ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра организации производства и

моделирования экономических систем

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Методы исследования и моделирования в экономике

Направление подготовки: Экономика

Профиль образовательной программы Экономическая безопасность

Форма обучения: очная

Оренбург 201_ г.

Содержание

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.1 Лекция №1 (2 часа)
Тема: « Модели и экономико-математическое моделирование»

1.1.1 Вопросы лекции:

1. Принцип аналогии в моделировании. Общее понятие модели.
2. Экономико-математические модели.
3. Линейная экономико-математическая модель.

1.1.2 Краткое содержание вопросов

1. Принцип аналогии в моделировании. Общее понятие модели.

Термин модель происходит от латинского слова *modulus* – образец, норма, мера. Понятие модели основано на принципе аналогии. Рассматривая свойства различных объектов, явлений, процессов, можно обнаружить, что некоторые из них имеют определенное сходство, подобие. Это сходство проявляется либо во внешних формах, либо в структуре, либо в изменении характера поведения при одинаковых воздействиях.

С точки зрения управления хозяйственными процессами наибольший интерес представляют модели, основанные на сходстве поведения систем, подобии их реакций на изменение воздействия. Модель в наиболее общем определении - это некоторый аналог той системы, которой мы должны управлять, основываясь на знаниях из исследования данного аналога. Оригиналом служит реальный объект исследования – то или иное явление, процесс производства и т.д. Модель отображает те свойства исследуемой системы, которые представляют интерес, прежде всего с точки зрения управленческих воздействий на нее, т.е. модель служит средством познания оригинала.

Для решения практических задач недостаточно подобия. Необходима возможность экспериментировать на модели. Это достигается прежде всего упрощением системы, ограничением исследуемых свойств.

Воспроизведение некоторого ограниченного множества существенных свойств поведения системы называют имитацией.

Различают ряд способов имитации:

аналоговый – замена носителей базовых свойств реальной системы другими физическими носителями;

аналитический – замена материальных носителей базовых характеристик исследуемой системы абстрактными математическими соотношениями;

машинный - построение численных моделей поведения систем на основе алгоритмов;

ситуационный - путем отображения свойств, деловых игр.

В зависимости от способа отображения свойств исследуемой системы через те или иные носители все множество моделей можно подразделить на две большие группы: материальные (физические) и абстрактные. По своей природе физические модели могут быть механическими, электрическими, гидравлическими, и т.д. Физические модели строятся на принципах прямой аналогии, когда оригинал и модель могут отличаться лишь масштабами, или косвенной, когда меняются носители базовых свойств.

Моделирование – есть научный метод исследования систем, рассматриваемых как оригиналы, на их аналогах-моделях. Цель моделирования является углубление знаний для распространения этих знаний на систему-оригинал при управлении ее поведением.

По своей сущности научные понятия "модель" и "моделирование" представляют собой категории познания системных свойств исследуемых объектов.

Имитация поведения исследуемых систем есть наиболее общая форма моделирования.

Принцип аналогии состоит именно в получении выводов, суждений об управляемой системе на основе исследования поведения другой системы, сходной в некотором отношении с оригиналом

Формализованное представление закономерностей поведения реальных экономических систем в виде абстрактных математических аналогов – системы уравнений и неравенств – получило название математического моделирования.

2. Экономико-математические модели.

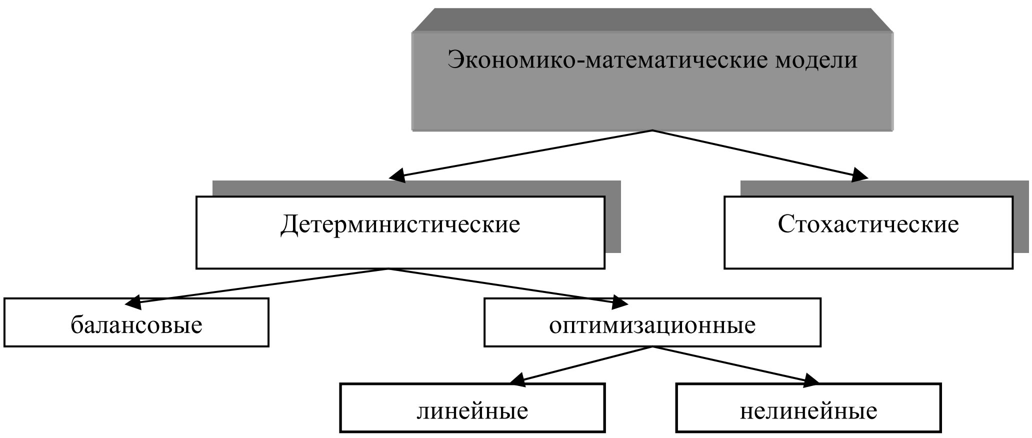
При разработке экономико-математических моделей принимают во внимание наиболее значимые, существенные характеристики управляемых систем, а детали второстепенного характера опускаются.

Модель позволяет имитировать поведение системы в широком диапазоне изменяющихся условий. Отпадает необходимость в дорогостоящих натуральных экспериментах. При исследовании очень сложных систем с большой длительностью протекающих в них процессов моделирование служит единственным средством обоснования управленческих решений на перспективу. Основной эффект моделирования заключается именно в научно обоснованном принятии управленческих решений – в выборе наилучшего (оптимального) варианта развития системы.

Модель всегда проще оригинала. Исследователь стремиться воспроизвести прежде всего те свойства системы, которые важны для решения стоящих перед ним задач. Степень достоверности выводов при этом зависит от детализации исходной информации о свойствах системы, глубины проработки и изученности закономерностей поведения этой системы.

Экономико-математическая модель - это концентрированное выражение существенных взаимосвязей и закономерностей процесса функционирования экономической системы в математической форме

В планово-экономической работе используются разнообразные типы моделей, различающиеся целевым назначением, характером задач, степенью охвата явлений, математическим аппаратом и т.д. Существует множество экономико-математических моделей. Возникает необходимость в их классификации.



Все имеющиеся экономико-математические модели делятся на детерминистические и стохастические.

К детерминистическим относятся модели, в которых результат полностью и однозначно определяется набором независимых переменных. Эти модели строятся на основе правил линейной алгебры и представляют собой систему уравнений, совместно решаемых для получения результатов.

Детерминистические модели подразделяются на модели балансовые и модели оптимизационные. Балансовые модели, как правило, характеризуются системой балансовых таблиц, которые обычно имеют форму шахматного баланса и могут быть записаны в виде квадратных матриц. Оптимизационные модели отличаются от балансовых тем, что целью их построения является не столько описание структуры экономической системы, сколько математическое описание условий функционирования.

Оптимизационные модели бывают линейные и нелинейные.

Стохастические модели описывают случайные процессы, подчиняющиеся законам теории вероятности. В этих моделях исходные данные, либо искомый результата выражаются не определенными величинами, а в виде некоторой статической функции распределения этих величин. Изучаемый процесс условно рассматривается как детерминистический, но в модель входят элементы оценки вероятности полученных результатов.

3. Линейная экономико-математическая модель.

Основная задача линейного программирования и ее модель в различных формах записи.

Постановка задачи.

Пусть некоторое предприятие имеет m видов производственных ресурсов. Порядковый номер ресурсов – i, т.е. i=1, 2,…, m.

Наличие каждого вида ресурсов известно и обозначается b_i.

Предположим, что предприятие может производить n видов продукции. Порядковый номер продукции – j, т.е. j=1, 2, …, n.

Необходимо определить какое количество единиц продукции каждого вида надо производить (x_j), чтобы получить максимум этой продукции в стоимостном выражении, если известны затраты на производство единицы продукции каждого вида ресурса (a_{ij}) и цена реализации (c_j).

Развернутая форма записи модели.

I. Целевая функция – описывает выход продукции в стоимостном выражении:

$Z=c_1x_1+c_2x_2+…+c_nx_n\to$max.

II. Система основных ограничений – описывает с помощью математической зависимости тот факт, что расходы производственных ресурсов не должны превышать их наличие:

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+…+a_{1n}x_n \le b_1$;

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+…+a_{2n}x_n \le b_2$;

…………………………

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+…+a_{mn}x_n \le b_m$.

III. Условие неотрицательности переменных величин:

$x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ …,\ x_n\ge0$.

<u>Замечание:</u> в постановке с выбором другого критерия оптимальности целевая функция может стремиться к минимуму. Кроме того система ограничений может быть смешанной, т.е. содержать не только неравенства (≤,≥), но и равенства.

Структурная форма записи модели.

В такой форме модели даются в специализированной литературе. В этой форме записи отражается структура и тип ограничений, структура функции, какие переменные входят в функцию Z и в ограничения.

I. $Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to$max.

II. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$, i=1,2,...,m.

III. $x_j\ge0$, j=1,2,…,n.

Замечание: *одной формулой можно описать ограничения, имеющие одинаковую структуру и тип и включающие в себя одни и те же переменные.*

Существуют также векторная, матричная и табличная формы записи модели.

1.2 Лекция №2 (2 часа)

Тема: «Оптимизационные экономико-математические модели в планировании аграрного производства»

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Модели внутрихозяйственного планирования на основе основной задачи линейного программирования.

2. Модели оптимизации на основе транспортной задачи.

1.2.2. Краткое содержание вопросов

1. Модели внутрихозяйственного планирования на основе основной задачи линейного программирования.

При планировании аграрного производства разработаны и имеют наиболее широкое применение линейные оптимизационные модели. Чаще всего их используют при: м***оделировании кормового рациона, моделировании производства кормов, моделировании посевов, моделировании севооборотов, оптимизации МТП, моделировании производственной структуры аграрного предприятия***

Моделирование кормового рациона

Для успешного развития животноводства важное значение имеет организация кормовой базы. В себестоимости продукции животноводства затраты на корма занимают наибольший удельный вес (более50%). Поэтому одним из основных путей снижения себестоимости продукции животноводства является удешевление рационов кормления при высокой их питательной ценности.

Цель задачи можно выразить следующим образом: из имеющихся в сельскохозяйственном предприятии кормов составить такой рацион кормления, который полностью отвечал бы требованиям животных по содержанию в нем питательных веществ, соотношению отдельных видов и групп кормов и одновременно был самым дешевым для хозяйства. Критерием оптимальности чаще всего служит показатель минимум стоимости (себестоимости) рациона.

Моделирование производства кормов

Создание прочной кормовой базы – важнейшая проблема хозяйства. Одним из основных путей ее решения является внедрение оптимальной структуры кормопроизводства. Разработка экономико-математической модели предусматривает расчет площадей кормовых культур с учетом требований севооборота, экономических и технологических условий и задач, стоящих перед хозяйством.

Критерием оптимальности данной задачи является минимум посевной площади кормовых культур. Кроме того, могут использоваться критерии минимизации материально-денежных или трудовых затрат на кормопроизводство.

Возможны различные постановки задачи в зависимости от предъявляемых к ней требований. В частности, допустима постановка задачи при заданных рационах и с их оптимизацией в процессе ее решения.

Все условия, которые должны быть учтены при разработке экономико-математической модели оптимизации плана кормопроизводства, можно разбить на три группы: зоотехнические, агротехнические и экономические.

Зоотехнические условия включают требования:

сбалансированности кормления животных по важнейшим элементам питания (кормовым единицам, переваримому протеину и др.);

разнообразия кормов, то есть подбора таких рационов, которые отвечают биологическим потребностям животных;

равномерности поступления зеленых кормов в летний период.

Агротехнические условия требуют учета особенностей выращивания кормовых культур, их требований к предшественникам и т. д.

Экономические условия предусматривают учет объема наличных ресурсов, выделенных на кормопроизводство, возможностей покупки кормов, производственного направления и перспектив развития хозяйства.

Моделирование производственной структуры аграрного предприятия

Экономико-математическая модель оптимизации производственной структуры – одна из основных в системе моделей оптимального планирования сельскохозяйственного производства.

Оптимальная специализация и сочетание отраслей в сельскохозяйственных предприятиях предполагает такие количественные соотношения между отдельными отраслями, которые позволяют эффективно использовать землю, труд и технику, то есть получить максимум продукции при данных ресурсах и обеспечить минимум затрат на единицу продукции.

Существует достаточно большое количество локальных критериев оптимизации, используемых как в промышленном производстве, так и в сельском хозяйстве:

- максимум производства валовой продукции в стоимостном выражении;
- максимум валового дохода, представляющего разницу между валовой продукцией в стоимостном выражении и суммой материальных затрат на ее производство;
- максимум чистого дохода, измеряемого разницей между стоимостью валовой продукции и суммой издержек производства;
- максимум прибыли;
- максимум денежных поступлений от реализации продукции;
- минимум производственных затрат на заданный план производства продукции.

Переменными в задаче являются: объемы производства продукции отраслей растениеводства и животноводства, поголовье сельскохозяйственных животных, площади посева сельскохозяйственных культур, площади сельскохозяйственных угодий,

2. Модели оптимизации на основе транспортной задачи.

Моделирование посевов

Задача оптимизации структуры посевных площадей может рассматриваться и как составная часть планирования производства предприятия, где она моделируется во взаимосвязи с животноводством и как самостоятельная задача. Разработка самостоятельной задачи оптимизации структуры посевных площадей имеет практический смысл, когда рассматривается задача размещения посевов по участкам земли различного плодородия, размещение зерновых культур в зерновом севообороте, кормовых культур в кормовом севообороте и.д.

Рассмотрим отдельные постановки задачи размещения и структуры посевов.

Для определения оптимального размещения посевов по отдельным участкам земли различного плодородия может быть применен распределительный метод. Задачу можно разработать на основе транспортной задачи.

Сформулировать задачу можно так: требуется разместить посевы сельскохозяйственных культур по участкам земли так, чтобы посевные площади по всем культурам равнялись плановым объемам, все пашни должны быть заняты под посев при этом стоимость валовой продукции была бы максимальной.

В качестве критерия оптимальности в этой задачи можно принять максимум стоимости валовой продукции сельского хозяйства, чистый доход, прибыль.

Моделирование севооборотов

Уточним понятие севооборота. Под севооборотом понимают площадь земли с обоснованным чередованием культур во времени и пространстве.

Стоит задача: определить площадь севооборотов хозяйства, которая обеспечивала бы размещение плановых посевных площадей на севооборотной площади и позволяла получить максимальный экономический эффект.

За критерий оптимальности можно принять максимум прибыли, чистого дохода, валового дохода, стоимости валовой продукции.

Задача оптимизации МТП

Определение потребности в технике состоит в выборе такого состава МТП и такого плана его использования, при котором обеспечивается выполнение всех заданных объемов работ в положенные сроки с минимальными общими затратами.

Здесь выделяется три момента:

- потребность хозяйства в технике для выполнения заданного объема работ;
- требование выполнения работ в срок;
- требование выполнения работ с min затратами.

Нетрудно убедится, что игнорирование любого из трех требований, как и абсолютизация любого из них, может привести к абсурдным результатам.

Например. всю пашню любого хозяйства можно вспахать одним трактором.

В условиях конкретного хозяйства встречаются **<u>три варианта</u>** постановки задачи оптимизации состава МТП.

1. Задача определения оптимального состава МТП при условии, что в хозяйстве полностью отсутствуют машины, то есть задача **комплектования** парка, или наиболее целесообразного его приобретения.

Такая постановка возникает у всех вновь образованных хозяйств.

2. Задача определения оптимального состава МТП при условии, что некоторый парк машин в хозяйстве уже имеется , то есть задача **доукомплектования** имеющегося парка.

Это самый распространенный вариант задачи, так как и техника постоянно совершенствуется , производство тоже не стоит на месте. Парк стареет и физически отслужившие машины требует замены новыми.

3. Задача определения плана наилучшего использования имеющегося в хозяйстве парка машин, при условии, что хозяйство не имеет возможности закупать новые машины. Отслужившие срок машины можно списывать.

При кажущейся искусственности постановки задача все же встречается не так уж редко. Не всегда имеются возможности купить нужные машины - или нужных машин нет, или купить не за что.

С экономической точки зрения наиболее обоснованным критерием оптимизации состава машинно-тракторного парка является минимум приведенных затрат на производство данных работ. приведенные затраты представляют собой сумму текущих затрат на содержание и эксплуатацию МТП и его балансовой стоимости, умноженной на нормативный коэффициент эффективности, который представляет собой величину обратную сроку окупаемости.

Иногда в качестве критерия оптимальности используют показатель - min машин;

- min расход горючего;
- - min эксплуатационных расходов;

1.3 Лекция №3 (2 часа)

Тема: «Транспортная задача»

1.3.1 Вопросы лекции:

1. Постановка и модель транспортной задачи.
2. Алгоритм метода потенциалов задачи.

3 Приближенные распределительные методы

1.3.2 Краткое содержание вопросов

1. Постановка и модель транспортной задачи.

Среди проблем, для исследования которых успешно применяется линейное программирование, важное значение имеет так называемая транспортная задача.

Общая постановка этой задачи применительно к экономической проблеме экономии издержек производства формулируется так: имеется несколько пунктов назначения (предприятий, потребителей); требуется перевезти некоторое количество однородного товара из различных пунктов отправления в несколько пунктов назначения; каждый из поставщиков может выделить только определенное количество единиц товара и каждому потребителю требуется также определенное количество единиц этого товара; известны расстояния или стоимости перевозки единицы товара от каждого поставщика к каждому потребителю. Задача состоит в том, чтобы найти такие маршруты перевозок, из всех возможных связей поставщиков и потребителей, при которых общие транспортные расходы были бы минимальными (транспортная задача также может быть сформулирована с целевой функцией, стремящейся к максимуму).

Таким образом, пусть имеем m пунктов, в которых находится известное количество однородных грузов (поставщики). Порядковый номер поставщика обозначается i, то есть i=1,2,…,m. Наличие грузов у поставщика b_i. Имеется n пунктов испытывающих потребность в этих грузах (потребителей). Порядковый номер потребителя j=1,2,…,n. Потребность в грузах каждого потребителя a_j. Известна «цена» перевозки единицы груза от каждого поставщика к каждому потребителю (c_{ij}). Необходимо составить план перевозки грузов от поставщиков к потребителю, т.е. определить: какое количество груза необходимо перевезти от каждого поставщика к каждому потребителю (x_{ij}), причем значения x_{ij} должны отвечать следующим требованиям:

1) общие затраты на перевозку грузов должны быть минимальными;
2) все грузы от поставщиков должны быть вывезены;
3) потребности потребителей в грузах должны быть удовлетворены.

Требования 2-3 одновременно могут быть выполнены только в том случае, когда сумма грузов у всех поставщиков равна суммарной потребности всех потребителей, то есть:

$$\sum_{i=1}^{m} b_i = \sum_{j=1}^{n} a_j$$ – условие разрешимости задачи.

Если условие разрешимости выполняется, то задача будет являться задачей, так называемого закрытого типа (сбалансированной). Иначе – задача открытого типа (несбалансированная). Для того чтобы решить задачу открытого типа, надо её «закрыть» (то есть привести к закрытому типу). Для этого вводится или фиктивный поставщик или фиктивный потребитель.

В случае, когда *суммарные запасы превышают суммарные потребности*, необходим дополнительный фиктивный пункт потребления, который будет формально потреблять существующий излишек запасов, то есть:

$$a_ф = \sum_{i=1}^{m} b_i - \sum_{j=1}^{n} a_j .$$

Если *суммарные потребности превышают суммарные запасы*, то необходим дополнительный *фиктивный* пункт отправления, формально восполняющий существующий недостаток продукции в пунктах отправления:

$$b_ф = \sum_{j=1}^{n} a_j - \sum_{i=1}^{m} b_i .$$

Введение фиктивного потребителя или отправителя повлечет необходимость формального задания *фиктивных* тарифов $c_{ij}^{ф}$ (реально не существующих) для фиктивных перевозок. Поскольку нас интересует определение наиболее выгодных *реальных* перевозок, то необходимо предусмотреть, чтобы при решении задачи (при нахождении опорных планов) *фиктивные* перевозки не рассматривались до тех пор, пока не будут определены все реальные перевозки. Для этого надо фиктивные перевозки сделать невыгодными, чтобы при поиске решения задачи их рассматривали в самую последнюю очередь. Таким образом, если целевая функция стремится к min, то затраты берутся во всех фиктивных клетках таблицы произвольные, одинаковые и на порядок выше настоящих цен, т.е. величина фиктивных тарифов должна превышать максимальный из реальных тарифов, используемых в модели: $c_{ij}^{ф} > \max c_{ij} \left(i = \overline{1,m};\, j = \overline{1,n}\right)$. Если целевая функция стремится к max, то $c_{ij}^{ф}$ берётся равная нулю.

Развёрнутая форма записи модели транспортной задачи.

Для удобства, прежде чем писать модель, запишем в виде матрицы цен все значения c_{ij}. А также в виде матрицы грузоперевозок переменные x_{ij}.

Матрица цен:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица $C = (c_{ij})_{m*n}$ называется также матрицей тарифов (издержек или транспортных расходов).

Матрица грузоперевозок:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица $X = (x_{ij})_{m*n}$ еще называется планом транспортной задачи.

Модель транспортной задачи будет выглядеть следующим образом.

I. Целевая функция описывает затраты на перевозку грузов:

$Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{2n}x_{2n} + \ldots$
$+ c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn} \to \min.$

II. Система ограничений описывает второе и третье требования для x_{ij} из постановки задачи.

1 группа: условие полного вывоза грузов от поставщиков (сумма грузов, вывезенных от поставщика должна быть равна наличию):

$x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = b_1,$
$x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = b_2,$
……………………
$x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = b_m;$

2 группа: условие удовлетворения потребителя (сумма грузов привезённых потребителю должна быть равна его потребности):

$x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = a_1,$
$x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = a_2,$
…………………….
$x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_n.$

III. Условие неотрицательности переменных величин $x_{11} \geq 0$, $x_{12} \geq 0$, …, $x_{mn} \geq 0$.

Структурная форма записи модели транспортной задачи.

В специализированной литературе модели даются в структурной форме.

I. $Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min.$

II.

1) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i, \ i = 1,2,\ldots,m$

2) $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_j, \ j = 1,2,\ldots,n$

III. $x_{ij} \geq 0$ ($i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$).

Табличная форма записи модели транспортной задачи.

Общепринято в таблице информацию по поставщикам располагать по строкам, по потребителю – по столбцам.

Размер таблицы: строк $m+2$, столбцов $n+2$.

Матрицы транспортных расходов и перевозок совмещают обычно в одну двойную матрицу – *матрицу планирования*.

Если в таблицу записана только исходная информация и нет значений x_{ij}, то это рабочая таблица или *макет* задачи. Если значения x_{ij} проставлены, то получаем первый вариант решения задачи. В такой форме задачи решаются.

Таблица 5 – Общий вид транспортной матрицы

потребители

поставщики

	1	2	…	n	b_i
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	b_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	b_m
a_j	a_1	a_2	…	a_n	$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{i=1}^{m} b_i$

Кроме основных условий, в транспортных задачах может встретиться ряд дополнительных, ограничивающих количественные связи между отдельными потребителями и поставщиками. Характер этих ограничений и способы решения задачи при наличии дополнительных ограничений заключаются в следующем.

1. Полное отсутствие связи между поставщиком и потребителем, то есть $x_{ij} = 0$. Это означает, что в данной клетке матрицы искомый объем перевозок должен быть равен нулю. В этом случае оценка переменной завышается на большую величину, обычно обозначаемую буквой M, и «попадание» груза в эту клетку нежелательно, так как целевая функция стремиться к минимуму (и занижается, если $Z \to \max$).

2. Наличие частной заранее фиксированной связи между поставщиками и потребителями, то есть $x_{ij} = q$ *(искомый объем перевозок от* i*-го поставщика к* j*-му потребителю должен быть строго равен* q*). Тогда, до начала решения задачи от величины грузов соответствующего поставщика и потребителя вычитается величина* q*, затем в соответствующую клетку пересечения поставщика и потребителя* *записывается завышенная оценка* М *(при* $Z \to min$ *и заниженная при* $Z \to max$*) и задача решается обычным методом.*

3. $x_{ij} \geq q$, *то есть искомый объем перевозок от* i*-го поставщика к* j*-му потребителю должен быть не меньше величины* q. *В этом случае до начала решения от величины грузов соответствующего поставщика и потребителя вычитается величина* q, *затем задача решается обычным путем.*

Модель транспортной задачи позволяет решать любые задачи, в которых параметры имеют одинаковые единицы измерения. Такие модели называются однопродуктовыми. *К ним можно отнести задачу оптимизации использования машинно-тракторного парка в отдельные агротехнические сроки, задачу оптимального размещения посевов сельскохозяйственных культур по участкам с различным плодородием почв и т.д.*

2. Алгоритм метода потенциалов.

Математическая модель транспортной задачи относится к задачам линейного программирования и может быть решена симплексным методом. Однако ввиду исключительной практической важности этой задачи и специфики ограничений (ограничения заданы в виде уравнений; каждая неизвестная входит лишь в два уравнения; коэффициенты при неизвестных – единицы) для ее решения созданы специальные алгоритмы. Самым распространенным методом решения транспортной задачи является метод потенциалов.

Решение транспортной задачи разбивается на два этапа:

1) определение начального допустимого базисного решения (первого опорного плана) – первоначальное распределение поставок. Достигается посредством распределительных методов;

2) построение последовательных итераций (шагов), улучшающих опорные планы (каждый новый план не должен увеличивать суммарные затраты при $Z \to \min$ и уменьшать при $Z \to \max$). Достигается посредством метода потенциалов.

После выполнения первого этапа шаги второго этапа проводятся до тех пор, пока не будет найдено оптимальное распределение поставок.

1-ый этап. Построение первоначального опорного плана

План составляется последовательным заполнением по одной клетке в таблице так, что каждый раз либо полностью удовлетворяется потребность одного из потребителей, либо полностью вывозится груз от некоторого поставщика. В теории доказывается, что базисное решение системы ограничений (из $m+n$ уравнений с mn переменными) в условиях транспортной задачи имеет $m+n-1$ базисных переменных (ее ранг равен $m+n-1$), поэтому, совершив $m+n-1$ указанных шагов, получим первый опорный план. Опорные планы получают несколькими методами, называемыми распределительными. Среди них можно выделить: метод северо-западного угла, метод наилучших цен и метод аппроксимации. Последние два метода относятся также к приближенным распределительным методам и будут рассмотрены в третьей части данного раздела.

Пример.

$b_1 = 1500 \quad a_1 = 800$

$b_2 = 1000 \quad a_2 = 1200$

$b_3 = 2000 \quad a_3 = 1400$

$a_4 = 1100$

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 15 & 16 \\ 17 & 15 & 14 & 13 \\ 15 & 14 & 13 & 16 \end{pmatrix}$$

Решить на минимум, заполнив рабочую таблицу методом северо-западного угла.

Таблица 6 – Заполнение рабочей таблицы методом северо-западного угла

	1	2	3	4	b_i

1	13 800	12 700	15	16	1500
2	17	15 500	14 500	13	1000
3	15	14	13 900	16 1100	2000
a_j	800	1200	1400	1100	4500

$Z_{\min}$ = 800*13 + 700*12 + 500*15 + 500*14 + 900*13 + 1100*16 = 62600.

При этом методе на каждом шаге построения первого опорного плана заполняется верхняя левая клетка («северо-западный угол») оставшейся части таблицы. При таком методе заполнение таблицы начинается с клетки (1,1) и заканчивается в клетке (m,n), то есть идет как бы по диагонали таблицы перевозок.

Методы наилучших цен и аппроксимации также можно использовать на данном этапе.

2-ой этап. Метод потенциалов. Оптимальность базисного решения.

Полученный одним из распределительных методов опорный план сначала необходимо проверить на вырожденность. Вариант будет невырожденным, если число заполненных клеток N *равно сумме поставщиков и потребителей за вычетом единицы:*

$$N = m + n - 1.$$

Если на каком-то этапе решения получится вырожденный план (т.е. N < m + n *– 1), то его необходимо пополнить, проставив в недостающем числе клеток ноль. Поскольку этим дополнительным клеткам будут отвечать нулевые перевозки, то общий баланс и суммарная стоимость перевозок плана при этом не изменится. Однако проводить пополнение плана, выбирая клетки произвольно, нельзя. Необходимо учитывать условие ацикличности. План называется* ациклическим, *если его базисные клетки (заполненные грузом) не содержат циклов.* Циклом *в транспортной таблице называется несколько клеток, соединенных замкнутой ломаной линией так, что две соседние вершины ломаной расположены либо в одной строке, либо в одном столбце. Ломаная может иметь точки самопересечения, но не в клетках цикла.*

Невырожденный вариант необходимо проверить на оптимальность.

Теорема об оптимальности. Вариант решения задачи будет оптимальным, если найдется такая система абстрактных чисел, называемых потенциалами поставщиков и потенциалами потребителей, при которой для всех клеток таблицы будет выполняться условие:

$$v_j - u_i \le c_{ij} \text{ (при } Z \to \min) \text{ и } v_j - u_i \ge c_{ij} \text{ (при } Z \to \max),$$

где v_j – потенциалы потребителей,

u_i – потенциалы поставщиков,

c_{ij} – цена перевозки единицы груза (условные т/км).

Причем, $v_j - u_i = c_{ij}$ для занятых клеток и $v_j - u_i \le c_{ij}$ (или $v_j - u_i \ge c_{ij}$) для свободных клеток.

На основании этой теоремы исследование на оптимальность проводится в 2 этапа:

1) для каждой занятой клетки составляется уравнение $v_j - u_i = c_{ij}$ в результате чего получается система из $m+n$–1 таких уравнений. Решается эта система относительно потенциалов. Так как в данной системе число уравнений меньше числа неизвестных (т.е. система имеет бесчисленное множество решений), а нам надо найти одно любое решение, то какому-либо потенциалу можно присвоить произвольное число и относительно него рассчитать остальные значения. Для удобства расчетов чаще всего берут u_1=0;

2) для свободных клеток таблицы проверяется условие $v_j - u_i \le c_{ij}$ (или $v_j - u_i \ge c_{ij}$). Вариант будет оптимальным, если для всех свободных клеток это условие выполнится.

Для каждой клетки, в которой не выполняется условие $v_j - u_i \le c_{ij}$ (или $v_j - u_i \ge c_{ij}$), рассчитывается оценка $\alpha_{ij} = |(v_j - u_i) - c_{ij}|$. Клетка, содержащая α_{ij}, называется «плохой», а полученная оценка используется при перераспределении грузов.

То есть исследование на оптимальность не только отвечает на вопрос, оптимален вариант или нет, но еще и подсказывает, в каком направлении надо его улучшать при необходимости.

Перераспределение грузов и получение нового варианта.

Смысл перераспределения заключается в том, чтобы в самую «плохую» клетку (т.е. значение α_{ij} наибольшее) перераспределить какое-то количество груза. Перераспределение грузов должно отвечать следующим требованиям:

1) должны выполняться требования системы ограничений модели;

2) вариант решения задачи должен остаться ациклическим, т.е. не должна появиться лишняя заполненная клетка;

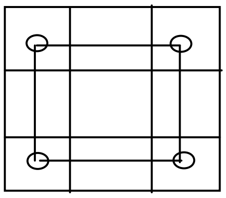
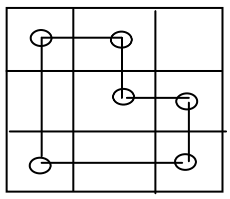
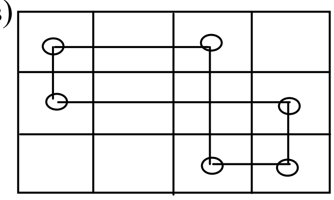
3) должно выполняться условие неотрицательности в модели, т.е. $x_{ij} \ge 0$.

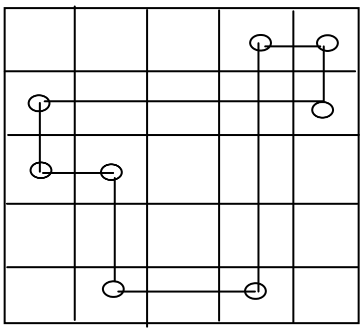
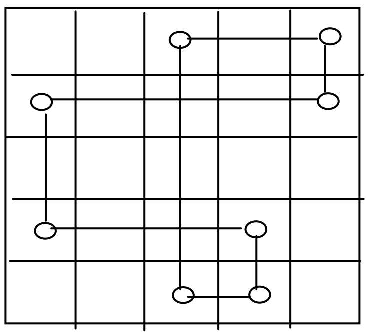
С учетом данных требований, *алгоритм перераспределения* будет состоять из двух шагов:

1) наметить маршрут перераспределения груза.

Для этого в таблице строится цикл перераспределения объектов перевозок. Цикл представляет собой замкнутую ломаную линию, которая начинается в той свободной клетке, где условие оптимальности нарушается наиболее сильно (т.е. там, где α_{ij} наибольшая).

Некоторые разновидности циклов.

а)  б)  в) 

г)  д) 

При построении цикла можно проходить как через занятые, так и через свободные клетки таблицы, но повороты делаются только в занятых клетках и под прямым углом;

2) определить порядок изменения объемов перевозок в вершинах цикла.

Для этого в вершинах цикла расставляют знаки «+» и «–», причем в начале цикла (клетка, где α_{ij} наибольшая) ставится знак «+», в следующей «–», в следующей «+» и т.д. Получаем чередование знаков. Направление движения при расстановке знаков от свободной клетки безразлично, так как количество вершин цикла является четной величиной. Наличие знака «+» в вершине цикла показывает, что объем перевозок необходимо увеличить, а «–» – уменьшить. Увеличение и уменьшение объемов перевозок в вершинах цикла производится на одинаковую величину, которая выбирается равной наименьшему из объемов перевозок в тех клетках, где в вершине цикла стоит знак «–». Таким образом, из отрицательной вершины контура необходимо выбрать наименьшее значение x_{ij}. В новой рабочей таблице получаем следующий вариант решения задачи: выбранное значение x_{ij} из отрицательных вершин контура предыдущей таблицы отнимаем, а к положительным – прибавляем. Заполненные клеточки, не являющиеся вершинами контура, не меняют свое значение.

В итоге получаем новый вариант. Следующие шаги поиска оптимального варианта совершаются по аналогии вышеизложенного.

Замечание*: алгоритм перераспределения одинаков и при Z→min и при Z→max.*

3. Приближенные распределительные методы

К приближенным распределительным методам можно отнести метод наилучших цен и метод аппроксимации. Приближенными они называются вследствие того, что полученное при помощи этих методов распределение груза в таблице не требует дополнительной проверки на оптимальность, так как либо сразу оказывается оптимальным, либо максимально к нему приближено.

Метод наилучших цен

Метод наилучших цен позволяет получить более выгодный опорный план, чем метод северо-западного угла. При распределении груза на каждом шаге этого метода выбирается клетка с *наилучшей ценой*. Наилучшей считается минимальная цена при $Z \rightarrow \min$, и максимальная цена при $Z \rightarrow \max$. Если существует несколько клеток с одинаковыми лучшими тарифами, то из них для определенности можно выбрать клетку, находящуюся левее и выше остальных.

Алгоритм метода наилучших цен:

1) рассматривая рабочую таблицу, найти клетку с наилучшей ценой;
2) проставить в эту клетку максимально допустимое значение x_{ij};
3) вычеркнуть свободные нерабочие клетки;
4) откорректировать клетки b_i и a_j.

На этом заканчивается один шаг (итерация) метода.

Из оставшихся свободных рабочих клеток снова выбрать клетку с наилучшей ценой и повторять до тех пор, пока полностью не будет распределен весь груз.

Таблица 7 – Заполнение рабочей таблицы методом наилучших цен

	1	2	3	4	b_i
1	13 300	12 1200	15	16	1500
2	17	15	14	13 1000	1000
3	15 500	14	13 1400	16 100	2000
a_j	800	1200	1400	1100	4500

$Z_{\min} = 300*13 + 1200*12 + 1000*13 + 500*15 + 1400*13 + 100*16 = 58600.$

Замечание. Предлагаемый алгоритм метода можно использовать для решения задач небольшого размера. При решении задач большого размера алгоритм этого метода применяется не для всей рабочей таблицы, а или для каждой стоки, или каждого столбца.

Метод аппроксимации

Данный метод, также как и предыдущий, использует понятие «наилучшая цена», но в отличие от него позволяет более однозначно сделать выбор между равнозначными клетками при распределении груза.

Алгоритм метода аппроксимации:

1) в рабочей таблице задачи берем дополнительную строку и столбец «разностей»;

2) заполняем эти строку и столбец разностями между двумя наилучшими ценами по каждой строке и каждому столбцу;

3) из всех разностей строки и столбца выбрать наибольшую, указать номер итерации;

4) в соответствующей строке или столбце выбираем клетку с наилучшей ценой, проставляем в эту клетку максимальное значение x_{ij};

5) корректируем свободные члены и вычеркиваем нерабочие свободные клетки;

6) из оставшихся неиспользованных разностей снова выбрать наибольшую и так до тех пор, пока или не будут использованы все разности или не будет распределен весь груз.

Если разности будут использованы все, а груз распределен не до конца, то в малых задачах дораспределение груза производится вручную. В больших же задачах приходится дочерчивать строку и столбец "разностей" и заполнять их, но теперь разности берутся между двумя наилучшими ценами, но только по свободным рабочим клеткам.

Таблица 8 – Заполнение рабочей таблицы методом аппроксимации

	1	2	3	4	b_i	Столбец разностей
1	13 300	12 1200	15	16	1500	1
2	17	15	14	13 1000	1000	1
3	15 500	14	13 1400	16 100	2000	1
a_j	800	1200	1400	1100	4500	
Строка разностей	2_3	2_2	1	3_1		

$Z_{\min}$ = 300*13 + 1200*12 + 1000*13 + 500*15 + 1400*13 + 100*16 = 58600.

Разность 3_1 означает, что заполнение таблицы начинать следует с клетки (2,4) (столбец выбран с учетом наибольшей разности, клетка в этом столбце выбрана с наименьшей ценой, так как $Z \to \min$).

При заполнении таблицы следует помнить, что:

1) если разности использованы все, а грузы распределены не до конца, то если существует единственный вариант, дораспределение происходит вручную. Если же дораспределять грузы можно разными способами, то чертится еще одна строка и столбец разностей и заполняются они разностями между наилучшими ценами только по свободным клеткам. Далее алгоритм действий повторяется;

2) если в строке и столбце окажется несколько одинаковых разностей, то предпочтение надо отдать той, которая будет иметь «оптимальный элемент». «Оптимальный элемент» – это цена, которая является наилучшей, как по строке, так и по

столбцу, на пересечении которых она стоит. Исследование на наличие «оптимального элемента» проводить после каждой итерации;

3) если оптимальный элемент имеется у нескольких одинаковых разностей, то предпочтение отдать тому «оптимальному элементу», который будет иметь наибольшую сумму «разностей» по строке и столбцу, на пересечении которых он стоит. Если и сумма окажется одинаковой, то заполнять можно клетку с любым «оптимальным элементом»;

4) если мы имеем несколько одинаковых разностей и ни одна из них не имеет «оптимального элемента», то тогда в соответствующих строках и столбцах исчисляются новые разности, но между 1-ой и 3-ей наилучшими ценами.

Замечание. В качестве недостатка этого метода можно отметить необходимость в знании всех его особенностей, а также некоторую громоздкость таблиц.

1.4 Лекция №4 (2 часа)

Тема: «Функции полезности. Функции спроса»

1.4.1 Вопросы лекции:

1. Определение функции полезности и ее свойства.
2. Решение задачи потребительского выбора.
3. Изменение цен. Изменение дохода.
4. Эффекты компенсации. Уравнение Слуцкого

1.4.2 Краткое содержание вопросов

1. Определение функции полезности и ее свойства.

Потребитель располагает доходом I, который он полностью тратит на приобретение благ. Цены благ считаются заданными. Учитывая структуру цен, доход и собственные предпочтения, потребитель приобретает определенное количество благ и математическая модель такого его поведения называется моделью потребительского выбора. Рассмотрим модель с двумя видами благ. Такая модель удобна прежде всего возможностью графической интерпретации, сохраняя при этом все принципиальные свойства общей модели.

Рассмотрим потребительские наборы их двух благ. Потребительский набор - это вектор (x_1,x_2), координата x_1 которого равна количеству единиц первого блага, а координата x_2 равна количеству единиц второго блага. Выбор потребителя характеризуется отношением предпочтения, суть которого состоит в том, что потребитель про каждые два набора может сказать, что, либо один из них более желателен, чем другой, либо потребитель не видит между ними разницы.

На множестве потребительских наборов (x_1,x_2) определена функция $u(x_1,x_2)$, значение которой на потребительском наборе (x_1,x_2) равно потребительской оценке индивидуума для этого набора. Эта функция называется функцией полезности.

Свойства функции полезности:

1) Возрастание потребления одного продукта при постоянном потреблении другого продукта ведет к росту потребительской оценки. т.е. если $x_1 + \Delta x_1 > x_1$, то $u(x_1 + \Delta x_1, x_2) > u(x_1, x_2)$.

если $x_2 + \Delta x_2 > x_2$, то $u(x_1, x_2 + \Delta x_2) > u(x_1, x_2)$.

$$\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1} = u_1^{'} > 0, \qquad \frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2} = u_2^{'} > 0$$

Первые частные производные называются предельными полезностями продуктов: $u_1^{'}$ -предельная полезность первого продукта, $u_2^{'}$ - предельная полезность второго продукта. Для предельных полезностей используется также символика $M_1u(x_1,x_2)$, $M_2u(x_1,x_2)$.

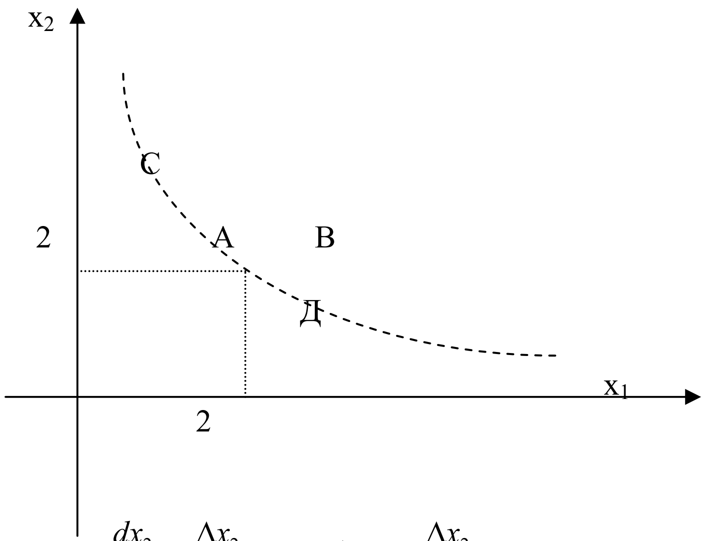
2) Предельная полезность каждого продукта уменьшается, если объем его потребления растет (это свойство предельной полезности называется законом убывающей предельной полезности).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = u_{11}^{''} < 0 \quad , \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = u_{22}^{''} < 0.$$

3) Предельная полезность каждого продукта увеличивается, если растет количество другого продукта. В этом случае продукт, количество которого фиксировано, оказывается относительно дефицитным. Поэтому дополнительная его единица приобретает большую ценность и может быть потреблена более эффективно. Данное свойство справедливо не для всех благ.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = u_{12}^{''} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} = u_{21}^{''} > 0$$

Линия, соединяющая потребительские наборы (x_1,x_2), имеющие один и тот же уровень удовлетворения потребностей индивидуума, называется ***линией безразличия***. Линия безразличия есть не что иное, как линия уровня полезности, множество линий безразличия называется картой линий безразличия. Линии безразличия не касаются и не пересекаются. Чем "северо-восточнее" расположена линия безразличия, тем большему уровню удовлетворения потребности она соответствует.

