ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Информатика и прикладная математика»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.Б.06 Математика

Направление подготовки 38.03.06 Торговое дело

Профиль подготовки Коммерция в АПК

Квалификация (степень) выпускника *бакалавр*

Форма обучения *очная*

Оренбург 201_ г.

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1. 1 Лекция №1 (2 часа).

Тема: «Понятие множества. Операции над множествами. Функциональная зависимость. Теория пределов числовых последовательностей»

1.1.1 Вопросы лекции:

1. Понятие о числовых множествах. Операции над множествами. Окрестность точки.
2. Понятие функции. Способы задания функции, график, область определения.
3. Специальные классы функций. Обратная и сложная функции
4. Числовые последовательности, их сходимость.

1.1.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие о числовых множествах. Операции над множествами. Окрестность точки.

Важнейший принцип аналитической геометрии: между множеством действительных чисел и множеством точек числовой прямой существует взаимно однозначное соответствие.

Свойство плотности: между двумя любыми числами на числовой прямой всегда существует бесконечное множество как рациональных, так и иррациональных чисел. Например, между 0,9 и 1 имеется число 0,99 (но 0,(9)=1).

[a,b] – сегмент, отрезок, замкнутый промежуток: [a,b]={x: a≤x≤b}.

(a,b) – интервал или открытый промежуток: (a,b)={x: a<x<b}.

Определение: ε-окрестностью точки **a** (ε>0) называется интервал вида (a-ε; a+ε) (рис. 1). Для нее используется обозначение U(a ;ε). Здесь **a** – центр, а ε – радиус окрестности.

Окрестности точки бывают как угодно малые, но самой малой окрестности не существует.

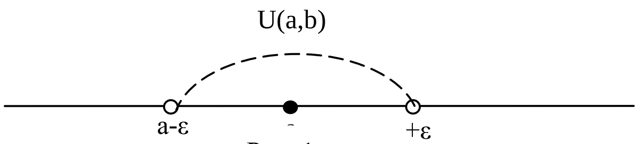


Рис. 1

Отношения «Точка x принадлежит **ε**-окрестности точки **a**» можно записать любыми из следующих эквивалентных способов:

1) $x\in U(a;\varepsilon)$; 2) $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$; 3) $x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$; 4) $\rho(x,a)<\varepsilon$;

5) $|x-a|<\varepsilon$; 6) $x=a\pm\varepsilon$.

Пусть дано числовое множество А.

Определение: Множество А называется ограниченным сверху, если существует такое число М, что для всех элементов x данного множества выполняется неравенство $x\le M$.

А ограничено сверху $\overset{def}{\Leftrightarrow}\exists M\forall x\quad (x\in A)\Rightarrow(x\le M)$

М- называется верхней границей множества А.

Определение: А – ограничено снизу $\overset{def}{\Leftrightarrow} \exists m \forall x (x \in A) \Rightarrow (x \geq m)$

Если множество ограничено и сверху и снизу, то оно называется ограниченным.

Примеры

1. Рассмотрим N- множество натуральных чисел. Сверху оно не ограничено, а снизу ограничено, и его нижними границами являются, например, числа 1 или 0, или -2,5 и т.д.

2. А – множество правильных дробей.

А- ограничено, т.к. его нижней границей является, например, 0, а верхней, например, 1.

Замечание: не следует путать понятие конечного множества и ограниченного. Всякое конечное множество является ограниченным. Но не всякое ограниченное множество является конечным. Например, множество правильных дробей является ограниченным, хотя и бесконечным.

Множество считается неограниченным, если оно не ограничено хотя бы с одной стороны.

Определение: Точной верхней границей множества называется наименьшая из всех верхних границ. Обозначается $\sup A$ $(\mathrm{sup}re'mumA)$. Аналогично определяется точная нижняя граница: $\inf A$ $(\mathrm{inf}\, imumA)$.

Аксиома непрерывности множества R: Если множество ограниченно сверху, то оно обязательно имеет точную верхнюю границу.

Аналогичное утверждение верно и для нижней границы.

Данная аксиома характеризует свойство непрерывности (сплошности, полноты) множества действительных чисел.

2. Понятие функции. Способы задания функции, график, область определения

Пусть даны два множества X и У.

Определение: Функцией, отображающей *X* в *У*, называется соответствие, при котором каждому элементу *x* є *X* соответствует единственный элемент *y* є *У*. Обозначается это так: $f: X \to Y$. Множество *X* называется областью определения функции, множество *У* – областью значений функций. Значение функции в точке *x* обозначается *f(x)*.

Замечание: *f* и *f(x)* – означают не одно и то же, так как *f* –функция, т.е. некоторое соответствие, а *f(x)*– элемент из *У*, т.е. значение функции в данной точке *x*. Однако в дальнейшем, где это не может внести путаницу, мы будем функцию *f* также обозначать *f(x)*.

Определение: Множеством значений функции называется те значения *у* из *У*, которые отвечают хотя бы одному значению *х*є*X*. Обозначается множество значений $f(X) = \{y : (y = f(x)) \wedge (x \in X)\}$.

Например, если $f(x) = x^2$, то $f([-1;2]) = [0;4]$, $\sin R = [-1;1]$ и т.д. Всегда $f(X) \subseteq Y$. Если *f(x)* совпадает с *У*, то мы говорим, что функция *f* отображает *X* на *У*. Обычно для задания функции достаточно знать область определения функции и закон соответствия.

Способы задания функции бывают следующие:

1) аналитический способ;

2) графическое задание;

3) табличный способ;

4) перечисление множества пар вида $(x; f(x))$ и так далее.

3. Специальные классы функций. Обратная и сложная функции

Определение: Функция *f* называется неубывающей (невозрастающей) на множестве *X*, если для любых x_1 и x_2 $(x_1 \in X, x_2 \in X)$. Из того, что $x_2 > x_1$ следует, что $f(x_2) \geq f(x_1)$ $(f(x_2) \leq f(x_1))$.

$f(x)$ - неубывающая (невозрастающая) на $X \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x_1, \forall x_2$ $(x_1 \in X) \wedge (x_2 \in X) \wedge (x_2 > x_1) \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$ $(f(x_2) \leq f(x_1))$.

Невозрастающие и неубывающие функции называются монотонными.

Если в предыдущем определении между значениями функции будет стоять знак строгого неравенства, то функция будет называться **возрастающей и убывающей** (функция тогда называется строго монотонной).

Определение: Функция f называется ограниченной на множестве X, если множество ее значений f(x), принимаемых на данном множестве X, является ограниченным.

Например, $\sin x$, $\cos x$ ограничены на множестве R, функция tgx в своей естественной области определения не ограничена, но она является ограниченной, например, на $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, так как $0 \leq tgx \leq 1$, если $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Определение: Функция f называется четной (нечетной), если выполняется:

1) Область определения симметрична относительно точки x=0, т.е. $\forall x$: $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$.

2) $\forall x \in D_f$: $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$

Функция определяет однозначное соответствие в одну сторону, но не требуется, чтобы обратное соответствие в одну сторону, но не требуется, чтобы обратное соответствие тоже было однозначным. Однако, если соответствие $f: X \to Y$, определяемое данной функцией, является взаимно однозначным, то функция **называется обратимой**, а соответствие $Y \to X$ называется **обратной функцией и обозначается** f^{-1}**.**

Приняты обозначения: область определения - D_f; множество значений - E_f. При этом всегда $f(D_f) = E_f \subset Y$, где Y – область значений.

4. Числовые последовательности, их сходимость.

Определение. Числовой последовательностью называется функция, заданная на множестве всех натуральных числе:

$f(1), f(2), f(3), ..., f(n), f(n+1), ...$

или

$x_1, x_2, x_3, ..., x_n, x_{n+1}, ... = \{x_n\}$

x_n - общий член последовательности.

Способы задания последовательности могут быть такие же, как и у других функций:

1. Аналитический. Например, $x_n = \dfrac{n}{n+1}$, $\quad$ *т.е.* $\{x_n\} = \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots$

2. «Кусочный». Например,

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, \text{ если } n - \text{нечетное} \\ 0 \text{ если } n - \text{четное}, \quad \text{т.е.} \quad \{x_n\} = 1, 0, \dfrac{1}{3}, 0, \dfrac{1}{5}, 0, ... \end{cases}$$

В отличие от других функций для последовательности есть своеобразный способ задания – рекуррентный. Например, $x_1 = \sqrt{2}$; $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ $\forall n \in N$ т.е.

Определение: Последовательность $\{x_n\}$ называется неубывающей (невозрастающей), если $\forall n \in N : x_{n+1} \ge x_n$ $\quad (x_{n+1} \le x_n)$.

Замечание: Не следует путать понятие последовательности и множества членов последовательности. Сама последовательность $\{x_n\}$ есть функция, а члены последовательности x_n – это значения функции.

Обозначается: $\{x_n\}$ - последовательность,

$\{x_n\}$ - множество членов последовательности.

1. 2 Лекция № 2(2часа).

Тема: «Теория пределов функции одной переменной. Непрерывность функции одной переменной»

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Предел функции в точке. Свойства функций, имеющих предел в точке.
2. Основная лемма о пределах, арифметические операции над пределами функции в точке.
3. Односторонние пределы функции. Связь между односторонними пределами функции и пределом функции в точке. Предел функции на бесконечности.
4. Первый и второй замечательные пределы.
5. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства. Сравнение бесконечно малых функций. Таблица эквивалентных бесконечно малых.
6. Непрерывность функции в точке и на множестве. Точки разрыва и их классификация.

1.2.2 Краткое содержание вопросов:

1. Предел функции в точке. Свойства функций, имеющих предел в точке.

Определение Гейне: (Определение на языке последовательностей) А называется пределом функции в точке а, если какую бы последовательность $\{x_n\}$ значений аргумента, стремящуюся к а мы ни взяли, соответствующая последовательность $f\{x_n\}$ значений функции будет стремиться при этом к одному и тому же А. Записывается это определение так:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \{x_n\}, x_n \in D_f \ (x_n \to a) \Rightarrow (f(x_n) \to A)$$

При этом а и А могут означать либо числа, либо символы ∞, +∞, -∞.

2. Основная лемма о пределах, арифметические операции над пределами функции в точке.

Теорема об арифметических действиях над пределами: Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = A$, а $\lim_{x\to a} y(x) = B$. Тогда существует в точке а пределы суммы, произведения и частного этих функций (последнее, если $B \neq 0$), и при этом

$\lim_{x\to a}(f(x)+y(x)) = A+B$; $\lim_{x\to a} f(x)\cdot y(x) = A\cdot B$; $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{y(x)} = \dfrac{A}{B}$.

$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot y(x)) = A\cdot B$

3. Односторонние пределы функции. Связь между односторонними пределами функции и пределом функции в точке. Предел функции на бесконечности.

Левый предел функции: $\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$.

Правый предел: $\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$.

4. Первый и второй замечательные пределы.

Первый замечательный предел $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ и второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

5. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства. Сравнение бесконечно малых функций. Таблица эквивалентных бесконечно малых.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, то функция $f(x)$ называется **бесконечно малой** в окрестности точки x_0.

Например: функция $y=x-4$ при $x\to 4$ является бесконечно малой.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, то функция называется **бесконечно большой** в окрестности точки x_0.

Например: $y=x^3$ при $x\to\infty$ является бесконечно большой

Замечание: данные выше определения справедливы и при $x\to\pm\infty$.

Бесконечно малые функции обладают следующими свойствами:

1) алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно

малых функций в окрестности некоторой точки есть функция бесконечно малая в окрестности той же точки;

2) произведение любого конечного числа бесконечно малых функций в окрестности некоторой точки есть функция, бесконечно малая в окрестности той же точки;

3) произведение бесконечно малой функции в окрестности некоторой точки на функцию ограниченную, есть функция, бесконечно малая в окрестности той же точки.

Бесконечно малые функции в окрестности некоторой точки x_0 $\alpha(x)$ и

$\beta(x)$ называются **бесконечно малыми одного порядка малости,** если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0 .$$

Если $c=0$ то $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой функцией более высокого порядка малости** по сравнению с $\beta(x)$. Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **эквивалентными** в окрестности точки x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$.

Обозначение: $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Может также понадобится таблица бесконечно малых в окрестности x_0 функций, эквивалентных данным.

$$\left.\begin{array}{l}
tgmx \sim mx \\
sain\, mx \sim mx \\
\sqrt[3]{x+1-1} \sim \frac{1}{3}x \\
arctg\, mx \sim mx \\
\sqrt{x+1}-1 \sim \frac{x}{2} \\
1-cos^2 x \sim \frac{3}{2} sin^2 x \\
arcsin\, mx \sim mx \\
1-cos\, x \sim \frac{x^2}{2}
\end{array}\right\} npu \;\; x \to 0$$

6. Непрерывность функции в точке и на множестве. Точки разрыва и их классификация.

Определение: Функция f называется непрерывной в точке a, если в этой точке существуют как ее значения, так и предел.

Определение: Пусть дана функция f с областью определения D_f. Тогда точка **a** называется **точкой разрыва** данной функции, если

1. $a \in \overline{D}_f$

2. Функция не является непрерывной в этой точке.

Проведем классификацию точек разрыва.

Определение: Если функция в точке разрыва имеет конечные односторонние пределы, то в этом случае разрыв функции называется разрывом **1-ого рода** или **скачком**.

Определение. Точка **a** называется точкой разрыва **2-ого рода**, если хотя бы один из односторонних пределов бесконечен или вообще не существует.

1. 3-4 Лекция № 3-4(4 часа).

Тема: «Задачи, приводящие к понятию производной. Производная функции в точке. Свойства производных»

1.3.1-4.1 Вопросы лекции:

1. Задачи, приводящие к понятию производной
2. Производная функции в точке. Ее геометрический и физический смысл.
3. Необходимое условие дифференцируемости функции. Таблица основных производных. Правила дифференцирования
4. Производная сложной, обратной функции
5. Основные теоремы дифференциального исчисления

1.3.2-4.2Краткое содержание вопросов:

1. Задачи, приводящие к понятию производной

Задачи, приводящие к понятию производной

1. Задача о касательной

Рассмотрим в прямоугольной декартовой системе координат график непрерывной функции $y=f(x)$ и любую точку $M_0(x_0;f(x_0))$, принадлежащую графику.

Придадим аргументу x в точке x_0 произвольное приращение $\Delta x \neq 0$. На графике получим точку $M(x_0+\Delta x;f(x_0+\Delta x))$. Через точки M_0 и M проведем секущую, в точке M_0 проведем касательную к графику функции.

Из школьного курса нам известно определение касательной к окружности, как прямой линии имеющей с окружностью единственную общую точку. Но в общем случае это определение неверно.

Дадим точное определение касательной к кривой. Устремим Δx к нулю. Тогда точка M, двигаясь по кривой, будет приближаться к точке M_0, остающейся неподвижной. Положение секущей будет изменяться: секущая будет стремиться занять положение касательной. Если бы точка M совместилась с точкой M_0, то секущая «превратилась» бы в касательную.

Угловой коэффициент секущей ($k_{\text{сек}}$) будет стремиться к угловому коэффициенту касательной ($k_{\text{кас}}$), т.е. $k_{кас} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k_{сек}$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник M_0NM:

$tg\alpha = \dfrac{NM}{M_0N} = \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Известно, что угловой коэффициент секущей равен тангенсу угла наклона этой прямой к оси OX.

Тогда $k_{кас} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k_{сек} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, если этот предел существует и конечен.

Таким образом, можно сформулировать определение: касательной к кривой, проведенной в точке x_0, называется прямая линия, имеющая с кривой единственную общую точку, угловой коэффициент которой равен конечному пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю, т.е.

$$k_{кас} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

2. Задача о мгновенной скорости

Пусть материальная точка движется по закону $S=S(t)$, где S – пройденный путь, t – время. Найдем скорость движения в момент времени t_0 (мгновенная скорость).

Зафиксируем момент времени t_0, придадим аргументу t в точке t_0 произвольное приращение $\Delta t \neq 0$. Функция $S=S(t)$ получит приращение $\Delta S=S(t_0+\Delta t)-S(t_0)$. За промежуток времени Δt средняя скорость точки будет $V_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$. Устремим Δt к нулю. Чем меньше Δt, тем меньше средняя скорость отличается от скорости в момент времени t_0. Поэтому под скоростью точки в момент времени t_0 (мгновенная скорость) понимается предел средней скорости за промежуток от t_0 до $t_0+\Delta t$, когда $\Delta t \to 0$, т.е. $V = \lim\limits_{\Delta t \to 0} V_{cp} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$.

В первой и во второй задачах, а также во многих других, мы приходим к необходимости вычислять пределы определенного вида, а именно $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Регулярное использование этого предела повлекло за собой необходимость введения нового понятия – понятие производной.

2. Производная функции в точке. Ее геометрический и физический смысл.

Производной функции в точке x_0 называется число, равное пределу отношения приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx, при условии, что $\Delta x \to 0$, т.е. $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Производная функции имеет несколько обозначений: y', $f'(x)$. Процесс нахождения производной функции называется **дифференцированием** этой функции.

Из задачи о касательной вытекает геометрический смысл производной: производная $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой y=f(x) в точке x_0, $k_{кас} = f'(x)$.

Из задачи о мгновенной скорости следует механический смысл производной: производная пути по времени - $S'(t_0)$ - есть скорость точки в момент времени t_0.

Функция, имеющая производную в точке x_0 называется дифференцируемой в этой точке. Функция называется дифференцируемой на интервале (a; b), если она дифференцируема в каждой точке интервала.

3. Необходимое условие дифференцируемости функции. Таблица основных производных. Правила дифференцирования

Таблица производных элементарных функций

1) $\left(x^k\right)' = k \cdot x^{k-1}$

2) $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ 4) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

5) $(e^x)' = e^x$ 6) $(\sin x)' = \cos x$

7) $(\cos x)' = -\sin x$ 8) $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

9) $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ 10) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 12) $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

13) $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ 14) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$

Кроме таблицы производных основных элементарных функций при нахождении производных пользуются следующими правилами:

(c=const, u=u(x), v=v(x)) 1) $c'=0$ 2) $(u\pm v)'=u'\pm v'$ 3) $(cu)'=c\cdot u'$

4) $(uv)'=u'v+uv'$ 5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}, v \neq 0$

Установим связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции следующей **теоремой**: если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она в этой точке непрерывна. Обратная теорема неверна.

4. Производная сложной, обратной функции

Пусть переменная y есть функция от переменной $u(y=f(u))$, а переменная u в свою очередь есть функция от независимой переменной x: $u=z(x)$. Тогда y называется функцией от функции или сложной функцией $y=f(z(x))$.

Производная сложной функции $y=f(z(x))$ находится по правилу:

$$y' = f'_z \cdot z'_x.$$

5. Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема Ферма и Ролля

При исследовании дифференцируемой функции важно прежде всего найти точки, в которых ее производная равна нулю (или геометрически – точки кривой y=f(x), в которых касательная параллельна оси Ox). Такие точки принято называть стационарными.

Теоремы Ферма и Роля указывают условия, при которых функция имеет стационарные точки.

Пусть функция f(x) задана на отрезке [a,b] и в некоторой внутренней его точке x=c(a<c<b) имеет наибольшее или наименьшее значение. Если в этой точке существует производная f ’(x) , то она равна нулю f’(c) =0.

Теорема Ролля

Пусть функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и внутри его дифференцируема. Если f(a) = f(b), то между a и b найдётся хотя бы одна точка x = c, в которой производная данной функции равна нулю f '(c) = 0.

Теорема Лагранжа. Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, Ь\ и внутри его дифференцируема, то существует хотя бы одна точка x = c (a < c < b) такая, что в ней выполняется соотношение

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

1. 5 Лекция № 5(2часа).

Тема: «Приложения дифференциального исчисления функции одной переменной»

1.5.1 Вопросы лекции:

1. Признак монотонности функции на интервале
2. Экстремумы функции. Необходимый, достаточный признаки экстремума функции
3. Выпуклость и вогнутость графика функции, точки перегиба. Необходимое, достаточное условия точки перегиба
4. Асимптоты графика функции
5. Схема полного исследования функции и построение ее графика

1.5.2 Краткое содержание вопросов:

1. Признак монотонности функции на интервале

Функция $y=f(x)$ называется **возрастающей (убывающей)** на интервале $(a;b)$, если для любых значений x_1 и x_2 аргумента x, таких что $a<x_1<x_2<b$ выполняется неравенство $f(x_2)>f(x_1)$ $(f(x_2)<f(x_1))$.

Для нахождения интервалов возрастания и убывания функции нужно пользоваться **достаточными признаками монотонности**:

Если **производная дифференцируемой функции положительна** (**отрицательна**) на некотором интервале и стационарные точки (те в которых $f'(x)=0$) не заполняют сплошь никакого отрезка, то функция возрастает (убывает) на этом интервале.

2. Экстремумы функции. Необходимый, достаточный признаки экстремума функции

Если в некоторой окрестности точки x_0 для всех $x\neq x_0$ выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$ или $f(x)>f(x_0)$, то точка x_0 называется точкой экстремума функции $f(x)$ (соответственно точкой максимума или минимума).

Необходимое условие экстремума: Если функции $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум и дифференцируема в этой точке, то первая производная $f'(x_0)$ равна нулю. Таким образом, экстремум может наблюдаться в точках, в которых $f'(x_0)=0$ или не существует.

