ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Моделирование финансовых рынков

Направление подготовки Финансы и кредит

Магистерская программа Инвестиционный менеджмент

Форма обучения заочная

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.1 Лекция № 1 (2 часа)

Тема: Классификация подходов, используемых в моделировании на финансовых рынках

1.1.1 Вопросы лекции:

1. Статистическое моделирование
2. Корреляционные и регрессионные модели
3. Оптимизационные модели
4. Равновесные модели
5. Факторные модели
6. Сценарное моделирование
7. Симуляционные модели

1.1.2 Краткое содержание вопросов:

2.1 Статистическое моделирование

В практике моделирования систем наиболее часто приходится иметь дело с объектами, которые в процессе своего функционирования содержат элементы стохастичности или подвергаются стохастическим воздействиям внешней среды. Поэтому основным методом получения результатов с помощью имитационных моделей таких стохастических систем является метод статистического моделирования на ЭВМ, использующий в качестве теоретической базы предельные теоремы теории вероятностей.

На этапе исследования и проектирования систем при построении и реализации машинных моделей (аналитических и имитационных) широко используется метод статистических испытаний (Монте-Карло), который базируется на использовании случайных чисел, т. е. возможных значений некоторой случайной величины с заданным распределением вероятностей. Большинство экономико-математических моделей характеризуются статическим подходом к изучению экономики, когда ее состояние изучается на заданный момент времени. Под статической экономической системой понимается такая система, координаты которой на изучаемом отрезке времени могут рассматриваться как постоянные. Соответственно, при формулировке статической экономико-математической модели предполагается, что все зависимости относятся к одному моменту времени, а моделируемая система неизменна во времени. При этом полностью игнорируются возможные (а подчас даже неизбежные) изменения, поскольку их учет не требуется для достижения цели моделирования. Кроме того, предполагается, что все интересующие процессы, происходящие в системе, не требуют при своем описании развертывания во времени, т. к. могут быть с достаточной степенью точности охарактеризованы независящими от времени величинами, как известными, так и неизвестными. Поэтому в статической модели время не вводится явно. Статические модели характеризуют моделируемую систему на какой-либо фиксированный момент времени. Такой момент может представлять целый временной интервал, как правило, в качестве его конечной, средней или начальной точки, в течение которого система предполагается неизменной.

Большинство экономико-математических моделей являются статическими. Эта точка зрения настолько укоренилась в сознании большинства экономистов, что практически всегда модель считается статической, а если это не так, то только тогда указывается, что модель является динамической. В самом деле, к статическим моделям естественно приводят самые разнообразные задачи экономического анализа и планирования, которые допускают постановку проблемы при жестко фиксированной структуре моделируемой системы. Поскольку статические модели в формализованном виде не содержат фактора времени, они всегда проще, чем динамические модели тех же экономических систем, с той или иной степенью полноты учитывающих этот фактор. Поэтому для экономико-математического моделирования типична ситуация, когда сначала разрабатываются статические модели, а затем они усложняются введением фактора времени, т. е. преобразуются в динамические. В частности, статическими первоначально были модели межотраслевого баланса, разнообразные модели, сводимые к транспортной задаче и распределительной задаче линейного программирования, к задачам о потоках в сетях и т. д. Впоследствии для всех этих моделей были разработаны динамические аналоги и обобщения. Однако усложнение далеко не всегда оказывается продуктивным даже в тех случаях, когда динамический аспект моделируемой системы небезразличен для цели моделирования.

В статических моделях можно выделить группу макроэкономических моделей. К ним относятся модели народно-хозяйственного уровня, которые предназначены для описания больших секторов экономики или экономики страны в целом. Целью макроэкономического моделирования является изучение экономических законов, связывающих наиболее важные и содержательные показатели. В целом, разработанные к настоящему времени математические модели народного хозяйства можно условно разбить на две большие группы: модели экономического роста (часто это динамические модели); межотраслевые балансовые модели.

2.2 Корреляционные и регрессионные модели

Корреляционно-регрессионный анализ используется для исследования форм связи, устанавливающих количественные соотношения между случайными величинами изучаемого процесса. В социально-экономическом прогнозировании этот метод применяют для построения условных прогнозов и прогнозов, основанных на оценке устойчивых причинно-следственных связей. При этом значение независимой переменной (х) нам известно по предположению. В процессе прогнозирования оно может быть использовано нами для оценки зависимой переменной (у). Функция регрессии показывает, каким будет в среднем значение переменной (у), если переменные (х) примут конкретное значение.

Переменная (у) характеризующая результат, формируется под воздействием других переменных и факторов. Поэтому она всегда стохастична (случайна) по природе. Переменные (х) - объясняющие переменные характеризуют причину. Они поддаются регистрации, а часть из них — планированию и регулированию. Значения ряда переменных (х) могут характеризовать внутренние элементы системы или задаваться «извне» прогнозируемой системы.

По своей природе объясняющие переменные могут быть случайными и неслучайными. Регрессионные остатки - это латентные (скрытые) случайные компоненты, влияющие на (у), а также случайные ошибки в измерении анализируемых результирующих переменных.

В зависимости от количества исследуемых переменных различают парную и множественную корреляцию. Парная корреляция — корреляционные связи между двумя переменными. Примерами парной корреляции могут служить зависимости между уровнем образования и производительностью труда, между ценой товара и спросом на него, между качественными параметрами товара и ценой. Экономико-математические модели, построенные с учетом такого рода взаимосвязей, называют однофакторными моделями. Следует отметить, что в практике прогнозирования экономических явлений однофакторные модели занимают значительное место, что определяется простотой вычислительного процесса и ясностью экономической интерпретации результатов.

Множественная корреляция — корреляционные взаимосвязи между несколькими переменными. В качестве ее примеров можно привести зависимость спроса на товар от цены, уровня доходов населения, расходов на рекламу; зависимость объема выпускаемой продукции от размера инвестиций, технического уровня оборудования, численности занятых в процессе производства. Примером использования корреляционной зависимости для прогнозирования и принятия управленческих решений могут служить кривые спроса и предложения, на основе которых строятся модели, описывающие последствия изменения цен.

2.3 Оптимизационные модели

Оптимальная или оптимизационная модель [optimization model] — экономико-математическая модель, которая охватывает некоторое число вариантов (технологических способов) производства, распределения или потребления и предназначена для выбора таких значений переменных, характеризующих эти варианты, чтобы был найден лучший из них.

В отличие от дескриптивной (описательной, балансовой) модели оптимизационная модель содержит наряду с уравнениями, описывающими взаимосвязи между переменными, также критерий для выбора — функционал (или, что то же, целевую функцию).

Оптимизационные модели — основной инструмент экономико-математических методов. Обычно они очень сложны, насчитывают сотни и тысячи уравнений и переменных. Но общая структура таких моделей проста. Она состоит из целевой функции, способной принимать значения в пределах области, ограниченной условиями задачи (области допустимых решений), и ограничений, характеризующих эти условия. Целевая функция в самом общем виде в свою очередь состоит из трех элементов: управляемых переменных, параметров (или также переменных), которые не поддаются управлению, например, зависящих от внешней среды, и формы зависимости между ними (формы функции). Если обозначить критерий оптимальности — U (в частном случае, например, — полезность), управляемые переменные — x_i и параметры — y_i, то получим общий вид оптимизационной модели:

1) $U = f(x_i, y_j) \rightarrow \max$ или $\min$, т.е. отыскивается максимум или минимум функции f (x, y) в зависимости от того, какой показатель выбран в качестве критерия;

2) $x_i = A$, $x_i > A$ или $x_i < A$ — это означает, что управляемые переменные x_i могут изменяться лишь в заданных пределах: быть равными, или больше, или меньше величин, определяемых ограничениями модели.

Оптимизационная модель — основа для решения оптимальных или оптимизационных задач.

2.4 Равновесные модели

Экономико-математическое моделирование является важным направлением исследования финансового рынка, позволяющим анализировать связи между его структурными элементами, выявлять новые тенденции, делать прогнозы динамики цен финансовых активов. К настоящему времени накоплен большой опыт моделирования как финансового рынка в целом, так и его отдельных сегментов.

Основное внимание уделено анализу макроэкономических моделей функционирования финансового рынка.

Макроэкономические модели дают возможность изучать вклад финансового рынка в общее равновесие экономической системы. Этот класс моделей получил развитие в работах Дж. Хикса и А. Хансена, основанных на методологических подходах Дж. Кейнса, изложенных в «Общей теории занятости, процента и денег».

В разработанной Дж. Хиксом макроэкономической модели IS-LM спрос на деньги представлен в кейнсианской трактовке – в виде предпочтения ликвидности. Это предполагает выбор хозяйствующими субъектами финансовых активов, исходя из их ликвидности. Предъявляя спрос на деньги как ликвидность, хозяйствующие субъекты руководствуются спекулятивным мотивом, являющимся важным элементом совокупного спроса на деньги и влияющим на процентную ставку и соответственно на результаты выбора экономическими субъектами между деньгами и прочими финансовыми активами.

Действие механизма выбора между деньгами и финансовыми активами изучено Дж. Кейнсом на примере облигаций и заключается в следующем. Хозяйствующие субъекты предпочитают хранить деньги, если их ожидаемая доходность выше ожидаемой доходности облигаций. Доходность последних складывается из двух составных частей: процентных выплат, являющихся фиксированными на весь период обращения облигации, и прироста капитала. Последний зависит от динамики рыночной процентной ставки. При повышении этих ставок цены облигаций снижаются, предопределяя потерю капитала от инвестирования в облигации. Поэтому при ожидаемом снижении процентных ставок хозяйствующие субъекты предпочтут хранить деньги на банковских счетах, а не приобретать облигации. Это ведет к повышению спроса на деньги вследствие наличия спекулятивного мотива их аккумулирования.

Однако, если экономические субъекты ожидают падения процентных ставок, они предпочтут инвестировать деньги в облигации. Снижение процентных ставок предопределит повышение цен облигаций и соответственно прирост инвестированного в них капитала. Но увеличение цен облигаций должно приводить к уменьшению спроса на деньги. Таким образом, изменения в спросе на деньги и облигации непосредственным образом сказываются на сбалансированности денежного рынка и тем самым предопределяют соответствующую корректировку макроэкономического равновесия. Следует отметить, что в данном случае формируется макроэкономическая ситуация, не рассматриваемая в стандартной модели IS-LM.

При ожидании хозяйствующими субъектами повышения процентной ставки они будут стремиться изменить структуру своих финансовых активов, снизив в них долю облигаций и увеличив долю денег на банковских счетах. В этом случае повысится спрос на деньги и снизится спрос на облигации Как и в рассмотренном выше случае, в основе действия этого механизма лежит диверсификация финансовых активов. Из выше изложенного следует вывод, что диверсификация финансовых активов оказывает непосредственное воздействие на сбалансированность экономической системы. Однако этот вывод не является обобщающим, относящимся ко всем сегментам финансового рынка, поскольку в наш анализ до сих пор не был включен такой финансовый актив, как акции. В этой связи следует проанализировать зависимость процессов ценообразования на долговые и долевые ценные бумаги.

Взаимосвязь этих процессов отчетливо проявляется при управлении стоимостью собственного и заемного капитала корпораций. Понижение процентных ставок увеличивает долю долгового финансирования в совокупных пассивах корпораций. И наоборот, рост ставок предопределяет повышение доли собственного капитала.

Многие исследователи финансового рынка увидели причину неудач традиционного моделирования в особенностях динамики финансовых показателей. В частности, значительный размах колебаний доходности финансовых активов указывал на то, что происходящие на финансовом рынке процессы не представляли собой случайного блуждания, как это ранее предполагалось. Соответственно, вероятность изменений цен финансовых активов не описывалась как нормальное распределение, изображаемое на графике в виде колокола. Исследования показали, что для процесса формирования цен финансовых активов характерны значительные и резкие изменения. Поэтому его график в отличие от графика нормального распределения находится выше оси абсцисс, и его боковые линии не стремятся к этой оси.

2.5 Факторные модели

В факторных моделях предполагается, что доходность ценной бумаги реагирует на изменения различных факторов. В случае рыночной модели предполагается, что имеется только один фактор - доходность рыночного индекса. Однако для попыток точно оценить ожидаемые доходности ценных бумаг многофакторные модели потенциально более полезны, чем рыночная модель. Это объясняется тем, что фактические (действительные) доходности по ценным бумагам оказываются чувствительными не только к изменению рыночного индекса, и в экономике, вероятно, существует более одного фактора, влияющего на доходность ценных бумаг.

Факторная модель представляет собой попытку учесть основные экономические силы, систематически воздействующие на курсовую стоимость всех ценных бумаг. При построении факторной модели неявно предполагается, что доходности по двум ценным бумагам коррелированы (т.е. изменяются согласованно) только за счет общей реакции на один или более факторов, определенных в этой модели. Считается, что любой аспект доходности ценной бумаги, не объясненный факторной моделью, является уникальным или специфическим для данной ценной бумаги и, следовательно, не коррелирован с уникальными аспектами доходностей других ценных бумаг. В результате факторная модель является мощным средством управления портфелем инвестиций. Она может дать необходимую информацию для вычисления ожидаемых доходностей, дисперсий и ковари-аций для каждой ценной бумаги. Она также может быть использована для характеристики чувствительности портфеля к изменениям факторов.

На практике все инвесторы явно или неявно применяют факторные модели. Это связано с тем, что невозможно рассматривать взаимосвязь каждой ценной бумаги с каждой другой по отдельности.

Поэтому факторные модели дают необходимый уровень абстрактности. Они предлагают инвестиционным менеджерам метод, позволяющий выделить в экономике важные факторы и оценить, насколько различные ценные бумаги и портфели инвестиций чувствительны к изменениям этих факторов.

Если принять, что доходности ценных бумаг подвержены влиянию одного или более факторов, то первоначальной целью анализа ценных бумаг является определение этих факторов и чувствительности доходностей ценных бумаг к их изменению. Формальное утверждение о существовании такой связи называется факторной моделью доходности ценных бумаг.

2.6 Сценарное моделирование

Сценарное моделирование - это один из наиболее эффективных системных инструментов стратегического менеджмента вообще и стратегического анализа в частности. Исторически сценарии возникли примерно 30 лет назад в качестве альтернативы одновариантных прогнозов будущего развития конкретных компаний.

Одновариантные прогнозы, как правило, довольно жестко задавали по существу единственную траекторию будущего развития организации. На практике они очень часто оказывались ошибочными.

Поэтому при сценарном подходе для конкретной организации стали разрабатывать несколько примерно одинаково вероятных, но значимо контрастных вариантов будущего развития ее внешней среды. Они были инструментами именно корпоративной стратегии, и в них делался акцент как раз на тех позициях, которые являлись значимыми для менеджеров организации при принятии стратегических решений.

Задача сценарного метода - выработать некоторое общее понимание в коммерческой организации, которое позволит ее персоналу согласованно действовать для достижения главных стратегических целей организации.

Метод сценариев позволяет совместить исследование чувствительности результирующего показателя с анализом вероятностных оценок его отклонений. Процедура использования данного метода в процессе анализа инвестиционных рисков включает следующие действия:

1. Определяется несколько вариантов изменений ключевых исходных показателей.
2. Каждому варианту изменений приписывается его вероятностная оценка.

3. Для каждого варианта рассчитывается вероятное значение критерия, а также оценки его отклонений от среднего значения.

4. Проводится анализ вероятностных распределений полученных результатов.

Проект с наименьшим стандартным отклонением и коэффициентом вариации считается менее рисковым.

2.7 Симуляционные модели

В современной литературе не существует единой точки зрения по вопросу о том, что понимать под симуляционным (имитационным) моделированием. Так существуют различные трактовки:

- в первой - под имитационной моделью понимается математическая модель в классическом смысле;
- во второй - этот термин сохраняется лишь за теми моделями, в которых тем или иным способом разыгрываются (имитируются) случайные воздействия;
- в третьей - предполагают, что имитационная модель отличается от обычной математической более детальным описанием, но критерий, по которому можно сказать, когда кончается математическая модель и начинается имитационная, не вводится.

К имитационному моделированию прибегают, когда:

- дорого или невозможно экспериментировать на реальном объекте;
- невозможно построить аналитическую модель: в системе есть время, причинные связи, последствие, нелинейности, стохастические (случайные) переменные;
- необходимо сымитировать поведение системы во времени.

Цель имитационного моделирования состоит в воспроизведении поведения исследуемой системы на основе результатов анализа наиболее существенных взаимосвязей между ее элементами или другими словами - разработке симулятора (англ. simulation modeling) исследуемой предметной области для проведения различных экспериментов.

Имитационное моделирование позволяет имитировать поведение системы во времени. Причём плюсом является то, что временем в модели можно управлять: замедлять в случае с быстропротекающими процессами и ускорять для моделирования систем с медленной изменчивостью. Можно имитировать поведение тех объектов, реальные эксперименты с которыми дороги, невозможны или опасны. С наступлением эпохи персональных компьютеров производство сложных и уникальных изделий, как правило, сопровождается компьютерным трёхмерным имитационным моделированием. Эта точная и относительно быстрая технология позволяет накопить все необходимые знания, оборудование и полуфабрикаты для будущего изделия до начала производства. Компьютерное 3D моделирование теперь не редкость даже для небольших компаний.

Имитационное моделирование (часто его называют методом Монте-Карло) может использоваться как один из методов оценки риска инвестиционных проектов. Он представляет собой серию численных экспериментов, призванных получить эмпирические оценки степени влияния различных факторов на некоторые зависящие от них результаты.

В общем случае проведение имитационного эксперимента можно разбить на следующие этапы.

1. Установить взаимосвязи между исходными и выходными показателями в виде математического уравнения или неравенства.
2. Задать законы распределения вероятностей для ключевых параметров модели.
3. Провести компьютерную имитацию значений ключевых параметров модели.
4. Рассчитать основные характеристики распределений исходных и выходных показателей.
5. Провести анализ полученных результатов и принять решение.

Результаты имитационного эксперимента могут быть дополнены статистическим анализом, а также использоваться для построения прогнозных моделей и сценариев.

1.2 Лекция № 2 (2 часа)

Тема: Корреляционные и регрессионные модели на финансовых рынках

1.2.1 Вопросы лекции:

1. **Корреляционный анализ взаимосвязей объектов на рынках ценных бумаг**
2. **Регрессионные модели**
3. **Модели многофакторной корреляции**
4. **Авторегрессионные модели оценки рыночного риска**

1.2.2 Краткое содержание вопросов:

2.1. Корреляционный анализ взаимосвязей объектов на рынках ценных бумаг.

Многие трейдеры имеют в своём торговом арсенале различные варианты стратегий, основанных на корреляции ценных бумаг. Часто можно услышать такие термины как: «поводырь», парный трейдинг, арбитражные стратегии. Профессионалы в основном используют арбитражные стратегии, то есть торгуют на небольших расхождениях между инструментами с высокой корреляцией. Непрофессионалы используют корреляцию по принципу поводыря или фильтра направления, то есть сделки осуществляются или вдогонку за поводырём или в направлении обоих инструментов, в случае синхронизации их движений. Во множестве случаев, между различными рынками действительно существуют взаимосвязи, но в основном нелинейного характера. Однако, на самом ли деле стратегии основанные на корреляции ценных бумаг приносят прибыль или трейдеры склонны выдавать желаемое за действительное?

Определение видов взаимосвязей величин.

Если каждому значению одной переменной соответствует определённое условное распределение другой переменной, то такая зависимость называется статистической. Если каждому значению одной переменной соответствует определённое условное математическое ожидание (среднее значение) другой, то такая зависимость называется корреляционной. Если каждому изменению одной переменной однозначно соответствует определённое значение другой величины, то такая зависимость называется функциональной.

Каждая корреляционная зависимость является статистической, но не каждая статистическая зависимость является корреляционной. Значительная корреляция между двумя случайными величинами всегда является свидетельством существования некоторой статистической связи в данной выборке, но эта связь не обязательно должна наблюдаться для другой выборки этой же случайной величины и иметь причинно-следственный характер. Часто исследователи делают ложные выводы о наличии причинно-следственных связей между парами величин, но на самом деле наличие корреляции говорит о наличие статистической взаимосвязи. Факт наличия корреляции между величинами не даёт основания утверждать, что одна из величин предшествует изменениям другой величины.

Мера корреляции.

Когда необходимо дать количественную оценку степени связи между величинами, то используется коэффициент корреляции R. Для измерения корреляции величин с количественной шкалой необходимо использовать коэффициент корреляции Пирсона. Если по меньшей мере одна из двух величин имеет порядковую шкалу, либо не является нормально распределённой, необходимо использовать ранговую корреляцию Спирмена.

Именно коэффициент ранговой корреляции мы и будем использовать для анализа корреляции ценных бумаг, так как ценам не свойственно нормальное распределение (наличие тяжёлых хвостов – выбросов), а коэффициент корреляции Спирмена инвариантен к типу распределения данных. Однако, значение коэффициента Пирсона в сравнении с коэффициентом Спирмена всегда будет завышать значение корреляции и иметь отличную динамику в моменты нестационарности (новости, срывы стопов).