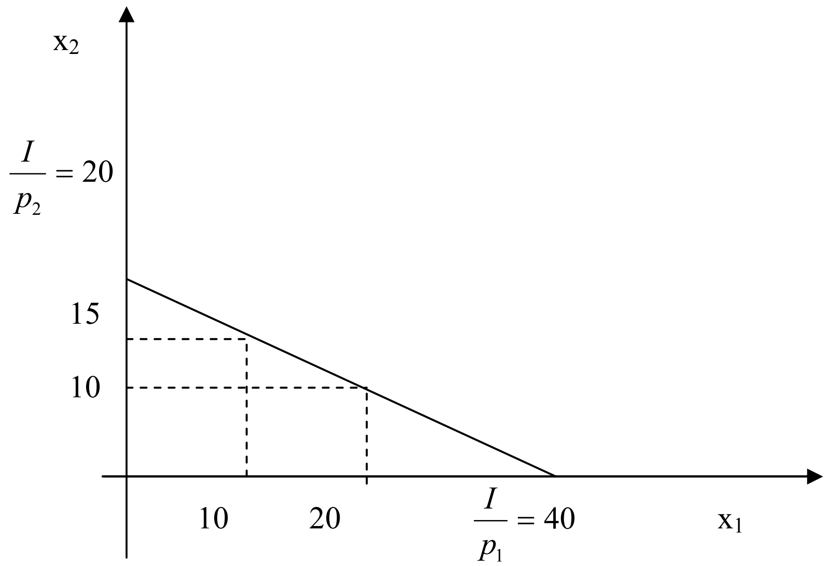


Величина $\frac{dx_2}{dx_1} \approx \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$. Дробь - $\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ принято называть нормой замены первого продукта вторым на потребительском наборе (x_1,x_2), а производную - $\frac{dx_2}{dx_1}$ - предельной нормой замены первого продукта вторым.

2. Решение задачи потребительского выбора.

Задача потребительского выбора (задача рационального поведения потребителя на рынке) заключается в выборе такого потребительского набора (x_1,x_2), который максимизирует его функцию полезности при заданном бюджетном ограничении.

Чтобы понять, как бюджет ограничивает выбор потребителя, рассмотрим ситуацию, когда женщина располагает фиксированным доходом I, который может быть потрачен на два вида товаров – продукты питания и одежду. x_1 – количество продуктов питания, x_2 – количество предметов одежды, p_1 и p_2 - рыночные цены товаров, тогда p_1x_1- сумма денег, затраченных на питание, а p_2x_2 - на одежду. Все сочетания x_1 и x_2, при которых сумма затрат меньше или равна доходу будут соответствовать бюджетному ограничению. Если предположить, что расходы равны бюджету, то должно выполняться равенство $p_1x_1 + p_2x_2 = I$, иначе говоря, комбинации продуктов и одежды, которые может приобрести женщина будут лежать на прямой, которая называется бюджетной линией.



Допустим, доход женщины. составляет 400 руб., цена продуктов питания 10 руб. за единицу, а цена одежды 20 руб. за единицу, тогда на эту сумму она могла бы купить 10 единиц продуктов питания и 15 единиц одежды (10*10+15*20=400) или 20 единиц продуктов питания и 10 единиц одежды (20*10+10*20=400) . Если она решила весь бюджет потратить только на один вид продуктов, то самое большее, что она смогла бы купить - это 40 единиц продуктов питания (400/10=40) или 20 единиц одежды.

Бюджетное ограничение означает, что денежные расходы на продукты не могут превышать денежного дохода, т.е. $p_1x_1 + p_2x_2 \le I$, где p_1 и p_2 - рыночные цены одной единицы первого и второго продуктов, а I - доход индивидуума, который он готов потратить на приобретение первого и второго продуктов.

Формально задача потребительского выбора имеет вид:

$$u(x_1, x_2) \to \max$$

при условиях $p_1x_1 + p_2x_2 \le I$,

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

В приведенной постановке задача потребительского выбора является задачей нелинейного программирования.

Набор (x_1,x_2), максимизирующий функцию полезности, должен обращать бюджетное ограничение в равенство, т.е. $p_1x_1 + p_2x_2 = I$. Графически это означает, что решение задачи потребительского выбора должно лежать на бюджетной прямой. Мы также будем считать, что условие неотрицательности в оптимальной точке будет выполняться автоматически.

Итак, задачу потребительского выбора можно заменить задачей на условный экстремум (экстремум – это минимальное и максимальное значение функции).

$$u(x_1, x_2) \to \max$$

при условиях $p_1x_1 + p_2x_2 = I$,

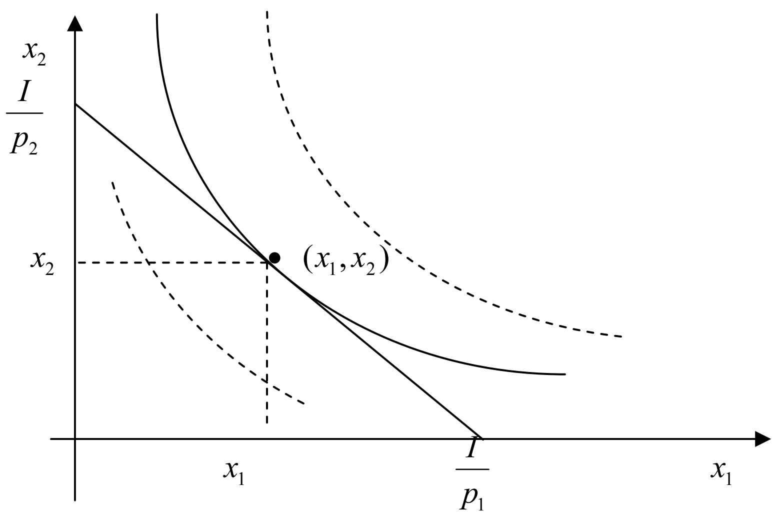
для решения этой задачи возможно применение метода Лагранжа, в результате получим систему двух уравнений с двумя неизвестными x_1 и x_2

$$\begin{cases} \dfrac{u_1'}{u_2'} = \dfrac{p_1}{p_2}, \\ p_1x_1 + p_2x_2 = I. \end{cases}$$

Подставив решение (x_1,x_2), в левую часть равенства

$\dfrac{u_1'(x_1,x_2)}{u_2'(x_1,x_2)} = \dfrac{p_1}{p_2}$,получим, что в точке (x_1,x_2), локального рыночного равновесия отношение предельных полезностей равно отношению рыночных цен на эти продукты.

Геометрически решение можно интерпретировать как точку касания линии безразличия функции полезности $u(x_1, x_2)$ с бюджетной прямой $p_1x_1 + p_2x_2 = I$.



Координаты x_1 и x_2 решения задачи потребительского выбора есть функции параметров p_1, p_2 и I:

$$x_1 = x_1(p_1, p_2, I),$$

$$x_2 = x_2(p_1, p_2, I)$$

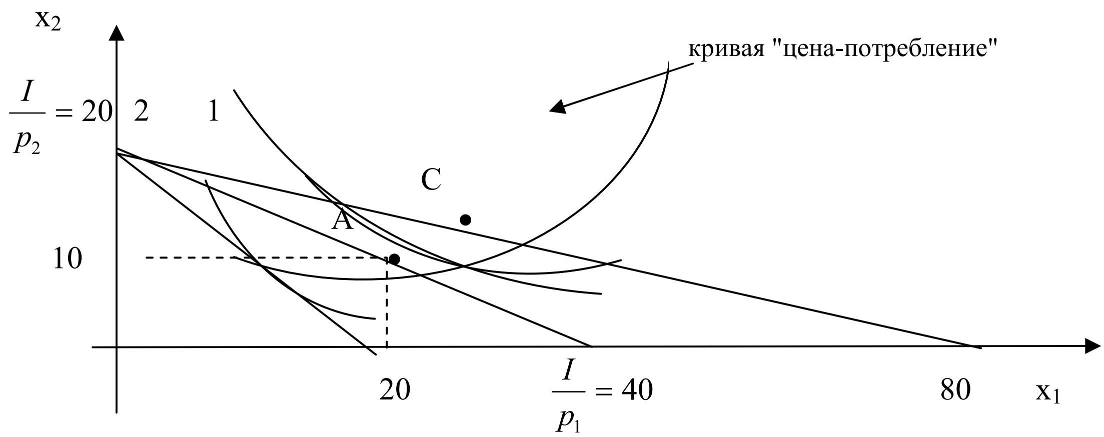
полученные функции называются функциями спроса на первый и второй продукт. Важным свойством функций спроса является их однородность относительно цен и дохода, т.е. значение функций спроса инвариантны по отношению к пропорциональным изменениям цен и дохода.

$$x_1(\alpha p_1, \alpha p_2, \alpha I) = x_1(p_1, p_2, I),$$
$$x_2(\alpha p_1, \alpha p_2, \alpha I) = x_2(p_1, p_2, I)$$

для любого числа $\alpha>0$. Это означает, что если все цены и доход изменятся в одно и тоже число раз, величина спроса на продукт (первый или второй – безразлично) останется неизменной.

3. Изменение цен. Изменение дохода.

Рассмотрим то, как меняется потребление товаров под влиянием изменения цен. Вернемся к задаче рассмотренной в предыдущей лекции про продукты питания и одежду. Напомню, что первоначальная цена продуктов питания (x_1) составляла 10 руб. за единицу, цена одежды (x_2) – 20 руб. за единицу, Доход был равен 400 руб. Решение задачи потребительского выбора находится в точке А. Здесь потребитель приобретает 20 единиц продуктов питания (x_1=20) и 10 единиц одежды (x_2=10)



Предположим, что цена на продукты питания возросла и составила 20 руб. Тогда изменился и угол наклона бюджетной линии ($\frac{I}{p_1} = \frac{400}{20} = 20$). Потребитель теперь достигает максимальной полезности в точке B, которая расположена на кривой безразличия 2. так как цена продуктов питания поднялась , покупательная способность потребитель достигаемая полезность снизились). Так в точке B покупатель выбирает 10 единиц продуктов питания и 13 единиц одежды. Что произойдет когда цена на продукты питания снизится до 5 рублей? Угол наклона бюджетной линии опять изменится ($\frac{I}{p_1} = \frac{400}{5} = 80$) и потребитель выберет точку C соответствующую более высокому уровню полезности (30 единиц продуктов питания и 15 единиц одежды).

Линия, соединяющая максимально-полезные наборы продуктов при каждом изменении цены называется кривой "цена-потребление".

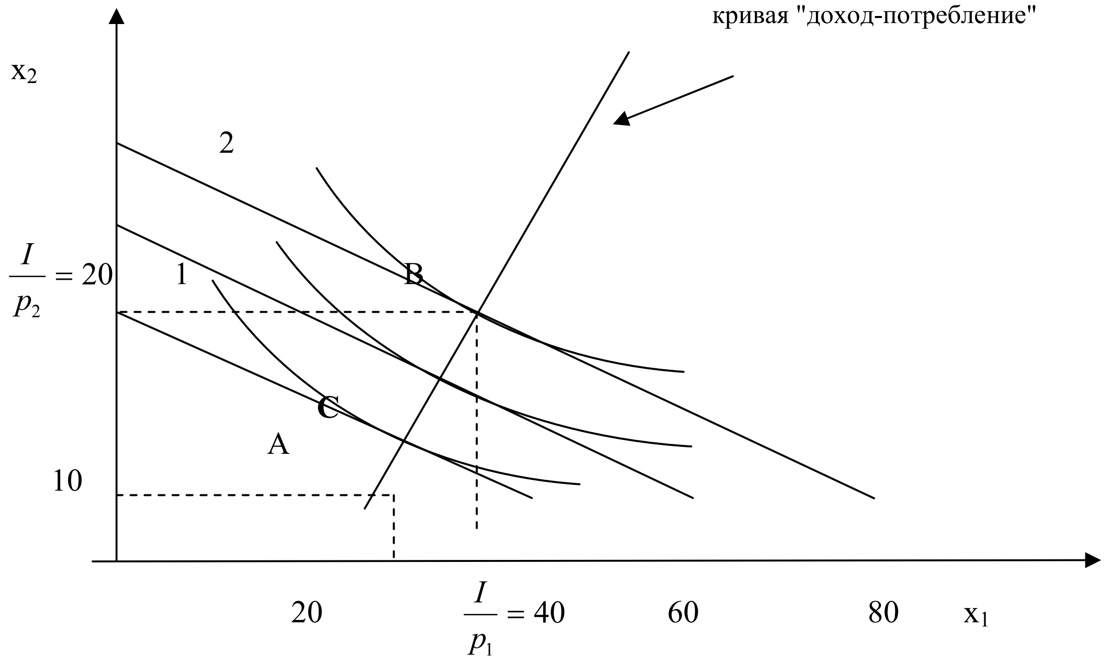
Итак, при снижении цены на продовольствие достигаемая полезность растет и потребитель покупает больше продуктов питания. Потребление одежды при этом может как расти так и падать.

Кривая спроса (функция спроса задается как функция параметров $x_1(p_1, p_2, I),\quad x_2(p_1, p_2, I)$) обладает двумя важными свойствами:

1) Уровень полезности меняется по мере нашего движения вдоль кривой. Чем ниже цена товара, тем выше уровень полезности.

2) В каждой точке на кривой спроса потребитель максимизирует полезность, отвечая условию, что предельная норма замещения одежды продуктами питания равна соотношению цен продуктов питания и одежды $\frac{u_1'}{u_2'} = \frac{p_1}{p_2}$. Другими словами, в каждой точке кривой спроса можно определить сколько готов заплатить потребитель за дополнительную единицу того или иного продукта.

Мы рассмотрели пример изменения потребительского выбора при изменении цены на один из продуктов. Рассмотрим, как влияет изменение дохода на потребительский выбор.



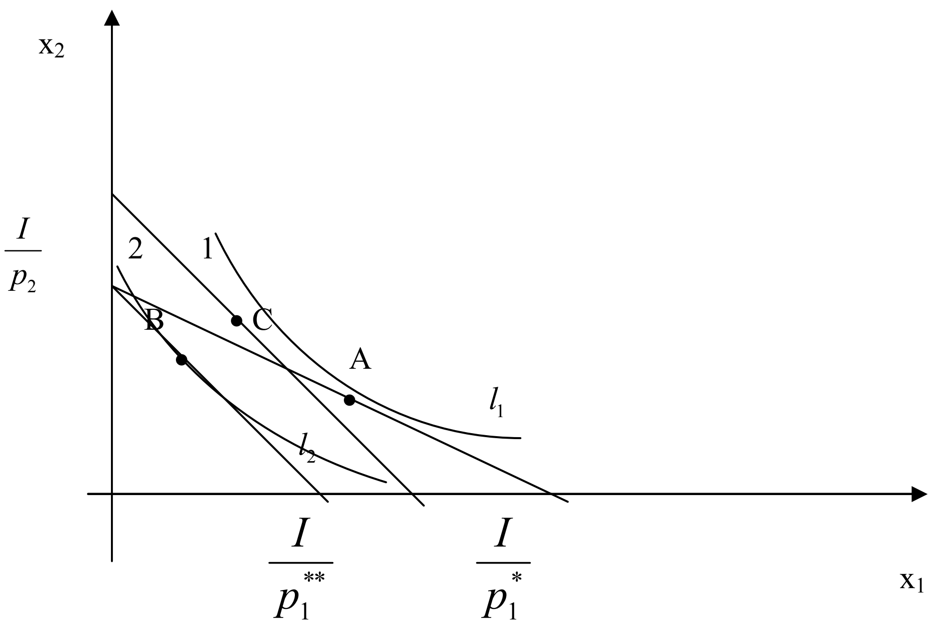
Пусть первоначально доход потребителя равнялся 400 руб., тогда максимизирующий полезность потребительский набор находится в точке А (20 единиц продуктов питания и 10 единиц одежды). Доход потребителя изменился и составил 800 руб. Тогда бюджетная линия сместилась вправо параллельно первоначальной бюджетной линии. Оптимальный выбор потребителя теперь находится в точке В, где он приобретает 30 единиц продуктов питания и 21 единицу одежды. если доход потребителя составит 600 руб., то его выбор переместится в точку С.

Можно продолжить перебирать варианты изменения дохода и соответственно спроса на товары. Все возможные решения будут находится на кривой "доход-потребление". Кривая "доход-потребление" движется на "северо-восток", потому что потребление как продовольствия так и одежды увеличивается с ростом дохода.

***Если кривая "доход-потребление" имеет положительный угловой коэффициент (с ростом дохода растет потребление), то такой товар называется нормальным. в ряде случаев спрос падает по мере роста дохода. Такие товары называются "низкокачественными".

4. Эффекты компенсации. Уравнение Слуцкого.

Перекрестные функции спроса от цен характеризуют такие свойства товара, как взаимозаменяемость и взаимодополняемость. Если при росте цены на один товар при снижении его спроса, растет спрос на другой товар, то эти товары взаимозаменяемые. Наоборот, если спрос на другой товар также падает, то они взаимодополняемы. Заметим, что реальная взаимозаменяемость может искажаться общим снижение благосостояния при росте цены на один из товаров. Первый товар может заменять второй в потреблении, но спрос на него может не расти, поскольку просто снизился доход. Для снятия этого искажения используют понятие компенсированного изменения цены, то есть такого, которое сопровождается увеличением дохода потребителя, позволяющим ему поддерживать прежний уровень благосостояния.



Пусть цена первого блага повысилась с p_1^* до p_1^{**}, тогда бюджетная линия l_1 изменит свое положение, и перейдет в l_2. Точка А лини безразличия 1, касающаяся бюджетного ограничения l_1, будет заменена новой точкой оптимума В, где новая линия безразличия 2 касается новой бюджетной линии l_2. Если мы хотим компенсировать потребителю потерю благосостояния, то увеличим его доход так, чтобы новая бюджетная прямая l_3,(параллельная l_2) коснулась в некоторой точке С прежней линии безразличия 1.

Направленный отрезок АС показывает "эффект замены" при росте цены, то есть изменение структуры спроса при условии поддержания прежнего уровня благосостояния. Направленный отрезок СВ отражает "эффект дохода", то есть изменение потребительского спроса при сохранении соотношения цен благ и изменении уровня дохода. Общий результат роста цены (при отсутствии компенсации) выражается направленным отрезком AB.

Одним из основных в теории потребительского выбора является уравнение Слуцкого, опубликованное российским математиком Е.Е.Слуцким в 1915 году. Это уравнение позволяет увязать действие эффекта замены и эффекта дохода с результирующим изменением спроса. Уравнение Слуцкого имеет следующий вид:

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \left[\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right]_{comp} - \left[\frac{\partial x_i}{\partial I}\right] x_j ,$$

где первое слагаемое в правой части описывает действие эффекта замены, второе – действие эффекта дохода, слева записано результирующее воздействие на спрос, складывающееся из изменения структуры спроса и общего его изменения при изменении уровня реального дохода.

Для ценных (нормальных ?) товаров величина $\left[\frac{\partial x_i}{\partial I}\right] > 0$, т.е. спрос растет при росте дохода. В этом случае, согласно уравнению Слуцкого, $\frac{\partial x_i}{\partial p_j} < \left[\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right]_{comp}$: если спрос растет, то он растет больше при наличии компенсации, если он падает, то в меньшей степени.

Уравнение Слуцкого может рассматриваться как при разных, так и при совпадающих i и j.

Рассмотрим теперь более подробно эластичности функции спроса. Эластичность спроса по цене равна $e_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} : \frac{x_i}{p_j}$, Эластичность спроса по доходу $e_{iI} = \frac{\partial x_i}{\partial I} : \frac{x_i}{I}$.

Выполняется равенство $\sum_j e_{ij} + e_{iI} = 0$, то есть сумма всех эластичностей спроса по цене и доходу должна равняться 0.

1.5 Лекция №5 (2 часа)

Тема: «Производственные функции»

1.5.1 Вопросы лекции:

1. Основные понятия
2. Формальные свойства производственных функций
3. Предельные и средние значения производственной функции

1.5.2 Краткое содержание вопросов

1. Основные понятия

Производственными функциями называют соотношение между используемыми производственными ресурсами и выпускаемой продукцией.

Производственные функции предназначены для моделирования процесса производства некоторой хозяйственной единицы: отдельной фирмы, отрасли или всей экономики государства в целом.

С помощью производственных функций решают задачи:

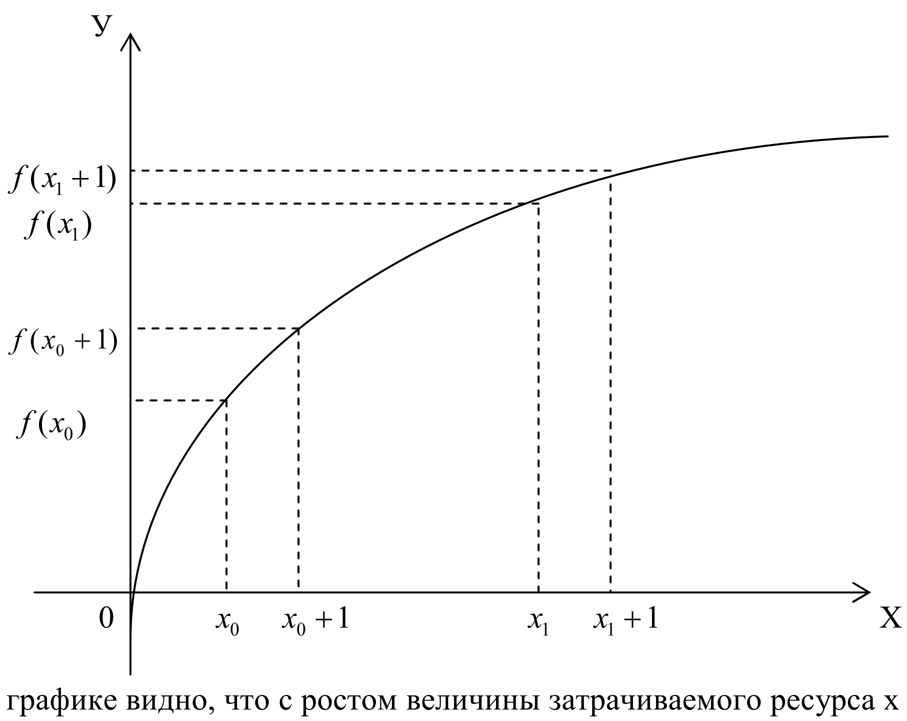
оценки отдачи ресурсов в производственном процессе;

прогнозирование экономического роста;

разработки вариантов плана развития производства;

оптимизации функционирования хозяйственной единицы при условии заданного критерия и ограничений по ресурсам.