Достаточное условие экстремума: Если x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, то ее первая производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0: с плюса на минус — при максимуме, с минуса на плюс - при минимуме.

3. Выпуклость и вогнутость графика функции, точки перегиба. Необходимое, достаточное условия точки перегиба

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию $f''(x)>0$. Тогда кривая $y= f(x)$ выпукла вниз в точке с абсциссой x_0. Если же $f''(x)<0$, то кривая $y=f(x)$ в этой точке выпукла вверх.

Точка с абсциссой x_0 называется **точкой перегиба** кривой $y=f(x)$, если при переходе через точку x_0 меняется направление выпуклости.

Необходимое условие точки перегиба: если x_0 - точка перегиба кривой $y=f(x)$, то вторая производная $f''(x_0)$ либо равна нулю, либо не существует.

Достаточное условие точки перегиба: x_0 является точкой перегиба кривой $y=f(x)$, если в достаточно малой окрестности точки x_0 при переходе через точку x_0 вторая производная меняет знак.

4. Асимптоты графика функции

Прямая $y_{ac}=кx+b$ называется наклонной асимптотой кривой $y=f(x)$, если расстояние от точки $(x;f(x))$ кривой до этой прямой стремится к нулю при $x\to\infty$. При этом

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).$$

При k=0 имеем горизонтальную асимптоту: $y=b$.

Заметим, что если не существует хотя бы один из пределов, определяющих $к$ и b, то асимптоты нет.

Если $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$, то прямая $x=a$ называется вертикальной асимптотой графика функции.

5. Схема полного исследования функции и построение ее графика

Общая схема исследования функции и построения ее графика.

I. Элементарное исследование:

1) найти область определения функции;

2) исследовать функцию на четность (нечетность);

3) исследовать функцию на периодичность;

4) определить, если это не вызовет особых затруднений, точки пересечения графика с координатными осями.

II. Исследование графика функции по первой производной:

1) найти $y'(x)$;

2) используя необходимый признак существования экстремума найти точки,

«подозрительные» на экстремум, т.е. точки в которых $y'(x)=0$ или $y'(x)$ не существует;

3) нанести критические точки на область определения и найти знак производной во всех получившихся интервалах;

4) используя признаки монотонности определить характер монотонности функции на каждом интервале;

5) используя достаточный признак существования экстремума установить наличие экстремума и их характер;

6) вычислить значение функции в точках экстремума, если они есть.

III. Исследование графика функции по второй производной:

1) найти $y''(x)$;

2) используя необходимый признак существования точек перегиба, найти точки «подозрительные» на перегиб, т.е. точки в которых $y''(x)=0$ или $y''(x)$ не существует;

3) нанести полученные точки на область определения и найти знак второй производной в каждом из получившихся интервалов;

4) используя теорему о форме кривой установить характер выпуклости (вогнутости) графика функции на каждом промежутке;

5) используя достаточный признак существования точек перегиба установить их наличие;

6) вычислить значения функции в абсциссах точек перегиба.

IV. Исследовать поведение функции на границах области определения.

V. Исследовать кривую $y=f(x)$ на наличие асимптот и указать область значений функции.

VI.Построить график функции.

1. 6 Лекция № 6 (2 часа).

Тема: «Неопределенный интеграл, его свойства, методы вычисления»

1.6.1 Вопросы лекции:

1. Непосредственное интегрирование, метод подстановки, метод интегрирования по частям
2. Интегрирование рациональных дробей, тригонометрических выражений

1.6.2 Краткое содержание вопросов:

1. Непосредственное интегрирование, метод подстановки, метод интегрирования по частям

Метод интегрирования с помощью таблицы интегралов и свойств неопределенных интегралов обычно называют **методом непосредственного интегрирования.**

Одним из самых сильных методов интегрирования является **метод подстановки.** В его основе лежит легко проверяемая формула:

$$\int g(\omega(x))\omega'(x)dx = \begin{vmatrix} t = \omega(x) \\ dt = \omega'(x)dx \end{vmatrix} = \int g(t)dt = G(t) + C = G(\omega(x)) + C$$

Эту формулу следует применять тогда, когда первообразная для *g(t)* известна или легко находится.

Пример:

1. $\int \frac{arctg^3 x}{1+x^2}dx = \begin{vmatrix} t = arctgx \\ dt = \frac{1}{1+x^2}dx \end{vmatrix} = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C =$ (делаем обратную подстановку) $= \frac{1}{4}arctg^4 x + C.$

Метод **интегрирования по частям** основан на применении следующей формулы: $\int udv = uv - \int vdu,$ где *u(x),v(x)*- непрерывные и дифференцируемые на промежутке *X* функции.

Эта формула обычно бывает полезна при интегрировании функций следующего вида:

$(ax+b)^k \sin\beta x$ ($u=(ax+b)^k$)

$(ax+b)^k \cos\beta x$ ($u=(ax+b)^k$)

$(ax+b)^k \ln x$ ($u=lnx$)

$(ax+b)^k e^{\beta x}$ ($u=(ax+b)^k$)

$x^k arctgx$ ($u=arctgx$)

$x^k \arcsin x$ ($u=arcsinx$)

Пример:

1. $\int x^3 \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^3 dx & v = \frac{1}{4}x^4 \end{vmatrix} =$ (подставляем в правую часть формулы)

$$= \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C.$$

2. Интегрирование рациональных дробей, тригонометрических выражений

Способы интегрирования дробей вида $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

Рассмотрим дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$**,** где $P_n(x)$- многочлен *n*-ой степени от *x*, $Q_m(x)$- многочлен *m*-ой степени от *x*. Возможны случаи:

1. n≥m. В этом случае рассматриваемая дробь называется неправильной.

Разделив числитель на знаменатель, выделим целую часть дроби (многочлен степени *n-m*):

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R_{n-m}(x) + \frac{P^*{}_k(x)}{Q_m(x)}$, где ***k<m*** $\Rightarrow \frac{P^*{}_k(x)}{Q_m(x)}$ - правильная дробь.

2. ***n<m***. В этом случае имеем правильную дробь. Остановимся сначала на интегрировании «простых» дробей, их четыре типа.

I. $\frac{A}{x-a}$; II. $\frac{A}{(x-a)^k}$, $k=2,3,\ldots$;

III. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$; IV. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$, $m=2,3,\ldots$.

При этом x^2+px+q не имеет действительных корней, т.е. $D=p^2-4q<0$.

I. $\int\frac{A}{x-a}dx = A\int\frac{dx}{x-a} = \left|d(x-a)=1\cdot dx\right| = A\int\frac{d(x-a)}{x-a} =$ (формула 3 ТОИ)= $= Aln\left|x-a\right| + C.$

II. $\int\frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int\frac{dx}{(x-a)^k} = A\int(x-a)^{-k}\cdot d(x-a) =$ (формула 2 ТОИ) = $= A\frac{(x-a)^{k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$

III. Для интегрирования дробей третьего типа поступаем следующим образом (покажем на примере).

J= $\int\frac{3x+1}{x^2+4x+9}dx$

а) находим производную от знаменателя: $(x^2+4x+9)' = 2x+4$ и числитель представляем следующим образом:

$$3x+1 = \frac{3}{2}\cdot 2x+1 = \frac{3}{2}(2x+4-4)+1 = \frac{3}{2}(2x+4)-6+1 = \frac{3}{2}(2x+4)-5.$$

$$J=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+4)-5}{x^2+4x+9}dx=$$ (по свойству 3 получаем)=

$$=\frac{3}{2}\int\frac{(2x+4)dx}{x^2+4x+9}-5\int\frac{dx}{x^2+4x+9}=\frac{3}{2}J_1-5J_2.$$

В первом интеграле делаем подстановку

$t=x^2+4x+9\Rightarrow dt=(2x+4)dx,$ которая приводит его к виду:

$\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{3}{2}ln|t|+C=$ (формула 3 ТОИ) = $\frac{3}{2}ln\left|x^2+4x+9\right|+C.$

Во втором интеграле выделяем полный квадрат в знаменателе дроби: $x^2+4x+9=x^2+2\cdot 2x+2^2-2^2+9=(x+2)^2+5$ и делаем подстановку $t=x+2\Rightarrow$ $dt=dx$. Получаем:

$\int\frac{dx}{x^2+4x+9}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+5}=\begin{vmatrix}t=x+2\\ dt=dx\end{vmatrix}=\int\frac{dt}{t^2+5}=$ (формула 13 ТОИ)=

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{1}{\sqrt{5}}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{x+2}{\sqrt{5}}+C.$$

Окончательный результат: $J=\frac{3}{2}ln(x^2+4x+9)-\sqrt{5}arctg\frac{x+2}{\sqrt{5}}+C.$

IV.Дроби четвертого типа интегрируются в той же последовательности, что и дроби третьего типа, кроме того, применяется рекуррентная формула:

$J_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}J_n,$ где $J_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}.$

Зная, что $J_1=\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C,$ находим:

$$J_2=\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^2}\left(\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C\right)=\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}+\frac{1}{2a^3}arctg\frac{x}{a}+C.$$

По этой же формуле при n=2 находим:

$$J_3=\frac{1}{4a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{4a^2}\left(\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^3}arctg\frac{x}{a}+C\right)=$$

$=\frac{1}{4a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{8a^4}\cdot\frac{x}{x^2+a^2}++\frac{3}{8a^5}arctg\frac{x}{a}+C$ и т.д.

Таким образом, можно вычислить $\boldsymbol{J_n}$ для любого натурального n.

В некоторых случаях полезны **специальные подстановки**.

3. $\int \frac{dx}{5-3\cos x} = \left| \begin{array}{l} t = tg\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = arctgt \Rightarrow x = 2arctgt \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| =$

(это **«универсальная»** подстановка, которая применяется при интегрировании рациональных выражений от тригонометрических функций)= $\int \frac{2dt}{(1+t^2)(5-3\frac{1-t^2}{1+t^2})} =$

(выполняем тождественные преобразования)= $\int \frac{2dt}{8t^2+2} = \frac{2}{8}\int \frac{dt}{t^2+\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} =$

(формула 12 ТОИ)

$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1/2}arctg\frac{t}{1/2} + C = \frac{1}{2}arctg2t + C =$(переходим к *«х»*) $= \frac{1}{2}arctg\left(2tg\frac{x}{2}\right) + C$.

4. ***J***= $\int \frac{1+2tgx}{\sin^2 x + 4\cos^2 x}dx.$

При нахождении этого интеграла можно применить «универсальную» подстановку, но можно обойтись и без нее, сделав следующие преобразования:

1) в знаменателе $\cos^2 x$ вынесем за скобки, получим: ***J***=

$$\int \frac{1+2tgx}{(tg^2x+4)\cos^2 x}dx = \left| \begin{array}{l} t = tgx \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx \end{array} \right| = \int \frac{1+2t}{t^2+4}dt = \int \frac{1}{t^2+4}dt + \int \frac{2tdt}{t^2+4} =$$

$$= \frac{1}{2}arctg\frac{t}{2} + \int \frac{2tdt}{t^2+4} = \left| \begin{array}{l} z = t^2+4 \\ dz = 2tdt \end{array} \right| = \frac{1}{2}arctg\frac{t}{2} + \int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2}arctg\frac{t}{2} + ln|z| + C =$$

$$= \frac{1}{2}arctg\frac{tgx}{2} + ln\left|tg^2x+4\right| + C.$$

5. ***J***= $\int \cos^4 xdx$.

При четном показателе степени обычно применяют формулу «понижения степени» за счет перехода к двойному аргументу:

$$cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + cos\,2x), sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - cos\,2x).$$ В нашем случае будем иметь:

$$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \frac{1}{4}(1 + \cos 2x)^2 = \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x).$$

Поэтому

$$\int cos^4 x dx = \frac{1}{4}\int (1 + 2\,cos\,2x + cos^2 2x) dx = \frac{1}{4}\left(\int dx + 2\int cos\,2x dx + \int cos^2 2x dx\right).$$

Второй интеграл в скобках преобразуется к виду:

$$2 \cdot \int cos\,2x dx = \int cos\,2x dx(2x) =$$ (формула 5 ТОИ)= $sin2x+C$.

Для вычисления третьего интеграла еще раз применим формулу «понижения степени»:

$$\int cos^2 2x dx = \frac{1}{2}\int (1 + cos\,4x) dx = \frac{1}{2}\left(\int dx + \int cos\,4x dx\right) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{sin\,4x}{4} + C.$$

Окончательно будем иметь:

$$J = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}sin\,2x + \frac{1}{32}sin\,4x + C.$$

1. 7 Лекция № 7 (2 часа).

Тема: «Определенный интеграл, его свойства, методы вычисления.»

1.7.1 Вопросы лекции:

1. Основные свойства определенного интеграла, теорема о среднем. Интеграл с переменным верхним пределом, формула Ньютона-Лейбница
2. Методы вычисления определенного интеграла

1.7.2 Краткое содержание вопросов:

1. Основные свойства определенного интеграла, теорема о среднем. Интеграл с переменным верхним пределом, формула Ньютона-Лейбница

Пусть $f(x)$ – функция, непрерывная на данном отрезке $[a, b]$, где $a<b$ или $a>b$, а $F(x)$ – некоторая ее первообразная, т.е. $F'(x)=f(x)$ при $x \in [a,b]$.

Определение: Под определенным интегралом

$$\int_a^b f(x)dx$$

от данной функции $f(x)$ на данном отрезке $[a,b]$ понимается соответствующее приращение ее первообразной, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

(**формула Ньютона-Лейбница**).

Будем рассматривать свойства определенного интеграла по группам.

А. Общие свойства.

1. Величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt,$$

где x, t – любые переменные.

Это свойство непосредственно вытекает из формулы (13).

2. Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю.

Проверим по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0.$$

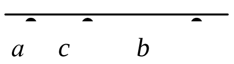
3. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет свой знак на противоположный.

В самом деле, переставляя пределы интегрирования, в силу формулы (13) имеем:

$$\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = -\left[F(b) - F(a)\right] = -\int_a^b f(x)dx.$$

Б. Свойство аддитивности.

4. Если промежуток интегрирования $[a,b]$ разбит на конечное число частичных промежутков, то определенный интеграл, взятый по промежутку $[a,b]$, равен сумме определенных интегралов, взятых по всем его частичным промежуткам.



Пусть, например, $[a,b]=[a,c]\cup[c,b]$, где $a \le c \le b$.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \left[F(c) - F(a)\right] + \left[F(b) - F(c)\right] = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Замечание: Формула остается верной, если c лежит вне отрезка $[a,b]$ и подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$.

В. Свойство линейности.

5. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла.

Действительно, пусть *F(x)* – первообразная для *f(x)* на [*a,b*] и *A* – постоянная величина, тогда *A F(x)* есть первообразная для *Af(x)*, так как

$$\left[AF(x)\right]' = AF'(x) = Af(x).$$

Следовательно, имеем

$$\int_a^b Af(x)dx = AF(x)\Big|_a^b = AF(b) - AF(a) = A\left[F(b) - F(a)\right] = A\int_a^b f(x)dx.$$

6. Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен такой же алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций.

Рассмотрим, например, алгебраическую сумму *f(x)+g(x)-h(x)* трех непрерывных функций *f(x), g(x), h(x)* и пусть *F(x), G(x), H(x)* – их первообразные, т.е. $F'(x)= f(x)$, $G'(x)= g(x)$, $H'(x)= h(x)$.

Тогда *F(x)+G(x) - H(x)* является первообразной для суммы *f(x)+g(x)-h(x)*, так как

$$\left[F(x) + G(x) - H(x)\right]' = F'(x) + G'(x) - H'(x) = f(x) + g(x) - h(x).$$

Отсюда имеем

$$\int_a^b \left[f(x) + g(x) - h(x)\right]dx = \left[F(x) + G(x) - H(x)\right]\Big|_a^b = \left[F(b) + G(b) - H(b)\right] - \left[F(a) + G(a) - H(a)\right] =$$

$$= \left[F(b) - F(a)\right] + \left[G(b) - G(a)\right] - \left[H(b) - H(a)\right] = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx - \int_a^b h(x)dx.$$

Г. Свойство монотонности.

7. Если подынтегральная функция определенного интеграла непрерывна и неотрицательна, а верхний предел интегрирования больше нижнего или равен ему, то определенный интеграл также неотрицателен.

В самом деле, пусть *f(x)*≥0 при $a \le x \le b$. Так как $F'(x)= f(x)\geq 0$, то первообразная *F(x)* есть неубывающая функция. В таком случае при *b≥a* имеем

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \geq 0.$$

8. Неравенство между непрерывными функциями можно интегрировать почленно при условии, что верхний предел интегрирования больше нижнего.

Действительно, пусть f*(x)≤g(x)*, $a \le x \le b$, где *f(x), g(x)* непрерывны на отрезке [*a,b*]. Так как *g(x)- f(x) ≥0*, то при *b≥a* в силу свойств 6, 7 имеем:

$$\int_a^b [g(x) - f(x)]dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0, \text{отсюда} \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Замечание: Пусть *f(x)* – знакопеременная непрерывная функция на отрезке [*a*,*b*], где *b≥a*.

В силу свойства аддитивности 6, учитывая геометрический смысл интеграла, имеем

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^b f(x)dx = -S_1 + S_2 - S_3,$$

где S_1, S_2, S_3 – площади соответствующих криволинейных трапеций.

Таким образом, определенный интеграл, в общем случае при ***a*<*b*** представляет собой алгебраическую сумму площадей соответствующих криволинейных трапеций, где площади трапеций, расположенных выше оси *Ox*, берутся со знаком «плюс», а площади трапеций, расположенных ниже оси *Ox*, - со знаком «минус». Для ***b* < *a*** наоборот.

Заметим, что площадь заштрихованной на рис. 3 фигуры, выражается интегралом

$$\int_a^b |f(x)|dx = S_1 + S_2 + S_3 \qquad \textbf{(b < a)}.$$

9.**Теорема о среднем:** Определенный интеграл от непрерывной функции равен произведению длины промежутка интегрирования на значение подынтегральной функции при некотором промежуточном значении аргумента (предполагается, что верхний предел интегрирования больше нижнего).

2. Методы вычисления определенного интеграла

1.Интегрирование по частям

Пусть *u=u(x), υ=υ(x)* – непрерывно дифференцируемые на отрезке [*a*,*b*] функции. Имеем: $d[u(x)\upsilon(x)] = \upsilon(x)du(x) + u(x)d\upsilon(x)$.

Интегрируя это равенство в пределах от *a* до *b* и учитывая, что

$du(x) = u'(x)dx$ и, $d\upsilon(x) = \upsilon'(x)dx$,

Находим

$$u(x)\upsilon(x)\Big|_a^b = \int_a^b \upsilon(x)u'(x)dx + \int_a^b u(x)\upsilon'(x)dx.$$

Отсюда получаем формулу интегрирования по частям в определенном интеграле

$$\int_a^b u(x)\upsilon'(x)dx = u(b)\upsilon(b) - u(a)\upsilon(a) - \int_a^b \upsilon(x)u'(x)dx. \qquad (17)$$

Для краткости употребляется обозначение

$$u(b)\upsilon(b)-u(a)\upsilon(a)=u(x)\upsilon(x)\Big|_a^b.$$

Пример. Найти $\int\limits_0^{2\pi} x\cos x dx$.

$$\int\limits_0^{2\pi} x\cos xdx=\begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=\cos xdx & v=\sin x\end{vmatrix}=x\sin x\Big|_0^{2\pi}-\int\limits_0^{2\pi}\sin xdx= .$$

$$=2\pi\sin 2\pi-0\cdot\sin 0+\cos x\Big|_0^{2\pi}=\cos 2\pi-\cos 0=0$$

2. Замена переменной в определенном интеграле

Пусть дан определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, где *f(x)* – непрерывная на отрезке [*a,b*] функция. Допустим, по каким-то соображениям нам желательно ввести новую переменную *t*, связанную с прежней переменной *x* соотношением: $x=\varphi(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$, где $\varphi(t)$ – непрерывно дифференцируемая на отрезке [*a,b*] функция. Если при этом: 1) при изменении *t* от α до β переменная *x* меняется от *a* до *b*, т.е. $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$; 2) сложная функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$, то справедлива формула $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta \mathrm{f}(\varphi(\mathrm{t}))\varphi'(\mathrm{t})\mathrm{dt}$.

Замечание: При вычислении определенного интеграла с помощью замены переменной нет необходимости возвращаться к прежней переменной, достаточно лишь ввести новые пределы интегрирования.

1. 8 Лекция № 8 (2 часа).

Тема: «Теория пределов и непрерывность функции нескольких переменных»

1.8.1 Вопросы лекции:

1. Функция нескольких переменных: определение, область задания, график
2. Предел и непрерывность функции нескольких переменных
3. Частные производные функции двух переменных
4. Дифференциал функции двух переменных
5. Дифференцирование неявных функций
6. Производная по направлению. Градиент функции
7. Экстремумы функции двух переменных

1.8.2 Краткое содержание вопросов:

1. Функция нескольких переменных: определение, область задания, график

Определение: Даны три переменные величины x, y и z. Если каждой паре значений независимых переменных x и y соответствует по некоторому закону определенное значение переменной z, то переменная z называется **функцией двух независимых переменных x и y**.

Определение: Множество тех пар чисел (x;y), для которых в области вещественных чисел определено соответствующее значение функции z, называется **областью существования** функции z.

