ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГООБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра организации производства и моделирования экономических систем

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.ДВ.11.02 Исследование операций в менеджменте

Направление подготовки: Менеджмент

Профиль образовательной программыУправленческий и финансовый учет

Форма обучения: очная

Оренбург 201_ г.

Содержание

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.1 Лекция №1,2 (4 часа)

Тема: «Методология системного анализа и исследование операция»

1.1.1 Вопросы лекции:

1. Системный анализ, система, оптимизация
2. Схема операционного проекта
3. Особенности математического моделирования

1.1.2 Краткое содержание вопросов

1.Системный анализ, система, оптимизация

Система- множество элементов с определенными способами взаимодействия между ними, которые все вместе выполняют цель системы.

Процесс - все, что происходит в системе. Система работает, значит в ней происходит процесс.

Операция- часть процесса, которая наделена свойствами всей системы. Операция - это управляемое мероприятие, выполняющее определенную цель, сопоставимую с целью всей системы. Например, операция составления расписания учебных занятий для учебного процесса в системе «университет».

При исследовании сложных организационных систем:

1) невозможен экспериментальный метод исследования;

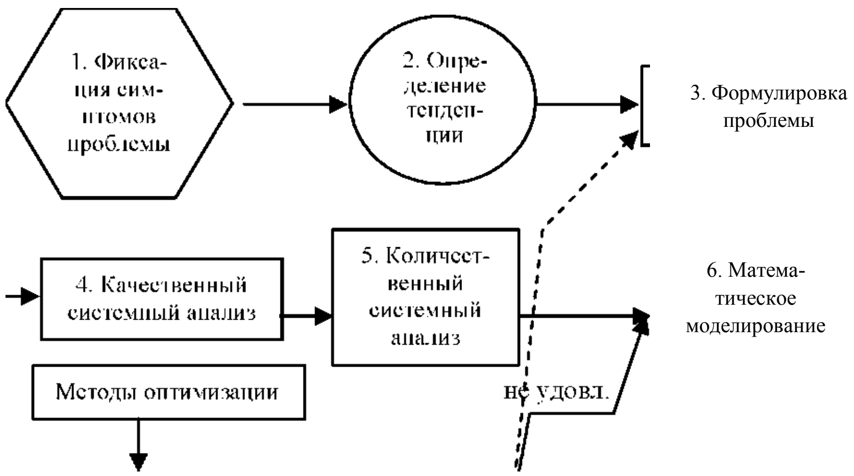
2) невозможно описание поведения систем только на основе какой-либо естественнонаучной теории;

3) при описании таких систем количество факторов, которые необходимо учитывать, велико.

Поэтому очевидно, что такие системы невозможно моделировать, изучать и совершенствовать без использования компьютерных средств и технологий.

2. Схема операционного проекта

Весь комплекс работ по изучению и совершенствованию системы (операции) проводит операционная группа системных аналитиков. Этот проект проводится в интересах лица, принимающего решения (ЛПР). ЛПР может



отвергнуть проект, а может принять.

Дадим краткую характеристику этапов операционного исследования.

1. В самом общем случае поводом для изучения и совершенствования системы служат зафиксированные <u>симптомы</u>, обнаруживающие проблемные вопросы в работе системы.

2. Установленные симптомы проблемы могут образовывать связанную цепочку фактов <u>(тенденцию)</u>, которая помогает сформулировать проблему.

3. Важнейшим этапом исследования системы является четкая <u>формулировка проблемы</u>, которая присутствует на данном уровне жизнедеятельности системы.

4.<u>Качественный системный анализ</u>- это расщепление целостной системы (операции) на отдельные элементы (сущности). Для этого нужно:

- выделить изучаемую систему (операцию) из вышестоящей системы (операции);
- сформулировать <u>цель</u>, выполняемую системой (операцией);
- перечислить <u>факторы,</u> которые влияют на достижение цели;
- определить возможные <u>ограничения</u>, в рамках которых можно совершенствовать систему (операцию).

5.<u>Количественный системный анализ</u> предполагает описать все перечисленные факторы, которые участвуют в операции на количественном уровне, т. е. на основе измеримых параметров. Для этого:

- устанавливается <u>критерий</u>*К* - величина, количественно измеряющая степень достижения цели системы (операции);
- вводятся количественные <u>внутренние параметры</u> системы, которые измеряют факторы, участвующие в описании системы (операции);
- все множество этих параметров необходимо разбить на две части:

а) неуправляемые параметры (константы), которые мы в данной кон-

кретной системе (операции) менять не можем (производительность, нормы расхода материалов и т.п.), их обозначают как коэффициенты $A = (a_ь\ a_2,\ a_к)$;

б) управляемые параметры (переменные) - величины, которые мы мо-

жем менять $X = (x_ь\ x_2,\quad x_n)$.

6. Суть математического моделирования - установление количественных связей между введенными величинами *К, А,* и *X* в виде так называемой операционной <u>модели</u>.

Первая часть операционной модели - это <u>модель целевой функции</u>, она устанавливает функциональную зависимость критерия *К* от неуправляемых параметров *А* и управляемых величин *X* в виде *К = ^(X, А). /* - может быть функция, заданная аналитически, таблично или алгоритмом. В ряде практических задач в качестве элементов множества *X* выступают функции. В этом случае / - функционал. Задачи такого рода называются вариационными и в данном пособии не рассматриваются. Для целевой функции указывается направление улучшения критерия

К = /(X, А) — тт(тах). (1.1)

Этим выражением и определяется смысл <u>оптимизации</u> системы (операции).

Вторая часть операционной модели - математическое описание ограничений на выбор переменных *X.* Все ограничения в общем виде можно записать в виде неравенств (равенств):

((X, А) < 0, 1 = 1,*m.* *(1.2)*

Каждая функция *((X, А)* называется <u>функцией ограничения</u>. В некоторых задачах имеются требования на сам вид переменных *X* или *К.*

$$\left.\begin{array}{l} X \in D \\ K \in M \end{array}\right\}. \quad (1.3)$$

Например, часто возникает требование, чтобы X или K были целыми. В некоторых случаях они должны принадлежать некоторому стандартному множеству значений.

Модель в виде 1.1, 1.2, 1.3 - модель операционного вида или оптимизационная модель (неоптимизационная - без целевой функции).

Модель 1.1, 1.2, 1.3 позволяет поставить задачу оптимизации системы (операции) как математическую задачу: найти такие управляемые переменные X, которые удовлетворяли бы системе ограничений 1.2, 1.3 и обеспечивали бы наилучшее значение критерия K.

7.Решение поставленной математической задачи требует привлечения методов оптимизации, включающих кроме классических математических методов также и специальные методы исследования операций. Реальные задачи приводят к большой размерности (до десятков тысяч). Поэтому современные методы нахождения оптимальных решений ориентированы на использование компьютерных средств.

8.Сопоставляя полученное решение с содержательной постановкой задачи можно обнаружить противоречия или какие-нибудь некорректные элементы решения. Причиной некорректности могут быть ошибки в математической модели или неучет некоторых существенных ограничений. На этом этапе может принимать участие лицо, принимающее решение (ЛПР). Если полученное решение приемлемо - оно принимается, если нет - необходимо вернуться на этап математического моделирования или даже на более ранние этапы исследования.

9.Найденное оптимальное решениеX^* позволяет подготовить управляющее решение в форме документа для ЛПР.

Таким образом, операционное исследование - итерационный процесс, который сходится к определенному оптимальному решению. Рассмотренная схема является примерной. Она позволяет лучше понять смысл системного

3. Особенности математического моделирования

Математическое моделирование - самый сложный этап ИСО. Математическая модель - это такое описание системы, которое позволяет специалисту выполнить цель исследования и оптимизации системы. Для одной и той же системы можно построить различные модели, чтобы выявить различные свойства: например аэродинамическая модель, прочностная модель и т.д. Модель должна быть адекватной реальной задаче, т.е. решения, полученные в рамках построенной модели, должны обладать такими же свойствами, что и реальная система.

К сожалению, не существует какого-либо алгоритма, по которому необходимо создать модель. Можно руководствоваться лишь принципами моделирования:

1. Необходимо решить вопрос размерности модели. Если число параметров увеличить, то мы более точно отобразим реальное событие, но в модели будет трудно выявить основные свойства (наиболее значимые). Задача становится необозримой и может не иметь решения. Поэтому число переменных по возможности стараются уменьшать, оставляя главные, существенные. Но уменьшая число переменных, мы можем опустить существенные, и модель становится неадекватной.

2. Модель зависит от точности, с которой нужно получить решение.

3. Модель зависит от того, насколько мы знаем исходные данные.

4. Подход к построению модели может быть двояким:

4.1.Создание оригинальной модели (не учитывая предыдущей модели в этой области), т.е. разработка «с чистого листа». Это может дать, а может не дать хороший результат. Преимущество: «свежий взгляд на вещи», нет чужих ошибок. Но это может быть дороже и потребует большого времени.

4.2.Использование типовых моделей для моделирования конкретных операций. В настоящее время существует большое число типовых моделей, описывающих наиболее распространенные виды операций и систем:

- модель линейного программирования (ЛП);
- модель динамического программирования;
- игровые модели;

1.2 Лекция №3,4 (4 часа)

Тема: «Линейное программирование»

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Общая и основная задача линейного программирования
2. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования
3. Идея симплекс-метода решения задачи линейного программирования

1.2.2 Краткое содержание вопросов

1. Общая и основная задача линейного программирования

Постановка задачи.

Пусть некоторое предприятие имеет m видов производственных ресурсов. Порядковый номер ресурсов – i, т.е. i=1, 2,…, m.

Наличие каждого вида ресурсов известно и обозначается b_i.

Предположим, что предприятие может производить n видов продукции. Порядковый номер продукции – j, т.е. j=1, 2, …, n.

Необходимо определить какое количество единиц продукции каждого вида надо производить (x_j), чтобы получить максимум этой продукции в стоимостном выражении, если известны затраты на производство единицы продукции каждого вида ресурса (a_{ij}) и цена реализации (c_j).

Развернутая форма записи модели.

I. Целевая функция – описывает выход продукции в стоимостном выражении:

$Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\to$max.

II. Система основных ограничений – описывает с помощью математической зависимости тот факт, что расходы производственных ресурсов не должны превышать их наличие:

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\le b_1$;
$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\le b_2$;
…………………………
$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\le b_m$.

III. Условие неотрицательности переменных величин:

$x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$, …, $x_n\ge 0$.

<u>*Замечание:*</u> в постановке с выбором другого критерия оптимальности целевая функция может стремиться к минимуму. Кроме того система ограничений может быть смешанной, т.е. содержать не только неравенства (≤,≥), но и равенства.

Структурная форма записи модели.

В такой форме модели даются в специализированной литературе. В этой форме записи отражается структура и тип ограничений, структура функции, какие переменные входят в функцию Z и в ограничения.

I. $Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to$max.

II. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$, i=1,2,...,m.

III. $x_j\ge 0$, j=1,2,…,n.

Замечание: одной формулой можно описать ограничения, имеющие одинаковую структуру и тип и включающие в себя одни и те же переменные.

Существуют также векторная, матричная и табличная формы записи модели.

2. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования

Графический метод основан на геометрической интерпретации задач линейного программирования и применяется в основном при решении задач *двумерного пространства*, так как довольно трудно, а чаще практически невозможно изобразить графически многогранник решений, который образуется в результате пересечения полупространств. Поэтому, сущность графического метода решения задач линейного программирования рассмотрим на примере задачи, заданной в двумерном пространстве, т.е. ее ограничения содержат две переменные.

Задача. Найти максимальное значение линейной функции:

$$z = 50x_1 + 40x_2$$

при ограничениях

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 5x_2 \le 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{array}\right\}$$

Решение

Построим многоугольник решений (рис.1), для этого в системе координат $x_1 0 x_2$на плоскости изобразим граничные прямые:

$$2x_1 + 5x_2 = 20 \ (l_1)$$
$$8x_1 + 5x_2 = 40 \ (l_2)$$
$$5x_1 + 6x_2 = 30 \ (l_3)$$
$$x_1 = 0; x_2 = 0$$

Эти прямые рекомендуется строить по двум точкам пересечения с осями координат. Например, для l_1 такими точками будут точки $A(0;4)$ и $E(10;0)$.

Взяв какую-нибудь точку (удобнее всего взять начало координат), устанавливаем, какую полуплоскость определяет каждое из неравенств, соответствующее уравнениям граничных прямых (эти полуплоскости на рис.1 показаны стрелками, штриховкой выделяется общая часть (пересечение) указанных полуплоскостей). Многоугольником решений или *областью допустимых решений* данной задачи является ограниченный пятиугольник *OABCD*.

Далее строим одну из линий уровня целевой функции как прямую линию, соответствующую уравнению Z=const. В нашей задаче можно построить прямую $50x_1 + 40x_2 = 200$ (l_4). Через точку O проводим прямую, параллельную l_4, ей соответствует уравнение Z=0 или $50x_1 + 40x_2 = 0$. Таким образом, определяем направление движения по линиям уровня целевой функции, соответствующее ее наибыстрейшему возрастанию (на рис.1 это направление отмечено стрелкой на прямой l_4). Осуществляя перемещение прямой l_4 параллельно самой себе в выбранном направлении, получаем, что функция Z принимает максимальное значение на многоугольнике решений в точке C.Этот вывод следует из ***теоремы: если оптимальное решение задачи существует, то оно достигается, по крайней мере, в одной из вершин области допустимых решений.***

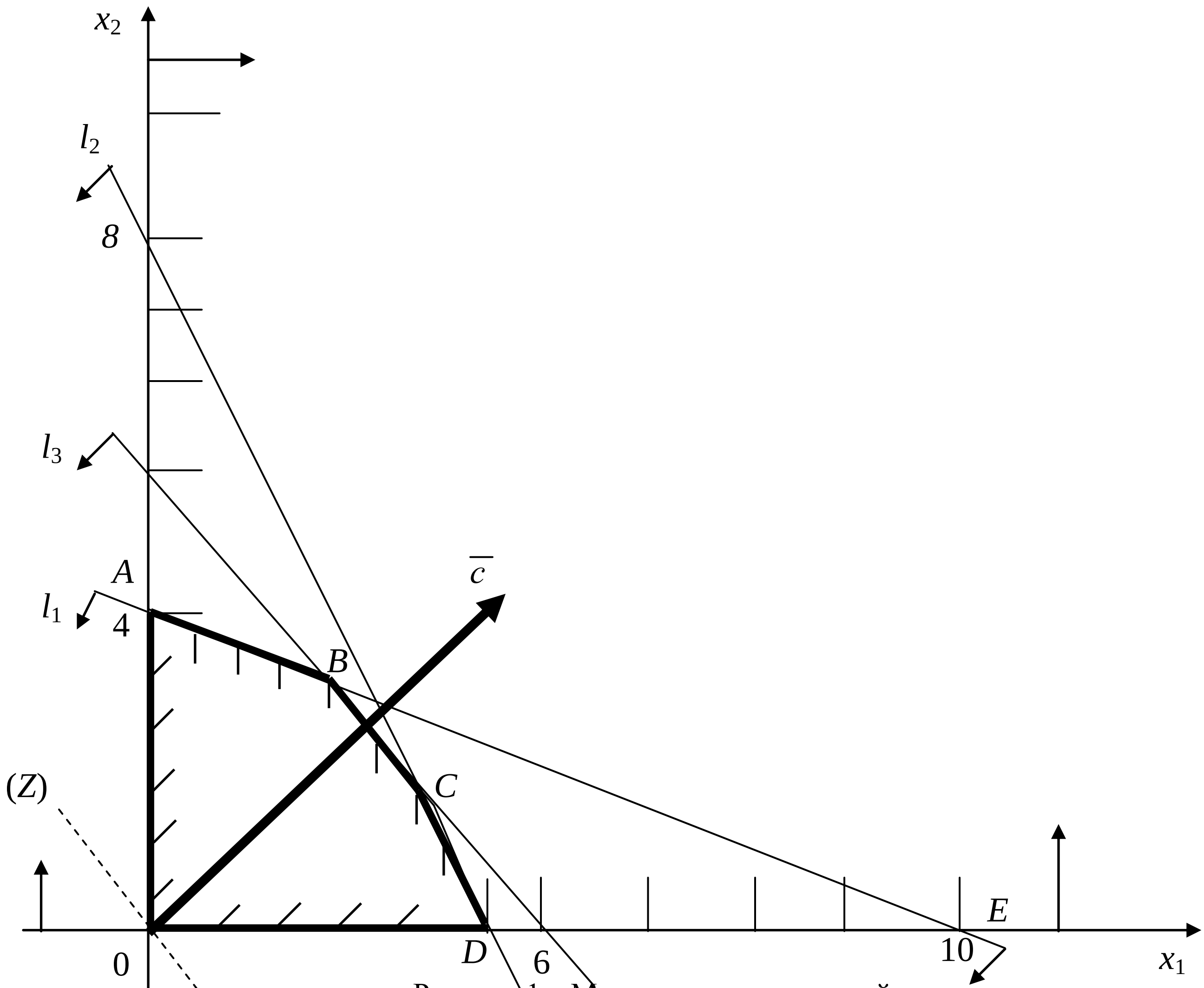


Рисунок 1 – Многоугольник решений

Точка C лежит на пересечении прямых l_2 и l_3 и, следовательно, для определения ее координат нужно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 = 40 \\ 5x_1 + 6x_2 = 30 \end{cases}$$

Подставим найденные значения x_1 и x_2 в функцию Z $(50 \cdot 90/23 + 40 \cdot 40/23)$.

Ответ: оптимальное решение задачи $Z_{max} = 6100/23$ при $x_1 = 90/23$; $x_2 = 40/23$.

Замечания:

1) область допустимых решений системы неравенств может быть пустой, одной точкой, выпуклым многоугольником или неограниченной выпуклой многоугольной областью;

2) уравнение $c_1x_1 + c_2x_2 = Z$ при фиксированном значении Z определяет прямую, а при изменении Z – семейство параллельных прямых с параметром Z. Вектор $\bar{c} = (c_1, c_2)$, перпендикулярный ко всем этим прямым, показывает направление возрастания параметра Z;

3) если бы при тех же исходных данных требовалось достичь минимума функции Z, то, очевидно, линию уровня следовало бы перемещать в направлении, противоположном вектору $\bar{C}$. Получили бы оптимальное решение в точке O (0, 0), которой соответствует $Z_{min} = 0$;

4) если экспериментальное значение Z достигается в двух вершинах (случай альтернативного оптимума), то тоже экстремальное значение достигается в любой точке, лежащей на отрезке, соединяющем эти вершины;

5) в случае неограниченной области максимум (минимум) функцииZ либо не существует (еслиZ неограниченна сверху (снизу)), либо достигается по крайней мере в одной из вершин области.

3. Идея симплекс-метода решения задачи линейного программирования

Среди универсальных методов решения задач линейного программирования наиболее распространен *симплексный метод* (или *симплекс-метод),* разработанный американским ученым Дж. Данцигом. Суть этого метода заключается в том, что вначале получают допустимый вариант, удовлетворяющий всем ограничениям, но необязательно оптимальный (так называемое *начальное опорное решение)*.Оптимальность достигается последовательным улучшением этого решения за определенное число этапов (итераций). Нахождение начального опорного решения и переход к следующему опорному решению проводятся на основе применения метода Жордана-Гаусса (мы будем работать с его модифицированным вариантом) для системы линейных уравнений в канонической форме, в которой должна быть предварительно записана исходная задача линейного программирования. Направление перехода от одного опорного решения к другому выбирается на основе критерия оптимальности (целевой функции) исходной задачи.

Весь путь решения задачи симплекс-методом условно можно разбить на три этапа.

I *этап.* Нахождение исходного варианта и исследование его на допустимость, т.е. получение начального опорного решения.

Допустимымвариантом решения задачи будем считать такие значения x_j, при которых выполняются все требования системы ограничений (все неравенства верны и непротиворечивы).

Если исходный вариант допустим, то опорное решение найдено и переходим на второй этап. Иначе, осуществляем перебор вариантов решения задачи до получения допустимого (если такое возможно. Если нет, то задача решения не имеет).

II *этап.* Исследования допустимого варианта на оптимальность.

Оптимальный вариант – это такое значение переменной x_jпри котором будут выполняться не только требования системы ограничений, но и требования целевой функции.

Если допустимый вариант окажется оптимальным, то задача решена, иначе переходим на третий этап.

III *этап.* Перебор вариантов решения задачи до получения оптимального варианта (если такое возможно. Если нет, то задача не имеет оптимального решения).

Сам симплекс-метод выбирать варианты не умеет, он только показывает направление перебора вариантов (в нашем случае позволяет осуществить выбор разрешающего элемента). Для расчёта же, в качестве вычислительного аппарата, привлекаются другие методы. Мы будем использовать метод модифицированных Жордановых исключений (МЖИ). Так как данный метод – это метод решения систем линейных уравнений, а модель представляет собой систему линейных неравенств, то модель предварительно должна быть подготовлена.

Суть подготовки заключается в том, чтобы перейти от системы неравенств к системе уравнений в канонической форме. Для этого в каждое ограничение-неравенство вводится дополнительная переменнаяy_i, как разность между большей и меньшей частями неравенства. Очевидно, что значение y_i не может быть отрицательным.

Подготовленная модель основной задачи линейного программирования будет выглядеть следующим образом:

I. $Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\rightarrow\max$.

II. $y_1=-a_{11}x_1-a_{12}x_2-\ldots-a_{1n}x_n+b_1$;

$y_2 = -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \ldots - a_{2n}x_n + b_2$;

....

$y_m = -a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - \ldots - a_{mn}x_n + b_m$.

III. $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, …, $x_n \geq 0$.

Из этого вида данные заносятся в табличную форму для осуществления решения.

1.3 Лекция №5 (2 часа)

Тема: «Двойственность в линейном программировании»

1.3.1 Вопросы лекции:

1. Постановка и модель двойственной задачи. Понятие двойственности
2. Решение двойственных задач симплекс-методом.
3. Основные теоремы теории двойственности.

1.3.2 Краткое содержание вопросов

1 Постановка и модель двойственной задачи. Понятие двойственности.

С каждой задачей линейного программирования тесно связана другая линейная задача, называемая *двойственной*. Первоначальная задача называется исходной (или прямой). Связь исходной и двойственной задач заключается, в частности, в том, что решение одной из них может быть получено непосредственно из решения другой.

Напомним, что в основе задачи линейного программирования рассматривается предприятие, имеющее ресурсы b_i, где $i = 1, 2, \ldots, m$. Оно тратит их на изготовление готовой продукции и эту продукцию реализует. При этом ставится цель – получить максимум продукции в стоимостном выражении не перерасходуя ресурсы. Модель задачи выглядит следующим образом:

I) $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$.

II) $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$,

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2$,

……………………………

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m$.

III) $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Предположим, что некоторое предприятие решило не тратить ресурсы на изготовление продукции, а продать эти ресурсы. Тогда возникает вопрос: по какой цене продавать ресурсы? Цена должна устраивать как продавца, так и покупателя. Интерес покупающей стороны заключается в том, чтобы заплатить за ресурсы как можно меньше, а интерес продающей стороны – в том, чтобы получить за ресурсы не меньше того, что она получила бы за реализованный готовый товар.

Тогда, в так называемой двойственной модели, целевая функция будет описывать интерес покупающей стороны, система ограничений – интерес продающей стороны (необходимо оценить ресурсы, которые пошли бы на изготовление единицы продукции и стоимость этих ресурсов ограничить ценой реализованной единицы продукции). Третье условие (неотрицательность переменных величин) будет выполняться в силу того, что цена единицы ресурса не может быть отрицательной. Введя в качестве цены единицы ресурса величину $u_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, ее еще называют оценкой ресурса (или двойственной оценкой), получим следующую модель:

I) $F = b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots + b_mu_m \to \min$.

II) $a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m \geq c_1$,

$a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{m2}u_m \geq c_2$,

……………………………

$a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{mn}u_m \geq c_n$.

III) $u_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Сопоставим обе задачи:

- первая – задача на максимум ($Z \to \max$), вторая – на минимум ($F \to \min$);

- в первой система ограничений типа $\leq$, во второй $\geq$;

- в первой задаче n неизвестных и m ограничений, во второй m неизвестных и n ограничений;

- коэффициенты в целевых функциях и величины в правых частях неравенств при переходе из одной задачи в другую меняются местами (в первой задаче c_j – коэффициенты целевой функции, во второй c_j – свободные члены; в первой задаче b_i – свободные члены, во второй b_i – коэффициенты целевой функции);

- матрицы коэффициентов в первой и второй задаче являются транспонированными относительно друг друга (строки и столбцы поменялись местами).

Таким образом, видно, что обе задачи тесно связаны между собой. Они образуют пару задач, называемую в линейном программировании *двойственной парой*. Первую из них обычно называют прямой (или исходной) задачей, а вторую – двойственной задачей (с чисто математической точки зрения за исходную может быть принята любая из задач двойственной пары).

Алгоритм составления двойственной задачи:

1) тип экстремума целевой функции меняется;

2) каждому ограничению исходной задачи ставится в соответствие переменная двойственной задачи;

3) свободные члены исходной задачи становятся коэффициентами при переменных в целевой функции двойственной задачи;

4) каждый столбец коэффициентов в системе ограничений формирует ограничение двойственной задачи, при этом тип неравенства меняется; коэффициенты при переменных в целевой функции исходной задачи становятся свободными членами в соответствующих неравенствах двойственной задачи.

Рассмотрим конкретный пример построения двойственной модели:

исходная задача:	двойственная задача:
I) $Z = 6x_1 + 4x_2 \to \max$.	I) $F = 8u_1 + 6u_2 \to \min$.
II) $2x_1 + 4x_2 \leq 8$,	II) $2u_1 + 2u_2 \geq 6$,
$2x_1 + x_2 \leq 6$.	$4u_1 + u_2 \geq 4$.
III) $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.	III) $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$.

Следует отметить, что:

- математические модели пары двойственных задач могут быть симметричными и несимметричными. В несимметричных двойственных задачах система ограничений исходной задачи задается в виде равенств, а двойственной – в виде неравенств, причем в последней переменные могут быть и отрицательными. В симметричных задачах система ограничений как исходной, так и двойственной задачи задается неравенствами, причем на двойственные переменные налагается условие неотрицательности. Чаще рассматриваются симметричные взаимодвойственные задачи;

- каждая из задач двойственной пары формально является самостоятельной задачей линейного программирования и может решаться независимо от другой. Однако, использование симплексного метода решения одной из двойственных задач двойственной пары автоматически приводит к решению другой задачи. Наглядным обоснованием данного положения может служить возможность использования двойственной симплекс-таблицы для отыскания искомых значений целевых функций.

2 Решение двойственных задач симплекс-методом.

Каждая из задач двойственной пары может решаться отдельно. При этом используется как симплексный метод, так и графический (в случае если задача содержит две переменные). Одновременное решение задач реализуется с использованием, так называемой, двойственной симплекс-таблицы.

Подготовленные для записи в симплекс таблицу модели будут выглядеть следующим образом:

исходная задача (введем $y_i \geq 0$):

I) $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$.
II) $y_1 = -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n + b_1$,
$y_2 = -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \ldots - a_{2n}x_n + b_2$,
……………………………………..
$y_m = -a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - \ldots - a_{mn}x_n + b_m$.
III) $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

двойственная задача (введем $v_j \geq 0$):

I) $F = b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots + b_mu_m \to \min$.
II) $v_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m - c_1$,
$v_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{m2}u_m - c_2$,
………………………………………
$v_n = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{mn}u_m - c_n$.
III) $u_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Обе модели записываются в двойственную симплекс-таблицу следующим образом (таблица 4):

Таблица 4 – Двойственная симплексная таблица

		v_1	v_2	…	v_n	F
		$-x_1$	$-x_2$	…	$-x_n$	Свободные члены
u_1	y_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
u_2	y_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…	…
u_m	y_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
Свободные члены	Z	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_n$	0

Замечания:

- коэффициенты подготовленной двойственной модели располагаются по столбцам, то есть в одной таблице записаны обе двойственные модели. Решая модель прямой задачи симплекс-методом, параллельно решается и модель двойственной задачи. Получив оптимальный вариант для прямой задачи, мы получаем оптимальный вариант и для двойственной;

- прежде чем составлять модель двойственной задачи, необходимо у исходной модели «выровнять» знаки, т.е. если целевая функция стремится к *max*, то все знаки в системе ограничений должны быть $\leq$, а если к *min*, то $\geq$. Система приводится в соответствие путем домножения обеих частей «неподходящего» неравенства на (-1). Например, чтобы записать модель, двойственную к приведенной модели

I) $Z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min$.
II) $-4x_1 - 3x_2 + x_3 \leq -4$,
$5x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6$.
III) $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$,
необходимо исходную переписать в виде:
I) $Z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min$.
II) $4x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 4$,
$5x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6$.

III) $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$,$x_3 \geq 0$.

Тогда двойственная задача будет выглядеть так:

I) $F = 4u_1+6u_2 \rightarrow \max$.

II) $4u_1 + 5u_2 \leq 4$,

$3u_1 + u_2 \leq 2$,

$-u_1 + 2u_2 \leq 3$.

III) $u_1 \geq 0$; $u_2 \geq 0$;

- в центр двойственной симплекс-таблицы (таблицы 4) всегда ставится задача на max, вне зависимости от того какова целевая функция исходной задачи.

3. Основные теоремы теории двойственности.

В качестве *основной теоремы двойственности* выделяют следующую формулировку: если одна из взаимно двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая также имеет оптимальное решение, при этом соответствующие им оптимальные значения целевых функций равны (т.е. $\max Z = \min F$).

Кроме этого варианта возможны следующие взаимоисключающие случаи:

- в одной из пары двойственных задач допустимое множество не пусто, а целевая функция на этом множестве не ограничена, то у другой задачи из этой пары будет пустое допустимое множество (т.е. если в одной задаче функционал не ограничен, то задача ей двойственная не имеет решения);

- обе из рассматриваемых задач имеют пустые допустимые множества (т.е. обе не имеют решения).

С экономической стороны решение прямой задачи дает оптимальный план выпуска продукции, а решение двойственной задачи – оптимальную систему условных (или *двойственных*) *оценок* применяемых ресурсов.

Для экономических задач часто представляет интерес то, как повлияет на оптимальное решение изменение запасов сырья и изменение прибыли от единицы продукции. В связи с этим посредством двойственных оценок можно выяснить: увеличение объемов какого вида ресурсов наиболее выгодно; на сколько можно увеличить запас сырья для улучшения полученного оптимального значения целевой функции; каков диапазон изменения того или иного коэффициента целевой функции, при котором не происходит изменение оптимального решения; целесообразность включения в план новых изделий.

Центральный вопрос, который рассматривается в теории двойственности, – это вопрос о ценности ресурса. Но ценности его не рыночной, а исключительно с внутренней точки зрения данного предприятия, с точки зрения эффективного использования этого ресурса в сложившейся структуре производства, определяемой технологической матрицей и удельными прибылями. При этом оценка ценности производится только в процессе использования ресурса в одном цикле производства. Это является элементом условности. Однако из всего этого вытекает основополагающая оценка ценности ресурса – сколько прибыли может принести вовлечение в производство еще одной единицы данного ресурса.

Двойственные оценки отражают сравнительную дефицитность различных видов ресурсов в отношении принятого в задаче показателя эффективности. Двойственные оценки могут служить тонким инструментом анализа и принятия правильных управленческих решений в условиях постоянно изменяющегося производства. Приведем некоторые общие положения, вытекающие из экономического смысла двойственности задач линейного программирования и свойств оценок оптимального плана:

- исчисленные в оптимальных оценках суммарные затраты на производства каждого ингредиента не могут быть меньше, чем оценка данного ингредиента в конечном продукте;

- в оптимальном плане, обеспечивающем максимум выпуска конечного продукта при изменяющихся ресурсах, суммарные затраты ресурсов на единицу конечной продукции минимальны (иначе за счет более экономичного их использования можно было бы увеличить выпуск и тем самым улучшить оптимальный план, что противоречит понятию оптимального плана как наилучшего с точки зрения принятого критерия);

- абсолютные значения оценок можно трактовать как некоторые расчетные «цены» ресурсов и потребностей, выраженные в тех же единицах, что и критерий, а знак «+» или «–» при этих «ценах» показывает, ведет ли увеличение данного фактора к возрастанию или уменьшению значения критерия;

- использование двойственных оценок целесообразно, когда ограничивающие условия не меняются, но возникает необходимость определить целесообразность применения тех или иных новых технологических способов.

Различные виды ресурсов, ходящие в модель оптимального планирования, имеют свое конкретное содержание и специфику. Соответствующие им оценки также специфичны и рассматриваются в отдельности по каждой качественно отличной группе ресурсов.

Таким образом, двойственные оценки являются важнейшим результатом, вытекающим из теории двойственности, которая широко применяется на практике.

1.4 Лекция №6,7,8 (6 часа)

Тема: «Транспортная задача»

1.4.1 Вопросы лекции:

1. Метод потенциалов
2. Решение транспортной задачи с неправильным балансом

1.4.2 Краткое содержание вопросов

1.Метод потенциалов.

Математическая модель транспортной задачи относится к задачам линейного программирования и может быть решена симплексным методом. Однако ввиду исключительной практической важности этой задачи и специфики ограничений (ограничения заданы в виде уравнений; каждая неизвестная входит лишь в два уравнения; коэффициенты при неизвестных – единицы) для ее решения созданы специальные алгоритмы. Самым распространенным методом решения транспортной задачи является метод потенциалов.

Решение транспортной задачи разбивается на два этапа:

1) определение начального допустимого базисного решения (первого опорного плана) – первоначальное распределение поставок. Достигается посредством распределительных методов;

2) построение последовательных итераций (шагов), улучшающих опорные планы (каждый новый план не должен увеличивать суммарные затраты при $Z \to \min$ и уменьшать при $Z \to \max$). Достигается посредством метода потенциалов.

После выполнения первого этапа шаги второго этапа проводятся до тех пор, пока не будет найдено оптимальное распределение поставок.

1-ый этап. Построение первоначального опорного плана

План составляется последовательным заполнением по одной клетке в таблице так, что каждый раз либо полностью удовлетворяется потребность одного из потребителей, либо полностью вывозится груз от некоторого поставщика. В теории доказывается, что базисное решение системы ограничений (из $m+n$ уравнений с mn переменными) в условиях транспортной задачи имеет $m+n-1$ базисных переменных (ее ранг равен $m+n-1$), поэтому, совершив $m+n-1$ указанных шагов, получим первый опорный план. Опорные планы получают несколькими методами, называемыми распределительными. Среди них можно выделить: метод северо-западного угла, метод наилучших цен и метод аппроксимации. Последние два метода относятся также к приближенным распределительным методам и будут рассмотрены в третьей части данного раздела.

Пример.

$b_1 = 1500 \quad a_1 = 800$

$b_2 = 1000 \quad a_2 = 1200$

$b_3 = 2000 \quad a_3 = 1400$

$a_4 = 1100$

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 15 & 16 \\ 17 & 15 & 14 & 13 \\ 15 & 14 & 13 & 16 \end{pmatrix}$$

Решить на минимум, заполнив рабочую таблицу методом северо-западного угла.