Производственная функция одной переменной. Возьмем производственную функцию F в виде $F(x) = a_1 x^{a_2}$, где x- величина затрачиваемого ресурса (например, рабочего времени), F(x) –объем выпускаемой продукции (например, число готовых холодильников). Величины a_1 и a_2 – параметры производственной функции (вектор параметров есть двумерный вектор (a_1 , a_2)). Здесь a_1 и a_2 – положительные числа и число a_2 <=1. Данная функция является функцией одной переменной x. В связи с этим производственная функция называется одноресурсной или однофакторной. Ее область определения - множество неотрицательных действительных чисел т.е. x>=0. График производственной функции $y = a_1 x^{a_2}$ выглядит следующим образом.



На графике видно, что с ростом величины затрачиваемого ресурса x объем выпуска y растет, однако при этом каждая дополнительная единица ресурса дает все меньше прирост объема y выпускаемой продукции. Отмеченное обстоятельство (рост объема y и уменьшение прироста объема y с ростом величины x) отражает фундаментальное положение экономической теории (хорошо подтверждаемое практикой), называемое законом убывающей эффективности. Производственная функция $y = a_1 x^{a_2}$ является типичным представителем широкого класса однофакторных производственных функций.

Производственная функция нескольких переменных - это функция , независимые переменные $x_1,\ldots,x_n$ которой принимают значения объемов затрачиваемых или используемых ресурсов (число переменных n равно числу ресурсов), а значение функции имеет смысл величин объемов выпуска:

$$y = f(x,a).$$

Подчеркнем еще раз, что в данной формуле величина y – скалярная, x и a – векторные величины т.е. $x = (x_1,\ldots,x_n)$ (под вектором понимается упорядоченный набор чисел). В связи с этим производственную функцию называют многоресурсной или многофакторной. По экономическому смыслу $x_1 \geq 0,\ldots,x_n \geq 0$, следовательно, областью определения многофакторной производственной функции $f(x) = (x_1,\ldots,x_n)$ является множество n-мерных векторов x, все координаты $x_1,\ldots,x_n$ которых неотрицательные числа. Для отдельного предприятия, выпускающего однородный продукт, производственная функция $f(x) = (x_1,\ldots,x_n)$ может связывать объем выпуска (в натуральном или стоимостном выражении) с затратами рабочего времени по различным видам трудовой деятельности, различных видов сырья, комплектующих изделий, энергии, основного капитала. Производственные функции такого типа характеризуют действующую технологию предприятия.

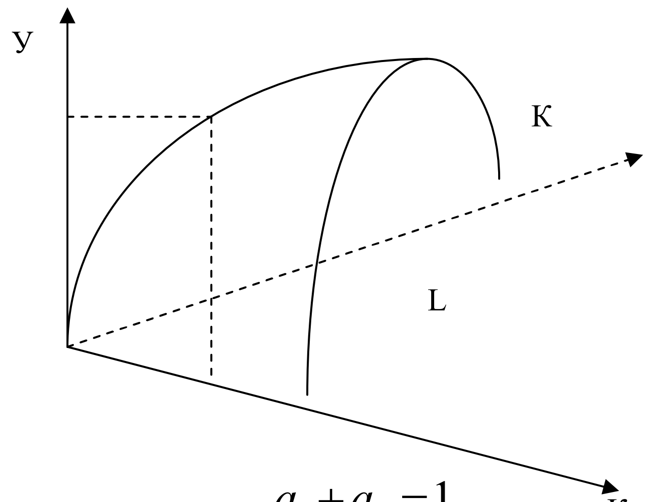
При построении производственной функции для региона или страны в целом в качестве величины годового выпуска Y (на макроуровне обозначают большой буквой) чаще берут совокупный продукт региона или страны, исчисляемый обычно в неизменных, а не в текущих ценах, в качестве ресурсов рассматривают основной капитал ($x_1(=K)$- объем используемого в течение года основного капитала) живой труд ($x_2(=L)$- количество единиц затрачиваемого в течении года живого труда), исчисляемые обычно в стоимостном выражении. Строят двухфакторную производственную функцию $f(x) = (x_1, x_2)$ или $Y = f(K,L)$. От двухфакторных производственных функций переходят к трехфакторным. В качестве третьего фактора иногда вводят объемы используемых природных ресурсов. Кроме того, если производственная функция строится по данным временных рядов, то в качестве особого фактора роста производства может быть включен технический прогресс.

Производственная функция $y = (x_1, x_2)$ называется *статической* если ее параметры и ее характеристика f не зависят от времени t, хотя объемы ресурсов и объемы выпуска могут зависеть от времени t, т.е. могут иметь представление в виде временных рядов: $x_1(0), x_1(1),\ldots, x_1(T)$; $x_2(0), x_2(1),\ldots, x_2(T)$; $y(0), y(1),\ldots, y(T)$;

$y(t) = f(x_1(t), x_2(t))$. Здесь t – номер года, t=0,1,…,T. t=0 – базовый год временного промежутка, охватывающий годы 1,2,…,T.

Пример Для моделирования отдельного региона или страны в целом (т.е. для решения задач на макроэкономическом, микроэкономическом уровне) часто используют производственную функцию вида $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$, где a_0, a_1, a_2- параметры производственной функции. Это положительные постоянные числа (часто a_1 и a_2 таковы, что $a_1 + a_2 = 1$). Производственная функция данного вида называется производственная функция Кобба-Дугласа по имени двух американских экономистов, предложивших ее использовать в 1929 году. Производственная функция Кобба-Дугласа активно применяется для решения разнообразных теоретических и прикладных задач благодаря своей структурной простате. В данной модели $x_1 = K$ равно объему используемого основного капитала (объему используемых основных фондов – в отечественной терминологии), $x_2 = L$ - затратам живого труда, тогда производственная функция Кобба-Дугласа приобретает вид часто используемый в литературе:

$y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$ или если выполняется равенство $a_1 + a_2 = 1$, то $Y = bK^{\alpha}, L^{\alpha - 1}$ Графиком двухфакторной производственной функции будет являться поверхность в трехмерном пространстве.



При выполнении равенства $a_1 + a_2 = 1$ модель Кобба-Дугласа можно записать несколько в ином виде:

$$\frac{Y}{L} = \frac{a_0 K^{a_1} L^{a_2}}{L} = \frac{a_0 K^{a_1}}{L^{1-a_2}} = \frac{a_0 K^{a_1}}{L^{a_1}} = a_0 \left[\frac{K}{L}\right]^{a_1}, \text{ т.е } \frac{Y}{L} = a_0 \left[\frac{K}{L}\right]^{a_1}$$

Дроби $\frac{Y}{L} = z$ и $\frac{K}{L} = k$ называются соответственно производительностью труда и капиталовооруженностью труда. Используя новые символы, получим $z = a_0 k^{a_1}$, т.е из двухфакторной производственной функции Кобба-Дугласа получим формально однофакторную производственную функцию Кобба-Дугласа. В связи с тем, что $0 < a_1 < 1$, из последней формулы следует, что производительность труда Z растет медленнее его капиталовооруженности. Однако этот вывод справедлив для случая статической производственной функции Кобба-Дугласа в рамках существующей технологии и ресурсов. Отметим, что дробь $\frac{Y}{K}$ называется производительностью капитала или капиталоотдачей, обратные дроби $\frac{K}{Y}$ и $\frac{L}{Y}$ называются соответственно капиталоемкостью и трудоемкостью выпуска.

Производственная функция называется динамической, если:

1) время T фигурирует в качестве самостоятельной переменной величины (как бы самостоятельного фактора производства), влияющего на объем выпускаемой продукции;

2) параметры производственной функции и ее характеристикаF зависят от времени T.

При построении производственной функции НТП может быть учтен с помощью введения множителя НТП e^{pt}, где параметр p(p>0) характеризует темп прироста под влиянием НТП:

$y(t) = e^{pt} f(x_1(t), x_2 t)$ где $(t = 0,1,...,T)$.

Эта простейший пример динамической производственной функции; она включает нейтральный, то есть не материализованный в одном из факторов, технический прогресс. В более сложных случаеях технический прогресс может воздействовать непосредственно на производительность труда или капитала (капиталоотдачу): $Y(t) = f(A(t) \cdot L(t), K(t))$ или $Y(t) = f(A(t) \cdot K(t), L(t))$. Он называется, соответственно, трудосберегающим или капиталосберегающим НТП

Пример На основании данных по экономике СССР (динамики национального дохода, численности занятых в материальном производстве и объеме основных фондов), опубликованных за 1960-1985 гг., макроэкономической производственной функции Кобба-Дугласа без учета НТП и с учетом НТП. Без учета НТП функция имеет вид $Y = 1{,}022 K^{0{,}5382} L^{0{,}4618}$, с учетом НТП $Y = 1{,}038 e^{0{,}0294t} K^{0{,}9749} L^{0{,}2399}$.

Выделение существенных видов ресурсов (факторов производства) и выбор аналитической формы функции называется спецификацией.

Преобразование реальных и экспертных данных в модельную информацию, т.е.расчет численных значений параметров на базе статистических данных с помощью регрессионного и корреляционного анализа, называют параметризацией.

Проверка истинности (адекватности) функции называют ее верификацией.

2. Формальные свойства производственных функций

Производственная функция $f(x_1, x_2)$ имеющая область определения $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ имеет следующие свойства.

1. Производство невозможно при отсутствии хотя бы одного ресурса, т.е. $f(0, x_2) = f(x_1, 0) = 0$

2. При увеличении затрат производственных ресурсов выпуск продукции растет. x(1) $x(1) > x(0)$ $f(x(1)) > (fx(0))$, если функция дифференцирована, то можно записать $x > 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} > 0\ (i = 1,2),\quad x = (x_1, x_2)$ или первая частная производная $\left[\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right]$ положительна.

3. По мере увеличения количества одного ресурса при постоянных количествах других предельная эффективность использования этого ресурса не возрастает. Математически это требование для дважды дифференцируемых производственных функций выглядит так. $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right) \leq 0$. В нашем примере рассмотренном ранее это означает, что рост вооруженности средствами производства приводит к росту выпуска

продукции, но темп роста выпуска продукции все время падает (закон убывающей эффективности).

4. Производственная функция характеризуется определенной отдачей от расширения масштабов производства. Отдача от расширения масштабов производства характеризует производственную функцию с точки зрения изменения выпуска продукции при пропорциональном изменении затрат ресурсов, которое математически выражается в умножении всех компонент вектора x на положительный скаляр t. Принято говорить, что скалярная функция является однородной функцией степени δ (дельта), если для любого вектора x и любого скаляра t она удовлетворяет условию $f(tx) = t^{\delta} f(x)$

Математически четвертое предположение состоит в требовании однородности производственной функции. Если $\delta > 1$, то говорят, что производственная функция характеризуется возрастающей отдачей от расширения масштабов производства; если $\delta = 1$ - постоянной отдачей (наиболее часто встречающийся случай), а при $\delta < 1$ - убывающей отдачей.

Пример

Возьмем производственную функцию $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$, $a_1 + a_2 = 1$. Для нее выполняются все четыре свойства.

1. при $x_1 = 0$ $y = a_0 0^{a_1} x_2^{a_2} = 0$ при $x_2 = 0$ $y = a_0 x_1^{a_1} 0^{a_2} = 0$

2. $a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} < a_0 (x_1 + 1)^{a_1} x_2^{a_2}$ или

$a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} < a_0 x_1^{a_1} (x_2 + 1)^{a_2}$

Первая частная производная положительна.

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = a_0 x_2^{a_2} a_1 x_1^{a_1 - 1} \geq 0$$

3. $y^{Э}_{ч_1} = a_0 x_2^{a_2} a_1 (a_1 - 1) x_1^{a_1 - 2} \leq 0$ Вторая частная производная не положительна т.к. $a_0 \geq 0, \quad 0 \leq a_1 \leq 1$

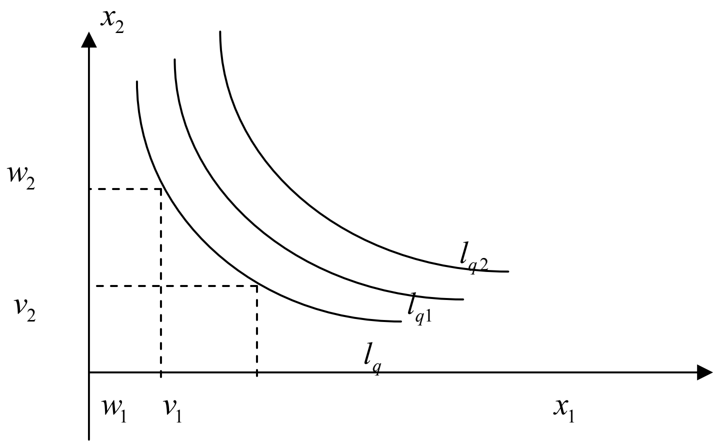
4. $a_0 (tx_1)^{a_1} (tx_2)^{a_2} = t^{a_1 + a_2} (a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2})$.

Если рассмотреть линейную производственную функцию $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$ для нее свойства 1 и 4 не выполняются.

3. Предельные и средние значения производственной функции

Возможность взаимного замещения ресурсов означает, что одно и то же количество продукта y может быть произведено при различных сочетаниях ресурсов. Совокупность таких сочетаний ресурсов, при которых может быть произведено определенное количество продукции q, называется изоквантой.

Различные наборы (v_1, v_2) и (w_1, w_2) затрачиваемых ресурсов, принадлежащие одной и той же изокванте l_q (т.е. $q = f(v_1, v_2) = f(w_1, w_2)$), дают один и тот же объем выпуска q.



Свойства изоквант:

1. Изокванты не пересекаются друг с другом.
2. Изокванта l_q разбивает пространства ресурсов на два множества, в одном из которых $q_0 < q$, в другом $q_1 > q$, причем граница между этими множествами проходит по изокванте l_q.
3. Большему выпуску продукции соответствует изокванта, более удаленная от начала координат.
4. Изокнвнты не имеют общих точек с осями координат.

Средней производительностью I-го ресурса (фактора производства) или средним выпуском по i-му ресурсу (фактору производства) называют отношение значения функции к величине I-го ресурса. Символика:

$$A_i = \frac{f(x)}{x_i}, \text{ где } (i = 1,2) \quad \text{или} \quad f(x) = f(x_1, x_2)$$

В случае двухфакторной производственной функции Кобба-Дугласа для средних производительностей $\frac{Y}{K}$ и $\frac{Y}{L}$ основного капитала и труда были использованы соответственно термины капиталоотдача и производительность труда.

Предельной (маржинальной) производительностью i-го ресурса (фактора производства) или предельным выпуском по i-му ресурсу (фактору производства) называют первую частную производную функции $f(x) = f(x_1, x_2)$. Символика $M_i = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ Предельная производительность показывает, на сколько единиц увеличивается объем выпуска y, если объем затрат x_i i-го ресурса вырастает на одну единицу при неизменных объемах другого затрачиваемого ресурса.

Найдем средние (A_1, A_2) и предельные (M_1, M_2)значение для производственной функции Кобба-Дугласа.

1. $A_1 = \frac{f(x)}{x_1} = a_0 x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2}$; $A_2 = \frac{f(x)}{x_2} = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2 - 1}$

2. $M_1=\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1}=a_0a_1x_1^{a_1-1}x_2^{a_2}=a_1A_1$; $M_2=\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2}=a_2A_2$;

$\dfrac{M_1}{A_1}=a_1\le 1\ \Rightarrow M_1\le A_1$ и $\dfrac{M_2}{A_2}=a_2\le 1\ \Rightarrow M_2\le A_2$ т.е. предельная производительность i-го ресурса не больше средней производительности этого ресурса. Это положение обычно выполняется и для других производственных функций.

Отношение предельной производительности M_i i-го ресурса к его средней производительности A_i называется эластичностью выпуска по i-му ресурсу (по фактору производства). Символика:

$$E_i=\frac{M_i}{A_i}=\frac{x_i}{f(x)}\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\quad (i=1,2).$$

Сумма $E_1+E_2=E_x$ называется эластичностью производства.

E_i показывает, на сколько процентов увеличится выпуск, если затраты i-го ресурса увеличатся на один процент при неизменных объемах другого ресурса..

Рассчитаем для производственной функции Кобба-Дугласа эластичность каждого ресурса и эластичность выпуска (E_1 $,E_2,E_x$).

Имеем : $E_1=a_1$, $E_2=a_2$, $E_x=E_1+E_2=a_1+a_2$

Предельной нормой замены (замещения) i-го ресурса (фактора производства) j-м называется выражение:

$$R_{ij}=-\frac{dx_j}{dx_i}\quad (i,j=1,2)$$

при постоянной y. i – номер заменяемого ресурса, j - номер замещающего ресурса или

$$R_{ij}=-\frac{dx_j}{dx_i}=\frac{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}}$$

Для двухфакторной производственной функции справедливо равенство:

$R_{12}=\dfrac{E_1}{E_2}\dfrac{x_2}{x_1}$, т.е. придельная норма замены первого ресурса вторым равна отношению эластичностей выпуска по первому и второму ресурсам, умноженному на отношение объема второго ресурса к объему первого ресурса.

Для производственной функции Кобба-Дугласа $y=a_0x_1^{a_1}x_2^{a_2}$ запишем предельную норму замены первого ресурса вторым R_{12} и предельную норму замены второго ресурса первым R_{21}.

$$R_{12}=\left[\frac{\partial f(x)}{x_1}\right]\Big/\left[\frac{\partial f(x)}{x_2}\right]=\frac{a_0x_2^{a_2}a_1x_1^{a_1-1}}{a_0x_1^{a_1}a_2x_2^{a_2-1}}=\frac{a_1}{a_2}\frac{x_2}{x_1},\ R_{21}=\frac{a_2}{a_1}\frac{x_1}{x_2}.$$

1.6 Лекция №6 (2 часа)

Тема: «Модели экономического роста»

1.6.1 Вопросы лекции:

1. Однофакторные модели экономического роста
2. Многофакторная модель экономического роста Солоу

1.6.2 Краткое содержание вопросов

1. Однофакторные модели экономического роста

Макроэкономика изучает функционирование экономической системы как единого целого, с точки макроподхода.

При макроподходе объект (будь это такая сложная система как народное хозяйство, или его составные части : промышленность. сельское хозяйство, транспорт и т.д.) рассматриваются как единое целое и как бы снаружи, со стороны.

Макроэкономическая модель представляет собой математически формализованную концепцию функционирования народного хозяйства как единого целого. Макромодели используются для теоретического анализа наиболее общих закономерностей функционирования и развития национальной экономики. Важным полем применения макроэкономических моделей является прогнозирование народнохозяйственных процессов. Для этого используют производственные функции, модели оптимизации соотношения норм накопления и норм потребления, оптимизации национального дохода, валовых капиталовложений и др.

Основные назначения макромоделей:

- анализ структуры и динамики народного хозяйства;
- прогнозирование развития народного хозяйства;
- исследование экономических циклов;
- повышение эффективности государственного регулирования экономики;
- формирование основы для разработки оптимальных планов развития экономических систем.

В теоретической экономике , применяющей математический аппарат для моделирования и исследования социально-экономических процессов и явлений, разработаны и применяются два основных принципа моделирования: экономического роста и экономического равновесия.

Принцип экономического роста позволяет моделировать динамику социально-экономических процессов, принцип экономического равновесия – статику.

Исследование проблем экономического роста можно проводить, используя аппарат математического моделирования. Модель экономического роста – это обычно математико-статистическая модель, описывающая темпы роста, пропорции, направления и условия развития экономики. Эти модели позволяют проводить анализ отдельных зависимостей и тенденций в экономике, а также прогнозировать и планировать ее развитие. Часто объектом исследования являются темпы равновесного роста, в которых равновесие понимается в смысле устойчивых темпов роста при соблюдении определенных пропорций, балансирующих экономику страны. К таким пропорциям относят: соотношение между накоплением и потреблением в национальном доходе, между численностью населения в трудоспособном возрасте и числом занятых в общественном производстве, между наличным фондом капитальных вложений и потребным объемом производственных фондов и т.д. К основным факторам, которые определяют экономический рост в моделях, обычно относят: капиталовложения, производственные фонды, производительность труда, численность и динамику населения, научно-технический прогресс и некоторые другие.

Выделяют однофакторные (односекторные) и многофакторные модели экономического роста.

Однофакторную модель экономического роста можно назвать моделью естественного роста. Предполагается, что прирост продукции, выпускаемой экономической системой, в последующую единицу времени, обычно год, пропорционален абсолютному значению этого показателя.

Пусть прирост национального дохода за год пропорционален величине самого национального дохода Y_t с постоянным коэффициентом n т.е.

$$Y_{t+1} - Y_t = nY_t \,.$$

В этом случае, зная значение национального дохода в базисном году Y_0 , можно вычислить значение Y для любого t:

$$Y_1 = Y_0 + nY_0 = Y_0(1+n)\,,$$

$$Y_2 = Y_1 + nY_1 = Y_0(1+n)^2\,,$$

……………………………

$$Y_t = Y_0(1+n)^t\,.$$

Если принять, что рост национального дохода – непрерывная и непрерывно дифференцируемая функция времени t, то прирост национального дохода можно выразить в виде производной:

$$\frac{dY_t}{dt} = nY_t\,.$$

Преобразовав это уравнение к виду $\dfrac{dY_t}{Y_t} = ndt$ и проинтегрировав его, получим: $InY_t = nt + InY_0$ или $In(Y_t/Y_0) = nt$, откуда $Y_t = Y_0e^{nt}$.Данная модель отражает рост национального дохода во времени, но не выявляет факторы роста и механизм их взаимодействия.