Значение коэффициента меняется от −1 до +1. Положительные значения r указывают на линейную связь, при которой увеличение одной переменной связано с увеличением другой переменной, но не на наличие причинно-следственной связи. Отрицательные значения r указывают на линейную связь, при которой увеличение одной переменной связано с уменьшением другой, но не на наличие причинно-следственной связи. Нулевое значение показывает, что линейная корреляционная связь отсутствует, а линии регрессии параллельны осям координат.

Еще важно обратить внимание на некоторые особенности в исследованиях корреляции. Для краткосрочного трейдера гораздо большее значение имеет не только корреляция цен, но и корреляция изменений цен (приращений) и корреляция колебаний. То есть в исследовании будут проверены взаимосвязи цен, приращений цен и средних ценовых колебаний (осцилляций).

2.2 Регрессионные модели.

Для описания взаимосвязей между экономическими переменными в статистике также используют методы регрессии. Основной задачей корреляционного анализа является выявление связи между случайными переменными и оценка тесноты этой связи. Основной задачей регрессионного анализа является установление формы зависимости между переменными.

Регрессия — величина, выражающая зависимость среднего значения случайной величины y от значений случайной величины x. Регрессионные модели (трендовые модели, факторные модели, устанавливающие зависимость конъюнктуры финансового рынка от фундаментальных факторов).

Парная регрессия позволяет предсказывать одну переменную на основании другой с использованием прямой линии, характеризующей взаимосвязь между этими двумя переменными. Переменную, поведение которой прогнозируется, принято обозначать буквой *Y*; переменную, которая используется для такого прогнозирования, принято обозначать буквой *X*. Очень важно, что определяется как *X*, а что как *Y*, поскольку *X* предсказывает *Y*, и *Y* предсказывается с помощью *X*.

В факторных моделях на рынке ценных бумаг предполагается, что доходность ценной бумаги реагирует на изменения различных факторов. В случае рыночной модели предполагается, что имеется только один фактор – доходность рыночного индекса.

Под рыночной моделью (*market model*) понимают зависимость между доходностью конкретной акции и доходностью рыночного индекса.

Рыночный индекс (*market index*) – индекс изменения стоимости определенного набора ценных бумаг, цены или доходности которых усредняются для отражения в целом ситуации на конкретном рынке финансовых активов.

Формализованное представление рыночной модели:

$$r_i = a_{iI} + \beta_{iI} r_I + \varepsilon_{iI}$$

где r_i – доходность ценной бумаги *i* за данный период;
r_I – доходность на рыночный индекс I за этот же период;
a_{iI} – коэффициент смещения;
β_{iI} – коэффициент наклона;
ε_{iI} – случайная погрешность.

2.3 Модели многофакторной корреляции.

В подавляющем большинстве реальных экономических задач приходится рассматривать данные более чем об одном факторе. Прогнозирование единственной переменной Y на основании двух или нескольких переменных X называется множественной регрессией.

Состояние экономики затрагивает большинство фирм. Поэтому можно полагать, что изменения в ожиданиях относительно будущего состояния экономики имеют очень большое влияние на доходности большинства ценных бумаг. Однако экономика не является чем-то простым и монолитным.

Можно выделить несколько факторов, оказывающих влияние на все сферы экономики.

1. Темпы прироста валового внутреннего продукта.
2. Уровень процентных ставок.
3. Уровень цен на нефть и т.д.

В отличие от однофакторных моделей многофакторная модель доходности ценных бумаг, учитывающая эти различные воздействия, может быть более точной. В качестве примера рассмотрим модель, в которой предполагается, что процесс формирования дохода включает два фактора.

В виде уравнения двухфакторная модель для периода t записывается так:

$$r_t = a + b_1 * F_{1t} + b_2 * F_{2t} + e_t$$

где F_1 и F_2 – два фактора, оказывающих влияние на доходность ценной бумаги;

b_1 и b_2 – чувствительности ценной бумаги i к этим двум факторам;

e_t – случайная ошибка;

a – ожидаемая доходность ценной бумаги при условии, что каждый фактор имеет нулевое значение.

2.4 Авторегрессионные модели оценки рыночного риска.

Еще один метод, полезный для прогнозирования по временным рядам, основан на авторегрессионных моделях. Авторегрессионная (AR-) модель (англ. autoregressive model) — модель временных рядов, в которой значения временного ряда в данный момент линейно зависят от предыдущих значений этого же ряда. Она основана на понятии «Память рынка». Под памятью рынка понимается глубина ретроспективных данных, которые влияют на текущий курс. Чем глубже «память рынка», тем больший объем информации оказывает существенное влияние на движение цены, тем более, инертной становится цена. Для расчета «памяти рынка» используют автокорреляционную функцию (АКФ). АКФ используется для определения корреляционной связи между данными самого ценового ряда. Так же АКФ позволяет выявить определенные свойства временного ряда: наличие тренда, цикличность и сезонность.

Обычно обнаруживается, что значения отклика в некоторой точке временного ряда сильно коррелировано с несколькими предшествующими и/или последующими значениями. Действительно, для многих явлений их современное состояние функционально определяется предшествующими состояниями системы, в большей степени недавними, в гораздо меньшей – далеко отстоящими от заданного по временному ряду. Подобные связи принято называть автокорреляцией – корреляцией ряда с самим собой.

Автокорреляция первого порядка характеризует тесноту связи между соседними значениями временного ряда, автокорреляция второго порядка – между отстоящими друг от друга на два периода и т.д. И вообще, автокорреляция n-го порядка относится к степени связанности откликов, разнесенных на n периодов. Предполагая, что возникшая связь между значениями сохранится некоторое время в будущем, мы получаем механизм прогнозирования, основанный на построении регрессии точек ряда на самих себя, то есть – авторегрессии.

Авторегрессионные модели разных порядков – первого, второго, в общем случае n-ого – можно описать уравнениями следующего вида:

$$Y_i = b_0 + b_1 \cdot Y_{i-1} + \varepsilon;$$
$$Y_i = b_0 + b_1 \cdot Y_{i-1} + b_2 \cdot Y_{i-2} + \varepsilon;$$
$$Y_i = b_0 + b_1 \cdot Y_{i-1} + b_2 \cdot Y_{i-2} + ... + b_n \cdot Y_{i-n} + \varepsilon,$$

где b_0 - константа (свободный член) авторегрессионного уравнения, b_1, b_2,... b_n – коэффициенты авторегрессии, Y_i - величина отклика в некоторый момент времени, Y_{i-1}, Y_{i-2},...Y_{i-n} – соответственно отклики одним, двумя, ... n периодами ранее заданного, ε – нескоррелированная случайная компонента, присутствующая в отклике и связанная с ошибками наблюдения и погрешностями модели.

Применяя средства регрессионного анализа Excel, можно строить авторегрессионные зависимости также, как и простые уравнения регрессии. Зависимой переменной при построении авторегрессии первого порядка будет сам временной ряд, а независимой – он же, но смещенный на одно значение вниз. Таким образом, второе значение ряда будет определяться регрессией на первой значение, третье – регрессией на второе и так далее.

Для построения надежного прогноза потребуется выбрать лучшую модель из многих авторегрессионных, и определение порядка этой лучшей модели часто оказывается нетривиальной задачей, включающей расчет статистических характеристик многих построенных моделей и нахождение хрупкого баланса между относительной простотой моделей низких порядков и игнорированием в этих моделях некоторых тонких взаимодействий между факторами, которые могут быть учтены только в более сложных моделях.

Обычно в эпоху до широкого распространения персональных компьютеров предпочитали начинать построения с моделей высоких порядков, а затем постепенно ее упрощать, последовательно снижая порядок модели. В настоящее время чаще поступают строго наоборот, начиная с простейшей модели, и при необходимости усложняя ее.

Рыночный риск (*англ. market risk*) - это риск снижения стоимости активов вследствие изменения рыночных факторов.

Рыночный риск имеет макроэкономическую природу, то есть источниками рыночных рисков являются макроэкономические показатели финансовой системы - индексы рынков, кривые процентных ставок и т.д.

Существует четыре стандартных формы рыночных рисков:

- Фондовый риск (*англ. Equity risk*) - риск снижения цены акций;
- Процентный риск (*англ. Interest rate risk*) - риск изменения процентных ставок;
- Валютный риск (*англ. Currency risk*) - риск изменения курсов валют;
- Товарный риск (*англ. Commodity risk*) - риск изменения цен товаров.

Существуют различные методы оценки рыночного риска.

1.3 Лекция № 3 (1 час)

Тема: Оптимизационные модели

1.3.1 Вопросы лекции:

1. **Проблема выбора инвестиционного портфеля**
2. **Кривые безразличия**
3. **Вычисление ожидаемых доходностей и стандартных отклонений портфелей**
4. **Выбор оптимального портфеля**
5. **Модель Марковица**
6. **Определение структуры и местоположения эффективного множества**

1.3.2 Краткое содержание вопросов:

2.1 Проблема выбора инвестиционного портфеля

В 1952 г. Гарри Марковиц опубликовал фундаментальную работу, которая является основой подхода к инвестициям с точки зрения современной теории формирования портфеля. Подход Марковица начинается с предположения, что инвестор в настоящий момент времени имеет конкретную сумму денег для инвестирования. Эти деньги будут инвестированы на определенный промежуток времени, который называется периодом владения (holding period). В конце периода владения инвестор продает ценные бумаги, которые были куплены в начале периода, после чего либо использует полученный доход на потребление, либо реинвестирует доход в различные ценные бумаги (либо делает то и другое одновременно).

Таким образом, подход Марковица может быть рассмотрен как дискретный подход, при котором начало периода обозначается $t = 0$, а конец периода обозначается $t = 1$. В момент $t = 0$ инвестор должен принять решение о покупке конкретных ценных бумаг, которые будут находиться в его портфеле до момента $t = 1$. Поскольку портфель представляет собой набор различных ценных бумаг, это решение эквивалентно выбору оптимального портфеля из набора возможных портфелей. Поэтому подобную проблему часто называют проблемой выбора инвестиционного портфеля.

Принимая решение в момент $t = 0$, инвестор должен иметь в виду, что доходность ценных бумаг (и, таким образом, доходность портфеля) в предстоящий период владения неизвестна. Однако инвестор может оценить ожидаемую (или среднюю) доходность различных ценных бумаг, основываясь на некоторых предположениях, а затем инвестировать средства в бумагу с наибольшей ожидаемой доходностью. Марковиц отмечает, что это будет в общем неразумным решением, так как типичный инвестор хотя и желает, чтобы «доходность была высокой», но одновременно хочет, чтобы «доходность была бы настолько определенной, насколько это возможно». Это означает, что инвестор, стремясь одновременно максимизировать ожидаемую доходность и минимизировать неопределенность (т.е. риск), имеет две противоречащие друг другу цели, которые должны быть сбалансированы при принятии решения о покупке в момент $t = 0$.

Подход Марковица к принятию решения дает возможность адекватно учесть обе эти цели. Следствием наличия двух противоречивых целей является необходимость проведения диверсификации с помощью покупки не одной, а нескольких ценных бумаг. Последующее обсуждение подхода Марковица к инвестициям начинается с более конкретного определения понятий начального и конечного благосостояния.

Согласно уравнению (1) доходность ценной бумаги за один период может быть вычислена по формуле:

$$Доходность = \frac{Благосостояние.в.конце.периода - Благосостояние.в.начале.периода}{Благосостояние.в.начале.периода} \quad (1)$$

где «благосостоянием в начале периода» называется цена покупки одной ценном бумаги данного вида в момент t = 0 (например, одной обыкновенной акции фирмы), а «благосостоянием в конце периода» называется рыночная стоимость данной ценной бумаги в момент t = 1 в сумме со всеми выплатами держателю данной бумаги наличными (или в денежном эквиваленте) в период с момента t = 0 до момента t = 1. Поскольку портфель представляет собой совокупность различных ценных бумаг, его доходность может быть вычислена аналогичным образом:

$$r_p = \frac{W_1 - W_0}{W_0} \quad (2)$$

Здесь W_0 обозначает совокупную цену покупки всех ценных бумаг, входящих в портфель в момент t = 0; W_1 - совокупную рыночную стоимость этих ценных бумаг в момент t = 1 и, кроме того, совокупный денежный доход от обладания данными ценными бумагами с момента t = 0 до момента t = 1.

Уравнение (2) с помощью алгебраических преобразований может быть приведено к виду:

$$W_0(1 + r_p) = W_1 \quad (3)$$

Из уравнения (3) можно заметить, что начальное благосостояние, или благосостояние в начале периода (W_0), умноженное на сумму единицы и уровня доходности портфеля, равняется благосостоянию в конце периода (W_1), или конечному благосостоянию.

Ранее отмечалось, что инвестор должен принять решение относительно того, какой портфель покупать в момент t = 0. Делая это, инвестор не знает, каким будет предположительное значение величины для большинства различных альтернативных портфелей, так как он не знает, каким будет уровень доходности большинства этих портфелей.

Таким образом, по Марковицу, инвестор должен считать уровень доходности, связанный с любым из этих портфелей, случайной переменной. Так переменные имеют свои характеристики, одна из них - ожидаемое (или среднее) значение, а другая - стандартное отклонение.

Марковиц утверждает, что инвестор должен основывать свое решение по выбору портфеля исключительно на ожидаемой доходности и стандартном отклонении. Это означает, что инвестор должен оценить ожидаемую доходность и стандартное отклонение каждого портфеля, а затем выбрать «лучший» из них, основываясь на соотношении этих двух параметров. Интуиция при этом играет определяющую роль. Ожидаемая доходность может быть представлена как мера потенциального вознаграждения, связанная с конкретным портфелем, а стандартное отклонение - как мера риска, связанная с данным портфелем. Таким образом, после того, как каждый портфель был исследован в смысле потенциального вознаграждения и риска, инвестор должен выбрать портфель, который является для него наиболее подходящим.

2.2 Кривые безразличия

Метод, который будет применен для выбора наиболее желательного портфеля, использует так называемые кривые безразличия. Эти кривые отражают отношение инвестора к риску и доходности и, таким образом, могут быть представлены как двухмерный график, где по горизонтальной оси откладывается риск, мерой которого является стандартное отклонение (обозначенное σ_p), а по вертикальной оси - вознаграждение, мерой которого является ожидаемая доходность (обозначенная r_p).

На графиках кривых безразличия гипотетического инвестора каждая кривая линия отображает одну кривую безразличия инвестора и представляет все комбинации портфелей, которые обеспечивают заданный уровень желаний инвестора. Отсюда следует первое важное свойство кривых безразличия: все портфели, лежащие на одной заданной кривой безразличия, являются равноценными для инвестора. Следствием этого свойства является тот факт, что кривые безразличия не могут пересекаться. Это приводит ко второму важному свойству кривых безразличия: инвестор будет считать любой портфель, лежащий на кривой безразличия, которая находится выше и левее, более привлекательным, чем любой портфель, лежащий на кривой безразличия, которая находится ниже и правее.

В заключение следует заметить, что инвестор имеет бесконечное число кривых безразличия. Это просто означает, что, как бы не были расположены две кривые безразличия на графике, всегда существует возможность построить третью кривую, лежащую между ними.

Здесь уместно спросить; как инвестор может определить вид его кривых безразличия? В конце концов, каждый инвестор имеет график кривых безразличия, которые, обладая всеми вышеперечисленными свойствами, в то же время являются сугубо индивидуальными для каждого инвестора. Один из методов требует ознакомления инвестора с набором гипотетических портфелей вместе с их ожидаемыми доходностями и стандартными отклонениями. Из них он должен выбрать наиболее привлекательный. Исходя из сделанного выбора, может быть произведена оценка формы и местоположения кривых безразличия инвестора. При этом предполагается, что каждый инвестор будет действовать так, как будто бы он исходит из кривых безразличия при совершении выбора, несмотря на то, что осознанно их не использует.

В заключение можно сказать, что каждый инвестор имеет график кривых безразличия, представляющих его выбор ожидаемых доходностей и стандартных отклонений. Это означает, что инвестор должен определить ожидаемую доходность и стандартное отклонение для каждого потенциального портфеля, нанести их на график и затем выбрать один портфель, который лежит на кривой безразличия, расположенной выше и левее относительно других кривых.

При обсуждении кривых безразличия мы сделали два неявных предположения. Первое: предполагается, что инвестор, делающий выбор между двумя идентичными во всем, кроме ожидаемой доходности, портфелями, выберет портфель с большей ожидаемой доходностью.

Более полно можно сказать, что при использовании подхода Марковица делается предположение о ненасыщаемости, т.е. предполагается, что инвестор предпочитает более высокий уровень конечного благосостояния более низкому его уровню. Это объясняется тем, что более высокий уровень конечного благосостояния позволяет ему потратить больше на потребление в момент t= 1 (или в более далеком будущем).

Таким образом, если заданы два портфеля с одинаковыми стандартными отклонениями, то инвестор выберет портфель с большей ожидаемой доходностью.

Однако все не так просто в случае, когда инвестору нужно выбирать между портфелями, имеющими одинаковый уровень ожидаемой доходности, но разный уровень стандартного отклонения. Это тот случай, когда стоит принять во внимание второе предположение, состоящее в том, что инвестор избегает риска.

Эти два предположения о ненасыщаемости и об избегании риска являются причиной выпуклости и положительного наклона кривой безразличия. Несмотря на предположение о том, что все инвесторы избегают риска, нельзя предположить, что степень избегания риска одинакова у всех инвесторов. Некоторые инвесторы могут избегать риска в значительной степени, в то же время другие могут слабо избегать риска. Это означает, что различные инвесторы будут иметь различные графики кривых безразличия.

2.3 Вычисление ожидаемых доходностей и стандартных отклонений портфелей

Инвестор должен оценить все альтернативные портфели с точки зрения их ожидаемых доходностей и стандартных отклонений, используя кривые безразличия.

В случае когда инвестор избегает риска, для инвестиций будет выбран портфель, лежащий на кривой безразличия, расположенной «выше и левее» всех остальных. Однако определенные вопросы остаются без ответов. Например, каким образом инвестор вычисляет ожидаемую доходность и стандартное отклонение портфеля.

а) Инвестор с высокой степенью избегания риска

б) Инвестор со средней степенью избегания риска

в) Инвестор с низкой степенью избегания риска

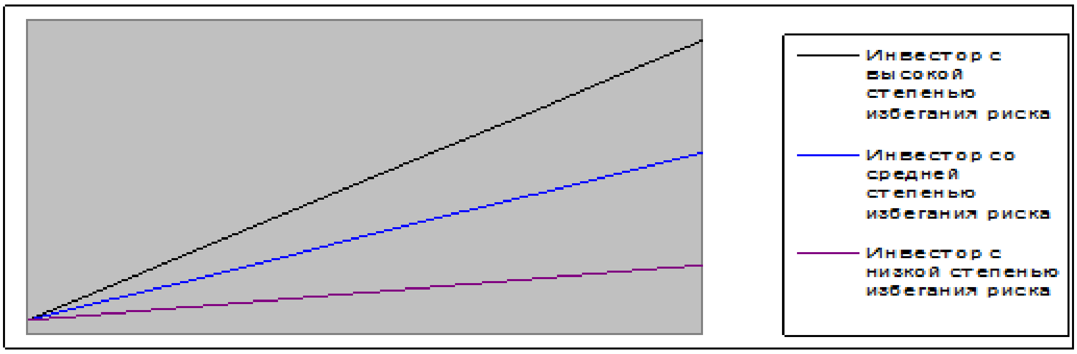


Рисунок 1 - Кривые безразличия инвесторов с различной степенью избегания риска

Исходя из подхода Марковица, инвестор должен обратить особое внимание на конечное (в конце периода) благосостояние W_1. Это означает, что, принимая решение, какой портфель приобрести, и используя свое начальное (в начале периода) благосостояние W_0 , инвестор должен обратить особое внимание на эффект, который различные портфели оказывают на W_1. Этот эффект может быть выражен через ожидаемую доходность и стандартное отклонение каждого портфеля.

Портфель представляет собой набор различных ценных бумаг. Таким образом, кажется логически правильным, что ожидаемая доходность и стандартное отклонение портфеля должны зависеть от ожидаемой доходности и стандартного отклонения каждой ценной бумаги, входящей в портфель. Также кажется очевидным, что значительное влияние оказывает то, какая часть начального капитала была инвестирована в данную ценную бумагу. Ожидаемая доходность портфеля может быть вычислена несколькими способами, все они дают один и тот же результат. Первый метод включает вычисление ожидаемой цены портфеля в конце периода и использование формулы для вычисления уровня доходности. Таким образом, начальная стоимость портфеля (W_0) вычитается из ожидаемой стоимости портфеля в конце периода (W_1) и затем эта разность делится на начальную стоимость портфеля (W_0), результатом этих операций является ожидаемая доходность портфеля. Такая процедура может быть применена для любого количества ценных бумаг в портфеле.