Таблица 6 – Заполнение рабочей таблицы методом северо-западного угла

	1	2	3	4	b_i
1	13 800	12 700	15	16	1500
2	17	15 500	14 500	13	1000
3	15	14	13 900	16 1100	2000
a_j	800	1200	1400	1100	4500

$Z_{\min} = 800*13 + 700*12 + 500*15 + 500*14 + 900*13 + 1100*16 = 62600.$

При этом методе на каждом шаге построения первого опорного плана заполняется верхняя левая клетка («северо-западный угол») оставшейся части таблицы. При таком методе заполнение таблицы начинается с клетки (1,1) и заканчивается в клетке (m,n), то есть идет как бы по диагонали таблицы перевозок.

Методы наилучших цен и аппроксимации также можно использовать на данном этапе.

2-ой этап. Метод потенциалов. Оптимальность базисного решения.

Полученный одним из распределительных методов опорный план сначала необходимо проверить на вырожденность. Вариант будет невырожденным, если число заполненных клеток N равно сумме поставщиков и потребителей за вычетом единицы:

$$N = m + n - 1.$$

Если на каком-то этапе решения получится вырожденный план (т.е. $N < m + n - 1$), то его необходимо пополнить, проставив в недостающем числе клеток ноль. Поскольку этим дополнительным клеткам будут отвечать нулевые перевозки, то общий баланс и суммарная стоимость перевозок плана при этом не изменится. Однако проводить пополнение плана, выбирая клетки произвольно, нельзя. Необходимо учитывать условие ацикличности. План называется ациклическим, если его базисные клетки (заполненные грузом) не содержат циклов. Циклом в транспортной таблице называется несколько клеток, соединенных замкнутой ломаной линией так, что две соседние вершины ломаной расположены либо в одной строке, либо в одном столбце. Ломаная может иметь точки самопересечения, но не в клетках цикла.

Невырожденный вариант необходимо проверить на оптимальность.

Теорема об оптимальности. Вариант решения задачи будет оптимальным, если найдется такая система абстрактных чисел, называемых потенциалами поставщиков и потенциалами потребителей, при которой для всех клеток таблицы будет выполняться условие:

$$v_j - u_i \le c_{ij} \text{(при } Z \to \min\text{) и} v_j - u_i \ge c_{ij} \text{ (при } Z \to \max\text{)},$$

где v_j – потенциалы потребителей,

u_i– потенциалы поставщиков,

c_{ij} – цена перевозки единицы груза (условные т/км).

Причем, $v_j - u_i = c_{ij}$для занятых клеток и $v_j - u_i \le c_{ij}$ (или $v_j - u_i \ge c_{ij}$) для свободных клеток.

На основании этой теоремы исследование на оптимальность проводится в 2 этапа:

1) для каждой занятой клетки составляется уравнение $v_j - u_i = c_{ij}$ в результате чего получается система из $m+n-1$ таких уравнений. Решается эта система относительно потенциалов. Так как в данной системе число уравнений меньше числа неизвестных (т.е. система имеет бесчисленное множество решений), а нам надо найти одно любое решение, то какому-либо потенциалу можно присвоить произвольное число и относительно него рассчитать остальные значения. Для удобства расчетов чаще всего берут u_1=0;

2) для свободных клеток таблицы проверяется условие $v_j - u_i \le c_{ij}$ (или $v_j - u_i \ge c_{ij}$). Вариант будет оптимальным, если для всех свободных клеток это условие выполнится.

Для каждой клетки, в которой не выполняется условие $v_j - u_i \le c_{ij}$ (или $v_j - u_i \ge c_{ij}$), рассчитывается оценка $\alpha_{ij} = |(v_j - u_i) - c_{ij}|$.Клетка, содержащая α_{ij}, называется «плохой», а полученная оценка используется при перераспределении грузов.

То есть исследование на оптимальность не только отвечает на вопрос, оптимален вариант или нет, но еще и подсказывает, в каком направлении надо его улучшать при необходимости.

Перераспределение грузов и получение нового варианта.

Смысл перераспределения заключается в том, чтобы в самую «плохую» клетку (т.е. значение α_{ij}наибольшее) перераспределить какое-то количество груза. Перераспределение грузов должно отвечать следующим требованиям:

1) должны выполняться требования системы ограничений модели;

2) вариант решения задачи должен остаться ациклическим, т.е. не должна появиться лишняя заполненная клетка;

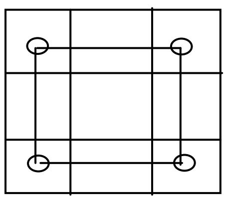
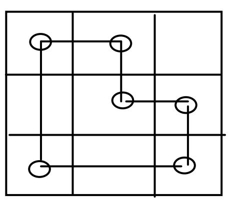
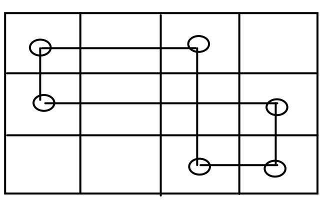
3) должно выполняться условие неотрицательности в модели, т.е. $x_{ij} \ge 0$.

С учетом данных требований, *алгоритм перераспределения* будет состоять из двух шагов:

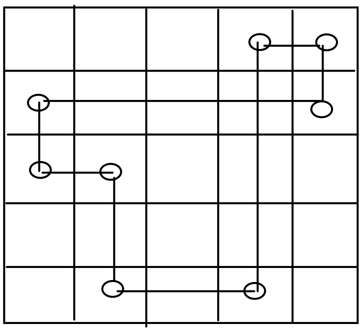
1) наметить маршрут перераспределения груза.

Для этого в таблице строится цикл перераспределения объектов перевозок. Цикл представляет собой замкнутую ломаную линию, которая начинается в той свободной клетке, где условие оптимальности нарушается наиболее сильно (т.е. там, где α_{ij}наибольшая).

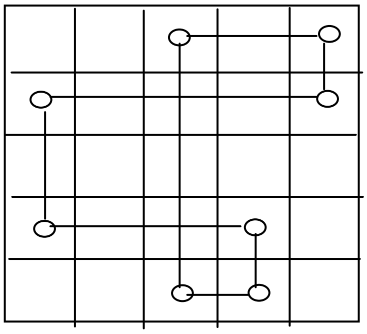
Некоторые разновидности циклов.

а)  б)  в) 

г)



д)



При построении цикла можно проходить как через занятые, так и через свободные клетки таблицы, но повороты делаются только в занятых клетках и под прямым углом;

2) определить порядок изменения объемов перевозок в вершинах цикла.

Для этого в вершинах цикла расставляют знаки «+» и «–», причем в начале цикла (клетка, где α_{ij}наибольшая) ставится знак «+», в следующей «–», в следующей «+» и т.д. Получаем чередование знаков. Направление движения при расстановке знаков от свободной клетки безразлично, так как количество вершин цикла является четной величиной. Наличие знака «+» в вершине цикла показывает, что объем перевозок необходимо увеличить, а «–» – уменьшить. Увеличение и уменьшение объемов перевозок в вершинах цикла производится на одинаковую величину, которая выбирается равной наименьшему из объемов перевозок в тех клетках, где в вершине цикла стоит знак «–». Таким образом, из отрицательной вершины контура необходимо выбрать наименьшее значение x_{ij}. В новой рабочей таблице получаем следующий вариант решения задачи: выбранное значение x_{ij} из отрицательных вершин контура предыдущей таблицы отнимаем, а к положительным – прибавляем. Заполненные клеточки, не являющиеся вершинами контура, не меняют свое значение.

В итоге получаем новый вариант. Следующие шаги поиска оптимального варианта совершаются по аналогии вышеизложенного.

Замечание: алгоритм перераспределения одинаков и при Z→min и при Z→max.

2. Решение транспортной задачи с неправильным балансом.

Среди проблем, для исследования которых успешно применяется линейное программирование, важное значение имеет так называемая транспортная задача.

Общая постановка этой задачи применительно к экономической проблеме экономии издержек производства формулируется так: имеется несколько пунктов назначения (предприятий, потребителей); требуется перевезти некоторое количество однородного товара из различных пунктов отправления в несколько пунктов назначения; каждый из поставщиков может выделить только определенное количество единиц товара и каждому потребителю требуется также определенное количество единиц этого товара; известны расстояния или стоимости перевозки единицы товара от каждого поставщика к каждому потребителю. Задача состоит в том, чтобы найти такие маршруты перевозок, из всех возможных связей поставщиков и потребителей, при которых общие транспортные расходы были бы минимальными (транспортная задача также может быть сформулирована с целевой функцией, стремящейся к максимуму).

Таким образом, пусть имеем m пунктов, в которых находится известное количество однородных грузов (поставщики). Порядковый номер поставщика обозначается i, то есть i=1,2,…,m. Наличие грузов у поставщика b_i. Имеется n пунктов испытывающих потребность в этих грузах (потребителей). Порядковый номер потребителя j=1,2,…,n. Потребность в грузах каждого потребителя a_j. Известна «цена» перевозки единицы груза от каждого поставщика к каждому потребителю (c_{ij}). Необходимо составить план перевозки грузов от поставщиков к потребителю, т.е. определить: какое количество груза необходимо перевезти от каждого поставщика к каждому потребителю (x_{ij}), причем значения x_{ij} должны отвечать следующим требованиям:

1) общие затраты на перевозку грузов должны быть минимальными;
2) все грузы от поставщиков должны быть вывезены;
3) потребности потребителей в грузах должны быть удовлетворены.

Требования 2-3 одновременно могут быть выполнены только в том случае, когда сумма грузов у всех поставщиков равна суммарной потребности всех потребителей, то есть:

$\sum_{i=1}^{m} b_i = \sum_{j=1}^{n} a_j$ – условие разрешимости задачи.

Если условие разрешимости выполняется, то задача будет являться задачей, так называемого закрытого типа (сбалансированной). Иначе – задача открытого типа (несбалансированная). Для того чтобы решить задачу открытого типа, надо её «закрыть» (то есть привести к закрытому типу). Для этого вводится или фиктивный поставщик или фиктивный потребитель.

В случае, когда *суммарные запасы превышают суммарные потребности*, необходим дополнительный фиктивный пункт потребления, который будет формально потреблять существующий излишек запасов, то есть:

$$a_ф = \sum_{i=1}^{m} b_i - \sum_{j=1}^{n} a_j .$$

Если *суммарные потребности превышают суммарные запасы*, то необходим дополнительный *фиктивный* пункт отправления, формально восполняющий существующий недостаток продукции в пунктах отправления:

$$b_ф = \sum_{j=1}^{n} a_j - \sum_{i=1}^{m} b_i .$$

Введение фиктивного потребителя или отправителя повлечет необходимость формального задания *фиктивных*тарифов $c_{ij}^{ф}$ (реально не существующих) для фиктивных перевозок. Поскольку нас интересует определение наиболее выгодных *реальных* перевозок, то необходимо предусмотреть, чтобы при решении задачи (при нахождении опорных планов) *фиктивные* перевозки не рассматривались до тех пор, пока не будут определены все реальные перевозки. Для этого надо фиктивные перевозки сделать невыгодными, чтобы при поиске решения задачи их рассматривали в самую последнюю очередь. Таким образом, если целевая функция стремится к min, то затраты берутся во всех фиктивных клетках таблицы произвольные, одинаковые и на порядок выше настоящих цен, т.е. величина фиктивных тарифов должна превышать максимальный из реальных тарифов, используемых в модели: $c_{ij}^{ф} > \max c_{ij}\ \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$. Если целевая функция стремится kmax, то $c_{ij}^{ф}$ берётся равная нулю.

Развёрнутая форма записи модели транспортной задачи.

Для удобства, прежде чем писать модель, запишем в виде матрицы цен все значения c_{ij}. А также в виде матрицы грузоперевозок переменные x_{ij}.

Матрица цен:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11}\ c_{12}\ \ldots c_{1n} \\ c_{21}\ c_{22} \ldots c_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{m1}\ c_{m2} \ldots c_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица $C = (c_{ij})_{m*n}$называется также матрицей тарифов (издержек или транспортных расходов).

Матрица грузоперевозок:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11}\ x_{12}\ \ldots x_{1n} \\ x_{21}\ x_{22} \ldots x_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1}\ x_{m2} \ldots x_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица $X = (x_{ij})_{m*n}$ еще называется планом транспортной задачи.

Модель транспортной задачи будет выглядеть следующим образом.

I. Целевая функция описывает затраты на перевозку грузов:

$Z=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\ldots+c_{1n}x_{1n}+c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+\ldots+c_{2n}x_{2n}+\ldots$

$+c_{m1}x_{m1}+c_{m2}x_{m2}+\ldots+c_{mn}x_{mn}\to\min$.

II. Система ограничений описывает второе и третье требования для x_{ij} из постановки задачи.

1 группа: условие полного вывоза грузов от поставщиков (сумма грузов, вывезенных от поставщика должна быть равна наличию):

$x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}= b_1$,

$x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n}= b_2$,

……………………

$x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}= b_m$;

2 группа: условие удовлетворения потребителя (сумма грузов привезённых потребителю должна быть равна его потребности):

$x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{m1}=a_1$,

$x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{m2}=a_2$,

…………………….

$x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}= a_n$.

III. Условие неотрицательности переменных величин $x_{11}\geq 0$, $x_{12}\geq 0$, …, $x_{mn}\geq 0$.

Структурная форма записи модели транспортной задачи.

В специализированной литературе модели даются в структурной форме.

I. $Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$.

II.

1) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i,\ i = 1,2,\ldots,m$

2) $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_j,\ j = 1,2,\ldots,n$

III. $x_{ij}\geq 0$ (i = 1,2,…,m, j = 1,2,…,n).

Табличная форма записи модели транспортной задачи.

Общепринято в таблице информацию по поставщикам располагать по строкам, по потребителю – по столбцам.

Размер таблицы: строк m+2, столбцов n+2.

Матрицы транспортных расходов и перевозок совмещают обычно в одну двойную матрицу – *матрицу планирования*.

Если в таблицу записана только исходная информация и нет значений x_{ij}, то это рабочая таблица или *макет* задачи. Если значения x_{ij} проставлены, то получаем первый вариант решения задачи. В такой форме задачи решаются.

Таблица 5 – Общий вид транспортной матрицы

потребители

поставщики

	1	2	…	n	b_i
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	b_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	b_m
a_j	a_1	a_2	…	a_n	$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{i=1}^{m} b_i$

Кроме основных условий, в транспортных задачах может встретиться ряд дополнительных, ограничивающих количественные связи между отдельными потребителями и поставщиками. Характер этих ограничений и способы решения задачи при наличии дополнительных ограничений заключаются в следующем.

1. Полное отсутствие связи между поставщиком и потребителем, то есть $x_{ij}= 0$. Это означает, что в данной клетке матрицы искомый объем перевозок должен быть равен нулю. В этом случае оценка переменной завышается на большую величину, обычно обозначаемую буквой М, и «попадание» груза в эту клетку нежелательно, так как целевая функция стремиться к минимуму (и занижается, если $Z \rightarrow max$).

2. Наличие частной заранее фиксированной связи между поставщиками и потребителями, то есть $x_{ij}= q$ (искомый объем перевозок от i-го поставщика к j-му потребителю должен быть строго равен q). Тогда, до начала решения задачи от величины грузов соответствующего поставщика и потребителя вычитается величина q, затем в соответствующую клетку пересечения поставщика и потребителя записывается завышенная оценка М (при $Z \rightarrow min$ и заниженная при $Z \rightarrow max$) и задача решается обычным методом.

3. $x_{ij} \geq q$, то есть искомый объем перевозок от i-го поставщика к j-му потребителю должен быть не меньше величины q. В этом случае до начала решения от величины грузов соответствующего поставщика и потребителя вычитается величина q, затем задача решается обычным путем.

Модель транспортной задачи позволяет решать любые задачи, в которых параметры имеют одинаковые единицы измерения. Такие модели называются однопродуктовыми. К ним можно отнести задачу оптимизации использования машинно-тракторного парка в отдельные агротехнические сроки, задачу оптимального размещения посевов сельскохозяйственных культур по участкам с различным плодородием почв и т.д.

1.5 Лекция №9 (2 часа)

Тема: «Решение задач на основе транспортной задачи»

1.5.1 Вопросы лекции:

1. Моделирование и использование средств механизации.
2. Моделирование посевов и использования удобрений.

1.5.2 Краткое содержание вопросов

1.Моделирование и использование средств механизации

Постановка и формализация задачи.

Для этой аудитории я думаю излишне говорить о роли техники в развитии сельского хозяйства. Эпоха трактора и автомобиля еще не закончилась. Судьба планов развития , как и экономические показатели производства во многом представляются составом и состоянием использования техники.

Любому хозяйству на практике приходится определять потребность в технике. Эта задача решается каждым хозяйством, независимо от того хорошо или плохо оно работает. Причем потребность в технике определяется как на текущий период, так и на перспективу.

Определение потребности в техникесостоит в выборе такого состава МТП и такого плана его использования, при котором обеспечивается выполнение всех заданных объемов работ в положенные сроки с минимальными общими затратами.

Здесь выделяется три момента:

- потребность хозяйства в технике для выполнения заданного объема работ;
- требование выполнения работ в срок;
- требование выполнения работ с min затратами.

Нетрудно убедится, что игнорирование любого из трех требований, как и абсолютизация любого из них, может привести к абсурдным результатам.

Например. всю пашню любого хозяйства можно вспахать одним трактором.

В условиях конкретного хозяйства встречаются три варианта постановки задачи оптимизации состава МТП.

1. Задача определения оптимального состава МТП при условии, что в хозяйстве полностью отсутствуют машины, то есть задача комплектования парка, или наиболее целесообразного его приобретения.

Такая постановка возникает у всех вновь образованных хозяйств.

2. Задача определения оптимального состава МТП при условии, что некоторый парк машин в хозяйстве уже имеется , то есть задача доукомплектования имеющегося парка.

Это самый распространенный вариант задачи, так как и техника постоянно совершенствуется , производство тоже не стоит на месте. Парк стареет и физически отслужившие машины требует замены новыми.

3. Задача определения плана наилучшего использования имеющегося в хозяйстве парка машин, при условии, что хозяйство не имеет возможности закупать новые машины. Отслужившие срок машины можно списывать.

При кажущейся искусственности постановки задача все же встречается не так уж редко. Не всегда имеются возможности купить нужные машины - или нужных машин нет, или купить не за что.

С экономической точки зрения наиболее обоснованным критерием оптимизации состава машинно-тракторного парка является минимум приведенных затрат на производство данных работ. приведенные затраты представляют собой сумму текущих затрат на содержание и эксплуатацию МТП и его балансовой стоимости, умноженной на нормативный коэффициент эффективности, который представляет собой величину обратную сроку окупаемости.

Иногда в качестве критерия оптимальности используют показатель - min машин;

- min расход горючего;
- min эксплуатационных расходов;

Рассмотрим каждую из трех названных задач.

Экономико-математические модели

Модель оптимального комплектования МТП

Предположим, что парк комплектуется заново из возможных марок тракторов и сельскохозяйственных машин.

Пусть:

m- количество марок тракторов и сельскохозяйственных машин из которых будет комплектоваться МТП.

Напомню, что международная система машин для комплексной механизации сельского и лесного хозяйства в странах СЭВ включает 1035 названий машин. а с учетом всех модификаций - 2446 названий.

"Правда" 15 сентября 1986 года.

Номера марок машин обозначим через i. Значит i-(1,2,3,...i...m)

n- количество всех сельскохозяйственных работ выполняемых в данном хозяйстве с помощью сельскохозяйственных машин и тракторов.

j- номер механизированной работы;

t - номера, T - количество расчетных периодов, на которые следует разбить весь срок, отведенный на выполнение всего комплекса работ;

P_{it}- объем работы j за период t;

k - номера, а K- количество всех возможных агрегатов в хозяйстве;

a_K- производительность агрегата k на работе j за период t;

x_K- количество агрегатов с номером k, требующихся для выполнения работы j за период t;

x_i - количество машин марки i которое необходимо купить;

b_{ikj} - количество машин марки i входящих в агрегат k выполняющих, выполняющих работу j;

β - нормативный коэффициент капитальных вложений;

c_i - балансовая стоимость машин марки i ;

p_i - стоимость содержания машин марки i ;

c_{kjt} - прямые затраты на один агрегат k, выполняющих работу j ;

Запишем структурную модель.

Требуется найти $\min C = \sum_{i=1}^{T}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{K} c_{kjt}x_{kjt} + \sum_{i=1}^{m}(\beta c_i + p_i)x_i \to \min$ (1)

При условиях:

1. Условие, гарантирующее выполнение всего заданного объема работ.

$$\sum_{k=1}^{K} a_{kjt}x_{kjt} = P_{jt}, \quad \text{где } j = 1\ldots n, t = 1\ldots T \qquad (2)$$

2. Условие, что каждый данный момент потребуется машин марки i для выполнения работ периода не больше, чем их будет куплено.

$$\sum_{j \in J_1}\sum_{k=1}^{K} b_{ikj}x_{kjt} \le x_i, \quad \text{где } i = 1\ldots m, t = 1\ldots T \qquad (3)$$

J_t- множество, которому принадлежат работы, выполняемые за период t.

3. Условие неотрицательности переменных.

$$X_i \ge 0 \quad X_{kjt} \ge 0 \qquad (4)$$

Модель оптимального доукомплектования машинно-тракторного парка.

Предположим, что хозяйство имеет некоторый парк машин, располагает возможностью приобретать новые машины. требуется найти, сколько и каких машин требуется купить, чтобы выполнить весь объем работ в положенные сроки с наименьшими затратами.

Введем дополнительные обозначения:

y_i - количество машин марки i, которое следует списать;

d_i - количество машин марки i, которое имеется в хозяйстве;

p'_i - остаточная стоимость одной машины марки i при снятии ее с баланса.

Модель должна предусматривать возможность списания отслуживших срок машин.

Используя принятые обозначения, запишем структурную модель:

Найти min функции:

$$C = \sum_{i=1}^{T} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{K} c_{kjt} x_{kjt} + \sum_{i=1}^{m} \beta (c_i + p_i) x_i - \sum_{i=1}^{m} p'_i y_i \to \min \quad (1)$$

При условиях:

1. Выполнения заданного объема механизированных работ.

$$\sum_{k=1}^{K} a_{kjt} x_{kjt} = P_{jt}, \quad \text{где } j = 1 \ldots n, t = 1 \ldots T \quad (2)$$

2. Условие, что в каждый период потребуется машин марки i не больше чем имеется в хозяйстве, плюс будет куплено, минус будет списано.

$$\sum_{j \in J_1} \sum_{k=1}^{K} b_{ikj} x_{kjt} \le d_i + x_i - y_i, \quad \text{где } i = 1 \ldots m, t = 1 \ldots T \quad (3)$$

3. Условие неотрицательности переменных.

$$X_i \ge 0, \quad X_{kjt} \ge 0, \quad y_i \ge 0. \quad (4)$$

Модель оптимального использования МТП

Напомню постановку задачи.

Хозяйство располагает достаточным парком машин и не располагает возможностью покупать новые машины. Задача заключается в том, чтобы определить такой план использования имеющегося парка, при котором обеспечивается выполнение всего заданного комплекса работ в установленные сроки с минимальными эксплуатационными затратами.

Модель должна предусматривать возможность списания старых машин.

Структурная модель задачи оптимизации использования МТП (иногда её называют задачей распределения имеющейся техники, подразумевая распределение техники по видам работ) .может быть представлена так:

$$C = \sum_{i=1}^{T} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{K} c_{kjt} x_{kjt} - \sum_{i=1}^{m} p'_i y_i \to \min \quad (1)$$

При условии:

1. Условие выполнения объема работ:

$$\sum_{k=1}^{K} a_{kjt} x_{kjt} = P_{jt}, \quad \text{где } j = 1 \ldots n, t = 1 \ldots T \quad (2)$$

2. $$\sum_{j \in J_1} \sum_{k=1}^{K} b_{ikj} x_{kjt} \le d_i - y_i, \quad \text{где } i = 1 \ldots m, t = 1 \ldots T \quad (3)$$

Условие , что количество машин выполняющих работу в любой период не будет превышать имеющихся в хозяйстве машин с учетом их списания.

3. Условие неотрицательности переменных

$$X_{kjt} \ge 0, \quad y_i \ge 0. \quad (4)$$

При внимательном рассмотрении не трудно заметит, что все три модели однотипны, и что первая и третья являются частными случаями задачи доукомплектования парка.

2. Моделирование посевов.

Задача оптимизации структуры посевных площадей может рассматриваться и как составная часть планирования производства предприятия, где она моделируется во взаимосвязи с животноводством и как самостоятельная задача. Разработка самостоятельной задачи оптимизации структуры посевных площадей имеет практический смысл, когда рассматривается задача размещения посевов по участкам земли различного плодородия, размещение зерновых культур в зерновом севообороте, кормовых культур в кормовом севообороте и.д.

Рассмотрим отдельные постановки задачи размещения и структуры посевов.

Для определения оптимального размещения посевов по отдельным участкам земли различного плодородия может быть применен распределительный метод. Задачу можно разработать на основе транспортной зпдачи.

Сформулировать задачу можно так: требуется разместить посевы сельскохозяйственных культур по участкам земли так, чтобы посевные площади по всем культурам равнялись плановым объемам, все пашни должны быть заняты под посев при этом стоимость валовой продукции была бы максимальной.

В качестве критерия оптимальности в этой задачи можно принять максимум стоимости валовой продукции сельского хозяйства, чистый доход, прибыль.

Введем условные обозначения:

m – число участков земли;

i – номер участков земли;

n – число культур;

j –номера культур;

S_i - площадь i-го участка;

S_j -площадь отведенная под j-ю культуру;

c_{ij} - стоимость j-й продукции с одного гектара i-го;

x_{ij} - площадь посева j-й культуры на ii-том участке.

Структурная модель задачи:

$$C = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \rightarrow \max$$

при условиях:

1. Первое условие обеспечивает, что площадь посева всех культур на каждом участке будет равна его площади.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = S_i \text{, где i=1…m.}$$

2. Второе условие гарантирует, что под каждую культуру будет отведена плановая площадь.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = S_j \text{, где j=1…n.}$$

3. Третье условие обеспечивает равенство имеющейся земли и площади посевов всех сельскохозяйственных культур.

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} S_j$$

1. Условие неотрицательности переменных:

$$x_{ij} \geq 0$$

Числовая модель составляется по типу транспортной задачи, то есть заполняется платежная матрица, по строкам размещаются участки, а по столбцам культуры. Задача имеет практический смысл решения лишь тогда, когда фактически имеются участки различного плодородия.

Моделирование использования минеральных удобрений

Пусть в хозяйстве имеется некоторое количество минеральных удобрений, требуется найти такой план их использования, который обеспечивал бы максимальную прибавку урожая.

По сути речь идет о распределении между культурами.

Формализуем задачу:

a_{ij} - норма внесения действующего вещества i-го вида для получения единицы прибавки урожая j-й культуры;

$в_к$ - количество удобрений к- го вида (в натуре), имеющееся в хозяйстве (к=1…К);

q_{ik} - содержание i-го действующего вещества в единице к-го удобрения;

c_j -цена единицы j-й продукции;

x_j - количество полученной прибавки j-й продукции за счет внесения минеральных удобрений;

Q_j - максимально-возможный объем прибавки j-ой продукции за счет внесения минеральных удобрений – при данной площади посева j-й культуры.

Целевая функция.

$$C = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

Так максимизируется прибавка урожая в денежном выражении:

При условиях:

1. Расход действующего вещества ii-го вида для получения всей прибавки урожая по j-й культуре не должны превышать наличия действующего вещества i-го вида в к-том удобрении

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} xj \leq \sum_{к=1}^{K} q_{ik} в_к$$

По сути ограничения данного вида сводят баланс по действующему веществу. Это прежде всего баланс азота, калия, фосфора и т.п.

2. Нижний и верхний пределы изменения переменной

$$0 \leq x_j \leq Q_j .$$

Эффективность удобрений зависит не только от культуры, под которую оно вносится, но т и от характера удобряемого участка, то есть от наличия действующего вещества в почке.

Доказана зависимость прибавки урожая от способа внесения удобрений.

Рассмотрим модель с этими ограничениями.

Пусть p – номера, а P – количество способов внесения минеральных удобрений.

r - номера, а R – количество участков земли, отличающихся по содержанию питательных элементов в почве.

Модель имеет вид:

$$C = \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{R} \sum_{p=1}^{P} c_j x_{jrp} \to \max$$

При условии:

1. $$\sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{R} \sum_{p=1}^{P} a_{ij} xj \le \sum_{\kappa=1}^{K} q_{ik} в_{\kappa}$$

2. $$0 \le x_{jrp} \le Q_{jrp}$$

Нетрудно заметить, что введение ограничений по учету способов внесения минеральных удобрений, характера удобряемого участка не усложнили модель. Два типа ограничений остались, возросло лишь число индексов. Естественно, потребуется новая входная информация, но заметно возрастает и выходная информация, будуд получены новые, более ценные сведения. Здесь в качестве примера показано, как учесть дополнительные условия в модели. По такому же принципу можно учесть сроки внесения минеральных удобрений.

1.6 Лекция №10,11 (4 часа)

Тема: «Динамическое программирование»

1.6.1 Вопросы лекции:

1.Принцип оптимальности Беллмана
2. Решение графовых задач на основе принципа Беллмана
3. Функциональное уравнение Беллмана
4. Задачи распределения ресурсов

1.6.2. Краткое содержание вопросов

1. Принцип оптимальности Беллмана

Метод ДП является наиболее общим методом решения задач оптимального управления. Он применим как для задач с линейной ЦФ, так и с нелинейной , а также в случае, когда управляемые переменные целые числа, при этом сама ЦФ может быть задана таблицей, что наиболее распространено в практических задачах.

Процессы называют динамическими, если результаты на одном участке процесса влияют на другие шаги.

Рассмотрим принцип оптимального управления Р. Беллмана. Он связан с проблемой оптимизации сложной системы, состоящей из многих взаимосвязанных элементов. Элементами могут быть экономические единицы, которые входят в единую (более общую) систему; узлы сложной технической системы; отдельные участки производства, строительства, боевых операций и т.д.

Возникает вопрос: как нужно управлять отдельными элементами системы, чтобы показатель эффективности всей системы был максимальным?

Выше мы на интуитивном уровне показали, что для оптимизации в целом недостаточно оптимизировать каждый элемент отдельно - это приводит к неверному результату.

Беллман впервые сформулировал принцип оптимальности для такой задачи. То есть, оптимизируя отдельный шаг, необходимо задумываться о его последствиях, приводящих к общему результату. Для решения подобных задач был разработан метод ДП, основывающийся на уравнении Беллмана, которое математически выражает его принцип.

Назовем состоянием системы 5* один или несколько параметров системы. Например, деньги на лицевом счете предприятия. Обозначим управление на } -дм шаге /Л - это некоторое воздействие, которое испытывает система и изменяет свое состояние 5.

Если перед г-м шагом состояние системы 5 и мы принимаем управление V, то за *г*-й шаг мы можем получить некоторый выигрыш, который обозначается *р(5, V),* при этом состояние 5переходит в 5':

Считается, что функции *со*$_г$*(8, V).* _и *р(5. V^* известны..

Беллман ввел понятие условного оптимального выигрыша *Ж,(5).* Эта функция показывает оптимальный выигрыш (наилучший результат), полученный за все шаги от *г*-го и до конца, если *г-й* шаг начинается с состояния 5. Тогда согласно принципу оптимальности Беллмана, принимая решение на *г* шаге, мы должны выбрать V так, чтобы выигрыш был максимальным от *г* -шага и до конца.

Принцип оптимальности Беллмана ставит вопрос о том, что такое оптимальность отдельного элемента системы с точки зрения оптимальности всей системы. Принимая решение на отдельном этапе, мы должны выбирать управление на этом этапе с прицелом на будущее, т. к. нас интересует результат в целом за все шаги.

Любой процесс имеет где-то окончание, т. е. говорят, что он имеет «горизонт планирования». Тогда последний этап «не имеет будущего». Вот именно его можно оптимизировать только из условий данного этапа. После этого приступают к оптимизации (т-1)-го этапа. При этом мы задаём состояние, с которого начинается (т-1)-й шаг (условие). Поэтому функцию называют условным оптимальным выигрышем. Таким образом, процесс оптимизации по методу ДП разворачивается сначала от конца к началу, а затем от начала к концу. В различных задачах может быть известно либо начальное состояние, либо конечное, либо то и другое. Принцип Беллмана нашёл практическое применение в так называемом методе программно-целевого планирования (любое действие планируется как элемент некоторого проекта).

2. Решение графовых задач на основе принципа Беллмана

Задача о наборе высоты и скорости летательного аппарата

Летательный аппарат находится на высоте *кй* и летит со скоростью y_0. Необходимо перевести его на высоту *к$_* со скоростью у_. Причём *к<>к*$_{1г}$Ур>у^ Разобьём участок от *к^* до *к±* на *п* частей:

ДА:

ДУ:

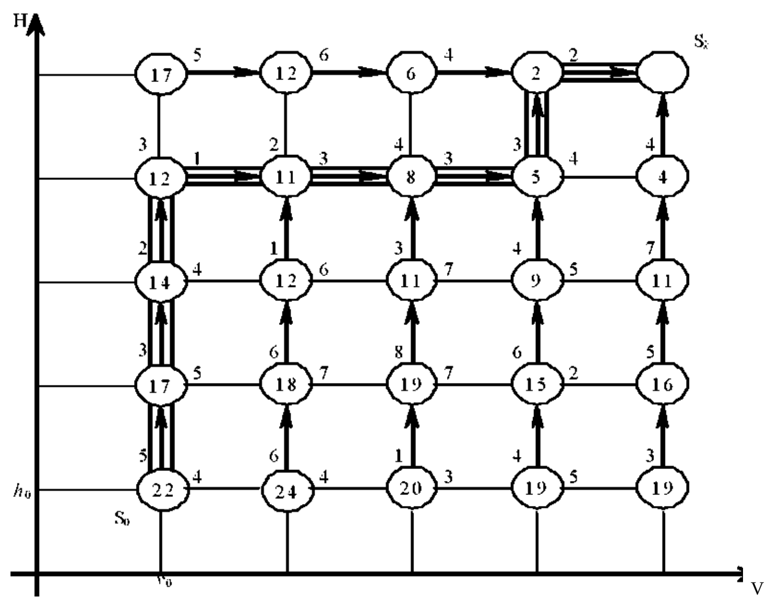


Рис. 23

т

Известен расход горючего при переводе системы на *ДА* при у.=соп51,и на Дуприк=соп§1. Таким образом, из каждого состояния есть лишь два управления.

Начиная с конца помечаем все узлы (состояния) величинами условных (для данного узла) оптимальных расходов горючего от этого узла и до конца, а стрелками условные оптимальные управления. Указанные действия в упрощенном виде демонстрируют рассмотренную процедуру решения на основе уравнения Беллмана. Дойдя от конечного состояния до начального и получив 22, мы получим минимальную величину потерь горючего. Идя по стрелкам от начального состояния до конечного, мы получаем безусловные оптимальные управления (показаны двойной линией).