Одним из важнейших факторов роста экономики считают капитальные вложения, поскольку именно этот фактор дает возможность строить и развивать производственные предприятия, приобретать новые станки и оборудование, осваивать новые месторождения и т.п.

Роль капитальных вложений можно отразить с помощью следующей простейшей модели Дж.М.Кейнса, в которой центральное место занимает понятие мультипликатора.

Под мультипликатором понимается количественное соотношение, выражающее зависимость между динамикой капиталовложений и вызываемым ею темпом роста национального дохода.

Мультипликатор представляет собой коэффициент, показывающий, во сколько раз возрастает доход при данном росте инвестиций. Так, если ΔY есть прирост национального дохода, а ΔК – прирост инвестиций, то выполняется соотношение

$$\Delta Y = k\Delta K$$

где k – коэффициент мультипликации, или мультипликатор.

Из равенства следует, что $k = \Delta Y/\Delta K$. С другой стороны, согласно кейнсианской теории, общий объем национального дохода, выраженного в данном случае в приросте, используется для покрытия расходов на непроизводственное потребление (ΔC) и новые инвестиции (ΔК). Заменяя в последнем равенстве ΔК на разность (ΔY-ΔC), получаем

$$k = \Delta Y/(\Delta Y - \Delta C).$$

Разделив числитель и знаменатель на одну и ту же величину, приходим к окончательной записи формулы мультипликатора:

$$k = 1/(1 - \Delta C/\Delta Y),$$

где $\Delta C/\Delta Y$ есть доля прироста фонда потребления в приросте национального дохода. Кейнс и его последователи называют эту величину "предельной склонностью к потреблению". Приняв определенные условия и измерив численно "предельную склонность к потреблению", можно проследить множественный эффект, производимый данным приростом инвестиций на прирост национального дохода ΔY. В самом деле, обозначив «предельную склонность к потребителю» $\Delta C/\Delta Y$ через n и подставив ее в значение мультипликатора k, полученное в, будем и меть

$$\Delta Y = \Delta K/(1 - n).$$

В уравнении прирост национального дохода выражен как функция от прироста инвестиций.

2. Многофакторная модель экономического роста Солоу

Состояние экономики в модели Солоу задается пятью переменными состояния: Y – конечный продукт, L – наличные трудовые ресурсы, K – производственные фонды, I – инвестиции, C – размер непроизводственного потребления. Все переменные взаимосвязано изменяются во времени, т.е. являются функциями времени t, но аргумент t будет часто опускаться, хотя и будет подразумеваться по умолчанию.

Время будет предполагаться непрерывным. Для мгновенных показателей K, L можно считать, что K, L – соответственно фонды и трудовые ресурсы в момент t или, чтобы избежать сезонных изменений числа занятых и всплеска фондов при вводе новых мощностей, K и L можно считать средними значениями этих величин за год, серединой которого служит t. Для величин же Y, C, I их значения в момент t можно себе представить, как их объемы, накопленные за год, серединой которого служит момент t (но и в этом случае они остаются функциями времени и их же лучше воспринимать как мощность производства и мгновенные скорости потребления и инвестирования).

Считается, что ресурсы (производственные и трудовые) используются полностью. Годовой конечный продукт в каждый момент времени является функцией среднегодовых фондов и труда:

$Y = F(K, L)$.

Таким образом, $Y = F(K, L)$ – производственная функция народного хозяйства.

Конечный продукт используется на непроизводственное потребление и инвестиции:

$Y = C + I$.

Назовем нормой накопления ρ долю конечного продукта, используемого на инвестиции, тогда

$I = \rho Y$, $C = (1 - \rho)\ Y$.

В дальнейшем норма накопления будет считаться постоянной: $\rho = \text{const}$, $0 < \rho < 1$.

Инвестиции используются на восстановление выбывших фондов и на их прирост. Если принять, что выбытие происходит с постоянным коэффициентом выбытия μ, $0 < \mu < 1$ (в расчете на год), то

$K = K(t + \Delta t) - K(t) = \rho Y \Delta t - \mu K \Delta t$,

поэтому $dK/dt = \rho Y - \mu K$.

Если считать, что прирост трудовых ресурсов пропорционален наличными трудовыми ресурсами, т.е. $\Delta L = vL \cdot \Delta t$, то получаем дифференциальное уравнение

$\mathrm{d}L/\mathrm{d}t = vL$ и, решая его, получаем $L = L_0 e^{vt}$, где $L_0 = L(0)$ – трудовые ресурсы в начале наблюдения, при $t = 0$.

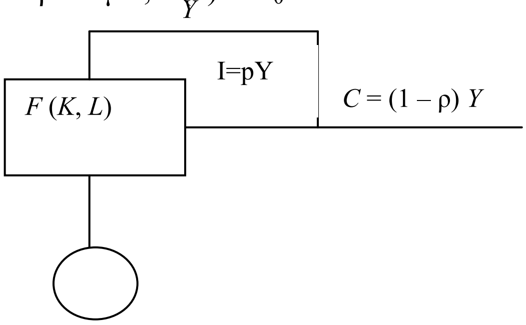
Таким образом, модель Солоу задается схемой или системой уравнений:

$C = (1 - \rho)\ Y$;

$Y = F(K, L)$;

$L = L_0 e^{vt}$;

$dK/dt = \rho Y - \mu K,\ K(0) = K_0.$



Функция $F\ (K,\ L)$;удовлетворяет требованиям к производственным функциям и считается линейно-однородной, т.е. $F\ (\lambda K,\ \lambda L) = \lambda F\ (K,\ L)$. Пользуясь ее однородностью и обозначив среднюю производительность труда $y = Y/L$ и среднюю фондовооруженность $k = K/L$, получаем

$y = Y/L = F\ (K,\ L)/L = F\ (K/L,\ 1) = F\ (k,1),$

а если обозначим последнюю функцию $f(k)$, то получаем $y = f(k)$.

Далее найдем производную от k по t:

$dk/dt = \mathrm{d}(K/L)/\mathrm{d}t = (K'L - KL')/L^2 = K'/L - K(L'/L^2) =$

$=(\rho Y - \mu K)/L - Kv/L = \rho y - (\mu + v)k.$

Окончательно:

$$dk/dt = \rho f(k) - (\mu + v)k,\ k(0) = k_0 = K_0/L_0.$$

Поведение макропоказателей модели целиком определятся данным уравнением и динамикой трудовых ресурсов $L = L_0 e^{vt}$.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

2.1 Практическое занятие 1 (2 часа)
Тема: «Модели и экономико-математическое моделирование»

2.1.1 Задание для работы:

1. Экономико-математические модели.
2. Изучить этапы разработки экономико-математической модели

2.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

Для изучения различных экономических явлений экономисты используют их упрощенные формальные описания, называемые экономическими моделями. Примерами экономических моделей являются модели потребительского выбора, модели фирмы, модели экономического роста, модели равновесия на товарных, факторных и финансовых рынках и многие другие.

Большое число экономических задач сводится к линейным математическим моделям. Традиционно оптимизационные линейные математические модели называются моделями линейного программирования. Под линейным программированием понимается линейное планирование, т.е. получение оптимально плана решения в задачах, имеющих линейную структуру.

Основная задача линейного программирования звучит следующим образом:

Пусть некоторое предприятие имеет m видов производственных ресурсов, порядковый номер ресурсов – i, т.е. i=1, 2, 3,…, m.

Наличие каждого вида ресурсов известно и обозначается b_i.

Предположим, что предприятие может производить n видов продукции, порядковый номер продукции – j, т.е. j=1, 2, 3,…, n.

Необходимо определить какое количество единиц продукции каждого вида надо производить (x_j). Чтобы получить максимум этой продукции в стоимостном выражении, если известно, что затраты на производство единицы продукции каждого вида ресурса (a_{ij}) единиц и цена реализации – c_j.

Модель экономической задачи состоит из трех частей:

1. Целевая функция (критерий оптимальности), описывающая конечную цель, преследуемую при решении задачи.
2. Система ограничений, которая включает основные и дополнительные ограничения. Основные ограничения описывают расход производственных ресурсов (консервативная часть модели), дополнительные – имеют различный характер (изменяемая часть модели, с помощью которой отражаются особенности моделируемой задачи).
3. Условие неотрицательности переменных величин.

Этапы разработки экономико-математической модели

1. Постановка задачи и обоснование критерия оптимальности;
2. Определение перечня переменных и ограничений;
3. Сбор информации и разработка технико-экономических коэффициентов и констант;
4. Построение модели и ее математическая запись;
5. Перенесение информации на машинные носители, решение задачи на ЭВМ;
6. Анализ результатов решения, корректировка модели, повторное решение задачи на ЭВМ по скорректированной модели;
7. Экономический анализ различных вариантов и выбор проекта плана.

В конкретных условиях в зависимости от характера задачи последовательность этапов моделирования экономических процессов может изменяться.

Постановка задачи и обоснование критерия оптимальности

Постановка задачи предполагает четкую экономическую формулировку, включающую цель решения, установления планового периода, выяснение известных параметров объекта и тех, количественное значение которых нужно определить, их производственно-экономических связей, а также множества факторов и условий, отражающих моделируемый процесс.

Цель решения задачи выражается количественно конкретным показателем, называемым критерием оптимальности. Он должен соответствовать экономической сущности решаемой задачи.

Существует достаточно большое количество локальных критериев оптимизации, используемых как в промышленном производстве, так и в сельском хозяйстве:

- максимум производства валовой продукции в стоимостном выражении;
- максимум валового дохода, представляющего разницу между валовой продукцией в стоимостном выражении и суммой материальных затрат на ее производство;
- максимум чистого дохода, измеряемого разницей между стоимостью валовой продукции и суммой издержек производства;
- максимум прибыли, измеряемой разницей между суммой денежных поступлений от реализации продукции и ее полной себестоимостью;
- минимум производственных затрат на заданный план производства продукции, исчисляемых по формуле:

$C=S + ak$,

где S – текущие производственные затраты; k – удельные капиталовложения; a – норма эффективности капиталовложений;

- максимум приведенной прибыли, измеряемой разницей между валовой выручкой за реализованную продукцию и приведенными затратами на ее производство;
- максимум денежных поступлений от реализации продукции;
- минимум производственных затрат на заданный план производства продукции.

Определение перечня переменных и ограничений.

Основные элементы базовой экономико-математической модели

Базовая модель включает в себя следующие элементы: переменные, целевая функция, ограничения, коэффициенты переменных в ограничениях модели и целевой функции, объемные показатели ограничений.

В постановке задачи должно быть четко определено, что является неизвестным, какие переменные величины и их численные значения необходимо найти в процессе решения.

Перечень переменных величин должен отражать характер, основное содержание моделируемого экономического процесса.

Количество переменных зависит от выбора планового периода (долгосрочный, среднесрочный, текущий), который оказывает существенное влияние на степень их детализации. Чем ближе период, на который составляется модель, тем больше детализация переменных. При планировании на более отдаленную перспективу (пятилетний план, план организационно-хозяйственного устройства на перспективу) необходимости в столь подробной детализации переменных нет.

Кроме того, количество переменных зависит и от того, насколько подробно в модели должны быть представлены следующие признаки: вид продукции; направление ее использования; способы, каналы и сроки производства и реализации продукции.

По экономической роли в моделируемом процессе все переменные классифицируются на *основные* и *вспомогательные*. Возможная классификация основных переменных приведена в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Виды основных переменных в экономико-математических моделях

Для промышленного производства	**Для сельского хозяйства**
1. Объемы производства продукции (бытовой техники, строительных и отделочных материалов, мебели, автомобилей и т.д.)	1. Объемы производства продукции отраслей растениеводства и животноводства
2. Количество сырья, используемого для промышленного производства	2. Поголовье сельскохозяйственных животных
3. Количество промышленного оборудования	3. Площади посева сельскохозяйственных культур, площади сельскохозяйственных угодий
	4. Количество сельскохозяйственной техники
	5. Количество минеральных удобрений
	6. Количество кормов

Вспомогательные переменные привлекают для облегчения математической формулировки условий, определения расчетных величин (объемов производства, показателей эффективности производства и т.д.).

При математической реализации задач для преобразования неравенств в равенства вводятся дополнительные переменные, которые используются при анализе промежуточных решений и оптимального варианта.

Единицы измерения переменных. Для каждой переменной устанавливают конкретную единицу измерения (шт., га, ц, чел.-ч. и т.д.). При этом руководствуются следующими требованиями.

1. Целесообразно выбирать одинаковые единицы измерения по однотипным группам переменных.
2. Единицы измерения не должны затруднять анализ оптимального решения и вызывать дополнительные расчеты.
3. Технико-экономические коэффициенты нецелесообразно представлять слишком большими или слишком малыми числами.

После установления состава переменных определяют систему ограничений модели, отражающих условия реализации задачи. Ограничения, представленные в виде линейных неравенств и уравнений, отражают организационно-экономические и технологические условия и требования, которые характеризуют данное производство.

Ограничения записываются тремя типами линейных соотношений: меньше или равно ($\leq$), больше или равно ($\geq$) и равно ($=$). По своей роли в модели они подразделяются на основные, дополнительные и вспомогательные.

Основные ограничения выражают главные, наиболее существенные условия задачи. Они накладываются на все или большинство переменных моделей. К основным относятся ограничения по использованию производственных ресурсов (сырья и материалов, энергоресурсов, оборудования, земли, рабочей силы, машинно-тракторного парка, удобрений, кормов, финансовых ресурсов и т. д.).

Дополнительные ограничения накладываются на небольшое количество переменных величин или отдельные переменные. Обычно они формулируются в виде неравенств, ограничивающих снизу и сверху потребление животными отдельных групп кормов, объемы производства некоторых видов промышленной и сельскохозяйственной продукции, удельный вес культур в полях севооборота, а также использование тракторов и сельскохозяйственной техники по маркам (промышленности – различных видов оборудования), площади под сельскохозяйственными культурами и др. При этом не следует перегружать модель дополнительными ограничениями, так как это приведет к сужению области допустимых решений.

Вспомогательные ограничения вводят для облегчения разработки числовой модели, обеспечения правильной формулировки экономических требований. Самостоятельного экономического значения не имеют. С помощью вспомогательных ограничений могут быть записаны условия пропорциональной связи между переменными или их группами.

Размерность величин каждого ограничения определяется размерностью его правой части. Если она, например, означает запас ресурсов труда в человеко-часах, то в левой части ограничения показатели по использованию трудовых ресурсов по всем видам деятельности также выражаются в человеко-часах.

Сбор информации и разработка технико-экономических коэффициентов

В зависимости от задачи и объекта, по которому эта задача должна быть построена, необходимо определить характер и объем информации, источники ее сбора и методы обработки.

Источниками информации служат годовые отчеты, производственно-финансовые и перспективные планы, планы организационно-хозяйственного устройства, данные первичного учета, технологические карты производства различных видов продукции, а также различные нормативные справочники.

Целью переработки исходной информации являются разработка и обоснование системы технико-экономических характеристик объекта или процесса. Для любой модели эти характеристики формируются в виде технико-экономических коэффициентов a_{ij}, коэффициентов целевой функции c_j и констант или объемных показателей ресурсов или продуктов b_i.

Технико-экономические коэффициенты представляют собой основную часть входной информации, которая поступает в модель как в преобразованном, так и не преобразованном виде. Коэффициенты можно подразделить на три группы: удельные нормативы затрат или выхода продукции; коэффициенты пропорциональности.

Удельные нормативы затрат или выхода продукции представляют собой технико-экономическую характеристику видов (способов) деятельности. По экономическому содержанию выделяют коэффициенты, характеризующие затраты i-го ресурса на единицу j-го вида деятельности – a_{ij} (затраты труда на единицу произведенной продукции, на 1 га, на голову скота и т. д.) и коэффициенты выхода – v_{ij} (урожайность сельскохозяйственных культур, продуктивность животных, содержание питательных веществ в единице корма и т.д.).

Удельные коэффициенты затрат и выхода рассчитывают на основе нормативных справочников, технологических карт, с использованием методов математической статистики и другими способами. От их достоверности зависит результат решения задачи. Единицы измерения этих величин определяются отношением единицы измерения b_i, к единице измерения $\boldsymbol{x_j}$. Если, например, ограничение отражает условие по использованию трудовых ресурсов, а переменные выражены в штуках, то величины a_{ij} означают затраты трудовых ресурсов в человеко-часах на 1 штуку.

Коэффициенты пропорциональности (W_{ij}) – это коэффициенты при переменных в тех ограничениях, которые предусматривают определенные пропорции (соотношения) между зависимыми переменными.

Экономическое содержание коэффициентов в целевой функции (c_j) определяется характером критерия оптимальности Числовое значение критерия оптимальности чаще всего исчисляется как сумма произведений коэффициентов целевой функции и значений переменных, то есть $\sum c_j x_j$.

Построение модели и ее математическая запись. Символика обозначений

Модель можно описать развернуто в виде системы неравенств и уравнений. Однако при достаточно большом числе переменных и ограничений такая запись громоздка, уменьшает обозримость и затрудняет чтение. Для более компактной записи используют общепринятую систему условных обозначений переменных величин, технико-экономических коэффициентов, констант и коэффициентов при переменных в целевой функции.

Для обозначения переменных величин наиболее употребительным символом является строчная или заглавная латинская буква *x, X.* Каждая конкретная переменная вводится в модель с соответствующим подстрочным индексом – порядковым номером – 1, 2, 3, ..., *n.* Она обозначается $x_1, x_2, ..., x_j,..., x_n$, где n – порядковый номер последней переменной Символ n показывает общее количество переменных в модели. Используя общий индекс j, необходимо указать, в каких пределах изменяются номера переменных. Например, вместо обозначения переменных с порядковыми номерами вводится x_j $(j=1, 2, ..., n)$, то есть j изменяется от 1 до n. Такая запись показывает, что в группу с индексом j входит n переменных. Это же выражение можно записать с использованием символа принадлежности к некоторому множеству ($\in$). Например, x_j ($j \in A$). Здесь индекс j принадлежит множеству A, в которое входят переменные $x_1, x_2, ..., x_n$. Для обозначения множества используют заглавные или строчные буквы латинского алфавита — *A, B, D, E, I, J, M* и др. Символы, обозначающие множества, могут иметь числовые или буквенные индексы. Например, $A_1, A_2, ..., A_n$.

Для обозначения правых частей ограничений (или констант) чаще всего используют строчную или заглавную латинскую букву *B, b.* Как правило, все константы имеют один индекс, показывающий принадлежность к конкретному ограничению. Например, $b_1, b_2, ..., b_m$. Для обозначения порядкового номера ограничения используют чаще всего индекс i. Количество ограничений обозначается буквой m ($i=l, 2, ..., m$). В общем виде константа записывается так: b_i - ($i= 1, 2, .., i,... m$), или b_i ($i \in M$), где M— множество, включающее номера указанных ограничений от 1 до m.

Технико-экономические коэффициенты (типа удельных затрат) чаще всего обозначаются строчной латинской буквой a_{ij}, где i – номер ограничения, j – номер переменной. Коэффициенты могут также обозначать норму выпуска, выхода продукции (урожайность сельскохозяйственных культур, производительность оборудования и т. д.), производительность машин и др. – строчная латинская буква v_{ij}. Коэффициенты пропорциональности, с помощью которых записывают соотношения между отдельными переменными величинами или их группами, чаще всего обозначаются символом W_{ij}.

В общем случае коэффициенты в ограничениях обозначаются соответственно a_{ij}, v_{ij}, W_{ij}.

Размерность указанных технико-экономических нормативов затрат — выпуска и коэффициентов должна соответствовать размерности, принятой для i-го ограничения константы (b_i), деленной на размерность переменной x_j. Например, переменная x_5 означает площадь посева многолетних трав на сено в гектарах, а константа b_7 – объем кормов, выраженный в ц корм. ед., тогда размерность коэффициента в седьмом ограничении при пятой переменной (v_{75}) будет выражаться в ц корм. ед. на 1 га.

Коэффициент при переменных в целевой функции чаще всего имеет один индекс, который показывает его принадлежность j-ой переменной. Обозначается коэффициент целевой функции латинской строчной буквой ***c***. Например, по переменным x_4, x_5, x_6 он будет обозначаться соответственно c_4, c_5, c_6, или в общем случае c_j ($j=4, 5, 6$).

Для компактной записи условий модели используют арифметические знаки «+», «-», знаки умножения и суммирования $\sum$. Так, произведение технико-экономического коэффициента a_{11} и переменной x_1 записывают $a_{11} \cdot x_1$, а в общем случае $a_{ij} \cdot x_j$; произведение коэффициента целевой функции c_1 и переменной x_1 – $c_1 x_1$, а в общем виде $c_j x_j$. Если нужно записать суммы произведений коэффициентов и значений переменных, используют знак суммирования $\sum$. Например, компактную запись левой части условия $a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + ... + a_{18} \cdot x_8$ можно осуществить так:

$$\sum_{j=1}^{8} a_{1j} x_j$$

Под индексом суммирования записывают индекс переменных, по которым идет суммирование, а над ним — номер последней переменной. Та же запись может быть осуществлена иначе:

$$\sum_{j \in A_1} a_{1j} x_j$$

где A_1—множество, включающее в себя номера переменных (1,2,...,8).

Ограничения по использованию производственных ресурсов в компактном виде записывают следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{8} a_{ij} x_j \le b_i \qquad (i = 1,2,...,m)$$

или иначе:

$$\sum_{j \in A_1} a_{ij} x_j \le b_i \qquad (i \in I)$$

где I — множество ограничении (например, по использованию трудовых ресурсов, оборудования, земельных угодий).

