_{33}x_{33} \to \min \end{aligned}$$

$$II.\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = b_1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = b_2, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = b_3, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = a_1, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = a_2, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = a_3. \end{cases}$$

$$III.\quad \forall x_{ij} \ge 0 \quad \left(i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,3}\right).$$

5. Структурная форма экономико-математической модели

$$I.\quad F(x) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

$$II.\quad \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{3} x_{ij} = b_i, \quad i = \overline{1,3} \\ \sum\limits_{i=1}^{3} x_{ij} = a_j, \quad j = \overline{1,3} \end{cases},$$

$$III.\ \forall x_{ij} \ge 0 \quad \left(i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,3}\right).$$

6. Ответ: Минимальный объем перевозок составит 32000 т км. При этом матрица грузоперевозок будет выглядеть следующим образом:

$$X = \begin{pmatrix} 650 & 250 & 0 \\ 50 & 0 & 750 \\ 0 & 550 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 2

Составить план перевозки картофеля из 3 хозяйств 4 магазинам так, чтобы сумма расстояний на перевозку была минимальной. Наличие картофеля, потребность магазинов и расстояние от хозяйств до магазинов приведены в таблице 3.3.

Таблица 3.3 – Расстояния перевозок, км

Хозяйства	Магазин				Запасы, т
	1	2	3	4	
1	8	6	9	2	280
2	4	5	4	5	520
3	3	4	6	4	400
Потребности, т	300	250	340	210	

Задача 3

Составьте план перевозок нефтепродуктов из 3-х пунктов отправления в 4 пункта назначения. План должен обеспечить минимальные транспортные издержки и полностью удовлетворить спрос потребителей на нефтепродукты. Запас, потребности и стоимость перевозки 1т нефтепродуктов приведены в таблице 3.4.

Таблица 3.4 – Стоимость перевозок, руб.

Пункт отправления	Пункты назначения				Запасы, т
	1	2	3	4	
1	9	7	5	3	175
2	1	2	4	6	125
3	8	10	12	1	140
Потребности, т	180	110	60	40	

Задача 4

Четырем предприятиям необходимо сырье в количестве 110, 100, 80 и 40 т соответственно. Запасы сырья сосредоточены в трех пунктах хранения в количестве 90, 100 и 140 т соответственно. Известна матрица С расстояний между пунктами хранения и предприятиями. Нужно составить план перевозок сырья так, чтобы общий объем перевозок (т-км) был минимальным.

$$C = \begin{pmatrix} 20 & 40 & 60 & 100 \\ 10 & 30 & 70 & 40 \\ 40 & 80 & 130 & 70 \end{pmatrix}$$

Задача 6

Необходимо разместить сорта озимой пшеницы по предшественникам таким образом, чтобы сбор озимой ржи был максимальным.

Символ *М* указывает на отсутствие данных урожайности *i*-го сорта по соответствующему *j*–му предшественнику (клетки с этим символом являются запретными).

Таблица 3.7 – Урожайность озимой пшеницы, ц/га

Сорта озимой пшеницы	Предшественники					Всего, га
	Чистый пар	Кукуруза, убранная в стадии молочно-восковой спелости	Однолетние травы на зеленый корм	Бобовые культуры	Стерневые посевы	
Безостая 1	30,7	13,6	18,4	18,9	16,1	9185
Одесская 16	26,5	*М*	16,8	19,2	15,2	5583
Белоцерковская 198	*М*	14,4	14,1	*М*	16,5	1114
Мичуринка	16,8	10,8	*М*	*М*	*М*	65
Всего, га	4503	2160	2884	2800	3600	

Задача 7

Требуется перевезти однородный груз из трех пунктов отправления в три пункта назначения. Качество груза, подлежащих отправлению с каждого склада, потребности в нем каждого потребителя и расстояния перевозки от каждого пункта отправления до каждого пункта назначения приведены в таблице 3.8.

Таблица 3.8 – Расстояние перевозок, км

Поставщики	Потребители			Наличие, т
	1	2	3	
I	15	17	23	900
II	9	19	8	800
III	24	21	32	550
Потребность, т	500	700	650	

Необходимо составить оптимальный план перевозок, так чтобы объем транспортных работ (т км) был минимальным. При этом обязательна поставка от первого поставщика первому потребителю установлена в количестве 300т, второй поставщик должен поставить второму потребителю не менее 200т, а первый поставщик третьему – не более 400т.

Задача 8

Необходимо составить оптимальный план проведения весенне-полевых работ, для имеющейся техники в хозяйстве. Объем работ в гектарах мягкой пахоты, производительность имеющейся техники за период (гектары мягкой пахоты), затраты на единицу работы представлены в таблице 3.9.

Таблица 3.9 – Затраты на 1 га мягкой пахоты, руб.

Виды работ	Марки тракторов				Объем работ, га м. п.
	ДТ–75М	МТЗ-821	Т - 4А	ДТ-175С	
Раннее боронование зяби	5,5	5,7	5,8	5,9	210
Предпосевная культивация	4,8	5,0	5,7	6,0	1000
Посев яровых зерновых	5,5	5,7	5,8	5,9	75
Боронование озимой пшеницы	5,1	6,5	6,4	7,0	135
Прикатывание	*М*	5,4	5,3	5,6	40
Объем работ, га м. п.	470	400	270	320	

Затраты на проведение весенне-полевых работ должны быть минимальными.

2.5Лабораторная работа 11,12 (4часа)

Тема: «Балансовые модели»
2.5.1 Цель работы:Исследовать основные свойства балансовой модели
2.5.2 Задачи работы:
1. Решение балансовых моделей в MSExcel.
2. Экономическая интерпретация результатов решения задач.

2.5.3 Описание (ход) работы:
1. Решение балансовых моделей в MSExcel.

Используя данные баланса, определите объемы производства валовой продукции, коэффициенты прямых и полных материальных затрат.

Производящие отрасли	*Потребляющие отрасли*		Конечный *продукт*
	1	2	
1	90	100	60
2	50	110	40

Решение
1) определяем объемы производства валовой продукции (X_i) по формуле:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i, \qquad i = 1,..., n.$$

$X_1 = 90+100+60=250; \quad X_2 = 50+110+40=200.$

2) вычислим коэффициенты прямых затрат (a_{ij})по формуле

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \quad i = 1,..., n, \ j = 1,..., n.$$

a_{11}=90 : 250 =0,36; a_{12}=100 : 200 =0,5;

a_{21}= 50 : 250 = 0,2; a_{22}=110 : 200 = 0,55.

3) Рассчитаем матрицу полных материальных затрат по формуле:

$$B=(E-A)^{-1}$$

а) найдем матрицу Е-А

$$E - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,36 & 0,5 \\ 0,2 & 0,55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,64 & -0,5 \\ -0,2 & 0,45 \end{bmatrix}$$

б) рассчитаем определитель матрицы

Определителем квадратной матрицы 2-го порядка А называется число $a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$. Определитель обозначается Δ(А) или $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Δ(Е-А)=0,64·0,45-(-0,5)·(-0,2)=0,288-0,1=0,188.

в) вместо каждого элемента матрицы поставим его *алгебраическое дополнение*:

$$\begin{bmatrix} 0,45 & 0,2 \\ 0,5 & 0,64 \end{bmatrix}$$

Алгебраическим дополнением некоторого элемента определителя называется *минор* этого элемента, умноженный на $(-1)^s$, где s- сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент.

Минором некоторого элемента определителя называется определитель, получаемый из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент.

г) полученную матрицу транспонируем

$$\begin{bmatrix} 0,45 & 0,5 \\ 0,2 & 0,64 \end{bmatrix}$$

д) каждый элемент полученной матрицы делим на определитель исходной матрицы и получаем матрицу обратную данной:

$$B = (E-A)^{-1} = \begin{bmatrix} 2,39 & 2,66 \\ 1,06 & 3,40 \end{bmatrix}.$$

В качестве проверки можно рассчитать матрицу Х.

$$X = BY = \begin{bmatrix} 2,39 & 2,66 \\ 1,06 & 3,40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 60 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 \\ 200 \end{bmatrix}$$

X_1=2,39·60+2,66·40=249,8;
X_2=1,06·60+3,40·40=199,6.

Выполненные расчеты, возможно провести с использованием специализированных программ или более широко распространенных инструментов, таких как Excel. Рассмотрим решение этого примера в среде Excel. При этом будут использованы такие функции как МОБР (расчет обратной матрицы) и МУМНОЖ (умножение матриц).

Решение

Заносим исходные данные на рабочий лист Excel (рис. 6.1).

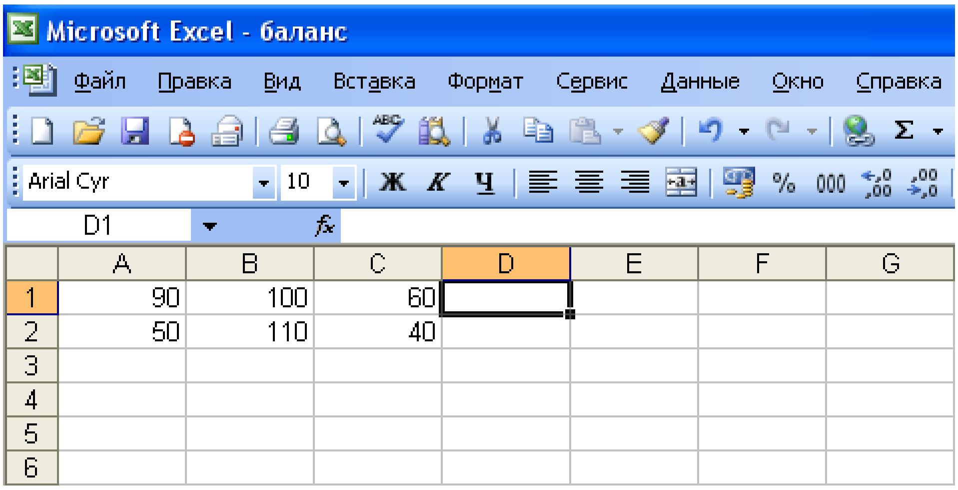


Рисунок 6.1 – Исходные данные

1) определяем объемы производства валовой продукции (X_i) по формуле:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i, \qquad i = 1,\ldots,n.$$

Для этого в ячейку D1 заносим формулу: =СУММА(A1:C1), в ячейку D2: =СУММА(A2:C2) (рис.6.2).

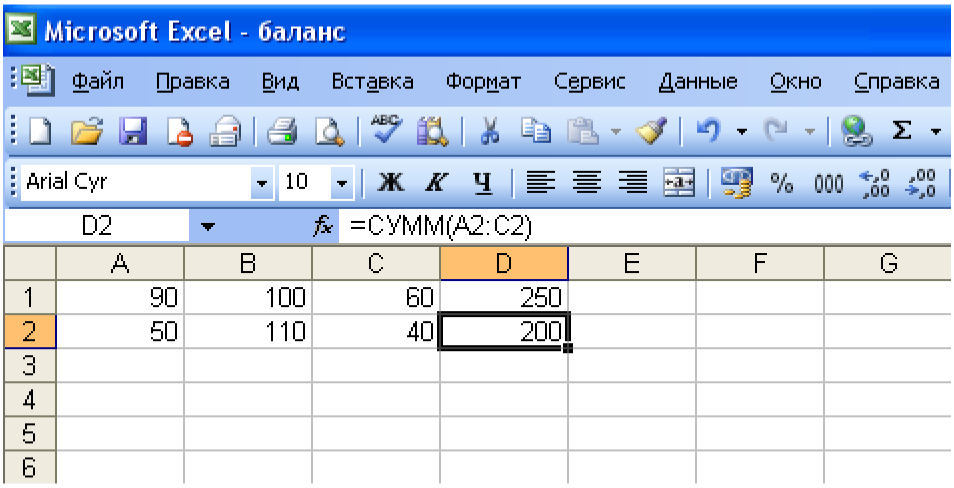


Рисунок 6.2 – Расчет X_i

2) вычислим коэффициенты прямых затрат (a_{ij})по формуле

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \quad i = 1,\ldots,n, \; j = 1,\ldots,n.$$

Для этого в ячейки A3 и B3 переносим значения X_i, рассчитанные в столбце D (можно набрать с клавиатуры, можно использовать функцию «Правка→ специальная вставка… →вставить значения, транспонировать»,).

В ячейку E1 записываем формулу: =A1/A$3, копируем эту формулу в диапазоне E1:F2. Результатом будет являться матрица коэффициентов прямых A (рис. 6.3).

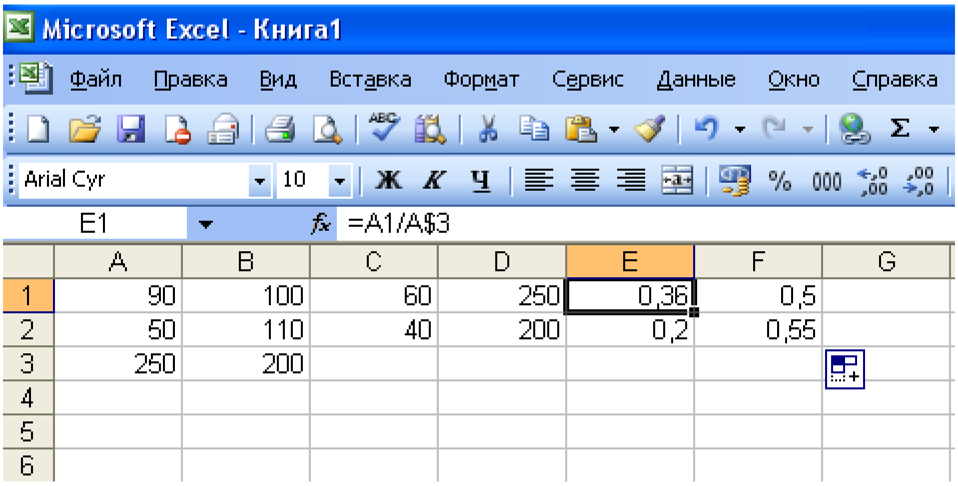


Рисунок 6.3 – Расчет матрицы коэффициентов прямых затрат

3) Рассчитаем матрицу полных материальных затрат по формуле:
$B=(E-A)^{-1}$
а) найдем матрицу (E-A), в диапазоне A6:B7 запишем единичную матрицу и в диапазоне C6:D7 матрицу A. В ячейку E6 запишем формулу: =A1-C1, копируем эту формулу в диапазоне E6:F7, результатом является матрица (E-A).