Видно, что любая задача, сводящаяся к поиску минимального пути в графе, решается методом динамического программирования.

3. Функциональное уравнение Беллмана

Назовём состоянием системы вектор координат: 8 = ($^_1$,$^_2$,...,$^_ь$) . В некоторых задачах состояние ^ одна величина. Тогда работу системы можно представить как движение в фазовом пространстве - пространстве состояний. Назовём шаговым управлением ^ управление на 2-м шаге. Рассмотрим процесс управления системой за *т* шагов. Функция *а(8,*Ц) называется выигрышем на м шаге. Здесь 8-состояние перед шагом, а *Ц* - управление на / ,-м шаге.

Величина *а.(8,II.)* должна быть известна до начала динамического программирования. Если состояние перед шагом было 8 и мы приняли какое-то управление Ц, то система перейдёт в новое состояние 8' = (8, Ц) .

функция должна быть так же известна. Если эти функции не заданы, то их надо сформулировать. Введём функцию *Ж(8)^* условный оптимальный выигрыш. Это выигрыш на всех этапах от , до конца, если ,-й шаг начинается с состояния 8.

Рассмотрим т шагов. Пусть с (,+ 1)-го шага мы системой управляем оптимально, тогда величина выигрыша будет так

4. Задачи распределения ресурсов

Классическая задача распределения ресурсов Распределение ресурсов - это едва ли не самая распространённая операция. Под ресурсом в общем случае понимают физическую или абстрактную величину, которую система использует для производства полезного продукта. Например: горючее, деньги, время, объём склада. Как правило - ресурс ограничен, поэтому встаёт задача так распределить ресурс между отдельными элементами системы, чтобы суммарный эффект был максимальным. Рассмотрим классическую задачу распределения ресурсов.

лить между двумя отраслями. Каждая отрасль работает в течении *т* лет. Если в первую отрасль в *1* -й год вкладываются средства X, то доход *ЯХ),,* если же во вторую вкладываются, У, тогда доход *д(У1)*. Средства тратятся, принося доход, а новых средств не поступает и полученный доход не вкладывается. Нас интересует суммарный доход:

Щ= Ё /(х)+*е (у,). "*
1=1

Суммарный выигрыш равен сумме выигрышей на каждом шаге. Состоянием системы является количество средств перед *1* -м шагом. Так как новых средств не поступает, то ресурсы «тают».

Управление *У* может быть записано как *У=к-*X_1. После *1* -го шага в первой отрасли остаются средства р(X_1), а во второй (//(у)= *(//(к-*X_1*)*. Эти функции называются функциями траты. Мы можем составить уравнение Беллмана. В этой задаче на *1* -м шаге одно управление *X* и одно состояние к.

1.7 Лекция №12 (2 часа)

Тема: «Игровые модели принятия решений»

1.7.1 Вопросы лекции:

1. Основные понятия теории игр
2. Платежная матрица антагонистических игр

1.7.2 Краткое содержание вопросов

1. Основные понятия теории игр

Одним из важных разделов «Исследования операций» является *теория игр,* представляющая собой теоретические основы математических моделей принятия оптимальных решений в конфликтных ситуациях рыночных отношений, носящих характер конкурентной борьбы, в которых одна противоборствующая сторона выигрывает за счет проигрыша другой. Наряду с такой ситуацией в теории принятия решений также рассматривают так называемые ситуацию риска и ситуацию неопределенности, которые имеют различные модели и требуют разных критериев выбора оптимальных решений. В ситуации риска предполагаются известными не только возможные условия, в которых нужно принимать решение, но и вероятности их появления. В ситуации неопределенности вероятности условий неизвестны и нет никакой возможности получить о них дополнительную статистическую информацию. Окружающая решение задачи среда, которая проявляется в тех или иных условиях, называется *природой*, а соответствующие математические модели называются *играми сприродой* или *теорией статистическихрешений*.

Теория игр была систематически изложена ДЖ. Фон Нейманом и О. Монгерштерном в 1944 году. Они написали книгу, которая содержала главным образом экономические примеры, поскольку экономическому конфликту легче придать численную форму. Теория игр используется в области экономики и производства, бизнеса и финансов, сельского хозяйства и военного дела, биологии и социологии, психологии и политологии. К настоящему времени теория игр развилась в самостоятельную область математики и может рассматриваться независимо от ее приложений к реальным игровым ситуациям. По мнению лауреата Нобелевской премии по экономике за 1994 г. Нэша, теория игр вообще сыграла важную роль в интеллектуальной жизни XX века.

На практике часто приходится сталкиваться с задачами, в которых необходимо принимать решения в условиях неопределенности, то есть возникают ситуации, в которых две (или более) стороны преследуют различные цели, а результаты любого действия каждой из сторон зависят от мероприятий партнера. Такие ситуации, возникающие при игре в шахматы, шашки, домино, ситуации на рынке, когда выходит несколько производителей с одинаковым товаром (олигополия), покупатель и продавец, поставщик и потребитель, банк и клиент. То есть примером теории игр являются такие ситуации, в которых важную роль играют конфликты и совместные действия. Конфликт может возникнуть также из различия целей, которые отражают не только несовпадающие интересы различных сторон, но и многосторонние интересы одного и того же лица, например разработчик экономической политики обычно преследует разнообразные цели (рост объема производства, повышение доходов, снижение экологической нагрузки).

Таким образом, теория игр изучает и рассматривает методы определения оптимального поведения при управлении системами, в которых характерно наличие конфликтной ситуации (столкновение интересов). Для конфликтов характерно то, что ни один из его участников заранее не знает решений, принимаемых остальными участниками. Другими словами, участники конфликтов вынуждены действовать в условиях риска и неопределенности. Неопределенность исходов может проявляться не только в результате сознательных действий других участников, но и как результат действий тех или иных стихийных сил.

В свете «теории игр» можно рассмотреть экономику, общественные науки, бизнес и повседневную жизнь. К примеру, в экономике с точки зрения «теории игр» можно объяснить торговые и ценовые войны. Кроме того, некоторые обозреватели полагают, что, используя эту теорию, можно показать причины такого феномена, как «малоподвижные» цены. В соответствии с этой теорией фирмы заключают нечто вроде тайного соглашения о преобладающем значении цены (скажем, если речь идет об автомобильной или сталелитейной промышленности). После того как они пришли к соглашению, фирмы отказываются понижать или повышать цены, так как в противном случае участники рынка будут рассматривать такие изменения как сигнал объявления экономической войны. С помощью теории игр можно также объяснить, почему иностранная конкуренция может привести к более ожесточенной ценовой войне. Что случится, если японская фирма войдет на американский рынок, на котором уже существующие компании тайно договорились назначить высокую цену? Зарубежные фирмы могут «отказаться играть в эту игру». Они просто будут снижать цены в целях овладения большей долей рынка. Сговор может разрушиться.

Для грамотного решения задач с конфликтными ситуациями необходимы научно обоснованные методы. Такие методы разработаны математической теорией конфликтных ситуаций, которые носят название «теория игр».

Всякая претендующая на адекватность математическая модель социально-экономического явления должна отражать присущие ему черты конфликта, то есть описывать:

а) множество заинтересованных сторон, которые называются игроками;

б) возможные действия каждой из сторон, именуемые стратегиями или ходами;

в) интересы сторон, представленные функциями выигрыша (платежа) для каждого из игроков.

Сама модель конфликтной ситуации называется игрой.

2. Платежная матрица антагонистических игр

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор действия при каждом ходе в зависимости от сложившейся ситуации. Чтобы решить игру или найти решение игры, следует для каждого игрока выбрать стратегию, которая удовлетворяет условию оптимальности, то есть один из игроков получает максимальный выигрыш, когда второй придерживается своей стратегии. В то же время второй игрок должен иметь минимальный проигрыш, если первый придерживается своей стратегии. Такие стратегии называются оптимальными.

Оптимальные стратегии должны удовлетворять условию устойчивости, то есть любому из игроков должно быть невыгодно отказываться от своей стратегии в этой игре. Если игра повторяется много раз, то игроков может интересовать не выигрыш и проигрыш в каждой конкретной партии, а средний выигрыш (проигрыш) во всех партиях.

Целью теории игр является определение оптимальной стратегии для каждого игрока.

Выигрыш– это мера эффекта для игрока. В теории игр выигрыш должен измеряться обязательно количественно.

В случае конечной игры двух лиц функции выигрыша каждого из игроков удобно представлять в виде матрицы выигрышей, где строки представляют собой стратегии одного игрока, а столбцы – стратегии другого. В клетках матрицы указываются выигрыши каждого из игроков в каждой из образующихся ситуаций. Данная форма представления конечных игр называется «матричные игры».

Пример решения задачи. Игра в «орлянку».

Если оба выбирают одинаковые стратегии (оба говорят "орел"), то 1-й выигрывает 1 рубль (а второй проигрывает); если выбирают разные, то 2-й выигрывает.

Таблица 2.1

Матрица выигрыша первого игрока (H_1)

	Орел	Решка
Орел	1	–1
Решка	–1	1

Матрица выигрыша второго игрока (H_2)

	Орел	Решка
Орел	–1	1
Решка	1	–1

Для антагонистических игр всегда $H_1= - H_2$.

Матрица, элементами которой являются выигрыши, соответствующие стратегиям игроков, называется платежной матрицей или матрицей игры.

Нижняя цена игры (α) (максиминный выигрыш – максимин) – это гарантированный выигрыш первого игрока при любой стратегии второго игрока (то есть из каждой строки выбираем минимальное число, а затем из всех этих минимумов берем наибольший). Стратегия, соответствующая максимину называется максиминной.

Верхняя цена игры (β) (минимаксный выигрыш – минимакс) – это гарантированный проигрыш второго игрока. (То есть из каждого столбца выбираем максимальное число, а затем из всех максимумов берем наименьший). Стратегия, соответствующая минимаксу, называется минимаксной.

Принцип, диктующий игрокам выбор наиболее «осторожных» минимаксной и максиминной стратегий, называется принципом минимакса. Этот принцип следует из разумного предположения, что каждый игрок стремится достичь цели, противоположной цели противника. Если верхняя и нижняя цены игры совпадают $\alpha=\beta=\partial$, то эта цена называется чистой ценой игры или ценой игры.

Для A=$\begin{pmatrix} -1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}$ $\alpha=-1, \beta=1 \qquad \alpha\neq\beta$

Для B=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ $\alpha=1, \beta=1 \qquad \alpha=\beta=\partial=1$

Минимаксные стратегии, соответствующие цене игры, являются оптимальными стратегиями или решением игры. То есть в этом случае первый игрок получает максимальный, не зависящий от поведения второго игрока выигрыш q, а второй игрок добивается минимального гарантированного, не зависящего от поведения первого игрока проигрыша q. Такое решение обладает устойчивостью, то есть если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то для другого не может быть выгодным отклоняться от своей оптимальной стратегии.

Пара стратегий дает оптимальное решение игры тогда и только тогда, когда соответствующий элемент матрицы (размер выигрыша-проигрыша) является одновременно наибольшим в своем столбце и наименьшим в своей строке. Такая ситуация, если она существует, называется седловой точкой. То есть игра разрешима в чистых стратегиях, каждый из игроков будет на каждом шаге выбирать одну и ту же стратегию и ему не выгодно от нее отклониться: если первый игрок выберет другую стратегию, у него будет выигрыш меньше, а если второй игрок выберет другую стратегию, у него проигрыш будет больше.

1.8 Лекция №13 (2 часа)

Тема: «Игровые модели принятия решений»

1.8.1 Вопросы лекции:

1. Геометрическое решение игр
2. Биматричные игра
3. Кооперативные игры

1.8.2 Краткое содержание вопросов

1. Геометрическое решение игр

Пусть имеется два игрока А и В. У каждого из игроков по две стратегии (A_1 и A_2 у игрока А, B_1 и B_2 у игрока В). Игра с нулевой суммой.

По оси абсцисс отложим отрезок A_1A_2, то есть точка A_1 изображает стратегию A_1 (x=0), A_2 – стратегию A_2, все промежуточные точки – смешанные стратегии. На оси ординат откладываем выигрыш первого игрока, если второй применил стратегию B_1. Аналогично строим второй график, если второй график выбрал стратегию B_2.

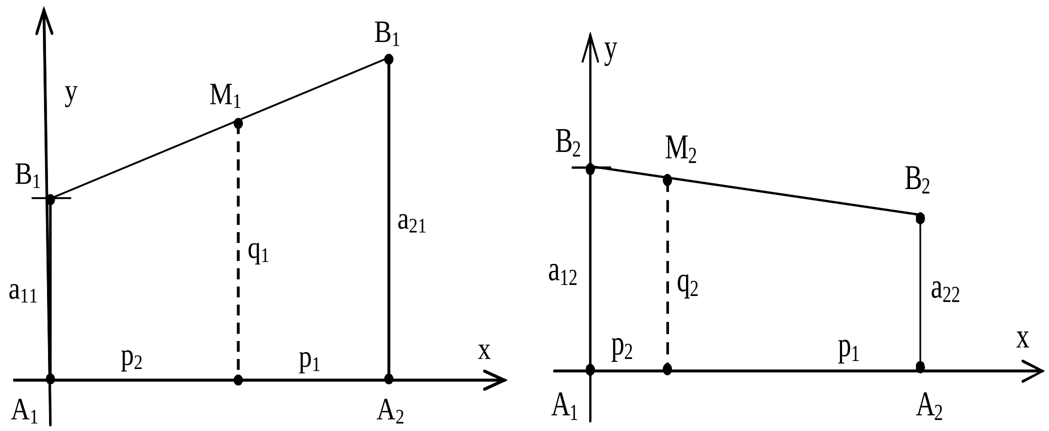


Рис. 2.1. Геометрическая интерпретация стратегий первого игрока

$q_1=a_{11}p_1+a_{21}p_2$

$q_2=a_{12}p_1+a_{22}p_2$ (ордината точки M_1 и M_2, соответственно)

$\left|\overline{A_1A_2}\right| = 1$

В соответствии с принципом минимакса оптимальная стратегия S_A^* такова, что минимальный выигрыш игрока А (при наихудшем поведении игрока В) обращается в максимум.

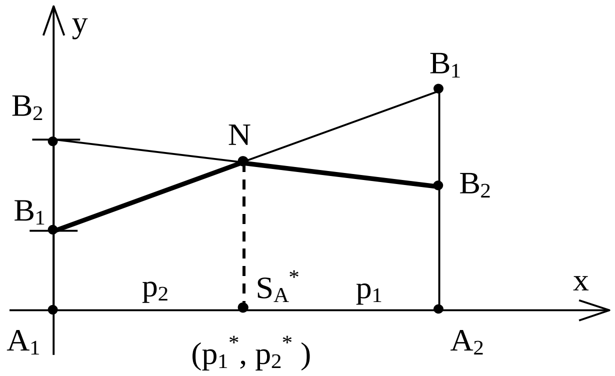


Рис. 2.2. Решение игры графическим способом

Отрезок B_1N – минимальный выигрыш игрока А при использовании любой смешанной стратегии, если игрок В выбрал стратегию B_1. Аналогично, отрезок B_2N – выигрыш игрока А, если игрок В выбрал стратегию B_2. Следовательно, оптимальную стратегию определяет точка N, то есть минимальный выигрыш достигает максимума.

<u>Пример решения задачи.</u>

Решить графически игру, заданную платежной матрицей:

$$P=\begin{pmatrix} 1{,}5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Определим верхнюю и нижнюю цены игры: $\alpha = 1{,}5, \quad \beta = 2$. Следовательно, седловая точка отсутствует, будем искать решение в смешанных стратегиях. Отметим на графике величину выигрыша для каждой пары стратегий.

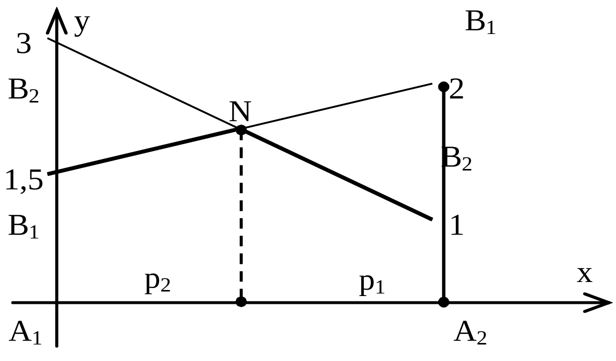


Рис. 2.3. Графическое решение игры

Запишем уравнение прямых, соответствующих величине выигрыша игрока А, если игрок В выбирает, соответственно, первую (B_1) $y = = 0{,}5x + 1{,}5$ и вторую $(B_2) y = -2x + 3$ стратегии. Точка их пересечения $N(0{,}6; 1{,}8)$. Следовательно, $p_2 = x = 0{,}6$ – вероятность выбора игроком А второй стратегии; $p_1 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$ – вероятность выбора игроком А первой стратегии. Цена игры $\partial = y = 1{,}8$ – максимально возможный из минимально гарантированных выигрышей игрока А (либо минимально возможный из максимально гарантированных проигрышей игрока В).

Важно помнить. Графически можно решить игру, если в игре участвуют только два игрока и у одного из игроков имеется только две стратегии (у второго игрока – любое количество стратегий).

2. Биматричные игра

Во многих ситуациях не обязательно, чтобы один игрок выигрывал, а другой столько же проигрывал• Такие игры называются неантагонистическими (с ненулевой суммой) Для двух игроков выигрыши в таких играх приходится записывать не одной, а двумя платежными матрицами, поэтому они имеют название биматричные игрьг Интересы игроков здесь не являются полностью противоположными, и их поведение может быть более разно-образным^ Различают некооперативные биматричные игры и кооперативные, в зависимости от того, могут ли договариваться игроки, или соглашение невозможно по правилам игрыг

Рассмотрим классическую модель некооперативной биматричной игры, известной как «Дилемма Заключенного» Два преступника ожидают приговора суда за совершение преступления^ Адвокат конфиденциально предлагает каждому из преступников освободить его, если он сознается и даст показания против сообщника, которому грозит угодить в тюрьму на 10 лет Если никто не сознается, то обоим угрожает получить 1 год за незначительное преступление • Если сознаются оба преступника, то с учетом чистосердечного признания они получат 5 лет

Построим платежные матрицы игроков со стратегиями «сознаться А -A_1», «сознаться В - B_1», «не сознаваться А - B_2», «не сознаваться В - B_2» Первое число - выигрыш А, а второе - выигрыш

Здесь игроки договориться не могут. поэтому им необходимо руководствоваться принципом здравого пессимизма и выбрать максиминную стратегию.

Если А выберет А1. то в худшем случае он получит 5 лет, если то в худшем случае он полу зол» выберет меньшее - A_1.

Игрок В если выберет B_1. то в худшем случае получит 5 лет. а если B_2. то 10 лет. Поэтому. чтобы не рисковать. он выберет B_1. Получили «седловую точку» (А1.В1).

Таким образом. обоим заключенным лучше вместе сознаться и получить по 5 лет. Здесь ни одному из игроков не выгодно отклоняться от своей оптимальной стратегии в одиночку. Приведенный подход к решению некооперативных биматричных игр подобен принципу «минимакса» для матричных игр и называется нахождением точки равновесия по Нэшу. Нэш показал. что любая биматричная игра имеет решение в чистых или смешанных стратегиях.

3. Кооперативные игры

Кооперативной игрой называют такую модель ситуации. когда выигрыши игроков не имеют нулевой суммы. и в которой игрокам разрешается обсуждать свои стратегии и договариваться о совместных действиях. т. е. образовывать коалиции. Основной задачей здесь является дележ общего выигрыша между членами коалиции.

В случае двух игроков выигрыш в игре - это пара выигрышей. представляющих общие выигрыши. Если игроки будут перебирать всевозможные стратегии (чистые и смешанные). то все пространство выигрышей в игре образует некоторое множество точек. ограниченных некоторой линией (см. рисунок). На рисунке можно указать точку с координатами выигрышей игроков. которые они могут гарантировать себе. не прибегая к договоренностям (T_1. T_2). Такая точка называется точкой угрозы.

На множестве выигрышей можно найти множество Парето-оптимальных решений. Парето-оптимальные точки. безусловно. лучше всех других точек множества выигрышей. так как они являются самыми правыми на горизонтали и самыми левыми на вертикали.

Очевидно. что Парето-оптимальные точки - это северно-восточная граница множества выигрышей.

Точки Парето-оптимального множества. находящиеся одновременно выше и правее точки угрозы Т. образуют переговорное множество. Очевидно. что игрокам выгодно договариваться. если их выигрыш будет лучше. чем тот. который получается в точке *Т.* На переговорном множестве выделяется

1.9 Лекция №14,15 (4 часа)

Тема: «Сетевое планирование и управление»

1.9.1 Вопросы лекции:

1. Основные понятия сетевого планирования и управления.
2. Принципы решения задач.

1.9.2 Краткое содержание вопросов

1.Основные понятия сетевого планирования и управления.

Сетевое Планирование и Управление – это комплекс графических и расчетных методов, организационных мероприятий, обеспечивающих моделирование, анализ и динамическую перестройку плана выполнения сложных проектов и разработок, например, таких как: строительство и реконструкция каких-либо объектов; выполнение научно-исследовательских и конструкторских работ; подготовка производства к выпуску продукции; перевооружение армии; развертывание системы медицинских или профилактических мероприятий.

Характерной особенностью таких проектов является то, что они состоят из ряда отдельных, элементарных *работ*. Они обуславливают друг друга так, что выполнение некоторых работ не может быть начато раньше, чем завершены некоторые другие. Например, укладка фундамента не может быть начата раньше, чем будут доставлены необходимые материалы; эти материалы не могут быть доставлены раньше, чем будут построены подъездные пути; любой этап строительства не может быть начат без составления соответствующей технической документации и т.д.

Сетевое Планирование и Управление включает три основных этапа:

1. структурное планирование;
2. календарное планирование;
3. оперативное управление.

Структурное планирование начинается с разбиения проекта на четко определенные операции, для которых определяется продолжительность. Затем строится сетевой график, который представляет взаимосвязи работ проекта. Это позволяет детально анализировать все работы и вносить улучшения в структуру проекта еще до начала его реализации.

Календарное планирование предусматривает построение календарного графика, определяющего моменты начала и окончания каждой работы и другие временные характеристики сетевого графика. Это позволяет, в частности, выявлять критические операции, которым необходимо уделять особое внимание, чтобы закончить проект в директивный срок. Во время календарного планирования определяются временные характеристики всех работ с целью проведения в дальнейшем *оптимизации* сетевой модели, которая позволит улучшить эффективность использования какого-либо ресурса.

В ходе *оперативного управления* используются сетевой и календарный графики для составления периодических отчетов о ходе выполнения проекта. При этом сетевая модель может подвергаться оперативной корректировке, вследствие чего будет разрабатываться новый календарный план остальной части проекта.

Основными понятиями сетевых моделей являются понятия «*события»* и «*работы»*.

Работа – это некоторый процесс, приводящий к достижению определенного результата, требующий затрат каких-либо ресурсов и имеющий протяженность во времени. По своей физической природе работы можно рассматривать как:

- *действие*: разработка чертежа, изготовление детали, заливка фундамента бетоном, изучение конъюнктуры рынка;
- *процесс*: старение отливок, выдерживание вина;
- *ожидание*: ожидание поставки комплектующих.

По количеству затрачиваемого времени работа может быть:

- *действительной*, т.е. требующей затрат времени;
- *фиктивной*, т.е. формально не требующей затрат времени и представляющей связь между какими-либо работами, например: передача измененных чертежей от конструкторов к технологам; сдача отчета о технико-экономических показателях работы цеха вышестоящему подразделению.

Событие – это момент времени, когда завершаются одни работы и начинаются другие. Например, фундамент залит бетоном, комплектующие поставлены, отчеты сданы и т.д. Событиепредставляет собой результат проведенных работ и, в отличие от работ, не имеет протяженности во времени.

На этапе структурного планирования взаимосвязь работ и событий, необходимых для достижения конечной цели проекта, изображается с помощью *сетевого графика* (сетевой модели). На сетевом графике работы изображаются *стрелками*, которые соединяют *вершины*, изображающие события. Начало и окончание любой работы описываются парой событий, которые называются *начальным* и *конечным* событиями. Поэтому для идентификации конкретной работы используют код работы $(2,4)$, состоящий из номеров начального (i-го) и конечного (j-го) событий (см. рис.1.).

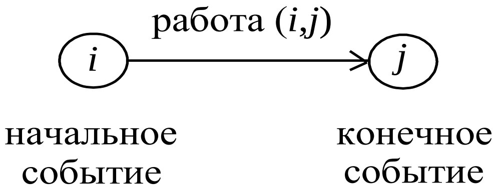


Рисунок 1– Кодирование работы

Любое событие может считаться наступившим только тогда, когда закончатся *все* входящие в него работы. Поэтому, работы, выходящие из некоторого события не могут начаться, пока не будут завершены *все* работы, входящие в это событие.

Событие, не имеющее предшествующих ему событий, т.е. с которого начинается проект, называют ***исходным***. Событие, которое не имеет последующих событий и отражает конечную цель проекта, называется ***завершающим***.

При построении сетевого графика необходимо следовать следующим правилам:

1) длина стрелки не зависит от времени выполнения работы;
2) стрелка может не быть прямолинейным отрезком;
3) для действительных работ используются сплошные, а для фиктивных - пунктирные стрелки;
4) каждая операция должна быть представлена только одной стрелкой;
5) между одними и теми же событиями не должно быть параллельных работ, т.е. работ с одинаковыми кодами;
6) следует избегать пересечения стрелок;
7) не должно быть стрелок, направленных справа налево;

8) номер начального события должен быть меньше номера конечного события;

9) не должно быть *висячих* событий (т.е. не имеющих предшествующих событий), кроме исходного;

10) не должно быть *тупиковых* событий (т.е. не имеющих последующих событий), кроме завершающего;

11) не должно быть циклов.

Важное значение для анализа сетевых моделей имеет понятие пути. ***Путь*** – это любая последовательность работ в сетевом графике (в частном случае это одна работа), в которой конечное событие одной работы совпадает с начальным событием следующей за ней работы. Различают следующие виды путей.

Полный путь – это путь от исходного события до завершающего. ***Критический путь*** – максимальный по продолжительности полный путь. Работы, лежащие на критическом пути, называют *критическими*.***Подкритический путь*** – полный путь, ближайший по длительности к критическому пути.

Построение сети является лишь первым шагом на пути к построению календарного плана. Вторым шагом является расчет сетевой модели, который выполняют прямо на сетевом графике, пользуясь простыми правилами.

2. Принципы решения задач.

К временным **параметрам событий** относятся:

- $\mathrm{T_p}(\mathrm{i})$ – ранний срок наступления события i. Это время, которое необходимо для выполнения всех работ, предшествующих данному событию *i*. Оно равно наибольшей из продолжительности путей, предшествующих данному событию.
- $T_{.}(i)$ – поздний срок наступления события *i*. Это такое время наступления события *i*, превышение которого вызовет аналогичную задержку наступления завершающего события сети. Поздний срок наступления любого события i равен разности между продолжительностью критического пути и наибольшей из продолжительностей путей, следующих за событием *i*.
- $R(i)$ – резерв времени наступления события *i*. Это такой промежуток времени, на который может быть отсрочено наступление события *i* без нарушения сроков завершения проекта в целом. Начальные и конечные события критических работ имеют нулевые резервы событий.

Рассчитанные численные значения временных параметров записываются прямо в вершины сетевого графика (см. рис.2).

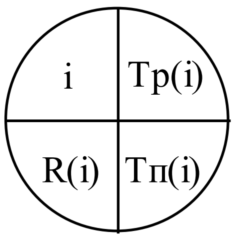


Рисунок 2 – Отображение временных параметров событий
в вершинах сетевого графика

Расчет ***ранних*** сроков свершения событий $T_{\text{р}}(i)$ ведется *от исходного (И) к завершающему* (*З*) событию.

Примечание. Поскольку длительность работы может быть как нормальной $T_{,}$, так и ускоренной $T\_$ (см. п. 3), то для общности изложения будем в дальнейшем обозначать текущую длительность работы буквой t с соответствующим кодом работы, например, $t(i, j)$, $t(k, j)$ и т.д.

1. Для исходного события И $T_р(И) = 0$.

2. Для всех остальных событий i $T_р(i) = \max[T_р(k) + t(k, i)]$, где максимум берется по всем работам (k, i), входящим в событие i.

Иными словами, ранний срок наступления событий – это максимальная суммарная длина пути от исходного события до данного события.

Поздние сроки свершения событий $T_п(i)$ рассчитываются *от завершающего к исходному* событию.

3. Для завершающего события З $T_п(З) = T_р(З)$.

4. Для всех остальных событий $T_п(i) = \min[T_п(j) - t(i, j)]$, где минимум берется по всем работам (i, j), выходящим из события i.

5. $R(i) = T_п(i) - T_р(i)$.

Иными словами, поздний срок наступления событий есть разность между продолжительностью критического пути и максимальной продолжительностью работ, лежащих на пути от данного события до завершающего

К наиболее важным временным **параметрам работ** относятся:

- $T_{рн}(i, j)$ - ранний срок начала работы;
- $T_{пн}(i, j)$ - поздний срок начала работы;
- $T_{ро}(i, j)$ - ранний срок окончания работы;
- $T_{по}(i, j)$ - поздний срок окончания работы;

Для критических работ $T_{рн}(i, j) = T_{пн}(i, j)$ и $T_{ро}(i, j) = T_{по}(i, j)$.

- $R_п(i, j)$ - полный резерв работы показывает максимальное время, на которое может быть увеличена продолжительность работы (i, j) или отсрочено ее начало, чтобы продолжительность проходящего через нее максимального пути не превысила продолжительности критического пути. Важнейшее свойство полного резерва работы (i, j) заключается в том, что его частичное или полное использование уменьшает полный резерв у работ, лежащих с работой (i, j) на одном пути. Таким образом, полный резерв принадлежит не одной данной работе (i, j), а всем работам, лежащим на путях, проходящим через эту работу.

- $R_с(i, j)$ – свободный резерв работы показывает максимальное время, на которое можно увеличить продолжительность работы (i, j) или отсрочить ее начало, не меняя ранних сроков начала последующих работ. Использование свободного резерва одной из работ не меняет величины свободных резервов остальных работ сети.

Временные параметры работ сети определяются на основе ранних и поздних сроков событий.

1) $T_{рн}(i, j) = T_р(i)$;

2) $T_{ро}(i, j) = T_р(i) + t(i, j)$ или $T_{ро}(i, j) = T_{рн}(i, j) + t(i, j)$;

3) $T_{по}(i,j) = T_п(j)$;

4) $T_{пн}(i,j) = T_п(j) - t(i,j)$ или $T_{пн}(i,j) = T_{по}(i,j) - t(i,j)$;

5) $R_п(i,j) = T_п(j) - T_р(i) - t(i,j)$;

6) $R_с(i,j) = T_р(j) - T_р(i) - t(i,j)$.

Временные параметры работ вносятся в таблицу. При этом коды работ записывают в определенном порядке: сначала записываются все работы, выходящие из исходного, т.е. первого, события, затем - выходящие из второго события, потом - из третьего и т.д.

Резервами времени, кроме работ и событий, обладают полные пути сетевой модели. Разность между продолжительность критического пути $T(L_{кр})$ и продолжительностью любого другого полного пути $T(L_п)$ называется полным резервом времени пути $L_п$, т.е. $R(L_п) = T(L_{кр}) - T(L_п)$. Этот резерв показывает, на сколько в сумме может быть увеличена продолжительность всех работ данного пути L, чтобы при этом не изменился общий срок окончания всех работ.

Методика оптимизации загрузки сетевых моделей по критерию "минимум исполнителей".

При оптимизации использования ресурса рабочей силы чаще всего сетевые работы стремятся организовать таким образом, чтобы:

- количество одновременно занятых исполнителей было минимальным;
- выровнять потребность в людских ресурсах на протяжении срока выполнения проекта.

Суть оптимизации загрузки сетевых моделей по критерию "минимум исполнителей" заключается в следующем: необходимо таким образом организовать выполнения сетевых работ, чтобы количество одновременно работающих исполнителей было минимальным. Для проведения подобных видов оптимизации необходимо построить и проанализировать *график привязки* и *график загрузки*.

График привязки отображает взаимосвязь выполняемых работ во времени и строится на основе данных либо о продолжительности работ (в данной лабораторной это $T_Н$), либо о ранних сроках начала и окончания работ. При первом способе построения необходимо помнить, что выполнение работы (i, j) может начаться только после того, как будут выполнены все предшествующие ей работы (k, j). ***По вертикальной оси графика привязки*** откладываются ***коды работ***, ***по горизонтальной оси - длительность работ*** (раннее начало и раннее окончание работ).

На *графике загрузки**по горизонтальной оси откладывается время***, например в днях, ***по вертикальной - количество человек***, занятых работой в каждый конкретный день. Для построения графика загрузки необходимо:

- на графике привязки над каждой работой написать количество ее исполнителей;
- подсчитать количество работающих в каждый день исполнителей и отложить на графике загрузки.

<u>Для удобства построения и анализа графики загрузки и привязки следует располагать один над другим</u>.

Описанные виды оптимизации загрузки выполняются за счет сдвига во времени некритических работ, т.е. работ, имеющих полный и/или свободный резервы времени. Полный и свободный резервы любой работы можно определить без специальных расчетов, анализируя только график привязки. Сдвиг работы означает, что она будет выполняться уже в *другие дни* (т.е. изменится время ее начала и окончания), что в свою

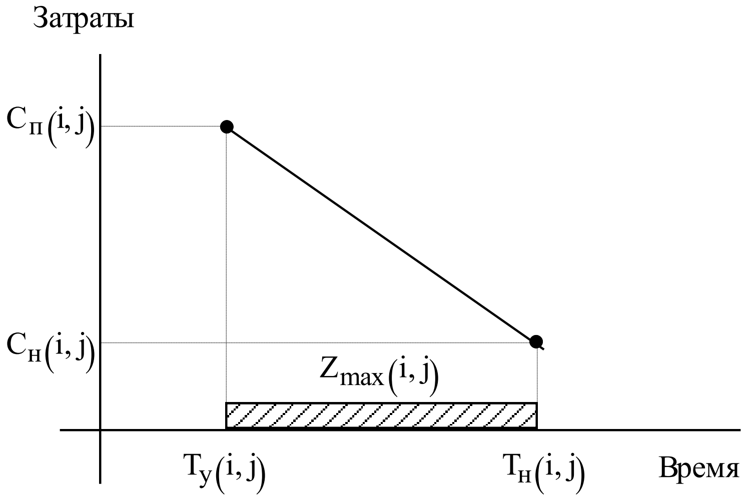
очередь приведет к изменению количества исполнителей, работающих одновременно (т.е. уровня ежедневной загрузки сети).
Методика оптимизации сетевых моделей по критерию "время-затраты"

Целью оптимизации по критерию "Время - затраты" является сокращение времени выполнения проекта в целом. Эта оптимизация имеет смысл только в том случае, когда время выполнения работ может быть уменьшено за счет подключения дополнительных ресурсов, что приводит к повышению затрат на выполнение работ (см. рис.3). Для оценки величины дополнительных затрат, связанных с ускорением выполнения той или иной работы, используются либо нормативы, либо данные о выполнении аналогичных работ в прошлом. Под параметрами работ $C_Н$ (i, j) и $C_П$ (i, j) понимаются так называемые *прямые* затраты, непосредственно связанные с выполнением конкретной работы.