Оба вида математической записи показывают, что сумма затрат i-го ресурса по всем переменным от 1 до n (первая запись) или по всем переменным, номера которых входят во множество A_1 (вторая запись), не должна превышать заданного объема этого ресурса b_i. Справа от последнего неравенства в скобках указывают, каким номерам ограничений соответствует данное условие. Как видно из первой записи, таких условий в модели m. Вторая запись показывает, что количество ограничений входит во множество I.

Наряду с математической записью системы линейных соотношений должны быть текстовые пояснения, разъясняющие содержание индексов. Рассмотрим запись условий по использованию производственных ресурсов и пояснения к ней:

$$\sum_{j \in A_1} a_{ij} x_j \le b_i \qquad (i \in I_1)$$

где j – индекс (или номер) переменной; A_1 – множество, включающее в себя номера этих переменных; i – индекс (номер) ограничения в модели; I_1 – множество, элементами которого являются номера ограничений по использованию производственных ресурсов; x_j – искомый размер переменной j-го вида; b_i – константы, обозначающие заданный объем производственного ресурса i-го вида; a_{ij} – технико-экономический коэффициент, отражающий заданные удельные затраты производственных ресурсов i-го вида в расчете на единицу j-й переменной.

Запись ограничений по заданному (гарантированному) объему выполнения работ или производства продукции осуществляется с использованием второго типа ограничений ($\ge$):

$$\sum_{j \in A_2} \upsilon_{ij} x_j \ge b_i \qquad (i \in I_2)$$

где A_2 – множество, включающее в себя номера переменных, обеспечивающих обязательное выполнение заданных объемов i-го вида работ или j-го вида продукции; I_2 – множество, включающее в себя номера ограничений по гарантированным объемам работ или продукции; v_{ij} – технико-экономический коэффициент, отражающий норму выпуска (выхода) продукции i-го вида или производительность по i-й работе в расчете на единицу j-й переменной.

Запись ограничений по соотношениям между переменными величинами может быть осуществлена следующим образом:

$$\sum_{j \in A_3} \upsilon_{ij} x_j \geq \sum_{j \in D_1} a_{ij} x_j \qquad (i \in I_3)$$

где A_3 – множество, включающее номера переменных по растениеводству; D_1 – множество, элементами которого являются номера переменных по животноводству; I_3 – множество, включающее номера ограничений по балансу кормов; v_{ij} – технико-экономические коэффициенты, означающие выход питательных веществ i-го вида в расчете на единицу j-й переменной по отраслям растениеводства; a_{ij} – технико-экономические коэффициенты, отражающие потребность в питательных веществах i-го вида в расчете на единицу j-й переменной по отраслям животноводства.

В данной математической записи условий по кормовому балансу показано, что общий выход кормов в отраслях растениеводства должен быть не менее потребности в них отраслей животноводства.

Для записи условий по соотношениям между переменными используют коэффициенты пропорциональности. Например, ограничение по удельному весу озимой ржи в общей площади зерновых культур записывается так:

$$x_j \leq\geq W_{ij} \sum_{j \in A_1} x_j \qquad (i \in I_4)$$

где A_1 – множество, включающее в себя номера переменных, обозначающих площади посева зерновых культур; I_4 – множество, элементами которого являются номера ограничений по соотношениям посевных площадей сельскохозяйственных культур; W_{ij} – коэффициенты пропорциональности, отражающие удельный вес ограничиваемых культур в общей площади культур соответствующих групп.

Целевую функцию можно записать по-разному:

$$f(x) = \sum_{j \in A} c_j x_j \to \max(\min)$$

или

$$z = \sum_{j \in A} c_j x_j \to \max(\min)$$

где c_j – коэффициент целевой функции, конкретно выражающий критерий оптимальности на единицу j-й переменной

Так, при математической записи целевой функции, обеспечивающей максимум валовой продукции в денежном выражении, коэффициент ее c_j будет выражать стоимость валовой продукции. Произведение $c_j x_j$ даст объем валовой продукции в стоимостном выражении, а сумма произведений $\sum_{j \in A} c_j x_j$ выражает общую стоимость валовой продукции по всем переменным, входящим в множество A.

2.1.3 Результаты и выводы:

Таким образом, разработку экономико-математических моделей различных производственных, хозяйственных, социально-экономических и других процессов необходимо осуществлять с использованием предложенной выше последовательности.

2.2 Практическое занятие № 2,3 (4 часа)

Тема: «Оптимизационные экономико-математические модели в планировании аграрного производства»

2.2.1 Задание для работы:

1. Построение модели и ее математическая запись. Символика обозначений
2. Использование табличного редактора Excel для решения задач линейного программирования

2.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

Упражнения

Задача 1

Для производства продукции типа $П_1$ и $П_2$ предприятие использует два вида сырья: $С_1$ и $С_2$. Данные об условиях производства приведены в таблице.

Сырье	Расход сырья на единицу продукции, кг/ед.		Количество сырья, кг
	$П_1$	$П_2$	
$С_1$	1	3	300
$С_2$	1	1	150
Прибыль на единицу продукции, тыс. руб.	2	3	-

Составить план производства по критерию максимум прибыли.

Решение

1. Состав переменных

x_1 – количество (единиц) продукции $П_1$;
x_2 – количество (единиц) продукции $П_2$.

2. Числовая модель

I. Целевая функция. Критерий оптимальности получение максимума прибыли от производственной деятельности. Следовательно,

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

II. Основные ограничения

В таблице представлены данные по расходу основных производственных ресурсов (сырье $С_1$ и $С_2$) на производство продукции $П_1$ и $П_2$. Используя данные таблицы, составим ограничения:

$1x_1 + 3x_2 \leq 300$
$1x_1 + 1x_2 \leq 150$

III. Условие неотрицательности переменных

$x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$

3. Общий вид экономико-математической модели

I. $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max$

II. $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2$

III. $x_j \ge 0$, $(j=1, 2)$

4. Структурная форма экономико-математической модели

I. $$Z = \sum_{j=1}^{2} c_j x_j \to \max$$

II. $$\sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,2$$

III. $$x_j \ge 0, \qquad j = 1,2$$

5. Решение задачи с использованием табличного редактора MS Excel

Чтобы решить задачу, используя табличный редактор MS Excel необходимо:

- Открыть табличный редактор (Пуск → Программы → MS Excel);
- Запишем числовую модель задачи на рабочий лист (рисунок 1.1). Для этого необходимо выбрать ячейки в которых будут находиться переменные. Допустим $x_1 \to C1$ $x_2 \to C2$ (выбор ячеек произволен).

В ячейке A1 запишем целевую функцию $Z = 2x_1 + 3x_2$: A1: =2*C1+3*C2

Примечание: запись формул всегда начинается со знака «=».

В ячейку B1 запишем левую часть 1-го ограничения ($1x_1 + 3x_2$)

B1: =C1+3*C2

В ячейку B2 запишем левую часть 2-го ограничения ($1x_1 + 1x_2$)

B2:=C1+C2

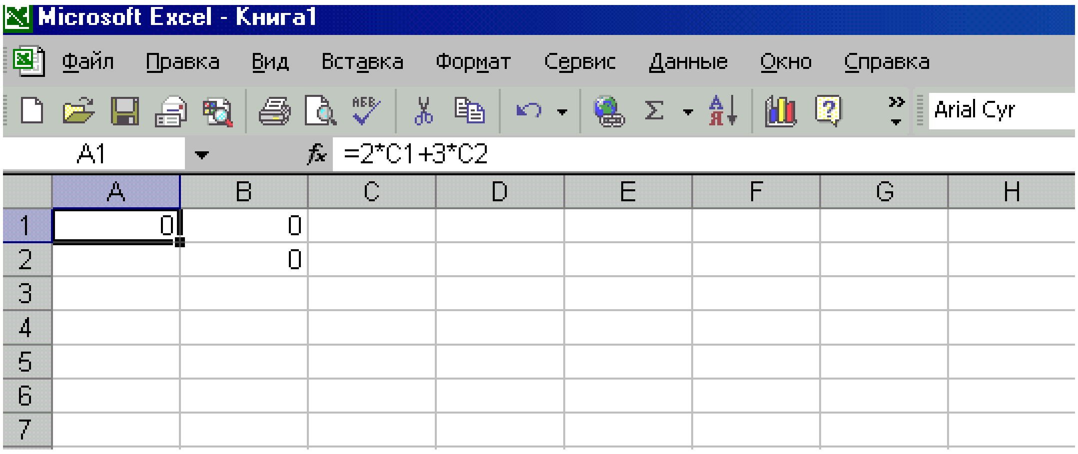


Рисунок 1.1 – Запись числовой модели на рабочем листе MS Excel

- После как числовая модель записана, необходимо установить курсор в ячейку A1 (в ней расположена целевая функция). Выбираем вкладку «Сервис» → «Поиск решения…», при этом откроется диалоговое окно функции «Поиск решения».
- В открывшемся окне необходимо установить целевую ячейку, а поскольку у вас курсор стоял на ячейке A1, то значение целевой ячейки будет правильным. В противном случае установите в ручную адрес целевой ячейки (в данном случае программа использует абсолютные адреса т.е. ячейка A1 имеет абсолютный адрес

$A$1) (рисунок 1.2).

- Установите маркер в положение, соответствующие критерию оптимальности: максимальному или минимальному значению.
- В окне «Изменяя ячейки» нужно указать адреса ячеек соответствующие переменным. Для этого необходимо выделить диапазон ячейки с С1 по С2 (рисунок 1.2).

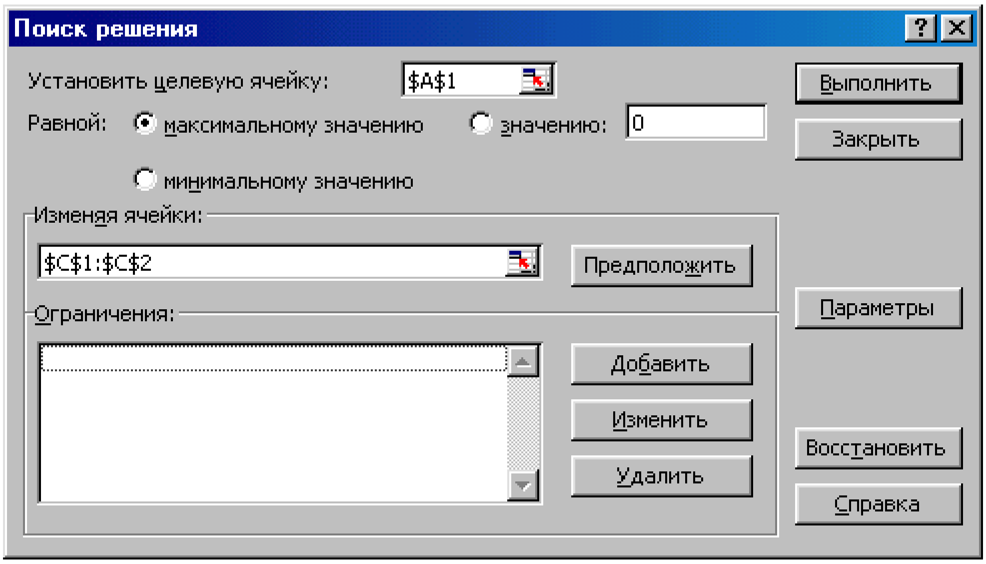


Рисунок 1.2 – Работа в диалоговом окне «Поиск решения»

- В окне «Ограничения» активировать кнопку «Добавить». Откроется окно «Добавить ограничения» (рисунок 1.3). Вводим первое ограничение: в окне «Ссылка на ячейку» указывают адрес ячейки, где находится левая часть 1-го ограничения - $B$1, затем выбирают знак ограничения « $\leq$ » и значение – 300.

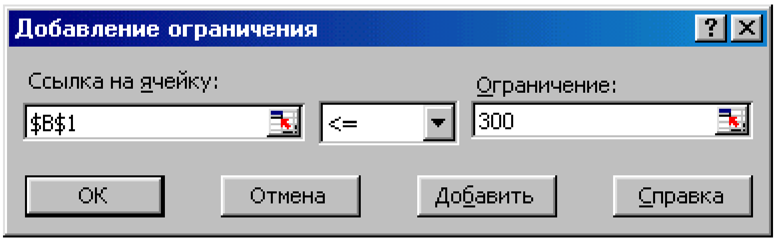


Рисунок 1.3 – Диалоговое окно «Добавление ограничения»

- Активируем клавишу «добавить» и аналогично вводим второе ограничение. Затем вводим условие неорицательности. Для этого в окне «Ссылка на ячейку» указываем диапазон ячеек, в которых находятся переменные ($C$1:$C$2). После добавления всех ограничений выбираем «ОК». Программа возвращается в диалоговое окно «Поиск решения». Ввод числовой модели закончен (рисунок 1.4).

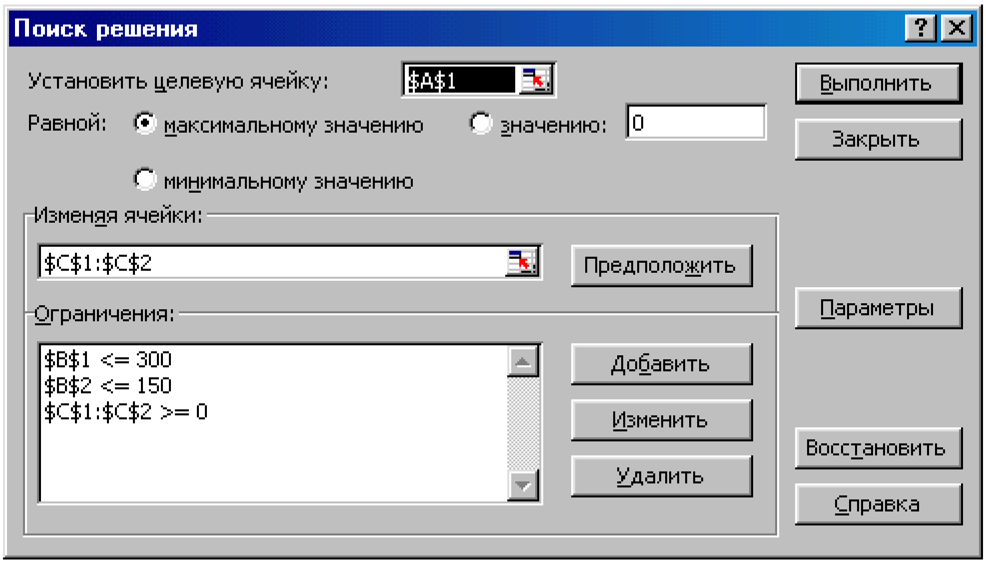


Рисунок 1.4 – Завершение ввода числовой модели в диалоговом окне «Поиск решения»

- Выбираем команду «Выполнить». На экране появится окно «Результаты поиска решения» (рисунок 1.5). Если модель составлена правильно и имеет решение, в открывшемся окне будет сообщение: «Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены». В окне «Тип отчета» выберите «Результаты» и нажмите «ОК».

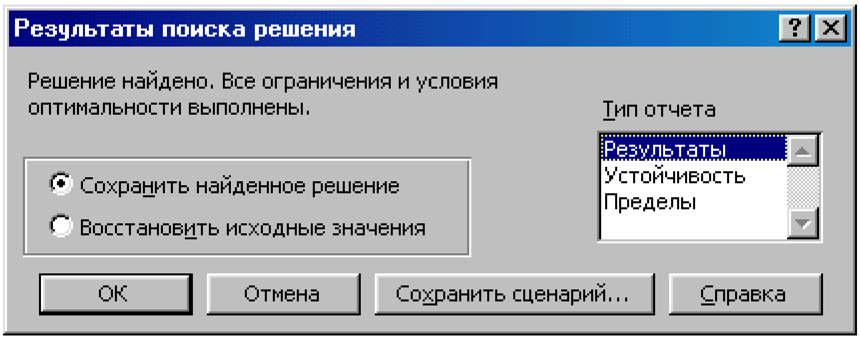
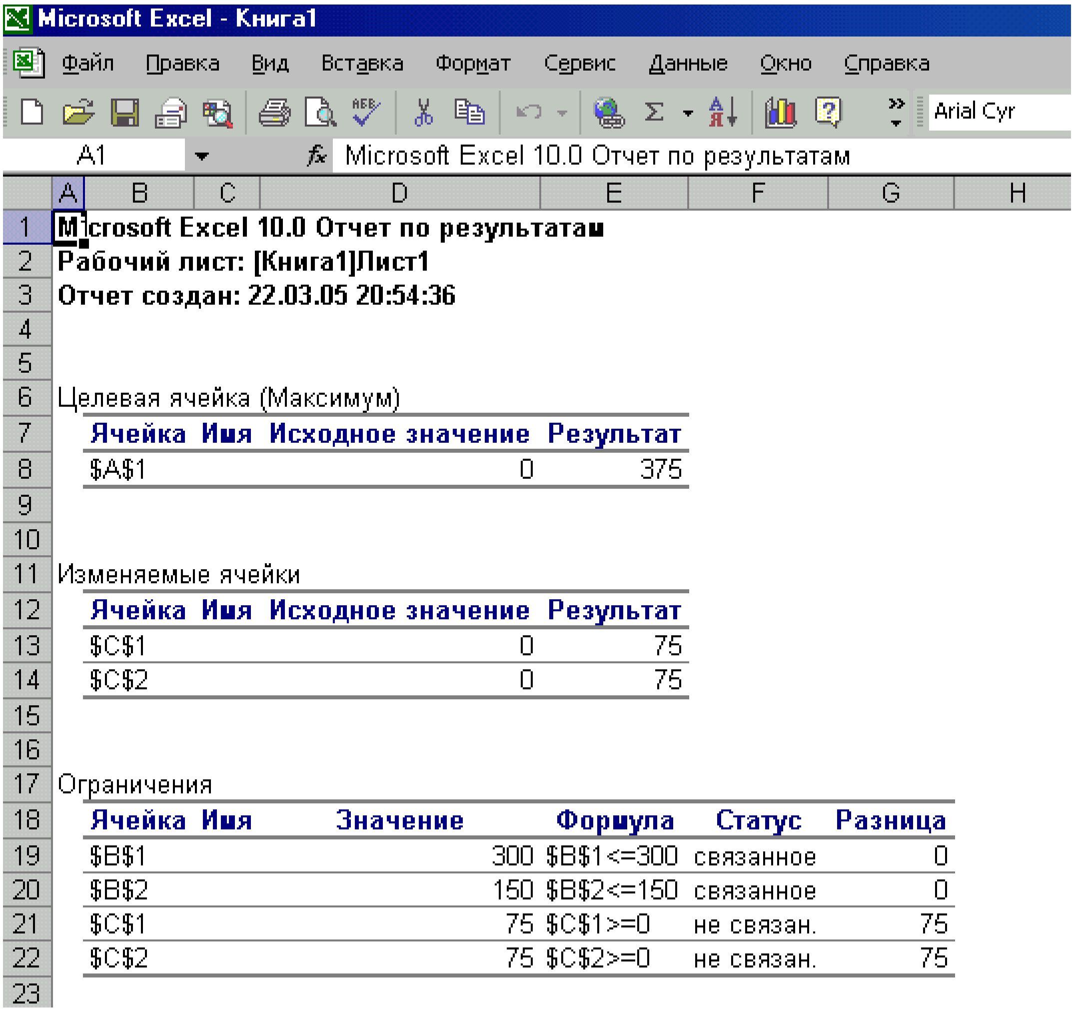


Рисунок 1.5 – Окно «Результаты поиска решения»

Результат решения задачи представлен в «Отчете по результатам» (рисунок 1.6). Решение задачи окончено.



Microsoft Excel 10.0 Отчет по результатам
Рабочий лист: [Книга1]Лист1
Отчет создан: 22.03.05 20:54:36

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$A$1		0	375

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$C$1		0	75
$C$2		0	75

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$B$1		300	$B$1<=300	связанное	0
$B$2		150	$B$2<=150	связанное	0
$C$1		75	$C$1>=0	не связан.	75
$C$2		75	$C$2>=0	не связан.	75

Рисунок 1.6 – Отчет по результатам

- Решение задачи окончено, результаты можно распечатать.

Примечание

Если поиск не может найти оптимальное решение, в диалоговом окне **Результаты поиска решения** выводится одно из следующих сообщений.

Поиск не может улучшить текущее решение. Все ограничения выполнены.

В процессе поиска решения нельзя найти такой набор значений влияющих ячеек, который был бы лучше текущего решения. Приблизительное решение найдено, но либо дальнейшее уточнение невозможно, либо погрешность, заданная в диалоговом окне **Параметры поиска решения** слишком высока. Измените погрешность на меньшее число и запустите процедуру поиска решения снова.

Поиск остановлен (истекло заданное на поиск время).

Время, отпущенное на решение задачи, исчерпано, но достичь удовлетворительного решения не удалось. Чтобы при следующем запуске процедуры поиска решения не повторять выполненные вычисления, установите переключатель **Сохранить найденное решение** или **Сохранить сценарий**.

Поиск остановлен (достигнуто максимальное число итераций).

Произведено разрешенное число итераций, но достичь удовлетворительного решения не удалось. Увеличение числа итераций может помочь, однако следует рассмотреть результаты, чтобы понять причины остановки. Чтобы при следующем запуске процедуры поиска решения не повторять выполненные вычисления, установите переключатель **Сохранить найденное решение** или нажмите кнопку **Сохранить сценарий**.

Значения целевой ячейки не сходятся.

Значение целевой ячейки неограниченно увеличивается (или уменьшается), даже если все ограничения соблюдены. Возможно следует в задаче снять одно ограничение или сразу несколько. Изучите процесс расхождения решения, проверьте ограничения и запустите задачу снова.

Поиск не может найти подходящего решения.

В процессе поиска решения нельзя сделать итерацию, которая удовлетворяла бы всем ограничениям при заданной точности. Вероятно, ограничения противоречивы. Исследуйте лист на предмет возможных ошибок в формулах ограничений или в выборе ограничений.

Поиск остановлен по требованию пользователя.

Нажата кнопка **Стоп** в диалоговом окне **Текущее состояние поиска решения** после прерывания поиска решения в процессе выполнения итераций.