Множество всех таких точек в пространстве называется **графиком функции двух переменных**. Чаще всего графиком функции двух переменных является какая-нибудь поверхность. Сама формула, задающая функцию $z=f(x,y)$, и есть уравнение этой поверхности.

Так, например, известно, что уравнение $z-2x+3y+8=0$ есть уравнение плоскости. Следовательно, указанная плоскость есть график функции $z=2x-3y-8$. Эта функция z линейна относительно x и y.

2. Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Определение: Пусть функция $z=f(x,y)$ определена в точке $M_0(x_0;y_0)$ и в некоторой ее окрестности, тогда если имеет место равенство

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x;y)=F(x_0;y_0)$, то функция называется **непрерывной в точке** M_0 $(x_0;\, y_0)$.

3. Частные производные функции двух переменных

Определение. Если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f(x,y)}{\Delta x} \qquad \left(\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y f(x,y)}{\Delta y}\right),$$

то он называется **частной производной по переменной x** (по переменной y) от функции $z=f(x,y)$ в точке $M(x;\, y)$.

4. Дифференциал функции двух переменных

Пусть дана дифференцируемая функция одной переменной $y=f(x)$, ее приращение можно написать в виде $\Delta y = y'\Delta x+\alpha\Delta x,$ где $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Дифференциалом функции $y=f(x)$ мы называем первое слагаемое этой формулы, линейно зависящее от Δx.

5. Дифференцирование неявных функций

Будем в уравнении $y\ln x - x^2e^y=0$ понимать под y ту самую неявную функцию, которую оно определяет. Тогда запишем тождество: $y\,ln\,x - x^2e^y\equiv 0.$ Производная по x от левой части также будет равна нулю при всех x. Найдем производную от левой части по x, помня, что y - функция от x и зная уже, что производная этой функции существует:

$$y'\ln x + y\frac{1}{x} - 2xe^{y} - x^{2}e^{y}y' = 0$$

(производную от e^y берем как производную сложной функции).

Отсюда находим y':

6. Производная по направлению. Градиент функции

Определение: Градиентом скалярной функции $z=f(x,y)$ называется вектор, проекции которого на координатные оси совпадают с соответствующими частными производными функции $z=f(x,y)$:

$$gradf = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\bar{j}\ .$$

7. Экстремумы функции двух переменных

Определение: Если в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ выполняется неравенство $f(x_0,y_0) > f(x,y)(f(x_0,y_0) < f(x,y))$, то говорят, что функция $z=f(x,y)$ имеет **максимум (минимум)** в точке M_0

1. 9 Лекция № 9 (2 часа).

Тема: «Классические методы оптимизации»

1.9.1 Вопросы лекции:

1. Метод «золотого сечения»
2. Метод касательных
3. Выпуклые множества
4. Метод наискорейшего спуска
5. Метод Ньютона

1.9.2 Краткое содержание вопросов:

1. Метод «золотого сечения»

Метод золотого сечения также является последовательным методом минимизации. Опираясь на свойства золотого сечения отрезка, этот метод использует найденные значения F(X) более рационально, чем метод деления отрезка пополам, что позволяет переходить к очередному отрезку, содержащему точку X* после вычисления одного, а не двух значений F(X).

2. Метод касательных

Пусть на отрезке $[a,b]$ существует единственный корень уравнения: x^*

$$f(x^*)=0$$

а $f'(x)$ существует, непрерывна и отлична от нуля на $[a,b]$. Перепишем $f(x^*)=0$ следующим образом: $f(x^k+(x^*-x^k))=0$

и применим к этому выражению формулу Лагранжа:

$$f(x^k)+f'(\overline{x})(x^*-x^k)=0,\ \overline{x}\in[a,b].$$

Заменим $\bar{x}$ на x^k, а x^*- на x^{k+1} и получим формулу итерационного процесса: $f(x^k)+f'(x^k)(x^{k+1}-x^k)=0$.

Выразим отсюда x^{k+1}: $x^{k+1}=x^k-\frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$.

Метод касательных имеет (когда сходится) квадратичную скорость сходимости: $|x^{k+1}-x^*|=O((x^k-x^*)^2)$.

3. Выпуклые множества

Рассмотрим n - мерное евклидово пространство R^n и пусть $\vec{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ точка в этом пространстве.

Рассмотрим две точки $\vec{x}_1=(x_1^{(1)},x_2^{(1)},\dots,x_n^{(1)})$ и $\vec{x}_2=(x_1^{(2)},x_2^{(2)},\dots,x_n^{(2)})$, принадлежащие R^n .Множество точек $\vec{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, которые могут быть представлены в виде $\vec{x}=\lambda\vec{x}_1+(1-\lambda)\vec{x}_2,\quad 0\le\lambda\le 1$ (в координатах это записывается так: $x_i=\lambda x_i^{(1)}+(1-\lambda)x_i^{(2)},\quad i=\overline{1,n},\quad 0\le\lambda\le 1$), называется выпуклой комбинацией точек $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$, или отрезком, соединяющим точки $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$. Сами точки $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ называются концами отрезка.

4. Метод наискорейшего спуска

В текущей точке вычисляется Grad F(X), и затем в направлении градиента ищется Min F(X). Практически это может быть осуществлено любым методом одномерной оптимизации (поиск по одному направлению – направление градиента), наиболее часто используется сканирование до первого локального минимума по направлению Grad F(X).

5. Метод Ньютона

Метод Ньютона-Рафсона называют также методом касательных, т.к. новое приближение x^{k+1} является абсциссой точки пересечения касательной, проведенной в точке $(x^k,f(x^k))$ к графику функции $f(x)$, с осью OX.

1. 10 Лекция № 10 (2 часа).

Тема: «Функции спроса и предложения. Функция полезности. Кривые безразличия»

1.10.1 Вопросы лекции:

1. Функции спроса и предложения
2. Функция полезности
3. Кривые безразличия

1.10.2 Краткое содержание вопросов:

1. Функции спроса и предложения

Следовательно, в соответствии с законом убывающей предельной полезности каждой последующая единица блага (каждый последующий судебный процесс) доставляет меньшее удовлетворение, приносит меньшую полезность. Поскольку потребитель получает меньшую полезность от каждой дополнительной единицы блага, то он если и будет готов заплатить за данную единицу блага, то меньшую цену.

2. **Полезность** — удовлетворение или исполнение запросов, которое получают люди от потребления и использования благ. Полезность — абстрактная категория, используемая в экономической науке для определения удовольствия, которое получают люди от потребления благ.

3. Кривые безразличия

Предположим, что потребитель имеет набор благ, состоящий из X и Y. Все соотношения количеств этих благ для него равноценны, потребителю безразлично, какой набор выбрать. Следовательно, эти товары принадлежат к набору безразличия. **Набор безразличия** — набор вариантов потребительского выбора, каждый из которых обладает одинаковой полезностью и поэтому не имеет предпочтения перед другими.

Кривая безразличия является графическим отображением набора безразличия. **Кривая безразличия** — совокупность наборов благ, обеспечивающих потребителю равный объем удовлетворения потребностей, т. е. приносящих ему одинаковую полезность. Взяв другие возможные сочетания благ, соответствующие различным величинам совокупной полезности, можно составить карту безразличия

1. 11 Лекция № 11 (2 часа).

Тема: «Элементы теории матриц»

1.11.1 Вопросы лекции:

1. Матрицы. Виды матриц
2. Элементарные преобразования строк (столбцов) матрицы
3. Операции над матрицами

1.11.2 Краткое содержание вопросов:

1. Матрицы. Виды матриц

Матрицей называют таблицу, состоящую из n строк и m столбцов. Элементами матрицы могут быть числа или иные математические объекты.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 4 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix} B=\begin{pmatrix}\sin\alpha & \sin\beta\\ \cos\alpha & \cos\beta\end{pmatrix} C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$$

Прямоугольная таблица, содержащая m строки n столбцов действительных чисел называется **числовой матрицей.**

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1\gamma}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2\gamma}\dots & a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i2}\dots & a_{ij}\dots & a_{in} \\ a_{m1} & a_{m2}\dots & a_{mj}\dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Сокращенно $A_{m\times n}=(a_{ij})$. Далее будем рассматривать числовые матрицы.

Числа a_{ij}, составляющие матрицу, называются ее **элементами**, где i=1,2,…m номер строки, j=1,2,…n номер столбца.

Матрицы обозначается заглавными буквами латинского алфавита A, B, C…, элементы строчными буквами.

Если число строк и столбцов одной матрицы равно числу строк и столбцов другой матрицы, то они называются **одноразмерными матрицами.**

Виды матриц

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется **квадратной матрицей**. Квадратную матрицу размером n×n называют матрицей **n-ого порядка**.

$A_{2\times 2}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ - квадратная матрица 2-ого порядка

a_{11}, a_{22} элементы главной диагонали

a_{12}, a_{21} элементы побочной диагонали

$A_{3\times 3}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ квадратная матрица 3-его порядка

a_{11}, a_{22}, a_{33} элементы главной диагонали

a_{13}, a_{22}, a_{31} элементы побочной диагонали

Квадратная матрица, все элементы которой, стоящие выше (ниже) главной диагонали равны нулю, называется **треугольной матрицей.**

Квадратная матрица, все элементы которой, кроме элементов главной диагонали равны нулю, называется **диагональной матрицей.**

$$B=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица, все ненулевые элементы которой равны между собой, называется **скалярной матрицей.**

Диагональная матрица, все ненулевые элементы которой равны 1, называется **единичной матрицей.**

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ единичная матрица 3-его порядка

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой матрицей (0).**

Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется **вектором (или вектор- столбец, или вектор-строка соответственно).**

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5 & 7 & 0 & 1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}8\\ 5\\ 6\\ 4\end{pmatrix}$$

Матрица размера 1×1, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом, т. е.$(5)_{1\times1}$ есть 5.

Одноразмерные матрицы **равны между собой**, если равны все соответствующие элементы этих матриц.

Квадратная матрица A^{-1} называется **обратной** по отношению к матрице А. Тогда и только тогда, когда $A*A^{-1}=A^{-1}*A=E$

2. Элементарные преобразования строк (столбцов) матрицы

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строк столбцами с сохранением нумерации, называется **матрицей транспонированной к данной**. Обозначается A^T (A').

3. Операции над матрицами

Алгебраической суммой двух матриц$A_{m\times n}=(a_{ij})$ и$B_{m\times n}=(b_{ij})$называется матрица $C_{m\times n}=(c_{ij})$такая, что $c_{ij}= a_{ij}+ b_{ij}$ (i=1,2..m, j=1,2…n)

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}_{3x3} \pm \begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & a_{13}\pm b_{13} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & a_{23}\pm b_{23} \\ a_{31}\pm b_{31} & a_{32}\pm b_{32} & a_{33}\pm b_{33} \end{pmatrix}$$

Произведением матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ на число k называется матрица

$B_{m\times n}=(b_{ij})$ такая, что $b_{ij}= ka_{ij}$(i=1,2..m, j=1,2…n). Т.е. **Произведением числа k на матрицу A** называется матрица, определяемая равенством:

$$\mathbf{k}\bullet\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}$$

Матрица (–A), все элементы которой получены путем умножения соответствующих элементов матрицы A на (-1) называется матрицей **противоположной A.**

Умножение матрицы на число обладает следующими свойствами:

- $1\cdot A=A$
- $\kappa\cdot(A+B)=\kappa\cdot A+\kappa\cdot B$
- $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$
- $(\alpha\beta)\cdot A=\alpha\cdot(\beta A)$
- $A+(-A)=\mathbf{0}$

Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда **число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы**.

Произведением матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ на матрицу $B_{n\times p}=(b_{jk})$ называется матрица $C_{m\times p}=(c_{ik})$ такая, что $c_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nk}$, где i=1,2..m, k=1,2,..
…p, т.е. элемент i-й строки и k-ого столбца матрицы произведения C равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы k-ого столбца матрицы B.

Иными словами: **Произведение двух матриц A и B** обозначается символом AB и определяется **равенством:**

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}=$$

$$
=\begin{pmatrix}
\sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j3} \\
\sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j3} \\
\sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j3}
\end{pmatrix}
$$

Пример: A=$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ C=A·B=$\begin{pmatrix} 9 & 10 & 1 \\ -19 & 13 & 0 \end{pmatrix}$

c_{11}=3·5+1·(-2)+2·(-2)=9

c_{12}=3·1+1·3+2·2=10

c_{13}=3·0+1·1+2·0=1

c_{21}=-1·5+0·(-2)+7·(-2)=-19

c_{22}=-1·1+0·3+7·2=13

c_{23}=-1·0+0·1+7·0=0

Если матрицы A и B - квадратные одного размера, то произведения AB и BA всегда существуют.

1. 12 Лекция № 12 (2 часа).

Тема: «Элементы теории определителей»

1.12.1 Вопросы лекции:

1. Определители второго и третьего порядка
2. Минор и алгебраическое дополнение элемента определителя
3. Теорема Муавра-Лапласа. Свойства определителей

1.12.2 Краткое содержание вопросов:

1. Определители второго и третьего порядка

Каждой квадратной матрице A соответствует число - определитель данной матрицы Δ (det A).

A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \to \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ - **определитель второго порядка**.

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \to \Delta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$ - **определитель третьего порядка**

2. Минор и алгебраическое дополнение элемента определителя

Минором M_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы n-ого порядка называется определитель n-1 порядка, полученного путем вычеркивания из исходного определителяi-ой строки иj-ого столбца.

Пример:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad M_{13}=\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -35 \quad M_{22}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 20 \quad M_{32}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 14$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы n-ого порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$.

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}.$$

3. Теорема Муавра-Лапласа. Свойства определителей

Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

$$\Delta=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}=\sum_{i=1}^{n} a_{is}A_{is} .$$

Например, разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки записывается так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \bullet A_{11} + a_{12} \bullet A_{21} + a_{13} + A_{13}$$

Значение теоремы разложения состоит в том, что позволяет свести вычисление определителей n-го порядка к вычислению определителей (n-1)-го порядка.

Пример: Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Решение:

Для вычисления данного определителя воспользуемся теоремой Лапласа: Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов, какой либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения. Для более удобного вычисления выполним элементарные преобразования: умножим элементы 1-ой строки на 1, (-2), (-1), и прибавляя их соответственно к элементам 2-ой, 3-ей, 4-ой строк, добиваемся того, чтобы все элементы 3-его столбца(кроме a_{13}) равнялись нулю и разложим определитель по элементам 3-его столбца:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 6 \cdot 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot 6 - 2 \cdot 1 \cdot 0 - (-1) \cdot (-1) \cdot 3 =$$

$$= 0 + 12 - 6 - 12 - 0 - 3 = -9$$

Для вычисления последнего определителя воспользовались правилом треугольника.

Ответ: определитель матрицы равен - 9.

Пример: Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Решение: Раскладывая определитель по элементам первой строки, получаем:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ $=1(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} +2(-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} +3(-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ =1 (1*2 - 0*1) - 2(0*2 - 0*2) + 3(0*1 - 2*1)= - 4

Ответ: Δ=-4

1. 13 Лекция № 13 (2 часа).

Тема: «Обратная матрица и ее существование. Ранг матрицы»

1.13.1 Вопросы лекции:

1. Понятие обратной матрицы. Вырожденная и невырожденная матрицы. Теорема о существовании обратной матрицы
2. Определение ранга матрицы. Способы нахождения ранга матрицы

1.13.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие обратной матрицы. Вырожденная и невырожденная матрицы. Теорема о существовании обратной матрицы

Квадратная матрица A^{-1} называется **обратной** по отношению к матрице А. тогда и только тогда, когда $A*A^{-1}=A^{-1}*A=E$

Обозначим через матрицу А матрицу системы (*), составленную из коэффициентов при неизвестных, через Х – матрицу – столбец из неизвестных, через В – матрицу-столбец из свободных членов:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что матрица A^{-1} называется обратной для матрицы А, если $A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E$, где Е – единичная матрица того же порядка, что и А, и матрица А называется невырожденной, если ее определитель не равен нулю, т.е. $\Delta=|A|\neq 0$

Каждая невырожденная матрица А имеет обратную, причем

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{11}, A_{12}, …A_{33} – алгебраические дополнения элементов матрицы А.

Систему (*) можно записать в матричной форме: $A\cdot X=B$.

Умножим слева на A^{-1} обе части этого равенства, получим:

$$A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B.$$

Так как $A^{-1}\cdot A=E$, имеем $X= A^{-1}\cdot B$ – это решение системы в матричном виде. Следовательно, матрица – решение Х находится как произведение A^{-1} и В.

2. Определение ранга матрицы. Способы нахождения ранга матрицы

Для решения и исследования математических и прикладных задач важное значение имеет понятие ранга матриц.

В матрице $A_{m\times n}$ вычеркиванием каких-либо строк, столбцов можно вычленить подматрицу k-го порядка ($k\leq\min(m,n)$)

Определители таких подматриц называют **минорами** k-го порядка.

Рангом матрицы А называется наивысший порядок, отличных от нуля, миноров этой матрицы. Обозначение: rang A, r(A)

Из определения следует что, $r(A) \le \min(m,n)$

1. 14 Лекция № 14 (2 часа).

Тема: «Системы линейных уравнений»

1.14.1 Вопросы лекции:

1. СЛУ, основные понятия
2. Методы решения СЛУ
3. Критерий совместности СЛУ (Теорема Кронекера-Капелли)

1.14.2 Краткое содержание вопросов:

1. СЛУ, основные понятия

Структура вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ ------------------------ \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ ------------------------ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

где a_{ij} , b_i (i=1,2,…m) (j=1,2,…n) – произвольные числа:

a_{ij} – коэффициенты при переменных x_j;

b_i – свободные члены,

называется **системой m линейных уравнений относительно n неизвестных.**

Решением системы m линейных уравнений относительно n неизвестных называется упорядоченный набор чисел (кортеж) $(x_1,x_2,\ldots x_n)$ при подстановке которых каждое уравнение системы обращается в истинное числовое равенство.

Решить систему - значит, найти множество всех ее решений.

Система может иметь а) единственное решение; б) бесконечное множество решений; в) пустое множество решений.

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется **совместной**.

Система, имеющая пустое множество решений, называется **несовместной.**

Совместная система, имеющая единственное решение, называется **определенной**.

Совместная система, имеющая бесконечное множество решений, называется **неопределенной**.

Две системы называются **равносильными**, если они имеют одно и то же множество решений.

2. Методы решения СЛУ

Рассмотрим решение системы методом Гаусса на конкретном примере:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 7x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Метод Гаусса заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система приводится к равносильной системе ступенчатого вида, из которой последовательно, начиная с последнего, находятся значения переменных.

Составим расширенную матрицу из коэффициентов при переменных и свободных членов, поменяв первую и вторую строку, чтобы $a_{11}=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 3 \\ 7 & -2 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

Умножим элементы первой строки на -2 и прибавим к соответствующим элементам второй строки, умножим элементы первой строки на -7 и прибавим к соответствующим элементам третьей строки. В результате получим в первом столбце, во второй и третьей строке 0

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 6 & 1 \\ 0 & -9 & 2 & -7 \end{array}\right)$$

Умножим элементы второй строки на (-9), а элементы третьей на 5 и полученные элементы второй строки прибавим к соответствующим элементам третьей строки, тогда получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 45 & -54 & -9 \\ 0 & -45 & 10 & -35 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & -44 & -44 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Запишем преобразованные уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_2 - 6x_3 = -1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Теперь можно найти значения переменных, подставляя последовательно значение x_3 во второе уравнение, найдем x_2, подставим значения x_2 и x_3 в первое уравнение найдем x_1

$(x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = 1) \Rightarrow x_1 = 1$

Ответ: $\{(1;1;1)\}$

3. Критерий совместности СЛУ (Теорема Кронекера-Капелли)

Пусть дана система m линейных уравнений с nнеизвестными общего вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n; \end{cases} \qquad (*)$$

или в матричной форме, AX = b,

где$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$- матрица системы, размера $(m \times n)$,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - матрица-столбец неизвестных,

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$- матрица-столбец свободных членов данной системы.

Теорема. Для того, чтобы система (*) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы, т. е.

r(A) = r(A |b).

Иначе,

1) r(A) ≠r(A |b)⇔ система несовместна,

2)r(A) = r(A |b)⇔ система совместна,

3) r(A) = r(A |b) = n⇔ система определенна,

4)r(A) = r(A |b)<n⇔ система неопределенна.

1. 15 Лекция № 15 (2 часа).

Тема: «Вектора и их классификация, линейные операции. Векторное пространство. Линейная зависимость векторов, базис, ПДСК»

1.15.1 Вопросы лекции:

1. Векторы, их классификация
2. Линейные операции над векторами и их свойства
3. Векторное пространство. Базис, координаты вектора относительно базиса. Свойства координат векторов
4. Аффинная и прямоугольная декартова системы координат. Простейшие задачи

1.15.2 Краткое содержание вопросов:

1.Векторы, их классификация.

2.Линейные операции над векторами и их свойства

Определение. Вектором называется направленный отрезок (упорядоченная пара точек).