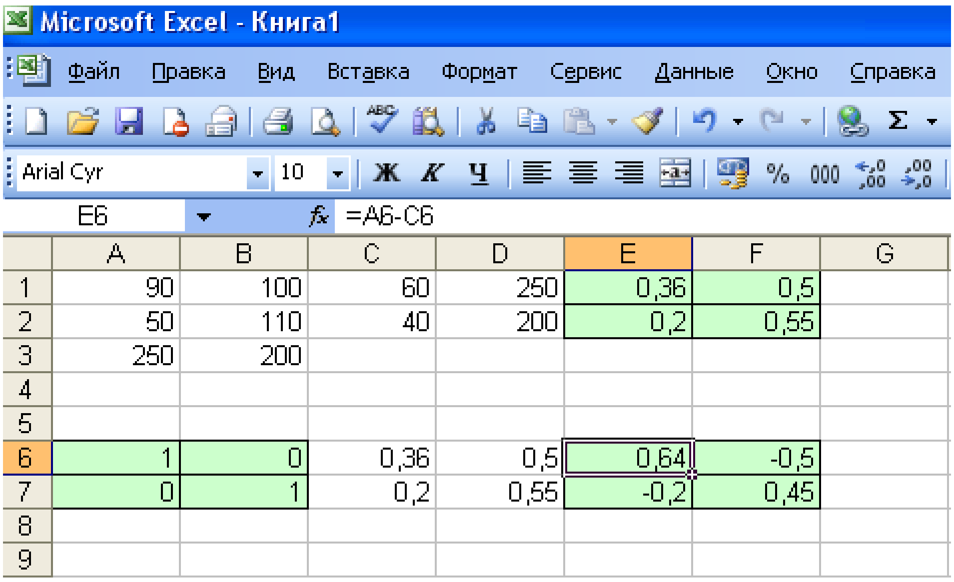


Рисунок 6.4 – Расчет матрицы (E-A)

б) найдем матрицу обратную (E-A), для этого на листе Excel выделим диапазон G6:H7. Дадим команду «Вставка → Функция…». В открывшемся окне «Мастер функций» необходимо выбрать категорию «Математические», из математических – МОБР (рис.6.5).

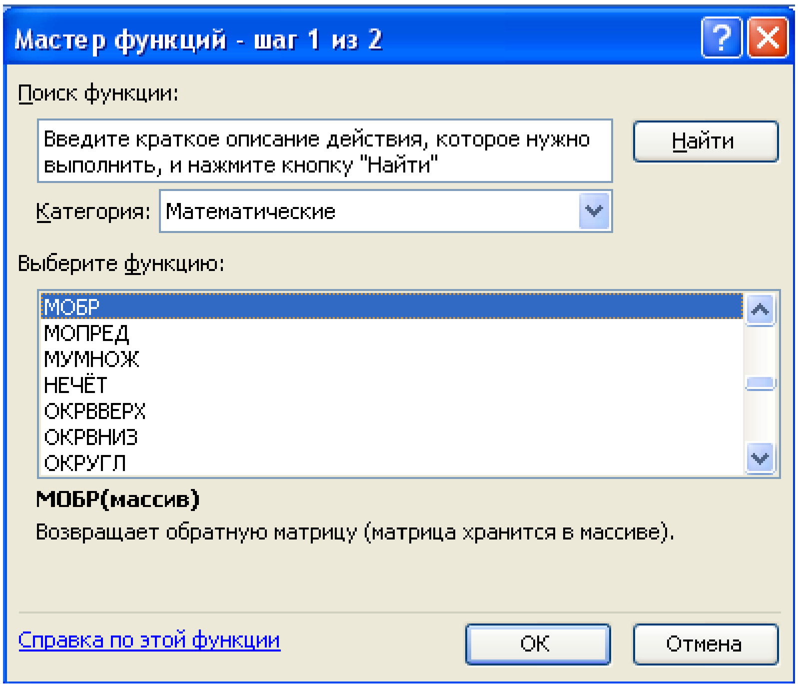


Рисунок 6.5 – Окно «Мастер функций»

Нажмите ОК. Откроется окно « Аргументы функции». Необходимо задать массив в котором находится матрица (E-A). Вводим массив E6:F7.

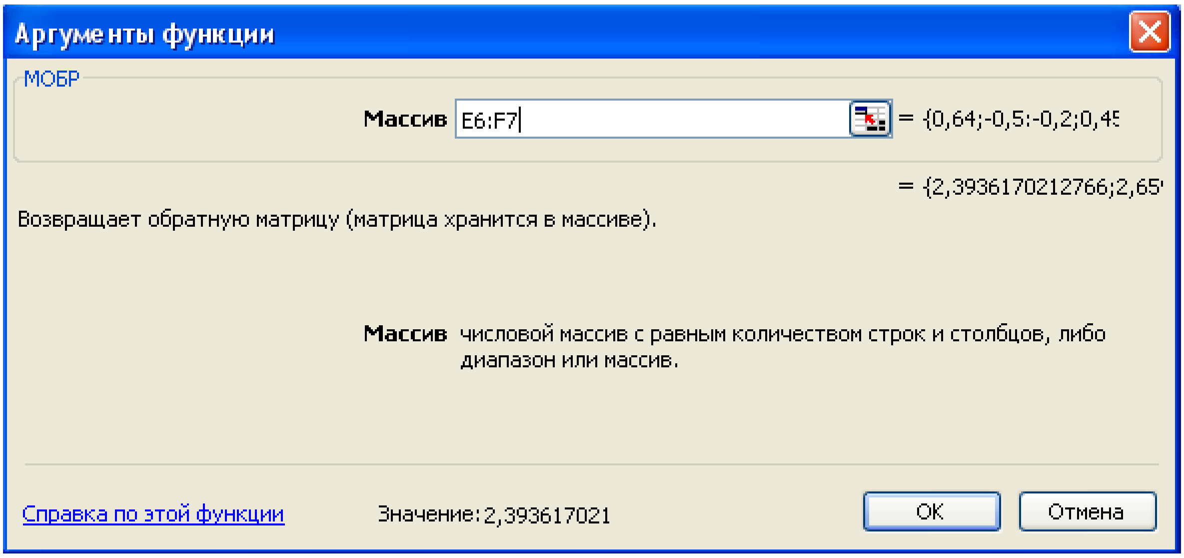
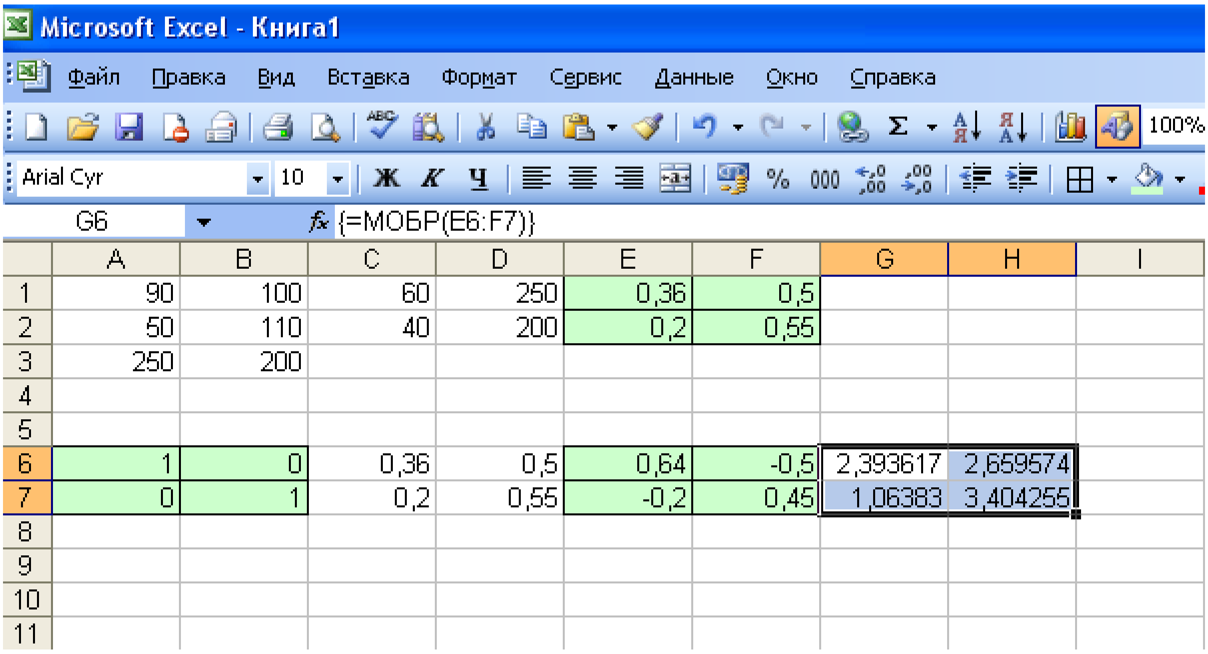


Рисунок 6.6 – Ввод данных, при расчете обратной матрицы

Для отображения результата в виде матрицы, нажмите Shift+Ctrl+Enter (если нажать ОК, то в ячейке G6 будет одно число). Массив G6:H7 будет содержать искомую матрицу $B=(E-A)^{-1}$ (рис.6.7).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	90	100	60	250	0,36	0,5			
2	50	110	40	200	0,2	0,55			
3	250	200							
4									
5									
6	1	0	0,36	0,5	0,64	-0,5	2,393617	2,659574	
7	0	1	0,2	0,55	-0,2	0,45	1,06383	3,404255	
8									
9									
10									
11									

Рисунок 6.7 – Результат расчета обратной матрицы

В качестве проверки можно рассчитать матрицу X. Матрица X рассчитывается по формуле $X = BY$. Введем в диапазон I6:I7 матрицу У. Выделим диапазон J6:J7, выберем команду «Вставка → Функция…». В открывшемся окне «Мастер функций» выберем категорию «Математические» и из них МУМНОЖ (рис.6.8).

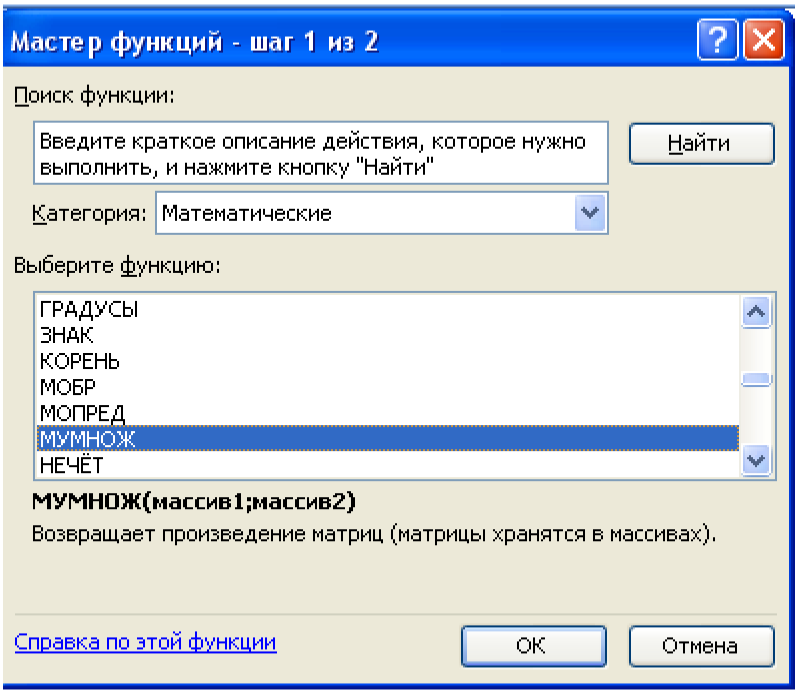


Рисунок 6.8 – Окно «Мастер функций»

Нажмите ОК. Откроется окно «Аргументы функции». Необходимо указать массивы, в которых находятся перемножаемые матрицы (порядок ввода массивов имеет значение), в нашем примере это массивы G6:H7 и I6:I7 (рис.6.9).

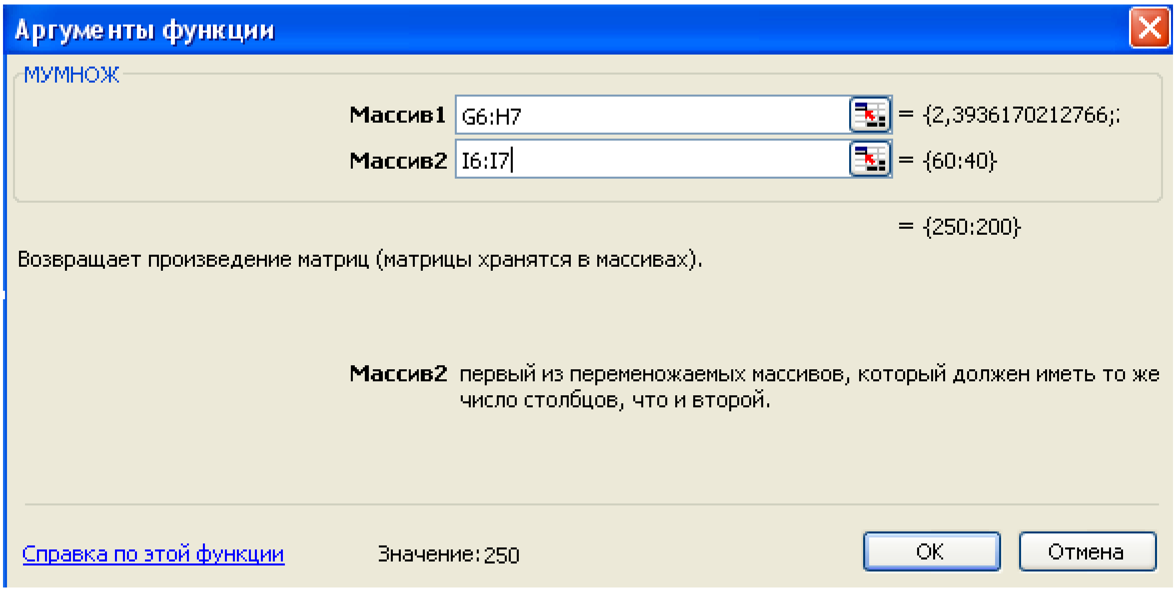


Рисунок 6.9 - Ввод данных, при перемножении матриц

После окончания ввода данных нажмите Shift+Ctrl+Enter. Массив J6:J7 будет содержать искомую матрицу X (рис.10).