Альтернативный метод вычисления ожидаемой доходности портфеля - эта процедура включает вычисление ожидаемой доходности портфеля как средневзвешенной ожидаемых доходностей ценных бумаг, являющихся компонентами портфеля. Относительные рыночные курсы ценных бумаг портфеля используются в качестве весов. В виде символов общее правило вычисления ожидаемой доходности портфеля, состоящего из N ценных бумаг, выглядит следующим образом:

$$\overline{r_p} = \sum_{i=1}^{N} X_i \overline{r_i} = X_1 \overline{r_1} + X_2 \overline{r_2} + \ldots + X_N \overline{r_N} \qquad (4)$$

где r_p - ожидаемая доходность портфеля; X_i - доля начальной стоимости портфеля, инвестированная в ценную бумагу; r_i - ожидаемая доходность ценной бумаги i; N - количество ценных бумаг в портфеле.

Таким образом, вектор ожидаемой доходности может быть использован для вычисления ожидаемой доходности любого портфеля, состоящего из N ценных бумаг. Вектор состоит из одной колонки цифр, где в i-ой строке находится ожидаемая доходность i-ой ценной бумаги.

Так как ожидаемая доходность портфеля представляет собой средневзвешенные ожидаемые доходности ценных бумаг, то вклад каждой ценной бумаги в ожидаемую доходность портфеля зависит от ее ожидаемой доходности, а также от доли начальной рыночной стоимости портфеля, вложенной в данную ценную бумагу. Никакие другие факторы не имеют значения. Из уравнения (4) следует, что инвестор, который просто желает получить наибольшую возможную ожидаемую доходность, должен иметь портфель, состоящий из одной ценной бумаги, той самой, у которой ожидаемая доходность наибольшая. Очень небольшое число инвесторов поступает таким образом, и очень небольшое число консультантов по инвестициям посоветует проводить такую экстремальную политику. Вместо этого инвесторы должны диверсифицировать портфель, т.е. их портфель должен содержать более одной ценной бумаги.

Это имеет смысл, так как диверсификация может снизить риск, измеряемый стандартным отклонением. Полезная мера риска должна некоторым образом учитывать вероятность возможных «плохих» результатов и их величину. Вместо того чтобы измерять вероятности различных результатов, мера риска должна некоторым образом оценивать степень возможного отклонения действительного результата от ожидаемого. Стандартное отклонение - мера, позволяющая это сделать, так как она является оценкой вероятного отклонения фактической доходности от ожидаемой. Может показаться, что простая мера риска в лучшем случае является очень грубой суммой «плохих» возможностей. Но в наиболее типичной ситуации стандартное отклонение является в действительности очень хорошей мерой степени неопределенности оценки перспектив портфеля. Наилучшим примером является случай, когда распределение вероятностей доходности портфеля может быть аппроксимировано известной кривой, имеющей форму колокола, которая носит название нормального распределения. Это часто рассматривается как правдоподобное предположение при анализе доходности диверсифицированных портфелей, когда изучаемый период владения относительно короток (до квартала).

В результате возникает вопрос о стандартном отклонении, как о мере риска; зачем вообще учитывать «счастливые неожиданности» (т.е. случаи, когда доходность превышает ожидаемую) при измерении риска? Почему бы просто не рассмотреть отклонения ниже ожидаемой доходности? Меры риска, при которых поступают таким образом, имеют достоинства. Однако результат будет тем же самым, если вероятностное распределение симметрично как при нормальном распределении. Почему? Потому что левая часть симметричного распределения является зеркальным отображением правой части. Таким образом, перечень портфелей, упорядоченный на основе «риска снижения курса», не будет отличаться от перечня, упорядоченного на основе стандартного отклонения, если доходность нормально распределена.

Например, Гарри Марковиц изначально (в первой своей работе по эффективным наборам) предполагал, что мера риска включает в себя только негативные результаты. В дальнейшем он отказался от этого подхода в пользу стандартного отклонения, для того чтобы упростить вычисления. Тот факт, что результаты, превышающие ожидаемую стоимость, включаются в расчеты вместе с результатами, не достигающими ожидаемой стоимости, не имеет значения. Стандартное отклонение суммирует «плохую» часть распределения доходности инвестиций. Однако что будет, если доходность инвестиций не является нормально распределенной? Можно рассмотреть ситуацию, где доходность обыкновенных акций не удовлетворяет данному предположению. Допустим, что инвестор на рынке обыкновенных акций столкнулся с ограниченной ответственностью. Самое большое, что он может потерять в данном случае, это первоначальные инвестиции. При этом потенциальный выигрыш от повышения не ограничен. Наконец, ожидается падение большинства доходностей по обыкновенным акциям до среднего рыночного значения. То, что мы только что описали, носит название распределения, смешенного вправо по отношению к нормальному.

Теперь рассмотрим, как вычисляется стандартное отклонение портфеля. Для портфеля, состоящего из трех ценных бумаг, формула выглядит следующим образом:

$$\sigma_p = \left| \sum_{i=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} X_i X_j X_{ij} \right|^{1/2} \tag{5}$$

где σ_{ij} - обозначает ковариацию доходностей ценных бумаг i и j.

Таким образом:

1. Подход Марковица к проблеме выбора портфеля предполагает, что инвестор старается решить две проблемы: максимизировать ожидаемую доходность при заданном уровне риска и минимизировать неопределенность (риск) при заданном уровне ожидаемой доходности.
2. Ожидаемая доходность служит мерой потенциального вознаграждения, связанного с портфелем. Стандартное отклонение рассматривается как мера риска портфеля.
3. Кривая безразличия представляет собой различные комбинации риска и доходности, которые инвестор считает равноценными.
4. Предполагается, что инвесторы рассматривают любой портфель, лежащий на кривой безразличия выше и левее, как более ценный, чем портфель, лежащий на кривой безразличия, проходящей ниже и правее.
5. Предположение о ненасыщаемости и избегании риска инвестором выражаются в том, что кривые безразличия имеют положительный наклон и выпуклы.
6. Ожидаемая доходность портфеля является средневзвешенной ожидаемой доходностью ценных бумаг, входящих в портфель. В качестве весов служат относительные пропорции ценных бумаг, входящих в портфель.
7. Ковариация и корреляция измеряют степень согласованности изменений значений двух случайных переменных. Стандартное отклонение портфеля зависит от стандартных отклонений и пропорций входящих в портфель ценных бумаг и, кроме того, от ковариаций их друг с другом.

2.4 Выбор оптимального портфеля

Выше была рассмотрена проблема выбора портфеля, с которой сталкивается каждый инвестор. Кроме того, в ней был представлен подход Гарри Марковица к решению данной проблемы. При таком подходе инвестор должен оценить альтернативные портфели с точки зрения их ожидаемых доходностей и стандартных отклонений, используя кривые безразличия. В случае избегания риска инвестором портфель, лежащий на кривой безразличия, проходящей выше и левее остальных кривых, будет выбран для инвестирования.

Как было отмечено ранее, из набора N ценных бумаг можно сформировать бесконечное число портфелей. Рассмотрим ситуацию с компаниями А, Б и С, когда N равно трем. Инвестор может купить или только акции компании А, или только акции компании Б, или некоторую комбинацию акций двух компаний. Например, он может вложить половину средств в одну, а половину в другую компанию, или 75% в одну, а 25% в другую, или же 33% и 67% соответственно. В конечном счете инвестор может вложить любой процент (от 0% до 100%) в первую компанию, а остаток во вторую. Даже без рассмотрения акций компании С, существует бесконечное число возможных портфелей для инвестирования. Необходимо ли инвестору проводить оценку всех этих портфелей? К счастью, ответом на этот вопрос является «нет». Объяснение того факта, что инвестор должен рассмотреть только подмножество возможных портфелей, содержится в следующей теореме об эффективном множестве.

Инвестор выберет свой оптимальный портфель из множества портфелей, каждый из которых:

1. Обеспечивает максимальную ожидаемую доходность для некоторого уровня риска.

2. Обеспечивает минимальный риск для некоторого значения ожидаемой доходности.

Набор портфелей, удовлетворяющих этим двум условиям, называется эффективным множеством или эффективной границей. Достижимое множество представляет собой все портфели, которые могут быть сформированы из группы в N ценных бумаг. Это означает, что все возможные портфели, которые могут быть сформированы из N ценных бумаг, лежат либо на границе, либо внутри достижимого множества. В общем случае, данное множество будет иметь форму типа зонта. В зависимости от используемых ценных бумаг, оно может быть больше смещено вправо или влево, вверх или вниз.

Инвестор должен нарисовать свои кривые безразличия на одном рисунке с эффективным множеством, а затем приступить к выбору портфеля, расположенного на кривой безразличия, находящейся выше и левее остальных. Этот портфель будет соответствовать точке, в которой кривая безразличия касается эффективного множества. Желание находиться на какой-то конкретной кривой не может быть реализовано, если данная кривая нигде не пересекает множество достижимости. Чисто интуитивно теорема об эффективном множестве кажется вполне рациональной. В предыдущей главе было показано, что инвестор должен выбирать портфель, лежащий на кривой безразличия, расположенной выше и левее всех остальных кривых. В теореме об эффективном множестве утверждается, что инвестор не должен рассматривать портфели, которые не лежат на левой верхней границе множества достижимости, что является ее логическим следствием.

Кроме того установлено, что кривые безразличия для инвестора, избегающего риск, выпуклы и имеют положительный наклон. Эффективное множество в общем случае вогнуто и имеет положительный наклон, т.е. отрезок, соединяющий любые две точки эффективного множества, лежит ниже данного множества. Это свойство эффективных множеств является очень важным, так как оно означает, что существует только одна точка касания эффективного множества и кривых безразличия.

В начале 50-х годов Гарри Марковиц описал решение данных проблем. Используя математический метод, известный как квадратичное программирование, инвестор может обработать ожидаемые доходности, стандартные отклонения и ковариации для определения эффективного множества. Имея оценку своих кривых безразличия, отражающую их индивидуальный допустимый риск он может затем выбрать портфель из эффективного множества.

Используя средства обработки информации, доступные инвестору в то время, было практически невозможно вычислить эффективное множество даже для нескольких сотен ценных бумаг. Однако с появлением дешевых и высокопроизводительных компьютеров в 80-х годах 20 века, а также с развитием сложных моделей риска стало возможным определение эффективного множества для нескольких тысяч ценных бумаг за несколько минут. Необходимое компьютерное оборудование и программное обеспечение являются доступными фактически для любого инвестиционного института. В действительности данный процесс стал настолько банальным, что даже приобрел собственную терминологию. Использование компьютера для определения эффективного множества и формирования оптимального портфеля в разговорном языке называется оптимизацией. Портфели «оптимизируются», а про инвесторов говорят, что они применяют оптимизационную технику. Несмотря на доступность «оптимизаторов», относительно небольшое число менеджеров по инвестициям в действительности используют их при формировании портфеля. Вместо этого они в основном полагаются на некоторый набор правил и закономерностей.

Большинство менеджеров по инвестициям хорошо осведомлены о концепциях Марковица по формированию портфеля и о доступных технологиях, так как являются выпускниками школ бизнеса, в которых данные концепции детально рассматриваются. Причиной сопротивления являются два момента: профессиональные интересы и несоответствия в практическом воплощении концепций.

С точки зрения профессиональных факторов большинство инвесторов просто не чувствуют себя комфортно при использовании качественных методов. В их методах принятия решений подчеркивается значение интуиции и субъективных решений. Использование оптимизационной техники в формировании портфеля требует наличия системной и формальной структуры принятия решений. Специалисты по анализу ценных бумаг должны принять на себя ответственность за формирование количественных прогнозов ожидаемой доходности и риска. Управляющие портфелями должны выполнять решения компьютера. В результате этого «оптимизаторы» уничтожают «артистизм и грацию» управления инвестициями. Кроме того, с их внедрением возрастает влияние новой породы профессионалов по инвестициям - числовых аналитиков, которые координируют получение и применение оценок риска и доходности. Авторитет, приобретаемый числовыми аналитиками, уменьшает влияние аналитиков и менеджеров портфелей, использующих традиционные методы. Что касается перспектив применения «оптимизаторов», то здесь существуют серьезные проблемы. В частности, они имеют тенденцию к созданию чисто интуитивных портфелей, не подходящих для реальных инвестиций. Данная ситуация объясняется не столько проблемами «оптимизаторов», сколько ошибками операторов, обеспечивающих ввод данных. Здесь работает парадигма GIGO («мусор на входе - мусор на выходе»). «Оптимизаторы» предпочитают ценные бумаги, обладающие высокими ожидаемыми доходностями, малыми стандартными отклонениями и малой величиной ковариации с другими ценными бумагами. Очень часто при оценке этих величин используется информация из старых баз данных, содержащих тысячи ценных бумаг. До тех пор пока информация о доходности и риске не будет тщательно проверена, ошибки (например, преуменьшение стандартного отклонения ценных бумаг) могут привести к тому, что «оптимизатор» будет рекомендовать произвести покупку некоторых ценных бумаг, исходя из неправильных предпосылок. Даже если информация является выверенной, экстремальные исторические события могут привести «оптимизатор» к практически неверным решениям.

До тех пор пока программа не будет принимать во внимание операционные издержки, «оптимизаторы» будут демонстрировать плохую привычку к операциям, приводящим к большому обороту, и рекомендациям о покупке ценных бумаг с низкой ликвидностью. Высокий оборот связан с существенными изменениями в портфеле от периода к периоду. Высокий оборот может являться причиной неприемлемо высоких операционных издержек, отрицательно сказывающихся на функционировании данного портфеля. Ликвидность означает возможность реального приобретения ценных бумаг, выбранных «оптимизатором». Выбранные бумаги могут обладать желательными характеристиками по доходности и риску, но продаваться в незначительных количествах, не позволяющих институциональным инвесторам приобрести их без ощутимых дополнительных расходов на покупку.

Существуют различные решения данных проблем, начиная с аккуратной проверки вводимой информации и кончая введением ограничений на максимальный оборот и минимальную ликвидность. Тем не менее ничто не может заменить прогноз квалифицированного специалиста о доходности и риске ценных бумаг, основанный на правильном применении понятия рыночного равновесия. Профессиональные проблемы и проблемы практического воплощения дают менеджерам по инвестициям удобный повод избегать применения «оптимизаторов» и сконцентрироваться на использовании традиционных методов формирования портфелей. Однако рассмотрение количественных методов формирования портфелей очень важно. Повышающаяся эффективность финансовых рынков заставляет менеджеров институциональных инвесторов обрабатывать больше информации о большем количестве ценных бумаг и с большей скоростью, чем когда-либо раньше. Как следствие, они вынуждены в большей степени увеличить использование количественных инструментов анализа инвестиций. Фактически они стали более восприимчивы к необходимости создания диверсифицированных портфелей, имеющих наивысший уровень ожидаемой доходности при удовлетворительном уровне риска.

2.5 Модель Марковица

Классическая формулировка проблемы выбора портфеля относится к инвестору, который должен выбрать из эффективного множества портфель, представляющий собой оптимальную комбинацию ожидаемой доходности и стандартного отклонения, исходя из предпочтений инвестора относительно риска и доходности. На практике, однако, это описание неадекватно характеризует ситуацию, с которой сталкивается большинство организаций, управляющих деньгами институциональных инвесторов.

Определенные типы институциональных инвесторов, такие, как, например, пенсионные и сберегательные фонды, обычно нанимают внешние фирмы в качестве агентов для инвестирования своих финансовых активов. Эти менеджеры обычно специализируются на каком-то одном определенном классе финансовых активов, таком, например, как обыкновенные акции или ценные бумаги с фиксированным доходом. Клиенты устанавливают для своих менеджеров эталонные критерии эффективности, которыми могут быть рыночные индексы или специализированные эталоны, отражающие специфику инвестиций (растущие акции с малой капитализацией).

Клиенты нанимают менеджеров, которые в результате своей работы должны достигнуть эталонного уровня. Такие менеджеры называются пассивными менеджерами. Клиенты нанимают и других менеджеров, которые должны превысить доходность, обеспечиваемую эталонными портфелями. Таких менеджеров называют активными менеджерами.

Для пассивных менеджеров проблема выбора портфеля является тривиальной. Они просто покупают и удерживают те ценные бумаги, которые соответствуют эталону. Их портфели называют индексными фондами. Для пассивных менеджеров нет никакой необходимости иметь дело с эффективными множествами и предпочтениями по риску и доходности. Данные понятия являются заботой их клиентов. Перед активными менеджерами стоят гораздо более сложные задачи. Они должны сформировать портфели, которые обеспечивают доходность, превосходящую доходность установленных эталонов постоянно и на достаточную величину.

Наибольшей проблемой, препятствующей активным менеджерам, является недостаток информации. Даже наиболее способные из них совершают многочисленное количество ошибок при выборе ценных бумаг. Менеджеры, работающие на рынке обыкновенных акций, которые превышают эталонную доходность (после всех выплат и издержек) на 1-2 процентных пункта ежегодно, рассматриваются как исключительно эффективные исполнители. Менеджеры с недостатком квалификации (под квалификацией в данном случае подразумевается умение точно прогнозировать доходность ценных бумаг) будут в проигрыше по сравнению с эталоном, т.к. их гонорары и операционные издержки уменьшают доходность. Так как результаты инвестиционных решений активного менеджера являются неопределенными, их доходность относительно эталонной меняется в течение времени. Активный риск и активная ожидаемая доходность может быть исключен, если включить в портфель все ценные бумаги в тех же долях, в которых они входят в установленный эталонный портфель. Пассивные менеджеры следуют этому подходу. Активные менеджеры принимают на себя активный риск, когда их портфель отличается от эталонного. Рациональные и искусные активные менеджеры идут на активный риск когда они ожидают роста активной доходности.

Теперь становится ясной суть проблемы выбора портфеля для активного менеджера. Его не волнует соотношение ожидаемой доходности портфеля и стандартного отклонения. Скорее менеджер выбирает между более высокой ожидаемой активной доходностью и более низким активным риском. Данный процесс требует предположений о способностях менеджера к предсказанию доходности ценных бумаг. Имея такую информацию, можно построить для данного менеджера эффективное множество (исходя из ожидаемой активной доходности и активного риска), которое показывает комбинации наивысшей активной доходности на единицу активного риска и наименьшего активного риска на единицу ожидаемой активной доходности. Эффективное множество более искусных менеджеров будет находиться выше и левее эффективного множества их менее квалифицированных коллег.

Кривые безразличия, аналогичные рассматриваемым в классической теории выбора портфеля, отражают различные комбинации активного риска и активной доходности, которые менеджер считает равноценными. Крутизна наклона кривых безразличия отражает степень избегания риска инвестором и имеет непосредственное отношение к оценке менеджером реакции клиентов на различные результаты своей деятельности.

Оптимальной комбинацией активного риска и активной доходности менеджера является та точка на эффективном множестве, в которой одна из кривых безразличия касается данного множества. Мы можем рассматривать данную точку как желаемый уровень агрессивности менеджера в реализации его прогнозов доходности ценных бумаг. Менеджеры (и их клиенты) с большей степенью избегания риска выберут портфель с меньшим уровнем активного риска, а менеджеры и их клиенты, в меньшей степени избегающие риска, выберут портфель с более высоким уровнем активного риска.

2.6 Определение структуры и местоположения эффективного множества

Ранее было отмечено, что существует бесконечное число портфелей, доступных для инвестора, но в то же время инвестор должен рассматривать только те портфели, которые принадлежат эффективному множеству. Однако эффективное множество Марковица представляет собой изогнутую линию, что предполагает наличие бесконечного числа точек на ней. Это означает, что существует бесконечное количество эффективных портфелей! Как может быть использован подход Марковица, если инвестору необходимо определить структуру каждого из бесконечного числа эффективных портфелей? К счастью, Марковиц видел эти потенциальные проблемы и внес основной вклад в их преодоление, представив метод их решения. Он включает в себя алгоритм квадратического программирования, известный как метод критических линий.

Для начала инвестор должен оценить вектор ожидаемых доходностей и ковариационную матрицу. Затем через алгоритм определяется количество «угловых» портфелей, которые связаны с ценными бумагами и полностью описывают эффективное множество. «Угловой» портфель - это эффективный портфель, обладающий следующими свойствами: любая комбинация двух смежных «угловых» портфелей представляет из себя третий портфель, лежащий в эффективном множестве между двумя «угловыми» портфелями.

Алгоритм начинается с определения портфеля с наивысшей ожидаемой доходностью. Данный портфель является эффективным портфелем. Он состоит только из одной ценной бумаги с наибольшей ожидаемой доходностью. То есть если инвестор хочет приобрести данный портфель, все, что он должен сделать, это купить акции компании с наивысшей ожидаемой доходностью. Любой другой портфель будет иметь меньшую ожидаемую доходность, так как в конечном счете часть фондов инвестора будет помещена в акции других компаний, имеющих ожидаемую доходность ниже.

Затем алгоритм определяет второй «угловой» портфель. Данный портфель располагается на эффективном множестве ниже первого «углового» портфеля. Говоря о первом и втором «угловых» портфелях, важно отметить, что они являются смежными эффективными портфелями и любой эффективный портфель, лежащий в эффективном множестве между двумя данными, будет представлять собой просто комбинацию их составов.