Условия для линейной модели не удовлетворяются.

Установлен флажок **Линейная модель**, однако итоговый пересчет порождает такие значения, которые не согласуются с линейной моделью. Это означает, что решение недействительно для данных формул листа. Чтобы проверить линейность задачи, установите флажок **Автоматическое масштабирование** и повторно запустите задачу. Если это сообщение опять появится на экране, снимите флажок **Линейная модель** и снова запустите задачу.

При поиске решения обнаружено ошибочное значение в целевой ячейке или в ячейке ограничения.

При пересчете значений ячеек обнаружена ошибка в одной формуле или в нескольких сразу. Найдите целевую ячейку или ячейку ограничения, порождающие ошибку, и измените их формулы так, чтобы они возвращали подходящее числовое значение.

Набрано неверное имя или формула в окне **Добавить ограничение** или в окне **Изменить ограничение**, либо в поле **Ограничение** было задано целое или двоичное ограничение. Чтобы ограничить значения ячейки множеством целых чисел выберите оператор **целого** ограничения в списке условных операторов. Чтобы установить двоичное ограничение, выберите оператор для **двоичного** ограничения.

Интерпретация результатов задачи

Полученные значения в ячейках, содержащих формулы целевой функции или ограничений, являются результатом расчета целевой функции и соответствующих ограничений.

Результат, полученный в ячейке А1 означает прибыль, полученную от производства продукции.

Ячейки С1, С2 указывают нам на количество произведенной продукции.

В ячейке В1 записано 1-ое ограничение, характеризующее расход сырья $С_1$ на производство всех видов продукции. При этом получился результат равный 300, разница равна 0, что указывает на полный расход сырья данного вида.

В ячейке В2 записано второе ограничение, характеризующее расход сырья $С_2$ на производство продукции $П_1$ и $П_2$. Результат равен 150, разница равна 0, что полностью соответствует заданному ограничению (т.е. сырье $С_2$ израсходовано полностью).

Значение ячеек С1, С2 превышают 0, т.е. условие неотрицательности переменных выполнено.

Ответ

Максимальная прибыль возможна в размере 375 единиц.

Объем выпуска продукции: $П_1$ - 75 штук, $П_2$ - 75 штук.

Сырье С1 иС2 израсходовано полностью, условие неотрицательности выполнено.

Порядок оформления задачи

1. Состав переменных

x_1 – количество продукции $П_1$, единиц;

x_2 – количество продукции $П_2$, единиц.

2. Числовая модель

I. $Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

II. $1x_1 + 3x_2 \le 300$

$1x_1 + 1x_2 \le 150$

III. $x_1 \ge 0$

$x_2 \ge 0$

3. Общий вид экономико-математической модели

I. $Z = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max$

II. $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2$

III. $x_j \ge 0$, (j=1, 2)

4. Структурная форма экономико-математической модели

I. $$Z = \sum_{j=1}^{2} c_j x_j \to \max$$

II. $$\sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,2$$

III. $$x_j \ge 0, \qquad j = 1,2$$

5. Ответ: **м**аксимальная прибыль возможна в размере 375 единиц;

объем выпуска продукции: $П_1$ - 75 штук, $П_2$ - 75 штук;

сырье С1 иС2 израсходовано полностью,

условие неотрицательности выполнено.

Задача 2

Для выпуска четырех видов продукции требуются затраты сырья, рабочего времени и оборудования. Исходные данные приведены в таблице.

Тип ресурса	Нормы затрат ресурсов на единицу продукции				Наличие ресурсов
	1	2	3	4	
Сырье	3	5	2	4	60
Рабочее время	22	14	18	30	400
Оборудование	10	14	8	16	128
Прибыль на единицу продукции	30	25	8	16	

Необходимо формулировать экономико-математическую модель задачи на максимум прибыли и найти оптимальный план выпуска продукции.

Задача 3

Для выпуска четырех видов продукции P_1, P_2, P_3, P_4 на предприятии используют три вида сырья S_1, S_2 и S_3. объемы выделенного сырья, нормы расхода сырья и прибыль на единицу продукции при изготовлении каждого вида продукции приведены в таблице. Требуется определить план выпуска продукции, обеспечивающий наибольшую прибыль.

Составим экономико-математическую модель задачи оптимального использования ресурсов на максимум прибыли. В качестве неизвестных примем выпуска продукции j-го вида x_j ($j = 1,2,3,4$).

Вид сырья	Запасы сырья	Вид продукции			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	35	4	2	2	3
S_2	30	1	1	2	3
S_3	40	3	1	2	1
Прибыль		14	10	14	11

Задача 4

Фабрика выпускает три вида тканей, причем суточное плановое задание составляет не менее 90 м тканей первого вида, 70 м – второго и 60 м – третьего. Суточные ресурсы следующие: 780 единиц производственного оборудования,850 единиц сырья, 790 единиц электроэнергии, расход которых на один метр ткани представлен в таблица.

Ресурсы	Ткани		
	I	II	III
Оборудование	2	3	4
Сырье	1	4	5
Электроэнергия	3	4	2

Цена за один метр ткани вида I равна 80 денежным единицам, II – 70 денежным единицам, III – 60 денежным единицам.

Необходимо определить, сколько метров ткани каждого вида следует выпустить, чтобы общая стоимость выпускаемой продукции была максимальной.

Задача 5

На основании информации, приведенной в таблице, составить план производства, максимизирующий объем прибыли.

Ресурсы	Затраты ресурсов на единицу продукции		Наличие ресурсов
	А	Б	
Труд	2	4	2000
Сырье	4	1	1400
Оборудование	2	1	800
Прибыль на единицу продукции	40	60	

Задача 7

Определить оптимальное сочетание отраслей сельского хозяйства: растениеводства и животноводства, таким образом, чтобы получить максимальный выход товарной продукции (в качестве товарной - выступает продукция отрасли животноводства). Вся продукция отрасли растениеводства идет на корм скоту.

Производственные ресурсы:

пашня – 8000 га

трудовые ресурсы – 7500 ч. дн
энергоресурсы – 1000 тр. смен

Урожайность зерновых 10 ц/га (содержание кормовых единиц в 1 ц – 1,2 ц к.ед.), урожайность кукурузы на силос 150 ц/га (содержание кормовых единиц в 1ц – 0,2 ц к.ед.). Годовой удой 1 коровы 2500 кг, годовой прирост 1 свиньи 0,9 ц.

Таблица 1.4 - Удельные затраты производственных ресурсов

Показатели	Затраты труда, чел. дн.	Энергетические ресурсы, тр. смены	Расход кормовых единиц на 1ц продукции, ц к.ед
На 1 га зерновых	2	0,4	-
На 1 га кукурузы	20	4,0	-
На 1 ц молока	0,1	0,01	1,2
На 1 ц прироста живой массы свиней	1,5	0,02	7,0

Цена реализации 1 ц продукции:
- зерна – 8 руб.,
- силоса – 1 руб.,
- молока – 18 руб.,
- прирост свиней – 120 руб.

Валовое производство продукции животноводства равно произведению продуктивности животных (прирост живой массы от 1 головы, удой от 1 коровы) на поголовье.

Задача 8

Определить оптимальное сочетание отраслей сельского хозяйства: растениеводства и животноводства так, чтобы получить максимальный выход товарной продукции (в качестве товарной - выступает продукция отрасли животноводства – мясо КРС и свиней, молоко; продукция отрасли растениеводства – зерно). На корм идет 20% валового сбора зерна и весь силос.

Производственные ресурсы:
- пашня – 10000 га,
- трудовые ресурсы – 85000 ч. дн,
- энергоресурсы – 15000 тр. смен,
- пастбища – 1500 га.

Урожайность зерновых 20 ц/га (содержание кормовых единиц в 1 ц – 1,2 ц к.ед.), кукурузы на силос - 150 ц/га (содержание кормовых единиц в 1ц – 0,2 ц к.ед.). С 1 га естественных пастбищ возможно получение 5 ц к.ед. Годовой удой 1 коровы 2500 кг, прирост живой массы 1 коровы – 2,5 ц, свиньи – 0,9 ц.

Таблица 1.5 - Удельные затраты производственных ресурсов

Показатели	Затраты труда, чел. дн.	Энергетические ресурсы, тр. смены	Расход кормовых единиц на 1ц продукции, ц к.ед
На 1 га зерновых	2,1	0,4	-
На 1 га кукурузы	20	4,0	-
На 1 ц молока	0,1	0,01	1,2
На 1 ц прироста живой массы КРС	2,0	0,01	5,0
На 1 ц прироста живой	1,5	0,02	7,0

массы свиней			
На 1 га естественных пастбищ	0,8	0,01	-

Цена реализации 1 ц продукции: зерна – 8 руб., силоса – 1 руб., молока – 16 руб., прироста КРС – 120 руб., прироста свиней – 80 руб.
Продать государству: зерна не менее 2600 ц, молока не менее – 800 ц, мяса – 150 ц.

Задача 9

Определить оптимальное сочетание отраслей сельского хозяйства: растениеводства и животноводства таким образом, чтобы получить максимальный выход товарной продукции (в качестве товарной - выступает продукция отрасли животноводства – мясо КРС и свиней, молоко; продукция отрасли растениеводства – зерно).

Производственные ресурсы: пашня – 10000 га,
трудовые ресурсы – 85000 ч. дн,
энергоресурсы – 15000 тр. смен,
пастбища – 1500 га.
Возможная распашка естественных пастбищ до 400 га.

Урожайность зерновых 20 ц/га (содержание кормовых единиц в 1 ц – 1,2 ц к.ед.), кукурузы на силос - 150 ц/га (содержание кормовых единиц в 1ц – 0,2 ц к.ед.). С 1 га естественных пастбищ возможно получение 5 ц к.ед. Годовой удой 1 коровы 2500 кг, прирост живой массы 1 коровы – 2,5 ц, свиньи – 0,9 ц. Содержание кормовых единиц в 1ц молока, которое идет на корм - 0,4 ц к.ед.

Таблица 1.6 - Удельные затраты производственных ресурсов

Показатели	Затраты труда, чел. дн.	Энергетические ресурсы, тр. смены	Расход кормовых единиц на 1ц продукции, ц к.ед
На 1 га зерновых	2,1	0,4	-
На 1 га кукурузы	20	4,0	-
На 1 ц молока	0,1	0,01	1,2
На 1 ц прироста живой массы КРС	2,0	0,01	5,0
На 1 ц прироста живой массы свиней	1,5	0,02	7,0
На 1 га естественных пастбищ	0,8	0,01	-
На 1 га освоения пастбищ	1,5	1,2	-

Структура использования продукции:
а) зерна: продажа государству – 40%,
на корм скоту – 50%,
прочая реализация – 10%.
б) молока: продажа государству – 80%,
на корм скоту – 10%,
прочая реализация – 10%.
в) мяса: продажа государству – 90%,

на внутрихозяйственные нужды – 10 %.

Планировать продажу продукции государству не менее: зерна – 12000 ц, молока – 1200 ц, мяса – 800 т.

Цена реализации государству 1 ц продукции : зерна – 8 руб., молока – 18 руб., прироста КРС – 180 руб., прироста свиней – 120 руб.

Прочая цена реализации 1 ц продукции : зерна – 9 руб., молока – 19 руб., прироста КРС – 190 руб., прироста свиней – 130 руб.

2.2.3 Результаты и выводы:

Оптимальная специализация и сочетание отраслей в сельскохозяйственных предприятиях предполагает такие количественные соотношения между отдельными отраслями, которые позволяют эффективно использовать землю, труд и технику, то есть получить максимум продукции при данных ресурсах и обеспечить минимум затрат на единицу продукции.

2.3 Практическое занятие 4,5 (4 часа)

Тема: «Транспортная задача»

2.3.1 Задание для работы:

1. Освоить этапы построения модели транспортной задачи
2. Построение модели и ее математическая запись. Символика обозначений
3. Использование табличного редактора Excel для решения задач транспортного типа
4. Анализ и экономическая интерпретация полученных результатов.

2.3.2 Краткое описание проводимого занятия:

Среди проблем, для исследования которых успешно применяется линейное программирование, важное значение имеет так называемая транспортная задача.

Общая постановка этой задачи применительно к экономической проблеме экономии издержек производства формулируется так: имеется несколько пунктов назначения (предприятий, потребителей); требуется перевезти некоторое количество однородного товара из различных пунктов отправления в несколько пунктов назначения; каждый из поставщиков может выделить только определенное количество единиц товара и каждому потребителю требуется также определенное количество единиц этого товара; известны расстояния или стоимости перевозки единицы товара от каждого поставщика к каждому потребителю. Задача состоит в том, чтобы найти такие маршруты перевозок, из всех возможных связей поставщиков и потребителей, при которых общие транспортные расходы были минимальными.

Транспортная задача может быть решена с помощью одного из распределительных методов. С помощью алгоритма транспортной задачи решаются многие экономические задачи, не имеющие характера перевозок, но условия которых укладываются в модель транспортной задачи (распределение посевных площадей, составление различных смесей, размещение предприятий, раскрой материалов и т.д.).

В общей постановке транспортная задача выглядит следующим образом.

Имеется n пунктов отправления с запасами b_i единиц груза в каждом. Имеется m пунктов назначения с потребностями в грузах b_j . Стоимость перевозки одной единицы груза по соответствующему маршруту равна c_{ij}.

Для записи модели транспортной задачи примем следующие обозначения:

b_i - наличие груза у i-го поставщиков (i = 1, 2, 3, …, m);

a_j - потребность j-го потребителя (j= 1, 2, 3, …, n);

c_{ij} – стоимость перевозки единицы груза от i-го поставщика к j-му потребителю.

Матрица $(c_{ij})_{m*n}$ называется матрицей тарифов (издержек или транспортных расходов).

Планом транспортной задачи называется матрица $X = (x_{ij})_{m*n}$, где каждое число x_{ij} обозначает количество единиц груза, которое надо доставить из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения. Матрица X называется еще матрицей перевозок. Чаще всего матрицы тарифов и перевозок совмещают в одну двойную матрицу (таблица 3.1).

Таблица 3.1 – Общий вид транспортной матрицы

Поставщики	Потребители					Запасы, [ед.прод.]
	1	*2*	*3*	…	*n*	
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	…	c_{1n} x_{1n}	b_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	…	c_{2n} x_{2n}	b_2
3	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	…	c_{3n} x_{3n}	b_3
…	…	…	…	…	…	…
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{m3} x_{m3}	…	c_{mn} x_{mn}	b_n
Потребность в грузе [ед.прод.]	a_1	a_2	a_3	…	a_n	

Этапы построения модели транспортной задачи

1. Проверка сбалансированности задачи.
2. Определение переменных.
3. Построение сбалансированной транспортной матрицы.
4. Задание целевой функции.
5. Задание ограничений.
6. Решение задачи в Excel.
7. Анализ результатов решения задачи.

Исходные параметры модели транспортной задачи

a) m – количество пунктов отправления, n – количество пунктов назначения.
b) b_i – запас продукции в пункте отправления ($i = 1, 2, 3, \ldots, m$);
c) a_j – спрос на продукцию в пункте назначения ($j = 1, 2, 3, \ldots, n$);
d) c_{ij} – тариф (стоимость) перевозки единицы продукции из i-го пункта отправления в j-ый пункт назначения.

Если наличие грузов и потребности равны между собой, то задача является закрытой (сбалансированной)

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{i=1}^{m} b_i\,. \tag{3.1}$$

Если наличие грузов и потребностей не совпадают между собой, задача является открытой (несбалансированной)

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \neq \sum_{i=1}^{m} b_i\,. \tag{3.2}$$

В случае, когда *суммарные запасы превышают суммарные потребности*, необходим дополнительный фиктивный пункт потребления, который будет формально потреблять существующий излишек запасов, то есть

$$a_ф = \sum_{i=1}^{m} b_i - \sum_{j=1}^{n} a_j \ . \qquad (3.3)$$

Если *суммарные потребности превышают суммарные запасы*, то необходим дополнительный *фиктивный* пункт отправления, формально восполняющий существующий недостаток продукции в пунктах отправления:

$$b_ф = \sum_{j=1}^{n} a_j - \sum_{i=1}^{m} b_i \ . \qquad (3.4)$$

Искомые параметры модели транспортной задачи

1. x_{ij}– количество продукции, перевозимой из i-го пункта отправления в j-ый пункт назначения. Если по условию задачи введен фиктивный поставщик или потребитель, то необходимо ввести фиктивные переменные, которые обозначаются $x_{ij}^{ф}$.

2. $F(X)$ – транспортные расходы на перевозку всей продукции [руб.].

Задача сводится к тому, чтобы отыскать неотрицательные значения x_{ij} , при которых:

I. Целевая функция стремится к минимуму

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \ . \qquad (3.5)$$

Введение фиктивного потребителя или отправителя повлечет необходимость формального задания *фиктивных* тарифов $c_{ij}^{ф}$ (реально не существующих) для фиктивных перевозок. Поскольку нас интересует определение наиболее выгодных *реальных* перевозок, то необходимо предусмотреть, чтобы при решении задачи (при нахождении опорных планов) *фиктивные* перевозки не рассматривались до тех пор, пока не будут определены все реальные перевозки. Для этого надо фиктивные перевозки сделать невыгодными, то есть дорогими, чтобы при поиске решения задачи их рассматривали в самую последнюю очередь. Таким образом, величина фиктивных тарифов должна превышать максимальный из реальных тарифов, используемых в модели, то есть

$$c_{ij}^{ф} > \max c_{ij} \ \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right). \qquad (3.6)$$

<u>II. Необходимо выполнение следующих основных условий:</u>

от каждого поставщика можно вывести столько груза, сколько у него имеется, то есть сумма искомых перевозок от каждого поставщика равна наличию у них груза (условия вывоза всех грузов из пунктов отправления)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i \ ; \qquad (3.7)$$

каждому потребителю можно перевезти необходимое ему количество груза, то есть сумма искомых объемов перевозок равна потребности потребителей (условия полного удовлетворения потребностей потребителей)

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_j \ ; \qquad (3.8)$$

III. Условия неотрицательности переменных, исключающие обратные перевозки

$$\forall x_{ij} \ge 0 \quad \left(i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}\right). \qquad (3.9)$$

Ограничения модели (3.7, 3.8, 3.9) могут быть выполнены только при сбалансированной задаче.

Если условие задачи таково, что в результате ее решения искомые переменные должны будут иметь целые значения, то необходимо введение дополнительного условия целочисленности:

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ, НА ОСНОВЕ СТАНДАРТНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Кроме основных условий, в транспортных задачах может встретиться ряд дополнительных, ограничивающих количественные связи между отдельными потребителями и поставщиками. Характер этих ограничений и способы решения задачи при наличии дополнительных ограничений заключаются в следующем.

1. Полное отсутствие связи между поставщиком и потребителем, то есть $x_{ij} = 0$. Это означает, что в данной клетке матрицы искомый объем перевозок должен быть равен нулю. Оценка переменной завышается на большую величину, обычно обозначаемую буквой М, и «попадание» груза в эту клетку нежелательно, так как целевая функция всегда стремиться к минимуму.

2. Наличие частной заранее фиксированной связи между поставщиками и потребителями, то есть $x_{ij} = q$, искомый объем перевозок от i-го поставщика к j-му потребителю должен быть строго равен q. До начала решения задачи от соответствующего поставщика и потребителя вычитается величина q, затем в соответствующую клетку пересечения поставщика и потребителя записывается завышенная оценка М и задача решается обычным методом.

3. $x_{ij} > q$, то есть искомый объем перевозок от i-го поставщика к j-му потребителю должен быть не меньше величины q. До начала решения от соответствующего поставщика и потребителя вычитается величина q, затем задача решается обычным путем.

Модель транспортной задачи позволяет решать любые задачи, в которых параметры имеют одинаковые единицы измерения. Такие модели называются однопродуктовыми. К ним можно отнести задачу оптимизации использования машинно-тракторного парка в отдельные агротехнические сроки, задачу оптимального размещения посевов сельскохозяйственных культур по участкам с различным плодородием почв и т.д.

Упражнения

Задача 1

Требуется перевезти одноименный груз из трех пунктов отправления в три пункта назначения. Количество грузов, подлежащих отправлению с каждого склада, потребности в них каждого потребителя и расстояния в километрах от каждого пункта отправления в каждый пункт назначения приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2 – Расстояния перевозки, км

Поставщики	Потребители			Наличие грузов, т
	1	2	3	
1	15	17	23	900
2	9	19	8	800
3	24	21	32	550
Потребность в грузах, т	700	800	750	2250 / 2250

Нужно определить, из какого пункта отправления следует удовлетворять спрос потребителей, чтобы общая сумма объема перевозок (ткм) была минимальной.

Решение:

1. Проверка сбалансированности задачи

Просуммируем наличие грузов у поставщиков

$$\sum_{i=1}^{3} b_i = 900+800+550=2250$$

Просуммируем потребности потребителей в грузах

$$\sum_{j=1}^{3} a_j = 700+800+750=2250$$

$\sum_{i=1}^{3} b_i = \sum_{j=1}^{3} a_j$, следовательно, задача сбалансированная (закрытого типа).

2. Определение переменных

Обозначим через x_{ij} [т] количество грузов, которые будут перевезены от i-го поставщика j-му потребителю.

3. I. Целевая функция

Формальная целевая функция имеет вид:

$$\begin{aligned} F(X) = 15x_{11} + 17x_{12} + 23x_{13} + \\ + 9x_{21} + 19x_{22} + 8x_{23} + \\ + 24x_{31} + 21x_{32} + 32x_{33} \to \min \end{aligned}$$

II. Основные ограничения

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 900, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 800, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 550, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 700, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 800, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 750. \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности

$$\forall x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,3}\right).$$

4. Модель задачи в общем виде:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad F(X) = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + \\ + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + \\ + c_{31}x_{31} + c_{32}x_{32} + c_{33}x_{33} \to \min \end{aligned}$$

$$II.\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = b_1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = b_2, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = b_3, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = a_1, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = a_2, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = a_3. \end{cases}$$

$$III. \quad \forall x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,3}\right)$$

5. Модель задачи в структурной форме:

$$I. \quad F(x) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

$$II. \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = b_i, \quad i = \overline{1,3} \\ \sum_{i=1}^{3} x_{ij} = a_j, \quad j = \overline{1,3} \end{cases},$$

$$III. \forall x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,3}\right)$$

6. Для решения данной задачи в Excel необходимо:

1) под запись целевой функции отвести ячейку A1;
2) под запись ограничений – ячейки столбца B (количество ячеек совпадает с количеством ограничений): B1, B2, B3, B4, B5, B6;
3) под запись искомых переменных отвести ячейки столбцов C, D, E (количество потребителей совпадает с количеством столбцов,
количество поставщиков – с количеством строк).