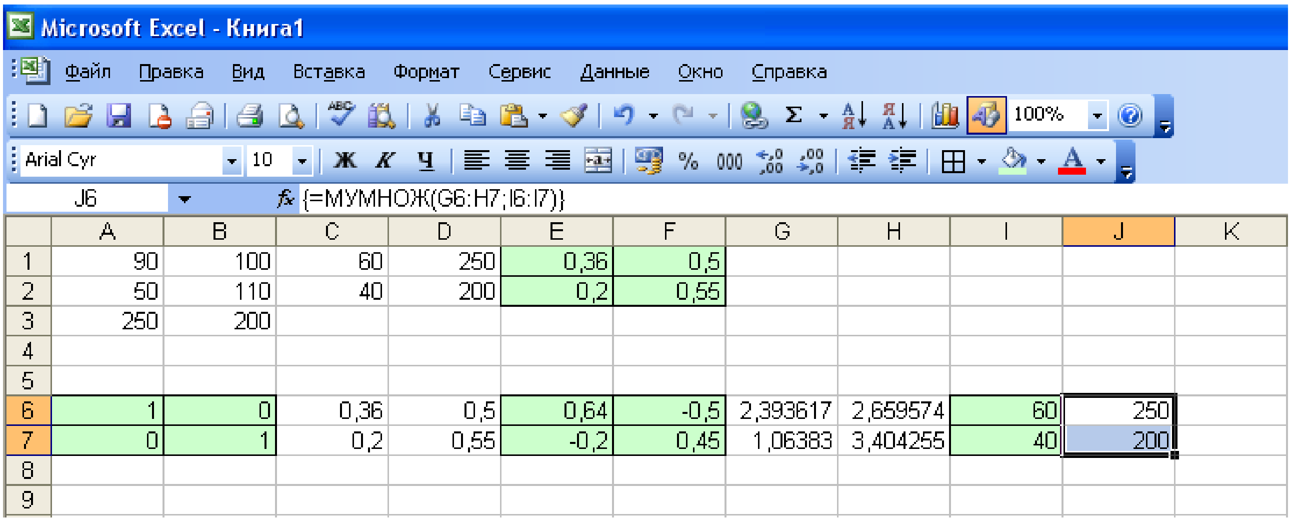


Рисунок 6.10 – Результат расчета матрицы X

Задача 7

Используя данные баланса, определите объемы производства валовой продукции, коэффициенты прямых и полных материальных затрат.

Производящие отрасли	*Потребляющие отрасли*		*Конечный продукт*
	1	2	
1	10	17	23
2	20	15	35

Задача 8

Используя данные баланса, определите объемы производства валовой продукции, коэффициенты прямых и полных материальных затрат.

Производящие отрасли	*Потребляющие отрасли*		*Конечный продукт*
	1	2	
1	70	45	25
2	25	30	40

2. Экономическая интерпретация результатов решения задач.

Величины a_{ij} называются *коэффициентами прямых материальных затрат* и рассчитываются следующим образом:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \quad i = 1,...,n, \; j = 1,...,n. \qquad (6.5)$$

Определение 1 Коэффициента прямых материальных затрат показывает, какое количество продукции i-й отрасли необходимо, если учитывать только прямые затраты, для производства единицы продукции j-й отрасли.

С учетом формулы (6.5) систему уравнений баланса можно переписать в виде

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_i; \quad i = 1,...,n \qquad (6.6)$$

система уравнений (6.6) в матричной форме примет вид

$$X = AX + Y \qquad (6.7)$$

Система уравнений (6.6), или в матричной форме (6.7), называется экономико-математической моделью межотраслевого баланса (моделью Леонтьева, моделью (затраты – выпуск»). С помощью этой модели можно выполнять три варианта расчетов:

- Задав в модели величины валовой продукции каждой отрасли (X_i), можно определить объемы конечной продукции каждой отрасли (Y_i):
$$Y = (E - A)\,X \qquad (6.8)$$
- Задав величины конечной продукции всех отраслей (Y_i), можно определить величины валовой продукции каждой отрасли (X_i):
$$X = (E - A)^{-1}\,Y \qquad (6.9)$$
- Для ряда отраслей задав величины валовой продукции, а для всех остальных отраслей задав объемы конечной продукции, можно найти величины конечной продукции первых отраслей и объемы валовой продукции вторых, в этом варианте расчета удобнее пользоваться не матричной формой модели (6.7), а системой линейных уравнений (6.6). В формулах (6.8) и (6.9) Е обозначает единичную матрицу n-го порядка, а $(E - A)^{-1}$ обозначает матрицу, обратную матрице $(E - A)$. Если определитель матрицы $(E - A)$ не равен нулю, т.е. эта матрица невырожденная, то обратная к ней матрица существует. Обозначим эту обратную матрицу через B, тогда систему уравнений в матричной форме (6.9) можно записать в виде
$$X = BY. \qquad (6.9^{/})$$

Элементы матрицы В будем обозначать через b_{ij}, тогда из матричного уравнения $(6.9^{/})$ для любой i-й отрасли можно получить следующее соотношение:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} Y_i, \quad i = \overline{1, n}. \qquad (6.10)$$

Из соотношений (6.10) следует, что валовая продукция выступает как взвешенная сумма величин конечной продукции, причем весами являются коэффициенты b_{ij}, которые показывают, сколько всего нужно произвести продукции i-й отрасли для выпуска в сферу конечного использования единицы продукции j-й отрасли. В отличии от коэффициентов прямых затрат a_{ij} коэффициенты b_{ij} называются *коэффициентами полных материальных затрат* и включает в себя как прямые, так и косвенные затраты всех порядков. Если прямые затраты отражают количество средств производства, израсходованных непосредственно при изготовлении данного продукта, то косвенные относятся в предшествующим стадиям производства и входят в производство продукта не прямо, а через другие (промежуточные) средства производства.

Определение 2 Коэффициенты полных материальных затрат b_{ij} показывают, какое количество продукции i-й отрасли нужно произвести, чтобы с учетом прямых и косвенных затрат этой продукции получить единицу конечной продукции j-й отрасли.

основные свойства матрицы коэффициентов прямых материальных затрат *А*. Коэффициенты прямых затрат по определению являются неотрицательными, следовательно, матрица *А* в целом может быть названа неотрицательной: $A \geq 0$. Так как процесс воспроизводства нельзя было бы осуществлять, если бы для собственного воспроизводства в отрасли затрачивалось большее количество продукта, чем создавалось, то очевидно, что диагональные элемента матрицы *А* меньше единицы: $a_{ij}<1$.

Понятие *продуктивности*матрицы коэффициентов прямых материальных затрат.

Будем называть неотрицательную матрицу *А* продуктивной, если существует такой неотрицательный вектор $X \geq 0$, что

$$X > AX. \tag{6.11}$$

Очевидно, что условие (6.11) означает существование положительного вектора конечной продукции $Y > 0$ для модели межотраслевого баланса (6.7).

Для того чтобы матрица коэффициентов прямых материальных затрат *А* была продуктивной, необходимо и достаточно чтобы выполнялось условие:

матрица (Е – А) неотрицательно обратима, т.е. существует обратная матрица $(E - A)^{-1} \geq 0$.

Более простым, но только достаточным признаком продуктивности матрицы *А* является ограничение на величину ее нормы, т.е. на величину наибольшей суммы элементов матрицы *А* в каждом столбце. Если норма матрицы *А* строго меньше единицы, то эта матрица продуктивна; повторим, что данное условие является только достаточным, и матрица *А* может оказаться продуктивной и в случае, когда ее норма больше единицы.

2.6 Лабораторная работа № 13 (2 часа)

Тема: «Функции полезности. Задачи потребительского выбора»

2.6.1 Цель работы: Сформировать навыки моделирования экономических процессов при помощи функции полезности

2.6.2 Задачи работы:

1. Общие понятия функции полезности и задач потребительского выбора.
2. Решение задачи потребительского выбора.

2.6.3 Описание (ход) работы:

1. Общие понятия функции полезности и задач потребительского выбора.

На множестве потребительских наборов (x_1, x_2) определена функция $u(x_1, x_2)$, значение которой на потребительском наборе (x_1, x_2) равно потребительской оценке индивидуума для этого набора. Эта функция называется функцией полезности.

Свойства функции полезности:

1. Возрастание потребления одного продукта при постоянном потреблении другого продукта ведет к росту потребительской оценки. т.е.

$$\text{если } x_1 + \Delta x_1 > x_1 \text{, то } u(x_1 + \Delta x_1, x_2) > u(x_1, x_2).$$

если $x_2 + \Delta x_2 > x_2$, то $u(x_1, x_2 + \Delta x_2) > u(x_1, x_2)$.

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} = u_1^{/} > 0, \quad \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = u_2^{/} > 0 \qquad (4.1)$$

Первые частные производные называются предельными полезностями продуктов: $u_1^{/}$ - предельная полезность первого продукта, $u_2^{/}$ - предельная полезность второго продукта. Для предельных полезностей используется также символика M_1, M_2.

2. Предельная полезность каждого продукта уменьшается, если объем его потребления растет (это свойство предельной полезности называется законом убывающей предельной полезности).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^{\,2}} = u_{11}^{//} < 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^{\,2}} = u_{22}^{//} < 0. \qquad (4.2)$$

3. Предельная полезность каждого продукта увеличивается, если растет количество другого продукта. В этом случае продукт, количество которого фиксировано, оказывается относительно дефицитным. Поэтому дополнительная его единица приобретает большую ценность и может быть потреблена более эффективно. Данное свойство справедливо не для всех благ.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = u_{12}^{//} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} = u_{21}^{//} > 0 \qquad (4.3)$$

Линия, соединяющая потребительские наборы (x_1,x_2), имеющие один и тот же уровень удовлетворения потребностей индивидуума, называется *линией безразличия* (рисунок 4.1). Линия безразличия есть не что иное, как линия уровня полезности, множество линий безразличия называется картой линий безразличия. Линии безразличия не касаются и не пересекаются. Чем "северо-восточнее" расположена линия безразличия, тем большему уровню удовлетворения потребности она соответствует.

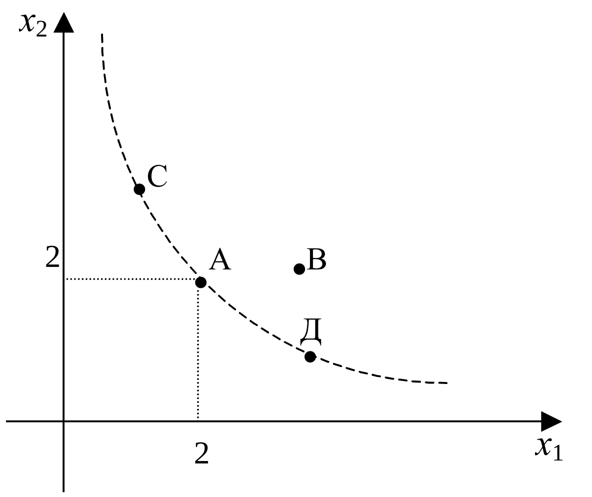


Рисунок 4.1 – Линия безразличия

Формально задача потребительского выбора имеет вид:

I. $u(x_1, x_2) \to \max$

II. при условиях $p_1 x_1 + p_2 x_2 \le I$,

III. $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$

p_1 и p_2 – рыночные цены на первый и второй товар соответственно,

I – доход покупателя.

В приведенной постановке задача потребительского выбора является задачей нелинейного программирования.

Набор (x_1,x_2), максимизирующий функцию полезности, должен обращать бюджетное ограничение в равенство, т.е. $p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$. Графически это означает, что решение задачи потребительского выбора должно лежать на бюджетной прямой. Мы также будем считать, что условие неотрицательности в оптимальной точке будет выполняться автоматически.

Итак, задачу потребительского выбора можно заменить задачей на условный экстремум (экстремум – это минимальное и максимальное значение функции).

I. $u(x_1, x_2) \to \max$

II. при условии $p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$,

для решения этой задачи возможно применение метода Лагранжа, в результате получим систему двух уравнений с двумя неизвестными x_1 и x_2

$$\begin{cases} \dfrac{u_1^{/}}{u_2^{/}} = \dfrac{p_1}{p_2}, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = I \end{cases}$$

Подставив решение (x_1,x_2), в левую часть равенства

$$\frac{u_1^{/}(x_1, x_2)}{u_2^{/}(x_1, x_2)} = \frac{p_1}{p_2}$$

,получим, что в точке (x_1,x_2), локального рыночного равновесия отношение предельных полезностей равно отношению рыночных цен на эти продукты.

Геометрически решение можно интерпретировать как точку касания линии безразличия функции полезности $u\ (x_1,x_2)$ с бюджетной прямой $p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$ (рисунок 4.2).

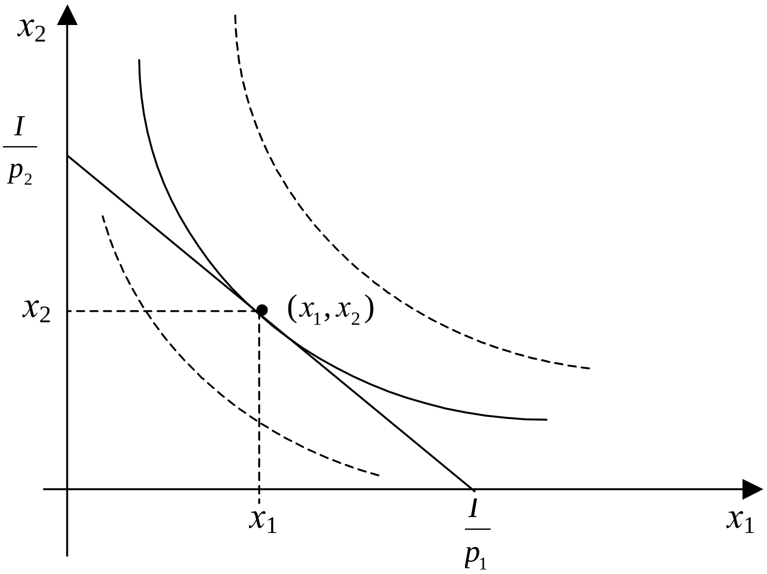


Рисунок 4.2 – Графическое решение задачи потребительского выбора

Координаты x_1и x_2 решения задачи потребительского выбора есть функции параметров p_1, p_2 и I:

$x_1 = x_2\,(p_1, p_2, I),$

$x_2 = x_2\,(p_1, p_2, I)$

полученные функции называются функциями спроса на первый и второй продукт.

2. Решение задачи потребительского выбора.

Решить задачу потребительского выбора, если функция полезности задана формулой $u=x_1 \cdot x_2$, цены на товары соответственно равны $p_1=4$, $p_2=6$, доход $I=40$.

Решение

Формально задача потребительского выбора имеет вид:

$$u(x_1,x_2)=x_1 \cdot x_2 \rightarrow max,$$

при условиях $p_1x_1 + p_2x_2 \le I$,

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 .$$

Для решения этой задачи возможно применение метода Лагранжа, в результате получим систему двух уравнений с двумя неизвестными x_1 и x_2

$$\begin{cases} \dfrac{u_1'}{u_2'} = \dfrac{p_1}{p_2}, \\ p_1x_1 + p_2x_2 = I \end{cases} \quad u_1' = (x_1 \cdot x_2)'_{x_1} = x_2 \; u_2' = (x_1 \cdot x_2)'_{x_2} = x_1 .$$

Подставляем в систему значения производных.

$$\begin{cases} \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{p_1}{p_2}, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = I. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 \cdot p_2 = x_1 \cdot p_1, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = I. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 p_1 + x_1 p_1 = I, \\ p_2 x_2 + p_2 x_2 = I. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{I}{2p_1}, \\ x_2 = \dfrac{I}{2p_2}. \end{cases}$$

$x_1 = \dfrac{I}{2p_1}$ - функция спроса на 1-ый товар,

$x_2 = \dfrac{I}{2p_2}$ - функция спроса на 2-ый товар.