Обозначают: $\overrightarrow{AB}$ (точка А - начало вектора, точка В - конец вектора) или одной буквой - $\vec{a}$.
Определение. Длиной вектора (модулем) называется расстояние между началом и концом вектора. Длина вектора обозначается $\overline{|a|}$ или $\overline{|AB|}$.
Определение. Нулевым вектором называется вектор, у которого начало и конец совпадают. Обозначают: $\vec{0}$.
Определение. Единичным вектором называется вектор, длина которого равна единице.
Единичный вектор, имеющий одинаковое направление с данным вектором $\vec{a}$, называется ортом вектора а и обозначается обычно символом $\overrightarrow{a_0} = \frac{\vec{a}}{\overline{|a|}}$
Определение. Векторы называются коллинеарными, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.
Определение. Векторы называются равными, если они коллинеарны, имеют одинаковые длины и одинаковое направление.
Определение. Линейными операциями над векторами называются сложение векторов и умножение вектора на число.
Определение. Суммой $\vec{a}+\vec{b}$ двух неравных векторов $\vec{a}$и $\vec{b}$ называется вектор$\vec{c}$ который идет из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$ (правило треугольника).
В случае неколлинеарных векторов $\vec{a}$и $\vec{b}$ можно вместо правила треугольника использовать правило параллелограмма: если векторы $\vec{a}$и $\vec{b}$ отложены от общего начала и на них построен параллелограмм, то сумма $\vec{a}+\vec{b}$ есть вектор, совпадающий с диагональю этого параллелограмма, идущего из общего начала $\vec{a}$и $\vec{b}$.
Определение. Разностью $\vec{a}$- $\vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ составляет вектор $\vec{a}$. Если два вектора $\vec{a}$и $\vec{b}$ отложены от общего начала, то их разность есть вектор, исходящий из конца вектора $\vec{b}$ («вычитаемого») к концу вектора $\vec{a}$ («уменьшаемого»).
Определение. Два коллинеарных вектора равной длины, направленные в противоположные стороны, называются противоположными. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается - $\vec{a}$.
Замечание.
1. Разность векторов $\vec{a}$и $\vec{b}$ можно рассматривать как сумму векторов $\vec{a}$и (-$\vec{b}$): $\vec{a}$- $\vec{b}$ = $\vec{a}$+ (-$\vec{b}$).
2. Сложение многих векторов производится при помощи последовательного применения правила треугольника (правило многоугольника).
Определение. Произведением вектора $\vec{a}$ на действительное число α называется вектор $\vec{b}$, удовлетворяющий следующим условиям:
а) $|\vec{a}| = |\alpha|\,|\vec{a}|$;
б) вектор $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$;
в) векторы $\vec{b}$ и $\vec{a}$ сонаправлены, если $0<\alpha$ (если же $\alpha = 0$, то $\vec{b} = \vec{0}$).
Произведение вектора $\vec{a}$ на число α обозначают $\alpha\vec{a}$.
Операции сложения векторов и умножения вектора на действительное число обладают следующими свойствами:
1) сложение векторов ассоциативно, т. е. для любых векторов $\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$ выполняются равенство:
$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$
2) сложение векторов коммутативно, т. е. для любых векторов $\vec{a}$и $\vec{b}$ выполняется равенство:

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

3) прибавление нулевого вектора к любому вектору $\vec{a}$ не меняет последнего:

$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

4) для любого вектора $\vec{a}$ существует противоположный вектор - $\vec{a}$, такой что

$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$;

5) умножение вектора на действительное число ассоциативно, т. е. для любых чисел α и βи любого вектора $\vec{a}$ выполняется равенство:

$(\alpha\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})$;

6) умножение вектора на число дистрибутивно по отношению к сложению чисел, т. е. для любых чисел α и βи любого вектора $\vec{a}$ выполняется равенство:

$(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+(\beta\vec{a})$;

7) умножение вектора на число дистрибутивно по отношению к сложению векторов, т. е. для любых векторов α и β и любого числа α выполняется равенство:

$\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$;

8)умножение вектора на единицу не меняет этого вектора: $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$

Теорема (о коллинеарных векторах). Если $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ - два коллинеарных вектора, причем вектор $\overrightarrow{e_1}$ - ненулевой, то существует единственное число x такое, что

$\overrightarrow{e_2}=x\,\overrightarrow{e_1}$

Определение. Ортомненулевого вектора $\vec{a}$ называется вектора$\overrightarrow{a_0}$, удовлетворяющий равенству:

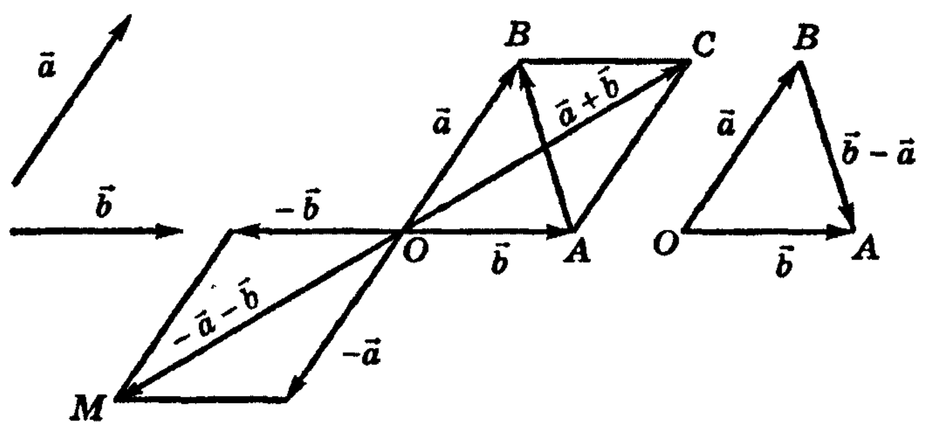
$\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\overrightarrow{a_0}$

Сформулированные свойства линейных операций позволяют преобразовать выражения, составленные из векторов, по обычным правилам алгебры: можно раскрыть скобки, приводить подобные члены, переносить некоторые члены в другую часть равенства с противоположным знаком и т.д.

Пример 1. По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить каждый из следующих векторов:

а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}-\vec{b}$; в) $\vec{b}-\vec{a}$; г) $-\vec{a}-\vec{b}$

Решение. Пусть даны два вектора a и B, отложим их от общего начала и построим указанные векторы либо по правилу параллелограмма, либо по правилу треугольника.



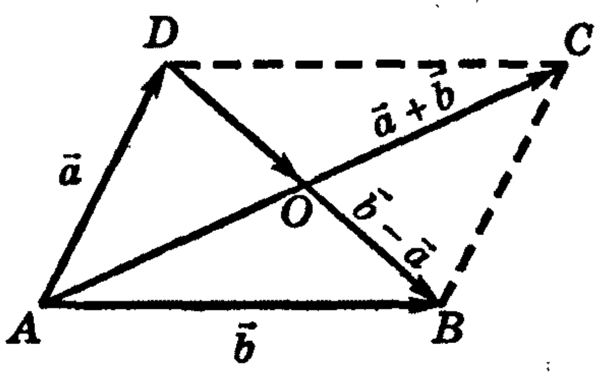
Ответ: а) $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OC}$; б) $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{AB}$;

в)$\vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{BA}$; г) $-\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OM}$.

Пример 2. Доказать равенства:

а) $\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$;

б) $\vec{a}-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$
и выяснить, каков их геометрический смысл.
Решение. а) В левой части равенства раскроем скобки, приведем подобные члены, получим вектор в правой части. Поясним это равенство геометрически. Пусть даны два вектора а и b, отложим их от общего начала и построим параллелограмм и его диагонали, получим:



По правилу построения разности двух векторов $\vec{a}$и $\vec{b}$, получим $\overrightarrow{DB}=\vec{b}-\vec{a}$ Так как диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, то
$\overrightarrow{DO}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$
Тогда $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO}$ или $\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$
б) Аналогично объясняется второе равенство.
Равенства доказаны.

3. Векторное пространство. Базис, координаты вектора относительно базиса. Свойства координат векторов
Обобщением понятия вектора служит N-мерный вектор, которым называется упорядоченная совокупность n действительных чисел, записываемых в виде x=($x_1, x_2, \ldots x_n$), где x_i – i-я компонента вектора x. Необходимо знать, что линейные операции над n-мерными векторами удовлетворяют 8 аксиомам, схожими с аксиомами для действительных чисел.
Определение. Векторы $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_k}$ называют линейно зависимыми, если существуют числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$, среди которых есть по крайней мере одно, не равное нулю, такое, что
$\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}+\cdots+\lambda_k\overrightarrow{a_k}=\vec{0}.$ (***)
Это определение линейной зависимости векторов $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_k}$ эквивалентно такому: векторы $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_k}$ линейно зависимы, если один из них можно представить в виде линейной комбинации остальных (или разложить по остальным).
Векторы $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_k}$ называются линейно зависимыми, если равенство (***) возможно в единственном случае, когда $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_k=0$.
Понятие линейной зависимости играет большую роль в линейной алгебре. В векторной алгебре линейная зависимость имеет простой геометрический смысл.
1). Любые два коллинеарных вектора линейно зависимы, и наоборот, два неколлинеарных вектора линейно независимы.
2). Три компланарных вектора линейно зависимы, и наоборот, три некомпланарных вектора линейно независимы.
3). Каждые четыре вектора линейно зависимы.
Определение. Векторным базисом в данной плоскости называется любая пара неколлинеарных векторов $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ этой плоскости.

Два и более векторов в пространстве называются **компланарными**, если они параллельны одной и той же плоскости или лежат в этой плоскости.

Определение. Векторным базисом в пространстве называют любые три некомпланарных вектора $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$.

Вектор $\overrightarrow{e_1}$ называют при этом первым базисным вектором, $\overrightarrow{e_2}$ – вторым, $\overrightarrow{e_2}$ - третьим.

Замечание 1. Три вектора $\overrightarrow{e_1} = \{e_{11}; e_{12}; e_{13}\}$, $\overrightarrow{e_2} = \{e_{21}; e_{22}; e_{23}\}$ и $\overrightarrow{e_3} = \{e_{31}; e_{32}; e_{33}\}$ образуют базис пространства, если определитель, составленный из их координат, отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Теорема. Пусть $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ - векторный базис в пространстве. Тогда любой вектор $\vec{a}$ в пространстве может быть представлен, и притом единственным образом, в виде линейной комбинации базисных векторов $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$, и $\overrightarrow{e_3}$:

$\vec{a} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}$. (**)

Определение. Равенство (**) называют разложением вектора $\vec{a}$ по базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$, а числа x, y, z – координатами вектора $\vec{a}$ в базисе. пишут Кратко пишут: $\vec{a}$ =(x; y; z)

Определение. Базис $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ называется ортонормированным, если векторы $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ попарно перпендикулярны и имеют единичную длину. В этом случае приняты обозначения

$\overrightarrow{e_1} = \vec{\imath}$, $\overrightarrow{e_2} = \vec{\jmath}$, $\overrightarrow{e_3} = \vec{k}$.

Действия над векторами, заданными своими координатами

Теорема. Пусть на плоскости выбран векторный базис $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ и относительно него векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами:$\vec{a} = (x_1; y_1)$,

$\vec{b} = \{x_2; y_2\}$.

Тогда $\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + y_1;\ x_2 + y_2\}$, $\vec{a} - \vec{b} = \{x_1 - y_1;\ x_2 - y_2\}$, т. е. при сложении или вычитании векторов складываются или вычитаются их одноименные координаты;

$\alpha \cdot \vec{a} = \{\alpha \cdot x_1; \alpha \cdot y_1\}$т. е. при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

Условие коллинеарности двух векторов

Теорема. Вектор $\vec{b}$ коллинеарен ненулевому вектору $\vec{a}$ в том и только в том случае, когда координаты вектора $\vec{b}$пропорциональны соответственным координатам вектора $\vec{a}$, т. е.

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$.

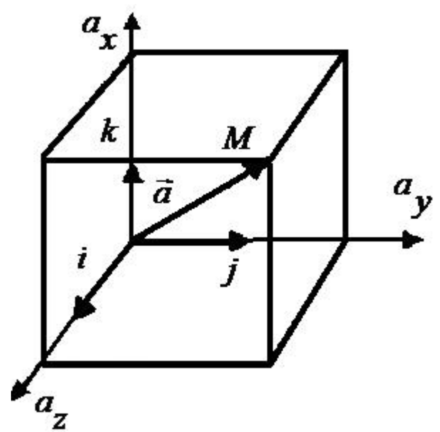
Линейные операции над векторами, заданными своими координатами в пространстве, производятся аналогично.

4. Аффинная и прямоугольная декартова системы координат. Простейшие задачи

На практике Вы встречаетесь с величинами двух типов: для задания одних достаточно **числа,** например, температура С°=36,6, для задания других требуется указать и направление - например: сила или скорость. Величины первого типа называются **скалярными,** авторого **- векторными.**

Под вектором будем понимать направленный отрезок, который обозначим а.

Свободный вектор а (т.е. такой вектор, который без изменения длины и направления, может быть перенесен в любую точку пространства), заданный в



координатном пространстве **Oxyz,** может быть представлен в виде:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},,$$

где a_x, a_y, a_z - проекции вектораа на соответствующие оси координат (их называю координатами вектора а), $\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}$, орты этих осей (единичные векторы, направление каждого из которых совпадает с положительным направлением соответствующей оси).
Такое представление вектора а, называется **разложением по ортам.**
Длина (модуль) вектора а обозначается $|\vec{a}|$ и определяется по формуле:

$$\left|\vec{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\right|$$

Направление вектора а определяется углами $\alpha, \beta, \gamma,$ образованными им с осями координат $Ox\ Oy\ Oz$.Косинусы **этих** углов (**направляющие косинусы** вектора) определяются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

Направляющие косинусы вектора связаны соотношением:
$\cos^2 a + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$
Найдем координаты вектора, соединяющего точки A(1;2;3) и M(3;4;3). Искомый вектор можно записать так:

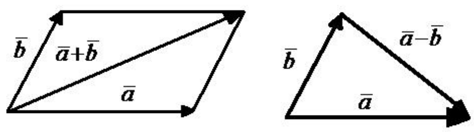
$$\vec{a} = (3-1)\vec{i} + (4-2)\vec{j}, + (3-3)\vec{k}, = A\vec{M}$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы разложением по ортам, то их сумма и разность определяются по формулам:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\ \vec{i} + (a_y + b_y)\ \vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k},$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\ \vec{i} + (a_y - b_y)\ \vec{j} + (a_z - b_z)\vec{k},$$

Сумма любого числа векторов может быть найдена по правилу многоугольника (смотри рис).
Векторы, лежащие на одной прямой или параллельных прямых, называют **коллинеарными.**
Произведение вектора**а**на скалярный множитель **m**, определяется формулой



Нахождение суммыи разностивекторов

$$m\vec{a} = ma_x\vec{i} + ma_y\vec{j} + ma_z\vec{k},$$

Заметим, что векторы а и та параллельны (коллинеарны) и направлены в одну и **тужe**сторону, если **m**>0, и в противоположные стороны, если **m**<0.
Пример 1: Найти длину вектора а и его направляющие косинусы.

$$\vec{a} = 20\vec{i} + 30\vec{j} - 60\vec{k}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{20^2 + 30^2 + 60^2} = 70; \cos\alpha = \frac{20}{70} = \frac{2}{7}; \cos\beta = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}; \cos\gamma = -\frac{60}{70} = \frac{6}{7};$$

Вспомним теперь введенные раньше орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Так как они не компланарны, то образуют базис, который называется **ортонормированным базисом или декартовой системой координат в пространстве.**

1. 16 Лекция № 16 (2 часа).

Тема: «Алгебраические линии. Прямая на плоскости и в пространстве. Метрическая теория прямых»

1.16.1 Вопросы лекции:

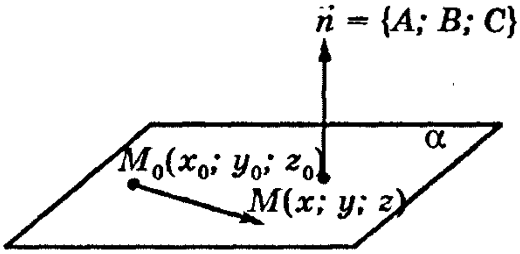
1. Алгебраические линии и их порядок
2. Способы задания прямой на плоскости
3. Метрическая теория прямых на плоскости

1.16.2 Краткое содержание вопросов:

1. Алгебраические линии и их порядок

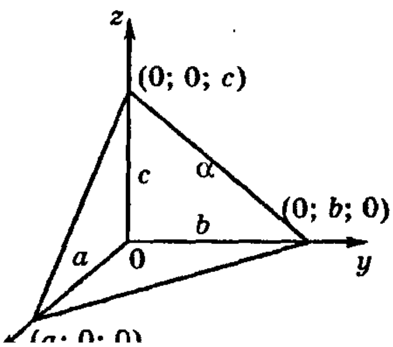
Плоскость

1) $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ – уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно нормальному вектору $\vec{n}$ = ={A;B;C).



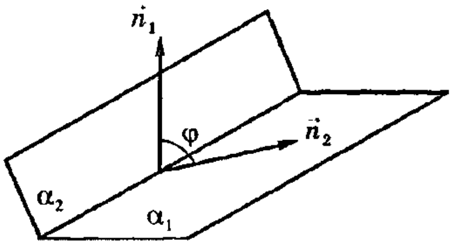
2) Ax + By + Cz + D = 0 – общее уравнение плоскости, $\vec{n}$ = {A, B, C} - нормальный вектор этой плоскости.

3) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ – уравнение плоскости в отрезках, где a, b, c - величины направленных отрезков, отсекаемых плоскостью a на координатных осях Ox, Oy, Oz соответственно;



4) Пусть даны две плоскости α_1: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$,

$\overrightarrow{n_1}$={A,B,C}, α_2: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$,



$\overrightarrow{n_2}$= {A; B; C}.

В качестве угла φ между плоскостями α_1 и α_2 принимают угол между их нормальными векторами:

$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2})}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$$

или в координатной форме

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

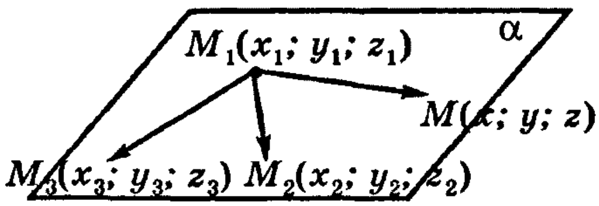
5) Условие перпендикулярности двух плоскостей α_1 и α_2: $(\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}) = 0$ или в координатной форме:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

6) Условие параллельности двух плоскостей α_1 и α_2:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

7) Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$:



$\left(\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3}\right) = 0$ или в координатной форме:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

8) Если плоскость α задана общим уравнением Ax + By + Cz + D = 0, а $M_0(x_0; y_0; z_0)$ - некоторая точка пространства, то

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

есть формула расстояния от точки M_0 до плоскости α.

9) Совокупность всех плоскостей, проходящих через одну и ту же прямую, называется пучком плоскостей.

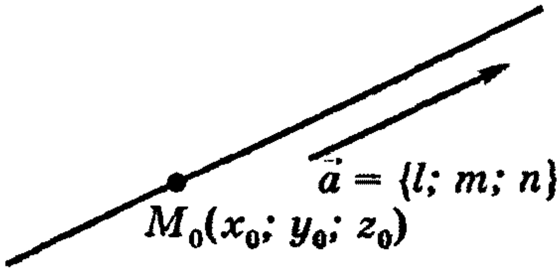
Если $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ есть уравнения двух различных непараллельных плоскостей, пересечением которых служит некоторая прямая L, а числа α, β - любые не равные одновременно нулю, то

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

есть уравнение плоскости, проходящей через прямую L. Более того, какова бы ни была проходящая через прямую L плоскость, она может быть определена из пучка плоскостей при определенных значениях α, β.

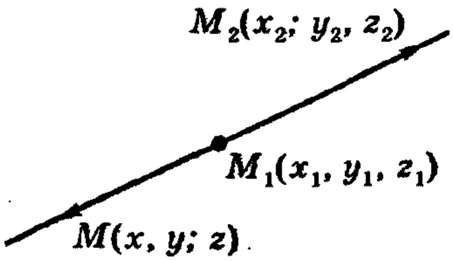
Прямая и плоскость в пространстве

1) $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ – канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ параллельно направляющему вектору $\vec{a}=(l;m;n)$;



2) $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ – уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$;

3) уравнения $\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \\ z=z_0+nt; \end{cases}$



$t\in R$ есть параметрические уравнения прямой в пространстве.

4) Пусть даны две прямые, заданные каноническими уравнениями

$$L_1:\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},$$

$$L_2:\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2};$$

За угол φ между прямыми принимают угол между их направляющими векторами

$$\overrightarrow{a_1}=(l_1;m_1;n_1),\overrightarrow{a_2}=(l_2;m_2;n_2):$$

$$\cos\varphi=\frac{(\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2})}{|\overrightarrow{a_1}||\overrightarrow{a_2}|},$$

или в координатной форме

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

5) $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$ - условие перпендикулярности двух прямых L_1 и L_2.

6) $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ - условие параллельности двух прямых L_1 и L_2 в пространстве.

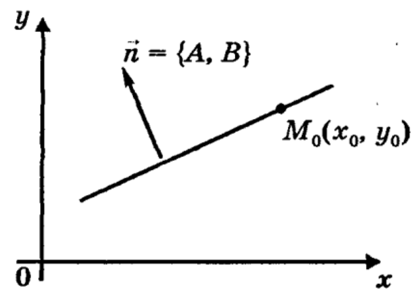
7) Общие уравнения прямой в пространстве

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

где коэффициенты A_1, B_1, C_1 не пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2. В данном случае прямая задана как линия пересечения плоскостей.