Определив второй «угловой» портфель, алгоритм затем определяет третий. Как и два предыдущих, данный «угловой» портфель является эффективным. Поскольку второй и третий портфели являются смежными, то любая их комбинация является эффективным портфелем, лежащим в эффективном множестве между двумя данными.

Ранее отмечалось, что только комбинация «угловых» смежных портфелей может дать эффективный портфель. Это означает, что портфели, представляющие собой комбинацию двух несмежных «угловых» портфелей, не будут принадлежать эффективному множеству. Например, первый и третий «угловые» портфели не являются смежными, следовательно, любой портфель, представляющий собой комбинацию двух данных, не будет являться эффективным. Далее алгоритм определяет состав четвертого «углового» портфеля. Определив данный портфель, имеющий наименьшее стандартное отклонение из всех достижимых портфелей, алгоритм останавливается. Четыре «угловых» портфеля полностью описывают эффективное множество, связанное с предложенными акциями. После того как были определены структура и местоположение эффективного множества Марковица, можно определить состав оптимального портфеля инвестора. Портфель соответствует точке касания кривых безразличия инвестора с эффективным множеством. Процедура определения состава оптимального портфеля начинается с графического определения инвестором уровня его ожидаемой доходности.

Проведя данную операцию, инвестор теперь может определить два «угловых» портфеля с ожидаемыми доходностями, «окружающими» данный уровень. То есть инвестор может определить «угловой» портфель, который имеет ближайшую ожидаемую доходность, большую, чем у данного портфеля и «угловой» портфель с ближайшей, меньшей ожидаемой доходностью.

Таким образом:

1. Эффективное множество содержит те портфели, которые одновременно обеспечивают и максимальную ожидаемую доходность при фиксированном уровне риска, и минимальный риск при заданном уровне ожидаемой доходности.

2. Предполагается, что инвестор выбирает оптимальный портфель из портфелей, составляющих эффективное множество.

3. Оптимальный портфель инвестора идентифицируется с точкой касания кривых безразличия инвестора с эффективным множеством.

4. Предположение о вогнутости эффективного множества следует из определения стандартного отклонения портфеля и из существования финансовых активов, доходности которых не являются совершенно положительно или совершенно отрицательно коррелированными.

5. Диверсификация обычно приводит к уменьшению риска, так как стандартное отклонение портфеля в общем случае будет меньше, чем средневзвешенные стандартные отклонения ценных бумаг, входящих в портфель.

1.4 Лекция № 4 (2 часа)

Тема: Равновесные модели

1.4.1 Вопросы лекции:

1. **Понятие модели оценки финансовых активов - САРМ**
2. **Рыночный и собственный риск портфеля ценных бумаг**
3. **Диверсификация портфеля ценных бумаг.**
4. **Предположения о поведении инвесторов и существовании совершенных фондовых рынков**

1.4.2 Краткое содержание вопросов:

2.1 Понятие модели оценки финансовых активов - САРМ

Оптимизация структуры инвестиционного портфеля, эффективное использование имеющихся финансовых активов и снижение риска потери дохода - основная задача всех инвесторов.

Модель оценки финансовых активов служит теоретической основой для ряда различных финансовых технологий по управлению доходностью и риском, применяемых при долгосрочном и среднесрочном инвестировании в акции. Хотя эта модель является упрощенным представлением финансового рынка, в своей деятельности её используют многие крупные инвестиционные структуры, например Merril Lynch и Value Line.

Название модели оценки финансовых активов происходит от англ. Capital Assets Pricing Model, CAPM.

В учебной литературе встречаются и другие названия данной модели в зависимости от корректности перевода с английского на русский язык. Например, такие как: «Модель оценки доходности финансовых активов», «Ценовая модель рынка капитала», «Модель ценообразования активов капитала» и др. Финансово-кредитный энциклопедический словарь дает следующее определение:

САРМ - модель, описывающая связь ожидаемой доходности портфеля ценных бумаг со степенью его риска.

Основы ценовой модели акционерного капитала были предложены американским экономистом Уильямом Шарпом в 1964, который в 1990, совместно с М.Миллером и Г.Марковицем, получил Нобелевскую премию по экономике за «вклад в теорию цены финансовых активов».

У.Шарп определяет модель САРМ как *равновесную модель* ценообразования, согласно которой ожидаемая доходность ценной бумаги является линейной функцией чувствительности ценной бумаги к изменению доходности рыночного портфеля.

Модель называется равновесной, поскольку одной из основных её препосылок является достижение состояния равновесия на идеальном конкурентном финансовом рынке, на котором все участники:

1) одинаково информированы относительно вероятностных характеристик всех ценных бумаг, обращающихся на нем;

2) принимают на основании имеющейся информации оптимальные решения, которые при заданном уровне доходности портфеля минимизируют его риск.

Центральное место в модели САРМ занимает понятие рыночного портфеля. *Рыночный портфель* - это портфель, состоящий из всех ценных бумаг, в котором доля каждой соответствует её относительной рыночной стоимости. Относительная рыночная стоимость ценной бумаги равна её совокупной рыночной стоимости, деленной на сумму совокупных рыночных стоимостей всех ценных бумаг.

Несмотря на широту своего применения и теоретическую определенность, определить истинный рыночный портфель не представляется возможным. Сложность заключается во-первых, в том, что не возможно точно определить состав различных активов, составляющий рыночный портфель. В него необходимо включить: обыкновенные и привилегированные акции, облигации корпораций, государственные ценные бумаги, недвижимость, денежную наличность, драгоценные металлы, произведения искусства, потребительские товары длительного пользования (автомобили, мебель и т.д.), а также образование (человеческий капитал), в которое инвестируются огромные средства. Во-вторых, более проблематичной становится определение стоимости всех входящих в рыночный портфель активов.

Поэтому на практике под рыночным портфелем понимают портфель, содержащий только обыкновенные акции, доходность которых можно определить в любой момент времени.

Анализируя поведение акций на рынке, Шарп пришел к выводу, что вовсе не обязательно определять ковариацию каждой акции друг с другом (то есть их взаимное влияние), как это делалось, например, в модели Марковица. Вполне достаточно установить, как каждая акций взаимодействует со всем рынком. И поскольку речь идет о ценных бумагах, то, следовательно, нужно взять в расчёт весь объём РЦБ.

Однако, количество ценных бумаг в любой стране достаточно велико, с ними осуществляется ежедневно громадное количество сделок, как на биржевом, так и внебиржевом рынке, цены на акции постоянно изменяются, поэтому определить какие-либо показатели по всему объёму рынка оказывается практически невозможным.

В то же время установлено, что если мы берем некоторое количество определенных ценных бумаг, то они смогут достаточно точно охарактеризовать движение всего РЦБ. В качестве такого рыночного показателя можно использовать рыночные индексы.

Возникает вопрос: в чем различие между рыночной моделью и моделью CAPM? Прежде всего следует заметить, что в обеих моделях величина «бета»-коэффициента характеризует наклон или коэффициент регрессии, связанный с рыночным риском.

Между величинами «бета»-коэффициента в рыночной модели и модели CAPM существует два существенных различия:

1) рыночная модель является однофакторной моделью, где в качестве фактора выступает рыночный индекс и в отличие от модели CAPM она не является равновесной моделью, описывающей процесс формирования курсов ценных бумаг;

2) рыночная модель использует рыночный индекс, такой, как, например S&P500, в то время как CAPM - рыночный портфель. Причем рыночный портфель сочетает в себе все обращающиеся на рынке бумаги, а рыночный индекс - только ограниченное их число (например, 500 для S&P500).

Кроме того, по горизонтальной оси в модели CAPM откладывается коэффициент «бета», а по вертикальной средняя ожидаемая доходность актива. Так как модель равновесная, то величина «эпсилон»-случайная погрешность здесь отсутствует.

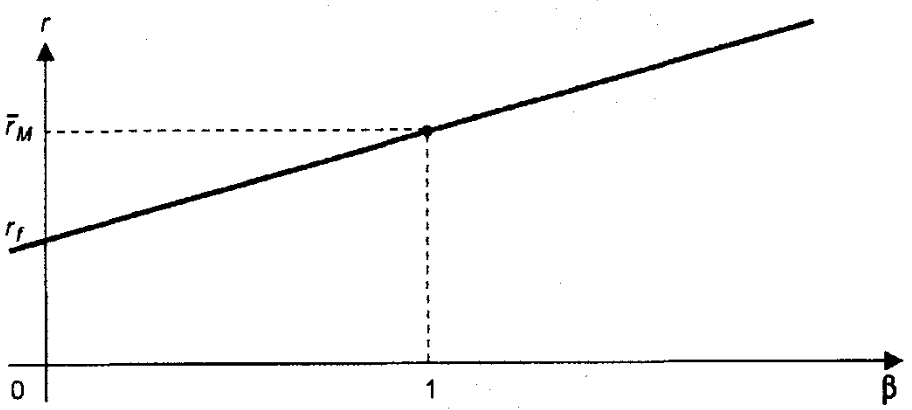


Рисунок 1 - Рыночная линия ценной бумаги

В формализованном виде модель CAPM можно представить следующим образом:

$$\bar{r}_i = r_f + \beta_i \times (\bar{r}_M - r_f)$$

где

$\bar{r}_i$ - ожидаемая доходность рискованных активов i-го вида

r_f - доходность безрискового актива (является заранее известной)

β_i - коэффициент-»бета» активов i-го вида

$\bar{r}_M$ - ожидаемая доходность рыночного портфеля

2.2 Рыночный и собственный риск портфеля ценных бумаг.

Ранее нами было установлено, что общий риск ценной бумаги, измеряемый её дисперсией, состоит из двух частей: 1) рыночного или систематического риска и 2) собственного или несистематического риска. Таким образом, можно представить общий риск в виде формулы:

$$\sigma_i^2 = \beta^2 \times \sigma_I^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

где

σ_i^2 - общий риск ценной бумаги (актива) i

$\beta^2 \times \sigma_I^2$ - рыночный риск ценной бумаги (актива) i

σ_ε^2 - собственный риск ценной бумаги (актива) i

По аналогии с разделением риска для конкретной ценной бумаги (актива) на две составляющие можно определить рыночный и собственный риск для портфеля ценных бумаг. Если долю активов инвестора, вложенную в ценную бумагу *i* данного портфеля *p* обозначить через X_i, то доходность портфеля может быть вычислена по следующей формуле:

$$r_p = \sum_{i=1}^{N} X_i \times r_i$$

Заменяя r_i правой частью уравнения рыночной модели, получим следующую рыночную модель портфеля:

$$r_p = \sum_{i=1}^{N} X_i \times (\alpha + \beta \times r_I + \varepsilon)$$

Выполнив несложные преобразования этого уравнения можно убедиться, что параметры α, β, ε для портфеля являются средневзвешенными значениями этих же параметров для конкретных ценных бумаг, где в качестве весов берутся их относительные доли в портфеле.

Таким образом, общий риск портфеля, измеряемый дисперсией его доходности, также будет состоять из двух компонентов, аналогичных двум компонентам общего риска отдельных ценных бумаг: рыночного и собственного риска портфеля:

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \times \sigma_I^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

где

σ_p^2 - общий риск портфеля

$\beta_p^2 \times \sigma_I^2$ - рыночный риск портфеля

σ_ε^2 - собственный риск портфеля

Далее может возникнуть вопрос, для чего необходимо выделять две составляющие риска? Казалось бы, для инвестора риск есть риск, независимо от его источника.

Дело в том, что рыночный риск связан с риском рыночного портфеля и значением коэффициента «бета» данной ценной бумаги. Для бумаги с большими значениями «бета» значение рыночного риска больше. В рамках модели CAPM у таких бумаг также бóльшие ожидаемые доходности. Отсюда следует, что ценные бумаги с бóльшими значениями рыночного индекса должны иметь бóльшие ожидаемые доходности.

Собственный (нерыночный) риск не связан с «бетой». Поэтому увеличение собственного риска не ведет к росту ожидаемой доходности. Итак, согласно CAPM, инвесторы вознаграждаются за рыночный риск, но их нерыночный риск не компенсируется.

2.3. Диверсификация портфеля ценных бумаг.

Далее покажем, что увеличение диверсификации может привести к снижению общего риска портфеля. Это происходит вследствие сокращения собственного риска портфеля, в то время как рыночный риск портфеля остается приблизительно таким же. В общем случае можно заметить, что чем более диверсифицирован портфель, то есть чем большее количество ценных бумаг в него входят, тем меньше каждая доля X_i. При этом значение «бета» портфеля не меняется существенным образом, так как является средним значением «беты» ценных бумаг, входящих в портфель. Таким образом, можно утверждать, что диверсификация приводит к усреднению рыночного риска.

Совершенно другая ситуация возникает при рассмотрении собственного риска портфеля. Если предположить, что во все ценные бумаги инвестировано одинаковое количество средств, то доля X_i составит 1/N. Следовательно, при увеличении количества ценных бумаг собственный риск портфеля будет в N раз меньше, и поэтому диверсификация существенно уменьшает собственный риск портфеля. Графически это можно представить следующим образом (см. рисунок 2).

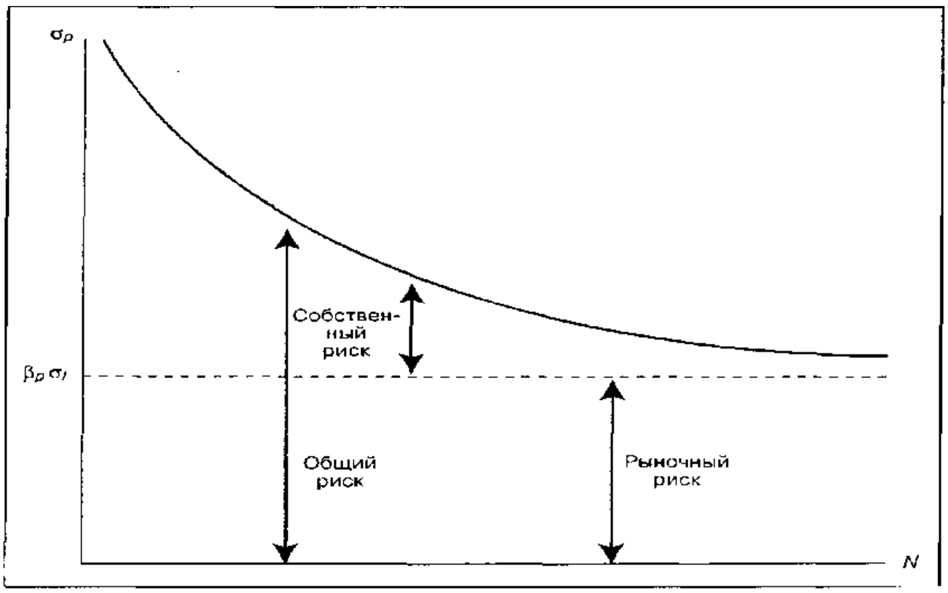


Рисунок 2 - Риск и диверсификация

Пример: рассмотрим ценные бумаги A и B, которые имеют коэффициенты «бета», равные 1,2 и 0,8, стандартные отклонения случайных погрешностей 6,06 и 4,76% соответственно., а стандартное отклонение рыночного индекса составляет 8%. Таким образом, подставляя значения в формулу для определения степени общего риска, можно найти дисперсии для ценных бумаг А и Б.

$$\sigma_A^2 = 1{,}2^2 \times 8^2 + 6{,}06^2 = 129$$

$$\sigma_B^2 = 0{,}8_p^2 \times 8^2 + 4{,}76^2 = 64$$

Если рассмотреть комбинацию ценных бумаг А и В в портфеле в равных долях, то есть при X_A=0,5 и X_B=0,5, то «бета» для данного портфеля может быть рассчитана по формуле:

$$\beta_p = 0{,}5 * 1{,}2 + 0{,}5 * 0{,}8 = 1{,}0$$

Дисперсия случайной погрешности портфеля составит:

$$\sigma_\varepsilon^2 = 0{,}5^2 * 6{,}06^2 + 0{,}5^2 * 4{,}76^2 = 15$$

Дисперсия портфеля из 2 ценных бумаг составит:

$$\sigma_p^2 = 1{,}0^2 \times 8^2 + 15 = 79.$$

Данное выражение представляет общий риск портфеля, состоящего из 2 ценных бумаг.

Рассмотрим, что произойдет при комбинировании первых двух ценных бумаг с третьей ценной бумагой С в случае формирования портфеля, состоящего из 3 ценных бумаг, взятых в равной пропорции:

$$X_A = X_B = X_C = 0{,}33$$

Третья ценная бумага имеет «бету», равную 1,0 и случайную погрешность, стандартное отклонение которой составляет 5,5%.

Таким образом, дисперсия ценной бумаги С вычисляется по формуле:

$$\sigma_C^2 = 1{,}0^2 \times 8^2 + 5{,}5^2 = 94$$

«Бета» портфеля из 3 ценных бумаг составит:

$$\beta_p = 0{,}33 * 1{,}2 + 0{,}33 * 0{,}8 + 0{,}33 * 1{,}0 = 1{,}0.$$

Таким образом, увеличение диверсификации не привело к изменению уровня рыночного риска, а привело к его усреднению.

Дисперсия случайной погрешности портфеля из 3 бумаг составит:

$$\sigma_\varepsilon^2 = 0{,}33^2 * 6{,}06^2 + 0{,}33^2 * 4{,}76^2 + 0{,}33 * 5{,}5^2 = 10.$$

Отметим, что дисперсия случайной погрешности портфеля из 3 бумаг меньше дисперсии случайной погрешности портфеля из 2 бумаг (10<15). Таким образом, увеличение диверсификации действительно уменьшило собственный риск портфеля.

Дисперсия портфеля из 3 ценных бумаг составит:

$$\sigma_p^2 = 1{,}0^2 \times 8^2 + 10 = 74.$$

Это выражение представляет общий риск портфеля, значение которого меньше, чем значение общего риска портфеля, состоящего из 2 ценных бумаг (74<79). Таким образом, увеличение диверсификации привело к снижению общего риска портфеля.

2.4 Предположения о поведении инвесторов и существовании совершенных фондовых рынков

Для того чтобы понять, как складываются цены финансовых активов, необходимо сконструировать модель. Это требует упрощений, позволяющих создателю модели абстрагироваться от всей сложности ситуации и рассматривать только наиболее важные ее элементы. С этой целью формулируются определенные предположения об объекте исследования. Эти упрощающие предположения призваны обеспечить степень абстракции, позволяющую построить модель. Обоснованность этих предположений не имеет большого значения. Имеет значение способность модели помочь в понимании и предсказании моделируемого процесса.

Как писал Милтон Фридмен, нобелевский лауреат 1976 г. в области экономики: «...Что касается «предположений» какой-либо теории, то уместным является не вопрос об их «реалистичности», которой они никогда не обладают, а о том, насколько хорошей аппроксимации рассматриваемого явления они позволяют добиться. И ответом на этот вопрос является демонстрация того, как работает теория, дает ли она достаточно точные предсказания».

Итак, модель CAPM имеет следующие предположения:

1. Инвесторы производят оценку инвестиционных портфелей, основываясь на ожидаемых доходностях и их стандартных отклонениях за период владения.
2. Инвесторы при выборе между двумя портфелями предпочтут тот, который, при прочих равных условиях, дает наибольшую ожидаемую доходность.
3. Инвесторы не желают рисковать, то есть при выборе между двумя портфелями они предпочтут тот, который, при прочих равных условиях, имеет наименьшее стандартное отклонение.
4. Частные активы бесконечно делимы. При желании инвестор может купить часть акции.
5. Существует безрисковая процентная ставка, по которой инвестор может дать взаймы (т.е. инвестировать) или взять в долг денежные средства.
6. Налоги и операционные издержки несущественны.
7. Для всех инвесторов период вложения одинаков.
8. Безрисковая процентная ставка одинакова для всех инвесторов.
9. Информация свободно и незамедлительно доступна для всех инвесторов.
10. Инвесторы имеют однородные ожидания (homogeneous expectations), т.е. они одинаково оценивают ожидаемые доходности, среднеквадратичные отклонения и ковариации доходностей ценных бумаг.

Как вытекает из этих предположений, в CAPM рассматривается предельный случай. Все инвесторы обладают одной и той же информацией и по-одинаковому оценивают перспективы ценных бумаг. Неявно это означает, что они одинаковым образом анализируют получаемую информацию. Рынки ценных бумаг являются совершенными рынками в том смысле, что в них нет факторов, которые бы препятствовали инвестициям. Такие потенциальные препятствия, как ограниченная делимость, налоги, операционные издержки, и различие между ставками безрискового заимствования и кредитования считаются отсутствующими. Это позволяет сместить фокус рассмотрения с того, как следует инвестору размещать свои средства, на то, что произойдет с курсами ценных бумаг, если все инвесторы будут поступать одинаково. Исследуя коллективное поведение всех инвесторов на рынке, можно выявить характер конечной равновесной зависимости между риском и доходностью каждой ценной бумаги.