Подставив значения цен и дохода, находим значения x_1и x_2:

$$x_1 = \frac{I}{2p_1} = \frac{40}{2 \cdot 4} = 5, \quad x_2 = \frac{I}{2p_2} = \frac{40}{2 \cdot 6} = 3{,}33.$$

Задача 1

Решить задачу потребительского выбора, если функция полезности задана формулой $u = \sqrt{x_1 x_2}$, цены на товары соответственно равны p_1=4, p_2=1, доход I=40.

Задача 2

Решить задачу потребительского выбора, если функция полезности задана формулой $u = x_1^{3/4} x_2^{1/4}$, цены на товары соответственно равны p_1=10, p_2=5, доход I=60. Изобразите графически решение задачи.

Задача 3

Решить задачу потребительского выбора, если функция полезности задана формулой $u = x_1^{1/2} x_2^{2/3}$, цены на товары соответственно равны p_1=10, p_2=5, доход I=60. Изобразите графически решение задачи.

2.7Лабораторная работа № 14(2 часа)

Тема: «Функции спроса»

2.7.1 Цель работы: Изучить действие функций спроса

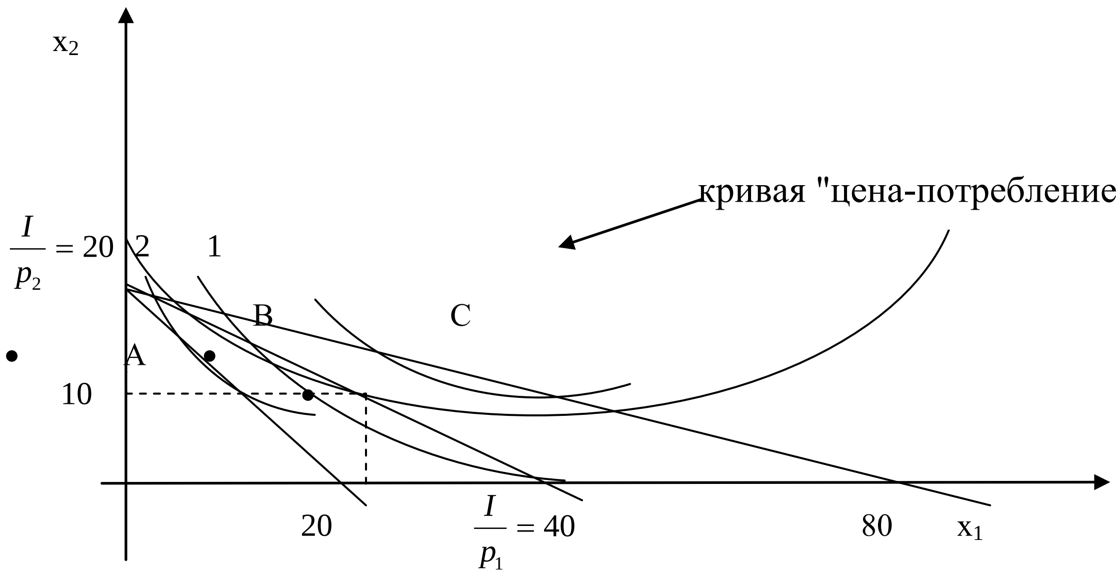
2.7.2 Задачи работы:

1. Изменение цен. Изменение дохода.
2. Эффекты компенсации. Уравнение Слуцкого.

2.7.3 Описание (ход) работы:

1. Изменение цен. Изменение дохода.

Рассмотрим то, как меняется потребление товаров под влиянием изменения цен. Вернемся к задаче рассмотренной в предыдущей лекции про продукты питания и одежду. Напомню, что первоначальная цена продуктов питания (x_1) составляла 10 руб. за единицу, цена одежды (x_2) – 20 руб. за единицу, Доход был равен 400 руб. Решение задачи потребительского выбора находится в точке А. Здесь потребитель приобретает 20 единиц продуктов питания (x_1=20) и 10 единиц одежды (x_2=10)



Предположим, что цена на продукты питания возросла и составила 20 руб. Тогда изменился и угол наклона бюджетной линии ($\frac{I}{p_1} = \frac{400}{20} = 20$). Потребитель теперь достигает максимальной полезности в точке B, которая расположена на кривой безразличия 2. так как цена продуктов питания поднялась , покупательная способность потребитель достигаемая полезность снизились). Так в точке B покупатель выбирает 10 единиц продуктов питания и 13 единиц одежды. Что произойдет когда цена на продукты питания снизится до 5 рублей? Угол наклона бюджетной линии опять изменится ($\frac{I}{p_1} = \frac{400}{5} = 80$) и потребитель выберет точку С соответствующую более высокому уровню полезности (30 единиц продуктов питания и 15 единиц одежды).

Линия, соединяющая максимально-полезные наборы продуктов при каждом изменении цены называется кривой "цена-потребление".

Итак, при снижении цены на продовольствие достигаемая полезность растет и потребитель покупает больше продуктов питания. Потребление одежды при этом может как расти так и падать.

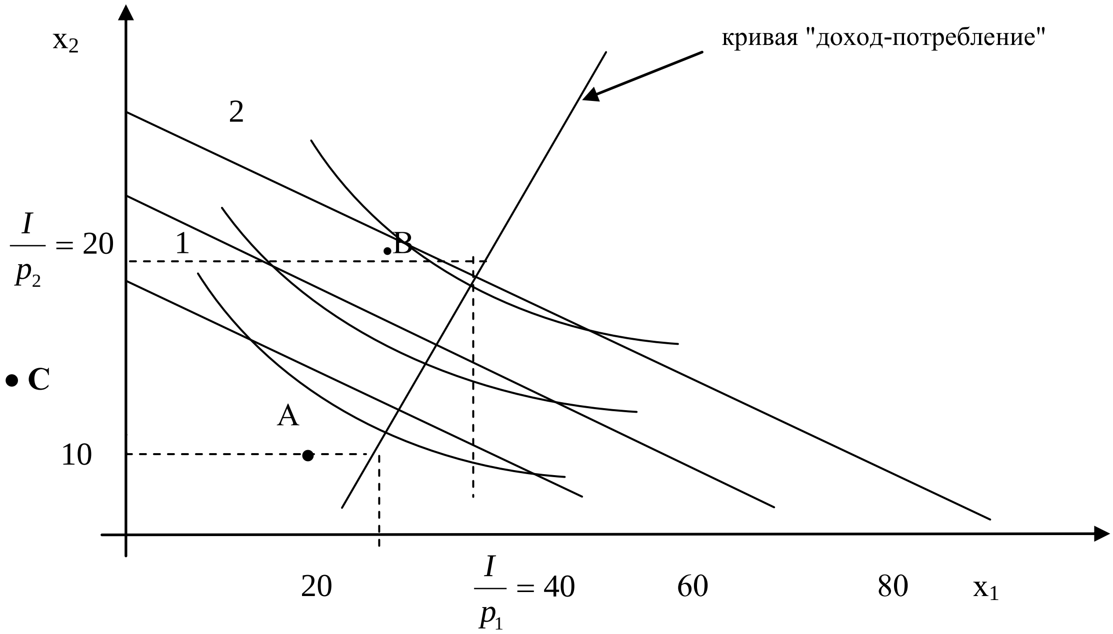
Кривая спроса (функция спроса задается как функция параметров $x_1(p_1, p_2, I), \quad x_2(p_1, p_2, I)$) обладает двумя важными свойствами:

1) Уровень полезности меняется по мере нашего движения вдоль кривой. Чем ниже цена товара, тем выше уровень полезности.

2) В каждой точке на кривой спроса потребитель максимизирует полезность, отвечая условию, что предельная норма замещения одежды продуктами питания равна соотношению цен продуктов питания и одежды $\frac{u_1'}{u_2'} = \frac{p_1}{p_2}$. Другими словами, в каждой

точке кривой спроса можно определить сколько готов заплатить потребитель за дополнительную единицу того или иного продукта.

Мы рассмотрели пример изменения потребительского выбора при изменении цены на один из продуктов. Рассмотрим, как влияет изменение дохода на потребительский выбор.



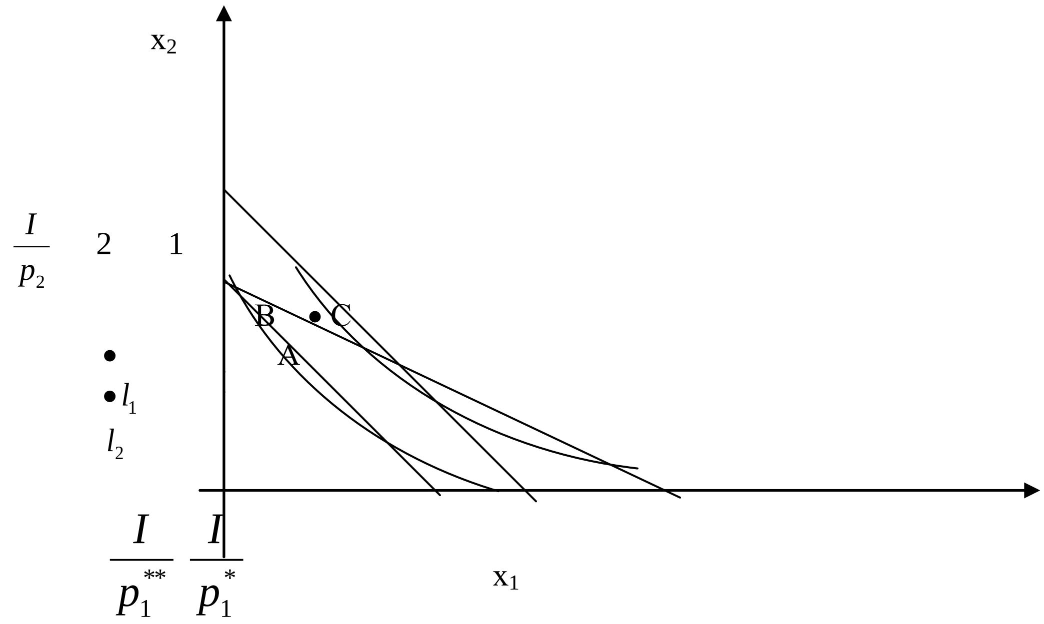
Пусть первоначально доход потребителя равнялся 400 руб., тогда максимизирующий полезность потребительский набор находится в точке А (20 единиц продуктов питания и 10 единиц одежды). Доход потребителя изменился и составил 800 руб. Тогда бюджетная линия сместилась вправо параллельно первоначальной бюджетной линии. Оптимальный выбор потребителя теперь находится в точке В, где он приобретает 30 единиц продуктов питания и 21 единицу одежды. если доход потребителя составит 600 руб., то его выбор переместится в точку С.

Можно продолжить перебирать варианты изменения дохода и соответственно спроса на товары. Все возможные решения будут находится на кривой "доход-потребление". Кривая "доход-потребление" движется на "северо-восток", потому что потребление как продовольствия так и одежды увеличивается с ростом дохода.

***Если кривая "доход-потребление" имеет положительный угловой коэффициент (с ростом дохода растет потребление), то такой товар называется нормальным. в ряде случаев спрос падает по мере роста дохода. Такие товары называются "низкокачественными".

2. Эффекты компенсации. Уравнение Слуцкого.

Перекрестные функции спроса от цен характеризуют такие свойства товара, как взаимозаменяемость и взаимодополняемость. Если при росте цены на один товар при снижении его спроса, растет спрос на другой товар, то эти товары взаимозаменяемые. Наоборот, если спрос на другой товар также падает, то они взаимодополняемы. Заметим, что реальная взаимозаменяемость может искажаться общим снижение благосостояния при росте цены на один из товаров. Первый товар может заменять второй в потреблении, но спрос на него может не расти, поскольку просто снизился доход. Для снятия этого искажения используют понятие компенсированного изменения цены, то есть такого, которое сопровождается увеличением дохода потребителя, позволяющим ему поддерживать прежний уровень благосостояния.



Пусть цена первого блага повысилась с p_1^* до p_1^{**}, тогда бюджетная линия l_1 изменит свое положение, и перейдет в l_2. Точка A лини безразличия 1, касающаяся бюджетного ограничения l_1, будет заменена новой точкой оптимума B, где новая линия безразличия 2 касается новой бюджетной линии l_2. Если мы хотим компенсировать потребителю потерю благосостояния, то увеличим его доход так, чтобы новая бюджетная прямая l_3,(параллельная l_2) коснулась в некоторой точке C прежней линии безразличия 1.

Направленный отрезок AC показывает "эффект замены" при росте цены, то есть изменение структуры спроса при условии поддержания прежнего уровня благосостояния. Направленный отрезок CB отражает "эффект дохода", то есть изменение потребительского спроса при сохранении соотношения цен благ и изменении уровня дохода. Общий результат роста цены (при отсутствии компенсации) выражается направленным отрезком AB.

Одним из основных в теории потребительского выбора является уравнение Слуцкого, опубликованное российским математиком Е.Е.Слуцким в 1915 году. Это уравнение позволяет увязать действие эффекта замены и эффекта дохода с результирующим изменением спроса. Уравнение Слуцкого имеет следующий вид:

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \left[\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right]_{comp} - \left[\frac{\partial x_i}{\partial I}\right] x_j \,,$$

где первое слагаемое в правой части описывает действие эффекта замены, второе – действие эффекта дохода, слева записано результирующее воздействие на спрос, складывающееся из изменения структуры спроса и общего его изменения при изменении уровня реального дохода.

Для ценных (нормальных ?) товаров величина $\left[\frac{\partial x_i}{\partial I}\right] > 0$, т.е. спрос растет при росте дохода. В этом случае, согласно уравнению Слуцкого, $\frac{\partial x_i}{\partial p_j} < \left[\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right]_{comp}$: если спрос растет, то он растет больше при наличии компенсации, если он падает, то в меньшей степени.

Уравнение Слуцкого может рассматриваться как при разных, так и при совпадающих i и j.

Рассмотрим теперь более подробно эластичности функции спроса. Эластичность спроса по цене равна $e_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} : \frac{x_i}{p_j}$, Эластичность спроса по доходу $e_{iI} = \frac{\partial x_i}{\partial I} : \frac{x_i}{I}$.

Выполняется равенство $\sum_j e_{ij} + e_{iI} = 0$, то есть сумма всех эластичностей спроса по цене и доходу должна равняться 0.

Функция спроса на товар x_1 задана формулой $\frac{I}{2p_1}$. Как изменится спрос на 1-й товар при изменении цены (p_1) и наличии компенсации?