$C_Н$ (i, j) – прямые затраты при нормальном течении событий;

$C_П$ (i, j) – прямые затраты при сокращении времени совершения событий до уровня подкритического.

Таким образом, *косвенные* затраты типа административно-управленческих в процессе сокращения длительности проекта во внимание не принимаются, однако их влияние учитывается при выборе окончательного календарного плана проекта.



где $T_У$(i, j) – ускоренное время выполнения события,
$T_н$(i, j) – нормальное время выполнения события.

Рисунок 3 - Зависимость прямых затрат на работу от времени ее выполнения

Важными параметрами работы (i, j) при проведении данного вида оптимизации являются:

- *коэффициент нарастания затрат*

$$k(i,j)=\frac{C_П(i,j)-C_Н(i,j)}{T_Н(i,j)-T_У(i,j)},$$

который показывает затраты денежных средств, необходимые для сокращения длительности работы (i,j) на один день;

- *запас времени* для сокращения длительности работы в текущий момент времени

$$Z_Т(i,j)=t_Т(i,j)-T_У(i,j),$$

где $t_Т(i,j)$ - длительность работы (i,j) на текущий момент времени.

Максимально возможное значение запаса времени работы равно

$$Z_{max}(i,j)=T_Н(i,j)-T_У(i,j).$$

Эта ситуация имеет место, когда длительность работы (i, j) еще ни разу не сокращали, т.е. $t_т(i, j) = T_н(i, j)$.

Общая схема проведения оптимизации "время - затраты"

1. Исходя из нормальных длительностей работ $T_н(i, j)$, определяются критические $L_{кр}$ и подкритические $L_п$ пути сетевой модели и их длительности $T_{кр}$ и $T_п$.

2. Определяется сумма прямых затрат на выполнение всего проекта $C^0_{пр}$ при нормальной продолжительности работ.

3. Рассматривается возможность сокращения продолжительности проекта, для чего анализируются параметры критических работ проекта.

3.1. Для сокращения выбирается критическая работа с min коэффициентом нарастания затрат $k(i, j)$, имеющая ненулевой запас времени сокращения $Z_т(i, j)$.

3.2. Время $\Delta t(i, j)$, на которое необходимо сжать длительность работы (i, j), определяется как

$$\Delta t(i, j) = \min[Z_т(i, j), \Delta T],$$

где $\Delta T = T_{кр} - T_п$ – разность между длительностью критического и подкритического путей в сетевой модели.

Необходимость учета параметра ΔT вызвана нецелесообразностью сокращения критического пути более чем на ΔT единиц времени. В этом случае критический путь перестанет быть таковым, а подкритический путь наоборот станет критическим, т.е. длительность проекта в целом принципиально не может быть сокращена больше, чем на ΔT.

4. В результате сжатия критической работы временные параметры сетевой модели изменяются, что может привести к появлению других критических и подкритических путей. Вследствие удорожания ускоренной работы общая стоимость проекта увеличивается на величину

$$\Delta C_{пр} = k(i, j)\Delta t(i, j).$$

5. Для измененной сетевой модели определяются новые критические и подкритические пути и их длительности, после чего необходимо продолжить оптимизацию с шага 3. При наличии ограничения в денежных средствах, их исчерпание является причиной окончания оптимизации. Если не учитывать подобное ограничение, то оптимизацию можно продолжать до тех пор, пока у работ, которые могли бы быть выбраны для сокращения, не будет исчерпан запас времени сокращения.

1.10Лекция №16,17,18 (6 часа)

Тема: «Операции массового обслуживания»

1.10.1 Вопросы лекции:

1. Структура и классификация систем массового обслуживания
2. Марковский случайный процесс
3. Системы массового обслуживания с отказом
4. Системы массового обслуживания с неограниченным ожиданием
5. Замкнутые системы массового обслуживания

1.10.2 Краткое содержание вопросов

1. Структура и классификация систем массового обслуживания

Нередко возникает необходимость в решении вероятностных задач, связанных с системами массового обслуживания (СМО), примерами которых могут быть:

- Билетные кассы;
- Ремонтные мастерские;
- Торговые, транспортные, энергетические системы;
- Системы связи;
- и т.д.

Общность таких систем выявляется в единстве математических методов и моделей, применяемых при исследовании их деятельности.

Рис. 1. Основные сферы применения ТМО

На вход в СМО поступает поток требований на обслуживание. Например, клиенты или пациенты, поломки в оборудовании, телефонные вызовы. Требования поступают нерегулярно, в случайные моменты времени. Случайный характер носит и продолжительность обслуживания. Это создает нерегулярность в работе СМО, служит причиной ее перегрузок и недогрузок.

Системы массового обслуживания обладают различной структурой, но обычно в них можно выделить четыре основных элемента:

1. Входящий поток требований.
2. Накопитель (очередь).
3. Приборы (каналы обслуживания).
4. Выходящий поток.

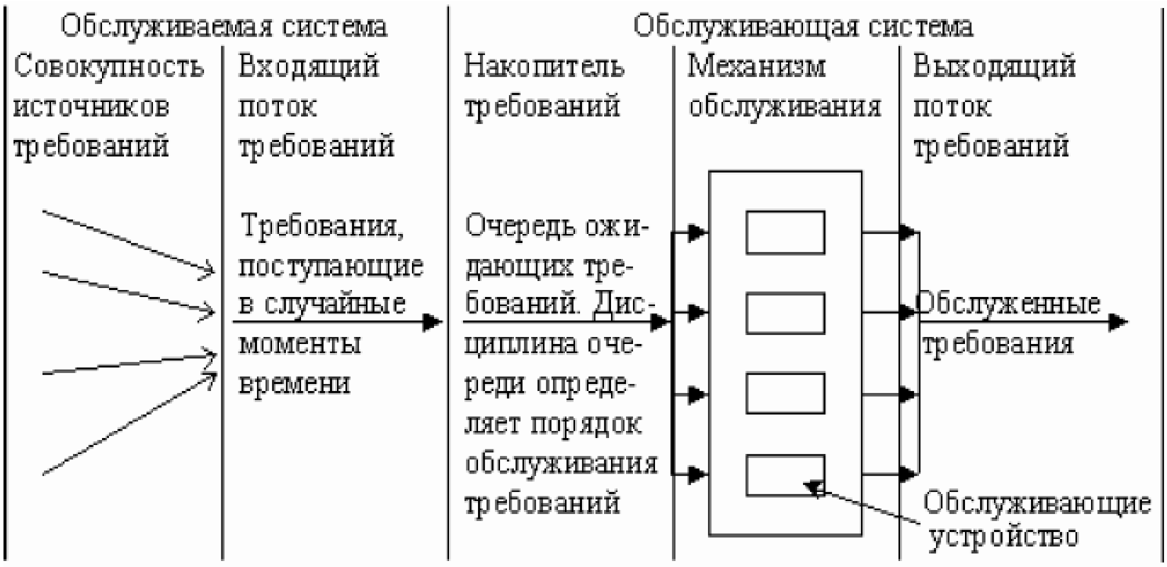


Рис. 2. Общая схема систем массового обслуживания

Рис. 3. Модель работы системы (стрелками показаны моменты поступления требований в систему, прямоугольниками – время обслуживания)

2. Марковский случайный процесс

Система массового обслуживания представляет собой систему дискретного типа с конечным или счетным множеством состояний, а переход системы из одного состояния в другое происходит скачком, когда осуществляется какое-нибудь событие.

Процесс называется ***процессом с дискретными состояниями***, если его возможные состояния $S_1, S_2, S_3, \ldots$ можно заранее перенумеровать, и переход системы из состояния в состояние происходит практически мгновенно.

Такие процессы бывают двух типов: с дискретным или непрерывным временем.

В случае дискретного времени переходы из состояния в состояние могут происходить в строго определенные моменты времени. Процессы с непрерывным временем отличаются тем, что переход системы в новое состояние возможен в любой момент времени.

Случайным процессом называется соответствие, при котором каждому значению аргумента (в данном случае – моменту из промежутка времени проводимого опыта) ставится в соответствие случайная величина (в данном случае – состояние СМО). ***Случайной величиной*** называется величина, которая в результате опыта может принять одно, но неизвестное заранее, какое именно, числовое значение из данного числового множества.

Поэтому для решения задач теории массового обслуживания необходимо этот случайный процесс изучить, т.е. построить и проанализировать его математическую модель.

Случайный процесс называется ***марковским***, если для любого момента времени t_0 вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент t_0 и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние.

Переходы системы из состояния в состояние происходит под действием каких-то потоков (поток заявок, поток отказов). Если все потоки событий, приводящие систему в новое состояние, – простейшие пуассоновские, то процесс, протекающий в системе, будет марковским, так как простейший поток не обладает последствием: в нем будущее не зависит от прошлого.

Пример марковского процесса: система S – счетчик в такси. Состояние системы в момент t характеризуется числом километров (десятых долей километров), пройденных автомобилем до данного момента. Пусть в момент t_0 счетчик показывает S_0. Вероятность того, что в момент $t > t_0$ счетчик покажет то или иное число километров (точнее, соответствующее число рублей) S_1, зависит от S_0, но не зависит от того, в какие моменты времени изменялись показания счетчика до момента t_0.

Многие процессы можно приближенно считать марковскими. Например, процесс игры в шахматы: система S – группа шахматных фигур. Состояние системы характеризуется числом фигур противника, сохранившихся на доске в момент t_0. Вероятность того, что в момент $t > t_0$ материальный перевес будет на стороне одного из противников, зависит в первую очередь от того, в каком состоянии находится система в данный момент t_0, а не от того, когда и в какой последовательности исчезли фигуры с доски до момента t_0.

3. Системы массового обслуживания с отказом

В системах с отказами заявка, поступившая в момент, когда все каналы обслуживания заняты, немедленно получает отказ, покидает систему и в дальнейшем в процессе обслуживания не участвует.

Имеется n каналов в обслуживании, на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуживания имеет интенсивность μ (величина, обратная среднему времени обслуживания $t_{обсл}$). Требуется найти вероятности состояний СМО и характеристики ее эффективности.

Так как оба потока – заявок и освобождений – простейшие, процесс, протекающий в системе, будет марковским. Рассмотрим ее как систему с конечным множеством состояний:

$S_0 -$ свободны все каналы;

$S_1 -$ занят ровно один канал;

…

$S_k -$ заняты *k* каналов;

…

$S_n -$ заняты все *n* каналов/

Через $P_k(t)$ обозначим вероятность того, что в момент времени t система будет находиться в состоянии S_k.

Простейшие задачи для систем массового обслуживания с отказами были впервые решены А.К. Эрлангом. Им же были выведены формулы оценки функционирования этих систем при условии поступления простейшего потока заявок и для показательного закона распределения времени обслуживания.

Для установившегося процесса обслуживания при этих условиях Эрланг получил следующие зависимости.

- Вероятность того, что обслуживанием заняты kаппаратов (линий, приборов и т.п.):

$$P_k = \frac{\frac{\rho^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}}, \qquad (0 \le k \le n), \tag{1}$$

где $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, k – количество занятых аппаратов,

λ – интенсивность потока заявок,

μ – интенсивность потока обслуживания.

Частные случаи:

- Вероятность простоя (того, что все обслуживающие аппараты свободны, нет заявок):

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}}, \tag{2}$$

- Вероятность отказа (вероятность того, что все обслуживающие приборы заняты):

$$P_{отк} = P_n = \frac{\frac{\rho^n}{n!}}{\sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}} = \rho^n \frac{P_0}{n!}. \tag{3}$$

Отсюда находим ***относительную пропускную способность***, т.е. среднюю долю пришедших заявок, обслуживаемых системой, – вероятность того, что заявка будет обслужена:

$$P_{обсл} = 1 - P_{отк} = 1 - \rho^n \frac{P_0}{n!}. \tag{4}$$

Абсолютную пропускную способность, т.е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени, получим, умножив интенсивность потока заявок на относительную пропускную способность:

$$A = \lambda P_{обсл.}$$

Абсолютная пропускная способность – это интенсивность потока обслуженных системой заявок, а каждый занятый канал в единицу времени обслуживает в среднем μ заявок. Значит, ***среднее число занятых каналов*** равно

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \rho P_{обсл.} \qquad (5)$$

Доля каналов, занятых обслуживанием (коэффициент загрузки):

$$q = \frac{\bar{k}}{n}.$$

4. Системы массового обслуживания с неограниченным ожиданием

Пусть имеется n-канальная СМО с очередью, на которую не наложено ограничений ни по длине очереди, ни по времени ожидания. В силу неограниченности очереди каждая заявка рано или поздно будет обслужена, поэтому

$$P_{обсл} = 1, \qquad P_{отк} = 0.$$

Для СМО с неограниченной очередью накладывается ограничение $\frac{\rho}{n} < 1$.

Если это условие нарушено, то очередь растет до бесконечности, наступает явление «взрыва».

- ***Вероятность простоя*** **(**того, что все обслуживающие аппараты свободны, нет заявок):

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}}, \qquad (7)$$

- ***Вероятность занятости обслуживанием k каналов***:

$$P_k = \rho^k \frac{P_0}{n!}, \qquad 1 \le k \le n. \qquad (8)$$

- ***Вероятность занятости обслуживанием всех каналов при отсутствии очереди***:

$$P_n = \rho^n \frac{P_0}{n!}. \qquad (9)$$

- ***Вероятность наличия очереди*** есть вероятность того, что число требований в системе больше числа каналов:

$$P_{оч} = \rho^{n+1} \frac{P_0}{n!(n-\rho)}. \qquad (10)$$

- ***Вероятность для заявки попасть в очередь*** есть вероятность занятости всех каналов, эта вероятность равна сумме вероятностей наличия очереди и занятости всех n каналов при отсутствии очереди:

$$P_{зан} = P_n + P_{оч} = \rho^n \frac{P_0}{(n-1)!(n-\rho)}. \qquad (11)$$

- ***Среднее число занятых обслуживанием каналов***:

$$\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho. \qquad (12)$$

- ***Доля каналов, занятых обслуживанием***:

$$q = \frac{\bar{k}}{n}. \qquad (13)$$

- ***Среднее число заявок в очереди*** (длина очереди)

$$L = \rho^{n+1} \frac{P_0}{(n-1)!(n-\rho)^2}. \qquad (14)$$

- ***Среднее число заявок в системе***

$$M = L + \bar{k} = L + \rho. \qquad (15)$$

- ***Среднее время ожидания заявки в очереди***

$$t = \frac{L}{\lambda}. \qquad (16)$$

- ***Среднее время пребывания заявки в системе***

$$T = t + \frac{1}{\mu}, \qquad T = \frac{M}{\lambda}. \qquad (17)$$

5. Замкнутые системы массового обслуживания

Имеется n-канальная СМО с ожиданием, в которой количество заявок, стоящих в очереди, ограничено числом m, т.е. заявка, заставшая все каналы занятыми, становится в очередь, только если в ней находится менее m заявок.

Если число заявок в очереди равно m, то последняя прибывшая заявка в очередь не становится и покидает систему необслуженной.

Системы с ограниченной очередью являются обобщением двух рассмотренных ранее СМО: при $m = 0$ получаем СМО с отказами, при $m = \infty$ получаем СМО с ожиданием.

- ***Вероятность простоя*** **(**того, что все обслуживающие аппараты свободны, нет заявок):

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\left(1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right)}, \qquad (18)$$

- ***Вероятность отказа в обслуживании***равна вероятности P_{n+m} того, что в очереди уже стоят m заявок:

$$P_{отк} = P_{n+m} = \rho^{n+m} \frac{P_0}{n! \cdot n^m}. \qquad (19)$$

- ***Относительная пропускная способность*** есть величина, дополняющая вероятность отказа до 1, т.е. вероятность обслуживания:

$$P_{обсл} = 1 - P_{отк}. \qquad (20)$$

- ***Абсолютная пропускная способность***определяется равенством:

$$A = \lambda(1 - P_{отк}) = \lambda P_{обсл}. \qquad (21)$$

- ***Среднее число занятых обслуживанием каналов***:

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \rho P_{обсл}. \qquad (22)$$

- ***Среднее число заявок в очереди*** (средняя длина очереди)

$$L = \frac{\rho^n P_0 \left(\frac{\rho}{n} - (m+1)\left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1} + m\left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+2}\right)}{n!\left(n - \frac{\rho}{n}\right)^2}. \qquad (23)$$

- ***Среднее время ожидания обслуживания в очереди***

$$t = \frac{L}{\lambda}. \tag{24}$$

- ***Среднее число заявок в системе***

$$M = L + \bar{k}. \tag{25}$$

- ***Среднее время пребывания заявки в системе***

$$T = t + \frac{1}{\mu}, \qquad T = \frac{M}{\lambda}. \tag{26}$$

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

2.1 Лабораторная работа № ЛР-1,2 (4 часа)

2.1.1 Цель работы: Изучить игровые методы принятия решений

Тема: «Игровые модели принятия решений»

2.2.2 Задачи работы:

1. Основные понятия теории игр
2. Платежная матрица антагонистических игр
3. Геометрическое решение игр
4. Биматричные игра
5. Кооперативные игры

2.1.3 Описание (ход) работы:

1. Основные понятия теории игр

Одним из важных разделов «Исследования операций» является *теория игр,* представляющая собой теоретические основы математических моделей принятия оптимальных решений в конфликтных ситуациях рыночных отношений, носящих характер конкурентной борьбы, в которых одна противоборствующая сторона выигрывает за счет проигрыша другой. Наряду с такой ситуацией в теории принятия решений также рассматривают так называемые ситуацию риска и ситуацию неопределенности, которые имеют различные модели и требуют разных критериев выбора оптимальных решений. В ситуации риска предполагаются известными не только возможные условия, в которых нужно принимать решение, но и вероятности их появления. В ситуации неопределенности вероятности условий неизвестны и нет никакой возможности получить о них дополнительную статистическую информацию. Окружающая решение задачи среда, которая проявляется в тех или иных условиях, называется *природой*, а соответствующие математические модели называются *играми сприродой* или *теорией статистическихрешений*.

Теория игр была систематически изложена ДЖ. Фон Нейманом и О. Монгерштерном в 1944 году. Они написали книгу, которая содержала главным образом экономические примеры, поскольку экономическому конфликту легче придать численную форму. Теория игр используется в области экономики и производства, бизнеса и финансов, сельского хозяйства и военного дела, биологии и социологии, психологии и политологии. К настоящему времени теория игр развилась в самостоятельную область математики и может рассматриваться независимо от ее приложений к реальным игровым ситуациям. По мнению лауреата Нобелевской премии по экономике за 1994 г. Нэша, теория игр вообще сыграла важную роль в интеллектуальной жизни XX века.

На практике часто приходится сталкиваться с задачами, в которых необходимо принимать решения в условиях неопределенности, то есть возникают ситуации, в которых две (или более) стороны преследуют различные цели, а результаты любого действия каждой из сторон зависят от мероприятий партнера. Такие ситуации, возникающие при игре в шахматы, шашки, домино, ситуации на рынке, когда выходит несколько производителей с одинаковым товаром (олигополия), покупатель и продавец, поставщик и потребитель, банк и клиент. То есть примером теории игр являются такие ситуации, в которых важную роль играют конфликты и совместные действия. Конфликт может возникнуть также из различия целей, которые отражают не только несовпадающие интересы различных сторон, но и многосторонние интересы одного и того же лица, например разработчик экономической политики обычно преследует разнообразные цели (рост объема производства, повышение доходов, снижение экологической нагрузки).

Таким образом, теория игр изучает и рассматривает методы определения оптимального поведения при управлении системами, в которых характерно наличие конфликтной ситуации (столкновение интересов). Для конфликтов характерно то, что ни один из его участников заранее не знает решений, принимаемых остальными участниками. Другими словами, участники конфликтов вынуждены действовать в условиях риска и неопределенности. Неопределенность исходов может проявляться не только в результате сознательных действий других участников, но и как результат действий тех или иных стихийных сил.

В свете «теории игр» можно рассмотреть экономику, общественные науки, бизнес и повседневную жизнь. К примеру, в экономике с точки зрения «теории игр» можно объяснить торговые и ценовые войны. Кроме того, некоторые обозреватели полагают, что, используя эту теорию, можно показать причины такого феномена, как «малоподвижные» цены. В соответствии с этой теорией фирмы заключают нечто вроде тайного соглашения о преобладающем значении цены (скажем, если речь идет об автомобильной или сталелитейной промышленности). После того как они пришли к соглашению, фирмы отказываются понижать или повышать цены, так как в противном случае участники рынка будут рассматривать такие изменения как сигнал объявления экономической войны. С помощью теории игр можно также объяснить, почему иностранная конкуренция может привести к более ожесточенной ценовой войне. Что случится, если японская фирма войдет на американский рынок, на котором уже существующие компании тайно договорились назначить высокую цену? Зарубежные фирмы могут «отказаться играть в эту игру». Они просто будут снижать цены в целях овладения большей долей рынка. Сговор может разрушиться.

Для грамотного решения задач с конфликтными ситуациями необходимы научно обоснованные методы. Такие методы разработаны математической теорией конфликтных ситуаций, которые носят название «теория игр».

Всякая претендующая на адекватность математическая модель социально-экономического явления должна отражать присущие ему черты конфликта, то есть описывать:

а) множество заинтересованных сторон, которые называются игроками;

б) возможные действия каждой из сторон, именуемые стратегиями или ходами;

в) интересы сторон, представленные функциями выигрыша (платежа) для каждого из игроков.

Сама модель конфликтной ситуации называется игрой.

2. Платежная матрица антагонистических игр

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор действия при каждом ходе в зависимости от сложившейся ситуации. Чтобы решить игру или найти решение игры, следует для каждого игрока выбрать стратегию, которая удовлетворяет условию оптимальности, то есть один из игроков получает максимальный выигрыш, когда второй придерживается своей стратегии. В то же время второй игрок должен иметь минимальный проигрыш, если первый придерживается своей стратегии. Такие стратегии называются оптимальными.

Оптимальные стратегии должны удовлетворять условию устойчивости, то есть любому из игроков должно быть невыгодно отказываться от своей стратегии в этой игре. Если игра повторяется много раз, то игроков может интересовать не выигрыш и проигрыш в каждой конкретной партии, а средний выигрыш (проигрыш) во всех партиях.

Целью теории игр является определение оптимальной стратегии для каждого игрока.

Выигрыш– это мера эффекта для игрока. В теории игр выигрыш должен измеряться обязательно количественно.

В случае конечной игры двух лиц функции выигрыша каждого из игроков удобно представлять в виде матрицы выигрышей, где строки представляют собой стратегии одного игрока, а столбцы – стратегии другого. В клетках матрицы указываются выигрыши каждого из игроков в каждой из образующихся ситуаций. Данная форма представления конечных игр называется «матричные игры».

Пример решения задачи. Игра в «орлянку».

Если оба выбирают одинаковые стратегии (оба говорят “орел”), то 1-й выигрывает 1 рубль (а второй проигрывает); если выбирают разные, то 2-й выигрывает.

Таблица 2.1

Матрица выигрыша первого игрока (H_1)

	Орел	Решка
Орел	1	–1
Решка	–1	1

Матрица выигрыша второго игрока (H_2)

	Орел	Решка
Орел	–1	1
Решка	1	–1

Для антагонистических игр всегда $H_1 = -H_2$.

Матрица, элементами которой являются выигрыши, соответствующие стратегиям игроков, называется платежной матрицей или матрицей игры.

Нижняя цена игры (α) (максиминный выигрыш – максимин) – это гарантированный выигрыш первого игрока при любой стратегии второго игрока (то есть из каждой строки выбираем минимальное число, а затем из всех этих минимумов берем наибольший). Стратегия, соответствующая максимину называется максиминной.

Верхняя цена игры (β) (минимаксный выигрыш – минимакс) – это гарантированный проигрыш второго игрока. (То есть из каждого столбца выбираем максимальное число, а затем из всех максимумов берем наименьший). Стратегия, соответствующая минимаксу, называется минимаксной.

Принцип, диктующий игрокам выбор наиболее «осторожных» минимаксной и максиминной стратегий, называется принципом минимакса. Этот принцип следует из разумного предположения, что каждый игрок стремится достичь цели, противоположной цели противника. Если верхняя и нижняя цены игры совпадают $\alpha=\beta=\partial$, то эта цена называется чистой ценой игры или ценой игры.

Для А=$\begin{pmatrix} -1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}$ $\alpha = -1, \beta = 1 \qquad \alpha \neq \beta$

Для B=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ $\alpha = 1, \beta = 1$ $\alpha = \beta = \partial = 1$

Минимаксные стратегии, соответствующие цене игры, являются оптимальными стратегиями или решением игры. То есть в этом случае первый игрок получает максимальный, не зависящий от поведения второго игрока выигрыш q, а второй игрок добивается минимального гарантированного, не зависящего от поведения первого игрока проигрыша q. Такое решение обладает устойчивостью, то есть если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то для другого не может быть выгодным отклоняться от своей оптимальной стратегии.

Пара стратегий дает оптимальное решение игры тогда и только тогда, когда соответствующий элемент матрицы (размер выигрыша-проигрыша) является одновременно наибольшим в своем столбце и наименьшим в своей строке. Такая ситуация, если она существует, называется седловой точкой. То есть игра разрешима в чистых стратегиях, каждый из игроков будет на каждом шаге выбирать одну и ту же стратегию и ему не выгодно от нее отклониться: если первый игрок выберет другую стратегию, у него будет выигрыш меньше, а если второй игрок выберет другую стратегию, у него проигрыш будет больше.

3. Геометрическое решение игр

Пусть имеется два игрока A и B. У каждого из игроков по две стратегии (A_1 и A_2 у игрока A, B_1 и B_2 у игрока B). Игра с нулевой суммой.

По оси абсцисс отложим отрезок A_1A_2, то есть точка A_1 изображает стратегию A_1 (x=0), A_2 – стратегию A_2, все промежуточные точки – смешанные стратегии. На оси ординат откладываем выигрыш первого игрока, если второй применил стратегию B_1. Аналогично строим второй график, если второй график выбрал стратегию B_2.

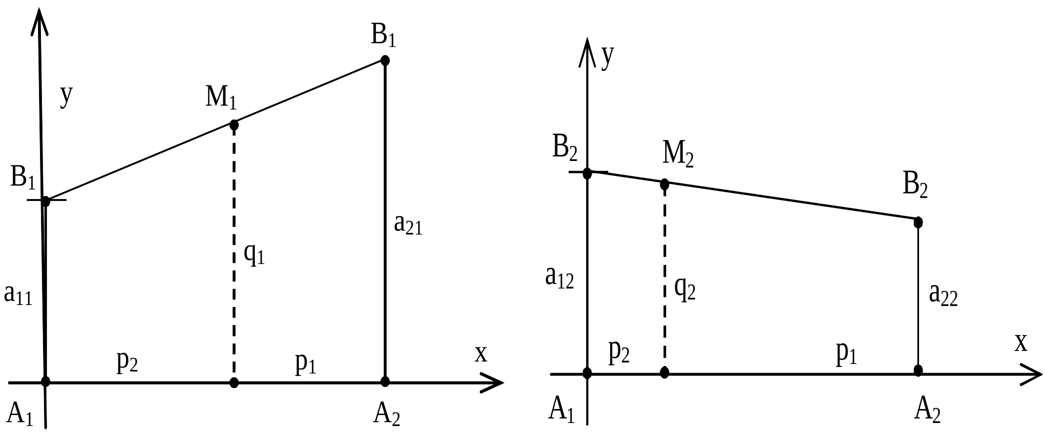


Рис. 2.1. Геометрическая интерпретация стратегий первого игрока

$q_1 = a_{11}p_1 + a_{21}p_2$

$q_2 = a_{12}p_1 + a_{22}p_2$ (ордината точки M_1 и M_2, соответственно)

$$\left|\overline{A_1A_2}\right| = 1$$

В соответствии с принципом минимакса оптимальная стратегия S_A^* такова, что минимальный выигрыш игрока A (при наихудшем поведении игрока B) обращается в максимум.

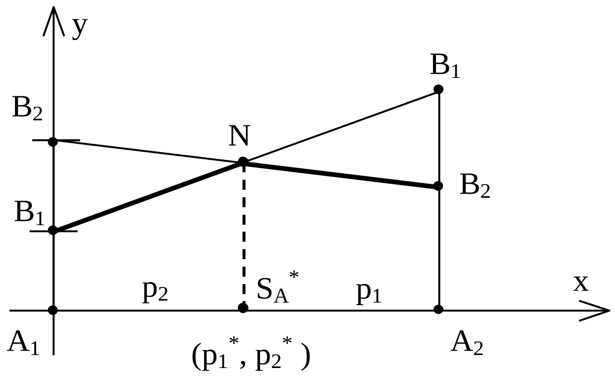


Рис. 2.2. Решение игры графическим способом

Отрезок B_1N – минимальный выигрыш игрока А при использовании любой смешанной стратегии, если игрок В выбрал стратегию B_1. Аналогично, отрезок B_2N – выигрыш игрока А, если игрок В выбрал стратегию B_2. Следовательно, оптимальную стратегию определяет точка N, то есть минимальный выигрыш достигает максимума.

Пример решения задачи.

Решить графически игру, заданную платежной матрицей:

$$P=\begin{pmatrix} 1{,}5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Определим верхнюю и нижнюю цены игры: $\alpha = 1{,}5,\quad \beta = 2$. Следовательно, седловая точка отсутствует, будем искать решение в смешанных стратегиях. Отметим на графике величину выигрыша для каждой пары стратегий.

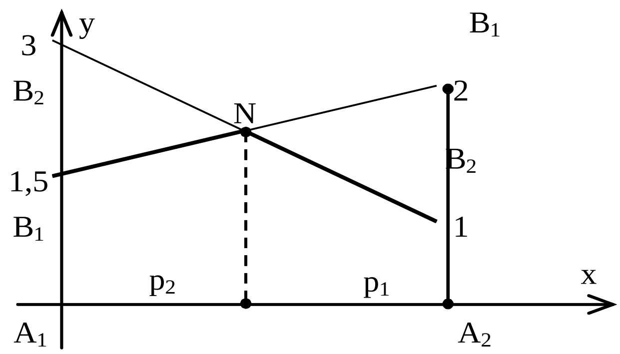


Рис. 2.3. Графическое решение игры

Запишем уравнение прямых, соответствующих величине выигрыша игрока А, если игрок В выбирает, соответственно, первую *(B_1) y= = 0,5 x + 1,5* и вторую *(B_2)y= –2x + 3* стратегии. Точка их пересечения *N(0,6; 1,8)*. Следовательно, *p_2 = x = 0,6* – вероятность выбора игроком А второй стратегии; *p_1 = 1 – 0,6 = 0,4* – вероятность выбора игроком А первой стратегии. Цена игры *∂ = y = 1,8* – максимально возможный из минимально гарантированных выигрышей игрока А (либо минимально возможный из максимально гарантированных проигрышей игрока В).

Важно помнить. Графически можно решить игру, если в игре участвуют только два игрока и у одного из игроков имеется только две стратегии (у второго игрока – любое количество стратегий).

4. Биматричные игра

Во многих ситуациях не обязательно, чтобы один игрок выигрывал, а другой столько же проигрывал• Такие игры называются неантагонистическими (с ненулевой суммой) Для двух игроков выигрыши в таких играх приходится записывать не одной, а двумя платежными матрицами, поэтому они имеют название биматричные игрьг Интересы игроков здесь не являются полностью противоположными, и их поведение может быть более разно-образным^ Различают некооперативные биматричные игры и кооперативные, в зависимости от того, могут ли договариваться игроки, или соглашение невозможно по правилам игрыг

Рассмотрим классическую модель некооперативной биматричной игры, известной как «Дилемма Заключенного» Два преступника ожидают приговора суда за совершение преступления^ Адвокат конфиденциально предлагает каждому из преступников освободить его, если он сознается и даст показания против сообщника, которому грозит угодить в тюрьму на 10 лет Если никто не сознается, то обоим угрожает получить 1 год за незначительное преступление • Если сознаются оба преступника, то с учетом чистосердечного признания они получат 5 лет

Построим платежные матрицы игроков со стратегиями «сознаться А -A_1», «сознаться В - B_1», «не сознаваться А - B_2», «не сознаваться В - B_2» Первое число - выигрыш А, а второе - выигрыш

Здесь игроки договориться не могут. поэтому им необходимо руководствоваться принципом здравого пессимизма и выбрать максиминную стратегию.

Если А выберет А1. то в худшем случае он получит 5 лет, если то в худшем случае он полу   зол» выберет меньшее - A_1.

Игрок В если выберет B_1. то в худшем случае получит 5 лет. а если B_2. то 10 лет. Поэтому. чтобы не рисковать. он выберет B_1. Получили «седловую точку» (А1.В1).

Таким образом. обоим заключенным лучше вместе сознаться и получить по 5 лет. Здесь ни одному из игроков не выгодно отклоняться от своей оптимальной стратегии в одиночку. Приведенный подход к решению некооперативных биматричных игр подобен принципу «минимакса» для матричных игр и называется нахождением точки равновесия по Нэшу. Нэш показал. что любая биматричная игра имеет решение в чистых или смешанных стратегиях.

5. Кооперативные игры

Кооперативной игрой называют такую модель ситуации. когда выигрыши игроков не имеют нулевой суммы. и в которой игрокам разрешается обсуждать свои стратегии и договариваться о совместных действиях. т. е. образовывать коалиции. Основной задачей здесь является дележ общего выигрыша между членами коалиции.

В случае двух игроков выигрыш в игре - это пара выигрышей. представляющих общие выигрыши. Если игроки будут перебирать всевозможные стратегии (чистые и смешанные). то все пространство выигрышей в игре образует некоторое множество точек. ограниченных некоторой линией (см. рисунок). На рисунке можно указать точку с координатами выигрышей игроков. которые они могут гарантировать себе. не прибегая к договоренностям (T_1. T_2). Такая точка называется точкой угрозы.

На множестве выигрышей можно найти множество Парето-оптимальных решений. Парето-оптимальные точки. безусловно. лучше всех других точек множества выигрышей. так как они являются самыми правыми на горизонтали и самыми левыми на вертикали. Очевидно. что Парето-оптимальные точки - это северно-восточная граница множества выигрышей.

Точки Парето-оптимального множества. находящиеся одновременно выше и правее точки угрозы Т. образуют переговорное множество. Очевидно. что игрокам выгодно договариваться. если их выигрыш будет лучше. чем тот. который получается в точке *T*. На переговорном множестве выделяется

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

3.1 Практическое занятие №1,2,3 (6 часов)

Тема: «Линейное программирование. Алгоритм симплекс-метода»

3.1.1 Задание для работы:

1. Получение исходного варианта и исследование его на допустимость
2. Получение допустимого варианта и исследование его на оптимальность
3. Получение оптимального варианта.