1.5 Лекция № 5 (2 часа)

Тема: Факторные модели

1.5.1 Вопросы лекции:

1. **Рыночная (индексная) модель управления портфелем (модель Шарпа): исходные допущения, показатели бета и альфа акции**
2. **Случайная погрешность и графическая интерпретация рыночной модели**
3. **Однофакторные и многофакторные модели**
4. **Понятие и свойства арбитражного портфеля**
5. **Поведение инвесторов: максимизация доходности портфеля при сохранении уровня рискованности и чувствительности к факторам**
6. **Механизм ценообразования для финансового актива в модели АРТ**

1.5.2 Краткое содержание вопросов:

2.1. Рыночная (индексная) модель управления портфелем (модель Шарпа): исходные допущения, показатели бета и альфа акции

Под рыночной моделью (market model) понимают зависимость между доходностью конкретной акции от доходности рыночного индекса (например, такого как S&P500). Она характеризуется линейной моделью парной регрессии с положительным наклоном, поэтому с ростом рыночного индекса будет расти и средняя цена акции и, наоборот, с падением рыночного индекса будет падать цена акции. В формализованном виде рыночная модель может быть представлена следующим образом:

$$r_i = \alpha + \beta \times r_I + \varepsilon$$

где

r_i - доходность i - ой акции за определенный период

α - ордината точки пересечения прямой с вертикальной осью

β - величина наклона прямой, коэффициент «бета» (регрессии)

r_I - доходность рыночного индекса за определенный период

ε - (эпсилон) величина случайной ошибки

Доходность любого финансового актива (ценной бумаги) определяется по формуле:

$$r = \frac{\textit{Стоимость на конец периода владения}}{\textit{Стоимость на начало периода владения}} - 1$$

Рыночный индекс - индекс изменения стоимости определенного набора ценных бумаг, цены или доходности которых усредняются для отражения в целом ситуации на конкретном рынке финансовых активов. Наиболее распространенными рыночными индексами являются индекс Доу-Джонса (DJIA), NASDAQ, S&P500 (Standard & Poor`s Stock Price Index).

Последний представляет собой средневзвешенную величину курсов акций 500 наиболее крупных компаний США. Значения его колебались за всю историю существования от -43% до +54%, а среднегодовое значение около 12%. Такие инвестиции могут обеспечить доходность, в среднем существенно превосходящую доходность корпоративных облигаций. Из отечественных индексов самым распространенным является индекс РТС-Интерфакс.

Для объяснения рыночной модели рассмотрим следующий пример. Пусть для акций фирмы А параметр α=2%, а параметр β=1,2. Это значит, что для акций фирмы А рыночная модель будет выглядеть следующим образом:

$$r_A = 2\% + 1{,}2 \times r_I + \varepsilon$$

Таким образом, если рыночный индекс имеет доходность в 10%, то ожидаемая доходность ценной бумаги составляет 14%:

$$r_A = 2\% + 1{,}2 \times 10\% + \varepsilon = 14\%$$

Если рыночный индекс имеет доходность -5%, то ожидаемая доходность ценной бумаги составляет -4%:

$$r_A = 2\% + 1{,}2 \times (-5\%) + \varepsilon = 14\%$$

Следует отметить, что при данных расчетах использовалось среднее значение параметра случайной погрешности ε=0.

2.2 Случайная погрешность и графическая интерпретация рыночной модели

Величина случайной погрешности ε (эпсилон) показывает, что рыночная модель не точно объясняет доходности ценных бумаг. Иными словами, когда рыночный индекс возрастает на 10% или уменьшается на 5%, то доходность ценной бумаги фирмы А не обязательно будет равняться 14% или -4% соответственно. Разность между действительными и ожидаемыми значениями доходности при известной доходности рыночного индекса объясняется случайной погрешностью.

Случайную погрешность можно рассматривать как случайную переменную, которая имеет распределение вероятностей с нулевым математическим ожиданием и стандартным отклонением, обозначенным σ_ε.

Математическое ожидание показателя доходности акций (или среднее значение) - взвешенное среднее всех возможных результатов, с использованием сопутствующих вероятностей в качестве весов:

$$\bar{r} = \sum r_i \times p_i$$

где $\bar{r}$ - математическое ожидание доходности;

r_i - индивидуальные доходности различных ценных бумаг;

p_i - вероятность появления каждого события, причем сумма вероятностей равна 1.

Стандартное отклонение характеризует риск возникновения возможных «плохих» результатов и их величину, является оценкой вероятного отклонения фактической доходности от ожидаемой:

$$\sigma_\varepsilon = \sqrt{\sum (r_i - \bar{r})^2 \times p_i}$$

Таким образом, случайную погрешность можно рассматривать как результат вращения условного колеса рулетки.

Например, случайную погрешность ценной бумаги фирмы А можно рассматривать как переменную, связанную с колесом рулетки, на котором равномерно расположены целые значения от -10% до 10%. Это означает, что существует 21 возможный результат вращения колеса рулетки (включая нулевой сектор), каждый из которых равновероятен. Отсюда следует, что при заданном наборе чисел среднее значение случайной погрешности равняется 0:

$$\bar{\varepsilon} = (-10 \times \frac{1}{21}) + (-9 \times \frac{1}{21}) + \ldots + (9 \times \frac{1}{21}) + (10 \times \frac{1}{21}) = 0 \cdot$$

Можно заметить, что данное вычисление представляет собой сумму произведений всех возможных результатов на вероятность их появления. Теперь можно показать, сто стандартное отклонение данной случайной погрешности равняется 6,06%:

$$\sigma_\varepsilon = \sqrt{((-10-0)^2 \times \frac{1}{21}) + ((-9-0)^2 \times \frac{1}{21}) + \ldots + ((9-0)^2 \times \frac{1}{21}) + ((10-0)^2 \times \frac{1}{21})} = 6{,}06$$

Данное вычисление включает в себя вычитание среднего значения из каждого возможного результата, затем возведение в квадрат каждой из этих разностей, умножение каждого квадрата на вероятность получения соответствующего результата, суммирование произведений и, наконец, извлечение квадратного корня из результирующей суммы.

В общем случае случайные погрешности ценных бумаг соответствуют рулеткам с другими крайними значениями и другими неравномерными интервалами между значениями. Хотя все они имеют математическое ожидание, равное 0, стандартные отклонения у них могут быть различными.

Рассмотрим ценные бумаги двух различных фирм А и В. В соответствии с рыночной моделью для каждой ценной бумаги можно построить собственную линию, характеризующую зависимость между доходностью конкретной ценной бумаги от доходности рыночного индекса.

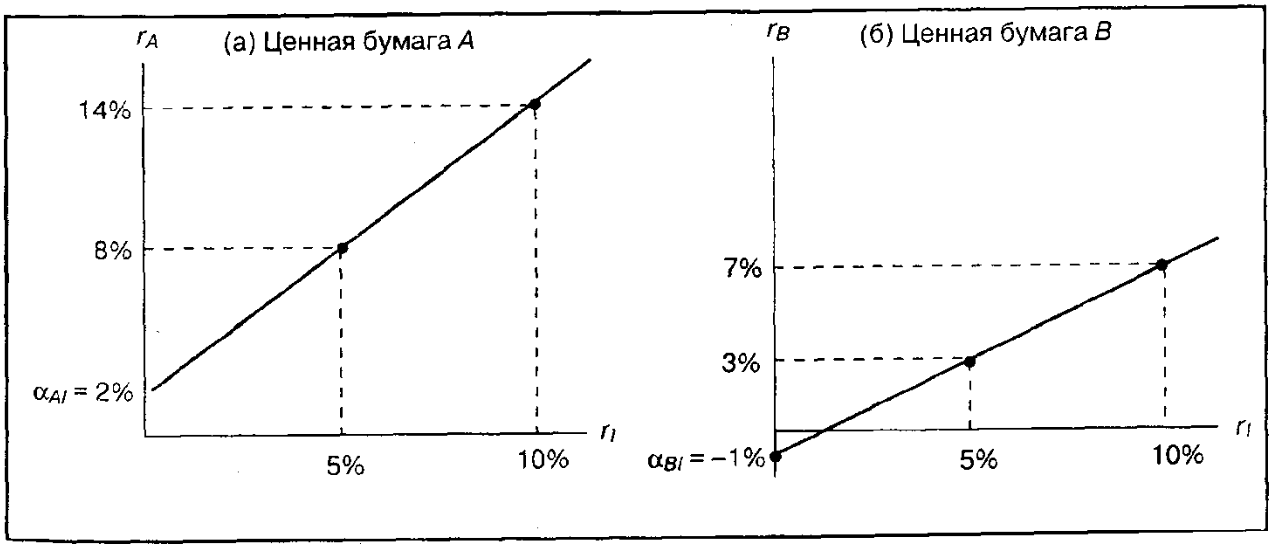


Рис. 1 - Рыночная модель

Так, прямая линия на рисунке 1 слева представляет собой график рыночной модели для ценной бумаги А. Соответственно, прямая линия на рисунке справа представляет собой график рыночной модели для ценной бумаги В.

По вертикальной оси отложены доходности ценных бумаг А.и В, а по горизонтальной оси доходность рыночного индекса. Линии проходят через точки на вертикальной оси, соответствующие значениям $\alpha_A = 2\%$ и $\alpha_B = -1\%$, которые в данном примере составляют соответственно 2% и -1%. Линии ценных бумаг соответственно имеют коэффициенты «бета» $\beta_A = 1{,}2$ и $\beta_B = 0{,}8$ и построены без учета случайной погрешности. Соответственно уравнения прямых, построенных для ценных бумаг фирм А и В выглядят следующим образом:

$$r_A = 2\% + 1{,}2 \times r_I$$

$$r_B = -1\% + 0{,}8 \times r_I$$

Отметим, что наклон в рыночной модели ценной бумаги измеряет чувствительность её доходности к доходности рыночного индекса. Обе линии на рисунке имеют положительный наклон, показывающий, что чем выше доходность рыночного индекса, тем выше доходности этих ценных бумаг.

Однако прямые имеют различный наклон. это означает, что ценные бумаги имеют различную чувствительность к доходности рыночного индекса. Точнее, ценная бумага А имеет больший наклон, чем В, показывающий, что доходность А является более чувствительной к доходности рыночного индекса, чем доходность В.

Предположим, что ожидаемая доходность рыночного индекса составляет 5%. Тогда если фактическая доходность рыночного индекса составит 10%, то она превысит на 5% ожидаемую доходность. Тогда доходность ценной бумаги А должна превысить изначально ожидаемую доходность на 6% (14% - 8%). Аналогично доходность ценной бумаги В должна превысить изначально ожидаемую доходность на 4% (7% - 3%). Причиной разности в 2% (6%-4%) является тот факт, что ценная бумага А имеет больший наклон, чем ценная бумага В, то есть доходность ценной бумаги А является более чувствительной к доходности рыночного индекса, чем доходность ценной бумаги В.

Коэффициент «бета» рыночной модели вычисляется по формуле:

$$\beta_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_I^2}$$

где

σ_i - ковариация между доходностью акции i и доходностью рыночного индекса;

σ_I^2 - дисперсия доходности рыночного индекса.

Ковариация - статистическая мера взаимодействия двух случайных переменных. Положительное значение ковариации говорит о том, что доходности двух ценных бумаг (финансовых активов) изменяются в одном направлении, отрицательное значение ковариации - об изменение доходности в разных направлениях, и значение ковариации, близкое к нулю - о вероятном отсутствии связи в направлении изменения доходностей двух случайных переменных.

Акция, которая имеет доходность, являющуюся зеркальным отражением доходности рыночного индекса будет иметь «бета»-коэффициент, равный 1. То есть акции с «бета»-коэффициентом больше единицы (такие, как А) обладают большей изменчивостью, чем рыночный индекс, и носят название «агрессивные» акции. И, наоборот, акции с «бета»-коэффициентом меньше единицы (такие, как В) обладают меньшей изменчивостью, чем рыночный индекс, и называются «оборонительными» акциями.

Случайная погрешность позволяет сделать предположение, что при данной доходности рыночного индекса действительная доходность ценной бумаги обычно лежит вне прямой, задаваемой уравнением рыночной модели. Если действительные доходности ценных бумаг А и В составляют 9 и 11% соответственно, а действительная доходность рыночного индекса составляет 10%, то можно заметить, что действительные доходности акций фирм А и В состоят из следующих компонентов:

	Ценная бумага A	Ценная бумага B
Координаты точки пересечения	2%	-1%
Произведение действительной доходности рыночного индекса и «бета»-коэффициента	12%=10%*1,2	8%=10%*0,8
Величина случайной погрешности	-5%=9%-(2%+12%)	4%=11%-(-1%+8%)
Действительная доходность	9%	11%

В данном случае можно сказать, что мы «прокрутили» колесо рулетки для А и В и в результате этого действия получили значения -5% для А и +4% для В.

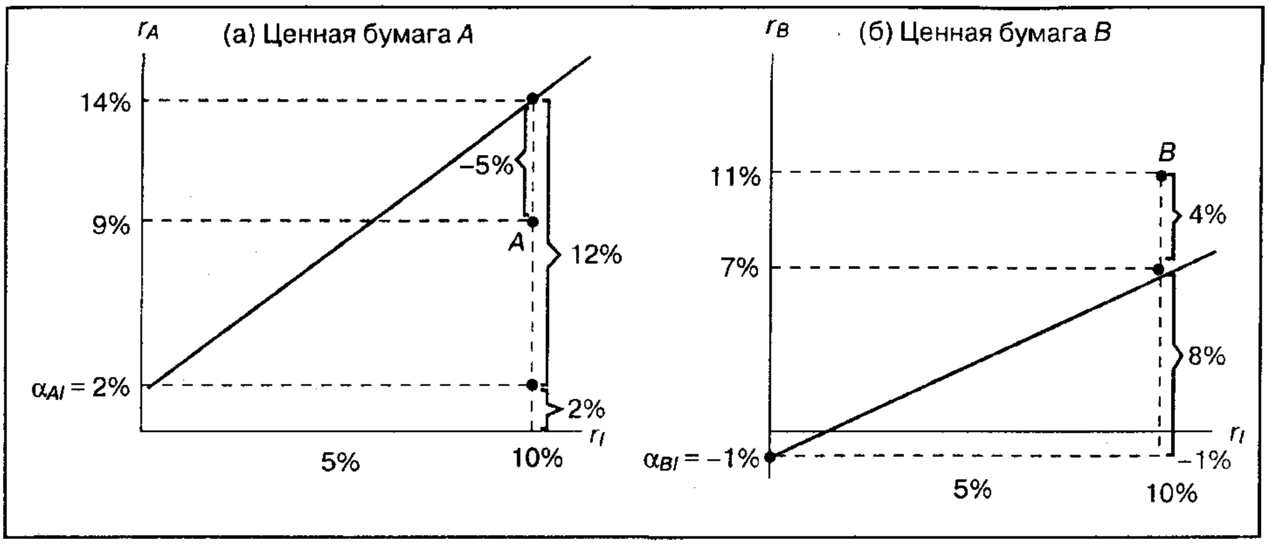


Рис. 2 - Рыночная модель и действительные доходности

Можно заметить, что данные значения равняются вертикальным расстояниям, на которые действительные доходности ценных бумаг отклоняются от прямой линии рыночной модели, как это показано на рисунке 2.

2.3 Однофакторные и многофакторные модели

Некоторые инвесторы утверждают, что процесс формирования дохода по ценным бумагам описывается одним-единственным фактором. Например, они могут считать, что доходности ценных бумаг реагируют на предсказанный темп роста валового внутреннего продукта (ВВП).

Горизонтальная ось на рис.3 соответствует предсказанному темпу прироста ВВП, а вертикальная ось — доходности акций компании А. Каждая звездочка на графике представляет собой комбинацию доходности акций *А* и темпа прироста ВВП. С помощью *метода парной регрессии* данные были аппроксимированы прямой линией. Эта прямая имеет положительный наклон, что указывает на существование положительной связи между скоростью прироста ВВП и доходностью по акциям компании А. Более высокие темпы прироста ВВП соответствуют более высоким доходностям.

Связь между предсказанным темпом прироста ВВП и доходностью акций компании *А* может быть выражена в виде уравнения:

$$r_t = a + b \cdot ВВП_t + e_t$$

где

r_t - доходность акции за период t

a - ордината точки пересечения прямой с вертикальной осью (нулевой фактор для ВВП)

b - величина наклона прямой, коэффициент регрессии (чувствительность к предсказанному темпу прироста ВВП)

$ВВП_t$ - предсказанный темп прироста ВВП за период t

e_t - величина случайной ошибки (уникальная или специфическая доходность за период t)

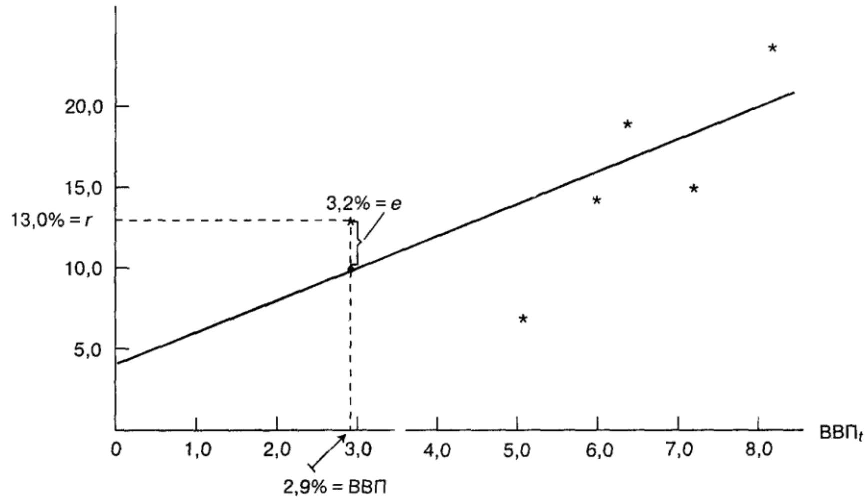


Рис.3 - Однофакторная модель

На рис. 3 нулевой фактор равен 4% за период. Это доходность, которая ожидалась бы для акций *A*, если бы предсказанный темп прироста ВВП равнялся нулю. Чувствительность акций *A* к предсказанному темпу прироста ВВП равна двум, поэтому более высокий предсказанный прирост ВВП ассоциируется с более высокой доходностью акций А. Например, если предсказанный прирост ВВП равен 5%, то акции дадут доходность в 14% (4%+2*5%). Для любой точки на графике можно определить уникальную доходность акций, путём вычитания ожидаемой доходности, соответствующей предсказанному приросту ВВП, и фактической доходности.

В итоге однофакторная модель отражает доходность акций за любой конкретный период в виде суммы трех элементов:

Элемент, одинаковый для всех периодов (параметр *a*).

Элемент, который меняется от периода к периоду и зависит от предсказанного темпа прироста ВВП (произведение параметра *b* и ВВП).

Элемент, специфический для конкретного рассматриваемого периода (параметр *e*).

Состояние экономики затрагивает большинство фирм. Поэтому можно полагать, что изменения в ожиданиях относительно будущего состояния экономики имеют очень большое влияние на доходности большинства ценных бумаг. Можно выделить несколько факторов, оказывающих влияние на все сферы экономики.

1. Темпы прироста валового внутреннего продукта.
2. Уровень процентных ставок.
3. Уровень инфляции.
4. Уровень цен на нефть.

В отличие от однофакторных моделей многофакторная модель доходности ценных бумаг, учитывающая эти различные воздействия, может быть более точной. В качестве примера рассмотрим модель, в которой предполагается, что процесс формирования дохода включает два фактора.

В виде уравнения двухфакторная модель для периода *t* записывается так:

$$r_t = a + b_1 \cdot F_{1t} + b_2 \cdot F_{2t} + e_t$$

где F_1 и F_2 — два фактора, оказывающих влияние на доходы по всем ценным бумагам, а b_1 и b_2 - чувствительности ценной бумаги *i* к этим двум факторам. Как и в случае однофакторной модели, e_t - случайная ошибка, *a* - ожидаемая доходность ценной бумаги при условии, что каждый фактор имеет нулевое значение.