Решение

Данная задача решается при помощи уравнения Слуцкого, т.е. из уравнения

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \left[\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right]_{comp} - \left[\frac{\partial x_i}{\partial I}\right] x_j \text{ найдем} \left[\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right]_{comp}.$$

В нашем случае *i=1, j=1.*

Тогда $\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \left[\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right]_{comp} - \left[\frac{\partial x_1}{\partial I}\right] x_1 \Rightarrow \left[\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right]_{comp} = \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \left[\frac{\partial x_1}{\partial I}\right] x_1$

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \left(\frac{I}{2p_1}\right)'_{p_1} = -\frac{I}{2p_1^2}, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial I} = \left(\frac{I}{2p_1}\right)'_{I} = \frac{1}{2p_1},$$

$$\left[\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right]_{comp} = -\frac{I}{2p_1^2} + \frac{1}{2p_1} x_1 = -\frac{I}{2p_1^2} + \frac{1}{2p_1} \cdot \frac{I}{2p_1} = -\frac{2I}{4p_1^2} + \frac{I}{4p_1^2} = -\frac{I}{4p_1^2}.$$

Задача 1

Функция спроса на товар x_1 задана формулой $\frac{2I}{3p_1}$. Как изменится спрос на 1-й товар при изменении цены (p_1) и наличии компенсации?

Задача 2

Функция спроса на 1-ый товар задана формулой $\frac{2I}{3p_1}$, на 2-ой товар $\frac{I}{3p_2}$, необходимо рассчитать:

а) как изменится спрос на 1-ый товар при изменении цены на 1-ый товар и сохранении прежнего уровня благосостояния;

б) как изменится спрос на 1-ый товар при изменении цены на 2-ой товар и сохранении прежнего уровня благосостояния;

в) как изменится спрос на 2-ой товар при изменении цены на 1-ый товар и сохранении прежнего уровня благосостояния;

г) как изменится спрос на 2-ой товар при изменении цены на 2-ой товар и сохранении прежнего уровня благосостояния.

Задача 3

Рассчитаем эластичность спроса по ценам и эластичность спроса по доходу для функции спроса $x_1 = \frac{I}{2p_1}$.

Решение

$$e_{11} = \frac{\partial x_1}{\partial p_1} : \frac{x_1}{p_1} = \left(\frac{I}{2p_1}\right)'_{p_1} : \frac{I}{2p_1 \cdot p_1} = -\frac{I}{2p_1^2} : \frac{I}{2p_1^2} = -1$$

$$e_{12} = \frac{\partial x_1}{\partial p_2} : \frac{x_1}{p_2} = \left(\frac{I}{2p_1}\right)'_{p_2} : \frac{I}{2p_1 \cdot p_2} = 0 : \frac{I}{2p_1 p_2} = 0$$

$$e_{1I} = \frac{\partial x_1}{\partial I} : \frac{x_1}{I} = \left(\frac{I}{2p_1}\right)'_{I} : \frac{I}{2p_1 \cdot I} = \frac{1}{2p_1} : \frac{1}{2p_1} = 1$$

$$\sum_j e_{ij} + e_{iI} = e_{11} + e_{12} + e_{1I} = -1 + 0 + 1 = 0$$

Задача 4

Рассчитаем эластичность спроса по ценам и эластичность спроса по доходу для функции спроса $x_1 = \frac{3I}{7p_1}$.

Задача 5

Рассчитаем эластичность спроса по ценам и эластичность спроса по доходу для функции спроса $x_1 = \frac{4I}{7p_1}$.

Задача 6

Функция полезности задана формулой $u = x_1^{2/3} x_2^{1/3}$. Рассчитаем эластичность спроса по ценам и эластичность спроса по доходу для функции спроса на первый товар.

Рекомендации к решению

1. Необходимо найти функцию спроса на 1-ый товар. Это можно сделать решив задачу потребительского выбора (см. решение задачи 9).
2. Зная как формируется спрос на первый товар, по используемым ранее формулам рассчитываем эластичности (см решение задачи 16).

2.8 Лабораторная работа № 15 (2 часа)

Тема: «Производственные функции»

2.8.1 Цель работы: Сформировать навыки моделирования экономических процессов при помощи производственных функций

2.8.2 Задачи работы:

1. Основные понятия. Свойства.
2. Эластичность выпуска. Производственная функция Кобба-Дугласа

2.8.3 Описание (ход) работы:

1. Основные понятия. Свойства.

Производственными функциями называют соотношение между используемыми производственными ресурсами и выпускаемой продукцией.

Производственные функции предназначены для моделирования процесса производства некоторой хозяйственной единицы: отдельной фирмы, отрасли или всей экономики государства в целом.

С помощью производственных функций решают задачи:

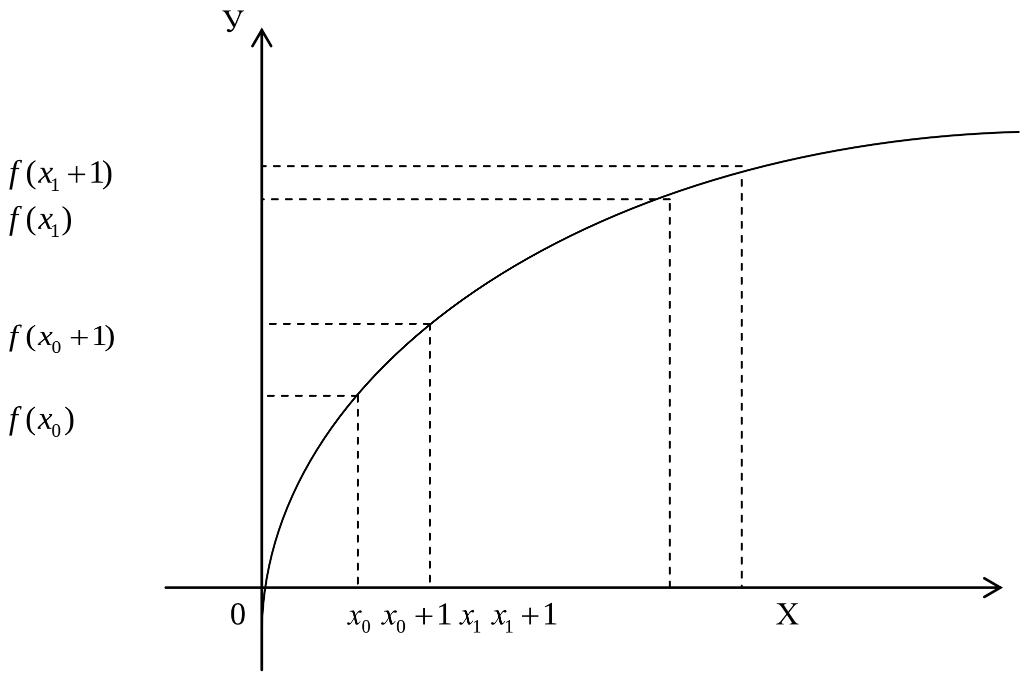
оценки отдачи ресурсов в производственном процессе;

прогнозирование экономического роста;

разработки вариантов плана развития производства;

оптимизации функционирования хозяйственной единицы при условии заданного критерия и ограничений по ресурсам.

Производственная функция одной переменной. Возьмем производственную функцию F в виде $F(x) = a_1 x^{a_2}$, где x- величина затрачиваемого ресурса (например, рабочего времени), F(x) –объем выпускаемой продукции (например, число готовых холодильников). Величины a_1 и a_2 – параметры производственной функции (вектор параметров есть двумерный вектор (a_1 , a_2)). Здесь a_1 и a_2 – положительные числа и число a_2 <=1. Данная функция является функцией одной переменной x. В связи с этим производственная функция называется одноресурсной или однофакторной. Ее область определения - множество неотрицательных действительных чисел т.е. x>=0. График производственной функции $y = a_1 x^{a_2}$ выглядит следующим образом.



На графике видно, что с ростом величины затрачиваемого ресурса x объем выпуска y растет, однако при этом каждая дополнительная единица ресурса дает все меньше прирост объема y выпускаемой продукции. Отмеченное обстоятельство (рост объема y и уменьшение прироста объема y с ростом величины x) отражает фундаментальное положение экономической теории (хорошо подтверждаемое практикой), называемое законом убывающей эффективности. Производственная функция $y = a_1 x^{a_2}$ является типичным представителем широкого класса однофакторных производственных функций.

Производственная функция нескольких переменных - это функция , независимые переменные $x_1,\ldots,x_n$ которой принимают значения объемов затрачиваемых или используемых ресурсов (число переменных n равно числу ресурсов), а значение функции имеет смысл величин объемов выпуска:

$$y = f(x,a).$$

Подчеркнем еще раз, что в данной формуле величина y – скалярная, x и a – векторные величины т.е. $x = (x_1,\ldots,x_n)$ (под вектором понимается упорядоченный набор чисел). В связи с этим производственную функцию называют многоресурсной или многофакторной. По экономическому смыслу $x_1 \geq 0,\ldots,x_n \geq 0$, следовательно, областью определения многофакторной производственной функции $f(x) = (x_1,\ldots,x_n)$ является множество n-мерных векторов x, все координаты $x_1,\ldots,x_n$ которых неотрицательные числа. Для отдельного предприятия, выпускающего однородный продукт, производственная функция $f(x) = (x_1,\ldots,x_n)$ может связывать объем выпуска (в натуральном или стоимостном выражении) с затратами рабочего времени по различным видам трудовой деятельности, различных видов сырья, комплектующих изделий, энергии, основного капитала. Производственные функции такого типа характеризуют действующую технологию предприятия.

При построении производственной функции для региона или страны в целом в качестве величины годового выпуска Y (на макроуровне обозначают большой буквой) чаще берут совокупный продукт региона или страны, исчисляемый обычно в неизменных, а не в текущих ценах, в качестве ресурсов рассматривают основной капитал ($x_1(=K)$- объем используемого в течение года основного капитала) живой труд ($x_2(=L)$- количество единиц затрачиваемого в течении года живого труда), исчисляемые обычно в стоимостном выражении. Строят двухфакторную производственную функцию $f(x)=(x_1,x_2)$ или $Y=f(K,L)$. От двухфакторных производственных функций переходят к трехфакторным. В качестве третьего фактора иногда вводят объемы используемых природных ресурсов. Кроме того, если производственная функция строится по данным временных рядов, то в качестве особого фактора роста производства может быть включен технический прогресс.

Производственная функция $y=(x_1,x_2)$ называется *статической* если ее параметры и ее характеристика f не зависят от времени t, хотя объемы ресурсов и объемы выпуска могут зависеть от времени t, т.е. могут иметь представление в виде временных рядов: $x_1(0),x_1(1),\ldots,x_1(T)$; $x_2(0),x_2(1),\ldots,x_2(T)$; $y(0),y(1),\ldots,y(T)$;

$y(t)=f(x_1(t),x_2(t))$. Здесь t – номер года, t=0,1,…,T. t=0 – базовый год временного промежутка, охватывающий годы 1,2,…,T.

Производственная функция $f(x_1,x_2)$ имеющая область определения $x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$ имеет следующие свойства.

1. Производство невозможно при отсутствии хотя бы одного ресурса, т.е. $f(0,x_2)$ = $f(x_1,0)$ =0

2. При увеличении затрат производственных ресурсов выпуск продукции растет. x(1) $x(1)>x(0)$ $f(x(1))>(fx(0))$, если функция дифференцирована, то можно записать $x>0 \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}>0\ (i=1,2),\quad x=(x_1,x_2)$ или первая частная производная $\left[\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right]$ положительна.

3. По мере увеличения количества одного ресурса при постоянных количествах других предельная эффективность использования этого ресурса не возрастает. Математически это требование для дважды дифференцируемых производственных функций выглядит так. $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)\le 0$. В нашем примере рассмотренном ранее это означает, что рост вооруженности средствами производства приводит к росту выпуска продукции, но темп роста выпуска продукции все время падает (закон убывающей эффективности).

4. Производственная функция характеризуется определенной отдачей от расширения масштабов производства. Отдача от расширения масштабов производства характеризует производственную функцию с точки зрения изменения выпуска продукции при пропорциональном изменении затрат ресурсов, которое математически выражается в умножении всех компонент вектора x на положительный скаляр t. Принято говорить,

что скалярная функция является однородной функцией степени δ (дельта), если для любого вектора x и любого скаляра t она удовлетворяет условию $f(tx) = t^{\delta} f(x)$

Математически четвертое предположение состоит в требовании однородности производственной функции. Если $\delta > 1$, то говорят, что производственная функция характеризуется возрастающей отдачей от расширения масштабов производства; если $\delta = 1$ - постоянной отдачей (наиболее часто встречающийся случай), а при $\delta < 1$ - убывающей отдачей.

Пример

Возьмем производственную функцию $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$, $a_1 + a_2 = 1$. Для нее выполняются все четыре свойства.

1. при $x_1 = 0$ $y = a_0 0^{a_1} x_2^{a_2} = 0$ при $x_2 = 0$ $y = a_0 x_1^{a_1} 0^{a_2} = 0$

2. $a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} < a_0 (x_1 + 1)^{a_1} x_2^{a_2}$ или

$$a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} < a_0 x_1^{a_1} (x_2 + 1)^{a_2}$$

Первая частная производная положительна.

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = a_0 x_2^{a_2} a_1 x_1^{a_1 - 1} \geq 0$$

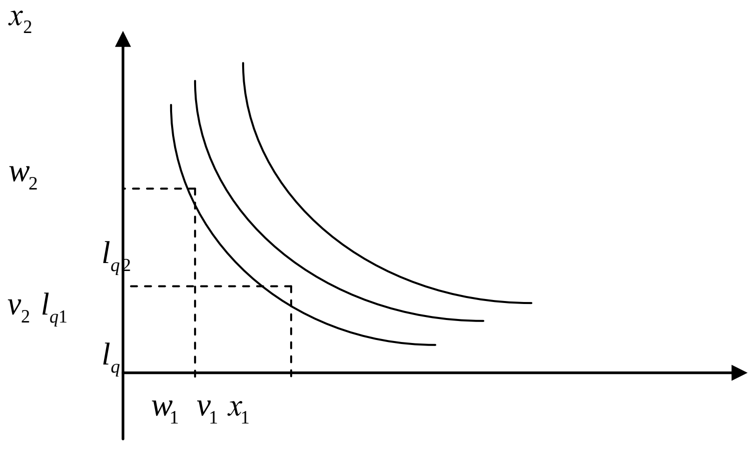
3. $y^{Э}_{ч_1} = a_0 x_2^{a_2} a_1 (a_1 - 1) x_1^{a_1 - 2} \leq 0$ Вторая частная производная не положительна т.к. $a_0 \geq 0, \quad 0 \leq a_1 \leq 1$

4. $a_0 (tx_1)^{a_1} (tx_2)^{a_2} = t^{a_1 + a_2} (a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2})$.

Если рассмотреть линейную производственную функцию $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$ для нее свойства 1 и 4 не выполняются.

Возможность взаимного замещения ресурсов означает, что одно и то же количество продукта y может быть произведено при различных сочетаниях ресурсов. Совокупность таких сочетаний ресурсов, при которых может быть произведено определенное количество продукции q, называется изоквантой.

Различные наборы (v_1, v_2) и (w_1, w_2) затрачиваемых ресурсов, принадлежащие одной и той же изокванте l_q (т.е. $q = f(v_1, v_2) = f(w_1, w_2)$), дают один и тот же объем выпуска q.