3.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Получение исходного варианта и исследование его на допустимость

Среди универсальных методов решения задач линейного программирования наиболее распространен *симплексный метод* (или *симплекс-метод),* разработанный американским ученым Дж. Данцигом. Суть этого метода заключается в том, что вначале получают допустимый вариант, удовлетворяющий всем ограничениям, но необязательно оптимальный (так называемое *начальное опорное решение)*.Оптимальность достигается последовательным улучшением этого решения за определенное число этапов (итераций). Нахождение начального опорного решения и переход к следующему опорному решению проводятся на основе применения метода Жордана-Гаусса (мы будем работать с его модифицированным вариантом) для системы линейных уравнений в канонической форме, в которой должна быть предварительно записана исходная задача линейного программирования. Направление перехода от одного опорного решения к другому выбирается на основе критерия оптимальности (целевой функции) исходной задачи.

Весь путь решения задачи симплекс-методом условно можно разбить на три этапа.

I *этап.* Нахождение исходного варианта и исследование его на допустимость, т.е. получение начального опорного решения.

Допустимымвариантом решения задачи будем считать такие значения x_j, при которых выполняются все требования системы ограничений (все неравенства верны и непротиворечивы).

Если исходный вариант допустим, то опорное решение найдено и переходим на второй этап. Иначе, осуществляем перебор вариантов решения задачи до получения допустимого (если такое возможно. Если нет, то задача решения не имеет).

II *этап.* Исследования допустимого варианта на оптимальность.

Оптимальный вариант – это такое значение переменной x_jпри котором будут выполняться не только требования системы ограничений, но и требования целевой функции.

Если допустимый вариант окажется оптимальным, то задача решена, иначе переходим на третий этап.

III *этап.* Перебор вариантов решения задачи до получения оптимального варианта (если такое возможно. Если нет, то задача не имеет оптимального решения).

Сам симплекс-метод выбирать варианты не умеет, он только показывает направление перебора вариантов (в нашем случае позволяет осуществить выбор разрешающего элемента). Для расчёта же, в качестве вычислительного аппарата, привлекаются другие методы. Мы будем использовать метод модифицированных Жордановых исключений (МЖИ). Так как данный метод – это метод решения систем линейных уравнений, а модель представляет собой систему линейных неравенств, то модель предварительно должна быть подготовлена.

Суть подготовки заключается в том, чтобы перейти от системы неравенств к системе уравнений в канонической форме. Для этого в каждое ограничение-неравенство вводится дополнительная переменнаяy_i, как разность между большей и меньшей частями неравенства. Очевидно, что значение y_i не может быть отрицательным.

Подготовленная модель основной задачи линейного программирования будет выглядеть следующим образом:

IV. $Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\to\max$.

V. $y_1=-a_{11}x_1-a_{12}x_2-\ldots-a_{1n}x_n+b_1$;

$y_2=-a_{21}x_1-a_{22}x_2-\ldots-a_{2n}x_n+b_2$;

....

$y_m=-a_{m1}x_1-a_{m2}x_2-\ldots-a_{mn}x_n+b_m$.

VI. $x_1\geq 0$, $x_2\geq 0$, …, $x_n\geq 0$.

Из этого вида данные заносятся в табличную форму для осуществления решения.

Алгоритм симплекс-метода

I*этап*: получение начального опорного решения.

Для того, чтобы получить исходный вариант достаточно записать подготовленную модель в табличной форме.

Таблица 1 – Симплекс-таблица исходного варианта

свободные переменные

базисные переменные

	$-x_1$	$-x_2$	…	$-x_n$	Свободные члены
y_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
y_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
Z	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_n$	0

Из каждой таблицы можно выписать один вариант решения задачи. Для этого надо помнить, что свободные переменные (верхняя строка таблицы) приравниваются к нулю, а базисные (крайний левый столбец) к соответствующим свободным членам.

Исходный вариант (по таблице 1):

1) основные переменные (x_j): $x_1=0$, $x_2=0$,…, $x_n=0$;
2) дополнительные переменные (y_i): $y_1=b_1$, $y_2=b_2$,…, $y_m=b_m$;
3) $Z=0$.

Исследуем полученный вариант на допустимость.

Теорема о допустимости: в таблице будет находиться допустимый вариант решения задачи, если среди свободных членов не будет отрицательных (элемент на пересечение столбца свободных членов и строки Z при анализе во внимание не принимается).

Доказательство: свободные члены являются значениями базисных переменных, если среди базисных переменных есть x_j, то они не могут быть отрицательными в силу условия неотрицательности ($x_j\geq 0$). Если в базисе y_i, то оно не должно быть отрицательным так как y_i вводилась как разница между большей и меньшей частью неравенства.

Если вариант допустим, то перейдем на второй этап и исследуем его на оптимальность. Если нет, то попытаемся получить допустимый вариант, выбрав разрешающий элемент по следующему правилу:

- выбор разрешающей строки: среди отрицательных свободных членов (кроме строки Z), выбрать больший по абсолютной величине. Пусть это b_2;

- выбор разрешающего столбца: взять симплексные отношения, поделив свободный член разрешающей строки на каждый её коэффициент:

$$\frac{b_2}{a_{21}}, \frac{b_2}{a_{22}}, \ldots, \frac{b_2}{a_{2n}}.$$

Наименьшее положительное из симплексных отношений укажет на столбец.

Выбирая описанным способом разрешающие элементы, делаем шаги до получения допустимого варианта (если такое возможно).

Предположим, что на каком-то шаге мы получим таблицу с допустимым вариантом, т.е. найдем опорное решение.

2. Получение допустимого варианта и исследование его на оптимальность

II *этап*: исследование допустимого варианта на оптимальность.

Теорема об оптимальности: в таблице будет находиться оптимальный вариант, если среди коэффициентов строки Z не будет отрицательных при $Z\to$max и не будет положительных при$Z\to$min(элемент на пересечение столбца свободных членов и строки Z при анализе во внимание не принимается).

Если вариант окажется оптимальным, то задача решена, если нет, то переходим на третий этап.

3. Получение оптимального варианта.

Предположим, что наш допустимый вариант не оптимален.

III *этап:* нахождение оптимального варианта.

Попытаемся получить оптимальный вариант, выбрав разрешающий элемент по следующему правилу:

при $Z\to$max:

- разрешающий столбец: среди отрицательных коэффициентов строки Z выбрать наибольший по абсолютной величине (например, пусть это c_n);

- разрешающая строка: взять симплексные отношения, поделив свободные члены на соответствующие элементы разрешающего столбца, кроме строки Z:

$$\frac{b_1}{a_{1n}}, \frac{b_2}{a_{2n}}, \ldots, \frac{b_m}{a_{mn}}.$$

Наименьшее положительное из симплексных отношений укажет на строку;

при $Z\to$min:

- разрешающий столбец: среди положительных коэффициентов строки Z выбрать наибольший (например, пусть это c_1);

- разрешающая строка: взять симплексные отношения, поделив свободные члены на соответствующие элементы разрешающего столбца, кроме строки Z:

$$\frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_2}{a_{21}}, \ldots, \frac{b_m}{a_{m1}}.$$

Наименьшее положительное из симплексных отношений укажет на строку.

Выбирая описанным способом разрешающий элемент, делаем шаги до получения оптимального варианта (если такое возможно).

*Замечание.*Если при нахождении оптимального варианта разрешающая строка была выбрана не по наименьшему положительному симплексному отношению, то в следующей таблице будет получен недопустимый вариант.

Упражнения

Задача 1

I. Целевая функция:

$Z = 30x_1 + 35x_2 + 136x_3 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 1{,}01x_1 + 1{,}01x_2 + 9{,}45x_3 \le 136 \\ 0{,}18x_1 + 0{,}19x_2 \le 21{,}4 \\ 3{,}25x_3 \le 16{,}25 \\ x_1 \ge 100 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

Решение:

Переходим от системы неравенств к системе уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = -1{,}01x_1 - 1{,}01x_2 - 9{,}45x_3 + 136 \\ y_2 = -0{,}18x_1 - 0{,}19x_2 + 21{,}4 \\ y_3 = -3{,}25x_3 + 16{,}25 \\ y_4 = x_1 - 100 \end{cases}$$

Запишем математическую модель в табличной форме:

Таблица 1

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены
$y_1 =$	1,01	1,01	9,45	136
$y_2 =$	0,18	0,19	0	21,4
$y_3 =$	0	0	3,25	16,25
$y_4 =$	–1	0	0	–100
$Z =$	–30	–35	–136	0

Для того, чтобы вести параллельно проверку вычислений необходимо в полученную таблицу 1 добавить столбец ∑ (табл. 2)

Выберем разрешающий элемент:

Таблица 2

	$-x_1$ ↓	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены	$\sum_1$
$y_1 =$	1,01	1,01	9,45	136	146,46
$y_2 =$	0,18	0,19	0	21,4	21,59
$y_3 =$	0	0	3,25	16,25	19,5
→ $y_4 =$	–1	0	0	–100	–99
Z=	–30	–35	–136	0	–171

Сделаем первую итерацию

Таблица 3

	$-y_4$	$-x_2$	$-x_3$ ↓	Свободные члены	$\sum_1$	$\sum_2$
→ $y_1 =$	1,01	1,01	9,45	35	38,02	46,47

y_2 =	0,18	0,19	0	3,4	3,77	3,77
y_3 =	0	0	3,25	16,25	16,25	19,5
x_1=	–1	0	0	100	99	99
Z =	–30	–35	–136	3000	2935	2799

Получен допустимый, не вырожденный, но не оптимальный вариант.

Сделаем вторую итерацию
Таблица 4

	$–y_4$	$–x_2$	$–y_1$	Свободные члены	$\sum_1$	$\sum_2$
x_3 =	0,11	0,11	0,11	3,7	3,92	4,03
y_2 =	0,18	0,19	0	3,4	4,58	3,77
y_3 =	–0,35	–0,35	–0,34	4,21	3,52	3,17
x_1=	–1	0	0	100	99	99
Z =	–15,46	–20,46	14,39	3503,7	3502,63	3482,17

Получен допустимый, не вырожденный, но не оптимальный вариант.

Сделаем третью итерацию
Таблица 5

	$–y_4$	$–y_2$	$–y_1$	Свободны е члены	$\sum_1$	$\sum_2$
x_3 =	0,01	–0,58	0,11	1,73		1,27
x_2 =	0,95	5,26	0	17,89		24,1
y_3 =	–0,02	1,84	–0,34	10,47		11,96
x_1=	–1	0	0	100		99
Z =	3,92	107,68	14,39	3869,83		3995,82

Получен допустимый вариант, являющийся оптимальным.
Z = 3869,83

$$\begin{cases} x_1 = 100 \\ x_2 = 17{,}89 \\ x_3 = 1{,}73 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 10{,}47 \\ y_4 = 0 \end{cases}$$

Рассмотренная нами задача в исходном виде была сформулирована следующим образом:

Продукцией городского молочного завода являются молоко, кефир и сметана. На производство 1 т молока, кефира и сметаны требуется соответственно 1010, 1010 и 9450 кг молока. При этом затраты рабочего времени при разливе 1 т молока и кефира составляют 0,18 и 0,19 машино-ч. На расфасовке 1 т сметаны заняты специальные автоматы в течение 3,25 ч. Всего для производства цельномолочной продукции завод может использовать 136000 кг молока. Основное оборудование может быть занято в течение 21,4 машино-ч, а автоматы по расфасовке сметаны - в течение 16,25 ч. Прибыль от реализации 1 т молока, кефира и сметаны соответственно равна 30, 22 и 136 руб. Завод должен ежедневно производить не менее 100 т молока.

Составьте математическую модель задачи, позволяющую определить объемы выпуска молочной продукции, позволяющие получить наибольшую прибыль.

В результате полученного решения можно сделать вывод, что максимальная прибыль возможна в размере 3869,83 руб. Оптимальный объем выпуска молока – 100 т, кефира – 17,89 т, сметаны – 1,73 т.

3.1.3 Результаты и выводы:

Суть этого метода заключается в том, что вначале получают допустимый вариант, удовлетворяющий всем ограничениям, но необязательно оптимальный (так называемое *начальное опорное решение)*.Оптимальность достигается последовательным улучшением этого решения за определенное число этапов (итераций). Нахождение начального опорного решения и переход к следующему опорному решению проводятся на основе применения метода Жордана-Гаусса (мы будем работать с его модифицированным вариантом) для системы линейных уравнений в канонической форме, в которой должна быть предварительно записана исходная задача линейного программирования. Направление перехода от одного опорного решения к другому выбирается на основе критерия оптимальности (целевой функции) исходной задачи.

Весь путь решения задачи симплекс-методом условно можно разбить на три этапа.

I *этап.* Нахождение исходного варианта и исследование его на допустимость, т.е. получение начального опорного решения.

Допустимымвариантом решения задачи будем считать такие значения x_j, при которых выполняются все требования системы ограничений (все неравенства верны и непротиворечивы).

Если исходный вариант допустим, то опорное решение найдено и переходим на второй этап. Иначе, осуществляем перебор вариантов решения задачи до получения допустимого (если такое возможно. Если нет, то задача решения не имеет).

II *этап.* Исследования допустимого варианта на оптимальность.

Оптимальный вариант – это такое значение переменной x_jпри котором будут выполняться не только требования системы ограничений, но и требования целевой функции.

Если допустимый вариант окажется оптимальным, то задача решена, иначе переходим на третий этап.

III *этап.* Перебор вариантов решения задачи до получения оптимального варианта (если такое возможно. Если нет, то задача не имеет оптимального решения).

Сам симплекс-метод выбирать варианты не умеет, он только показывает направление перебора вариантов (в нашем случае позволяет осуществить выбор разрешающего элемента). Для расчёта же, в качестве вычислительного аппарата, привлекаются другие методы.

3.2 Практическое занятие 4,5 (4 часа)

Тема: «Линейное программирование. Особые случаи в симплекс-методе»

3.2.1 Задание для работы:

1. Случай вырожденности
2. Неограниченность функционала
3. Неразрешимость модели
4. Решение задачи линейного программирования в MSExcel

3.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Случай вырожденности

В симплекс-таблице будет находиться вырожденный вариант, если среди свободных членов (кроме строки Z), появится ноль.

Если вырожденный вариант не допустим, то разрешающий элемент находится обычным образом. Если вырожденный вариант будет допустимым, но не оптимальным, то необходимо после выбора разрешающего столбца посмотреть на коэффициент, находящийся на пересечении вырожденной строки и разрешающего столбца. Если этот коэффициент с положительным знаком, то мы берём его разрешающим элементом (в этом случае в следующей таблице мы получим те же значения свободных членов при различном наборе базисных переменных), если нет, то вырожденная строка не берётся в качестве разрешающей. Тогда разрешающая строка выбирается по общему правилу, но среди других строк таблицы.

Рассмотрим подробно решение задач, имеющих случай вырожденности на примере задачи 9.

Задача 9

I. Целевая функция:

$Z = -x_1 + 10x_2 + 4x_3 \max \longrightarrow$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 \le 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ 2x_1 \ge x_2 + x_3 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

Решение:

Переходим от системы неравенств к системе уравнений:

$y_1 = -x_1 - x_3 + 1$

$y_2 = -2x_1 - x_2 - x_3 + 2$

$y_3 = 2x_1 - x_2 - x_3$

Запишем математическую модель в табличной форме. Выберем разрешающий элемент.

Таблица 10

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены	Σ_1
y_1	1	0	1	1	3
y_2	2	1	1	2	5
y_3	–2	1	1	0	0
Z	1	–10	–4	0	–3

Вариант допустимый. Исследуем данный вариант на вырожденность. В данной симплекс-таблице находится вырожденный вариант, так как среди свободных членов (кроме строки Z), появился ноль. Выбираем разрешающий элемент.

Сделаем первую итерацию

Таблица 11

	$-x_1$	$-y_3$	$-x_3$	Свободные члены	Σ_1	Σ_2
y_1	1	0	1	1	2	3
y_2	4	–1	0	2	2	5
x_2	–2	1	1	0	2	0
Z	–19	10	6	0	16	–3

Сделаем вторую итерацию

Таблица 12

	$-y_2$	$-y_3$	$-x_3$	Свободные члены	Σ_1	Σ_2
y_1	–1/4	1/4	1	1/2		3/2
x_1	1/4	–1/4	0	1/2		1/2
x_2	1/2	1/2	1	1		3
Z	19/4	21/4	6	19/2		51/2

Получен допустимый вариант, являющийся оптимальным.
$Z = 19/2$

$$\begin{cases} x_1 = 1/2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 1/2 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

Далее рассмотрим задачи имеющих случай вырожденности.

Задача 10

I. Целевая функция:

$Z = 5x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 4x_4 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2{,}5x_3 + x_4 \leq 75 \\ 0{,}5x_1 + x_2 + 0{,}2x_3 + 0{,}1x_4 \leq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 3x_3 + 4x_4 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Задача 11

I. Целевая функция:

$Z = x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 15 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 20 \\ 4x_1 + 4x_2 \geq 2x_3 + 3x_4 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

2. Неограниченность функционала

В этом случае в симплекс-таблице находится допустимый, но не оптимальный вариант и в разрешающем столбце нет ни одного положительного элемента. С экономической точки зрения речь идее о неограниченности какого-либо вида ресурса. Задача не имеет оптимального решения.

Рассмотрим подробно решение задач, имеющих случай неограниченности функционала (функция не имеет экстремального значения) на примере задачи 15.

Задача 15

I. Целевая функция:

$Z = -2x_1 - x_3 \longrightarrow \min$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 \le 5 \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 \le 2 \\ 6x_2 - 8x_3 \le 8 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

Решение:

Переходим от системы неравенств к системе уравнений:

$y_1 = x_1 + x_2 + x_3 + 5$
$y_2 = 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 2$
$y_3 = -6x_2 + 8x_3 + 8$

Запишем математическую модель в табличной форме. Выберем разрешающий элемент:

Таблица 14

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены	Σ_1
y_1	–1	–1	–1	5	
y_2	–3	1	–4	2	
y_3	0	6	–8	8	
Z	2	0	1	0	

Исследуем полученный вариант на допустимость. В таблице находиться допустимый вариант решения задачи, потому что среди свободных членов нет отрицательных элементов.

Исследуем полученный вариант на оптимальность. В таблице находиться неоптимальный вариант, так как коэффициенты строки Zположительные ($Z \rightarrow \min$) (элемент на пересечение столбца свободных членов и строки Z при анализе во внимание не принимается). Выбираем разрешающий элемент.

При выборе разрешающего элемента получается, что среди симплексных отношений нет наименьшего положительного. Следовательно в данной задаче невозможно найти оптимальный вариант. С экономической точки зрения речь о идее неограниченности какого-либо вида ресурса. Задача не имеет оптимального решения.

Далее рассмотрим задачи имеющих случай неограниченности функционала (функция не имеет экстремального значения).

Задача 16

I. Целевая функция:

$Z = 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 \quad \text{max} \rightarrow$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 25 \\ x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_2 - x_3 \leq 10 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Задача 17

I. Целевая функция:

$Z = 8x_1 + x_2 + 10x_3 \quad \text{max} \rightarrow$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 15 \\ 3x_1 + x_2 \leq 20 \\ 6x_2 - 11x_3 \leq 7 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

3. Неразрешимость модели

В этом случае невозможно найти допустимый вариант (в разрешающей строке симплекс-таблицы нет ни одного отрицательного элемента). С экономической точки зрения это значит, что ограничения модели являются взаимоисключающими, противоречащими друг другу требованиями. Задача не имеет решения.

Рассмотрим подробно решение задач, имеющих случай неразрешимости модели (система неравенств не имеет решения) на примере задачи 12.

Задача 12

I. Целевая функция:

$Z = x_1 + 0{,}2x_2 + x_3 \quad \longrightarrow \text{min}$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 2 \\ -x_1 - 2x_2 \geq 5 \\ 2x_2 + 3x_3 \leq 1 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Решение:

Переходим от системы неравенств к системе уравнений:

$y_1 = -0{,}1x_1 - 0{,}2x_2 + 2$

$y_2 = -x_1 - 2x_2 - 5$

$y_3 = -2x_1 - 3x_3 + 1$

Запишем математическую модель в табличной форме. Выберем разрешающий элемент:

Таблица 13

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены	Σ_1
y_1	0,1	0,2	0	2	
→ y_2	1	2	0	–5	
y_3	2	0	3	1	
Z	–1	–0,2	–1	0	

Исследуем полученный вариант на допустимость. В таблице находиться недопустимый вариант решения задачи, потому что среди свободных членов имеется отрицательный элемент. При выборе разрешающего элемента получается, что среди симплексных отношений нет наименьшего положительного. Следовательно, в данной задаче невозможно найти допустимый вариант. С экономической точки зрения это значит, что ограничения модели являются взаимоисключающими, противоречащими друг другу требованиями. Задача не имеет решения.

Далее рассмотрим задачи имеющих случай неразрешимости модели (система неравенств не имеет решения).

Задача 13

I. Целевая функция:

$Z = 12x_1 + 14x_2 + 10x_3 + 8x_4 \longrightarrow \min$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \le -10 \\ x_1 + 3x_2 + 0{,}5x_3 \le 5 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_4 \le 3 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

Задача 14

I. Целевая функция:

$Z = 25x_1 + 20x_2 + 30x_3 \longrightarrow \max$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} -10x_1 - 8x_2 - 15x_3 \ge 100 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 20 \\ 0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}25x_3 \le 5 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

4. Решение задачи линейного программирования в MSExcel

Для производства продукции типа $П_1$ и $П_2$ предприятие использует два вида сырья: $С_1$ и $С_2$. Данные об условиях производства приведены в таблице.

Сырье	Расход сырья на единицу продукции, кг/ед.		Количество сырья, кг
	$П_1$	$П_2$	

C_1	1	3	300
C_2	1	1	150
Прибыль на единицу продукции, тыс. руб.	2	3	-

Составить план производства по критерию максимум прибыли.

Решение

1. Состав переменных

x_1 – количество (единиц) продукции $П_1$;

x_2 – количество (единиц) продукции $П_2$.

2. Числовая модель

I. Целевая функция. Критерий оптимальности получение максимума прибыли от производственной деятельности. Следовательно,

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

II. Основные ограничения

В таблице представлены данные по расходу основных производственных ресурсов (сырье C_1 и C_2) на производство продукции $П_1$ и $П_2$. Используя данные таблицы, составим ограничения:

$1x_1 + 3x_2 \le 300$

$1x_1 + 1x_2 \le 150$

III. Условие неотрицательности переменных

$x_1 \ge 0$

$x_2 \ge 0$

3. Общий вид экономико-математической модели

I. $Z = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max$

II. $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2$

III. $x_j \ge 0$, (j=1, 2)

4. Структурная форма экономико-математической модели

I. $$Z = \sum_{j=1}^{2} c_j x_j \to \max$$

II. $$\sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,2$$

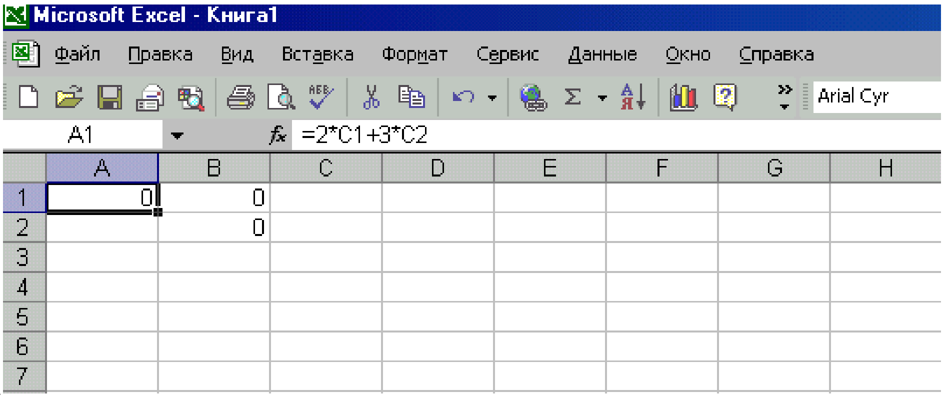
III. $$x_j \ge 0, \qquad j = 1,2$$

5. Решение задачи с использованием ***табличного редактора MSExcel***

Чтобы решить задачу, используя табличный редактор MSExcel необходимо:

- Открыть табличный редактор (Пуск $\to$ Программы $\to$ MSExcel);
- Запишем числовую модель задачи на рабочий лист (рисунок 1.1). Для этого необходимо выбрать ячейки в которых будут находиться переменные. Допустим $x_1 \to$C1 $x_2 \to$C2 (выбор ячеек произволен).

В ячейке А1 запишем целевую функцию $Z = 2x_1 + 3x_2$: А1:=2*С1+3*С2
Примечание:запись формул всегда начинается со знака «=».
В ячейку В1 запишем левую часть 1-го ограничения ($1x_1 + 3x_2$)
В1:=С1+3*С2
В ячейку В2 запишем левую часть 2-го ограничения ($1x_1 + 1x_2$)



В2:=С1+С2

Рисунок 1.1 – Запись числовой модели на рабочем листе MSExcel

- После как числовая модель записана, необходимо установить курсор в ячейку А1 (в ней расположена целевая функция). Выбираем вкладку «Сервис» → «Поиск решения…», при этом откроется диалоговое окно функции «Поиск решения».

- В открывшемся окне необходимо установить целевую ячейку, а поскольку у вас курсор стоял на ячейке А1, то значение целевой ячейки будет правильным. В противном случае установите в ручную адрес целевой ячейки (в данном случае программа использует абсолютные адреса т.е. ячейка А1 имеет абсолютный адрес $А$1) (рисунок 1.2).

- Установите маркер в положение, соответствующие критерию оптимальности: максимальному или минимальному значению.

- В окне «Изменяя ячейки» нужно указать адреса ячеек соответствующие переменным. Для этого необходимо выделить диапазон ячейки с С1 по С2 (рисунок 1.2).

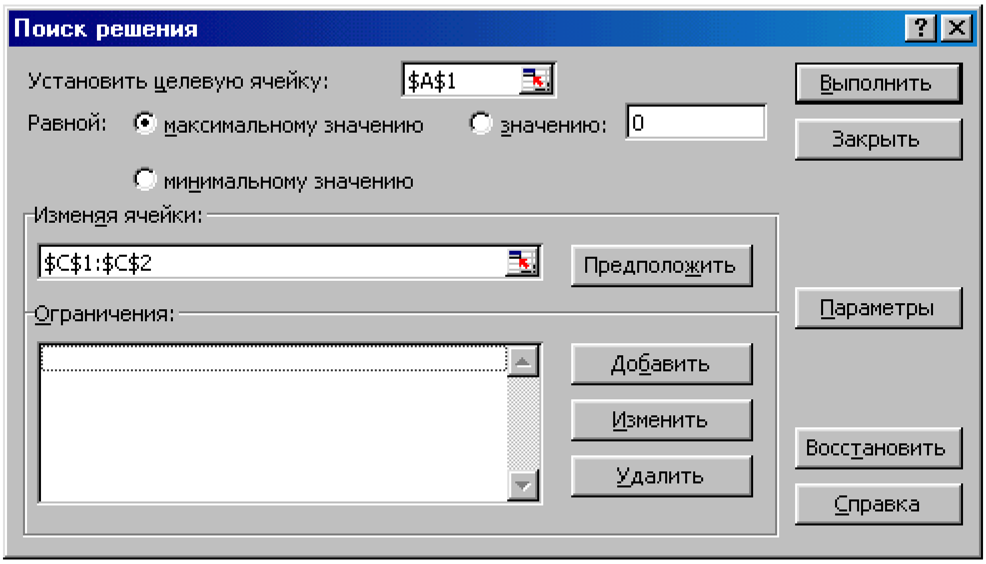


Рисунок 1.2 – Работа в диалоговом окне «Поиск решения»

- В окне «Ограничения» активировать кнопку «Добавить». Откроется окно «Добавить ограничения» (рисунок 1.3). Вводим первое ограничение: в окне «Ссылка на ячейку» указывают адрес ячейки, где находится левая часть 1-го ограничения - $B$1, затем выбирают знак ограничения « ≤ » и значение – 300.

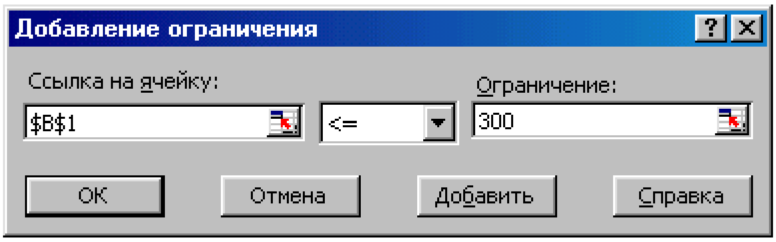


Рисунок 1.3 – Диалоговое окно «Добавление ограничения»

- Активируем клавишу «добавить» и аналогично вводим второе ограничение. Затем вводим условие неорицательности. Для этого в окне «Ссылка на ячейку» указываем диапазон ячеек, в которых находятся переменные ($C$1:$C$2). После добавления всех ограничений выбираем «ОК». Программа возвращается в диалоговое окно «Поиск решения». Ввод числовой модели закончен (рисунок 1.4).

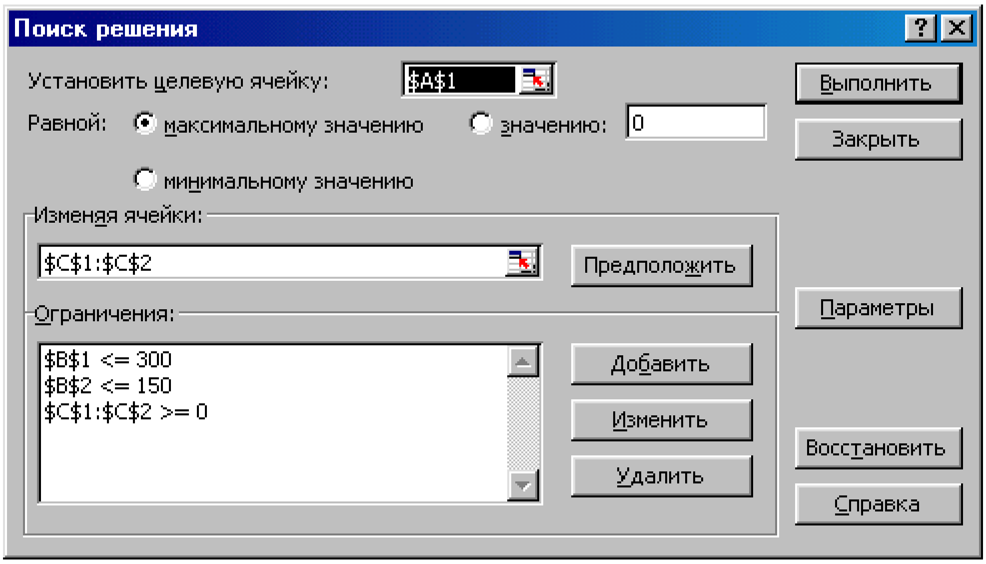


Рисунок 1.4 – Завершение ввода числовой модели в диалоговом окне «Поиск решения»

- Выбираем команду «Выполнить». На экране появится окно «Результаты поиска решения» (рисунок 1.5). Если модель составлена правильно и имеет решение, в открывшемся окне будет сообщение: «Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены». В окне «Тип отчета» выберите «Результаты» и нажмите «ОК».

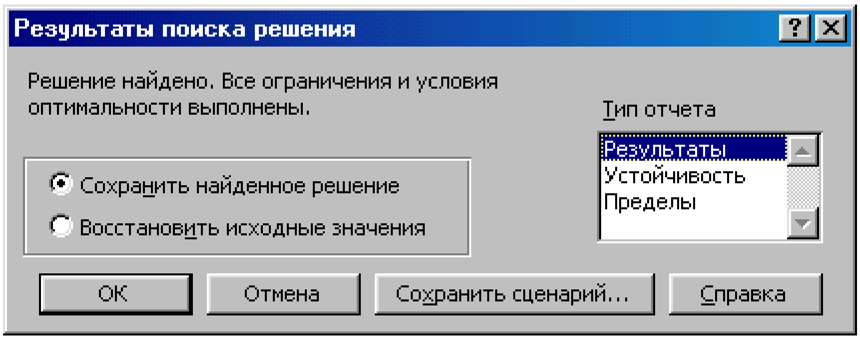
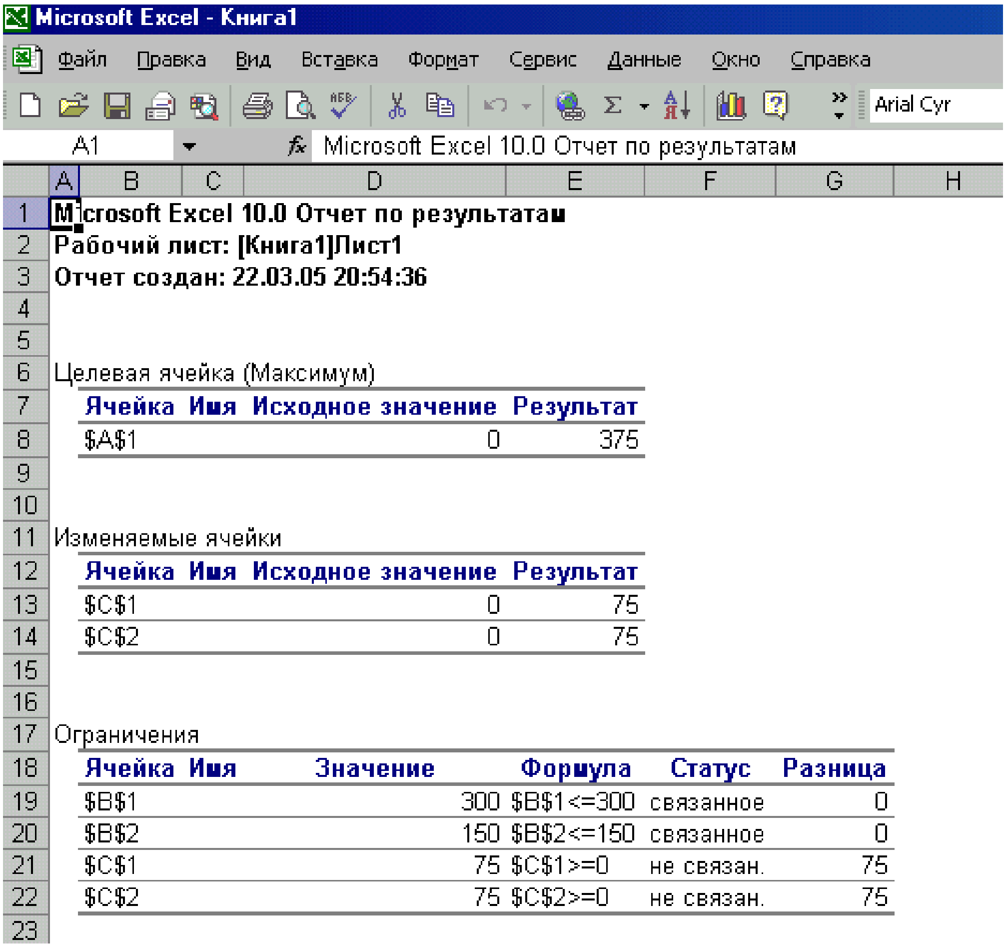


Рисунок 1.5 – Окно «Результаты поиска решения»

Результат решения задачи представлен в «Отчете по результатам» (рисунок 1.6). Решение задачи окончено.



Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$A$1		0	375

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$C$1		0	75
$C$2		0	75

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$B$1		300	$B$1<=300	связанное	0
$B$2		150	$B$2<=150	связанное	0
$C$1		75	$C$1>=0	не связан.	75
$C$2		75	$C$2>=0	не связан.	75

Рисунок 1.6 – Отчет по результатам

- Решение задачи окончено, результаты можно распечатать.

Примечание

Если поиск не может найти оптимальное решение, в диалоговом окне **Результаты поиска решения** выводится одно из следующих сообщений.

Поиск не может улучшить текущее решение. Все ограничения выполнены.

В процессе поиска решения нельзя найти такой набор значений влияющих ячеек, который был бы лучше текущего решения. Приблизительное решение найдено, но либо дальнейшее уточнение невозможно, либо погрешность, заданная в диалоговом окне **Параметры поиска решения** слишком высока. Измените погрешность на меньшее число и запустите процедуру поиска решения снова.

Поиск остановлен (истекло заданное на поиск время).

Время, отпущенное на решение задачи, исчерпано, но достичь удовлетворительного решения не удалось. Чтобы при следующем запуске процедуры поиска решения не повторять выполненные вычисления, установите переключатель **Сохранить найденное решение** или **Сохранить сценарий**.

Поиск остановлен (достигнуто максимальное число итераций).

Произведено разрешенное число итераций, но достичь удовлетворительного решения не удалось. Увеличение числа итераций может помочь, однако следует рассмотреть результаты, чтобы понять причины остановки. Чтобы при следующем запуске процедуры поиска решения не повторять выполненные вычисления, установите переключатель **Сохранить найденное решение** или нажмите кнопку **Сохранить сценарий**.

Значения целевой ячейки не сходятся.

Значение целевой ячейки неограниченно увеличивается (или уменьшается), даже если все ограничения соблюдены. Возможно следует в задаче снять одно ограничение или сразу несколько. Изучите процесс расхождения решения, проверьте ограничения и запустите задачу снова.

Поиск не может найти подходящего решения.

В процессе поиска решения нельзя сделать итерацию, которая удовлетворяла бы всем ограничениям при заданной точности. Вероятно, ограничения противоречивы. Исследуйте лист на предмет возможных ошибок в формулах ограничений или в выборе ограничений.

Поиск остановлен по требованию пользователя.

Нажата кнопка **Стоп** в диалоговом окне **Текущее состояние поиска решения** после прерывания поиска решения в процессе выполнения итераций.

Условия для линейной модели не удовлетворяются.

Установлен флажок **Линейная модель**, однако итоговый пересчет порождает такие значения, которые не согласуются с линейной моделью. Это означает, что решение недействительно для данных формул листа. Чтобы проверить линейность задачи, установите флажок **Автоматическое масштабирование** и повторно запустите задачу. Если это сообщение опять появится на экране, снимите флажок **Линейная модель** и снова запустите задачу.

При поиске решения обнаружено ошибочное значение в целевой ячейке или в ячейке ограничения.

При пересчете значений ячеек обнаружена ошибка в одной формуле или в нескольких сразу. Найдите целевую ячейку или ячейку ограничения, порождающие ошибку, и измените их формулы так, чтобы они возвращали подходящее числовое значение.

Набрано неверное имя или формула в окне **Добавить ограничение** или в окне **Изменить ограничение**, либо в поле **Ограничение** было задано целое или двоичное ограничение. Чтобы ограничить значения ячейки множеством целых чиселвыберите оператор **целого** ограничения в списке условных операторов. Чтобы установить двоичное ограничение, выберите оператор для **двоичного** ограничения.

Интерпретация результатов задачи

Полученные значения в ячейках, содержащих формулы целевой функции или ограничений, являются результатом расчета целевой функции и соответствующих ограничений.

Результат, полученный в ячейке A1 означает прибыль, полученную от производства продукции.

Ячейки C1, C2 указывают нам на количество произведенной продукции.

В ячейке B1 записано 1-ое ограничение, характеризующее расход сырья C_1 на производство всех видов продукции. При этом получился результат равный 300, разница равна 0, что указывает на полный расход сырья данного вида.

В ячейке B2 записано второе ограничение, характеризующее расход сырья C_2 на производство продукции $П_1$ и $П_2$. Результат равен 150, разница равна 0, что полностью соответствует заданному ограничению (т.е. сырье C_2 израсходовано полностью).

Значение ячеек C1, C2 превышают 0, т.е. условие неотрицательности переменных выполнено.

Ответ

Максимальная прибыль возможна в размере 375 единиц.

Объем выпуска продукции: $П_1$ - 75 штук, $П_2$ - 75 штук.

Сырье C1 иC2 израсходовано полностью, условие неотрицательности выполнено.

3.2.3 Результаты и выводы:

В симплекс-таблице будет находиться вырожденный вариант, если среди свободных членов (кроме строки *Z*), появится ноль.

Неограниченность функционала. В этом случае в симплекс-таблице находится допустимый, но не оптимальный вариант и в разрешающем столбце нет ни одного положительного элемента. С экономической точки зрения речь идее о неограниченности какого-либо вида ресурса. Задача не имеет оптимального решения.

Неразрешимость модели. В этом случае невозможно найти допустимый вариант (в разрешающей строке симплекс-таблицы нет ни одного отрицательного элемента). С экономической точки зрения это значит, что ограничения модели являются взаимоисключающими, противоречащими друг другу требованиями. Задача не имеет решения.

3.3 Практическое занятие 6,7,8 (6 часов)

Тема: «Транспортная задача»

3.3.1 Задание для работы:

1. Подготовка и модель транспортной задачи.
2. Алгоритм метода потенциалов.
3. Приближенные распределительные методы.
4. Решение распределительных задач методом потенциалов (закрытого типа; открытого типа; случай вырожденности; решение задач приближенными методами).
5. Решение задачи линейного программирования в MSExcel

2.3.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Подготовка и модель транспортной задачи. Среди проблем, для исследования которых успешно применяется линейное программирование, важное значение имеет так называемая транспортная задача.

Общая постановка этой задачи применительно к экономической проблеме экономии издержек производства формулируется так: имеется несколько пунктов назначения (предприятий, потребителей); требуется перевезти некоторое количество однородного товара из различных пунктов отправления в несколько пунктов назначения; каждый из поставщиков может выделить только определенное количество единиц товара и каждому потребителю требуется также определенное количество единиц этого товара; известны расстояния или стоимости перевозки единицы товара от каждого поставщика к каждому потребителю. Задача состоит в том, чтобы найти такие маршруты перевозок, из всех возможных связей поставщиков и потребителей, при которых общие транспортные расходы были бы минимальными (транспортная задача также может быть сформулирована с целевой функцией, стремящейся к максимуму).

Таким образом, пусть имеем m пунктов, в которых находится известное количество однородных грузов (поставщики). Порядковый номер поставщика обозначается i, то есть i=1,2,…,m. Наличие грузов у поставщика b_i. Имеется n пунктов испытывающих потребность в этих грузах (потребителей). Порядковый номер потребителя j=1,2,…,n. Потребность в грузах каждого потребителя a_j. Известна «цена» перевозки единицы груза от каждого поставщика к каждому потребителю (c_{ij}). Необходимо составить план перевозки грузов от поставщиков к потребителю, т.е. определить: какое количество груза необходимо перевезти от каждого поставщика к каждому потребителю (x_{ij}), причем значения x_{ij} должны отвечать следующим требованиям:

4) общие затраты на перевозку грузов должны быть минимальными;
5) все грузы от поставщиков должны быть вывезены;
6) потребности потребителей в грузах должны быть удовлетворены.

Требования 2-3 одновременно могут быть выполнены только в том случае, когда сумма грузов у всех поставщиков равна суммарной потребности всех потребителей, то есть:

$$\sum_{i=1}^{m} b_i = \sum_{j=1}^{n} a_j$$ – условие разрешимости задачи.

Если условие разрешимости выполняется, то задача будет являться задачей, так называемого закрытого типа (сбалансированной). Иначе – задача открытого типа (несбалансированная). Для того чтобы решить задачу открытого типа, надо её «закрыть» (то есть привести к закрытому типу). Для этого вводится или фиктивный поставщик или фиктивный потребитель.

В случае, когда *суммарные запасы превышают суммарные потребности*, необходим дополнительный фиктивный пункт потребления, который будет формально потреблять существующий излишек запасов, то есть:

$$a_{ф} = \sum_{i=1}^{m} b_i - \sum_{j=1}^{n} a_j .$$

Если *суммарные потребности превышают суммарные запасы*, то необходим дополнительный *фиктивный* пункт отправления, формально восполняющий существующий недостаток продукции в пунктах отправления:

$$b_{ф} = \sum_{j=1}^{n} a_j - \sum_{i=1}^{m} b_i .$$

Введение фиктивного потребителя или отправителя повлечет необходимость формального задания *фиктивных*тарифов $c_{ij}^{ф}$ (реально не существующих) для фиктивных перевозок. Поскольку нас интересует определение наиболее выгодных *реальных* перевозок, то необходимо предусмотреть, чтобы при решении задачи (при нахождении опорных планов) *фиктивные* перевозки не рассматривались до тех пор, пока не будут определены все реальные перевозки. Для этого надо фиктивные перевозки сделать невыгодными, чтобы при поиске решения задачи их рассматривали в самую последнюю очередь. Таким образом, если целевая функция стремится к min, то затраты берутся во всех фиктивных клетках таблицы произвольные, одинаковые и на порядок выше настоящих цен, т.е. величина фиктивных тарифов должна превышать максимальный из реальных тарифов, используемых в модели: $c_{ij}^{ф} > \max c_{ij}$ $\left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right)$. Если целевая функция стремится кmax, то $c_{ij}^{ф}$ берётся равная нулю.

Развёрнутая форма записи модели транспортной задачи.

Для удобства, прежде чем писать модель, запишем в виде матрицы цен все значения c_{ij}. А также в виде матрицы грузоперевозок переменные x_{ij}.

Матрица цен:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11}\ c_{12}\ \dots c_{1n} \\ c_{21}\ c_{22} \dots c_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{m1}\ c_{m2} \dots c_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица $C = (c_{ij})_{m*n}$называется также матрицей тарифов (издержек или транспортных расходов).

Матрица грузоперевозок:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11}\ x_{12}\ \dots x_{1n} \\ x_{21}\ x_{22} \dots x_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{m1}\ x_{m2} \dots x_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица $X = (x_{ij})_{m*n}$ еще называется планом транспортной задачи.

Модель транспортной задачи будет выглядеть следующим образом.

I. Целевая функция описывает затраты на перевозку грузов:

$Z=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\ldots+c_{1n}x_{1n}+c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+\ldots+c_{2n}x_{2n}+\ldots$

$+c_{m1}x_{m1}+c_{m2}x_{m2}+\ldots+c_{mn}x_{mn}\rightarrow\min.$

II. Система ограничений описывает второе и третье требования для x_{ij} из постановки задачи.

1 группа: условие полного вывоза грузов от поставщиков (сумма грузов, вывезенных от поставщика должна быть равна наличию):

$x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}= b_1,$

$x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n}= b_2,$

……………………

$x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}= b_m;$

2 группа: условие удовлетворения потребителя (сумма грузов привезённых потребителю должна быть равна его потребности):

$x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{m1}=a_1,$

$x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{m2}=a_2,$

…………………….

$x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}= a_n.$

III. Условие неотрицательности переменных величин $x_{11}\geq0$, $x_{12}\geq0$, …, $x_{mn}\geq0$.

Структурная форма записи модели транспортной задачи.

В специализированной литературе модели даются в структурной форме.

II. $Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\rightarrow\min.$

II.

3) $\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=b_i,\ i=1,2,\ldots;m$

4) $\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=a_j,\ j=1,2,\ldots.n$

III. $x_{ij}\geq0$ ($i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$).

Табличная форма записи модели транспортной задачи.

Общепринято в таблице информацию по поставщикам располагать по строкам, по потребителю – по столбцам.

Размер таблицы: строк m+2, столбцов n+2.

Матрицы транспортных расходов и перевозок совмещают обычно в одну двойную матрицу – *матрицу планирования*.

Если в таблицу записана только исходная информация и нет значений x_{ij}, то это рабочая таблица или *макет* задачи. Если значения x_{ij} проставлены, то получаем первый вариант решения задачи. В такой форме задачи решаются.

Таблица 5 – Общий вид транспортной матрицы

потребители

поставщики

	1	2	…	n	b_i
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	b_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	b_m
a_j	a_1	a_2	…	a_n	$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{i=1}^{m} b_i$

Кроме основных условий, в транспортных задачах может встретиться ряд дополнительных, ограничивающих количественные связи между отдельными потребителями и поставщиками. Характер этих ограничений и способы решения задачи при наличии дополнительных ограничений заключаются в следующем.

1. Полное отсутствие связи между поставщиком и потребителем, то есть x_{ij}= 0. Это означает, что в данной клетке матрицы искомый объем перевозок должен быть равен нулю. В этом случае оценка переменной завышается на большую величину, обычно обозначаемую буквой M, и «попадание» груза в эту клетку нежелательно, так как целевая функция стремиться к минимуму (и занижается, если $Z\to$max).

2. Наличие частной заранее фиксированной связи между поставщиками и потребителями, то есть x_{ij}= q (искомый объем перевозок от i-го поставщика к j-му потребителю должен быть строго равен q). Тогда, до начала решения задачи от величины грузов соответствующего поставщика и потребителя вычитается величина q, затем в соответствующую клетку пересечения поставщика и потребителя записывается завышенная оценка М (при $Z\to$min и заниженная при $Z\to$max) и задача решается обычным методом.

3. $x_{ij} \geq$ q, то есть искомый объем перевозок от i-го поставщика к j-му потребителю должен быть не меньше величины q. В этом случае до начала решения от величины грузов соответствующего поставщика и потребителя вычитается величина q, затем задача решается обычным путем.

Модель транспортной задачи позволяет решать любые задачи, в которых параметры имеют одинаковые единицы измерения. Такие модели называются однопродуктовыми. К ним можно отнести задачу оптимизации использования машинно-тракторного парка в отдельные агротехнические сроки, задачу оптимального размещения посевов сельскохозяйственных культур по участкам с различным плодородием почв и т.д.

2. Алгоритм метода потенциалов.

Математическая модель транспортной задачи относится к задачам линейного программирования и может быть решена симплексным методом. Однако ввиду исключительной практической важности этой задачи и специфики ограничений (ограничения заданы в виде уравнений; каждая неизвестная входит лишь в два уравнения; коэффициенты при неизвестных – единицы) для ее решения созданы специальные алгоритмы. Самым распространенным методом решения транспортной задачи является метод потенциалов.

Решение транспортной задачи разбивается на два этапа:

3) определение начального допустимого базисного решения (первого опорного плана) – первоначальное распределение поставок. Достигается посредством распределительных методов;

4) построение последовательных итераций (шагов), улучшающих опорные планы (каждый новый план не должен увеличивать суммарные затраты при $Z \to \min$ и уменьшать при $Z \to \max$). Достигается посредством метода потенциалов.

После выполнения первого этапа шаги второго этапа проводятся до тех пор, пока не будет найдено оптимальное распределение поставок.

1-ый этап. Построение первоначального опорного плана

План составляется последовательным заполнением по одной клетке в таблице так, что каждый раз либо полностью удовлетворяется потребность одного из потребителей, либо полностью вывозится груз от некоторого поставщика. В теории доказывается, что базисное решение системы ограничений (из $m+n$ уравнений с mn переменными) в условиях транспортной задачи имеет $m+n-1$ базисных переменных (ее ранг равен $m+n-1$), поэтому, совершив $m+n-1$ указанных шагов, получим первый опорный план. Опорные планы получают несколькими методами, называемыми распределительными. Среди них можно выделить: метод северо-западного угла, метод наилучших цен и метод аппроксимации. Последние два метода относятся также к приближенным распределительным методам и будут рассмотрены в третьей части данного раздела.

Пример.

$b_1 = 1500 \quad a_1 = 800$

$b_2 = 1000 \quad a_2 = 1200$

$b_3 = 2000 \quad a_3 = 1400$

$a_4 = 1100$

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 15 & 16 \\ 17 & 15 & 14 & 13 \\ 15 & 14 & 13 & 16 \end{pmatrix}$$

Решить на минимум, заполнив рабочую таблицу методом северо-западного угла.

Таблица 6 – Заполнение рабочей таблицы методом северо-западного угла

	1	2	3	4	b_i
1	13 800	12 700	15	16	1500
2	17	15 500	14 500	13	1000
3	15	14	13 900	16 1100	2000
a_j	800	1200	1400	1100	4500

$Z_{\min}$ = 800*13 + 700*12 + 500*15 + 500*14 + 900*13 + 1100*16 = 62600.

При этом методе на каждом шаге построения первого опорного плана заполняется верхняя левая клетка («северо-западный угол») оставшейся части таблицы. При таком методе заполнение таблицы начинается с клетки (1,1) и заканчивается в клетке (m,n), то есть идет как бы по диагонали таблицы перевозок.

Методы наилучших цен и аппроксимации также можно использовать на данном этапе.

2-ой этап. Метод потенциалов. Оптимальность базисного решения.

Полученный одним из распределительных методов опорный план сначала необходимо проверить на вырожденность. Вариант будет невырожденным, если число заполненных клеток N равно сумме поставщиков и потребителей за вычетом единицы:

$$N = m + n – 1.$$

Если на каком-то этапе решения получится вырожденный план (т.е. $N<m + n – 1$), то его необходимо пополнить, проставив в недостающем числе клеток ноль. Поскольку этим дополнительным клеткам будут отвечать нулевые перевозки, то общий баланс и суммарная стоимость перевозок плана при этом не изменится. Однако проводить пополнение плана, выбирая клетки произвольно, нельзя. Необходимо учитывать условие ацикличности. План называется ациклическим, если его базисные клетки (заполненные грузом) не содержат циклов. Циклом в транспортной таблице называется несколько клеток, соединенных замкнутой ломаной линией так, что две соседние вершины ломаной расположены либо в одной строке, либо в одном столбце. Ломаная может иметь точки самопересечения, но не в клетках цикла.

Невырожденный вариант необходимо проверить на оптимальность.

*Теорема об оптимальности.*Вариант решения задачи будет оптимальным, если найдется такая система абстрактных чисел, называемых потенциалами поставщиков и потенциалами потребителей, при которой для всех клеток таблицы будет выполняться условие:

$$v_j – u_i \le c_{ij} (\text{при } Z \to \min) \text{ и } v_j – u_i \ge c_{ij} (\text{при } Z \to \max),$$

где v_j – потенциалы потребителей,

u_i– потенциалы поставщиков,

c_{ij} – цена перевозки единицы груза (условные т/км).

Причем, $v_j – u_i = c_{ij}$для занятых клеток и $v_j – u_i \le c_{ij}$ (или $v_j – u_i \ge c_{ij}$) для свободных клеток.

На основании этой теоремы исследование на оптимальность проводится в 2 этапа:

3) для каждой занятой клетки составляется уравнение $v_j – u_i = c_{ij}$ в результате чего получается система из $m+n–1$ таких уравнений. Решается эта система относительно потенциалов. Так как в данной системе число уравнений меньше числа неизвестных (т.е. система имеет бесчисленное множество решений), а нам надо найти одно любое решение, то какому-либо потенциалу можно присвоить произвольное число и относительно него рассчитать остальные значения. Для удобства расчетов чаще всего берут u_1=0;

4) для свободных клеток таблицы проверяется условие $v_j –u_i \le c_{ij}$ (или $v_j – u_i \ge c_{ij}$). Вариант будет оптимальным, если для всех свободных клеток это условие выполнится.

Для каждой клетки, в которой не выполняется условие $v_j – u_i \le c_{ij}$ (или $v_j – u_i \ge c_{ij}$), рассчитывается оценка $\alpha_{ij} = |(v_j – u_i) – c_{ij}|$.Клетка, содержащая α_{ij}, называется «плохой», а полученная оценка используется при перераспределении грузов.

То есть исследование на оптимальность не только отвечает на вопрос, оптимален вариант или нет, но еще и подсказывает, в каком направлении надо его улучшать при необходимости.

Перераспределение грузов и получение нового варианта.

Смысл перераспределения заключается в том, чтобы в самую «плохую» клетку (т.е. значение α_{ij}наибольшее) перераспределить какое-то количество груза. Перераспределение грузов должно отвечать следующим требованиям:

4) должны выполняться требования системы ограничений модели;

5) вариант решения задачи должен остаться ациклическим, т.е. не должна появиться лишняя заполненная клетка;

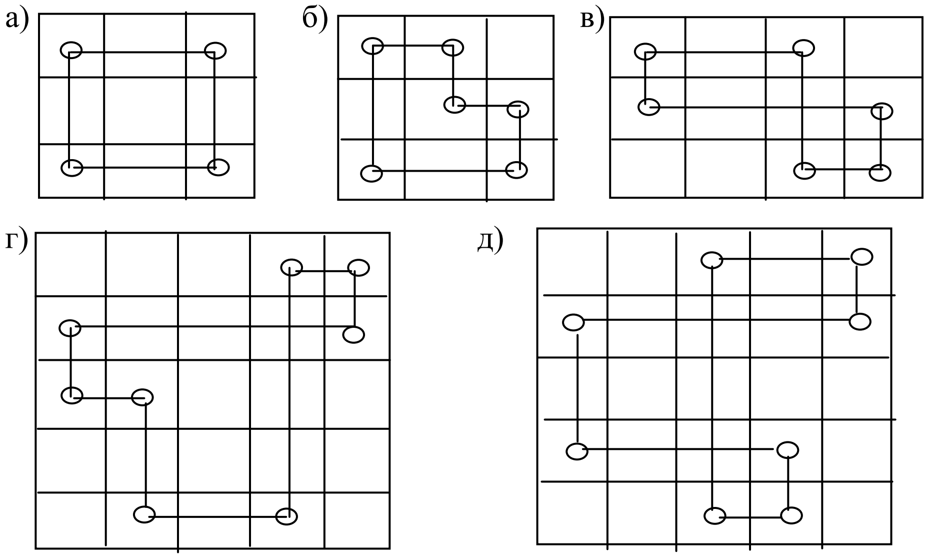
6) должно выполняться условие неотрицательности в модели, т.е. $x_{ij} \ge 0$.

С учетом данных требований, *алгоритм перераспределения* будет состоять из двух шагов:

1) наметить маршрут перераспределения груза.

Для этого в таблице строится цикл перераспределения объектов перевозок. Цикл представляет собой замкнутую ломаную линию, которая начинается в той свободной клетке, где условие оптимальности нарушается наиболее сильно (т.е. там, где α_{ij}наибольшая).

Некоторые разновидности циклов.



При построении цикла можно проходить как через занятые, так и через свободные клетки таблицы, но повороты делаются только в занятых клетках и под прямым углом;

2) определить порядок изменения объемов перевозок в вершинах цикла.

Для этого в вершинах цикла расставляют знаки «+» и «–», причем в начале цикла (клетка, где α_{ij}наибольшая) ставится знак «+», в следующей «–», в следующей «+» и т.д. Получаем чередование знаков. Направление движения при расстановке знаков от свободной клетки безразлично, так как количество вершин цикла является четной величиной. Наличие знака «+» в вершине цикла показывает, что объем перевозок необходимо увеличить, а «–» – уменьшить. Увеличение и уменьшение объемов перевозок в вершинах цикла производится на одинаковую величину, которая выбирается равной наименьшему из объемов перевозок в тех клетках, где в вершине цикла стоит знак «–». Таким образом, из отрицательной вершины контура необходимо выбрать наименьшее значение x_{ij}. В новой рабочей таблице получаем следующий вариант решения задачи: выбранное значение x_{ij} из отрицательных вершин контура предыдущей таблицы отнимаем, а к положительным – прибавляем. Заполненные клеточки, не являющиеся вершинами контура, не меняют свое значение.

В итоге получаем новый вариант. Следующие шаги поиска оптимального варианта совершаются по аналогии вышеизложенного.

Замечание: алгоритм перераспределения одинаков и при $Z \to \min$ и при $Z \to \max$.

3. Приближенные распределительные методы

К приближенным распределительным методам можно отнести метод наилучших цен и метод аппроксимации. Приближенными они называются вследствие того, что полученное при помощи этих методов распределение груза в таблице не требует дополнительной проверки на оптимальность, так как либо сразу оказывается оптимальным, либо максимально к нему приближено.

Метод наилучших цен

Метод наилучших цен позволяет получить более выгодный опорный план, чем метод северо-западного угла. При распределении груза на каждом шаге этого метода выбирается клетка с *наилучшей ценой*. Наилучшей считается минимальная цена при

Z→min, и максимальная цена при Z→max. Если существует несколько клеток с одинаковыми лучшими тарифами, то из них для определенности можно выбрать клетку, находящуюся левее и выше остальных.

Алгоритм метода наилучших цен:

1) рассматривая рабочую таблицу, найти клетку с наилучшей ценой;

2) проставить в эту клетку максимально допустимое значение x_{ij};

3) вычеркнуть свободные нерабочие клетки;

4) откорректировать клетки b_i и a_j.

На этом заканчивается один шаг (итерация) метода.

Из оставшихся свободных рабочих клеток снова выбрать клетку с наилучшей ценой и повторять до тех пор, пока полностью не будет распределен весь груз.

Таблица 7 – Заполнение рабочей таблицы методом наилучших цен

	1	2	3	4	b_i
1	13 300	12 1200	15	16	1500
2	17	15	14	13 1000	1000
3	15 500	14	13 1400	16 100	2000
a_j	800	1200	1400	1100	4500

$Z_{\min}$= 300*13 + 1200*12 + 1000*13 + 500*15 + 1400*13 + 100*16 = 58600.

<u>*Замечание.*</u> Предлагаемый алгоритм метода можно использовать для решения задач небольшого размера. При решении задач большого размера алгоритм этого метода применяется не для всей рабочей таблицы, а или для каждой стоки, или каждого столбца.

Метод аппроксимации

Данный метод, также как и предыдущий, использует понятие «наилучшая цена», но в отличие от него позволяет более однозначно сделать выбор между равнозначными клетками при распределении груза.

Алгоритм метода аппроксимации:

1) в рабочей таблице задачи берем дополнительную строку и столбец «разностей»;

2) заполняем эти строку и столбец разностями между двумя наилучшими ценами по каждой строке и каждому столбцу;

3) из всех разностей строки и столбца выбрать наибольшую, указать номер итерации;

4) в соответствующей строке или столбце выбираем клетку с наилучшей ценой, проставляем в эту клетку максимальное значение x_{ij};

5) корректируем свободные члены и вычеркиваем нерабочие свободные клетки;

6) из оставшихся неиспользованных разностей снова выбрать наибольшую и так до тех пор, пока или не будут использованы все разности или не будет распределен весь груз.

Если разности будут использованы все, а груз распределен не до конца, то в малых задачах дораспределение груза производится вручную. В больших же задачах приходится дочерчивать строку и столбец "разностей" и заполнять их, но теперь разности берутся между двумя наилучшими ценами, но только по свободным рабочим клеткам.

Таблица 8 – Заполнение рабочей таблицы методом аппроксимации

	1	2	3	4	b_i	Столбец разностей

1	13 300	12 1200	15	16	1500	1
2	17	15	14	13 1000	1000	1
3	15 500	14	13 1400	16 100	2000	1
a_j	800	1200	1400	1100	4500	
Строка разностей	2_3	2_2	1	3_1		

Z_{min}= 300*13 + 1200*12 + 1000*13 + 500*15 + 1400*13 + 100*16 = 58600.

Разность 3_1 означает, что заполнение таблицы начинать следует с клетки (2,4) (столбец выбран с учетом наибольшей разности, клетка в этом столбце выбрана с наименьшей ценой, так как $Z \to$min).

При заполнении таблицы следует помнить, что:

1) если разности использованы все, а грузы распределены не до конца, то если существует единственный вариант, дораспределение происходит вручную. Если же дораспределять грузы можно разными способами, то чертится еще одна строка и столбец разностей и заполняются они разностями между наилучшими ценами только по свободным клеткам. Далее алгоритм действий повторяется;

2) если в строке и столбце окажется несколько одинаковых разностей, то предпочтение надо отдать той, которая будет иметь «оптимальный элемент». «Оптимальный элемент» – это цена, которая является наилучшей, как по строке, так и по столбцу, на пересечении которых она стоит. Исследование на наличие «оптимального элемента» проводить после каждой итерации;

3) если оптимальный элемент имеется у нескольких одинаковых разностей, то предпочтение отдать тому «оптимальному элементу», который будет иметь наибольшую сумму «разностей» по строке и столбцу, на пересечении которых он стоит. Если и сумма окажется одинаковой, то заполнять можно клетку с любым «оптимальным элементом»;

4) если мы имеем несколько одинаковых разностей и ни одна из них не имеет «оптимального элемента», то тогда в соответствующих строках и столбцах исчисляются новые разности, но между 1-ой и 3-ей наилучшими ценами.

Замечание. В качестве недостатка этого метода можно отметить необходимость в знании всех его особенностей, а также некоторую громоздкость таблиц.

4. Решение распределительных задач методом потенциалов (закрытого типа; открытого типа; случай вырожденности; решение задач приближенными методами).

Метод потенциалов решения транспортной задачи линейного программирования с нахождением опорного плана методом Северо-западного угла.

Задача 1

Составить план перевозки картофеля из 3 совхозов 3 магазинам так, чтобы сумма расстояний на перевозку была минимальной. Наличие картофеля (в тоннах), потребность магазинов и расстояние от совхоза до магазина (в километрах) приведены в таблице 1.

Таблица 1

Совхоз	*Магазин*			*Запасы*
	1	*2*	*3*	
1	*2*	*8*	*7*	*300*
2	*6*	*9*	*3*	*360*

3	5	2	1	180
Потребности	210	450	310	840 / 970

Дано: b_i – наличие груза у i-го поставщика (i= 1, 2, 3)

a_j – потребность j-го потребителя (j= 1, 2, 3, 4)

Возможности поставщиков:

$$\sum_{i=1}^{3} b_i = 840$$

Возможности потребителей:

$$\sum_{j=1}^{3} a_j = 970$$

$$\sum_{j=1}^{3} a_j \geq \sum_{i=1}^{3} b_i \quad \rightarrow \quad \left| \sum_{j=1}^{3} a_j - \sum_{i=1}^{3} b_i \right| = 130$$

Задача открытого типа, чтобы закрыть, нужно ввести фиктивного потребителя с потребностью b_4 = 130

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} \end{pmatrix}$$

x_{ij} – количество груза, перевозимого от i-го поставщика к j-му потребителю.

$$Z = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = a_j \ (j= 1, 2, 3) \qquad \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = b_i \ (i= 1, 2, 3, 4)$$

Условие вывоза:

$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 300$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 360$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 180$

$x_{41} + x_{42} + x_{43} = 130$

Условие удовлетворения потребностей:

$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 210$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 450$

$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 310$

$$\begin{aligned} Z \ &= 2x_{11} + 8x_{12} + 7x_{13} + \\ &+ 6x_{21} + 9x_{22} + 3x_{23} + \\ &+ 5x_{31} + 2x_{32} + 1x_{33} + \\ &+ 10\mathrm{x}_{14} + 10\mathrm{x}_{15} + 10\mathrm{x}_{24} \rightarrow \min \end{aligned}$$

Получаем исходный вариант методом Северо-западного угла.

Таблица 2

Совхоз	*Магазин* 1	2	3	*Запасы*
1	*2* *210*	*8* *90*	*7*	*300*
2	*6*	– *9* *360*	+ *3* *0*	*360*
3	*5*	*2* *α = 5*	*1* *180*	*180*
4ф	*10*	+ *10* *α = 6*	– *10* *130*	*130*
Потребности	*210*	*450*	*310*	*970* / *970*

$Z_{\text{факт}} = 2 \cdot 210 + 8 \cdot 90 + 9 \cdot 360 + 1 \cdot 180 =$

$= 420 + 720 + 3240 + 180 = 4560$

Исследование на вырожденность. Вариант будет невырожденным, если число заполненных клеток N равно сумме поставщиков и потребителей за вычетом единицы: $N = m + n - 1$.

N = 5

$n + m - 1 = 3 + 3 - 1 = 6$,

т.е. $N < m + n - 1$ – вариант вырожденный, следовательно, его необходимо пополнить, проставив в недостающем числе клеток ноль. Поскольку этим дополнительным клеткам будут отвечать нулевые перевозки, то общий баланс и суммарная стоимость перевозок плана при этом не изменится. Однако проводить пополнение плана, выбирая клетки произвольно, нельзя. Необходимо учитывать условие ацикличности.

Поставим ноль в клетку (2,3).

Исследуем на оптимальность, для этого:

1) Составим систему уравнений относительно потенциалов для заполненных клеток таблицы: условие: $v_j - u_i = c_{ij}$.

для клетки (1,1) $v_1 - u_1 = c_{11} = 2$

для клетки (1,2) $v_2 - u_1 = c_{12} = 8$

для клетки (2,2) $v_2 - u_2 = c_{22} = 9$

для клетки (2,3) $v_3 - u_2 = c_{23} = 3$

для клетки (3,3) $v_3 - u_3 = c_{33} = 1$

для клетки (4,3) $v_3 - u_4 = c_{43} = 10$

Как правило $u_1 = 0$, тогда получаем:

$v_1 = 2$ $u_2 = -1$

$v_2 = 8$ $u_3 = 1$

$v_3 = 2$ $u_4 = -8$.

2) С помощью найденных потенциалов проверим выполнение неравенства $v_j - u_i \leq c_{ij}$ для свободных клеток и вычислим

$$\alpha = \left|(v_j - u_i) - c_{ij}\right|$$

для тех из них, для которых это неравенство невыполняется.

для клетки (1,3)	$v_3 - u_1 \le c_{13}$		
	$2 - 0 \le 7$	верно	
для клетки (2,1)	$v_1 - u_2 \le c_{21}$		
	$2 - (-1) \le 6$	верно	
для клетки (3,1)	$v_1 - u_3 \le c_{31}$		
	$2 - 1 \le 5$	верно	
для клетки (3,2)	$v_2 - u_3 \le c_{32}$		
	$8 - 1 \le 2$	неверно	$\alpha_{32} = 5$
для клетки (4,1)	$v_1 - u_4 \le c_{41}$		
	$2 - (-8) \le 10$	верно	
для клетки (4,2)	$v_2 - u_4 \le c_{42}$		
	$8 - (-8) \le 10$	неверно	$\alpha_{42} = 6$

Получаем: $\alpha_{32} = 5$; $\alpha_{42} = 6$.