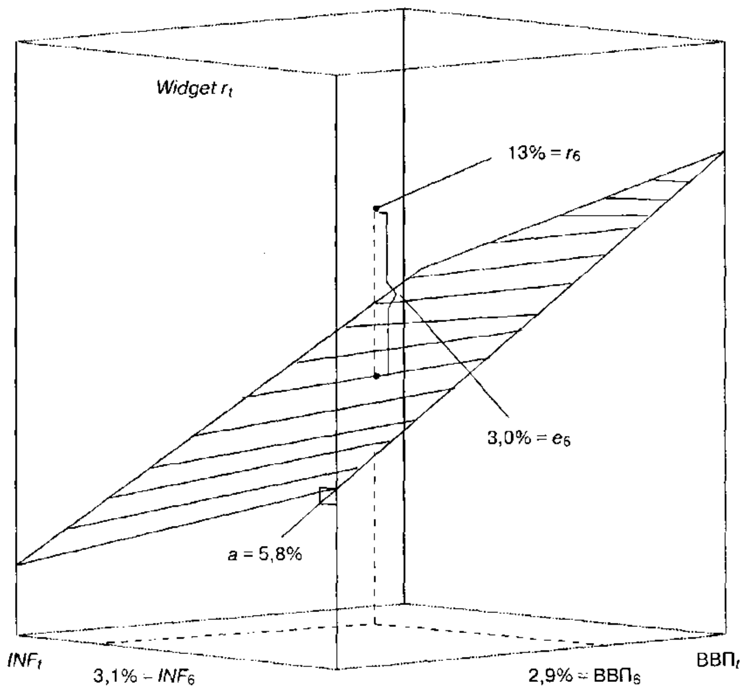


Рис. 4 - Двухфакторная модель

Рисунок 4 иллюстрирует случай акций компании *А,* на доходность которых влияют ожидания, как темпов прироста ВВП, так и уровня инфляции. Как и в однофакторном случае, каждая точка на рисунке соответствует определенному году. Однако, на этот раз каждая точка определяется комбинацией доходности, уровня инфляции и темпов прироста ВВП в этом году. Россыпь точек совпадает с двухмерной плоскостью, полученной с помощью статистического метода *множественной регрессии.* Эта плоскость для любой ценной бумаги описывается уравнением:

$$r_t = a + b_1 \text{ВВП}_t + b_2 \times INF_t + e_t.$$

Наклон плоскости в направлении темпа прироста ВВП *(b_1)* представляет чувствительность акций *А* к изменениям темпа прироста ВВП. Наклон плоскости в направлении уровня инфляции *(b_2)* представляет чувствительность этих акций к изменениям уровня инфляции. Отметим, что в этом примере чувствительности и положительны, и отрицательны и имеют значения 2,2 и -0,7. Это указывает на то, что с увеличением предсказанного темпа прироста ВВП или уровня инфляции доход по акциям должен возрасти или уменьшиться соответственно.

Смещение (нулевой фактор), равное на рис. 2 5,8%, дает ожидаемую доходность для случая, когда и прирост ВВП, и инфляция равны нулю. Наконец, для конкретного года расстояние от фактической точки до плоскости равно специфической доходности в этом году (е), т.е. той части доходности, которая не связана ни с приростом ВВП, ни с инфляцией. Например, если ВВП вырос на 2,9%, а инфляция составила 3,1%, то ожидаемая доходность акций равна 10% (5,8% + 2,2*2,9% - 0,7*3,1%). Следовательно, специфическая доходность этих акций равна +3% (13% - 10%).

В рамках двухфакторной модели для каждой ценной бумаги нужно оценить четыре параметра: а, b_1, b_2, и стандартное отклонение случайной ошибки, обозначаемое как σ_e.

2.4 Понятие и свойства арбитражного портфеля

Альтернативой модели CAPM является равновесная модель цен на финансовые активы, разработанная Стефаном Россом и известная как теория арбитражного ценообразования (Arbitrage Pricing Theory, APT). Модель APT основана на меньшем числе предположений по сравнению с моделью CAPM. В отличие от модели CAPM главным предположением модели APT является то, что каждый инвестор стремиться использовать возможность увеличения доходности своего портфеля без увеличения риска. APT исходит также из предположения, что доходности ценной бумаги описываются факторной моделью, но не идентифицируются сами факторы. Механизмом реализации данной возможности является принцип арбитража.

Арбитраж – это получение безрисковой прибыли путем использования разных цен на одинаковые продукцию или ценные бумаги. Арбитраж, являющийся широко распространенной инвестиционной тактикой, обычно состоит из продажи ценной бумаги по относительно высокой цене и одновременной покупки такой же ценной бумаги по относительно низкой цене. Это основная идея *арбитражного портфеля,* который должен иметь чистую рыночную стоимость, равную 0, нулевую чувствительность к каждому фактору и положительную ожидаемую доходность. Поясним свойства арбитражного портфеля.

Во-первых, арбитражный портфель не нуждается в дополнительных ресурсах инвестора. Так, если предположить, что инвестор обладает акциями 3 видов, текущая стоимость каждой составляет 4 тыс.руб., общая стоимость инвестированного капитала 12 тыс.руб., известны доходности и чувствительности этих бумаг (см.табл. 1):

Таблица 1 – Исходные данные

i	r_i	b_i
Акция 1	15	0,9
Акция 2	21	3,0
Акция 3	12	1,8
В среднем для портфеля	16	1,9

Через X_i обозначим изменение в стоимости ценной бумаги i в портфеле инвестора, значит и её вес в арбитражном портфеле. Можно сумму изменений представить так:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 0.$$

Во-вторых, портфель не чувствителен ни к какому фактору, и поскольку чувствительность портфеля к фактору является взвешенной средней чувствительностей ценных бумаг портфеля, то в общем виде это требование арбитражного портфеля можно записать так:

$$b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 = 0.$$

Для взятого примера:

$$0,9X_1 + 3,0X_2 + 1,8X_3 = 0.$$

То есть арбитражный портфель имеет нулевую подверженность воздействию факторов и, исходя из представленных уравнений, можно построить множество потенциальных арбитражных портфелей.

В-третьих, необходимо определить ожидаемую доходность портфеля, чтобы понять, можно ли считать его арбитражным, то есть необходимо, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$X_1 \bar{r}_1 + X_2 \bar{r}_2 + X_3 \bar{r}_3 > 0.$$

Для взятого примера:

$$15X_1 + 21X_2 + 12X_3 > 0.$$

Пусть X_1=0,1, в результате получим:

$$0,1 + X_2 + X_3 = 0$$
$$0,9*0,1 + 3,0X_2 + 1,8X_3 = 0$$
$$X_2 = -(X_3 + 0,1)$$
$$0,09-3*(X_3 + 0,1) + 1,8X_3 = 0$$
$$0,09 - 3X_3 - 0,3 + 1,8X_3 = 0$$
$$1,2X_3 = -0,21$$
$$X_3 = -0,21/1,2 = -0,175$$
$$X_2 = -0,1 + 0,175 = 0,075$$

Для данного портфеля ожидаемая доходность равна:

$$15\%*0,1 + 21\%*0,075 - 12\%*0,175 = 0,975\%.$$

Так как доходность положительна, то данный портфель является арбитражным. Найденный арбитражный портфель предполагает покупку акций первого вида на 0,1*12 =1,2 тыс.руб., второго вида на 0,075*12 = 0,9 тыс.руб. за счёт продажи акций третьего вида на сумму 0,175*12 = 2,1 тыс.руб.

Таким образом, этот арбитражный портфель привлекателен для инвестора, который стремится к большему доходу, так как 1) не требует дополнительных инвестиций, 2) не имеет факторного риска и 3) обладает положительной ожидаемой доходностью.

2.5 Поведение инвесторов: максимизация доходности портфеля при сохранении уровня рискованности и чувствительности к факторам

В определенный момент каждый инвестор должен выбрать между:

1) владением как старым, так и новым арбитражным портфелем;

2) владением только новым портфелем.

Для этого он может, например, оценить долю акций 1-го вида. Эта доля в старом портфеле равнялась 0,33, а в арбитражном портфеле — 0,10, что в сумме дает 0,43. Заметим, что стоимость акций 1-го вида в новом портфеле возрастает до 5,2 тыс.руб (4 тыс.руб. + 1,2 тыс.руб), т.е. их доля равна 0,43 (5,2/12), что совпадет с суммой долей этих акций в старом и новом арбитражных портфелях.

Аналогично, ожидаемая доходность портфеля равна сумме ожидаемых доходностей старого и нового арбитражных портфелей, или 16,975% (16% + 0,975%). Ожидаемая доходность нового портфеля также может быть подсчитана с использованием долей акций в новом портфеле и ожидаемой доходности акций [(0,43 x 15%) + (0,41 x 21%) + (0,16 x 12%) = 16,975%].

Чувствительность нового портфеля равна 1,9 [(0,43 x 0,9) + (0,41 x 3,0) + (1,16 x 1,8)]. Это то же самое, что и сумма чувствительностей старого и арбитражного портфелей (1,9 + 0,0). В табл. 2 приведены данные, иллюстрирующие приведенные выше рассуждения.

Таблица 2 – Альтернативы инвестора в модели APT

	Старый портфель	+	Арбитражный портфель	=	Новый портфель
Доли, %					
X_1	0,33		0,1		0,43
X_2	0,33		0,075		0,41
X_3	0,33		-0,175		0,16
Свойства					
$\bar{r}_p$	16%		0,975%		16,975%
b_p	1,9		0		1,9
σ_p	11%		Малая величина		11%

Как определить рискованность нового портфеля? Предположим, что стандартное отклонение для старого портфеля равно 11%. Дисперсия арбитражного портфеля будет мала, поскольку единственным источником риска является нефакторный риск. Соответственно дисперсия нового портфеля будет отличаться от дисперсии старого портфеля только вследствие изменения нефакторного (собственного) риска. Принято считать, что арбитражный портфель должен быть достаточно диверсифицирован, чтобы иметь незначительный нефакторный риск и, следовательно, незначительный общий риск. Таким образом, можно заключить, что рискованность нового портфеля приблизительно равна 11%.

2.6 Механизм ценообразования для финансового актива в модели APT

Каковы последствия от покупки акций 1-го и 2-го и продажи акций 3-го вида? Если каждый инвестор будет поступать таким образом, то это повлияет на курсы акций и, соответственно, на их ожидаемые доходности. Конкретнее, курсы акций 1-го и 2-го вида поднимутся вследствие увеличения спроса. В свою очередь это повлечет за собой падение ожидаемой доходности акций 1-го и 2-го вида. Возросшие продажи акций 3-го вида, наоборот, повлекут за собой падение курса этих акций и повышение ожидаемой доходности.

Следующее уравнение для оценки ожидаемой доходности акций выражает эту зависимость:

$$\bar{r} = \frac{\overline{P}_1}{P_0} - 1,$$

где P_0 — текущий курс акции, а P_1 — ожидаемый курс акции в конце периода. Покупка акций 1-го или 2-го вида поднимет их текущий курс P_0 и, следовательно, снизит их ожидаемую доходность $\bar{r}$. С другой стороны, продажа акций 3-го вида снизит их текущий курс и приведет к повышению их ожидаемой доходности.

Подобная деятельность по покупке и продаже будет продолжаться до тех пор, пока все арбитражные возможности не будут существенно сокращены или исчерпаны. В этом случае существует близкая к линейной зависимость между ожидаемыми доходностями и чувствительностями:

$$\bar{r}_i = \lambda_0 + \lambda_1 b_i$$

где λ_0 и λ_1 являются константами. Это уравнение является уравнением ценообразования для финансового актива в модели APT, когда доходы генерируются одним фактором. Отметим, что это уравнение является линейным, т.е. в состоянии равновесия зависимость между ожидаемыми доходностями и чувствительностями линейна.

В данном примере одним из возможных равновесных сочетаний является λ_0 = 8 и λ_1 = 4. Следовательно, уравнением ценообразования будет такое уравнение:

$$\bar{r}_1 = 8 + 4b_i$$

Таким образом, мы придем к следующим равновесным значениям ожидаемых доходностей для акций всех трех видов:

$$\bar{r}_1 = 8 + (4x\ 0{,}9) = 11{,}6\%;$$
$$\bar{r}_2 = 8 + (4\ x\ 3{,}0) = 20{,}0\%;$$
$$\bar{r}_3 = 8 + (4x\ 1{,}8) = 15{,}2\%.$$

В результате получаем, что ожидаемая доходность акций 1-го и 2-го вида упадет с 15 и 21% до 11,6 и 20% соответственно вследствие увеличения покупательского спроса. При этом увеличение предложения акций 3-го вида приведет к повышению их ожидаемой доходности с 12 до 15,2%. По сути дела, в ситуации равновесия ожидаемая доходность любой ценной бумаги является линейной функцией от чувствительности ценной бумаги к фактору b_i.

На рис. 5 изображено решение уравнения. Любая ценная бумага, для которой ожидаемая доходность и чувствительность к фактору лежат вне прямой линии, будет, по теории APT, неправильно оцененной бумагой, что предоставит инвестору возможность сформировать арбитражный портфель. Примером подобной бумаги является ценная бумага *B.* Если инвестор купит ценную бумагу *B* и продаст ценную бумагу *S* на равные суммы долларов, то тем самым он сформирует арбитражный портфель. Как такое может быть?

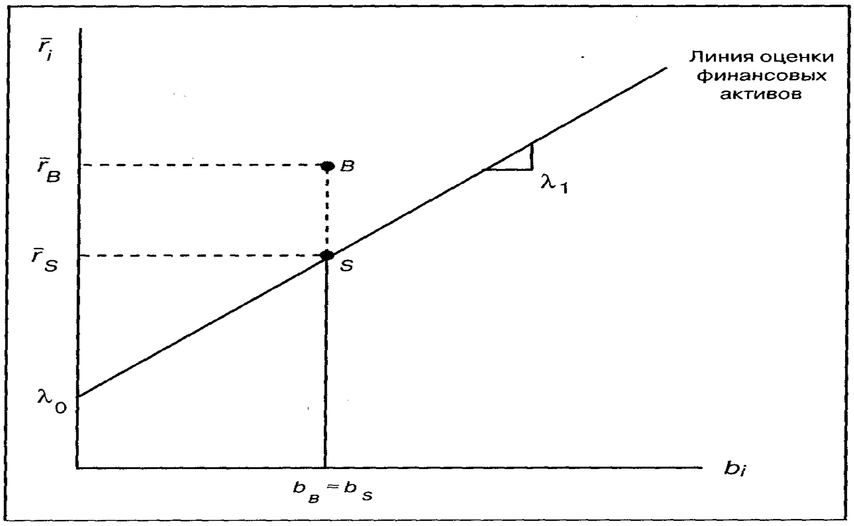


Рис. 5 - Линия оценки финансовых активов в модели *APT*

Во-первых, продавая некоторое количество бумаг *S* для оплаты покупки бумаг *B,* инвестор не прибегает к новым фондам. Во-вторых, поскольку ценные бумаги *B* и *S* обладают одинаковыми чувствительностями к фактору, то продажа бумаг *S* и покупка бумаг *B* приведут к формированию портфеля, нечувствительного к фактору. Таким образом, арбитражный портфель будет обладать положительной ожидаемой доходностью, потому что ожидаемая доходность ценной бумаги *B* больше, чем ожидаемая доходность ценной бумаги *S*. В результате покупок инвесторами бумаги *B* ее цена будет повышаться и, следовательно, ее ожидаемая доходность будет понижаться до тех пор, пока точка, соответствующая характеристикам ценной бумаги *B,* не окажется на линии оценки финансовых активов модели *APT*.

1.6 Лекция № 6 (1 час)

Тема: Модель определения «стоимости под риском» (VAR-модель)

1.6.1 Вопросы лекции:

1. **«Стоимость под риском» (Value-at-Risk): понятие, временной горизонт и методы расчета**
2. **Параметрический метод расчёта VaR**
3. **Метод исторического моделирования расчета VaR**
4. **Метод Монте-Карло расчета VaR**

1.6.2 Краткое содержание вопросов:

2.1 «Стоимость под риском» (Value-at-Risk): понятие, временной горизонт и методы расчета

Наиболее распространенный метод количественной оценки величины рыночного риска торговых позиций – VaR.

VaR – это выраженная в денежных единицах базовой валюты оценка величины, которую не превысят ожидаемые в течение данного периода времени (временной горизонт) потери с заданной вероятностью (уровень доверия). Базой для оценки VaR является динамика курсов и цен инструментов за установленный период времени в прошлом.

Временной горизонт часто выбирается исходя из срока нахождения финансового инструмента в портфеле или его ликвидности, исходя из минимального реального срока, на протяжении которого можно реализовать на рынке данный инструмент без существенного убытка. Временной горизонт измеряется числом рабочих или торговых дней.

Уровень доверия, или вероятность, выбирается в зависимости от предпочтений по риску, выраженных в регламентирующих документах банка. На практике часто используется уровень в 95% и 99%. Базельский комитет по банковскому надзору рекомендует уровень в 99%, на который ориентируются надзорные органы. Величина VaR рассчитывается тремя основными методами: параметрическим; методом исторического моделирования; методом Монте-Карло.

2.2 Параметрический метод расчёта VaR

Данный метод может использоваться для оценки рыночного риска финансовых инструментов, по которым банк имеет открытую позицию. Стоит отметить, что параметрический метод плохо подходит для оценки риска активов с нелинейными ценовыми характеристиками. Основным недостатком данного метода является предположение о нормальном распределении доходностей финансовых инструментов, которое, как правило, не соответствует параметрам реального финансового рынка. Для параметрического расчёта VaR необходимо регулярно рассчитывать волатильность котировок ценных бумаг, валютных курсов, процентных ставок или иных риск-факторов (переменная, от которой в наибольшей степени зависит изменение стоимости открытых банком позиций).

Базовая формула для определения VaR с учетом стоимости позиции актива имеет следующий вид:

$$VaR = V * \lambda * \sigma,$$

где:

λ – квантиль нормального распределения для выбранного доверительного уровня. Квантиль показывает положение искомого значения случайной величины относительно среднего, выраженное в количестве стандартных отклонений доходности портфеля. При вероятности отклонения от среднего, равного 99%, квантиль нормального распределения составляет 2,326, при 95% – 1,645;

σ – волатильность изменения риск-фактора. Волатильность – это стандартное (среднеквадратическое) отклонение изменения риск-фактора относительно его предыдущего значения;

V – текущая стоимость открытой позиции. Под открытой позицией понимается рыночная стоимость финансовых инструментов, купленных или проданных банком для получения прибыли или иных целей таким образом, что количество финансовых инструментов, находящихся в рассматриваемый момент на балансовых или забалансовых счетах, не равно нулю.

Пример:

Инвестор владеет акциями компании стоимостью 10 млн.руб. Заданный уровень доверия 99% с временным горизонтом в один день. Однодневная волатильность цены акций (σ) = 2,15. VaR = 10 * 2,33* 2,15 = 50,09 млн.руб. Другими словами, вероятность того, что убытки инвестора превысят 50 млн.руб. в течение ближайших суток, равна 1 %. Убытки, превышающие 50 млн.руб. ожидаются в среднем один раз в 100 дней торгов.

2.3 Метод исторического моделирования расчета VaR

Данный метод основан на предположении о стационарности поведения рыночных цен в ближайшем будущем.

Сначала выбирается период времени (число рабочих или торговых дней), за который отслеживаются исторические изменения цен всех активов, входящих в портфель. Для каждого периода времени моделируются сценарии изменения цены. Гипотетическая цена актива рассчитывается как его текущая цена, умноженная на прирост цены, соответствующий данному сценарию. Затем производится полная переоценка всего текущего портфеля по ценам, смоделированным на основе исторических сценариев, и для каждого сценария вычисляется, насколько может измениться стоимость текущего портфеля. После этого полученные результаты ранжируются по номерам в порядке убывания (от самого большого прироста до самого большого убытка). И, наконец, в соответствии с желаемым уровнем доверия величина VaR определяется как такой максимальный убыток, который равен абсолютной величине изменения с номером, равным целой части числа (1- квантиль при заданном уровне доверия) * число сценариев.

В отличие от параметрического метода, метод исторического моделирования позволяет наглядно и полно оценить риск, он хорошо подходит для оценки риска активов с нелинейными ценовыми характеристиками. Преимущество исторического моделирования заключается в том, что он исключает высокое влияние модельного риска и основан на реально наблюдавшейся в прошлом модели, без учета предположений о нормальном распределении или какой-либо другой стохастической модели динамики цен на рынке. Стоит отметить, что при расчете VaR данным методом присутствует высокая вероятность ошибок измерения при малом периоде исторической выборки. Кроме того, из выборки не исключаются наиболее старые наблюдения, что резко ухудшает точность модели.

Пример:

В 400 сценариях оказалось 300 случаев убытка и 100 случаев прироста. VaR (95%) – это абсолютная величина 21-го по величине убытка (400+1-1(1-0,05)*400=21, где 0,05 - квантиль при уровне доверия 95%), т.е. изменения под номером 380.

2.4 Метод Монте-Карло расчета VaR

Метод Монте-Карло, или метод стохастического моделирования, является самым сложным методом расчета VaR, однако его точность может быть значительно выше, чем у других методов. Метод Монте-Карло очень схож с методом исторического моделирования, он также основан на изменении цен активов, только с заданными параметрами распределения (математическим ожиданием, волатильностью). Метод Монте-Карло подразумевает осуществление большого количества испытаний – разовых моделирований развития ситуации на рынках с расчетом финансового результата по портфелю. В результате проведения данных испытаний будет получено распределение возможных финансовых результатов, на основе которого путем отсечения наихудших согласно выбранной доверительной вероятности может быть получена VaR-оценка. Метод Монте-Карло не подразумевает свертывания и обобщения формул для получения аналитической оценки портфеля в целом, поэтому и для результата по портфелю и для волатильностей и корреляций можно использовать значительно более сложные модели. Метод заключается в следующем. По ретроспективным данным (периоду времени) рассчитываются оценки математического ожидания и волатильность. С помощью датчика случайных чисел данные генерируются с помощью нормального распределения и заносятся в таблицу. Далее вычисляется траектория моделируемых цен по формуле натурального логарифма и производится переоценка стоимости портфеля.