Свойства изоквант:

5. Изокванты не пересекаются друг с другом.
6. Изокванта l_q разбивает пространства ресурсов на два множества, в одном из которых $q_0 < q$, в другом $q_1 > q$, причем граница между этими множествами проходит по изокванте l_q.
7. Большему выпуску продукции соответствует изокванта, более удаленная от начала координат.
8. Изоквнты не имеют общих точек с осями координат.

Средней производительностью I-го ресурса (фактора производства) или средним выпуском по i-му ресурсу (фактору производства) называют отношение значения функции к величине I-го ресурса. Символика:

$A_i = \dfrac{f(x)}{x_i}$, где $(i = 1{,}2)$ или $f(x) = f(x_1, x_2)$

Предельной (маржинальной) производительностью i-го ресурса (фактора производства) или предельным выпуском по i-му ресурсу (фактору производства) называют первую частную производную функции $f(x) = f(x_1, x_2)$. Символика

$M_i = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ Предельная производительность показывает, на сколько единиц увеличивается объем выпуска у, если объем затрат x_i i-го ресурса вырастает на одну единицу при неизменных объемах другого затрачиваемого ресурса.

Найдем средние (A_1, A_2) и предельные (M_1, M_2)значение для производственной функции Кобба-Дугласа.

1. $A_1 = \dfrac{f(x)}{x_1} = a_0 x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2}$; $A_2 = \dfrac{f(x)}{x_2} = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2 - 1}$

2. $M_1 = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} = a_0 a_1 x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2} = a_1 A_1$; $M_2 = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2} = a_2 A_2$;

$\dfrac{M_1}{A_1} = a_1 \le 1 \ \Rightarrow M_1 \le A_1$ и $\dfrac{M_2}{A_2} = a_2 \le 1 \ \Rightarrow M_2 \le A_2$ т.е. предельная производительность i-го ресурса не больше средней производительности этого ресурса. Это положение обычно выполняется и для других производственных функций.

2. Эластичность выпуска. Производственная функция Кобба-Дугласа

Отношение предельной производительности M_i i-го ресурса к его средней производительности A_i называется эластичностью выпуска по i-му ресурсу (по фактору производства). Символика:

$E_i = \dfrac{M_i}{A_i} = \dfrac{x_i}{f(x)} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ $(i = 1{,}2)$.

Сумма $E_1 + E_2 = E_x$ называется эластичностью производства.

E_i показывает, на сколько процентов увеличится выпуск, если затраты i-го ресурса увеличатся на один процент при неизменных объемах другого ресурса..

Имеем : $E_1 = a_1,\ E_2 = a_2, \quad E_x = E_1 + E_2 = a_1 + a_2$

Предельной нормой замены (замещения) i-го ресурса (фактора производства) j-м называется выражение:

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i}\ (i, j = 1{,}2)$$

при постоянной у. i – номер заменяемого ресурса, j - номер замещающего ресурса или

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}}$$

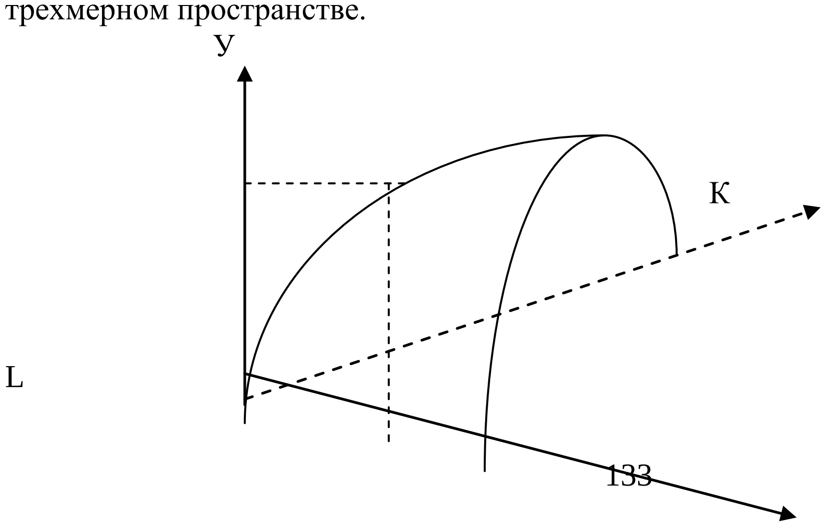
Для двухфакторной производственной функции справедливо равенство:

$R_{12} = \frac{E_1}{E_2}\frac{x_2}{x_1}$, т.е. придельная норма замены первого ресурса вторым равна отношению эластичностей выпуска по первому и второму ресурсам, умноженному на отношение объема второго ресурса к объему первого ресурса.

.Для моделирования отдельного региона или страны в целом (т.е. для решения задач на макроэкономическом, микроэкономическом уровне) часто используют производственную функцию вида $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$, где a_0 ,a_1, a_2 - параметры производственной функции. Это положительные постоянные числа (часто a_1 и a_2 таковы, что $a_1 + a_2 = 1$). Производственная функция данного вида называется производственная функция Кобба-Дугласа по имени двух американских экономистов, предложивших ее использовать в 1929 году. Производственная функция Кобба-Дугласа активно применяется для решения разнообразных теоретических и прикладных задач благодаря своей структурной простате. В данной модели $x_1 = K$ равно объему используемого основного капитала (объему используемых основных фондов – в отечественной терминологии), $x_2 = L$ - затратам живого труда, тогда производственная функция Кобба-Дугласа приобретает вид часто используемый в литературе:

$y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$ или если выполняется равенство $a_1 + a_2 = 1$, то $Y = bK^{\alpha}, L^{\alpha - 1}$

Графиком двухфакторной производственной функции будет являться поверхность в трехмерном пространстве.



При выполнении равенства $a_1 + a_2 = 1$ модель Кобба-Дугласа можно записать несколько в ином виде:

$$\frac{Y}{L} = \frac{a_0 K^{a_1} L^{a_2}}{L} = \frac{a_0 K^{a_1}}{L^{1-a_2}} = \frac{a_0 K^{a_1}}{L^{a_1}} = a_0 \left[\frac{K}{L}\right]^{a_1}, \text{ т.е } \frac{Y}{L} = a_0 \left[\frac{K}{L}\right]^{a_1}$$

Дроби $\frac{Y}{L} = z$ и $\frac{K}{L} = k$ называются соответственно производительностью труда и капиталовооруженностью труда. Используя новые символы, получим $z = a_0 k^{a_1}$, т.е из двухфакторной производственной функции Кобба-Дугласа получим формально однофакторную производственную функцию Кобба-Дугласа. В связи с тем, что $0 < a_1 < 1$, из последней формулы следует, что производительность труда Z растет медленнее его капиталовооруженности. Однако этот вывод справедлив для случая статической производственной функции Кобба-Дугласа в рамках существующей технологии и ресурсов. Отметим, что дробь $\frac{Y}{K}$ называется производительностью капитала или капиталоотдачей, обратные дроби $\frac{K}{Y}$ и $\frac{L}{Y}$ называются соответственно капиталоемкостью и трудоемкостью выпуска.

Производственная функция называется динамической, если:

3) время T фигурирует в качестве самостоятельной переменной величины (как бы самостоятельного фактора производства), влияющего на объем выпускаемой продукции;
4) параметры производственной функции и ее характеристикаF зависят от времени T.

При построении производственной функции НТП может быть учтен с помощью введения множителя НТП e^{pt}, где параметр p(p>0) характеризует темп прироста под влиянием НТП:

$$y(t) = e^{pt} f(x_1(t), x_2 t) \text{ где } (t = 0,1,...,T).$$

Эта простейший пример динамической производственной функции; она включает нейтральный, то есть не материализованный в одном из факторов, технический прогресс. В более сложных случаеях технический прогресс может воздействовать непосредственно на производительность труда или капитала (капиталоотдачу): $Y(t) = f(A(t) \cdot L(t), K(t))$ или $Y(t) = f(A(t) \cdot K(t), L(t))$. Он называется, соответственно, трудосберегающим или капиталосберегающим НТП

Пример На основании данных по экономике СССР (динамики национального дохода, численности занятых в материальном производстве и объеме основных фондов), опубликованных за 1960-1985 гг., макроэкономической производственной функции Кобба-Дугласа без учета НТП и с учетом НТП. Без учета НТП функция имеет вид $Y = 1{,}022 K^{0{,}5382} L^{0{,}4618}$, с учетом НТП $Y = 1{,}038 e^{0{,}0294t} K^{0{,}9749} L^{0{,}2399}$.

Выделение существенных видов ресурсов (факторов производства) и выбор аналитической формы функции называется спецификацией.

Преобразование реальных и экспертных данных в модельную информацию, т.е.расчет численных значений параметров на базе статистических данных с помощью регрессионного и корреляционного анализа, называют параметризацией.

Задача 1

Производственная функция имеет вид $y = 5 \cdot x^{\frac{1}{2}}$, где y – объем выпускаемой продукции, x – величина затрачиваемого ресурса. Определить в общем виде среднюю и предельную производительность ресурса, рассчитать эластичность выпуска. Найти значение средней и предельной производительности ресурса в точках x=1; x=4; x=9; x=16. Рассчитать в этих точках эластичность выпуска.

Решение

$$Ax = \frac{f(x)}{x} = \frac{5 * x^{1/2}}{x} = \frac{5}{\sqrt{x}};\ M_x = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = (5 * x^{1/2})' = 5 * \frac{1}{2} x^{(\frac{1}{2}-1)} = \frac{5}{2\sqrt{x}};$$

$$E_x = \frac{M_x}{A_x} = \frac{5}{2\sqrt{x}} : \frac{5}{\sqrt{x}} = \frac{5 * \sqrt{x}}{2\sqrt{x} * 5} = \frac{1}{2}$$

при x=1 $A_x = \frac{5}{\sqrt{x}} = \frac{5}{\sqrt{1}} = \frac{5}{1} = 5$, $M_x = \frac{5}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2\sqrt{1}} = \frac{5}{2 \cdot 1} = 2{,}5$, $E_x = \frac{1}{2}$;

при x=4 $A_x = \frac{5}{\sqrt{x}} = \frac{5}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2} = 2{,}5$, $M_x = \frac{5}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2\sqrt{4}} = \frac{5}{2 \cdot 2} = 1{,}25$, $E_x = \frac{1}{2}$;

при x=16 $A_x = \frac{5}{\sqrt{x}} = \frac{5}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4} = 1{,}25$, $M_x = \frac{5}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2\sqrt{16}} = \frac{5}{2 \cdot 4} = 0{,}625$, $E_x = \frac{1}{2}$.

Задача 2

Производственная функция имеет вид $y = 3 \cdot x^{\frac{1}{3}}$, где y – объем выпускаемой продукции, x – величина затрачиваемого ресурса. Определить в общем виде среднюю и предельную производительность ресурса, рассчитать эластичность выпуска. Найти значение средней и предельной производительности ресурса в точках x=8; x=27; x=64. Рассчитать в этих точках эластичность выпуска.

Задача 3

Производственная функция имеет вид $y = 0{,}9L + 1{,}8K$, где *L* –затраты труда, *К* - затраты капитала (затраты основных производственных фондов). Определить среднюю и предельную производительность ресурсов, рассчитать эластичность выпуска по ресурсам и эластичность производства при фиксированных значениях $L_1 = 3,\ K_1 = 3{,}5$; $L_2 = 4,\ K = 3$; $L_3 = 5,\ K_3 = 2{,}5$. Построить изокванты при фиксированном выпуске y = 2,7; $y = 6{,}3$; $y = 9$.

Решение

Средняя и предельная производительность ресурсов, эластичность выпуска по ресурсам и эластичность производства при фиксированных значениях рассчитывается по формулам (см. решение задачи 1).

По определению изокванты *y=q=const*$\Rightarrow$ из уравнения производственной функции $y = 0{,}9L + 1{,}8K$ необходимо выразить одну переменную через другую (т.к. y=const). Допустим, выразим *L* через *К*:

$L = \frac{y}{0.9} - 2K$. Данное уравнение выражает общий вид изокванты.

Изокванта уровня у = 2,7 имеет вид *L=3-2K*. Если в данное уравнение произвольно подставить значения К, то можно построить линию, которая будет являться изоквантой уровня производства у=2,7. При уровне производства у=6,3, уравнение изокванты имеет вид *L=7-2K*.

При у=9, изокванта - *L=10-2K*.

Задача 4

Производственная функция имеет вид $y = L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{3}{4}}$, где *L* –затраты труда, *K*-затраты капитала (затраты основных производственных фондов). Определить среднюю и предельную производительность ресурсов, при фиксированных значениях $L_1 = 2$; $K_1 = 32$; $L_2 = 40{,}5$; $K_2 = 0{,}5$. Рассчитать эластичность выпуска по ресурсам и эластичность производства Построить изокванты при фиксированном выпуске $y = 2$; $y = 3$.

Задача 5

Производственная функция имеет вид $y = L^{\frac{1}{3}} K^{\frac{1}{2}}$, где *L* –затраты труда, *K*-затраты капитала (затраты основных производственных фондов). Определить среднюю и предельную производительность ресурсов, при фиксированных значениях $L_1 = 27$; $K_1 = 9$; $L_2 = 64$; $K_2 = 16$. Рассчитать эластичность выпуска по ресурсам и эластичность производства. Построить изокванты при фиксированном выпуске $y = 1$; у = 2; у = 3.

Задача 6

Производственная функция есть функция Кобба-Дугласа. Чтобы увеличить выпуск продукции на 3%, надо увеличить фонды на 6% или численность рабочих на 9%. Средняя производительность одного работника за месяц 1 млн. руб., а всего работников 1000. Основные фонды оценивались на 10 млрд. руб. Какой вид имеет производственная функция, чему равна средняя фондоотдача.

Решение

Функция Кобба-Дугласа имеет вид $y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$. Требуется найти параметры уравнения a_0, a_1, a_2 и A_K.

Эластичность выпуска по *i*-му ресурсу (E_i) показывает, на сколько процентов увеличится выпуск, если затраты i-го ресурса увеличатся на один процент при неизменных объемах другого ресурса, $E_K = 3\% : 6\% = \frac{1}{2}$.

$$E_K = \frac{M_K}{A_K}$$

$$M_K = \frac{\partial y}{\partial K} = (a_0 K^{a_1} L^{a_2})'_K = a_0 L^{a_2} a_1 K^{(a_1 - 1)}, \quad A_K = \frac{y}{K} = \frac{a_0 K^{a_1} L^{a_2}}{K} = a_0 K^{(a_1 - 1)} L^{a_2},$$

$$E_K = \frac{a_0 a_1 K^{(a_2 - 1)} L^{a_2}}{a_0 K^{(a_1 - 1)} L^{a_2}} = a_1, \text{ т.е.}$$

$E_K = a_1 = \frac{1}{2}$.

$A_K = \frac{y}{K} = \frac{a_0 K^{a_1} L^{a_2}}{K} = a_0 K^{(a_1 - 1)} L^{a_2}$

Аналогично определяем $a_2 = \frac{1}{3}$.