Существуют плохие клетки, следовательно, вариант представленный в таблице 1 не оптимальный. Для улучшения плана перевозок в таблице строится цикл перераспределения объектов перевозок. Цикл представляет собой замкнутую ломаную линию, которая начинается в той свободной клетке, где условие оптимальности нарушается наиболее сильно. В рассматриваемом примере такой клеткой является клетка (4,2), где α наибольшее ($\alpha_{42} = 6$).

При построении цикла можно проходить как через занятые, так и через свободные клетки таблицы, но повороты можно делать только в занятых клетках под прямым углом. Построим по указанным правилам цикл в таблице 2. Данный цикл показывает, что для улучшения плана перевозок, т.е. для уменьшения общей стоимости перевозок, необходимо изменить объем перевозок в тех клетках, где находятся вершины (углы поворота) цикла.

Порядок изменения объемов перевозок в вершинах цикла определяется следующим образом. В вершинах цикла расставляются знаки «+» и «–», причем в начале цикла ставится знак «+», в следующей «–», в следующей за ней вершине «+» и т.д. То есть, получаем чередование знаков «+» и «–». Направление движения при расстановке знаков от свободной клетки безразлично, так как количество вершин цикла является четной величиной. Наличие знака «+» в вершине цикла показывает, что объем перевозок необходимо увеличить. Увеличение и уменьшение объемов перевозок в вершинах цикла производится на одинаковую величину, которая выбирается равной наименьшему из объемов перевозок в тех клетках, где в вершине цикла стоит знак «–».

В итоге получаем новый вариант в таблице 3. Следующие шаги поиска оптимального варианта совершаются по аналогии вышеизложенного.

Таблица 3

Совхоз	*Магазин*			*Запасы*
	1	*2*	*3*	
1	*2* *210*	*8* *90*	*7*	*300*
2	*6*	*–* *9* *230*	*+* *3* *130*	*360*
3	*5*	*+* *2* *α = 5*	*–* *1* *180*	*180*

4ф	*10*	*10* *130*	*10*	*130*
Потребности	*210*	*450*	*310*	*970* / *970*

$Z_{факт}$ = 2·210 + 8·90 + 9·230 + 3·130 + 1·180 =
= 420 + 720 + 2070 +390 + 180 = 3780

Исследование на вырожденность.
N = 6
$n + m - 1 = 3 + 3 - 1 = 6$,
т.е. $N = m + n - 1$ – вариант невырожденный.

Исследуем на оптимальность, для этого:

1) Составим систему уравнений относительно потенциалов для заполненных клеток таблицы: условие: $v_j - u_i = c_{ij}$.

для клетки (1,1) $v_1 - u_1 = c_{11} = 2$
для клетки (1,2) $v_2 - u_1 = c_{12} = 8$
для клетки (2,2) $v_2 - u_2 = c_{22} = 9$
для клетки (2,3) $v_3 - u_2 = c_{23} = 3$
для клетки (3,3) $v_3 - u_3 = c_{33} = 1$
для клетки (4,2) $v_2 - u_4 = c_{42} = 10$

Как правило $u_1 = 0$, тогда получаем:
$v_1 = 2$ $u_2 = -1$
$v_2 = 8$ $u_3 = 1$
$v_3 = 2$ $u_4 = -2$.

2) С помощью найденных потенциалов проверим выполнение неравенства $v_j - u_i \le c_{ij}$ для свободных клеток и вычислим

$$\alpha = \left| (v_j - u_i) - c_{ij} \right|$$

для тех из них, для которых это неравенство невыполняется.

для клетки (1,3)	$v_3 - u_1 \le c_{13}$		
	$2 - 0 \le 7$	верно	
для клетки (2,1)	$v_1 - u_2 \le c_{21}$		
	$2 - (-1) \le 6$	верно	
для клетки (3,1)	$v_1 - u_3 \le c_{31}$		
	$2 - 1 \le 5$	верно	
для клетки (3,2)	$v_2 - u_3 \le c_{32}$		
	$8 - 1 \le 2$	неверно	$\alpha_{32} = 5$
для клетки (4,1)	$v_1 - u_4 \le c_{41}$		
	$2 - (-2) \le 10$	верно	
для клетки (4,3)	$v_3 - u_4 \le c_{43}$		
	$8 - (-2) \le 10$	верно	

Получаем: $\alpha_{32} = 5$.

Существуют плохие клетки, следовательно, вариант представленный в таблице 1 не оптимальный. Для улучшения плана перевозок в таблице строится цикл перераспределения объектов перевозок. Цикл представляет начинается в той свободной клетке, где условие оптимальности нарушается наиболее сильно. В рассматриваемом примере такой клеткой является клетка (3,2), где α наибольшее ($\alpha_{32} = 5$).

В итоге получаем новый вариант в таблице 4. Следующие шаги поиска оптимального варианта совершаются по аналогии вышеизложенного.

Таблица 4

Совхоз	Магазин			Запасы
	1	2	3	
1	2 210	8 90	7	300
2	6	9 50	3 310	360
3	5	2 180	1	180
4ф	10	10 130	10	130
Потребности	210	450	310	970 970

$Z_{факт} = 2{\cdot}210 + 8{\cdot}90 + 9{\cdot}50 + 3{\cdot}310 + 2{\cdot}130 =$
$= 420 + 720 + 450 + 910 + 360 = 2860$

Исследование на вырожденность.

N = 6

$n + m - 1 = 3 + 3 - 1 = 6$,

т.е. $N = m + n - 1$ – вариант невырожденный.

Исследуем на оптимальность, для этого:

1) Составим систему уравнений относительно потенциалов для заполненных клеток таблицы: условие: $v_j - u_i = c_{ij}$.

для клетки (1,1) $v_1 - u_1 = c_{11} = 2$
для клетки (1,2) $v_2 - u_1 = c_{12} = 8$
для клетки (2,2) $v_2 - u_2 = c_{22} = 9$
для клетки (2,3) $v_3 - u_2 = c_{23} = 3$
для клетки (3,2) $v_2 - u_3 = c_{32} = 2$
для клетки (4,2) $v_2 - u_4 = c_{42} = 10$

Как правило $u_1 = 0$, тогда получаем:
$v_1 = 2$ $u_2 = -1$
$v_2 = 8$ $u_3 = 6$
$v_3 = 7$ $u_4 = -2$.

2) С помощью найденных потенциалов проверим выполнение неравенства $v_j - u_i \le c_{ij}$ для свободных клеток и вычислим

$$\alpha = \left|(v_j - u_i) - c_{ij}\right|$$

для тех из них, для которых это неравенство невыполняется.

для клетки (1,3) $v_3 - u_1 \le c_{13}$
$7 - 0 \le 7$ верно
для клетки (2,1) $v_1 - u_2 \le c_{21}$
$2 - (-1) \le 6$ верно
для клетки (3,1) $v_1 - u_3 \le c_{31}$
$2 - 6 \le 5$ верно
для клетки (3,3) $v_3 - u_3 \le c_{33}$
$7 - 6 \le 1$ верно
для клетки (4,1) $v_1 - u_4 \le c_{41}$
$2 - (-2) \le 10$ верно
для клетки (4,3) $v_3 - u_4 \le c_{43}$
$7 - (-2) \le 10$ верно

Вариант оптимален.

Ответ: $Z_{min} = 2860$

$$A = \begin{pmatrix} 210 & 90 & 0 \\ 0 & 50 & 310 \\ 0 & 180 & 0 \end{pmatrix}$$

В результате полученного решения можно сделать вывод, что минимальная сумма расстояний на перевозку будет равна 2860 км, если 1-ый совхоз перевезет 1-му и 2-му магазинам соответственно 210 т и 90 т картофеля, 2-ой совхоз 2-му и 3-му магазинам перевезет соответственно 50 т и 310 т картофеля, а 3-ий совхоз 2-му магазину – 180 т картофеля. Причем из 2-му магазину недопоставят 130 т картофеля.

Далее рассмотрим задачи для закрепления навыка решения транспортных задач.

Задача 2

Найти оптимальное решение задачи:

$b_1 = 100$ $a_1 = 140$

$b_2 = 150$ $a_2 = 170$

$b_3 = 130$ $a_3 = 230$

$b_4 = 200$

$b_5 = 180$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 8 \\ 6 & 3 & 2 \\ 8 & 9 & 3 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Решитьна max.

Задача 3

Найти оптимальное решение задачи:

$b_1 = 1500$ $a_1 = 800$

$b_2 = 1000$ $a_2 = 1200$

$b_3 = 2000$ $a_3 = 1400$

$a_4 = 1100$

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 15 & 16 \\ 17 & 15 & 14 & 13 \\ 15 & 14 & 13 & 16 \end{pmatrix}$$

Решитьна min.

Задача 4

Найти оптимальное решение задачи:

$b_1 = 6$ $a_1 = 4$

$b_2 = 8$ $a_2 = 6$

$b_3 = 10$ $a_3 = 8$

$a_4 = 8$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 8 & 5 \\ 2 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Решитьна min.

Задача 5

Найти оптимальное решение задачи:

$b_1 = 200$ $a_1 = 150$

$b_2 = 180$ $a_2 = 130$

$b_3 = 190$ $a_3 = 150$

$a_4 = 140$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Решитьна max.

Задача 6

Найти оптимальное решение задачи:

$b_1 = 500$ $a_1 = 150$
$b_2 = 300$ $a_2 = 350$
$b_3 = 100$ $a_3 = 200$
$a_4 = 100$
$a_5 = 100$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Решитьна min.

Задача 7

Найти оптимальное решение задачи:

$b_1 = 150$ $a_1 = 200$
$b_2 = 250$ $a_2 = 100$
$b_3 = 50$ $a_3 = 250$
$b_4 = 100$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 6 & 7 & 6 \\ 8 & 9 & 7 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Решитьна min.

Задача 8

Найти оптимальное решение задачи:

$b_1 = 130$ $a_1 = 130$
$b_2 = 55$ $a_2 = 75$
$b_3 = 80$ $a_3 = 65$
$b_4 = 65$ $a_4 = 60$
$b_5 =135$ $a_5 = 75$
$a_6 = 60$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 8 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 9 & 8 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 6 & 11 \\ 3 & 5 & 4 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Решить на min.

5. Решение задачи линейного программирования в MSExcel

Требуется перевезти одноименный груз из трех пунктов отправления в три пункта назначения. Количество грузов, подлежащих отправлению с каждого склада, потребности в них каждого потребителя и расстояния в километрах от каждого пункта отправления в каждый пункт назначения приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2 – Расстояния перевозки, км

Поставщики	Потребители			Наличие грузов, т
	1	2	3	
1	15	17	23	900
2	9	19	8	800
3	24	21	32	550
Потребность в грузах, т	700	800	750	2250 / 2250

Нужно определить, из какого пункта отправления следует удовлетворять спрос потребителей, чтобы общая сумма объема перевозок (ткм) была минимальной.

Решение:

1. Проверка сбалансированности задачи

Просуммируем наличие грузов у поставщиков

$$\sum_{i=1}^{3} b_i = 900+800+550=2250$$

Просуммируем потребности потребителей в грузах

$$\sum_{j=1}^{3} a_j = 700+800+750=2250$$

$\sum_{i=1}^{3} b_i = \sum_{j=1}^{3} a_j$, следовательно, задача сбалансированная (закрытого типа).

2. Определение переменных

Обозначим через x_{ij} [т] количество грузов, которые будут перевезены от *i*-го поставщика *j*-му потребителю.

3. I. Целевая функция

Формальная целевая функция имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(X) = {} & 15x_{11} + 17x_{12} + 23x_{13} + \\ & + 9x_{21} + 19x_{22} + 8x_{23} + \\ & + 24x_{31} + 21x_{32} + 32x_{33} \to \min \end{aligned}$$

II. Основные ограничения

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 900, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 800, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 550, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 700, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 800, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 750. \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности

$$\forall x_{ij} \ge 0 \quad \left(i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,3}\right).$$

4. Модель задачи в общем виде:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad \mathrm{F}(X) = {} & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + \\ & + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + \\ & + c_{31}x_{31} + c_{32}x_{32} + c_{33}x_{33} \to \min \end{aligned}$$

$$II. \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = b_1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = b_2, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = b_3, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = a_1, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = a_2, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = a_3. \end{cases}$$

$$III. \quad \forall x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,3}\right)$$

5. Модель задачи в структурной форме:

$$I. \quad F(x) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}\, x_{ij} \rightarrow \min ,$$

$$II. \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = b_i , & i = \overline{1,3} \\ \sum_{i=1}^{3} x_{ij} = a_j , & j = \overline{1,3} \end{cases} ,$$

$$III. \; \forall x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,3}\right)$$

6. Для решения данной задачи в Excel необходимо:

1) под запись целевой функции отвести ячейку A1;

2) под запись ограничений – ячейки столбца B (количество ячеек совпадает с количеством ограничений): B1, B2, B3, B4, B5, B6;

3) под запись искомых переменных отвести ячейки столбцов C, D, E (количество потребителей совпадает с количеством столбцов,
количество поставщиков – с количеством строк).

Примечание: искомые переменные x_{ij} будут находиться в следующих ячейках:

(x_{11} → C1x_{12} → D1x_{13} → E1

x_{21}→ C2x_{22}→ D2x_{23}→ E2

x_{31}→ C3x_{31}→ D2x_{33}→ E3).

Порядок выполнения работы:

1. Ввести в ячейку A1 формулу целевой функции (рисунок 3.1):

=15*C1+17*D1+23*E1+
+ 9*C2+19*D2 + 8*E2+
+24*C3+21*D3+32*E3;

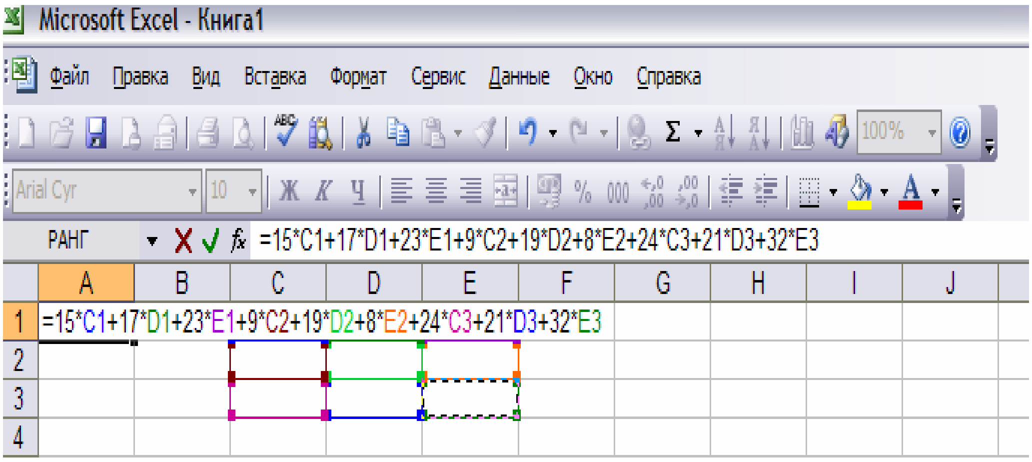


Рисунок 3.1 – Ввод целевой функции в Excel

2. а) Ввести в ячейку B1 левую часть 1-го ограничения: = C1+D1+E1 (рисунок 3.2)

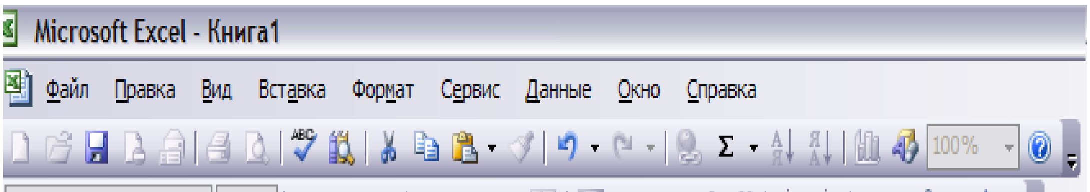


Рисунок 3.2 – Ввод ограничений в Excel

б) Ввести в ячейку В2 левую часть 2-го ограничения:
= C2+D2+E2
в) Ввести в ячейку В3 левую часть 3-го ограничения:
= C3+D3+E3
г) Ввести в ячейку В4 левую часть 4-го ограничения:
= C1+C2+C3
д) Ввести в ячейку В5 левую часть 5-го ограничения:
= D1+D2+D3
е) Ввести в ячейку В6 левую часть 6-го ограничения:
= E1+E2+E3

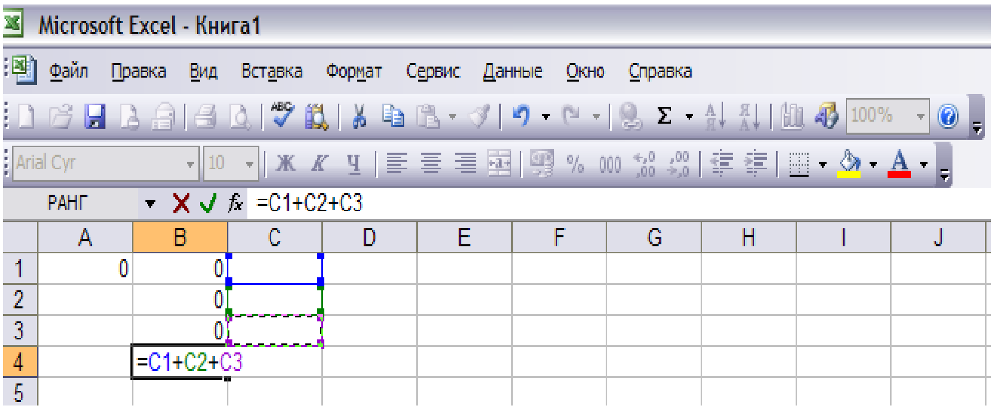


Рисунок 3.3 – Ввод ограничений в Excel

3. На панели инструментов выбрать опцию "Сервис", а в ней вкладку "Поиск решения"

Примечание

Если "Поиск решения" отсутствует, нужно выполнить команду "Сервис"–"Надстройки". В окне диалога "Надстройки" нужно установить флажок напротив строки "Поиск решения".

4. В окне диалога "Поиск решения" в поле ввода "Установить целевую ячейку" нужно ввести ссылку на ячейку А1. Необходимо выбрать способ адресации ячеек в абсолютной системе координат (т.е. указать не А1, а $A$1). Также нужно поступать с другими переменными.

5. В окне диалога "Поиск решения" нужно установить переключатель (рисунок 3.4).

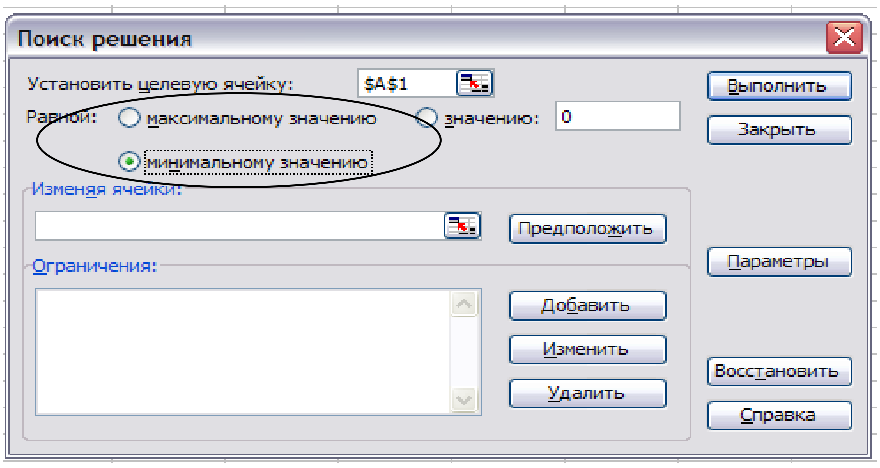


Рисунок 3.4 – Работа в диалоговом окне «Поиск решения»

6. В поле ввода "Изменяя ячейки" нужно указать ссылки на ячейки, содержащие искомые переменные, т.е. диапазон ячеек $C$1: $E$3 (рисунок 3.5).

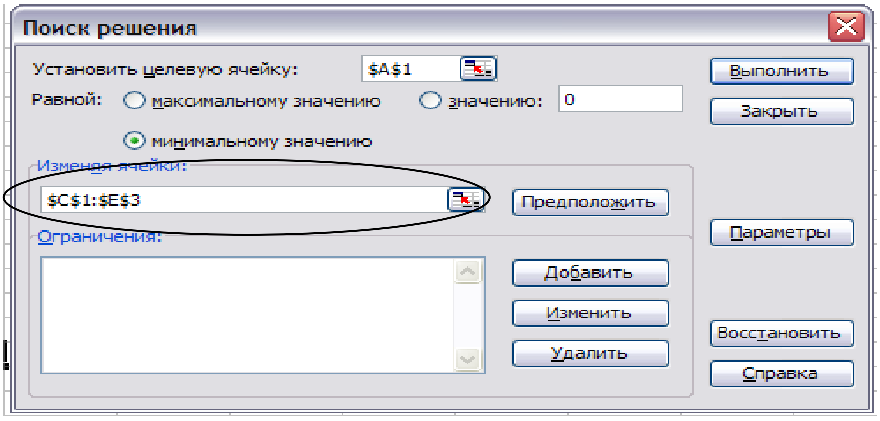


Рисунок 3.5 – Поле ввода ячеек, обозначающих искомые переменные

7. В поле ввода "Ограничения" при нажатии кнопки "Добавить" появляется окно диалога "Добавить ограничения". В поле ввода "Ссылка на ячейку" вводится $B$1. В поле ввода "Ограничение" вводится = и число 900. При помощи кнопки "Добавить" таким же образом вводятся все остальные ограничения (ячейки $B$2:$B$6) (рисунок 3.6).

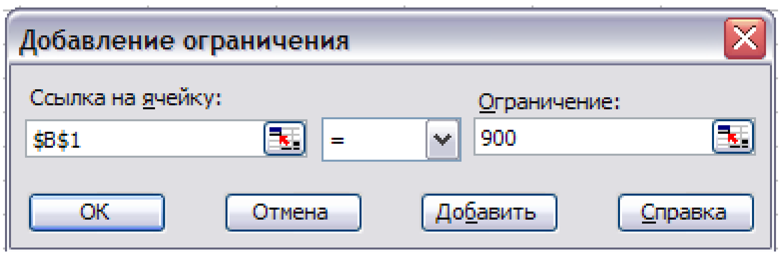


Рисунок 3.6 – Диалоговое окно «Добавление ограничения»

8. Для ввода ограничений на неотрицательность искомых переменных в окне диалога "Добавить ограничения" в поле ввода "Ссылка на ячейку" нужно ввести ссылку на ячейку $C$1, а в поле ввода "Ограничения" нужно ввести >= и число 0. При помощи кнопки "Добавить" таким же образом вводятся условия неотрицательности оставшихся искомых переменных. Либо выделяется диапазон ячеек $C$1: $E$3 и задается >= и число 0. После ввода последнего ограничения нажмите «ОК».

Примечание

Если в задаче имеется условие целочисленности искомых переменных, то в диалоговом окне «Добавление ограничений» в поле ввода "Ссылка на ячейку" нужно ввести ссылку на ячейку $C$1, а в поле ввода знака ограничения нужно ввести «цел». При помощи кнопки "Добавить" таким же образом вводятся условия целочисленности оставшихся искомых переменных. Либо выделяется диапазон ячеек $C$1: $E$3 и задается «цел». После ввода последнего ограничения нажмите «ОК».

9. После нажатия кнопки "Выполнить" Excel рассчитывает результат и открывает окно диалога "Результаты поиска решения". В этом диалоге в окне "Тип отчета" нужно выбрать "Результаты" и нажать Ok. Перед листом, где записана постановка задачи, будет

вставлен лист "Отчет по результатам 1", а на экране будет выдан результат решения задачи (рисунок 3.7).

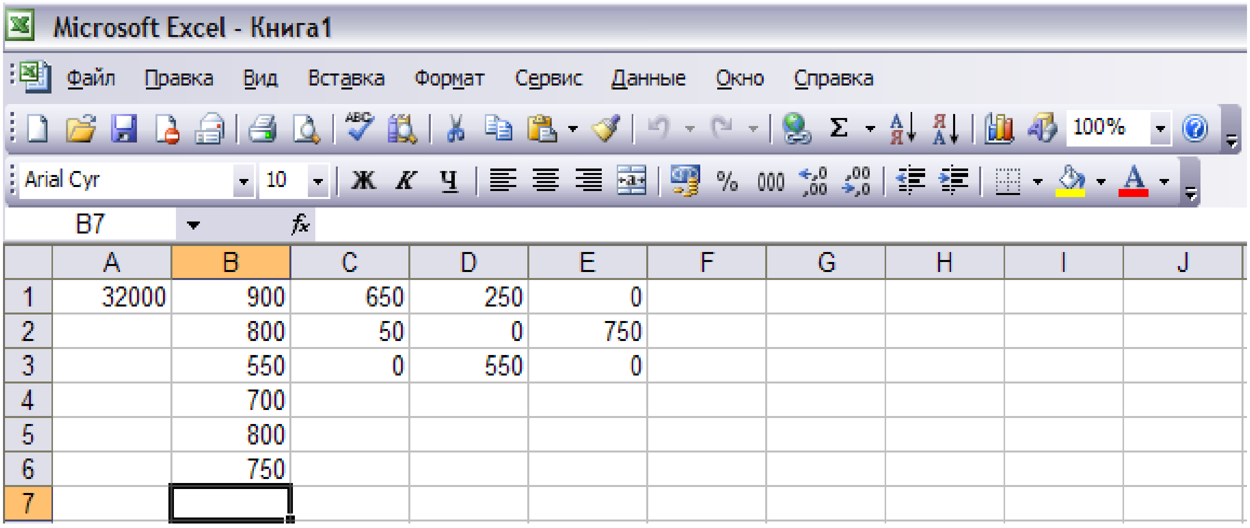


Рисунок 3.7 – Результаты решения задачи

Интерпретация результатов задачи

Полученные значения в ячейках, содержащих формулы целевой функции и ограничений, являются результатом расчета целевой функции и соответствующих ограничений.

Результат, полученный в ячейке A1, означает общую сумму объема грузоперевозок в ткм.

Ячейки B1, B2, B3 показывают выполнение условия полного вывоза груза от поставщика. Ячейки B4, B5, B6 показывают выполнение условия полного удовлетворения потребностей потребителя.

Значения ячеек в диапазоне $C$1: $E$3 показывают количество груза (в т), перевезенного от соответствующего поставщика, соответствующему потребителю. Значения данного диапазона превышают 0, следовательно условие неотрицательности искомых переменных выполнено.

Ответ

Оптимальные перевозки грузов предусматривают перевозку от 1-го поставщика 1-му потребителю 650 т, от 1-го поставщика 2-му потребителю – 250 т, от 2-го поставщика 1-му потребителю – 50 т, а 3-му потребителю – 750 т. 3-й поставщик отвезет свой груз только 2-му потребителю в количестве 550 т. Минимальный объем перевозок составит 32000 т км.

3.3.3 Результаты и выводы:

Общая постановка этой задачи применительно к экономической проблеме экономии издержек производства формулируется так: имеется несколько пунктов назначения (предприятий, потребителей); требуется перевезти некоторое количество однородного товара из различных пунктов отправления в несколько пунктов назначения; каждый из поставщиков может выделить только определенное количество единиц товара и каждому потребителю требуется также определенное количество единиц этого товара; известны расстояния или стоимости перевозки единицы товара от каждого поставщика к каждому потребителю. Задача состоит в том, чтобы найти такие маршруты перевозок, из всех возможных связей поставщиков и потребителей, при которых общие транспортные расходы были бы минимальными (транспортная задача также может быть сформулирована с целевой функцией, стремящейся к максимуму).

Математическая модель транспортной задачи относится к задачам линейного программирования и может быть решена симплексным методом. Однако ввиду исключительной практической важности этой задачи и специфики ограничений (ограничения заданы в виде уравнений; каждая неизвестная входит лишь в два уравнения; коэффициенты при неизвестных – единицы) для ее решения созданы специальные алгоритмы. Самым распространенным методом решения транспортной задачи является метод потенциалов.

К приближенным распределительным методам можно отнести метод наилучших цен и метод аппроксимации. Приближенными они называются вследствие того, что полученное при помощи этих методов распределение груза в таблице не требует дополнительной проверки на оптимальность, так как либо сразу оказывается оптимальным, либо максимально к нему приближено.

3.4 Практическое занятие 9 (2 часа)

Тема: «Решение задач на основе транспортной задачи»

3.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

Задача 1

Необходимо разместить сорта озимой пшеницы по предшественникам таким образом, чтобы сбор озимой ржи был максимальным.

Символ *М* указывает на отсутствие данных урожайности *i*-го сорта по соответствующему *j*–му предшественнику (клетки с этим символом являются запретными).

Таблица 3.7 – Урожайность озимой пшеницы, ц/га

Сорта озимой пшеницы	Предшественники					Всего, га
	Чистый пар	Кукуруза, убранная в стадии молочно-восковой спелости	Однолетние травы на зеленый корм	Бобовые культуры	Стерневые посевы	
Безостая 1	30,7	13,6	18,4	18,9	16,1	9185
Одесская 16	26,5	*М*	16,8	19,2	15,2	5583
Белоцерковская 198	*М*	14,4	14,1	*М*	16,5	1114
Мичуринка	16,8	10,8	*М*	*М*	*М*	65
Всего, га	4503	2160	2884	2800	3600	

Задача 2

Необходимо составить оптимальный план проведения весенне-полевых работ, для имеющейся техники в хозяйстве. Объем работ в гектарах мягкой пахоты, производительность имеющейся техники за период (гектары мягкой пахоты), затраты на единицу работы представлены в таблице 3.9.

Таблица 3.9 – Затраты на 1 га мягкой пахоты, руб.

Виды работ	Марки тракторов				Объем работ, га м. п.
	ДТ–75М	МТЗ-821	Т - 4А	ДТ-175С	
Раннее боронование зяби	5,5	5,7	5,8	5,9	210
Предпосевная культивация	4,8	5,0	5,7	6,0	1000
Посев яровых зерновых	5,5	5,7	5,8	5,9	75
Боронование озимой пшеницы	5,1	6,5	6,4	7,0	135
Прикатывание	*M*	5,4	5,3	5,6	40
Объем работ, га м. п.	470	400	270	320	

Затраты на проведение весенне-полевых работ должны быть минимальными.

3.4.3 Результаты и выводы:

На основе транспортных задач решаются задачи распределения посевов по участкам земли с различным плодородием, оптимизации машино-трктoрного парка.

3.5 Практическое занятие 10,11 (4 часа)

Тема: «Динамическое программирование»

3.5.1 Задание для работы:

1. Принцип оптимальности Беллмана
2. Решение графовых задач на основе принципа Беллмана
3. Функциональное уравнение Беллмана
4. Задачи распределения ресурсов

3.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Принцип оптимальности Беллмана

Метод ДП является наиболее общим методом решения задач оптимального управления. Он применим как для задач с линейной ЦФ, так и с нелинейной , а также в случае, когда управляемые переменные целые числа, при этом сама ЦФ может быть задана таблицей, что наиболее распространено в практических задачах.

Процессы называют динамическими, если результаты на одном участке процесса влияют на другие шаги.

Рассмотрим принцип оптимального управления Р. Беллмана. Он связан с проблемой оптимизации сложной системы, состоящей из многих взаимосвязанных элементов. Элементами могут быть экономические единицы, которые входят в единую (более общую) систему; узлы сложной технической системы; отдельные участки производства, строительства, боевых операций и т.д.

Возникает вопрос: как нужно управлять отдельными элементами системы, чтобы показатель эффективности всей системы был максимальным?

Выше мы на интуитивном уровне показали, что для оптимизации в целом недостаточно оптимизировать каждый элемент отдельно - это приводит к неверному результату.

Беллман впервые сформулировал принцип оптимальности для такой задачи. То есть, оптимизируя отдельный шаг, необходимо задумываться о его последствиях, приводящих к общему результату. Для решения подобных задач был разработан метод ДП, основывающийся на уравнении Беллмана, которое математически выражает его принцип.

Назовем состоянием системы 5* один или несколько параметров системы. Например, деньги на лицевом счете предприятия. Обозначим управление на }-дм шаге /Л - это некоторое воздействие, которое испытывает система и изменяет свое состояние 5.

Если перед г-м шагом состояние системы 5 и мы принимаем управление V, то за *г*-й шаг мы можем получить некоторый выигрыш, который обозначается *p(5, V),* при этом состояние 5переходит в 5':

Считается, что функции *со$_г$(8, V).* _и *р(5. V^* известны..

Беллман ввел понятие условного оптимального выигрыша *Ж,(5).* Эта функция показывает оптимальный выигрыш (наилучший результат), полученный за все шаги от *г*-го и до конца, если *г-й* шаг начинается с состояния 5. Тогда согласно принципу оптимальности Беллмана, принимая решение на *г* шаге, мы должны выбрать V так, чтобы выигрыш был максимальным от *г* -шага и до конца.

Принцип оптимальности Беллмана ставит вопрос о том, что такое оптимальность отдельного элемента системы с точки зрения оптимальности всей системы. Принимая решение на отдельном этапе, мы должны выбирать управление на этом этапе с прицелом на будущее, т. к. нас интересует результат в целом за все шаги.

Любой процесс имеет где-то окончание, т. е. говорят, что он имеет «горизонт планирования». Тогда последний этап «не имеет будущего». Вот именно его можно оптимизировать только из условий данного этапа. После этого приступают к оптимизации (т-1)-го этапа. При этом мы задаём состояние, с которого начинается (т-1)-й шаг (условие). Поэтому функцию называют условным оптимальным выигрышем. Таким образом, процесс оптимизации по методу ДП разворачивается сначала от конца к началу, а затем от начала к концу. В различных задачах может быть известно либо начальное состояние, либо конечное, либо то и другое. Принцип Беллмана нашёл практическое применение в так называемом методе программно-целевого планирования (любое действие планируется как элемент некоторого проекта).

2. Решение графовых задач на основе принципа Беллмана

Задача о наборе высоты и скорости летательного аппарата

Летательный аппарат находится на высоте *кй* и летит со скоростью $у_0$. Необходимо перевести его на высоту *к$*_ со скоростью у_. Причём *к<>к$_{1г}$*Ур>у^ Разобьём участок от

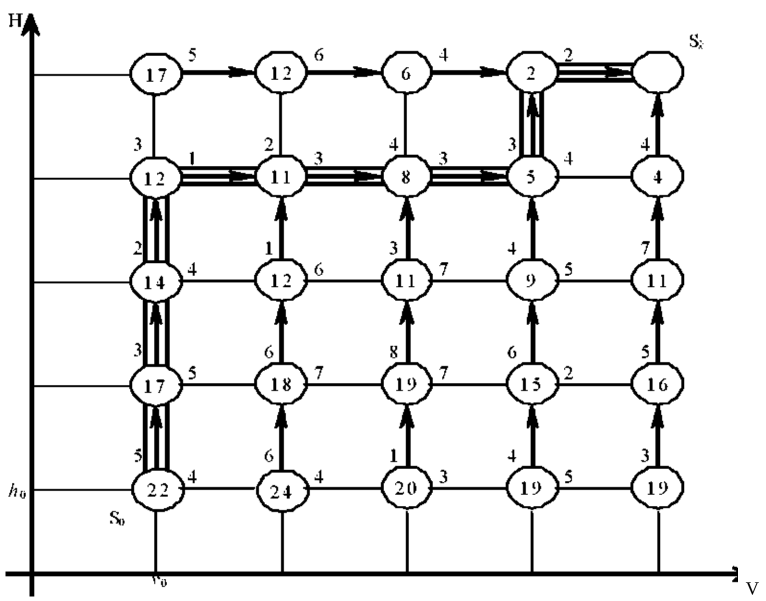


Рис. 23

κ^ до κ± на n частей:

Д А :

ДУ :

m

Известен расход горючего при переводе системы на *ДА* при у.=соп51,и на Дупри к=соп§1. Таким образом, из каждого состояния есть лишь два управления.