Так как оценка VaR методом Монте-Карло практически всегда производится с использованием программных средств, данные модели могут представлять собой не формулы, а достаточно сложные подпрограммы. Таким образом, метод Монте-Карло позволяет использовать при расчете рисков модели практически любой сложности. Преимущество метода Монте-Карло заключается еще и в том, что предоставляется возможность использовать любые распределения. Кроме того, метод позволяет моделировать поведения рынков - трендов, кластеров высокой или низкой волатильности, меняющихся корреляций между факторами риска, сценариев «что–если» и т.д. При этом стоит отметить, что данный метод требует мощных вычислительных ресурсов и при простейших реализациях может оказаться близок к историческому или параметрическому VaR, что приведет к наследованию всех их недостатков.

Недостатком метода оценки рисков VaR является то, что он игнорирует очень многие значительные и интересные детали, необходимые для реального представления рыночных рисков. VaR не учитывает, какой вклад в риск вносит рынок, какие структурные изменения портфеля увеличивают риск, а также какие инструменты хеджирования контролируют специфический риск. Модель не дает информации о наихудшем возможном убытке за пределами значения VaR (при заданном уровне доверия 95% остается неизвестным, какими могут быть потери в оставшихся 5% случаев).

Расчет риска в соответствии с Положением ЦБ РФ № 313-П.

Величина рыночного риска включается в расчет норматива достаточности собственных средств (капитала) банка в соответствии с Инструкцией Банка России от 16.01.2004 г. № 110-И «Об обязательных нормативах банков». Порядок расчета кредитными организациями размера рыночных рисков предусмотрен Положением ЦБ РФ «О порядке расчета кредитными организациями величины рыночного риска» от 14.11.2007 г. N 313-П. Совокупная величина рыночного риска рассчитывается по формуле:

$$РР = 12{,}5 * (ПР + ФР) + ВР,$$

где:

РР - совокупная величина рыночного риска;

ПР - величина рыночного риска по финансовым инструментам, чувствительным к изменениям процентных ставок (далее - процентный риск);

ФР - величина рыночного риска по финансовым инструментам, чувствительным к изменению текущей (справедливой) стоимости на долевые ценные бумаги;

ВР - величина рыночного риска по открытым кредитной организацией позициям в иностранных валютах и драгоценных металлах.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

2.1 Практическое занятие № ПЗ-1 (2 часа)

Тема: Построение моделей на финансовых рынках

2.1.1 Задание для работы:

1. Построение эффективного множества портфелей ценных бумаг с различными уровнями коэффициентов корреляции между бумагами.
2. Расчеты альфа и бета коэффициентов по акциям и портфелям акций.
3. Построение однофакторных моделей: выбор факторов, определение параметров модели.
4. Построение многофакторных моделей: выбор факторов, определение параметров модели.
5. Определение показателя «стоимости под риском» с использованием различных методов.
6. Составление прогнозов с помощью надстроек скользящей средней.
7. Вычисления с использованием скользящей средней в Microsoft Excel.
8. Составление прогнозов скользящей средней с помощью диаграмм.

2.1.2 Краткое описание проводимого занятия

1. Составление прогнозов с помощью надстроек скользящей средней

Moving Average (скользящее среднее) является одним из старейших технических индикаторов и наиболее часто используемое в области технического анализа. В целом, скользящая средняя является инструментом сглаживания и показывает среднее значение цены на установленный период, который определяется заранее.

Чувствительность скользящей средней слабее, если период, на котором идет его определение больше. Так же если период короткий, то вероятность ложных сигналов возрастает.

По самой своей природе скользящая средняя линия отстает от рыночной деятельности и находится «позади». Скользящая средняя за короткий период (3–5 дней) будет двигаться ближе к цене, чем 40 дневная скользящая средняя.

Существует несколько типов скользящих средних. Наиболее популярны из них простые (или арифметические), экспоненциальные и взвешенные скользящие средние. Так же существуют и другие более экзотические скользящие средние.

Основное различие между скользящими средними – это тот вес, который они придают последними ценам. Скользящие средние могут строиться по любым данным (цена открытия, цена закрытия, средняя цена бара). В нашей лабораторной работе используется цена закрытия.

Чтобы интерпретировать скользящие средние правильно, нужно просто сравнить положение самой скользящей средней и графика цены. Если цена инструмента поднимается выше своей скользящей средней – это генерируется сигнал к покупкам. Если цена располагается ниже своей скользящей средней – это сигнал к продаже.

Иными словами, если цена перемещается ниже своей скользящей средней, это означает долгосрочное движение вниз, а если индикатор перемещается выше своей скользящей средней, это означает долгосрочное движение в сторону повышения тенденции.

Способ построения простых скользящих средних (Moving Average – MA) сводится к формуле простой арифметической средней:

$$MA = \frac{\textit{Сумма цен за период времени}}{\textit{Порядок средней}} \quad (1)$$

При расчете взвешенных скользящих средних (*Weighted Moving Average – WMA*) каждой из цен анализируемого промежутка времени придается «вес», увеличивающийся в направлении к текущему дню. Формула для расчета будет выглядеть так:

$$MA = \frac{\textit{Сумма произведения цен и весов}}{\textit{Сумма весов}} \quad (2)$$

Считается, что придание более поздним значениям цен большего веса дает лучшую, чем у простой средней, информативность для выводов. Можно по этому поводу заметить, что для длительных промежутков времени (день и неделя) для анализа рекомендуется применять простую среднюю *MA*. При анализе коротких промежутков времени (менее часа) возможно применение *EMA* или *WMA*. На средних промежутках времени (час и три часа) рекомендуется применение, как *MA*, так и *EMA* и *WMA*.

Любое более короткое *MA* чувствительнее к изменению цен и позволяет заметить новый тренд раньше, чем любое более длинное. Более короткое среднее, ко всему прочему, значительно легче и чаще меняет свое направление и дает больше всплесков, чем любое более длинное. Причина в том, что при вычислении скользящего среднего мы фактически складываем одни и те же «внутренние» цены промежутка, а изменения в значении скользящего объясняются только появлением одного нового значения и «выпаданием» из списка одного старого. Чем больше «внутренних» цен в нашем промежутке, тем меньшую роль будут играть краевые изменения. Вот мы и приходим к выводу, что среднее большого порядка – штука довольно консервативная и на всякие шумы «плюет» с высоты своего высокого порядка.

Работа со скользящими средними выливается в обработку двух типов сигналов. К первому типу относятся все сигналы, которые подаются самим скользящим средним. Ко второму типу можно отнести все сигналы, подаваемые их комбинациями.

Разберем сигналы, подаваемые «одиноким» скользящим средним:

– когда *MA* растет, можно открывать позиции на покупку. Покупать нужно в тот момент, когда цены падают до уровня *MA* или даже немного ниже средней, чтобы не терять зря возможную прибыль (вообще-то, сейчас был намек вам на то, что кратковременные слабости рынка можно и нужно использовать в своих корыстных целях). Как только куплен, нужно применить меры предосторожности, то есть разместить ордер *stop-loss* ниже последнего локального минимума цен. Как только цены пойдут вверх (когда рынок делом подтвердит показания вашей средней), перенести ордер на уровень пересечения графика цены и линии *MA*;

– когда *MA* падает, следует делать все наоборот. В момент, когда цены поднимутся до *MA* или немного выше, вы можете выгодно продать валюту (помните ведь, что продавать нужно как можно дороже). Как только продали, сразу установите ордер stop-loss выше ближайшего локального максимума. А как только цены опустятся ниже *MA*, опустите вслед за ними ордер *stop-loss* – до уровня пересечения графика цены и линии *MA*;

– когда *MA* идет ровно и только немного колеблется – это говорит о рынке без движения. Другими словами, тренда нет, есть только слабые колебания курсов в пределах более коротких промежутков времени. В такой ситуации практически бесполезно использовать в качестве советчиков скользящие средние.

С другой стороны, свойство средних «чувствовать» тенденции разных временных порядков очень помогает держать руку на пульсе событий. В работе можно руководствоваться следующим эмпирическим правилом: чем более длинный тренд надо найти, тем длиннее должен быть период усреднения. Однако МА в большинстве случаев для цен не должно браться с n меньшим, чем $n = 8$, иначе оно утратит свойства инструмента для выделения тренда.

Показатель среднего движения курса помогает играть в направлении тренда. Основным сигналом от MA является направление его изменения. Оно показывает, куда движется рынок. Когда MA растет, следует играть на повышение, а когда падает, лучше играть на понижение.

Чтобы определить степень правдоподобности сигналов, подаваемых скользящими средними, применяют одновременно комбинации двух или более линий, например, комбинации из порядков 8–27 или 5–13–24. И при этом обращают внимание на положение средних друг относительно друга.

Смысл этого мероприятия заключается в том, что, сравнивая положение средних разных порядков друг относительно друга, мы оцениваем то, есть ли тренды на больших и малых временных интервалах. Средние большего порядка говорят нам о наличии тренда на больших временных интервалах (например, на неделях или днях), а средние маленького порядка – о наличии тренда на небольших интервалах (например, на часах). Мы же с вами, как люди разумные, понимаем, что маленькие переломы зачастую и ведут к большим изменениям. Поэтому каждое изменение направления более короткой средней, а тем более – ее пересечение с длинной может намекнуть нам о возможном изменении более существенной тенденции. Чтобы сделать скользящие средние надежным помощником в торговле, вы должны запомнить следующие простые правила работы с ними:

1) при «бычьем» рынке наиболее чувствительная краткосрочная линия скользящего среднего расположена выше, а наиболее грубая (долгосрочная) – ниже всех остальных, в «медвежьем» рынке наблюдается обратная закономерность;

2) по пересечению линий можно судить об изменении тренда – сначала пересекаются линии более чувствительные, затем в порядке возрастания – более и более грубые;

3) в соответствии с тем, линии каких порядков пересеклись, и как поменялось их взаимное расположение, можно судить о том, какой именно тренд – краткосрочный, среднесрочный или долгосрочный – изменил свое направление;

4) скользящие средние с большим периодом сгладят все второстепенные флуктуации и покажут только долгосрочные тренды. Краткосрочные скользящие средние покажут соответственно более краткосрочные тренды и будут более чувствительными к последним данным, но не покажут долгосрочные тренды.

Одним из простейших приемов сглаживания динамического ряда с учетом «устаревания» является расчет специальных показателей, получивших название экспоненциальных средних, которые широко применяются в краткосрочном прогнозировании. Основная идея метода состоит в использовании в качестве прогноза линейной комбинации прошлых и текущих наблюдений. Экспоненциальная средняя рассчитывается по формуле:

$$Q_t = ay_t + (1-a)Q_{t-1} \qquad (3)$$

где Q_t – экспоненциальная средняя (сглаженное значение уровня ряда) на момент t;

a – коэффициент, характеризующий вес текущего наблюдения при расчете экспоненциальной средней (параметр сглаживания), причем $0< a <1$

Из уравнения следует, что средний уровень ряда на момент t равен линейной комбинации двух величин: фактического уровня для этого же момента и среднего уровня, рассчитанного для предыдущего периода.

Выше отмечено, что a может находиться в пределах от 0 до 1. Однако практически диапазон значений a находится в пределах от 0,1 до 0,3. В большинстве случаев хорошие результаты дает a = 0,1. При выборе значения a, необходимо учитывать, что для повышения скорости реакции на изменение процесса развития необходимо повысить значение a (тем самым увеличивается вес текущих наблюдений), однако при этом уменьшается «фильтрационные» возможности экспоненциальной средней.

2. Вычисления с использованием скользящей средней в Microsoft Excel.

Применение метода экспоненциального сглаживания в прогнозировании рассмотрим на предыдущем примере, дополнив его данными о продажах за последующие месяцы (в пределах года). Допустим, что a=0,2. Для выполнения прогнозных расчетов формулу запишем в следующем виде:

$$\textit{Новый прогноз цены} = a * \textit{последняя цена} + (1 - a) * \textit{предыдущий прогноз}$$

При расчете 1-го значения экспоненциальной средней, как правило, используется в качестве предыдущего прогноза значение предыдущей продажи.

Параметр a в нашей работе возьмем равный 0,1.

Пример: Произведем прогнозирование значений котировок акций ОАО «Сбербанк» с использованием метода скользящей средней.

В начале работы произведем расчёты в столбцах D, E, F.

Для заполнения столбца D устанавливаем курсор в ячейке D9, нажимаем на значок функции на рабочем столе и выбираем функцию СРЗНАЧ. Два раза «кликнем» по функции правой кнопкой мыши, открывается окно. Устанавливаем курсор в первой строке окна, выделяем мышью диапазон B2:B9 и нажимаем кнопку ОК. После этого подводим курсор к правому нижнему углу ячейки D9 до появления черного плюса и удерживая правую кнопку мыши протягиваем значения формулы вниз до конца таблицы (см. рис.1.1).

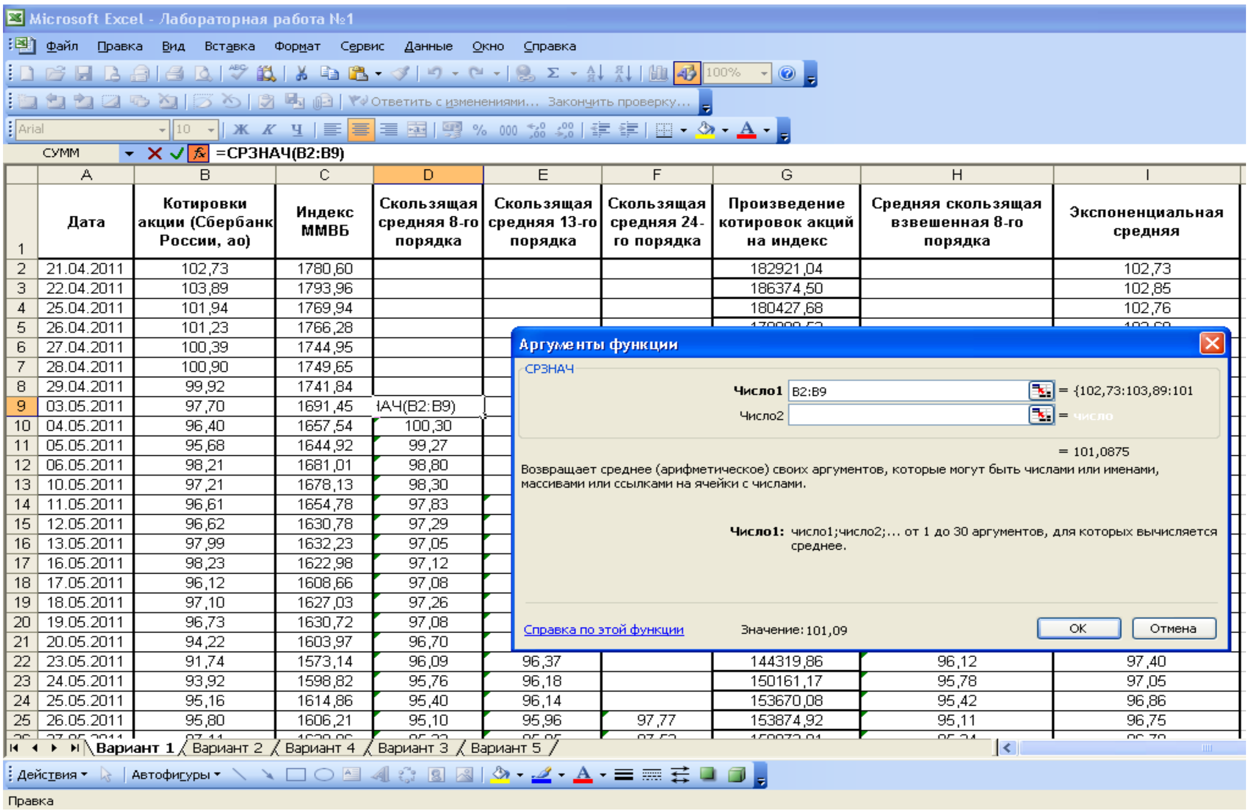


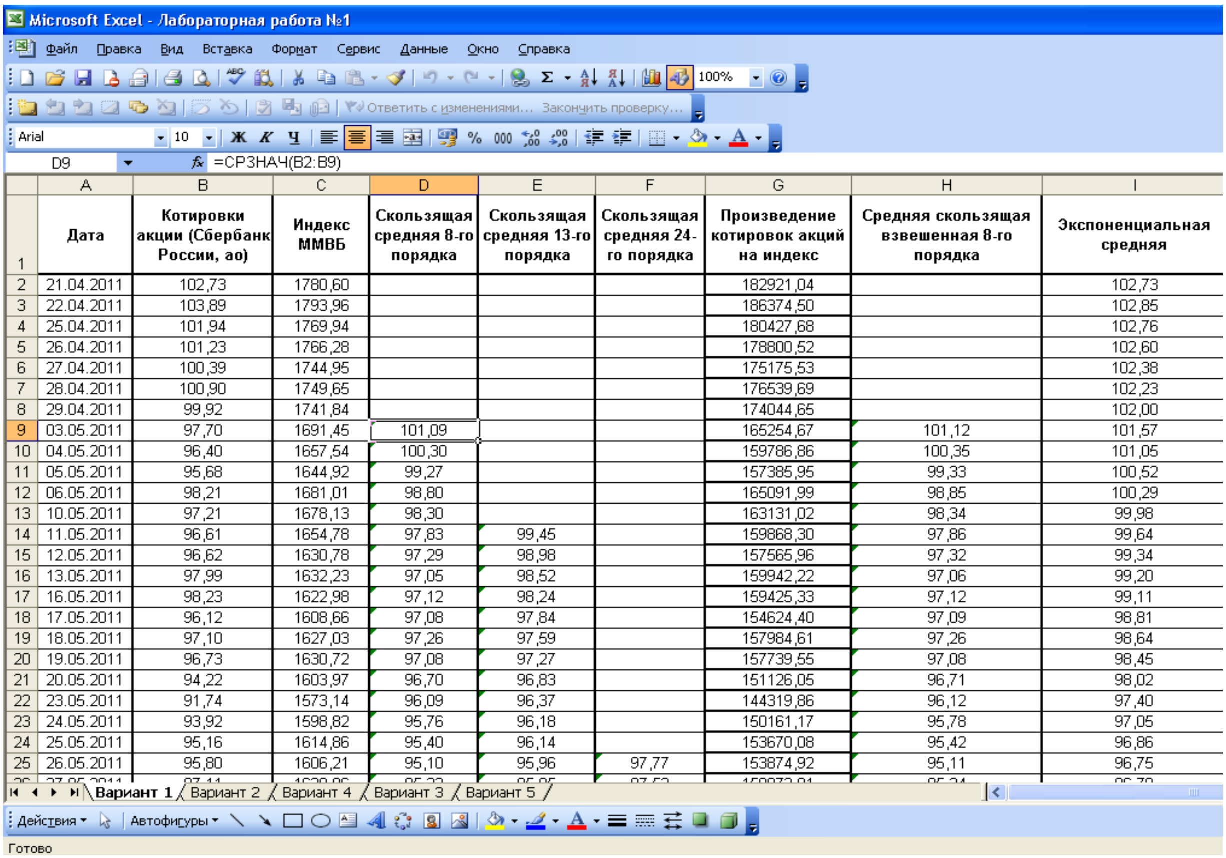
Рисунок 1.1– Расчёт скользящей средней

В столбцах E и F действия аналогичные, но курсор устанавливается в столбце E в ячейке E14, а в столбце F в ячейке F25. И в первом случае первоначально в формуле выделяется диапазон B2:B14, а во втором B2:B25.

Для заполнения столбца G вводим в ячейку G2 формулу: =C2*B2 и протягиваем ее до конца столбца. Чтобы заполнить столбец H в ячейку H9 введем формулу: =СУММ(G2:G9)/СУММ(C2:C9) и протянем ее до конца таблицы.

Чтобы заполнить столбец I в ячейку I2 скопируем значение из ячейки B2, а в ячейке I3 введем формулу: =0,1*B3+0,9*I2 и протянем ее до конца таблицы.