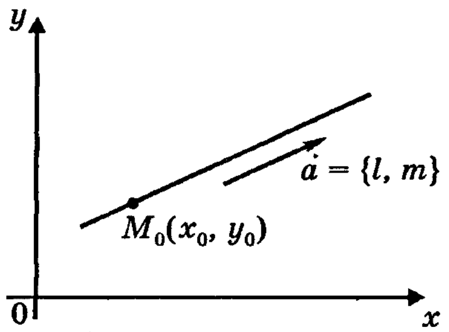
2. Способы задания прямой на плоскости

1) $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ – уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$перпендикулярно нормальному вектору $\vec{n} = (A, B)$;



2)Ax+By+C=0 – общее уравнение прямой;

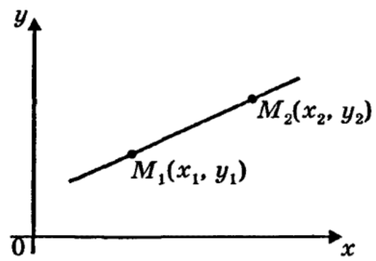
3) $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$ – уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$параллельно направляющему вектору $\vec{a} = (l, m)$(каноническое уравнение прямой);



4) $\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt; \end{cases}$ $t \in R$ – параметрические уравнения прямой;

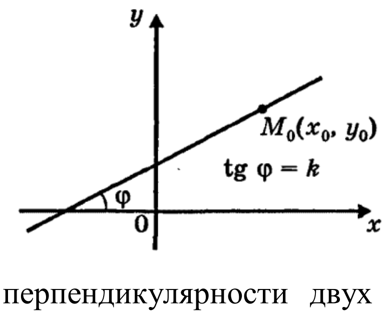
5) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ – уравнение прямой в отрезках, где a и b – величины направленных отрезков, отсекаемых на координатных осях Ох и Оу соответственно;

6) $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ – уравнение прямой, проходящей через две данные точки$M_1(x_1, y_1)$ и$M_2(x_2, y_2)$;



7) $y - y_0 = k(x - x_0)$ – уравнение прямой, проходящей через точку$M_0(x_0, y_0)$, k - угловой коэффициент прямой, равный тангенсу угла наклона прямой к положительному направлению оси Ох;

8) $y = kx + b$ - уравнение прямой с угловым коэффициентом k; b - величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Оу;



9)$tg\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$ – тангенс острого угла между двумя прямыми

$y = k_1x + b_1$и $y = k_2x + b_2$;

10) $k_1 = k_2$и $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ – условия параллельности и перпендикулярности двух прямых$y = k_1x + b_1$и $y = k_2x + b_2$;

11) $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ – расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$до прямой

Ax + By + C = 0;

12) $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$, $\lambda \neq -1$ - координаты точки M(x, y), делящей отрезок M_1M_2 в отношении λ, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$;

13) $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$ – координаты середины отрезкаM_1M_2,$M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$.

14) $\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0$ – уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересечения прямых $A_1x+B_1y+C_1=0$и$A_2x+B_2y+C_2=0$.

3. Метрическая теория прямых на плоскости

$tg\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$ – тангенс острого угла между двумя прямыми $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$;

$k_1=k_2$ и $k_2=-\frac{1}{k_1}$ – условия параллельности и перпендикулярности двух прямых$y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$;

$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ – расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$до прямой$Ax+By+C=0$;

$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$, $\lambda \neq -1$ - координаты точки *M(x, y)*, делящей отрезок M_1M_2 в отношении λ, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$;

$x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$ – координаты середины отрезка M_1M_2, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$.

14) $\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0$ – уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересечения прямых $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$.

Пусть на плоскости заданы точка$M_0(x_0;y_0)$и прямаяAx + By+ C = 0. Под расстоянием от точки M_0 до прямойAx + By+ C = 0принимается длина перпендикуляра, опущенного из точки M_0на прямую. Данное расстояние можно определить по формуле:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

1. 17 Лекция № 17 (2 часа).

Тема: «Плоскость. Способы задания. Метрическая теория плоскостей. Линии второго порядка и их свойства. Поверхности вращения»

1.17.1 Вопросы лекции:

1. Алгебраические поверхности и их порядок
2. Способы задания плоскости в пространстве
3. Метрическая теория плоскостей

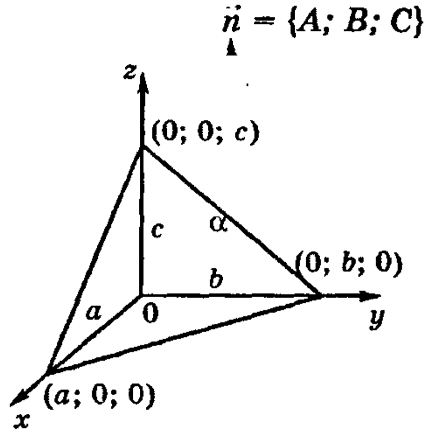
1.17.2 Краткое содержание вопросов:

1. Алгебраические поверхности и их порядок.
2. Способы задания плоскости в пространстве

1) $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ – уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно нормальному вектору $\vec{n}$ = ={A;B;C).

2) Ax + By + Cz + D = 0 – общее уравнение плоскости, $\vec{n}$ = {A, B, C} - нормальный вектор этой плоскости.

3) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ – уравнение плоскости в



отрезках, где a, b, c - величины направленных отрезков, отсекаемых плоскостью a на координатных осях Ox, Oy, Oz соответственно.

3. Метрическая теория плоскостей

Пусть даны две плоскости $\alpha_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$,

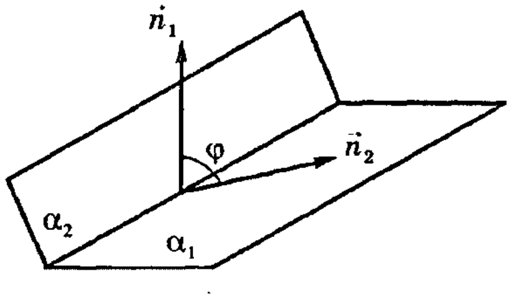
$\overrightarrow{n_1}$={A,B,C},

$\alpha_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$,

$\overrightarrow{n_2}$= {A; B; C}.

В качестве угла φ между плоскостями α_1 и α_2 принимают угол между их нормальными векторами:

$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2})}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$$



или в координатной форме

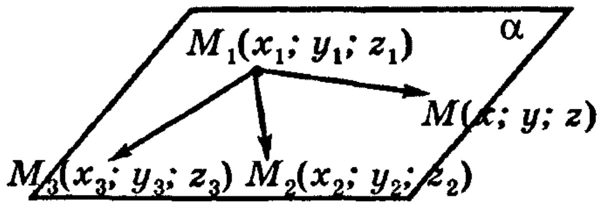
$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Условие перпендикулярности двух плоскостей α_1 и α_2: $(\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}) = 0$ или в координатной форме:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Условие параллельности двух плоскостей α_1 и α_2: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$: $\left(\overrightarrow{M_1M}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_3}\right) = 0$ или в координатной форме:



$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

8) Если плоскость α задана общим уравнением Ax + By + Cz + D = 0, а $M_0(x_0; y_0; z_0)$ - некоторая точка пространства, то

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

есть формула расстояния от точки M_0 до плоскости α.

Совокупность всех плоскостей, проходящих через одну и ту же прямую, называется пучком плоскостей.

Если $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ есть уравнения двух различных непараллельных плоскостей, пересечением которых служит некоторая прямая L, а числа α, β - любые не равные одновременно нулю, то

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

есть уравнение плоскости, проходящей через прямую L. Более того, какова бы ни была проходящая через прямую L плоскость, она может быть определена из пучка плоскостей при определенных значениях α, β.

1. 18 Лекция № 18 (2 часа).

Тема: «Квадратичные формы»

1.18.1 Вопросы лекции:

1. Квадратичные формы

1.18.2 Краткое содержание вопросов:

1. Квадратичные формы

Квадратичной формой L от *n* переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется сумма, каждый член которой является или квадратом одной из этих переменных, или произведением двух разных переменных.

Считая, что в квадратичной форме *L* уже сделано приведение подобных членов, введем следующие обозначения для коэффициентов этой формы: коэффициент при x_i^2 обозначим через a_{ii}, а коэффициент при произведении $x_i x_j$ для $i \neq j$ – через $2a_{ij}$. Так как $x_i x_j = x_j x_i$, то коэффициент при этом произведении мог бы быть обозначен и через $2a_{ji}$, т.е. введенные нами обозначения предполагают справедливость равенства $a_{ij} = a_{ji}$. Член $2a_{ij} x_i x_j$ можно записать теперь в виде

$$2a_{ij} x_i x_j = a_{ij} x_i x_j + a_{ji} x_j x_i,$$

а всю квадратичную форму *L* – в виде суммы всевозможных членов $a_{ij} x_i x_j$, где *i* и *j* уже независимо друг от друга принимают значения от 1 до *n*:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

1. 19 Лекция № 19 (2 часа).

Тема: «Основные определения и задачи линейного программирования»

1.19.1 Вопросы лекции:

1. Понятие системы ограничений и целевой функции
2. Задача линейного программирования. Допустимое и оптимальное решение
3. Приведение общей задачи линейного программирования к каноническому виду
4. Графический метод решения задач линейного программирования

1.19.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие системы ограничений и целевой функции

2. Задача линейного программирования. Допустимое и оптимальное решение

Задача линейного программирования (ЛП), как уже ясно из сказанного выше, состоит в нахождении минимума (или максимума) линейной функции при линейных ограничениях.

Общая форма задачи имеет вид: найти $\min cx$ при условиях

$$a_i x - b_i \geq 0, \quad i \in I_1,$$
$$a_i x - b_i = 0, \quad i \in I_2,$$
$$x_j \geq 0, \quad j \in J_1,$$

где

$$I_1 \cup I_2 = \{1, \ldots, m\},\ I_1 \cap I_2 = \emptyset,\ J_1 \subset \{1, \ldots, n\},\ x = (x_1, \ldots, x_n)^T,$$
$$c = (c_1, \ldots, c_n),\ a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in}),\ i = 1, \ldots, m.$$

Здесь и далее нам удобнее считать c и a_i вектор - строками, а x и $b=(b_1,\ldots,b_m)^T$ - вектор столбцами.

Наряду с общей формой широко используются также каноническая и стандартная формы. Как в канонической, так и в стандартной форме

$$J_1 = \{1, \ldots, n\}$$

т.е. все переменные в любом допустимом решении задачи должны принимать неотрицательные значения (такие переменные принято называть неотрицательные в отличие от так называемых свободных переменных, на область значений которых подобное ограничение не накладывается). Отличие же между этими формами состоит в том, что в одном случае $I_2 = 0$, а в другом - $I_1 = 0$.

3. Приведение общей задачи линейного программирования к каноническому виду
4. Графический метод решения задач линейного программирования

Задача ЛП в канонической форме:

$$w = cx \rightarrow \min$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0.$$

Задача ЛП в стандартной форме:

$$w = cx \rightarrow \min$$
$$Ax \geq b$$
$$x \geq 0.$$

В обоих случаях A есть матрица размерности m x n, i -я строка которой совпадает с вектором a_i.

Задача ЛП в общей форме сводится (в определенном смысле) к задаче ЛП в канонической (стандартной) форме. Под этим понимается существование общего способа построения по исходной задаче (в общей форме) новой задачи ЛП (в нужной нам форме), любое оптимальное решение которой "легко" преобразуется в оптимальное решение исходной задачи и наоборот. (Фактически, связь между этими задачами оказывается еще более тесной). Тем самым мы получаем возможность, не теряя общности, заниматься изучением задач ЛП, представленных либо в канонической, либо в стандартной форме. Ввиду этого наши дальнейшие рассмотрения задач ЛП будут посвящены, главным образом, задачам в канонической форме.

Постановка задач линейного программирования и исследование их структуры

Большинство задач, решаемых методами исследования операций, может быть сформулировано так:

максимизировать $F(x_1, x_2, ., x_n)$ при ограничениях

$$g_1(x_1, ., x_n) \leq b_1;$$
$$g_2(x_1, ., x_n) \leq b_2;$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$g_m(x_1, ., x_n) \leq b_m;$$

где $f(x_1, x_2, ., x_n)$ - целевая функция, или критерий эффективности (например, прибыль от производства каких-либо видов продукции, стоимость перевозок и т.п.); $X=\{x_1,.,x_n\}$ - варьируемые параметры;$g_1(x),.,g_m(x)$ - функции, которые задают ограничения на имеющиеся ресурсы.

Задача о смесях. Имеется p компонентов, при сочетании которых в разных пропорциях получают разные смеси. Каждый компонент, а следовательно и смесь, содержит q веществ. Количество k -го вещества k = 1, 2, ., q, входящее в состав единицы i -го компонента и в состав единицы смеси, обозначим через a_{ik} и a_k соответственно.

Предположим, что a_k зависит от a_{ik} линейно, то есть если смесь состоит из x_1 единиц первого компонента, x_2 - единицу второго компонента и т.д., то

$$a_k = \sum_i a_{ik} x_i.$$

Задано p величин C_i, характеризующих стоимость, массу или калорийность единицы i -го компонента, и q величин b_k, указывающих минимально необходимое процентное содержание k -го вещества в смеси. Обозначим через x_1, x_2,.,x_p значение компонента p -го вида, входящего в состав смеси.

Математическая модель этой задачи имеет такой вид:

$$\text{минимизировать } \sum_{i=1}^{p} c_i x_i$$

при ограничении

$$\sum_{i=1}^{p} a_{ik} x_i \geq b_k, \quad k = 1, 2, .., q,$$
$$\sum_{i=1}^{p} x_i = 1$$

Ограничение означает, что процентное содержание k -го вещества в единице смеси должно быть не меньше b_k.

К этой же модели принадлежит также задача определения оптимального рациона кормления скота.

1. 20 Лекция № 20 (2 часа).

Тема: «Симплексный метод»

1.20.1 Вопросы лекции:

1. Опорное решение задачи линейного программирования
2. Алгоритм решения задачи симплексным методом
3. Метод искусственного базиса

1.20.2 Краткое содержание вопросов:

1. Опорное решение задачи линейного программирования

Данный метод является методом целенаправленного перебора опорных решений задачи линейного программирования. Он позволяет за конечное число шагов либо найти оптимальное решение, либо установить, что оптимальное решение отсутствует.

Основное содержание симплексного метода заключается в следующем:

1. Указать способ нахождения оптимального опорного решения
2. Указать способ перехода от одного опорного решения к другому, на котором значение целевой функции будет ближе к оптимальному, т.е. указать способ улучшения опорного решения
3. Задать критерии, которые позволяют своевременно прекратить перебор опорных решений на оптимальном решении или следать заключение об отсутствии оптимального решения.

2. Алгоритм решения задачи симплексным методом

Алгоритм симплексного метода решения задач линейного программирования

Для того, чтобы решить задачу симплексным методом необходимо выполнить следующее:

1. Привести задачу к каноническому виду

2. Найти начальное опорное решение с "единичным базисом" (если опорное решение отсутствует, то задача не имеет решение ввиду несовместимости системы ограничений)
3. Вычислить оценки разложений векторов по базису опорного решения и заполнить таблицу симплексного метода
4. Если выполняется признак единственности оптимального решения, то решение задачи заканчивается
5. Если выполняется условие существования множества оптимальных решений, то путем простого перебора находят все оптимальные решения

Метод искусственного базиса

Метод искусственного базиса используется для нахождения допустимого базисного решения задачи линейного программирования, когда в условии присутствуют ограничения типа равенств. Рассмотрим задачу:

$\max\{F(x)=\sum c_i x_i | \sum a_{ji} x_i = b_j,\ j=1,m;\ x_i \geq 0\}$.

В ограничения и в функцию цели вводят так называемые «искусственные переменные» R_j следующим образом:

$\sum a_{ji}x+R_j=b_j,\ j=1,m; F(x)=\sum c_i x_i - M\sum R_j$

При введении искусственных переменных в методе искусственного базиса в функцию цели им приписывается достаточно большой коэффициент М, который имеет смысл штрафа за введение искусственных переменных. В случае минимизации искусственные переменные прибавляются к функции цели с коэффициентом М. Введение искусственных переменных допустимо в том случае, если в процессе решения задачи они последовательно обращаются в нуль.

Симплекс-таблица, которая составляется в процессе решения, используя метод искусственного базиса, называется ***расширенной.*** Она отличается от обычной тем, что содержит две строки для функции цели: одна – для составляющей $F = \sum c_i x_i$, , а другая – для составляющей $M \sum R_j$ Рассмотрим процедуру решения задачи на конкретном примере.

1. 21-22 Лекция № 21-22 (4 часа).

Тема: «Теория двойственности. Дискретное, динамическое, нелинейное программирование»

1.21.1-22.1 Вопросы лекции:

1. Правила составления двойственных задач
2. Первая теорема двойственности
3. Вторая теорема двойственности

1.21.2 -22.2 Краткое содержание вопросов:

1. Правила составления двойственных задач

Составление двойственных задач

Каждой задаче линейного программирования можно поставить в соответствие другую задачу линейного программирования, которую называют двойственной к данной. Исходная и двойственная к ней задача образуют пару двойственных задач.

В зависимости от вида исходной задачи линейного программирования различают симметричные, несимметричные и смешанные пары двойственных задач.

Симметричные пары двойственных задач

Определение 1. *Если система ограничений исходной задачи состоит из неравенств и на все переменные* x_j *наложено условие неотрицательности, то исходная задача и составленная по определенному правилу двойственная задача образуют симметричную пару двойственных задач.*

Пусть исходная задача имеет вид: найти наибольшее значение функции

$$L(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1, & y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2, & y_2 \\ \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m, & y_m \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Правило составления двойственных задач

1. Каждому ограничению исходной задачи ставится в соответствие двойственная переменная y_i, где $i = \overline{1,m}$.

2. Составляется целевая функция $S(\bar{y})$, коэффициентами которой будут свободные члены системы ограничений исходной задачи, а цель задачи меняется на противоположную:

$$S(\bar{y}) = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \to min.$$

3. Составляется система ограничений двойственной задачи, при этом матрица из коэффициентов системы ограничений исходной задачи транспонируется, знак неравенства меняется на противоположный, свободными членами будут являться коэффициенты из целевой функции исходной задачи:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \ge c_n. \end{cases} \quad (2)$$

4. Переменные y_i в двойственной задаче также неотрицательны, т.е.

$$y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m}. \quad (3)$$

Двойственная задача: найти наименьшее значение функции

$$S(\bar{y}) = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{1m}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2m}y_m \geq c_2, \\ \dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \geq c_n, \end{cases}$$

$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}$.

Если двойственную задачу принять за исходную и поставить в соответствие каждому неравенству системы (2 переменную x_j, $j = \overline{1, n}$ и по данному правилу составить двойственную задачу, то получим исходную задачу. Понятие двойственности является взаимным. Эти задачи образуют симметричную пару двойственных задач.

2. Первая теорема двойственности

Теорема 1 (основная).

1). Сопряженные задачи разрешимы или неразрешимы одновременно, и если разрешимы, то их оптимумы равны.

2). Если целевая функция одной из задач не ограничена, то область допустимых планов другой задачи пуста.

Следствие: Для X^0ОДП(I),∈ Y^0ОДП(II)∈

X^0, Y^0CX⇔- оптимальные^0= Y^0B

Т.е. допустимые планы сопряженных задач являются оптимальными тогда и только тогда, когда значения целевых функций этих задач на этих планах равны.

Замечания:

а) Утверждение, обратное второй части теоремы, не всегда является верным, т.е. если ОДП одной из сопряженных задач пуста, целевая функция другой не обязательно не ограничена. ОДП может быть пуста у обеих задач.

б) Логично предположить, что, поскольку сопряженные задачи могут быть разрешимы только одновременно, то, решив исходную задачу симплекс-методом, можно каким-то образом извлечь из этого решения оптимальный план двойственной задачи. Это действительно так.

3. Вторая теорема двойственности

Теорема 2 (о равновесии, о дополняющей нежесткости).

Для X^*ОДП(I), Y∈*ОДП(II)∈x

X^*, Y^*⇔- оптимальные , $_j{}^*(a_{ij}y_i{}^* - c_j) = 0$, $j = 1, n$, $y_i{}^*(a_{ij}x_j{}^* - b_i) = 0$, $i = 1, m$

Т.е. допустимые планы сопряженных задач являются оптимальными тогда и только тогда, когда произведение основной переменной одной задачи на дополнительную переменную в соответствующем ограничении другой задачи равно нулю для всех переменных и ограничений.

Следствие.

Для X^*ОДП(I),∈ Y^*ОДП(II)∈

$$X^*, Y^* \text{- оптимальные} \Leftrightarrow \begin{cases} x_j^* \neq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j = 0, \forall j \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j \neq 0 \Rightarrow x_j^* = 0, \forall j \\ y_i^* \neq 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i = 0, \forall i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i \neq 0 \Rightarrow y_i^* = 0, \forall i \end{cases}$$

Т.е. в решении сопряженных задач если ограничение не связанное(выполняется как строгое неравенство, дополнительная переменная отлична от нуля), то соответствующая переменная двойственной задачи равна нулю. Если переменная отлична от нуля, то соответствующее ограничение двойственной задачи является связанным (выполняется, как равенство).