**Примечание:* искомые переменные x_{ij} будут находиться в следующих ячейках:
($x_{11} \to C1 \quad x_{12} \to D1 \quad x_{13} \to E1$
$x_{21} \to C2 \quad x_{22} \to D2 \quad x_{23} \to E2$
$x_{31} \to C3 \quad x_{31} \to D2 \quad x_{33} \to E3$).

<u>Порядок выполнения работы:</u>

1. Ввести в ячейку A1 формулу целевой функции (рисунок 3.1):
=15*C1+17*D1+23*E1+
+ 9*C2+19*D2 + 8*E2+
+24*C3+21*D3+32*E3;

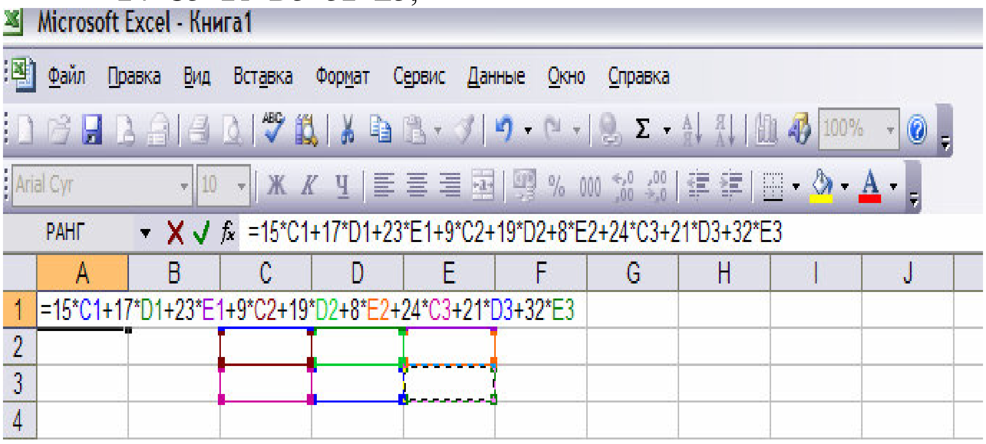
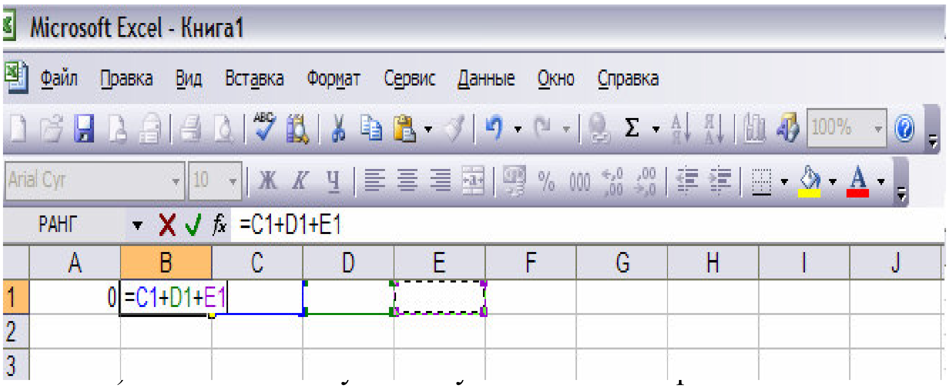


Рисунок 3.1 – Ввод целевой функции в Excel

2. а) Ввести в ячейку B1 левую часть 1-го ограничения: = C1+D1+E1 (рисунок 3.2)



= C2+D2+E2
в) Ввести в ячейку B3 левую часть 3-го ограничения:
= C3+D3+E3
г) Ввести в ячейку B4 левую часть 4-го ограничения:
= C1+C2+C3
д) Ввести в ячейку B5 левую часть 5-го ограничения:
= D1+D2+D3
е) Ввести в ячейку B6 левую часть 6-го ограничения:
= E1+E2+E3

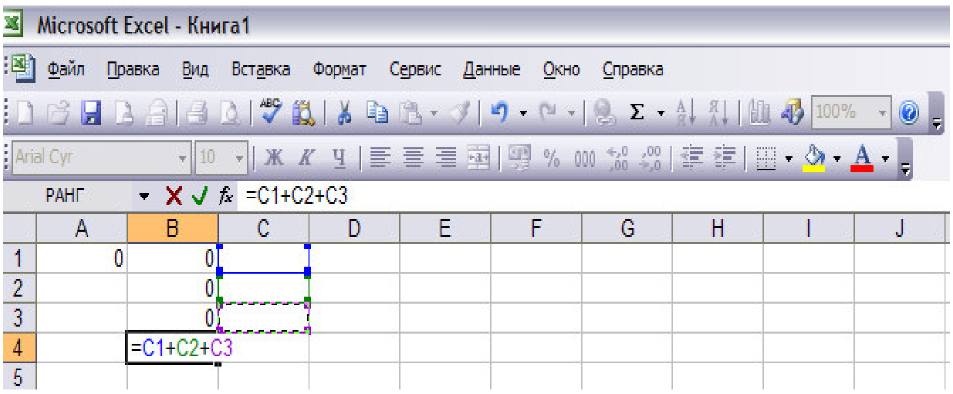


Рисунок 3.3 – Ввод ограничений в Excel

3. На панели инструментов выбрать опцию "Сервис", а в ней вкладку "Поиск решения"

Примечание

Если "Поиск решения" отсутствует, нужно выполнить команду "Сервис"–"Надстройки". В окне диалога "Надстройки" нужно установить флажок напротив строки "Поиск решения".

4. В окне диалога "Поиск решения" в поле ввода "Установить целевую ячейку" нужно ввести ссылку на ячейку A1. Необходимо выбрать способ адресации ячеек в абсолютной системе координат (т.е. указать не A1, а $A$1). Также нужно поступать с другими переменными.

5. В окне диалога "Поиск решения" нужно установить переключатель (рисунок 3.4).

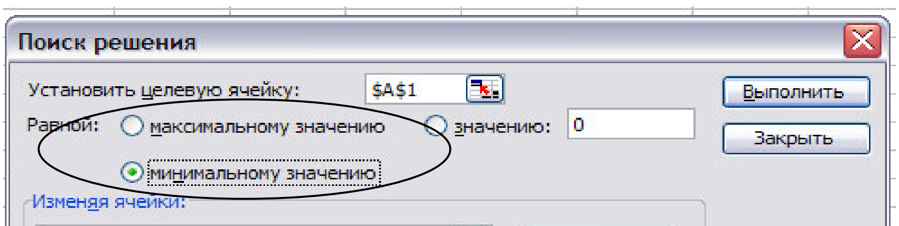


Рисунок 3.4 – Работа в диалоговом окне «Поиск решения»

6. В поле ввода "Изменяя ячейки" нужно указать ссылки на ячейки, содержащие искомые переменные, т.е. диапазон ячеек $C$1: $E$3 (рисунок 3.5).

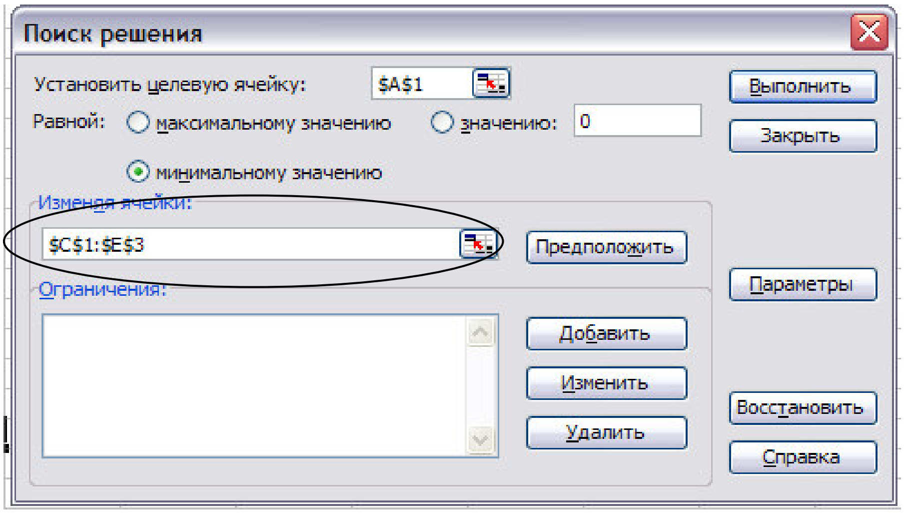


Рисунок 3.5 – Поле ввода ячеек, обозначающих искомые переменные

7. В поле ввода "Ограничения" при нажатии кнопки "Добавить" появляется окно диалога "Добавить ограничения". В поле ввода "Ссылка на ячейку" вводится $B$1. В поле ввода "Ограничение" вводится = и число 900. При помощи кнопки "Добавить" таким же образом вводятся все остальные ограничения (ячейки $B$2:$B$6) (рисунок 3.6).

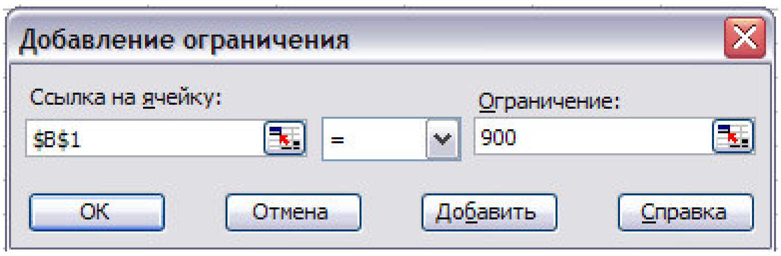


Рисунок 3.6 – Диалоговое окно «Добавление ограничения»

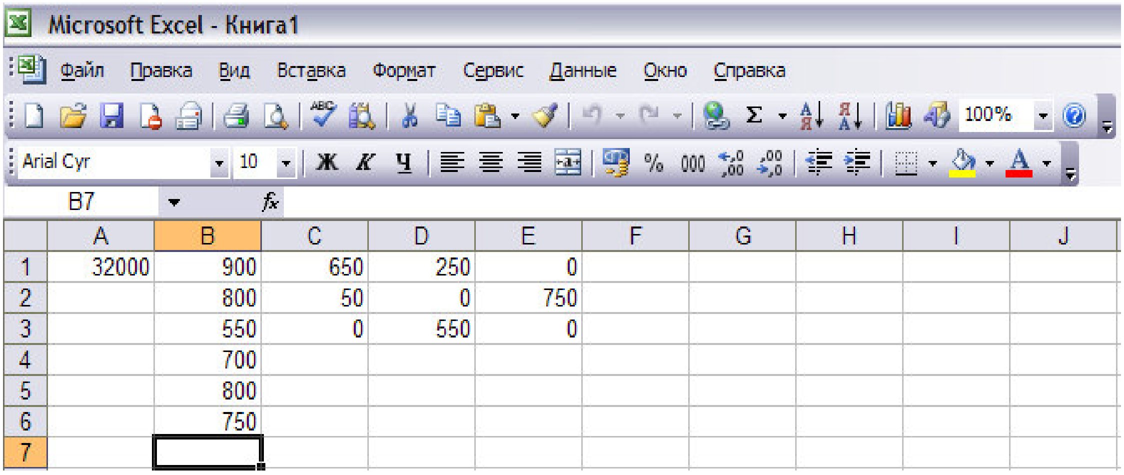
8. Для ввода ограничений на неотрицательность искомых переменных в окне диалога "Добавить ограничения" в поле ввода "Ссылка на ячейку" нужно ввести ссылку на ячейку $C$1, а в поле ввода "Ограничения" нужно ввести >= и число 0. При помощи кнопки "Добавить" таким же образом вводятся условия неотрицательности оставшихся искомых переменных. Либо выделяется диапазон ячеек $C$1: $E$3 и задается >= и число 0. После ввода последнего ограничения нажмите «ОК».

Примечание

Если в задаче имеется условие целочисленности искомых переменных, то в диалоговом окне «Добавление ограничений» в поле ввода "Ссылка на ячейку" нужно ввести ссылку на ячейку $C$1, а в поле ввода знака ограничения нужно ввести «цел». При помощи кнопки "Добавить" таким же образом вводятся условия целочисленности оставшихся искомых переменных. Либо выделяется диапазон ячеек $C$1: $E$3 и задается «цел». После ввода последнего ограничения нажмите «ОК».

После нажатия кнопки "Выполнить" Excel рассчитывает результат и открывает окно диалога "Результаты поиска решения". В этом диалоге в окне "Тип отчета" нужно выбрать

"Результаты" и нажать Ok. Перед листом, где записана постановка задачи, будет вставлен лист "Отчет по результатам 1", а на экране будет выдан результат решения задачи (рисунок 3.7).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	32000	900	650	250	0					
2		800	50	0	750					
3		550	0	550	0					
4		700								
5		800								
6		750								
7										

Рисунок 3.7 – Результаты решения задачи

Интерпретация результатов задачи

Полученные значения в ячейках, содержащих формулы целевой функции и ограничений, являются результатом расчета целевой функции и соответствующих ограничений.

Результат, полученный в ячейке А1, означает общую сумму объема грузоперевозок в ткм.

Ячейки В1, В2, В3 показывают выполнение условия полного вывоза груза от поставщика. Ячейки В4, В5, В6 показывают выполнение условия полного удовлетворения потребностей потребителя.

Значения ячеек в диапазоне $C$1: $E$3 показывают количество груза (в т), перевезенного от соответствующего поставщика, соответствующему потребителю. Значения данного диапазона превышают 0, следовательно условие неотрицательности искомых переменных выполнено.

Ответ

Оптимальные перевозки грузов предусматривают перевозку от 1-го поставщика 1-му потребителю 650 т, от 1-го поставщика 2-му потребителю – 250 т, от 2-го поставщика 1-му потребителю – 50 т, а 3-му потребителю – 750 т. 3-й поставщик отвезет свой груз только 2-му потребителю в количестве 550 т. Минимальный объем перевозок составит 32000 т км.

Порядок оформления задачи

1. Проверка сбалансированности задачи

$$\sum_{i=1}^{3} b_i = 900+800+550=2250$$

$$\sum_{j=1}^{3} a_j = 700+800+750=2250$$

$$\sum_{i=1}^{3} b_i = \sum_{j=1}^{3} a_j \text{, задача закрытого типа}$$

2. Состав переменных

x_{ij}– количество продукции (т), перевозимой из i-го пункта отправления в j-ый пункт назначения

3. Числовая модель

$$\text{I.}\quad \begin{aligned} F(X) = {} & 15x_{11} + 17x_{12} + 23x_{13} + \\ & + 9x_{21} + 19x_{22} + 8x_{23} + \\ & + 24x_{31} + 21x_{32} + 32x_{33} \to \min \end{aligned}$$

$$\text{II.}\quad \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 900, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 800, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 550, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 700, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 800, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 750. \end{cases}$$

$$\text{III.}\quad \forall x_{ij} \ge 0 \quad \left(i = \overline{1,3};\quad j = \overline{1,3}\right).$$

4. Общий вид экономико-математической модели

$$\text{I.}\quad \begin{aligned} F(X) = {} & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + \\ & + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + \\ & + c_{31}x_{31} + c_{32}x_{32} + c_{33}x_{33} \to \min \end{aligned}$$

$$II.\quad \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = b_1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = b_2, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = b_3, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = a_1, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = a_2, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = a_3. \end{cases}$$

$$III.\quad \forall x_{ij} \ge 0 \quad \left(i = \overline{1,3};\quad j = \overline{1,3}\right).$$

5. Структурная форма экономико-математической модели

$$I.\quad F(x) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

$$II.\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = b_i, \quad i = \overline{1,3} \\ \sum_{i=1}^{3} x_{ij} = a_j, \quad j = \overline{1,3} \end{cases},$$

$$III.\ \forall x_{ij} \ge 0 \quad \left(i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,3}\right).$$

6. Ответ: Минимальный объем перевозок составит 32000 т км. При этом матрица грузоперевозок будет выглядеть следующим образом:

$$X = \begin{pmatrix} 650 & 250 & 0 \\ 50 & 0 & 750 \\ 0 & 550 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 2

Составить план перевозки картофеля из 3 хозяйств 4 магазинам так, чтобы сумма расстояний на перевозку была минимальной. Наличие картофеля, потребность магазинов и расстояние от хозяйств до магазинов приведены в таблице 3.3.

Таблица 3.3 – Расстояния перевозок, км

Хозяйства	Магазин				Запасы, т
	1	2	3	4	
1	8	6	9	2	280
2	4	5	4	5	520
3	3	4	6	4	400
Потребности, т	300	250	340	210	

Задача 3

Составьте план перевозок нефтепродуктов из 3-х пунктов отправления в 4 пункта назначения. План должен обеспечить минимальные транспортные издержки и полностью удовлетворить спрос потребителей на нефтепродукты. Запас, потребности и стоимость перевозки 1т нефтепродуктов приведены в таблице 3.4.

Таблица 3.4 – Стоимость перевозок, руб.

Пункт отправления	Пункты назначения				Запасы, т
	1	2	3	4	
1	9	7	5	3	175
2	1	2	4	6	125
3	8	10	12	1	140
Потребности, т	180	110	60	40	

Задача 4

Четырем предприятиям необходимо сырье в количестве 110, 100, 80 и 40 т соответственно. Запасы сырья сосредоточены в трех пунктах хранения в количестве 90, 100 и 140 т соответственно. Известна матрица С расстояний между пунктами хранения и предприятиями. Нужно составить план перевозок сырья так, чтобы общий объем перевозок (т-км) был минимальным.

$$C = \begin{pmatrix} 20 & 40 & 60 & 100 \\ 10 & 30 & 70 & 40 \\ 40 & 80 & 130 & 70 \end{pmatrix}$$

Задача 7

Требуется перевезти однородный груз из трех пунктов отправления в три пункта назначения. Качество груза, подлежащих отправлению с каждого склада, потребности в нем каждого потребителя и расстояния перевозки от каждого пункта отправления до каждого пункта назначения приведены в таблице 3.8.

Таблица 3.8 – Расстояние перевозок, км

Поставщики	Потребители			Наличие, т
	1	2	3	
I	15	17	23	900
II	9	19	8	800
III	24	21	32	550
Потребность, т	500	700	650	

Необходимо составить оптимальный план перевозок, так чтобы объем транспортных работ (т км) был минимальным. При этом обязательна поставка от первого поставщика первому потребителю установлена в количестве 300т, второй поставщик должен поставить второму потребителю не менее 200т, а первый поставщик третьему – не более 400т.

Задача 8

Необходимо составить оптимальный план проведения весенне-полевых работ, для имеющейся техники в хозяйстве. Объем работ в гектарах мягкой пахоты, производительность имеющейся техники за период (гектары мягкой пахоты), затраты на единицу работы представлены в таблице 3.9.

Таблица 3.9 – Затраты на 1 га мягкой пахоты, руб.

Виды работ	Марки тракторов				Объем работ, га м. п.
	ДТ–75М	МТЗ-821	Т - 4А	ДТ-175С	
Раннее боронование зяби	5,5	5,7	5,8	5,9	210
Предпосевная культивация	4,8	5,0	5,7	6,0	1000
Посев яровых зерновых	5,5	5,7	5,8	5,9	75
Боронование озимой пшеницы	5,1	6,5	6,4	7,0	135
Прикатывание	*M*	5,4	5,3	5,6	40
Объем работ, га м. п.	470	400	270	320	

Затраты на проведение весенне-полевых работ должны быть минимальными.

Ответы

№2 $X = \begin{pmatrix} 0 & 70 & 0 & 210 & 0 \\ 0 & 80 & 340 & 0 & 100 \\ 300 & 100 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad F(x) = 3900$

$$\textbf{№3}\;\; X=\begin{pmatrix} 0 & 110 & 60 & 0 & 5 \\ 125 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 55 & 0 & 0 & 40 & 45 \end{pmatrix} \qquad F(x)=1675$$

$$\textbf{№4}\;\; X=\begin{pmatrix} 10 & 0 & 80 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 100 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix} \qquad F(x)=14800$$

$$\textbf{№6}\;\; X=\begin{pmatrix} 4503 & 981 & 2884 & 0 & 817 \\ 0 & 0 & 0 & 2800 & 2783 \\ 0 & 1114 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 65 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad F(x)=330608{,}2$$

$$№7\;\; X=\begin{pmatrix} 300 & 500 & 51 & 49 \\ 1 & 200 & 599 & 0 \\ 199 & 0 & 0 & 351 \end{pmatrix} \qquad F(x)=27550$$

$$\textbf{№8}\;\; X=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 210 \\ 335 & 400 & 232 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 75 \\ 135 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 38 & 2 \end{pmatrix} \qquad F(x)=7711$$

2.3.3 Результаты и выводы:

Общая постановка этой задачи применительно к экономической проблеме экономии издержек производства формулируется так: имеется несколько пунктов назначения (предприятий, потребителей); требуется перевезти некоторое количество однородного товара из различных пунктов отправления в несколько пунктов назначения; каждый из поставщиков может выделить только определенное количество единиц товара и каждому потребителю требуется также определенное количество единиц этого товара; известны расстояния или стоимости перевозки единицы товара от каждого поставщика к каждому потребителю. Задача состоит в том, чтобы найти такие маршруты перевозок, из всех возможных связей поставщиков и потребителей, при которых общие транспортные расходы были минимальными.