Начиная с конца помечаем все узлы (состояния) величинами условных (для данного узла) оптимальных расходов горючего от этого узла и до конца, а стрелками условные оптимальные управления. Указанные действия в упрощенном виде демонстрируют рассмотренную процедуру решения на основе уравнения Беллмана. Дойдя от конечного состояния до начального и получив 22, мы получим минимальную величину потерь горючего. Идя по стрелкам от начального состояния до конечного, мы получаем безусловные оптимальные управления (показаны двойной линией).

Видно, что любая задача, сводящаяся к поиску минимального пути в графе, решается методом динамического программирования.

3. Функциональное уравнение Беллмана

Назовём состоянием системы вектор координат: 8 = (^$_1$,^$_2$,...,^$_ь$) . В некоторых задачах состояние ^ одна величина. Тогда работу системы можно представить как движение в фазовом пространстве - пространстве состояний. Назовём шаговым управлением ^ управление на 2-м шаге. Рассмотрим процесс управления системой за m шагов. Функция *а(8,*Ц) называется выигрышем на м шаге. Здесь 8-состояние перед шагом, а *Ц* - управление на / ,-м шаге.

Величина *а.(8,II.)* должна быть известна до начала динамического программирования. Если состояние перед шагом было 8 и мы приняли какое-то управление Ц, то система перейдёт в новое состояние 8' = (8, Ц) .

функция должна быть так же известна. Если эти функции не заданы, то их надо сформулировать. Введём функцию *Ж(8)*^ условный оптимальный выигрыш. Это выигрыш на всех этапах от , до конца, если ,-й шаг начинается с состояния 8.

Рассмотрим т шагов. Пусть с (,+ 1)-го шага мы системой управляем оптимально, тогда величина выигрыша будет так

4. Задачи распределения ресурсов

Классическая задача распределения ресурсов Распределение ресурсов - это едва ли не самая распространённая операция. Под ресурсом в общем случае понимают физическую или абстрактную величину, которую система использует для производства полезного продукта. Например: горючее, деньги, время, объём склада. Как правило - ресурс ограничен, поэтому встаёт задача так распределить ресурс между отдельными элементами системы, чтобы суммарный эффект был максимальным. Рассмотрим классическую задачу распределения ресурсов.

лить между двумя отраслями. Каждая отрасль работает в течении m лет. Если в первую отрасль в *1* -й год вкладываются средства X, то доход *ЯХ),,* если же во вторую вкладываются, У, тогда доход *д(У1)*. Средства тратятся, принося доход, а новых средств не поступает и полученный доход не вкладывается. Нас интересует суммарный доход:

Щ= Ё /(х)+*е (у,). "*

1=1

Суммарный выигрыш равен сумме выигрышей на каждом шаге. Состоянием системы является количество средств перед *1* -м шагом. Так как новых средств не поступает, то ресурсы «тают».

Управление *У* может быть записано как *У=к-X_1*. После *1* -го шага в первой отрасли остаются средства р(X_1), а во второй (//(у)= *(//(к-X_1)*. Эти функции называются функциями траты. Мы можем составить уравнение Беллмана. В этой задаче на *1* -м шаге одно управление *Х* и одно состояние к.

3.5.3 Результаты и выводы:

Метод ДП является наиболее общим методом решения задач оптимального управления. Он применим как для задач с линейной ЦФ, так и с нелинейной , а также в случае, когда управляемые переменные целые числа, при этом сама ЦФ может быть задана таблицей, что наиболее распространено в практических задачах.

3.7Практическое занятие 12,13 (4 часа)

Тема: «Сетевое планирование и управление»

3.7.1 Задание для работы:

1. Основные понятия сетевого планирования и управления.
2. Принципы решения задач.

3.7.2Краткое описание проводимого занятия::

1.Основные понятия сетевого планирования и управления.

Сетевое Планирование и Управление – это комплекс графических и расчетных методов, организационных мероприятий, обеспечивающих моделирование, анализ и динамическую перестройку плана выполнения сложных проектов и разработок, например, таких как: строительство и реконструкция каких-либо объектов; выполнение научно-исследовательских и конструкторских работ; подготовка производства к выпуску продукции; перевооружение армии; развертывание системы медицинских или профилактических мероприятий.

Характерной особенностью таких проектов является то, что они состоят из ряда отдельных, элементарных *работ*. Они обуславливают друг друга так, что выполнение некоторых работ не может быть начато раньше, чем завершены некоторые другие. Например, укладка фундамента не может быть начата раньше, чем будут доставлены необходимые материалы; эти материалы не могут быть доставлены раньше, чем будут построены подъездные пути; любой этап строительства не может быть начат без составления соответствующей технической документации и т.д.

Сетевое Планирование и Управление включает три основных этапа:

4. структурное планирование;
5. календарное планирование;
6. оперативное управление.

Структурное планирование начинается с разбиения проекта на четко определенные операции, для которых определяется продолжительность. Затем строится сетевой график, который представляет взаимосвязи работ проекта. Это позволяет детально анализировать все работы и вносить улучшения в структуру проекта еще до начала его реализации.

Календарное планирование предусматривает построение календарного графика, определяющего моменты начала и окончания каждой работы и другие временные характеристики сетевого графика. Это позволяет, в частности, выявлять критические операции, которым необходимо уделять особое внимание, чтобы закончить проект в директивный срок. Во время календарного планирования определяются временные характеристики всех работ с целью проведения в дальнейшем *оптимизации* сетевой модели, которая позволит улучшить эффективность использования какого-либо ресурса.

В ходе *оперативного управления* используются сетевой и календарный графики для составления периодических отчетов о ходе выполнения проекта. При этом сетевая модель может подвергаться оперативной корректировке, вследствие чего будет разрабатываться новый календарный план остальной части проекта.

Основными понятиями сетевых моделей являются понятия «*события»* и «*работы»*.

Работа – это некоторый процесс, приводящий к достижению определенного результата, требующий затрат каких-либо ресурсов и имеющий протяженность во времени. По своей физической природе работы можно рассматривать как:

- *действие*: разработка чертежа, изготовление детали, заливка фундамента бетоном, изучение конъюнктуры рынка;
- *процесс*: старение отливок, выдерживание вина;
- *ожидание*: ожидание поставки комплектующих.

По количеству затрачиваемого времени работа может быть:

- *действительной*, т.е. требующей затрат времени;
- *фиктивной*, т.е. формально не требующей затрат времени и представляющей связь между какими-либо работами, например: передача измененных чертежей от конструкторов к технологам; сдача отчета о технико-экономических показателях работы цеха вышестоящему подразделению.

Событие – это момент времени, когда завершаются одни работы и начинаются другие. Например, фундамент залит бетоном, комплектующие поставлены, отчеты сданы и т.д. Событиепредставляет собой результат проведенных работ и, в отличие от работ, не имеет протяженности во времени.

На этапе структурного планирования взаимосвязь работ и событий, необходимых для достижения конечной цели проекта, изображается с помощью *сетевого графика* (сетевой модели). На сетевом графике работы изображаются *стрелками*, которые соединяют *вершины*, изображающие события. Начало и окончание любой работы описываются парой событий, которые называются *начальным* и *конечным* событиями. Поэтому для идентификации конкретной работы используют код работы $(2,4)$, состоящий из номеров начального (i-го) и конечного (j-го) событий (см. рис.1.).

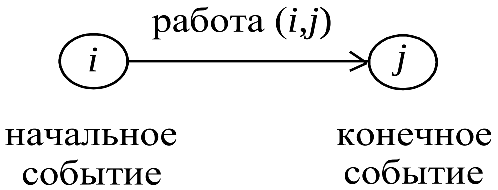


Рисунок 1– Кодирование работы

Любое событие может считаться наступившим только тогда, когда закончатся *все* входящие в него работы. Поэтому, работы, выходящие из некоторого события не могут начаться, пока не будут завершены *все* работы, входящие в это событие.

Событие, не имеющее предшествующих ему событий, т.е. с которого начинается проект, называют ***исходным***. Событие, которое не имеет последующих событий и отражает конечную цель проекта, называется ***завершающим***.

При построении сетевого графика необходимо следовать следующим правилам:

12) длина стрелки не зависит от времени выполнения работы;

13) стрелка может не быть прямолинейным отрезком;

14) для действительных работ используются сплошные, а для фиктивных - пунктирные стрелки;

15) каждая операция должна быть представлена только одной стрелкой;

16) между одними и теми же событиями не должно быть параллельных работ, т.е. работ с одинаковыми кодами;

17) следует избегать пересечения стрелок;

18) не должно быть стрелок, направленных справа налево;

19) номер начального события должен быть меньше номера конечного события;

20) не должно быть *висячих* событий (т.е. не имеющих предшествующих событий), кроме исходного;

21) не должно быть *тупиковых* событий (т.е. не имеющих последующих событий), кроме завершающего;

22) не должно быть циклов.

Важное значение для анализа сетевых моделей имеет понятие пути. ***Путь*** – это любая последовательность работ в сетевом графике (в частном случае это одна работа), в которой конечное событие одной работы совпадает с начальным событием следующей за ней работы. Различают следующие виды путей.

Полный путь – это путь от исходного события до завершающего. ***Критический путь*** – максимальный по продолжительности полный путь. Работы, лежащие на критическом пути, называют *критическими*.***Подкритический путь*** – полный путь, ближайший по длительности к критическому пути.

Построение сети является лишь первым шагом на пути к построению календарного плана. Вторым шагом является расчет сетевой модели, который выполняют прямо на сетевом графике, пользуясь простыми правилами.

2. Принципы решения задач.

К временным **параметрам событий** относятся:

- $\mathrm{T_p}(\mathrm{i})$ – ранний срок наступления события i. Это время, которое необходимо для выполнения всех работ, предшествующих данному событию *i*. Оно равно наибольшей из продолжительности путей, предшествующих данному событию.
- $T_{.}(i)$ – поздний срок наступления события *i*. Это такое время наступления события *i*, превышение которого вызовет аналогичную задержку наступления завершающего события сети. Поздний срок наступления любого события i равен разности между продолжительностью критического пути и наибольшей из продолжительностей путей, следующих за событием *i*.
- $R(i)$ – резерв времени наступления события *i*. Это такой промежуток времени, на который может быть отсрочено наступление события *i* без нарушения сроков завершения проекта в целом. Начальные и конечные события критических работ имеют нулевые резервы событий.

Рассчитанные численные значения временных параметров записываются прямо в вершины сетевого графика (см. рис.2).

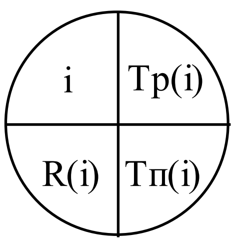


Рисунок 2 – Отображение временных параметров событий
в вершинах сетевого графика

Расчет ***ранних*** сроков свершения событий $T_{\text{р}}(i)$ ведется *от исходного (И) к завершающему* (*З*) событию.

Примечание. Поскольку длительность работы может быть как нормальной $T_{,}$, так и ускоренной $T\_$ (см. п. 3), то для общности изложения будем в дальнейшем обозначать текущую длительность работы буквой t с соответствующим кодом работы, например, $t(i, j)$, $t(k, j)$ и т.д.

3. Для исходного события И $\mathrm{T_р(И)=0}$.

4. Для всех остальных событий i $\mathrm{T_р(i)=\max[T_р(k)+t(k,i)]}$, где максимум берется по всем работам $\mathrm{(k,i)}$, входящим в событие i.

Иными словами, ранний срок наступления событий – это максимальная суммарная длина пути от исходного события до данного события.

Поздние сроки свершения событий $\mathrm{T_п(i)}$ рассчитываются *от завершающего к исходному* событию.

6. Для завершающего события З $\mathrm{T_п(З)=T_р(З)}$.

7. Для всех остальных событий $\mathrm{T_п(i)=\min[T_п(j)-t(i,j)]}$, где минимум берется по всем работам $\mathrm{(i,j)}$, выходящим из события i.

8. $\mathrm{R(i)=T_п(i)-T_р(i)}$.

Иными словами, поздний срок наступления событий есть разность между продолжительностью критического пути и максимальной продолжительностью работ, лежащих на пути от данного события до завершающего

К наиболее важным временным **параметрам работ** относятся:

- $\mathrm{T_{рн}(i,j)}$ - ранний срок начала работы;
- $\mathrm{T_{пн}(i,j)}$ - поздний срок начала работы;
- $\mathrm{T_{ро}(i,j)}$ - ранний срок окончания работы;
- $\mathrm{T_{по}(i,j)}$ - поздний срок окончания работы;

Для критических работ $\mathrm{T_{рн}(i,j)=T_{пн}(i,j)}$ и $\mathrm{T_{ро}(i,j)=T_{по}(i,j)}$.

- $\mathrm{R_п(i,j)}$ - полный резерв работы показывает максимальное время, на которое может быть увеличена продолжительность работы $\mathrm{(i,j)}$ или отсрочено ее начало, чтобы продолжительность проходящего через нее максимального пути не превысила продолжительности критического пути. Важнейшее свойство полного резерва работы $\mathrm{(i,j)}$ заключается в том, что его частичное или полное использование уменьшает полный резерв у работ, лежащих с работой $\mathrm{(i,j)}$ на одном пути. Таким образом, полный резерв принадлежит не одной данной работе $\mathrm{(i,j)}$, а всем работам, лежащим на путях, проходящим через эту работу.
- $\mathrm{R_c(i,j)}$ – свободный резерв работы показывает максимальное время, на которое можно увеличить продолжительность работы $\mathrm{(i,j)}$ или отсрочить ее начало, не меняя ранних сроков начала последующих работ. Использование свободного резерва одной из работ не меняет величины свободных резервов остальных работ сети.

Временные параметры работ сети определяются на основе ранних и поздних сроков событий.

7) $T_{рн}(i,j)=T_р(i)$;

8) $T_{ро}(i,j)=T_р(i)+t(i,j)$ или $T_{ро}(i,j)=T_{рн}(i,j)+t(i,j)$;

9) $T_{по}(i,j)=T_п(j)$;

10) $T_{пн}(i,j)=T_п(j)-t(i,j)$ или $T_{пн}(i,j)=T_{по}(i,j)-t(i,j)$;

11) $R_п(i,j)=T_п(j)-T_р(i)-t(i,j)$;

12) $R_c(i,j)=T_р(j)-T_р(i)-t(i,j)$.

Временные параметры работ вносятся в таблицу. При этом коды работ записывают в определенном порядке: сначала записываются все работы, выходящие из исходного, т.е. первого, события, затем - выходящие из второго события, потом - из третьего и т.д.

Резервами времени, кроме работ и событий, обладают полные пути сетевой модели. Разность между продолжительность критического пути $T(L_{кр})$ и продолжительностью любого другого полного пути $T(L_п)$ называется полным резервом времени пути $L_п$, т.е. $R(L_п)=T(L_{кр})-T(L_п)$. Этот резерв показывает, на сколько в сумме может быть увеличена продолжительность всех работ данного пути L, чтобы при этом не изменился общий срок окончания всех работ.

Методика оптимизации загрузки сетевых моделей по критерию "минимум исполнителей".

При оптимизации использования ресурса рабочей силы чаще всего сетевые работы стремятся организовать таким образом, чтобы:

- количество одновременно занятых исполнителей было минимальным;
- выровнять потребность в людских ресурсах на протяжении срока выполнения проекта.

Суть оптимизации загрузки сетевых моделей по критерию "минимум исполнителей" заключается в следующем: необходимо таким образом организовать выполнения сетевых работ, чтобы количество одновременно работающих исполнителей было минимальным. Для проведения подобных видов оптимизации необходимо построить и проанализировать *график привязки* и *график загрузки*.

График привязки отображает взаимосвязь выполняемых работ во времени и строится на основе данных либо о продолжительности работ (в данной лабораторной это $T_Н$), либо о ранних сроках начала и окончания работ. При первом способе построения необходимо помнить, что выполнение работы (i, j) может начаться только после того, как будут выполнены все предшествующие ей работы (k, j). ***По вертикальной оси графика привязки*** откладываются ***коды работ***, ***по горизонтальной оси*** - ***длительность работ*** (раннее начало и раннее окончание работ).

На *графике загрузки**по горизонтальной оси откладывается время***, например в днях, ***по вертикальной - количество человек***, занятых работой в каждый конкретный день. Для построения графика загрузки необходимо:

- на графике привязки над каждой работой написать количество ее исполнителей;
- подсчитать количество работающих в каждый день исполнителей и отложить на графике загрузки.

<u>Для удобства построения и анализа графики загрузки и привязки следует располагать один над другим</u>.

Описанные виды оптимизации загрузки выполняются за счет сдвига во времени некритических работ, т.е. работ, имеющих полный и/или свободный резервы времени. Полный и свободный резервы любой работы можно определить без специальных расчетов, анализируя только график привязки. Сдвиг работы означает, что она будет выполняться уже в *другие дни* (т.е. изменится время ее начала и окончания), что в свою очередь приведет к изменению количества исполнителей, работающих одновременно (т.е. уровня ежедневной загрузки сети).

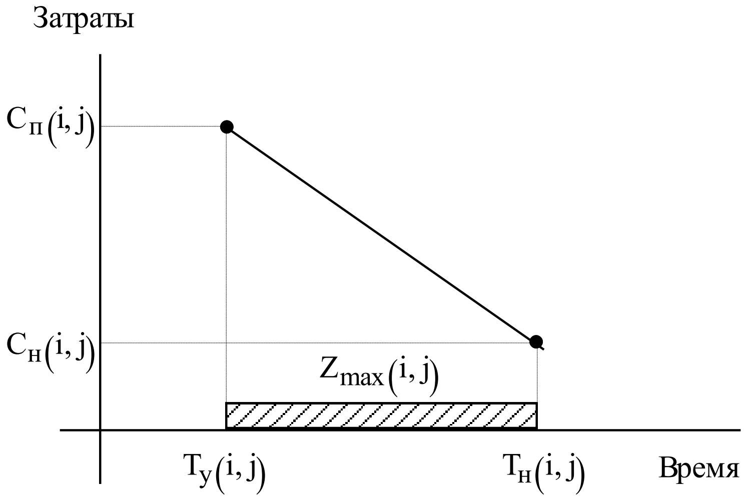
Методика оптимизации сетевых моделей по критерию "время-затраты"

Целью оптимизации по критерию "Время - затраты" является сокращение времени выполнения проекта в целом. Эта оптимизация имеет смысл только в том случае, когда время выполнения работ может быть уменьшено за счет подключения дополнительных ресурсов, что приводит к повышению затрат на выполнение работ (см. рис.3). Для оценки величины дополнительных затрат, связанных с ускорением выполнения той или иной работы, используются либо нормативы, либо данные о выполнении аналогичных работ в прошлом. Под параметрами работ $C_Н$ (i, j) и $C_П$ (i, j) понимаются так называемые *прямые* затраты, непосредственно связанные с выполнением конкретной работы.

$C_Н$ (i, j) – прямые затраты при нормальном течении событий;

$C_П$ (i, j) – прямые затраты при сокращении времени совершения событий до уровня подкритического.

Таким образом, *косвенные* затраты типа административно-управленческих в процессе сокращения длительности проекта во внимание не принимаются, однако их влияние учитывается при выборе окончательного календарного плана проекта.



где $T_у$(i, j) – ускоренное время выполнения события,

$T_н$(i, j) – нормальное время выполнения события.

Рисунок 3 - Зависимость прямых затрат на работу от времени ее выполнения

Важными параметрами работы (i, j) при проведении данного вида оптимизации являются:

- *коэффициент нарастания затрат*

$$k(i, j) = \frac{C_П(i, j) - C_Н(i, j)}{T_Н(i, j) - T_У(i, j)},$$

который показывает затраты денежных средств, необходимые для сокращения длительности работы (i, j) на один день;

- *запас времени* для сокращения длительности работы в текущий момент времени

$$Z_Т(i, j) = t_Т(i, j) - T_У(i, j),$$

где $t_Т(i, j)$ - длительность работы (i, j) на текущий момент времени.

Максимально возможное значение запаса времени работы равно

$$Z_{max}(i, j) = T_н(i, j) - T_у(i, j).$$

Эта ситуация имеет место, когда длительность работы (i, j) еще ни разу не сокращали, т.е. $t_т(i, j) = T_н(i, j)$.

Общая схема проведения оптимизации "время - затраты"

1. Исходя из нормальных длительностей работ $T_н(i, j)$, определяются критические $L_{кр}$ и подкритические $L_п$ пути сетевой модели и их длительности $T_{кр}$ и $T_п$.

2. Определяется сумма прямых затрат на выполнение всего проекта $C^0_{пр}$ при нормальной продолжительности работ.

3. Рассматривается возможность сокращения продолжительности проекта, для чего анализируются параметры критических работ проекта.

3.3. Для сокращения выбирается критическая работа с min коэффициентом нарастания затрат $k(i, j)$, имеющая ненулевой запас времени сокращения $Z_т(i, j)$.

3.4. Время $\Delta t(i, j)$, на которое необходимо сжать длительность работы (i, j), определяется как

$$\Delta t(i, j) = \min[Z_{\square}(i, j), \Delta T],$$

где $\Delta T = T_{кр} - T_п$ – разность между длительностью критического и подкритического путей в сетевой модели.

Необходимость учета параметра ΔT вызвана нецелесообразностью сокращения критического пути более чем на ΔT единиц времени. В этом случае критический путь перестанет быть таковым, а подкритический путь наоборот станет критическим, т.е. длительность проекта в целом принципиально не может быть сокращена больше, чем на ΔT.

4. В результате сжатия критической работы временные параметры сетевой модели изменяются, что может привести к появлению других критических и подкритических путей. Вследствие удорожания ускоренной работы общая стоимость проекта увеличивается на величину

$$\Delta C_{пр} = k(i, j)\Delta t(i, j).$$

5. Для измененной сетевой модели определяются новые критические и подкритические пути и их длительности, после чего необходимо продолжить оптимизацию с шага 3. При наличии ограничения в денежных средствах, их исчерпание является причиной окончания оптимизации. Если не учитывать подобное ограничение, то оптимизацию можно продолжать до тех пор, пока у работ, которые могли бы быть выбраны для сокращения, не будет исчерпан запас времени сокращения.

3.7.3 Результаты и выводы:

Сетевое Планирование и Управление – это комплекс графических и расчетных методов, организационных мероприятий, обеспечивающих моделирование, анализ и динамическую перестройку плана выполнения сложных проектов и разработок, например, таких как: строительство и реконструкция каких-либо объектов; выполнение научно-исследовательских и конструкторских работ; подготовка производства к выпуску продукции; перевооружение армии; развертывание системы медицинских или профилактических мероприятий.

3.8Практическое занятие 14,15 (4 часов)

Тема: «Операции массового обслуживания»

3.8.1 Задание для работы:

1. Структура и классификация систем массового обслуживания
2. Марковский случайный процесс
3. Системы массового обслуживания с отказом
4. Системы массового обслуживания с неограниченным ожиданием
5. Замкнутые системы массового обслуживания

3.8.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Структура и классификация систем массового обслуживания

Нередко возникает необходимость в решении вероятностных задач, связанных с системами массового обслуживания (СМО), примерами которых могут быть:

- Билетные кассы;
- Ремонтные мастерские;
- Торговые, транспортные, энергетические системы;
- Системы связи;
- и т.д.

Общность таких систем выявляется в единстве математических методов и моделей, применяемых при исследовании их деятельности.

Рис. 1. Основные сферы применения ТМО

На вход в СМО поступает поток требований на обслуживание. Например, клиенты или пациенты, поломки в оборудовании, телефонные вызовы. Требования поступают нерегулярно, в случайные моменты времени. Случайный характер носит и продолжительность обслуживания. Это создает нерегулярность в работе СМО, служит причиной ее перегрузок и недогрузок.

Системы массового обслуживания обладают различной структурой, но обычно в них можно выделить четыре основных элемента:

5. Входящий поток требований.
6. Накопитель (очередь).
7. Приборы (каналы обслуживания).
8. Выходящий поток.

Рис. 2. Общая схема систем массового обслуживания

Рис. 3. Модель работы системы
(стрелками показаны моменты поступления требований в систему, прямоугольниками – время обслуживания)

2. Марковский случайный процесс

Система массового обслуживания представляет собой систему дискретного типа с конечным или счетным множеством состояний, а переход системы из одного состояния в другое происходит скачком, когда осуществляется какое-нибудь событие.

Процесс называется ***процессом с дискретными состояниями***, если его возможные состояния $S_1, S_2, S_3, \ldots$ можно заранее перенумеровать, и переход системы из состояния в состояние происходит практически мгновенно.

Такие процессы бывают двух типов: с дискретным или непрерывным временем.

В случае дискретного времени переходы из состояния в состояние могут происходить в строго определенные моменты времени. Процессы с непрерывным временем отличаются тем, что переход системы в новое состояние возможен в любой момент времени.

Случайным процессом называется соответствие, при котором каждому значению аргумента (в данном случае – моменту из промежутка времени проводимого опыта) ставится в соответствие случайная величина (в данном случае – состояние СМО). ***Случайной величиной*** называется величина, которая в результате опыта может принять одно, но неизвестное заранее, какое именно, числовое значение из данного числового множества.

Поэтому для решения задач теории массового обслуживания необходимо этот случайный процесс изучить, т.е. построить и проанализировать его математическую модель.

Случайный процесс называется ***марковским***, если для любого момента времени t_0 вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент t_0 и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние.

Переходы системы из состояния в состояние происходит под действием каких-то потоков (поток заявок, поток отказов). Если все потоки событий, приводящие систему в новое состояние, – простейшие пуассоновские, то процесс, протекающий в системе, будет марковским, так как простейший поток не обладает последствием: в нем будущее не зависит от прошлого.

Пример марковского процесса: система S – счетчик в такси. Состояние системы в момент t характеризуется числом километров (десятых долей километров), пройденных автомобилем до данного момента. Пусть в момент t_0 счетчик показывает S_0. Вероятность того, что в момент $t > t_0$ счетчик покажет то или иное число километров (точнее, соответствующее число рублей) S_1, зависит от S_0, но не зависит от того, в какие моменты времени изменялись показания счетчика до момента t_0.

Многие процессы можно приближенно считать марковскими. Например, процесс игры в шахматы: система S – группа шахматных фигур. Состояние системы характеризуется числом фигур противника, сохранившихся на доске в момент t_0. Вероятность того, что в момент $t > t_0$ материальный перевес будет на стороне одного из противников, зависит в первую очередь от того, в каком состоянии находится система в данный момент t_0, а не от того, когда и в какой последовательности исчезли фигуры с доски до момента t_0.

3. Системы массового обслуживания с отказом

В системах с отказами заявка, поступившая в момент, когда все каналы обслуживания заняты, немедленно получает отказ, покидает систему и в дальнейшем в процессе обслуживания не участвует.

Имеется n каналов в обслуживании, на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуживания имеет интенсивность μ (величина, обратная среднему времени обслуживания $t_{обсл}$). Требуется найти вероятности состояний СМО и характеристики ее эффективности.

Так как оба потока – заявок и освобождений – простейшие, процесс, протекающий в системе, будет марковским. Рассмотрим ее как систему с конечным множеством состояний:

$S_0 -$ свободны все каналы;

$S_1 -$ занят ровно один канал;

…

$S_k -$ заняты k каналов;

…

$S_n -$ заняты все n каналов/

Через $P_k(t)$ обозначим вероятность того, что в момент времени t система будет находиться в состоянии S_k.

Простейшие задачи для систем массового обслуживания с отказами были впервые решены А.К. Эрлангом. Им же были выведены формулы оценки функционирования этих систем при условии поступления простейшего потока заявок и для показательного закона распределения времени обслуживания.

Для установившегося процесса обслуживания при этих условиях Эрланг получил следующие зависимости.

- Вероятность того, что обслуживанием заняты kаппаратов (линий, приборов и т.п.):

$$P_k = \frac{\frac{\rho^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}}, \qquad (0 \le k \le n), \tag{1}$$

где $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, k – количество занятых аппаратов,

λ – интенсивность потока заявок,

μ – интенсивность потока обслуживания.

Частные случаи:

- Вероятность простоя (того, что все обслуживающие аппараты свободны, нет заявок):

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}}, \tag{2}$$

- Вероятность отказа (вероятность того, что все обслуживающие приборы заняты):

$$P_{отк} = P_n = \frac{\frac{\rho^n}{n!}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}} = \rho^n \frac{P_0}{n!}. \tag{3}$$

Отсюда находим ***относительную пропускную способность***, т.е. среднюю долю пришедших заявок, обслуживаемых системой, – вероятность того, что заявка будет обслужена:

$$P_{обсл} = 1 - P_{отк} = 1 - \rho^n \frac{P_0}{n!}. \tag{4}$$

Абсолютную пропускную способность, т.е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени, получим, умножив интенсивность потока заявок на относительную пропускную способность:

$A = \lambda P_{обсл}.$

Абсолютная пропускная способность – это интенсивность потока обслуженных системой заявок, а каждый занятый канал в единицу времени обслуживает в среднем μ заявок. Значит, ***среднее число занятых каналов*** равно

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \rho P_{обсл.} \quad (5)$$

Доля каналов, занятых обслуживанием (коэффициент загрузки):

$$q = \frac{\bar{k}}{n}.$$

3.4. Системы массового обслуживания с неограниченным ожиданием

Пусть имеется *n*-канальная СМО с очередью, на которую не наложено ограничений ни по длине очереди, ни по времени ожидания. В силу неограниченности очереди каждая заявка рано или поздно будет обслужена, поэтому

$$P_{обсл} = 1, \qquad P_{отк} = 0.$$

Для СМО с неограниченной очередью накладывается ограничение $\frac{\rho}{n} < 1$.

Если это условие нарушено, то очередь растет до бесконечности, наступает явление «взрыва».

- ***Вероятность простоя*** **(**того, что все обслуживающие аппараты свободны, нет заявок):

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}}, \quad (7)$$

- ***Вероятность занятости обслуживанием k каналов***:

$$P_k = \rho^k \frac{P_0}{n!}, \qquad 1 \le k \le n. \quad (8)$$

- ***Вероятность занятости обслуживанием всех каналов при отсутствии очереди***:

$$P_n = \rho^n \frac{P_0}{n!}. \quad (9)$$

- ***Вероятность наличия очереди*** есть вероятность того, что число требований в системе больше числа каналов:

$$P_{оч} = \rho^{n+1} \frac{P_0}{n!(n-\rho)}. \quad (10)$$

- ***Вероятность для заявки попасть в очередь*** есть вероятность занятости всех каналов, эта вероятность равна сумме вероятностей наличия очереди и занятости всех *n* каналов при отсутствии очереди:

$$P_{зан} = P_n + P_{оч} = \rho^n \frac{P_0}{(n-1)!(n-\rho)}. \quad (11)$$

- ***Среднее число занятых обслуживанием каналов***:

$$\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho. \quad (12)$$

- ***Доля каналов, занятых обслуживанием***:

$$q = \frac{\bar{k}}{n}. \quad (13)$$

- ***Среднее число заявок в очереди*** (длина очереди)

$$L=\rho^{n+1}\frac{P_0}{(n-1)!(n-\rho)^2}. \tag{14}$$

- ***Среднее число заявок в системе***

$$M=L+\bar{k}=L+\rho. \tag{15}$$

- ***Среднее время ожидания заявки в очереди***

$$t=\frac{L}{\lambda}. \tag{16}$$

- ***Среднее время пребывания заявки в системе***

$$T=t+\frac{1}{\mu},\qquad T=\frac{M}{\lambda}. \tag{17}$$

5. Замкнутые системы массового обслуживания

Имеется n-канальная СМО с ожиданием, в которой количество заявок, стоящих в очереди, ограничено числом m, т.е. заявка, заставшая все каналы занятыми, становится в очередь, только если в ней находится менее m заявок.

Если число заявок в очереди равно m, то последняя прибывшая заявка в очередь не становится и покидает систему необслуженной.

Системы с ограниченной очередью являются обобщением двух рассмотренных ранее СМО: при $m = 0$ получаем СМО с отказами, при $m = \infty$ получаем СМО с ожиданием.

- ***Вероятность простоя*** (того, что все обслуживающие аппараты свободны, нет заявок):

$$P_0=\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\left(1-\left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right)}, \tag{18}$$

- ***Вероятность отказа в обслуживании***равна вероятности P_{n+m} того, что в очереди уже стоят m заявок:

$$P_{отк}=P_{n+m}=\rho^{n+m}\frac{P_0}{n!\cdot n^m}. \tag{19}$$

- ***Относительная пропускная способность*** есть величина, дополняющая вероятность отказа до 1, т.е. вероятность обслуживания:

$$P_{обсл}=1-P_{отк}. \tag{20}$$

- ***Абсолютная пропускная способность***определяется равенством:

$$A=\lambda\left(1-P_{отк}\right)=\lambda P_{обсл}. \tag{21}$$

- ***Среднее число занятых обслуживанием каналов***:

$$\bar{k}=\frac{A}{\mu}=\rho P_{обсл}. \tag{22}$$

- ***Среднее число заявок в очереди*** (средняя длина очереди)

$$L=\frac{\rho^n P_0\left(\frac{\rho}{n}-(m+1)\left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1}+m\left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+2}\right)}{n!\left(n-\frac{\rho}{n}\right)^2}. \tag{23}$$

- ***Среднее время ожидания обслуживания в очереди***

$$t = \frac{L}{\lambda}. \tag{24}$$

- ***Среднее число заявок в системе***

$$M = L + \bar{k}. \tag{25}$$

- ***Среднее время пребывания заявки в системе***

$$T = t + \frac{1}{\mu}, \qquad T = \frac{M}{\lambda}. \tag{26}$$

3.8.3 Результаты и выводы:

Система массового обслуживания представляет собой систему дискретного типа с конечным или счетным множеством состояний, а переход системы из одного состояния в другое происходит скачком, когда осуществляется какое-нибудь событие.

Процесс называется ***процессом с дискретными состояниями***, если его возможные состояния $S_1, S_2, S_3, \ldots$ можно заранее перенумеровать, и переход системы из состояния в состояние происходит практически мгновенно.

Такие процессы бывают двух типов: с дискретным или непрерывным временем.