1. 23 Лекция № 23 (2 часа).

Тема: «Сущность и условия применимости теории вероятностей. Основные понятия теории вероятностей»

1.23.1 Вопросы лекции:

1. Событие и виды событий
2. Сущность и условия применимости теории вероятностей

1.23.2 Краткое содержание вопросов:

1. Событие и виды событий

Основным интуитивным понятием классической теории вероятностей является **случайное событие**. События, которые могут произойти в результате опыта, можно подразделить на три вида:

а) **достоверное событие** — событие, которое всегда происходит при проведении опыта;

б) **невозможное событие** — событие, которое в результате опыта произойти не может;

в) **случайное событие** — событие, которое может либо произойти, либо не произойти. Например, при броске игральной кости достоверным событием является выпадение числа очков, не превышающего 6, невозможным — выпадение 10 очков, а случайным — выпадение 3 очков.

2. Сущность и условия применимости теории вероятностей

Теория вероятностей занимается изучением событий, наступление которых достоверно неизвестно. Она позволяет судить о разумности ожидания наступления одних событий по сравнению с другими, хотя приписывание численных значений вероятностям событий часто бывает излишним или невозможным. Согласно П.Лапласу, внесшему, пожалуй, наибольший вклад в развитие теории вероятностей, она "по существу представляет собой не что иное, как здравый смысл, сведенный к вычислениям". Слово "вероятно", его синонимы и производные от него могут употребляться в различных значениях. Примерами некоторых из них являются следующие утверждения: "Возможно, завтра будет дождь", "Вероятно, теория естественного отбора Дарвина верна" и "Если я брошу монету 100 раз, то, вероятно, что она выпадет вверх "орлом" от 40 до 60 раз". Математическая теория вероятностей имеет дело с утверждениями, аналогичными последнему.

Теория вероятностей является одной из важнейших и необходимых составных частей математики. Методы теории вероятностей широко применяются в различных отраслях естествознания и техники: в теории надёжности, теории массового обслуживания, в теоретической физике, геодезии, астрономии, теории стрельбы, теории ошибок наблюдения, теории автоматического управления, общей теории связи и во многих других теоретических и прикладных науках. Теория вероятностей служит также для обоснования математической и прикладной статистики, которые, в свою очередь, используются при планировании и организации производства, при анализе технологических процессов, предупредительном и приёмочном контроле качества продукции и для многих других целей. В последние годы методы теории вероятностей всё шире и шире проникают в различные области науки, техники и экономики, способствуя их прогрессу.

1. 24 Лекция № 24 (2 часа).

Тема: «Вероятность события, ее свойства. Классическое определение вероятности»

1.24.1 Вопросы лекции:

1. Классическое определение вероятности
2. Основные свойства вероятности
3. Ограниченность классического определения вероятности
4. Геометрическое и статистическое определение вероятности

1.24.2 Краткое содержание вопросов:

1. Классическое определение вероятности

Классическое определение вероятности. Пусть пространство элементарных событий E состоит из N равновозможных элементарных событий, среди которых имеется n событий, благоприятствующих событию A , тогда число

$$P(A) = n / N$$

называется **вероятностью события** A .

2. Основные свойства вероятности

Основные свойства вероятности. Пусть задано пространство элементарных событий E , а вероятности P определены на событиях из E. Тогда:

1) $P(\varnothing) = 0$,

2) если $A \subset B \subset E$, то $P(A) \le P(B)$,

3) для любого $A \subset E$ имеет место $P(A) \le 1$,

4) для любого $A \subset E$ имеет место $P(A') = 1 - P(A)$,

5) для любых $A, B \subset E$ имеет место $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

3. Ограниченность классического определения вероятности

1. Классический способ определения вероятности не применим к бесконечным множествам. событий (исходов).

2. Наиболее слабая сторона классического определения состоит в том, что очень часто невозможно представить результат испытания в виде совокупности элементарных событий.

3. Еще труднее указать основания, позволяющие считать элементарные события равновозможными. Обычно о равно возможности элементарных исходов испытания говорят из соображений симметрии. Так, например, предполагают, что игральная кость имеет форму правильного многогранника (куба) и изготовлена из однородного материала. Однако задачи, в которых можно исходить из соображений симметрии, на практике встречаются весьма редко.

В связи с этим рассматриваются иные способы вычисления вероятностей. К таковым относятся статистический способ вычисления вероятности и геометрическая вероятность, с которыми мы будем знакомиться в дальнейшем. состоящий в том, что оно неприменимо к испытаниям.

4. Геометрическое и статистическое определение вероятности

Геометрическое определение вероятности. Пусть в некоторую область случайным образом бросается точка T, причем все точки области W равноправны в отношении попадания точки T. Тогда за вероятность попадания точки T в область A принимается отношение

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)},$$

где $S(A)$ и S(W) — геометрические меры (длина, площадь, объем и т.д.) областей A и W соответственно.

Статистический способ подсчета вероятности.

Этот способ направлен на неоднократное установление частоты появления события с различным числом объектов в рамках некоторого испытания.

Пример. На бахче готовят партию из десятка тонн арбузов к отправке. Что бы убедиться в их спелости надо просмотреть все арбузы, но тогда придется каждый арбуз пометить и он окажется не пригодным к отправке. На практике можно провести серию испытаний. Выбираем произвольно 10 арбузов и установим число спелых из них. Пусть таких оказалось 9 арбузов, тогда частота p_1=9/10. В другой партии их 15 арбузов оказалось 13 спелых, p_2=13/15. В третей частота оказалась равной p_3 =18/18, в четвертой – p_4= 6/7. Все полученные числа будут группировать около некоторого числа, являющееся средним арифметическим вычисленных частот:

$p= (p_1.+ p_2+ p_3 + p_4) / 4 = (9/10+13/15+18/18+6/7) =761 / 840 \approx 0,9059$.

Запишем статистический способ подсчета вероятности в общем виде:

$p_1=m_1 / n_1$, $p_2=m_2 / n_2$, $p_3=m_3 / n_3$, …. $p_i=m_i / n_i$. $1 \le i \le k$

m_i - число появления события,

n_i - число проведенных опытов (наблюдений, испытаний),

p_i – частота появления события в каждом опыте

k – опытов

Естественно предположить, что она будет различная. Вероятность рассматриваемого события будет равна среднему арифметическому полученных частот.

$p=(p_1 + p_2+p_3 + …+p_k) / k$, где p – статистическая вероятность.

Вероятность события в данном испытании называется число, около которого "группируются" относительные частоты при нескольких

Для существования статистической вероятности события *А* требуется:

а) возможность, хотя бы принципиально, производить неограниченное число испытаний, в каждом из которых событие *А* наступает или не наступает;

б) устойчивость относительных частот появления *А в* различных сериях достаточно большого числа испытаний.

Недостатком статистического определения является неоднозначность статистической вероятности; значения которой "колеблется около какого-то теоретического числа, например: от 0,39 до 0,41 и др.

1. 25 Лекция № 25 (2 часа).

Тема: «Теоремы сложения и умножения вероятностей»

1.25.1 Вопросы лекции:

1. Действия над событиями и их свойства. Соотношения между событиями
2. Теорема сложения вероятностей и следствия из нее
3. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей
4. Независимые события. Теорема умножения для независимых событий
5. Вероятность появления хотя бы одного события

1.25.2 Краткое содержание вопросов:

1. Действия над событиями и их свойства. Соотношения между событиями

События определены как множества, поэтому действия над ними аналогичны действиям над множествами и хорошо иллюстрируются диаграммами Венна.

Пространство *Ω* будем обозначать прямоугольником, элементарное событие - точкой прямоугольника, а каждое событие - подмножеством точек этого прямоугольника. Результат операции над событиями будем заштриховывать.

Пусть выбираются карты из колоды карт. Событие А - выбор червонной карты, событие В - выбор десятки

Суммой *двух событий А и В называется событие*

$C = A + B$ (или С = AB), состоящее из элементарных событий, принадлежащих либо *А*, либо *B*.

Пример.

C = A + B - выбор любой червонной карты или любой десятки

Произведением *двух событий A и B называется событие D = AB (или D = AB), состоящее из элементарных событий, принадлежащих и A и B.*

Пример. *AB* - выбор десятки червей

Разностью *двух событий A и B называется событие*

A\B, состоящее из элементарных событий, принадлежащих *A* и не принадлежащих *B*.

Пример. *A\B* -выбор любой червонной карты, кроме десятки

Классификация событий

Событие, состоящее из всех элементарных событий, не содержащихся в A, обозначим и будем называть ***противоположным*** *событием.*

Пример. A -выбор червонной карты;

-выбор любой карты другой масти.. = ***Ω****\A*

Два события *A* и *B* будем называть ***совместными***, если каждое из них содержит хотя бы одно общее элементарное событие, т.е если *AB*Ø.

Пример. A - выбор червонной карты и

B - выбор десятки - совместные события, так как

AB = выбор червонной десяткиØ

Если общих элементарных событий у событий *A* и *B* нет, то их будем называть ***несовместными*** событиями

(*AB* = Ø).

Пример. A - выпадение четного числа очков A = {2, 4, 6}.

B - выпадение нечетного числа очков B = {1, 3, 5}

Очевидно, что A и B несовместны.

Полная группа событий - это совокупность *n* событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, одно из которых обязательно произойдет, т.е.

Свойства операций над событиями

1. =Ø 6. A = A

2. A + A = A 7. A Ø = Ø <u>*Коротко*</u>*. Если A B, то*

3. A A = A 8 = A A + B = B

4. A + = 9. A B = A

5. A + Ø = A 10. = Ø

Коммутативность операций

A + B = B + A; A B = B A

Ассоциативность операций

A + (B + C) = *(A + B) + C = A + B + C A(B C) = (A B) C = A B C*

Дистрибутивность операции сложения относительно умножения

A (B + C) = A B + A C

Дистрибутивность операции умножения относительно сложения

A + (B C) = (A + B)(A + C)

Пример. Вычислим (A+B)(A+C)=AA+BA+AC+BC=A+BC.

В самом деле, BA⊂A, AC⊂A, AA=A, тогда AA+BA=A, A+AC=A.

2. Теорема сложения вероятностей и следствия из нее

<u>Теорема</u> (сложения вероятностей). *Вероятность суммы двух случайных событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их пересечения*:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

<u>Доказательство.</u> Очевидно:

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = AB \cup A\overline{B};$$

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) = AB \cup \overline{A}B$$

Тогда

$$A + B = A \cup B = AB \cup A\overline{B} \cup AB \cup B\overline{A} = A\overline{B} \cup AB \cup B\overline{A} = A\overline{B} + AB + B\overline{A}.$$

Поскольку события AB и $A\overline{B}$ несовместны, то по аксиоме A_4:

$$P(A) = P(AB + A\overline{B}) = P(AB) + P(A\overline{B}).$$

События AB и $\overline{A}B$ несовместны, и по аксиоме A_4:

$$\mathrm{P}(B) = P(AB) + P(\overline{A}B).$$

События $A\overline{B}; AB$ и $B\overline{A}$ несовместны, по аксиоме A_4:

$$P(A+B) = P(A\overline{B}) + P(AB) + P(B\overline{A}).$$

Итак,

$$P(A+B) = P(A\overline{B}) + P(AB) + P(B\overline{A})$$

$$P(A) + \mathrm{P}(B) - P(AB) = P(AB) + P(\overline{A}B) + P(AB) + P(A\overline{B}) - P(AB) = P(AB) + P(\overline{A}B) + P(AB) = \\ = P(A+B)$$

<u>Следствие 1:</u> Верно следующее обобщение формулы для трех слагаемых:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AB) - P(Ac) + P(ABC)$$

<u>Следствие 2:</u> Верно следующее обобщение формулы для n слагаемых:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i,j=1}^{n} P(A_i A_j) + \sum_{i,j,k=1}^{n} P(A_i A_j A_k) + \ldots + (-1)^{n-1} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{n} A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_n}$$ –

формула включений и исключений.

3. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей

<u>Определение.</u> Событие A называется **независимым** от события B, вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет. Событие A называется **зависимым** от события B, если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет.

Условная вероятность

Во многих случаях вероятности появления одних событий зависят от того, произошло или нет другое событие. Например, вероятность своевременного выпуска машины зависит от поставки комплектующих изделий. Если эти изделия уже поставлены, то искомая вероятность будет одна. Если же она определяется до поставки комплектующих, то ее значение, очевидно, будет другим.

Вероятность события A, вычисленная при условии, что имело место другое событие B, называется условной вероятностью события Aи обозначается $P(A/B)$.

В тех случаях, когда вероятность события Aрассматривается при условии, что произошло два других события (B,C), используется условная вероятность относительно произведения событий (B,C)

$P(A/BC)$.

Теорема умножения вероятностей

Теорема. Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место

P(AB) = P(A)×P(B/A) = P(B)×P(A/B).

4. Независимые события. Теорема умножения для независимых событий

Теорема умножения вероятностей независимых событий: вероятность совместного появления независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

1. 26 Лекция № 26 (2 часа).

Тема: «Формула полной вероятности и формула Байеса»

1.26.1 Вопросы лекции:

1. Формула полной вероятности
2. Формула Байеса

1.26.2 Краткое содержание вопросов:

1. Формула полной вероятности

Формула полной вероятности - позволяет вычислить вероятность интересующего события через условные вероятности этого события в предположении неких гипотез, а также вероятностей этих гипотез.

2. Формула Байеса

Теорема Байеса (или **формула Байеса**) — одна из основных теорем элементарной теории вероятностей, которая позволяет определить вероятность какого-либо события при условии, что произошло другое статистически взаимозависимое с ним событие. Другими словами, по формуле Байеса можно более точно пересчитать вероятность, взяв в расчёт как ранее известную информацию, так и данные новых наблюдений. Формула Байеса может быть выведена из основных аксиом теории вероятностей, в частности из условной вероятности. Особенность теоремы Байеса заключается в том, что для её практического применения требуется большое количество расчётов, вычислений, поэтому байесовские оценки стали активно использовать только после революции в компьютерных и сетевых технологиях.

1. 27 Лекция № 27 (2 часа).

Тема: «Статистическое оценивание и проверка гипотез»

1.27.1 Вопросы лекции:

1. распределения, полигон и гистограмма
2. Точечные оценки. Выборочная средняя и выборочная дисперсия. Метод моментов и метод наибольшего правдоподобия
3. Интервальные оценки
4. Проверка статистических гипотез: основные понятия, проверка гипотезы о распределении. Критерий Пирсона

1.27.2 Краткое содержание вопросов:

1. распределения, полигон и гистограмма
2. Точечные оценки. Выборочная средняя и выборочная дисперсия. Метод моментов и метод наибольшего правдоподобия
3. Интервальные оценки

4. Проверка статистических гипотез: основные понятия, проверка гипотезы о распределении. Критерий Пирсона

1. 28 Лекция № 28 (2 часа).

Тема: «Статистические методы обработки экспериментальных данных»

1.28.1 Вопросы лекции:

1. Регрессионный анализ: линейная регрессия с несгруппированными данными, линейная регрессия со сгруппированными данными
2. Дисперсионный анализ

1.28.2 Краткое содержание вопросов:

1. Регрессионный анализ: линейная регрессия с несгруппированными данными, линейная регрессия со сгруппированными данными
2. Дисперсионный анализ

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

2.1 Лабораторная работа № 1(2 часа).

Тема: «*Теория пределов функции одной переменной. Непрерывность функции одной переменной*»

2.1.1 Цель работы: Изучить теорию пределов функции одной переменной.

Непрерывность функции одной переменной.

2.1.2 Задачи работы:

1. Изучить теоретический материал

2. Выполнить задания представленные в лабораторной работе

2.1.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Мультимедиа (проектор, компьютер, экран)

2. Open Office

2.1.4 Описание (ход) работы:

Вариант 1

1. Вычислить пределы функций:

.1 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-11x+10}{2x^2-5x+2}$ *при* $x_0=\infty;\quad x_0=-3;\quad x_0=2;$

.2 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$; 3.3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot tg\,5x}{\sin^2 3x}$; 3.4 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x+1}\right)^{6x-4}$.

2. Исследуйте функцию на непрерывность:

$$\text{а) } y=\begin{cases} x;\ x\le 0 \\ 1-x;\ 0<x\le 1 \\ \dfrac{1}{1-x};\ x>1 \end{cases};\ \text{б) } y=\begin{cases} 2x-1;\ x\le -2 \\ x^2;\ -2<x<0 \\ 2^x-1;\ 0<x<2 \\ 3\log_2 x;\ x\ge 2 \end{cases}.$$

Вариант 2

1. Вычислить пределы функций:

.1 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2+5x-8}{2x^2+3x-5}$ *при* $x_0=\infty;\quad x_0=-2;\quad x_0=1;$

.2 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$; 3.3 $\lim\limits_{x\to 0}\sin^2 3x\cdot ctg2x$; 3.4 $\lim\limits_{x\to -1}(2x+3)^{1/(x+1)}$.

2. Исследуйте функцию на непрерывность:

$$\text{а) } y=\begin{cases} \ln|x|;\ x<0 \\ 0;\ 0\le x\le 1 \\ x^2+1;\ 1<x\le 2 \\ 5;\ x>2 \end{cases};\ \text{б) } y=\begin{cases} \sin 2x;\ x\le -\dfrac{\pi}{2} \\ x+1;\ -\dfrac{\pi}{2}<x<0 \\ \log_2(x+2);\ x>0 \end{cases}.$$

2.2 -3Лабораторная работа № 2-3(4 часа).

Тема: «*Производная функции в точке. Свойства производных. Приложения дифференциального исчисления функции одной переменной*»

2.2.1-3.1Цель работы: Изучить основы дифференциального исчисления

2.2.2-3.2Задачи работы:

1. Изучить теоретический материал

2. Выполнить задания представленные в лабораторной работе

2.2.3-3.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Мультимедиа (проектор, компьютер, экран)

2. Open Office

2.2.4 -3.4Описание (ход) работы:

1.Найти производную.

1). $y=\dfrac{2(3x^3+4x^2-x-2)}{15\sqrt{1+x}}$. 2) $y=x-\ln(2+e^x+2\sqrt{e^{2x}+e^x+1}.$

3) $y=\sqrt{x}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+a})-\sqrt{x+a}.$ 4) $y=\sin\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}\dfrac{\sin^2 3x}{3\cos 6x}.$

5) $y=arctg\,\dfrac{tgx-ctgx}{\sqrt{2}}.$ 6) $y=(arctgx)^{(1/2)\ln arctgx}.$

7) $y=\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{1-x^2}.$ 8) $y=\dfrac{1}{24}(x^2+8)\sqrt{x^2-4}+\dfrac{x^4}{16}\arcsin\dfrac{2}{x},\ x>0.$

8) $y=\dfrac{1}{\sin\alpha}\ln(tgx+ctg\alpha).$

2. Показать, что функция y удовлетворяет данному уравнению.

1. $y=xe^{-x^2/2}.\ xy'=(1-x^2)y.$

3. Вычислить приближенно с помощью дифференциала, сохраняя два знака после запятой.

а) $y=\sqrt[3]{x^3+7x^2}$ при x=1,02.

б) sin32°

4. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$ функций, заданных в явном виде.

а) $y=5x^2+\dfrac{4}{x}-\sqrt[3]{x^7}-2x^6$

б) $y=5^x\cdot\arccos(2x^5)$

в) $y=arctg^3(7x-x^3)\cdot\ln(x^2+1)$.

г) $y=\dfrac{\sqrt[7]{(x-2)^4}}{(x+1)^2}+\dfrac{e^{2x}}{x^3}=(x-2)^{4/7}(x+1)^{-2}+e^{2x}x^{-3}.$

5..Провести полное исследование функции и построить ее график

а) $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}.$

2.4-5 Лабораторная работа № 4-5(4 часа).

Тема: «*Определенный интеграл, его свойства, методы вычисления. Приложения определенного интеграла. Несобственные интегралы* »

2.4.1-5.1 Цель работы: Изучить основы интегрального исчисления

2.4.2 -5.2Задачи работы:

1. Изучить теоретический материал

2. Выполнить задания представленные в лабораторной работе

2.4.3-5.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Мультимедиа (проектор, компьютер, экран)
2. Open Office

2.4.4 -5.4 Описание (ход) работы:

1. Найти интегралы:

а) $\int arctgx dx$ б) $\int \frac{2x^2-3x+13}{(x+2)(x^2-2x+5)}dx$ в) $\int \frac{3x-7}{(x+4)(x^2+4)}dx$

г) $\int (x+1)\sin\frac{4}{5}x dx$

2.Вычислить определенные интегралы:
по формуле Симпсона при n=10 с точностью до двух знаков.

а) $\int_3^6 \frac{\sqrt{x-3}}{x}dx$; б) $\int_{-2}^{8}\sqrt{8^2-x^2}dx$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной четырехлепестковой розой $r = 2\sin 4\varphi$.

4. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

$\int_{-4}^{2}\frac{dx}{(x+3)^2}$; $\int_0^{\infty} x\cdot e^{-x^2}dx$; $\int_4^{\infty}\frac{xdx}{(x^2+1)^2}$; $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}dx$

6. Поменять порядок интегрирования

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt[3]{x^2}} f dy + \int_1^2 dx \int_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f dy$$

7. Поменять порядок интегрирования

$$\int_{-2}^{0} dy \int_{-1}^{y+1} f dx + \int_0^{\pi} dy \int_{-1}^{\cos y} f\, dx$$

8. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D (2x+y)dxdy$$

по области D, ограниченной прямымиу=2x-3, y=2x+5, y=-x+7, y=-x-1

9.Вычислить двойной интеграл
$\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, где Dограничена линиями x=2, y=x, $y=\frac{1}{x}$

10. Вычислить двойной интеграл $I = \iint_D \frac{ydxdy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$,где D-квадрат 0≤x≤1, 0≤y≤1

11. $\iint_D x^2y\cos(xy^2)dxdy$, если D: 0≤x≤$\frac{\pi}{2}$, 0≤y≤2

12. $\iint_D y^2\sin x dxdy$,где D ограничена линиями x=0, y =0, x=π

2.6 Лабораторная работа № 6(2 часа).

Тема: «*Дифференцируемость функции нескольких переменных*»

2.6.1 Цель работы: Изучить теорию пределов и непрерывность функции нескольких переменных. Дифференцируемость функции нескольких переменных

2.6.2Задачи работы:

1. Изучить теоретический материал
2. Выполнить задания представленные в лабораторной работе

2.6.3Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Мультимедиа (проектор, компьютер, экран)
2. Open Office

2.6.4Описание (ход) работы:

1. Найти область определения функции:

$$z=\sqrt{1+y-x^2}-\sqrt{1-y-x^2}$$

2. Найти частные производные функций:

$$z=xy\sqrt{x^2+y^2} \qquad z=xe^{-xy} \qquad z=\ln(x^2+y^2)$$

3. Дана функция z=$\ln(x^2+y^2+2x+1)$. Показать, что

$$F(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y})=0.$$

$$F=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

4. Найти полный дифференциал функции

$z=3^{\sin(2x+3y)}$; z=(2x-y)cos(3x+2y); z=$\sqrt[4]{(3x-2y)^3}$

5. Дана функция z=f(x,y) и точка $M_0(x_0,y_0)$. С помощью дифференциала вычислить приближенное значение функции в данной точке. Оценить относительную погрешность вычисления.

$z=x^2+y^2-4x+2y$, $M_0(2,98;2,05)$.

6. Найти наименьшее и наибольшее значения функции z=f(x,y) в замкнутой области D, заданной системой неравенств. Сделать чертеж.

$z=x^2+3y^2+x-y$, x≥1, y≥-1,x+y≤2.

7.Найти наименьшее и наибольшее значения функции z=f(x,y) в замкнутой области D, заданной системой неравенств. Сделать чертеж.

$z=x^2+xy$, $-1\le x\le 1, 0\le y\le 2$.

2.7-8 Лабораторная работа № 7-8(2 часа).

Тема: «*Обратная матрица и ее существование. Ранг матрицы. Системы линейных уравнений и методы их решения*»

2.7.1 -8.1Цель работы: Изучить алгоритм нахождения обратной матрицы, понятие ранга матрицы, методы решения систем линейных уравнений

2.7.2-8.2 Задачи работы:

1. Изучить теоретический материал

2. Выполнить задания представленные в лабораторной работе

2.7.3-8.3Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Мультимедиа (проектор, компьютер, экран)

2. Open Office

2.7.4-8.4Описание (ход) работы:

1. Исследовать систему на совместность и решить ее:

а) методом обратной матрицы;
б) по формулам Крамера;
в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ x + y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -3 \end{cases}.$$

2. Методом Гаусса решить систему линейных уравнений и найти одно из базисных решений:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_3 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ -5x_1 + 10x_2 - 7x_3 = 10 \end{cases}.$$

3. Исследовать систему на совместность и решить ее:

а) методом обратной матрицы;
б) по формулам Крамера;
в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x - y + z = 12 \\ x + 2y + 4z = 6 \\ 5x + y + 2z = 3 \end{cases}.$$

4. Методом Гаусса решить систему линейных уравнений и найти одно из базисных решений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 7 \\ -4x_1 + 2x_2 = -2 \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 = -3 \end{cases}.$$

5. Вычислить ранг матрицы.

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 3 & 15 & -9 \\ 5 & 5 & -7 \end{pmatrix}$.

2.9 Лабораторная работа № 9(2 часа).

Тема: «*Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, их свойства и приложения*»

2.9.1 Цель работы: Изучить классификацию векторов, линейные операции над векторами, скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, их свойства и приложения

2.9.2Задачи работы:

1. Изучить теоретический материал
2. Выполнить задания представленные в лабораторной работе

2.9.3Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Мультимедиа (проектор, компьютер, экран)
2. Open Office

2.9.4Описание (ход) работы:

Вариант 1

1. Доказать, что векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе.
   $\overline{a} = \{0,1,2\}, \overline{b} = \{1,0,1\}, \overline{c} = \{-1,2,4\}, \overline{d} = \{-2,4,7\}.$
2. Коллинеарны ли векторы c_1 и c_2, построенные по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$?
   $\overline{a} = \{1,-2,3\},\ \overline{b} = \{3,0,-1\},\ \overline{c_1} = 2\overline{a} + 4\overline{b},\quad \overline{c_2} = 3\overline{b} - \overline{a}.$
3. Найти косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, если A(1,-2,3), B(0,-1,2), C(3,-4,5).
4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если
   $\overline{a} = \overline{p} + 2\overline{q},\quad \overline{b} = 3\overline{p} - \overline{q};\quad |\overline{p}| = 1,\quad |\overline{q}| = 2,\quad (\overline{p}, \overline{q}) = \frac{\pi}{6}.$
5. Компланарны ли векторы $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$?
   $\overline{a} = \{2,3,1\},\ \overline{b} = \{-1,0,-1\},\ \overline{c} = \{2,2,2\}.$
6. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$, если
   $A_1(1,3,6)$, $A_2(2,2,1)$, $A_3(-1,0,1)$, $A_4(-4,6,-3)$.

Вариант 2

1. Доказать, что векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе.

   $\overline{a} = \{1,3,0\}, \overline{b} = \{2,-1,1\}, \overline{c} = \{0,-1,2\}, \overline{d} = \{6,12,-1\}.$

2. Коллинеарны ли векторы $\overline{c_1}$ *и* $\overline{c_2}$, построенные по векторам $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$?

   $\overline{a} = \{1,-2,5\}, \; \overline{b} = \{3,-1,0\}, \; \overline{c_1} = 4\overline{a} - 2\overline{b}, \quad \overline{c_2} = \overline{b} - 2\overline{a}.$

3. Найти косинус угла между векторами $\overline{AB}$ *и* $\overline{AC}$, если A(0,-3,6), B(-12,-3,-3), C(-9,-3,-6).

4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$, если

   $$\overline{a} = 3\overline{p} - 2\overline{q}, \quad \overline{b} = \overline{p} + 5\overline{q}; \quad |\overline{p}| = 4, \quad |\overline{q}| = \frac{1}{2}, \quad (\overline{p},\overline{q}) = \frac{5\pi}{6}.$$

5. Компланарны ли векторы $\overline{a},\overline{b}$ *и* $\overline{c}$?

   $\overline{a} = \{3,2,1\}, \; \overline{b} = \{2,3,4\}, \; \overline{c} = \{3,1,-1\}.$

6. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$, если
   A_1(-4,2,6), A_2(2,-3,0), A_3(-10,5,8), A_4(-5,2,-4).

2.10-13 Лабораторная работа № 10-13 (8 часов).

Тема: «*Основные определения и задачи линейного программирования. Симплексный метод. Теория двойственности. Дискретное, динамическое, нелинейное программирование* »

2.10.1-13.1 Цель работы: Изучить основные определения и задачи линейного программирования. Симплексный метод. Теорию двойственности. Дискретное, динамическое, нелинейное программирование

2.10.2-13.2 Задачи работы:

1. Изучить теоретический материал

2. Выполнить задания представленные в лабораторной работе

2.10.3 -13.3Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Мультимедиа (проектор, компьютер, экран)

2. Open Office

2.10.4 -13.4Описание (ход) работы:

Вариант 1

1. Решить графическим методом задачу линейного программирования:

$$Z(X) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 3x_2 \ge -9, \\ 4x_1 + 3x_2 \le 24, \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

2. Решить методом искусственного базиса задачу линейного программирования:

$$Z(X) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 5; \\ x_1 - x_2 - x_3 \leq 1; \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 11. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3.$$

Вариант 2

1. Решить графическим методом задачу линейного программирования:

$$Z(X) = 5x_1 - 3x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \geq 0, \\ -x_1 + x_2 \leq 3, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6, \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

2. Решить методом искусственного базиса задачу линейного программирования:

$$Z(X) = -6x_1 - 3x_2 + 4x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 \geq 8; \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 6; \\ x_1 - x_2 - x_3 \leq 4. \end{cases} \qquad x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3.$$

2.14 -17Лабораторная работа № 14- 17 (8 часов).

Тема: «*Сущность и условия применимости теории вероятностей. Основные понятия теории вероятностей. Вероятность события, ее свойства. Классическое определение вероятности. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности и формула Байеса.*»

2.14.1-17.1 Цель работы: Изучить сущность и условия применимости теории вероятностей. Основные понятия теории вероятностей. Вероятность события, ее свойства. Классическое определение вероятности. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности и формула Байеса. Формулы Бернулли и Пуассона

2.14.2-17.2 Задачи работы:

1. Изучить теоретический материал

2. Выполнить задания представленные в лабораторной работе

2.14.3 -17.3Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Мультимедиа (проектор, компьютер, экран)

2. Open Office

2.14.4 -17.4Описание (ход) работы:

Вариант 1

1. В ящике 10 деталей, среди которых 6 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три. Найти вероятность того, что две из них окрашены.
2. В цехе 3 вентилятора. Вероятность того, что в момент времени t вентилятор включен, равна, соответственно, 0,9; 0,8; 0,7. Какова вероятность того, что в момент времени t в цехе включены а) все три вентилятора; б) два вентилятора; в) хотя бы один вентилятор?
3. Завод состоит из трёх конвейерных линий. Первая линия выпускает 1/3 всех изделий, вторая – 1/2, третья – 1/6. Вероятность качества линий соответственно равна 0,8; 0,6; 0,9. Найти вероятность того, что наугад взятое изделие, отличного качества, т.е. определить показатели качества завода.
4. Найти вероятность того, что событие *A* наступит ровно 70 раз в 243 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,25.
5. Задан закон распределения дискретной случайной величины *X*. Найти: а) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график; б) математическое ожидание случайной величины $M(X)$; в) дисперсию $D(X)$; г) среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$; д) построить многоугольник распределения.

X	4	5	6	8
p	0,3	0,4	0,2	0,1

6. Непрерывная случайная величина *X* задана функцией распределения *F(x)*. Построить график функции распределения и найти: а) плотность распределения *f(x)* и построить ее график; б) математическое ожидание случайной величины $M(X)$; в) дисперсию $D(X)$; г) среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

$$F(x)=\begin{cases}0, при\, x<0\\ x^2, при\, 0\le x\le 1.\\ 1, при\, x>1\end{cases}$$

Вариант 2

1. В цехе имеется 12 аккумуляторов, причём 9 из них заряжены. Водитель наугад взял два аккумулятора и, не проверяя, установил их на автомобиль. Какова вероятность того, что один из них окажется заряженным?
2. Вероятность того, что роман начинающего писателя будет опубликован в течение текущего года, в журнале «А» равна 0,9; в журнале «В – 0,7; в журнале «С» - 0,6. Какова вероятность того, что он будет опубликован в течение текущего года а) во всех трех журналах; б) только в двух журналах; в) хотя бы в одном журнале?
3. Автомобиль «Жигули» изготавливается на двух заводах. Завод №1 производит 2/5 всех «Жигулей», поступающих в продажу, а завод № 2 – 3/5. Надёжность автомобиля (т.е. вероятность того, что автомобиль отличного качества) изготовленного на заводе №1 – 0,75, а на заводе №2 – 0,9. Определить вероятность того, что наугад выбранный автомобиль отличного качества.
4. Вероятность того, что пара обуви, взятая наудачу из изготовленной партии, окажется первого сорта, равна 0,4. Определить вероятность того, что среди 810 пар, поступивших на контроль, число пар первосортной обуви окажется не менее 340 и не более 400.

5. Задан закон распределения дискретной случайной величины *X*. Найти: а) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график; б) математическое ожидание случайной величины $M(X)$; в) дисперсию $D(X)$; г) среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$; д) построить многоугольник распределения.

X	23	25	27	29
p	0,2	0,1	0,3	0,4

6. Непрерывная случайная величина *X* задана функцией распределения *F(x)*. Построить график функции распределения и найти: а) плотность распределения *f(x)* и построить ее график; б) математическое ожидание случайной величины $M(X)$; в) дисперсию $D(X)$; г) среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

$$F(x)=\begin{cases} 0, при\, x<0 \\ \dfrac{x^3}{8}, при\, 0\le x\le 2 \\ 1, при\, x>2 \end{cases}.$$

2.18-19 Лабораторная работа № 18-19 (4 часа).

Тема: «*Статистическое оценивание и проверка гипотез. Статистические методы обработки экспериментальных данных* »

2.18.1-19.1 Цель работы: Изучить статистические методы обработки экспериментальных данных

2.18.2-19.2 Задачи работы:

1. Изучить теоретический материал
2. Выполнить задания представленные в лабораторной работе

2.18.3 -19.3Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Мультимедиа (проектор, компьютер, экран)
2. Open Office

2.18.4 -19.4Описание (ход) работы:

Задана совокупность вариационных (статистических) рядов. Каждый студент по правилу указанному преподавателем группы (потока) должен выписать для себя один вариационный ряд, взяв строку интервалов под номером *m* и строку частот под номером *n*.

m	Интервалы											
1	50	52	54	56	58	60	62	64	66	68	70	72
	52	54	56	58	60	62	64	66	68	70	72	74
2	85	90	95	100	105	110	115	120	125	130	135	140
	90	95	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145
3	250	253	256	259	262	265	268	271	274	277	280	283

	253	256	259	262	265	268	271	274	277	280	283	286

n	Частоты											
1	5	12	21	32	37	43	39	19	15	8	5	4
2	4	15	24	28	45	43	49	30	12	5	3	2
3	1	3	9	12	20	28	39	41	15	2	3	7

1. Найти: а) моду и медиану; б) среднее выборочное; в) статистическую дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение.
2. Построить гистограмму распределения.
3. Найти теоретические частоты при гипотезе, что случайная величина распределена нормально.
4. Построить полигон распределения и теоретическую кривую распределения.
5. Применить критерии Пирсона и Колмогорова для проверки гипотезы о нормальности распределения.
6. Построить доверительный интервал для среднего при доверительной вероятности 0,98.
7. Заданы среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины *X*, выборочная средняя $\bar{x}$, объем выборки *n*.

Найти доверительные интервалы для оценки неизвестного математического ожидания *a* с заданной надежностью γ = 0,95 .

σ	$\bar{x}$	*n*
10	18,21	16
9	18,31	49
1	20,11	64

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Не предусмотрены

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ

4.1 Семинарское занятие № 1 (1 час).

Тема: «Понятие множества. Операции над множествами. Функциональная зависимость. Теория пределов числовых последовательностей.»

4.1.1 Вопросы к занятию:

1. Множества и способы их задания.
2. Операции над множествами.
3. Вычисление пределов числовых последовательностей.
4. Способы задания функций. График функции и его преобразования
   Специальные классы функций

4.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Найти область определения функции:

а) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3x-x^2-2}}+\ln(2x-1)$

б)f(x)= $\dfrac{2x}{3+2x-x^2}$

в)f (x)= $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-3}}-\lg(2x-3)$

2. Для функции найти ей обратную

а) $y=2x+5$ б) $y=\dfrac{x-3}{2}$ в) $y=\sqrt{4-5x}$

3.Найти значение функции при данных значениях переменной:

f (x)= $\dfrac{\lg(5-x)}{x^2-x}$, x=4; x=c

4.Исследовать функцию на четность, нечетность

f(x)= $\dfrac{x^4}{\sin x}-x^3\ln(1+x^2)$

5.Даны функции, заполните таблицу:

1)$y=3x^2+\sin x$; 2) $y+\ln xy=\cos\dfrac{x}{y}$; 3)$y=\mathrm{tg}(x^2+7x)$;

4)$y=\cos(2x+3)$; 5) $y=(5x^3+2x)\ln x$; 6) $\dfrac{y}{x}+5^{x+y}=\ln y$;

7) $y=\cos(x^3+2y)-\sin 3x$; 8)$y=\arccos(\dfrac{3x^2-2x}{5x+3})$; 9)$y-3x^2+\cos 3x=5$.

Функция задана в явном виде	Функция задана в неявном виде	Функция является сложной	Функция не является сложной

6. Вычислить пределы числовых последовательностей

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^4+(2-n)^4}{(1-n)^4-(1+n)^4}$.

7. Вычислить пределы числовых последовательностей

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[3]{5n^2}+\sqrt[4]{9n^8+1}}{(n+\sqrt{n})\sqrt{7-n+n^2}}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3}+\sqrt[4]{n^5+1}}$.

8. Вычислить пределы числовых последовательностей

1. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2-3})$.

9. Вычислить пределы числовых последовательностей

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$.

4.2 Семинарское занятие № 2 (2 часа).

Тема: «Дифференциал, его свойства и приложения»

4.2.1 Вопросы к занятию:

1. Правила вычисления дифференциалов.
2. Приближенные вычисления с помощью дифференциалов

4.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вычислить приближенно с помощью дифференциала, сохраняя два знака после запятой.

а) $y=\sqrt[3]{2x^2+5x+1}$ при x=1,04.

б) cos61°

в) $y=\sqrt{4x-3x^3}$ при x=0,85.

г) sin27°

4.3 Семинарское занятие № 3 (2 часа).

Тема: «Определенный интеграл, его свойства, методы вычисления»

4.3.1 Вопросы к занятию:

1. Формула Ньютона – Лейбница.
2. Непосредственное вычисление определенного интеграла.
3. Вычисление определенного интеграла методом подстановки.
4. Вычисление определенного интеграла методом по частям.

4.3.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вычислите определенные интегралы.

а) $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{6x+2}\,dx$

Решение:

$$\int_0^1 \sqrt[3]{6x+2}dx = \int_0^1 (6x+2)^{1/3}dx = \left.\frac{(6x+2)^{4/3}}{4/3\cdot 6}\right|_0^1 = \frac{1}{8}(8^{4/3}-2^{4/3}) = \frac{1}{8}(16-2\sqrt[3]{2}) =$$

$$= 2-\frac{\sqrt[3]{2}}{4} \approx 1{,}685.$$

Ответ: $\int_0^1 \sqrt[3]{6x+2}dx = 2-\frac{\sqrt[3]{2}}{4} \approx 1{,}685.$

b) $\int_0^1 \frac{2x}{e^{x^2}}dx$

Решение:

$$\int_0^1 \frac{2x}{e^{x^2}}dx = \left|\begin{matrix} x^2 = u; \text{ Если } x=0, \text{ то } u=0; \\ 2xdx = du; \text{ Если } x=1, \text{ то } u=1; \end{matrix}\right| = \int_0^1 e^{-u}du = \left.-e^{-u}\right|_0^1 = 1-e^{-1} \approx 0{,}632.$$

Ответ: $\int_0^1 \frac{2x}{e^{x^2}}dx = 1-e^{-1} \approx 0{,}632.$

Вычислите определенные интегралы.

c) $\int_0^2 \sqrt{4x+1}dx$

Решение:

$$\int_0^2 \sqrt{4x+1}dx = \int_0^2 (4x+1)^{1/2}dx = \left.\frac{(4x+1)^{3/2}}{3/2\cdot 4}\right|_0^2 = \frac{1}{6}(9^{3/2}-1^{3/2}) = \frac{1}{6}(27-1) = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}.$$

Ответ: $\int_0^2 \sqrt{4x+1}dx = \frac{13}{3}.$

d) $\int_0^{\pi/4} \cos^2 2xdx$

Решение:

Воспользуемся тригонометрической формулой $\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1+\cos 4x)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2xdx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 4x)dx = \left.\frac{1}{2}\left(x+\frac{\sin 4x}{4}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sin\pi}{4}\right)-0 = \frac{\pi}{8}.$$

Ответ: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x dx = \frac{\pi}{8} \approx 0{,}393.$

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_3^6 \frac{\sqrt{x-3}}{x} dx$; б) $\int\limits_{-2}^{8} \sqrt{8^2 - x^2} dx$

2. Вычислите определенные интегралы.

а) $\int\limits_1^2 \sqrt{5x-1} dx$

b) $\int\limits_1^e \frac{ln^2 x}{x} dx$

4.4 Семинарское занятие № 4 (2 часа).

Тема: «Теория пределов и непрерывность функции нескольких переменных»

4.4.1 Вопросы к занятию:

1. ОДЗ функции двух переменных.
2. Вычисление частных производных функции двух переменных.
3. Дифференциал функции двух переменных.
4. Вычисление производной функции, заданной неявно.