Средняя производительность одного работника $A_L = \frac{Y}{L} = 1\,000\,000 \Rightarrow \quad Y = 1\,000\,000 * L$, т.к $L = 1000$ $Y = 1\,000\,000 * 1000 = 10^9$. По условию задачи $K = 10^{10}$, подставляем значения в формулу $10^9 = a_0 * \left(10^{10}\right)^{\frac{1}{2}} * \left(10^3\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow a_0 = 1000$.

Производственная функция будет иметь вид $Y = 1000 * K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{3}}$, Средняя фондоотдача $A_K = \frac{Y}{K} = \frac{10^9}{10^{10}} = 0{,}1$.

Задача 7

Производственная функция есть функция Кобба-Дугласа. Чтобы увеличить выпуск продукции на 1%, надо увеличить фонды на 3% или численность рабочих на 3%. Один работник за месяц производит продукции на 10 млн. руб., а всего работников 1000. Основные фонды оценивались на 1 млрд. руб. Какой вид имеет производственная функция, чему равна средняя фондоотдача.

Задача 8

Производственная функция есть функция Кобба-Дугласа. Чтобы увеличить выпуск продукции на 2%, надо увеличить фонды на 5% или численность рабочих на 5%. Один работник за месяц производит продукции на 1 млн. руб., а всего работников 32. Основные фонды оценивались на 10 млрд. руб. Какой вид имеет производственная функция, чему равна средняя фондоотдача.

Задача 9

Производственная функция есть функция Кобба-Дугласа. Чтобы увеличить выпуск продукции на 1%, надо увеличить фонды на 2% или численность рабочих на 4%. Один работник за месяц производит продукции на 10 млн. руб., а всего работников 625. Основные фонды оценивались на 100 млн. руб. Какой вид имеет производственная функция, чему равна средняя фондоотдача.

Задача 10

Производственная функция имеет вид $y = 0{,}9L + 1{,}8K$, рассчитать предельную норму замены труда капиталом (R_{LK}) и предельную норму замены капитала трудом (R_{KL}).

Решение:

$$R_{LK} = \frac{\frac{\partial y}{\partial L}}{\frac{\partial y}{\partial K}} = \frac{(0{,}9L + 1{,}8K)'_L}{(0{,}9L + 1{,}8K)'_K} = \frac{0{,}9}{1{,}8} = 0{,}5$$

$$R_{KL} = \frac{\frac{\partial y}{\partial K}}{\frac{\partial y}{\partial L}} = \frac{(0{,}9L + 1{,}8K)'_K}{(0{,}9L + 1{,}8K)'_L} = \frac{1{,}8}{0{,}9} = 2$$

Задача 11

Производственная функция имеет вид $y = L^{\frac{1}{3}} K^{\frac{1}{2}}$, рассчитать предельную норму замены труда капиталом (R_{LK}) и предельную норму замены капитала трудом (R_{KL}).

Задача 12

Производственная функция имеет вид $y = L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{3}{4}}$, рассчитать предельную норму замены труда капиталом (R_{LK}) и предельную норму замены капитала трудом (R_{KL}).

Задача 13

Производственная функция имеет вид $y = L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}$, рассчитать предельную норму замены труда капиталом (R_{LK}) и предельную норму замены капитала трудом (R_{KL}).

Задача 14

Производственная функция имеет вид $y = L^{\frac{1}{3}} K^{\frac{2}{3}}$, рассчитать предельную норму замены труда капиталом (R_{LK}) и предельную норму замены капитала трудом (R_{KL}).

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

3.1Практическое занятие 1 (2 часа)

Тема: «Двойственность в линейном программировании»

3.1.1Задание для работы:

1. Постановка и модель двойственной задачи. Понятие двойственности.
2. Решение двойственных задач симплекс-методом.
3. Основные теоремы двойственности

3.1.2Краткое описание проводимого занятия:

1. Постановка и модель двойственной задачи. Понятие двойственности.

С каждой задачей линейного программирования тесно связана другая линейная задача, называемая *двойственной*. Первоначальная задача называется исходной (или прямой). Связь исходной и двойственной задач заключается, в частности, в том, что решение одной из них может быть получено непосредственно из решения другой.

Напомним, что в основе задачи линейного программирования рассматривается предприятие, имеющее ресурсы b_i, где $i = 1, 2, \ldots, m$. Оно тратит их на изготовление готовой продукции и эту продукцию реализует. При этом ставится цель – получить максимум продукции в стоимостном выражении не перерасходуя ресурсы. Модель задачи выглядит следующим образом:

I. $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \max.$

II. $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1,$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2,$

………………………………

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m.$

III. $x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n.$

Предположим, что некоторое предприятие решило не тратить ресурсы на изготовление продукции, а продать эти ресурсы. Тогда возникает вопрос: по какой цене продавать ресурсы? Цена должна устраивать как продавца, так и покупателя. Интерес покупающей стороны заключается в том, чтобы заплатить за ресурсы как можно меньше, а интерес продающей стороны – в том, чтобы получить за ресурсы не меньше того, что она получила бы за реализованный готовый товар.

Тогда, в так называемой двойственной модели, целевая функция будет описывать интерес покупающей стороны, система ограничений – интерес продающей стороны (необходимо оценить ресурсы, которые пошли на изготовление единицы продукции и стоимость этих ресурсов ограничить ценой реализованной единицы продукции), третье условие неотрицательности переменных величин будет выполняться в силу того, что цена единицы ресурса не может быть отрицательной. Введя в качестве цены единицы ресурса величину $u_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, ее еще называют оценкой ресурса(или двойственной оценкой), получим следующую модель:

I. $F = b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots + b_mu_m \rightarrow \min.$

II. $a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m \geq c_1,$

$a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{m2}u_m \geq c_2,$

………………………………

$a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{mn}u_m \geq c_n.$

III. $u_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m.$

Сопоставим обе задачи:

- первая – задача на максимум ($Z \rightarrow \max$), вторая – на минимум ($F \rightarrow \min$);
- в первой система ограничений типа $\leq$, во второй – $\geq$;
- в первой задаче n неизвестных и m ограничений, во второй – m неизвестных и n ограничений;

- коэффициенты в целевых функциях и величины в правых частях неравенств при переходе из одной задачи в другую меняются местами (в первой задаче c_j – коэффициенты целевой функции, во второй c_j – свободные члены; в первой задаче b_i – свободные члены, во второй b_i – коэффициенты целевой функции);

- матрицы коэффициентов в первой и второй задаче являются транспонированными относительно друг друга (строки и столбцы поменялись местами).

Таким образом видно, что обе задачи тесно связаны между собой. Они образуют пару задач, называемую в линейном программировании *двойственной парой*. Первую из них обычно называют прямой (или исходной) задачей, а вторую – двойственной задачей (с чисто математической точки зрения за исходную может быть принята любая из задач двойственной пары).

Алгоритм составления двойственной задачи:

1) тип экстремума целевой функции меняется;

2) каждому ограничению исходной задачи ставится в соответствие переменная двойственной задачи;

3) свободные члены исходной задачи становятся коэффициентами при переменных в целевой функции двойственной задачи;

4) каждый столбец коэффициентов в системе ограничений формирует ограничение двойственной задачи, при этом тип неравенства меняется; коэффициенты при переменных в целевой функции исходной задачи становятся свободными членами в соответствующих неравенствах двойственной задачи.

Рассмотрим конкретный пример построения двойственной модели:

исходная задача:

I. $Z = 6x_1 + 4x_2 \to \max$.
II. $2x_1 + 4x_2 \le 8$,
$2x_1 + x_2 \le 6$.
III. $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

двойственная задача:

I. $F = 8u_1 + 6u_2 \to \min$.
II. $2u_1 + 2u_2 \ge 6$,
$4u_1 + u_2 \ge 4$.
III. $u_1 \ge 0, u_2 \ge 0$.

Следует отметить, что:

- математические модели пары двойственных задач могут быть симметричными и несимметричными. В несимметричных двойственных задачах система ограничений исходной задачи задается в виде равенств, а двойственной – в виде неравенств, причем в последней переменные могут быть и отрицательными. В симметричных задачах система ограничений как исходной, так и двойственной задачи задается неравенствами, причем на двойственные переменные налагается условие неотрицательности. Чаще рассматриваются симметричные взаимодвойственные задачи;

- каждая из задач двойственной пары формально является самостоятельной задачей линейного программирования и может решаться независимо от другой. Однако, использование симплексного метода решения одной из двойственных задач двойственной пары автоматически приводит к решению другой задачи. Наглядным обоснованием данного положения может служить возможность использования двойственной симплекс-таблицы для отыскания искомых значений целевых функций.

Так, подготовленные для записи в симплекс таблицу модели будут выглядеть так:

исходная задача(введем $y_i \ge 0$):

I. $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$.
II. $y_1 = -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n + b_1$,
$y_2 = -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \ldots - a_{2n}x_n + b_2$,
…………………………………..
$y_m = -a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - \ldots - a_{mn}x_n + b_m$.
III. $x_j \ge 0, j = 1, 2, \ldots, n$.

двойственная задача (введем $v_j \ge 0$):

I. $F = b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots + b_mu_m \to \min$.
II. $v_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m - c_1$,
$v_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{m2}u_m - c_2$,
……………………………………
$v_n = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{mn}u_m - c_n$.
III. $u_i \ge 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Обе модели записываются в двойственную симплекс-таблицу следующим образом (таблица 2.1):

Таблица 2.1 – Двойственная симплексная таблица

		v_1	v_2	…	v_n	F
		$-x_1$	$-x_2$	…	$-x_n$	Свободные члены
u_1	y_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
u_2	y_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…	…
u_m	y_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
Свободные члены	$\boldsymbol{Z}$	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_n$	0

Заметим, что коэффициенты подготовленной двойственной модели располагаются по столбцам, то есть в одной таблице записаны обе двойственные модели. Решая модель прямой задачи симплекс-методом, параллельно решается и модель двойственной задачи. Получив оптимальный вариант для прямой задачи, мы получаем оптимальный вариант и для двойственной;

- прежде чем составлять модель двойственной задачи, необходимо у исходной модели «выровнять» знаки, т.е. если целевая функция стремится к *max*, то все знаки должны быть $\leq$, а если к *min*, то $\geq$. Система приводится в соответствие путем домножения обеих частей «неподходящего» неравенства на (-1). Например, чтобы записать модель, двойственную к приведенной модели

I. $Z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min.$

II. $-4x_1 - 3x_2 + x_3 \leq -4,$

$5x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6.$

III. $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$

необходимо исходную переписать в виде:

I. $Z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min.$

II. $4x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 4,$

$5x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6.$

III. $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$

Тогда двойственная задача будет выглядеть так:

I. $F = 4u_1 + 6u_2 \to \max.$

II. $4u_1 + 5u_2 \leq 4,$

$3u_1 + u_2 \leq 2,$

$-u_1 + 2u_2 \leq 3.$

III. $u_1 \geq 0;\ u_2 \geq 0.$

Аналогично можно рассмотреть другой пример:

исходная задача:

I. $Z = 80x_1 + 70x_2 + 60x_3 \to \max.$

II. $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 780,$

$x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 850,$

$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 790,$

$x_1 \geq 90,$

$x_2 \geq 70,$

двойственная задача:

I. $F = 780u_1 + 850u_2 + 790u_3 - 90u_4 -$

$- 70u_5 - 60u_6 \to \min.$

II. $2u_1 + u_2 + 3u_3 - u_4 \geq 80,$

$3u_1 + 4u_2 + 4u_3 - u_5 \geq 70,$

$4u_1 + 5u_2 + 2u_3 - u_6 \geq 60.$

III. $u_i \geq 0,\ i = 1, 6.$

В качестве *основной теоремы двойственности* выделяют следующую формулировку: если одна из взаимно двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая также имеет оптимальное решение, при этом соответствующие им оптимальные значения целевых функций равны (т.е. max Z = min F).

Кроме этого варианта возможны следующие взаимоисключающие случаи:

- в одной из пары двойственных задач допустимое множество не пусто, а целевая функция на этом множестве не ограничена, то у другой задачи из этой пары будет пустое допустимое множество (т.е. если в одной задаче функционал не ограничен, то задача ей двойственная не имеет решения);

- обе из рассматриваемых задач имеют пустые допустимые множества (т.е. обе не имеют решения).

2. Решение двойственных задач.

С экономической стороны решение прямой задачи дает оптимальный план выпуска продукции, а решение двойственной задачи – оптимальную систему условных (или *двойственных*) *оценок* применяемых ресурсов.

Для экономических задач часто представляет интерес то, как повлияет на оптимальное решение изменение запасов сырья и изменение прибыли от единицы продукции. В связи с этим посредством двойственных оценок можно выяснить: увеличение объемов какого вида ресурсов наиболее выгодно; на сколько можно увеличить запас сырья для улучшения полученного оптимального значения целевой функции; каков диапазон изменения того или иного коэффициента целевой функции, при котором не происходит изменение оптимального решения; целесообразность включения в план новых изделий.

Центральный вопрос, который рассматривается в теории двойственности, – это вопрос о ценности ресурса. Но ценности его не рыночной, а исключительно с внутренней точки зрения данного предприятия, с точки зрения эффективного использования этого ресурса в сложившейся структуре производства, определяемой технологической матрицей и удельными прибылями. При этом оценка ценности производится только в процессе использования ресурса в одном цикле производства. Это является элементом условности. Однако из всего этого вытекает основополагающая оценка ценности ресурса – сколько прибыли может принести вовлечение в производство еще одной единицы данного ресурса?