4.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Определить область определения функции (сделать чертеж): $z = \left(x^2 + y\right)\sqrt{xy}$.
2. Найдите полный дифференциал функции: $z = arctg\ x^2 y^3$.
3. Доказать, что $z''_{xy} = z''_{yx}$, если $z = xy^3 - 2x^3 y + 2y^4$.
4. Найдите первую и вторую производную неявной функции, определяемой уравнением $y^3 - 5xy + 8x^2 = 0$.
5. Исследовать функцию на экстремум: $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

4.5 Семинарское занятие № 5 (2 часа).

Тема: «Функции спроса и предложения. Функция полезности. Кривые безразличия»

4.5.1Вопросы к занятию:

1. Функции спроса и предложения
2. Функция полезности.

3. Кривые безразличия.

4.5.2 Краткое описание проводимого занятия:

Рассмотреть следующие вопросы :
1. Классические методы оптимизации
2. Функции спроса и предложения
3. Функция полезности
4. Кривые безразличия

6 Семинарское занятие № 6 (2 часа).

Тема: «Вектора и их классификация, линейные операции. Векторное пространство. Линейная зависимость векторов, базис, ПДСК. »

4.6.1 Вопросы к занятию:

1. Вектор, классификация векторов, изображение
2. Линейные операции над векторами
3. Линейная зависимость и линейная независимость векторов
4. Базис векторного пространства, разложение вектора по базису
5. Простейшие задачи. Направляющие косинусы вектора
6. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, их свойства, приложения
7. Признаки коллинеарности, ортогональности и компланарности векторов

4.6.2 Краткое описание проводимого занятия:

Базис векторного пространства, разложение вектора по базисным векторам

Пример. Показать, что тройка векторов $\overrightarrow{e_1}(1,0,0)$, $\overrightarrow{e_2}(1,1,0)$, $\overrightarrow{e_3}(1,1,1)$ образуют базис в множестве всех векторов пространства. Вычислить координаты вектора $\vec{a} = -2\vec{\imath} - \vec{k}$ в базисе $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$и написать соответствующее разложение по базису.

Решение:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$x = -2, y = 1, z = -1$$

Ответ: $\vec{a} = -2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}$.

Пример. Разложить вектор $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по трем неколлинеарным векторам $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$,$\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$,$\vec{r} = 2\vec{b} + 3\vec{c}$.

Решение:

а) Покажем, что векторы неколлинеарны. В этом случае тройки коэффициентов их линейных комбинаций должны быть линейно независимы, т.е. определитель, составленный из коэффициентов линейных комбинаций, должен быть не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 7 = -10 \neq 0.$$

(Определитель вычислен разложением по элементам первого столбца).

б) Решим систему уравнений относительно $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\begin{cases} \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} = \vec{p} \\ \vec{a} - \vec{b} \qquad = \vec{q} \\ \qquad 2\vec{b} + 3\vec{c} = \vec{r} \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим систему двух уравнений относительно $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\begin{cases} 2\vec{b} - 2\vec{c} = \vec{p} - \vec{q} \\ 2\vec{b} + 3\vec{c} = \vec{r} \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое.

Отсюда $\vec{c} = \frac{\vec{q}-\vec{p}+\vec{r}}{5}$, $\vec{b} = \frac{3\vec{p}-3\vec{q}+2\vec{r}}{10}$, $\vec{a} = \frac{3\vec{p}+7\vec{q}+2\vec{r}}{10}$ и

$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \frac{4\vec{p}+6\vec{q}+6\vec{r}}{10} = \frac{2}{5}\vec{p} + \frac{3}{5}\vec{q} + \frac{3}{5}\vec{r}$.

Ответ: $\vec{s} = (\frac{2}{5}; \frac{3}{5}; \frac{3}{5})$в базисе $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$.

Скалярное произведение векторов, его свойства, приложения

Пример. Дано: $|\overrightarrow{a_1}| = 3$, $|\overrightarrow{a_2}| = 4$, $(\overrightarrow{a_1}, \ \overrightarrow{a_2}) = \frac{2\pi}{3}$.

Вычислить: а) $\overrightarrow{a_1}^2 = \overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_1}$; б) $(3\overrightarrow{a_1} - 2\overrightarrow{a_2}) \cdot (\overrightarrow{a_1} + 2\overrightarrow{a_2})$;в) $(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2})^2$.

Решение:

а)$\overrightarrow{a_1}^2 = |\overrightarrow{a_1}|^2 = 9$;

б)$(3\overrightarrow{a_1} - 2\overrightarrow{a_2}) \cdot (\overrightarrow{a_1} + 2\overrightarrow{a_2}) = 3\,\overrightarrow{a_1}^2 - 2(\overrightarrow{a_2} \cdot \overrightarrow{a_1}) + 6(\overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2}) - 4\overrightarrow{a_2}^2 = 3 \cdot 9 + 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 4 \cdot 4^2 = 27 - 24 - 64 = -61$

в)$(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2})^2 = \overrightarrow{a_1}^2 + 2(\overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2}) + \overrightarrow{a_2}^2 = |\overrightarrow{a_1}|^2 + 2|\overrightarrow{a_1}||\overrightarrow{a_2}|\cos\frac{2\pi}{3} + 4\,\overrightarrow{a_2}^2 = 9 - 3 \cdot 4 + 16 = 13$.

Ответ: а) 9; б) –61; в) 13.

Пример. Вычислить, какую работу производит сила $\vec{F} = (3; -5; 2)$,когда ее точка приложения перемещается из начала в конец вектора

$\vec{S} = (2; -5; -7)$.

Решение:

$A = (\vec{F} \cdot \vec{S}) = 3 \cdot 2 + (-5) \cdot (-5) + 2 \cdot (-7) = 6 + 25 - 14 = 17$.

Ответ: А =17.

Признаки коллинеарности и ортогональности векторов

Пример. Определить, при каких значениях α, β коллинеарны векторы

$\vec{a} = -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \beta\vec{k}$и $\vec{b} = \alpha\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 2\vec{k}$.

Решение: Из условия коллинеарности двух векторов следуют равенства:

$\frac{-2}{\alpha} = \frac{3}{-6} = \frac{\beta}{2}$. Тогда $\frac{-2}{\alpha} = \frac{3}{-6}$; $\alpha = 4, \frac{3}{-6} = \frac{\beta}{2}$; $\beta = -1$.

Ответ: $\alpha = 4, \beta = -1$.

Пример. Дано: $|\overrightarrow{a_1}| = 3$, $|\overrightarrow{a_2}| = 5$. Определить, при каком значении α векторы $\overrightarrow{a_1} + \alpha\overrightarrow{a_2}$ и $\overrightarrow{a_1} - \alpha\overrightarrow{a_2}$ будут перпендикулярны.

Решение:

$\vec{a}\vec{b} \Leftrightarrow \left((\vec{a} \cdot \vec{b}) = 0\right)$(условие отрогональности векторов).

Следовательно

$(\overrightarrow{a_1} + \alpha\overrightarrow{a_2}) \cdot (\overrightarrow{a_1} - \alpha\overrightarrow{a_2}) = 0, \overrightarrow{a_1}^2 - \alpha^2\overrightarrow{a_2}^2 = 0,$

$|\overrightarrow{a_1}|^2 - \alpha^2|\overrightarrow{a_2}|^2 = 0;\ \alpha^2 = \frac{|\overrightarrow{a_1}|^2}{|\overrightarrow{a_2}|^2} = \frac{9}{25}, \alpha = \pm\frac{3}{5}.$

Ответ: $\pm\frac{3}{5}$.

Пример. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}| = 1$ и $|\vec{b}| = 2$, вычислить:

1) $[\vec{a}\times\vec{b}]^2$; 2)$[(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})]^2$; 3)$[(\vec{a}+2\vec{b})\times(3\vec{a}-\vec{b})]^2$.

Решение:

1) По определению скалярного произведения имеем:

$[\vec{a}\times\vec{b}]\cdot[\vec{a}\times\vec{b}] = |\vec{a}\times\vec{b}|^2\cos 0° = |\vec{a}\times\vec{b}|^2 = \left[|\vec{a}||\vec{b}|\sin\frac{2\pi}{3}\right]^2 == \left[1\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right]^2 = 3.$

2) $[(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})]^2 = [(2\vec{a}\times\vec{a}) + (\vec{b}\times\vec{a}) + 4(\vec{a}\times\vec{b}) + +2(\vec{b}\times\vec{b})]^2 =$
$[2\cdot 0 - [\vec{a}\times\vec{b}] + 4(\vec{a}\times\vec{b}) + 2\cdot 0]^2 = |3(\vec{a}+\vec{b})|^2 = \quad 9|[\vec{a}\times\vec{b}]|^2 = 9\cdot 3 = 27.$

3)

4) $[(\vec{a}+2\vec{b})\times(3\vec{a}-\vec{b})]^2 = [(\vec{a}\times 3\vec{a}) + 9(\vec{b}\times\vec{a}) - (\vec{a}\times\vec{b}) - 3(\vec{b}\times\vec{b})]^2 =$
$[-9(\vec{a}\times\vec{b}) - (\vec{a}\times\vec{b})]^2 = [10(\vec{a}\times\vec{b})]^2 = 100|[\vec{a}\times\vec{b}]|^2 = 300.$

Ответ: 1) 3; 2) 27; 3)300.

Пример. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$, заданных своими координатами:

1)$\vec{a} = (1;-1;1), \vec{b} = (7;3;-5), \vec{c} = (-2;2;-2)$;

2)$\vec{a} = (3;5;1), \vec{b} = (4;0;-1), \vec{c} = (2;1;1)$;

3) $\vec{a} = (2;1;0), \vec{b} = (3;4;-1), \vec{c} = (-1;-3;1)$;

4) $\vec{a} = (1;2;3), \vec{b} = (5;-2;1), \vec{c} = (2;1;-2)$.

Решение.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -5 \\ -2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$= 4 - 24 + 20 = 0.$

4.7 Семинарское занятие № 7 (2часа).

Тема: «Алгебраические линии. Прямая на плоскости и в пространстве. Метрическая теория прямых. »

4.7.1 Вопросы к занятию:

1. Задание прямой, проходящей через точку и направляющий вектор: параметрические уравнения, каноническое уравнение, уравнение прямой с угловым коэффициентом, уравнение прямой в отрезках
2. Задание прямой, проходящей через две точки
3. Общее уравнение прямой
4. Задание прямой, проходящей через точку и нормальный вектор
5. Взаимное расположение двух прямых на плоскости
6. Расстояние от точки до прямой, расстояние между параллельными прямыми
7. Параметрические уравнения плоскости и уравнение плоскости, проходящей через точку и 2-а направляющих вектора

8. Уравнение плоскости, проходящей через три точки; уравнение плоскости в отрезках
9. Общее уравнение плоскости
10. Уравнение плоскости, проходящей через точку и нормальный вектор
11. Взаимное расположение двух плоскостей
12. Расстояние от точки до плоскости в пространстве
13. Окружность
14. Эллипс
15. Гипербола
16. Парабола

4.7.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Даны координаты вершин треугольника *ABC*. Сделать чертёж и найти:
а) длину стороны *AB;*
б) уравнение стороны *AB*;
в) уравнение высоты *CD* и ее длину;
г) уравнение медианы *AM* и координаты точки *K* пересечения этой медианы с высотой *СД*;
д) уравнение прямой, проходящей через точку *К* параллельно прямой *AB*.
A(-2;1), *B*(10;10), *C*(8;-4).
2. Привести к каноническому виду уравнение кривой второго порядка и построить её: $4x^2+9y^2+32x-54y+109=0.$
3. Найти расстояние от точки M_0 до плоскости π, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3, если $M_1(-1;2;-3)$, $M_2(4;-1;0)$, $M_3(2;1;-2)$,
$M_0(1;-6;-5)$.
4. Написать уравнение плоскости α, проходящей через точку *A* перпендикулярно вектору $\overline{BC}$, если *A*(-1;3;4), *B*(-1;5;0), *C*(2;6;1).
5. Написать каноническое уравнение прямой *l*, если
$$l:\ \begin{cases}2x+y+z-2=0,\\ 2x-y-3z+6=0.\end{cases}$$
6. Дана прямая $5x-y+3=0$. Угловой коэффициент прямой, параллельной данной прямой, равен:

1) -5; 2) 5; 3) 3; 4) $\dfrac{1}{5}$.

7. Какое уравнение имеет эллипс с фокусным расстоянием 2c=6 и малой полуосью b=4?

1) $\dfrac{x}{25}+\dfrac{y}{16}=1$;

2) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=0$;

3) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$;

4) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1.$

8. Какие из приведенных ниже прямых являются асимптотами гиперболы $4x^2-36y^2=144$?

1) y=(1/3)x, y=(-1/3)x;
2) y=-3x, y=3x;
3) y=6x, y=-6x;
4) y=2x, y=-2x.

9. Уравнение параболы с фокусом в точке (2,0) и директрисой x=-2 имеет вид:

1) $y^2 = -8x$;

2) $y^2 = 4x$;

3) $y^2 = 8x$;

4) $y^2 = -2x$.

10. Расстояние от точки $M(-2;-4;3)$ до плоскости $2x - y + 2z + 3 = 0$ равно:

1) 0; 2) $\frac{4}{9}$; 3) –3; 4) 3.

11. Уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;-2;3)$ с направляющим вектором $\vec{p} = (-2; 3; 1)$, имеет вид:

1) $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}$;

2) $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{1}$;

3) $\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-1}{1}$;

4) $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-1}{3}$.

4.8 Семинарское занятие № 8 (2 часа).

Тема: «.Квадратичные формы.»

4.8.1 Вопросы к занятию:

1. Собственные значения и собственные векторы матрицы
2. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

4.8.2 Краткое описание проводимого занятия:

Пример. Исследовать систему $\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$.

Решение:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{(3)+(1)}{\overset{(2)+(1)}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \underset{\frac{1}{2}(3)}{\overset{\frac{1}{6}(2)}{\sim}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{(3)-(2)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

r (A) = 2, r(A |b) =2, n = 4, r(A) = r(A |b) = 2 < 4.

Ответ: система совместна и имеет бесконечное множество решений.

Пример. Исследовать систему $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$.

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{\sim}{(1) \leftrightarrow (4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} (2)-3(1) \\ \sim \\ (3)+3(1) \\ (4)-2(1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -4 & -8 \\ 0 & 5 & 4 & 10 \\ 0 & -3 & -4 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{c} -\frac{1}{4}(2) \\ \sim \\ -1 \cdot (4) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 10 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{c} (3)-5(2) \\ \sim \\ (4)-3(2) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{(4)+(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), r(A) = 3,$$

$$r(A|b) = 4, r(A) \neq r(A|b).$$

Ответ: система несовместна

Пример. Исследовать систему $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right)$.

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} (2)-5(1) \\ \sim \\ (3)-(1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \end{array}\right) \underset{\sim}{4(3)}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 3 \\ 0 & 12 & 16 & 20 \end{array}\right) \underset{\sim}{(3)-3(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & -11 & 11 \end{array}\right).$$

$r(A) = 3, r(A|b) = 3, n = 3.$

Ответ: система совместна и имеет единственное решение.

4.9-11 Семинарское занятие № 9-11 (6 часов).

Тема: «.Основные определения и задачи линейного программирования. Симплексный метод. Теория двойственности.»

4.9.1-11.1 Вопросы к занятию:

1. Примеры составления математических моделей экономических задач
2. Приведение общей задачи линейного программирования к каноническому виду
3. Алгоритм графического метода решения задач линейного программирования с двумя переменными
4. Нахождение опорного решения задачи линейного программирования
5. Алгоритм симплексного метода
6. Решение задач методом искусственного базиса
7. Составление моделей двойственных задач
8. Первая теорема двойственности
9. Вторая теорема двойственности
10. Дискретное, динамическое, нелинейное программирование

4.9.2-11.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Решить графическим методом задачу линейного программирования:

$$Z(X) = 2x_1 + 3x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 3x_2 \ge -9, \\ 4x_1 + 3x_2 \le 24, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.

2. Решить методом искусственного базиса задачу линейного программирования:

$$Z(X) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 5; \\ x_1 - x_2 - x_3 \le 1; \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 11. \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$

1. В чем суть симплексного метода решения задачи линейного программирования?
2. Каковы особенности метода искусственного базиса?
3. Перечислите правила составления двойственных задач.
4. Сформулируйте первую и вторую теорему двойственности.
5. В чем суть дискретного, динамического, нелинейного программирования?

4.12-16 Семинарское занятие № 12-16 (10 часов).

Тема: «Формулы Бернулли и Пуассона. Дискретная случайная величина и ее числовые характеристики. Непрерывная случайная величина и ее числовые характеристики. Модели законов распределения вероятностей, наиболее употребляемые в социально-экономических приложениях. Закон больших чисел и его следствие. Центральная предельная теорема. »

4.12.1-16.1 Вопросы к занятию:

1. Виды случайных событий
2. Решение задач на вычисление вероятности события, используя классическое определение
3. Действия и соотношения между событиями
4. Теорема сложения вероятностей
5. Теорема умножения вероятностей. Независимые события

6. Формула полной вероятности
7. Формула Байеса
8. Схема Бернулли. Формула Бернулли
9. Локальная и интегральная теоремы Лапласа
10. Формула Пуассона
11. Вычисление математического ожидания ДСВ
12. Вычисление дисперсии и среднего квадратического отклонения ДСВ
13. Вычисление математического ожидания НСВ
14. Вычисление дисперсии и среднего квадратического отклонения НСВ
15. Мода и медиана НСВ
16. Функция распределения ДСВ и ее свойства
17. Плотность распределения вероятностей НСВ и ее свойства
18. Нахождение функции распределения по известной плотности распределения
19. Вычисление вероятности попадания случайной величины в заданный интервал
20. Биномиальное, гипергеометрическое распределение, распределение Пуассона
21. Равномерное распределение
22. Нормальное распределение
23. Показательное распределение
24. Теорема Чебышева
25. Теорема Бернулли
26. Теорема Ляпунова

4.12.2-16.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. В ящике 10 деталей, среди которых 6 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три. Найти вероятность того, что две из них окрашены.
2. В цехе 3 вентилятора. Вероятность того, что в момент времени t вентилятор включен, равна, соответственно, 0,9; 0,8; 0,7. Какова вероятность того, что в момент времени t в цехе включены а) все три вентилятора; б) два вентилятора; в) хотя бы один вентилятор?
3. Завод состоит из трёх конвейерных линий. Первая линия выпускает 1/3 всех изделий, вторая – 1/2, третья – 1/6. Вероятность качества линий соответственно равна 0,8; 0,6; 0,9. Найти вероятность того, что наугад взятое изделие, отличного качества, т.е. определить показатели качества завода.
4. Найти вероятность того, что событие *A* наступит ровно 70 раз в 243 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,25.
5. Задан закон распределения дискретной случайной величины *X*. Найти: а) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график; б) математическое ожидание случайной величины $M(X)$; в) дисперсию $D(X)$; г) среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$; д) построить многоугольник распределения.

X	4	5	6	8
p	0,3	0,4	0,2	0,1

6. Непрерывная случайная величина *X* задана функцией распределения *F(x)*. Построить график функции распределения и найти: а) плотность распределения *f(x)* и построить ее график; б) математическое ожидание случайной величины $M(X)$; в) дисперсию $D(X)$; г) среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

$$F(x)=\begin{cases}0, при\, x<0\\ x^2, при\, 0\le x\le 1.\\ 1, при\, x>1\end{cases}$$

4.17-18 Семинарское занятие № 17-18 (4 часа).

Тема: «Статистическое оценивание и проверка гипотез. Статистические методы обработки экспериментальных данных.»

4.17.1-18.1 Вопросы к занятию:

1. Выборка и ее представление
2. Статистическое оценивание
3. Проверка гипотез
4. Регрессионный анализ
5. Дисперсионный анализ

4.17.2-18.2 Краткое описание проводимого занятия:

Задана совокупность вариационных (статистических) рядов. Каждый студент по правилу указанному преподавателем группы (потока) должен выписать для себя один вариационный ряд, взяв строку интервалов под номером *m* и строку частот под номером *n*.

m	Интервалы											
4	15,0	15,5	16,0	16,5	17,0	17,5	18,0	18,5	19,0	19,5	20,0	20,5
	15,5	16,0	16,5	17,0	17,5	18,0	18,5	19,0	19,5	20,0	20,5	21,0
5	2,5	5,5	8,5	11,5	14,5	17,5	20,5	23,5	26,5	29,5	32,5	35,5
	5,5	8,5	11,5	14,5	17,5	20,5	23,5	26,5	29,5	32,5	35,5	38,5
6	7,15	7,20	7,25	7,30	7,35	7,40	7,45	7,50	7,55	7,60	7,65	7,70
	7,20	7,25	7,30	7,35	7,40	7,45	7,50	7,55	7,60	7,65	7,70	7,75

n	Частоты											
4	7	22	47	74	105	82	58	30	18	9	5	3
5	4	18	42	84	113	95	64	47	22	4	3	4
6	2	5	8	17	27	35	37	18	13	7	6	5

1. Найти: а) моду и медиану; б) среднее выборочное; в) статистическую дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение.
2. Построить гистограмму распределения.
3. Найти теоретические частоты при гипотезе, что случайная величина распределена нормально.
4. Построить полигон распределения и теоретическую кривую распределения.
5. Применить критерии Пирсона и Колмогорова для проверки гипотезы о нормальности распределения.
6. Построить доверительный интервал для среднего при доверительной вероятности 0,98.