В качестве примера рассмотрим следующую задачу: предприятие располагает тремя группами основного оборудования и может выпускать изделия четырех видов – *А, Б, В* и *Г*. Все изделия имеют практически неограниченный сбыт, и предприятие в данном случае может самостоятельно планировать ассортимент и величину выпуска, нет ограничений и в приобретении сырья. Лимитирующим фактором является лишь основное оборудование, плановый фонд времени работы которого задан и не может быть превышен. Известны также нормы времени на обработку каждого вида изделий на оборудовании каждой группы. Известна величина прибыли, получаемой предприятием за единицу каждого из изделий. Необходимо, чтобы план производства обеспечил предприятию наибольшую сумму прибыли. Числовые данные задачи приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2 – Числовые данные задачи

Группы оборудования	Время в минутах на единицу изделия				Месячный фонд времени (мин.)
	изделие *А*	изделие *Б*	изделие *В*	изделие *Г*	
1-ая группа	1	2	4	8	24000
2-ая группа	3	5	1	0	12000
3-я группа	6	0	3	1	30000
Прибыль за единицу изделия (руб.)	0,4	0,2	0,5	0,8	–

Обозначим искомый выпуск изделий разного вида через x_1, x_2, x_3 и x_4. тогда модель задачи будет выглядеть следующим образом:

I. $Z = 0{,}4x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}5x_3 + 0{,}8x_4 \to \max$.

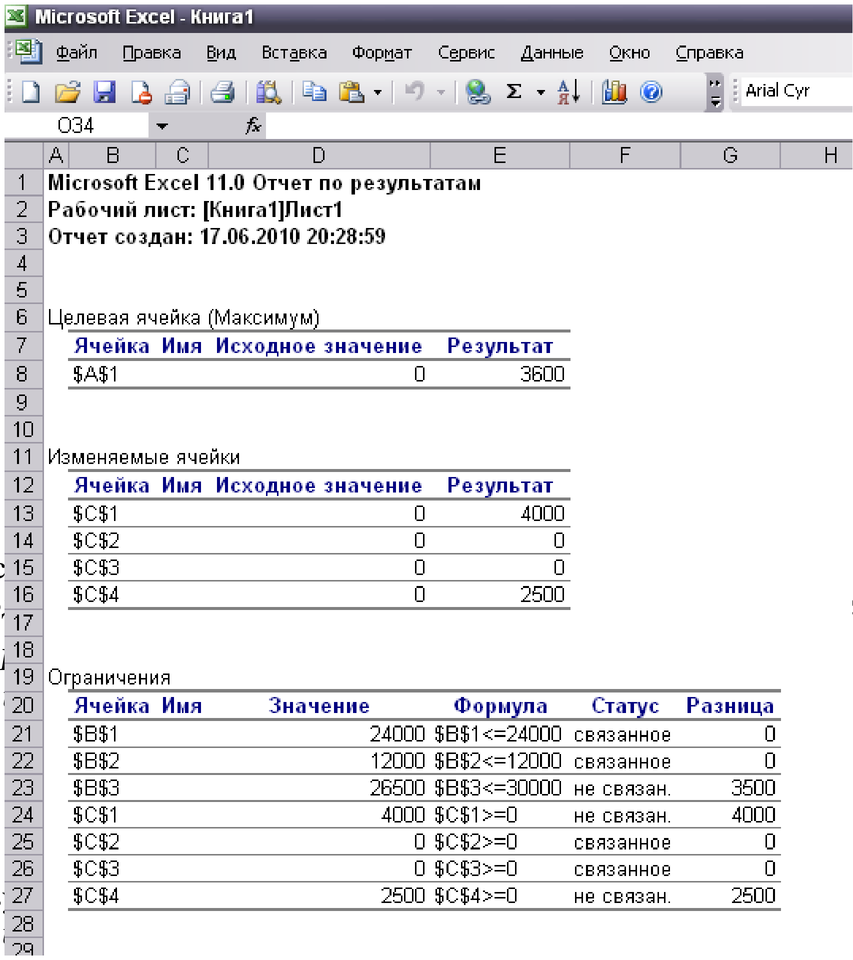
II. $x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 \leq 24000$,

$3x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 12000$,

$6x_1 + 3x_3 + x_4 \leq 30000$.

III. $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$.

Решение задачи в MSExcel дает результат: $x_1 = 4000$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2500$, $Z = 3600$ руб. (рисунок 2.1).



Microsoft Excel - Книга1

Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам
Рабочий лист: [Книга1]Лист1
Отчет создан: 17.06.2010 20:28:59

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$A$1		0	3600

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$C$1		0	4000
$C$2		0	0
$C$3		0	0
$C$4		0	2500

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$B$1		24000	$B$1<=24000	связанное	0
$B$2		12000	$B$2<=12000	связанное	0
$B$3		26500	$B$3<=30000	не связан.	3500
$C$1		4000	$C$1>=0	не связан.	4000
$C$2		0	$C$2>=0	связанное	0
$C$3		0	$C$3>=0	связанное	0
$C$4		2500	$C$4>=0	не связан.	2500

Рис

Мо ...дующим образом:

I.

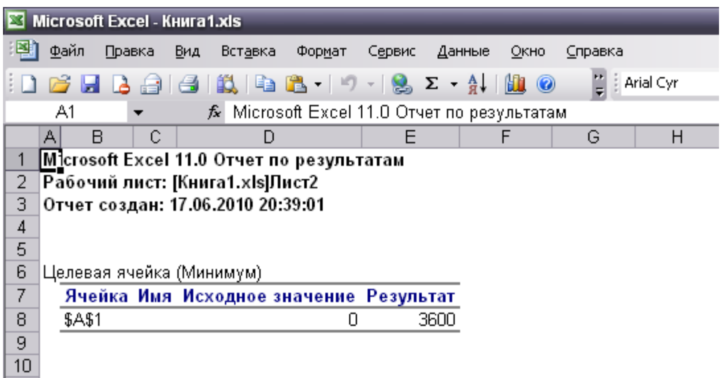
II.

$8u_1$

III.

Рез ... сунке 2.2: $u_1 = 0{,}1$,

$u_2 = 0{,}1$, ...



Microsoft Excel - Книга1.xls

Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам
Рабочий лист: [Книга1.xls]Лист2
Отчет создан: 17.06.2010 20:39:01

Целевая ячейка (Минимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$A$1		0	3600

Рисунок 2.2 – Результат решения двойственной задачи

Переменные u_i обозначают оценки одной минуты времени работы оборудования. Таким образом, для 1-ой и 2-ой группы оборудования эти оценки равны и составляют 0,1. Для 3-ей группы оценка равна нулю, так как фонд времени этой группы оборудования в оптимальном плане используется не полностью (из рисунка 2.1 также видно, что ресурсы 1-ой и 2-ой группы исчерпаны полностью («связанное»), а 3-ей нет («не связанное»)).

При подстановке оптимальных значений оценок в ограничения двойственной задачи получаем (это же отражает рисунок 2.2 в части «ограничения»):

$0{,}1 + 3 \cdot 0{,}1 = 0{,}4,$

$2 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}1 > 0{,}2,$

$4 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}5,$

$8 \cdot 0{,}1 = 0{,}8.$

Ограничения двойственной задачи соблюдаются и выполняются как строгие равенства по отношению к видам продукции *А*, *В* и *Г*. Для этих видов продукции оценка затрачиваемых ресурсов равна получаемому эффекту (прибыли). Хотя изделие *В* при решении исходной задачи не выпускалось ($x_3 = 0$), тем не менее полученный результат оценок наводит на мысль, что мы имели дело с альтернативным оптимумом (в действительности, если выпуск изделий *А* (x_1) будет составлять 2182 шт., а изделий *В* (x_3) 5455 шт., ($x_2 = 0$, $x_4 = 0$), то прибыль (Z) при данном варианте плана также составит 3600 руб., однако получение данного результата возможно только при анализе «ручного» решения задачи).Изделие *Б* невыгодно включать в план, так как это приведет к уменьшению общей величины прибыли и строгое неравенство в этом случае говорит о том, что оценка затрачиваемых ресурсов превышает получаемый эффект.

Отвечая на поставленный перед задачей вопрос, отметим, что, так как в нашем примере для 1-ой и 2-ой групп оборудования оценки равны 0,1, то это значит, что если располагаемый фонд времени работы 1-ой и 2-ой группы оборудования увеличится на 1 минуту, то можно будет построить новый оптимальный план, в котором общая прибыль будет на 0,1 руб. выше. Увеличение фонда времени на 10 минут привело бы к росту максимальной суммы прибыли на 1 руб. и т.д. Для 3-ей группы оборудования (оценка равна нулю), поскольку это оборудование оказывается не полностью используемым, то дальнейшее увеличение фонда его времени не повлияет на оптимальный план выпуска продукции и сумму прибыли. Однако *оценки позволяют судить об эффекте* *сравнительно небольших изменений объема ресурсов в конкретных условиях данной задачи*, иначе сами оценки могут стать другими.

Если нашей целью является расширение производства и повышение эффективности плана путем привлечения дополнительных ресурсов, то анализ оценок может помочь при выборе правильного решения. Так, в нашем примере фонд времени 1-ой группы оборудования вдвое больше, чем фонд времени 2-ой группы, но оказывается, что с учетом всех условий дефицитность того и другого оборудования одинакова (оценки равны). Из этого следует, что *двойственные оценки отражают сравнительную дефицитность различных видов ресурсов в отношении принятого в задаче показателя эффективности*.

Двойственные оценки могут служить тонким инструментом анализа и принятия правильных управленческих решений в условиях постоянно изменяющегося производства. Так, предположим, что в нашей задаче появилась возможность выпускать еще один вид изделий – изделия *Д*. затраты времени на обработку единицы изделия *Д* составляют: на оборудовании 1-ой группы – 6 мин., на оборудовании 2-ой группы – 2 мин., на оборудовании 3-ей группы – 5 мин. Прибыль за единицу изделия *Д* равна 0,7 руб. Так как критерием оптимизации в задаче является прибыль, то необходимо определить, целесообразно ли с точки зрения общей величины прибыли включать в план дополнительно выпуск продукции *Д*.

Ответ на данный вопрос можно получить, включив новые условия в исходную задачу, но для практических задач большой размерности это делать не целесообразно. Поэтому покажем возможность использования для этих целей двойственных оценок. Сопоставим «затраты» на единицу продукции *Д* и прибыль за единицу. Оценка затрат времени составит:

$$6 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0 = 0{,}8.$$

Эффективность единицы продукции *Д* в плане равна 0,7 руб., а условная «сумма затрат» – 0,8 руб. Это говорит о нецелесообразности включения в план данной продукции, так как это приведет к снижению общего эффекта по сравнению с прежним планом. Следовательно, отпадает и необходимость в повторном решении задачи, несмотря на изменившиеся условия.

Приведем некоторые общие положения, вытекающие из экономического смысла двойственности задач линейного программирования и сформулированных свойств оценок оптимального плана:

- исчисленные в оптимальных оценках суммарные затраты на производства каждого ингредиента не могут быть меньше, чем оценка данного ингредиента в конечном продукте;
- в оптимальном плане, обеспечивающем максимум выпуска конечного продукта при изменяющихся ресурсах, суммарные затраты ресурсов на единицу конечной продукции минимальны (иначе за счет более экономичного их использования можно было бы увеличить выпуск и тем самым улучшить оптимальный план, что противоречит понятию оптимального плана как наилучшего с точки зрения принятого критерия);
- абсолютные значения оценок можно трактовать как некоторые расчетные «цены» ресурсов и потребностей, выраженные в тех же единицах, что и критерий, а знак «+» или «–» при этих «ценах» показывает, ведет ли увеличение данного фактора к возрастанию или уменьшению значения критерия;
- использование двойственных оценок целесообразно, когда ограничивающие условия не меняются, но возникает необходимость определить целесообразность применения тех или иных новых технологических способов.

Различные виды ресурсов, ходящие в модель оптимального планирования, имеют свое конкретное содержание и специфику. Соответствующие им оценки также специфичны и рассматриваются в отдельности по каждой качественно отличной группе ресурсов.

3.1.3 Результаты и выводы: двойственные оценки являются важнейшим результатом, вытекающим из теории двойственности, которая широко применяется на практике.

3.2 Практическое занятие 2 (2 часа)

Тема: « Итоговое обзорное занятие»

3.2.1 Задачи работы:
1. Устный опрос.
2. Подведение итогов

3.2.2Краткое описание проводимого занятия:

1. Постановка основной задачи линейного программирования.
2. Из каких частей состоит экономико-математическая модель задачи.
3. Этапы построения экономико-математической модели.
4. Назовите критерии оптимальности, используемые при построении экономико-математических задач.
5. Назовите основные элементы базовой экономико-математической модели.
6. Назовите виды переменных.
7. Что может являться основными переменными в задачах оптимизации производства?
8. Назовите виды ограничений.
9. Математическая запись модели.
10. Особенности записи структурной формы модели.
11. Какие экономические задачи относятся к задачам целочисленного программирования?
12. Сформулируйте задачу целочисленного программирования и воспроизведите ее модель.
13. В чем состоит метод Гомори?
14. Какие две задачи называются двойственными относительно друг друга?
15. В чем сходства и отличия прямой и двойственной ей задачи?
16. С какой целью необходимо исходную задачу приводить к виду основной задачи линейного программирования?
17. Назовите этапы составления двойственной задачи?
18. Сформулируйте основные теоремы двойственности. Выделите в них экономическую сущность.
19. В чем заключается экономическое содержание теории двойственности?
20. Сформулируйте общие положения, вытекающие из экономического смысла двойственности задач линейного программирования.
21. В чем заключается постановка транспортной задачи?
22. Запишите модель транспортной задачи.
23. Что обозначают переменные в транспортной задаче?
24. Что выражают коэффициенты в целевой функции стандартной транспортной задачи?
25. Каково содержание основных ограничений и целевой функции транспортной задачи?
26. Какие дополнительные ограничения возможны в транспортной задаче?
27. Какое условие должно выполнятся, чтобы транспортная задача была сбалансированной (закрытой)?
28. В каком случае в задаче вводится фиктивный пункт отправления?

29. В каком случае в задаче вводится фиктивный пункт потребления?
30. Для какой ситуации характерно введение фиктивных тарифов?
31. Как выбирается фиктивный тариф?
32. Для какой ситуации характерно введение запрещающих тарифов?
33. Как выбирается запрещающий тариф?
34. Какие экономические задачи решаются с помощью транспортной задачи?
35. Что содержит первый квадрант схемы МОБ?
36. Что выражает второй квадрант схемы МОБ?
37. Что содержит третий квадрант схемы МОБ?
38. Что отражает четвертый квадрант МОБ?
39. Назовите основные балансовые пропорции.
40. Что называется коэффициентами прямых материальных затрат?
41. Как рассчитываются коэффициенты прямых материальных затрат?
42. Что называется коэффициентами полных материальных затрат?
43. Как рассчитываются коэффициенты полных материальных затрат?
44. Какой вид имеет балансовая модель?
45. Какие задачи можно решать при помощи балансовой модели?
46. Как рассчитываются коэффициенты прямой трудоемкости?
47. Как рассчитываются коэффициенты полной трудоемкости?
48. Как по данным МОБ построить баланс труда?
49. Как рассчитываются коэффициенты прямой фондоемкости?
50. Как рассчитываются коэффициенты полной фондоемкости?
51. Как по данным МОБ построить баланс капитальных вложений?
52. Дайте определение функции полезности.
53. Какими свойствами обладает функция полезности?
54. Как определяется предельная полезность товара?
55. Что такое линия безразличия?
56. Что такое бюджетное ограничение?
57. Как построить бюджетную линию?
58. Как формулируется задача потребительского выбора?
59. Что является решением задачи потребительского выбора?
60. Как выглядит графически решение задачи потребительского выбора?
61. Что описывает уравнение Слуцкого?
62. Как рассчитать эффект замены?
63. Как найти эластичность спроса по цене?
64. Как найти эластичность спроса по доходу?
65. Что называется производственной функцией?
66. Какими свойствами обладает производственная функция?
67. Что называют средней производительностью ресурса?
68. Что называют придельной производительностью ресурса?
69. Каков экономический смысл придельной производительности ресурса?
70. Какой вид имеет функция Кобба-Дугласа?
71. Что такое эластичность выпуска по i-му ресурсу?
72. Что такое эластичность производства?
73. Как рассчитать предельную норму замены ресурса?
74. Что такое изокванта?
75. Чем отличается постановка задачи Максимизация прибыли в случае долговременного промежутка от кратковременного?