Далее построим четыре диаграммы и проанализируем их.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Дата	Котировки акции (Сбербанк России, ао)	Индекс ММВБ	Скользящая средняя 8-го порядка	Скользящая средняя 13-го порядка	Скользящая средняя 24-го порядка	Произведение котировок акций на индекс	Средняя скользящая взвешенная 8-го порядка	Экспоненциальная средняя
2	21.04.2011	102,73	1780,60				182921,04		102,73
3	22.04.2011	103,89	1793,96				186374,50		102,85
4	25.04.2011	101,94	1769,94				180427,68		102,76
5	26.04.2011	101,23	1766,28				178800,52		102,60
6	27.04.2011	100,39	1744,95				175175,53		102,38
7	28.04.2011	100,90	1749,65				176539,69		102,23
8	29.04.2011	99,92	1741,84				174044,65		102,00
9	03.05.2011	97,70	1691,45	101,09			165254,67	101,12	101,57
10	04.05.2011	96,40	1657,54	100,30			159786,86	100,35	101,05
11	05.05.2011	95,68	1644,92	99,27			157385,95	99,33	100,52
12	06.05.2011	98,21	1681,01	98,80			165091,99	98,85	100,29
13	10.05.2011	97,21	1678,13	98,30			163131,02	98,34	99,98
14	11.05.2011	96,61	1654,78	97,83	99,45		159868,30	97,86	99,64
15	12.05.2011	96,62	1630,78	97,29	98,98		157565,96	97,32	99,34
16	13.05.2011	97,99	1632,23	97,05	98,52		159942,22	97,06	99,20
17	16.05.2011	98,23	1622,98	97,12	98,24		159425,33	97,12	99,11
18	17.05.2011	96,12	1608,66	97,08	97,84		154624,40	97,09	98,81
19	18.05.2011	97,10	1627,03	97,26	97,59		157984,61	97,26	98,64
20	19.05.2011	96,73	1630,72	97,08	97,27		157739,55	97,08	98,45
21	20.05.2011	94,22	1603,97	96,70	96,83		151126,05	96,71	98,02
22	23.05.2011	91,74	1573,14	96,09	96,37		144319,86	96,12	97,40
23	24.05.2011	93,92	1598,82	95,76	96,18		150161,17	95,78	97,05
24	25.05.2011	95,16	1614,86	95,40	96,14		153670,08	95,42	96,86
25	26.05.2011	95,80	1606,21	95,10	95,96	97,77	153874,92	95,11	96,75

Рисунок 1.2 – Вид итоговой таблицы

3. Составление прогнозов скользящей средней с помощью диаграмм

Для построения первой диаграммы выделяем мышью диапазон A1:A$1:$B$130;D$1:$F$130. Для этого для начала выделяем диапазон A1:B130, а затем, удерживая кнопку Ctrl, мы выделяем второй диапазон D1:F130. После этого выполняется команда Вставка→ Диаграмма→ График (см. рис.1.3).

Аналогично строятся еще 2 диаграммы (см. рис. 1.4, 1.5):

1) включает три столбца таблицы (Дата, котировки акций и значения индекса ММВБ);

2) включает пять столбцов таблицы (Дата, котировки акций, скользящая средняя 8-го порядка, средняя скользящая взвешенная 8-го порядка и экспоненциальная средняя).

Выводы по результатам работы фиксируются в тетради.

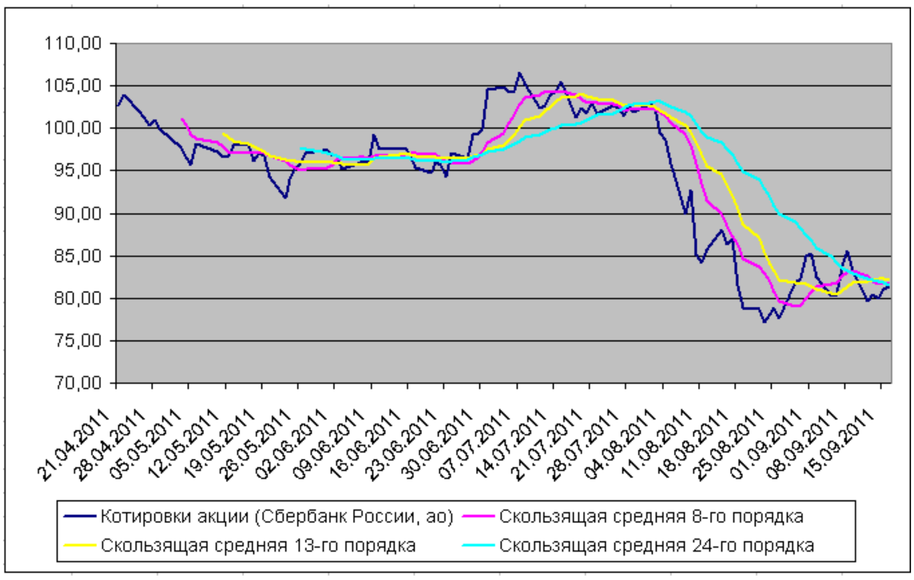


Рисунок 1.3 – Сравнение скользящих средних скользящих простых

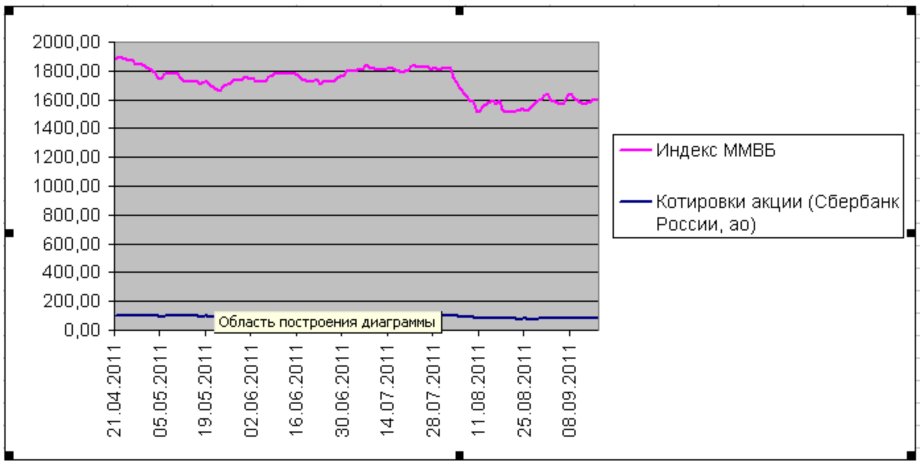


Рисунок 1.4 – Диаграмма №2

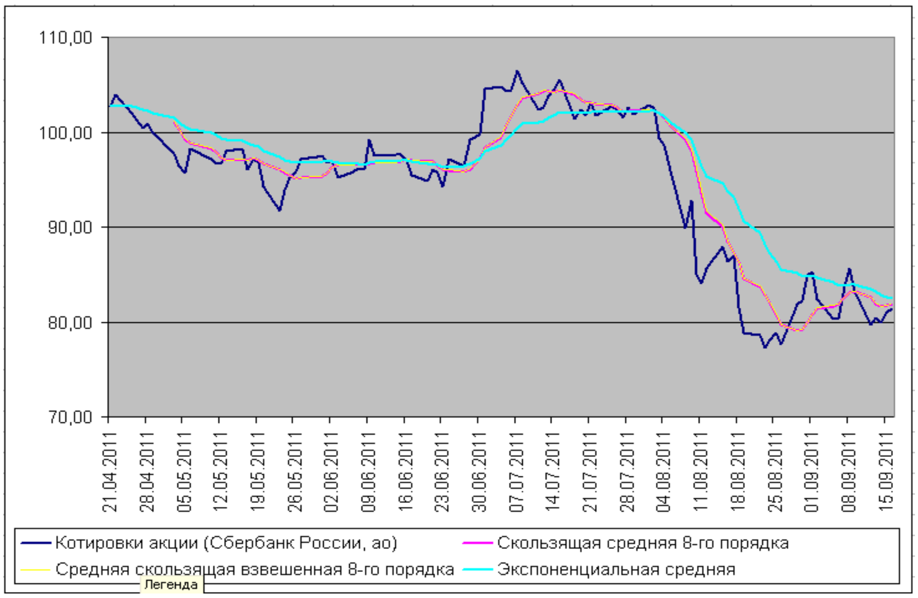


Рисунок 1.5 – Диаграмма №3

2.1.3 Результаты и выводы:

В результате выполнения практического занятия ПЗ-1 студенты:

1. Должны усвоить теоретические основы построения моделей на финансовых рынках. В частности, нахождения эффективного множества портфелей ценных бумаг с различными уровнями коэффициентов корреляции между бумагами; расчета альфа и бета коэффициентов по акциям и портфелям акций; построения однофакторных и многофакторных моделей: выбора факторов, определения параметров модели; определения показателя «стоимости под риском» с использованием различных методов.

2. Способны составлять прогнозы с помощью надстроек скользящей средней, вычислять скользящие средние значения в Microsoft Excel и составлять прогнозы скользящей средней с помощью диаграмм.

2.2 Практическое занятие № ПЗ-2 (2 часа)

Тема: Корреляционные и регрессионные модели на финансовых рынках

2.2.1 Задание для работы:

1. Построение корреляционных модели связи динамики курсов, доходностей, товарных цен, показателей торговой активности рынков.
2. Построение регрессионных моделей (трендовые модели, факторные модели, устанавливающие зависимость конъюнктуры финансовых рынков от фундаментальных факторов).
3. Построение моделей многофакторной корреляции для оценки кредитного риска и риска ликвидности в зависимости от динамики определяющих их фундаментальных факторов.
4. Построение авторегрессионных моделей оценки рыночного риска.
5. Построение сглаженных уровней при различных параметрах сглаживания.
6. Использование элемента Пакета анализа Excel «Экспоненциальное сглаживание».
7. Вывод результатов экспоненциального сглаживания.

2.2.2 Краткое описание проводимого занятия

1. Построение сглаженных уровней при различных параметрах сглаживания.

Кроме метода скользящего среднего для устранения колебаний в динамическом ряде используется метод экспоненциального сглаживания. Каждое сглаженное значение рассчитывается путём сочетания предыдущего сглаженного значения и текущего значения временного ряда. В этом случае текущее значение временн*о*го ряда взвешивается с учётом сглаживающей константы. Расчёт производится по формуле:

$$S_t = ay_t + (1-a)S_{t-1} \tag{1}$$

где S_t – значение экспоненциальной средней в момент времени t;
a – параметр сглаживания, a =const, 0< a <;1
y_t – текущее значение временного ряда;
S_{t-1} – предыдущее значение экспоненциальной средней.

Пример: Используя данные о котировках акций Сбербанка за период с 01.09.2011 по 23.09.2011 г. (Таблица 2.1), необходимо сгладить данный временной ряд и спрогнозировать его значение на следующий день.

Для этого в ячейку С2 просто переносим значение 01.09.2011 года, так как неизвестно предыдущее значение котировки. Введём в ячейку С3 следующую формулу:

=0,1*B3+0,9*C2 (Результат: 84,82).

В диапазон ячеек С4:С18 скопируем данную формулу.

Так как значения параметра a могут изменяться от 0 до 1, изначально принимаем минимальное значение параметра сглаживания, равное 0,1. Однако при этом возникают определённые сложности.

Таблица 2.1 – Исходные данные

Дата	Котировки акций Сбербанка, руб.
01.09.2011	85,09
02.09.2011	82,40
05.09.2011	80,20
06.09.2011	80,45
07.09.2011	83,67
08.09.2011	85,57
09.09.2011	83,20
12.09.2011	79,63
13.09.2011	80,41
14.09.2011	80,04
15.09.2011	80,90
16.09.2011	81,49
19.09.2011	80,07
20.09.2011	81,80
21.09.2011	81,72
22.09.2011	73,80
23.09.2011	69,99

Основной недостаток состоит в том, что между изменениями в исходном ряду значений и соответствующими изменениями в ряду сглаженных значений отмечается лаг (или запаздывание). Так, мы видим, что анализируемые данные демонстрируют нисходящий тренд цены акций. Однако скользящие средние «медленно» обозначают тренд – практически все, кроме максимального значения цены за анализируемый период, сглаженные значения за период находятся над фактическими значениями котировок (рис. 2.1).

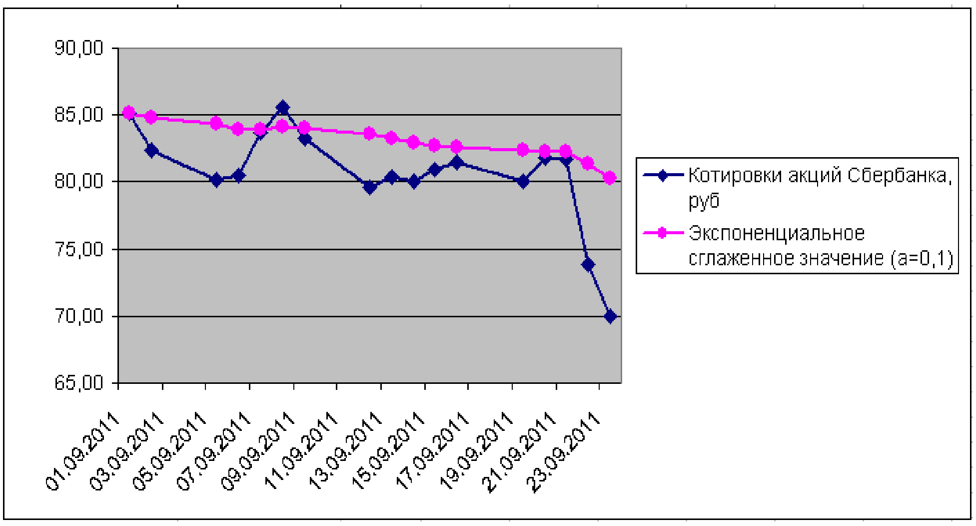
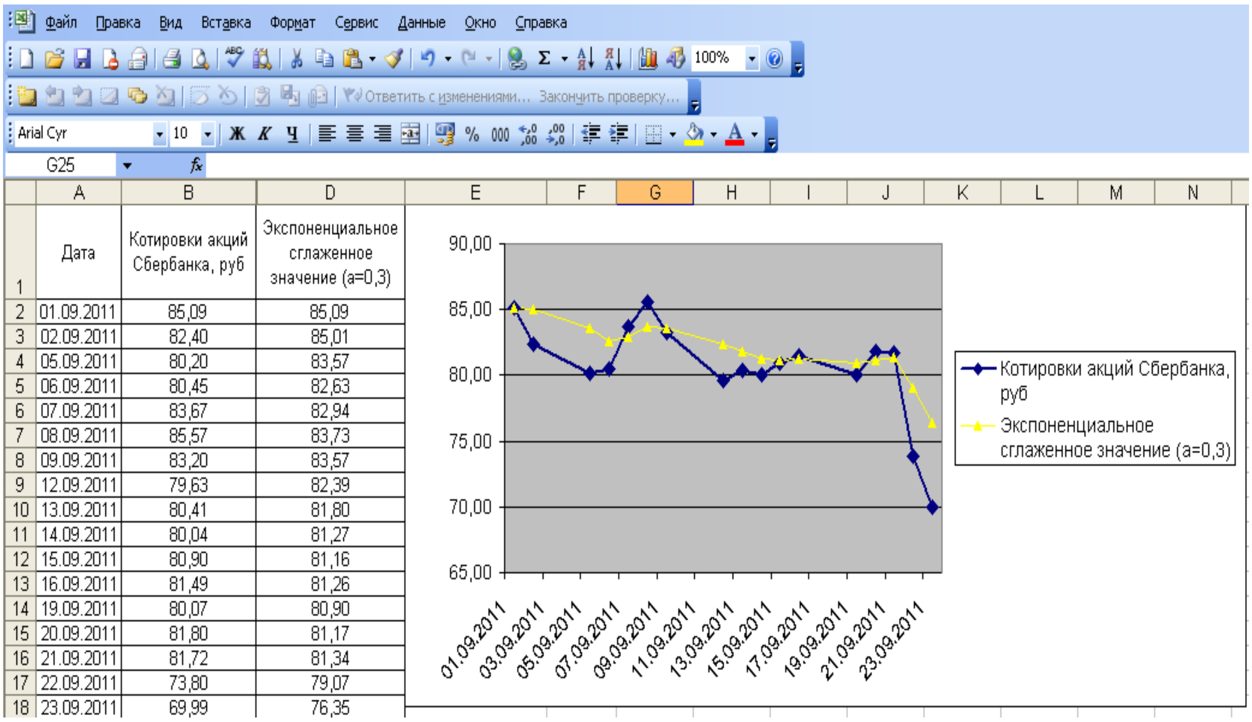


Рисунок 2.1 – Сглаженные уровни за период при параметре сглаживания *a*= 0,1

В целом, чем меньше значение *a,* тем менее оно чувствительно к изменениям тренда в данном временном ряду. Чтобы решить эту проблему, мы можем взять большее значение *a*. Рассмотрим, например, значение сглаживающей константы *a*=0,3. На рисунке 2.2 в столбце D приведены сглаженные значения, рассчитанные по этой константе.



Дата	Котировки акций Сбербанка, руб	Экспоненциальное сглаженное значение (a=0,3)
01.09.2011	85,09	85,09
02.09.2011	82,40	85,01
05.09.2011	80,20	83,57
06.09.2011	80,45	82,63
07.09.2011	83,67	82,94
08.09.2011	85,57	83,73
09.09.2011	83,20	83,57
12.09.2011	79,63	82,39
13.09.2011	80,41	81,80
14.09.2011	80,04	81,27
15.09.2011	80,90	81,16
16.09.2011	81,49	81,26
19.09.2011	80,07	80,90
20.09.2011	81,80	81,17
21.09.2011	81,72	81,34
22.09.2011	73,80	79,07
23.09.2011	69,99	76,35

Рисунок 2.2 – Сглаженные уровни при параметре сглаживания *a=0,3*

Введём в ячейку D3 следующую формулу:

=0,3*B3+0,7*D2 (Результат: 85,01),

и скопируем эту формулу в остальные ячейки столбца D.

При анализе расхождений результатов применения двух сглаживающих констант при выделении тренда следует обратить внимание на два момента.

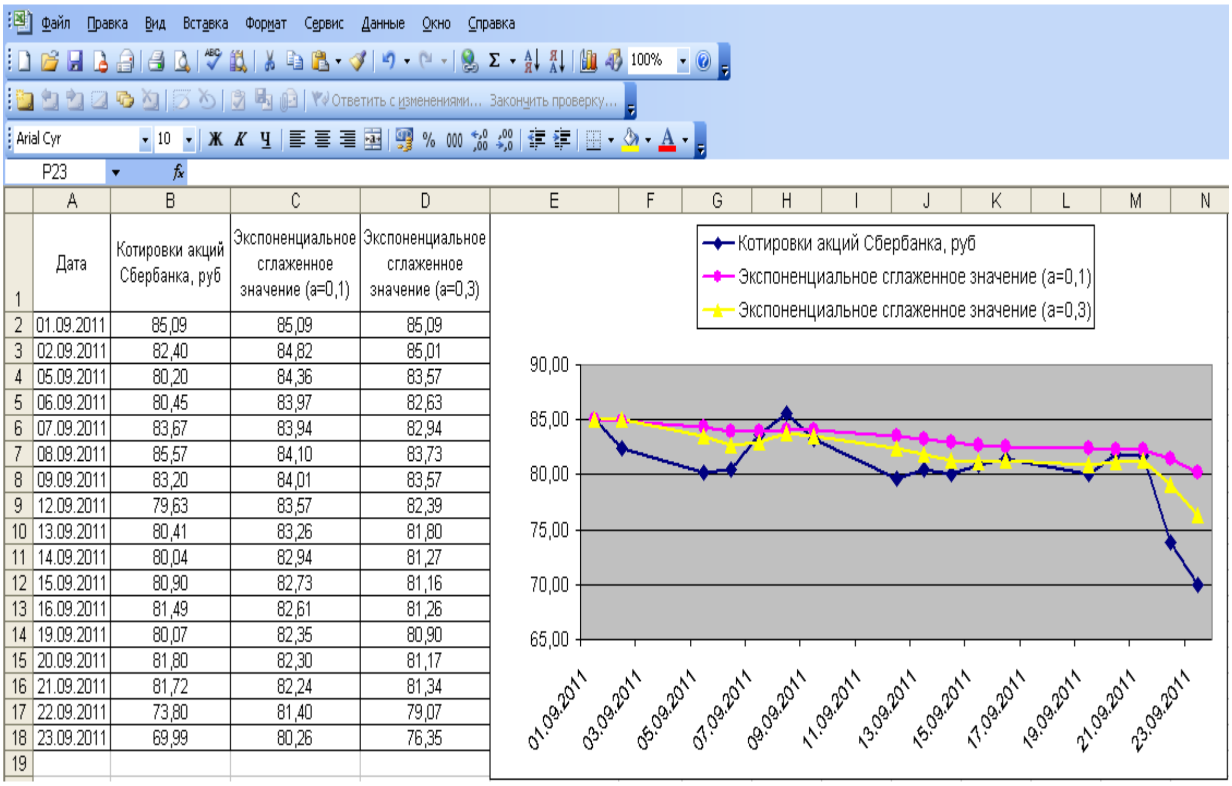
Во-первых, временной лаг, который очевиден при a = 0,1, гораздо менее выражен при a = 0,3. В целом, чем больше значение константы при вычислении сглаженных значений, тем последние более чувствительны к изменениям в последних значениях временного ряда. То есть в этом случае сглаженные значения отстают от значений временного ряда не столь сильно, как это происходит при более малых значениях сглаживающей константы.

Этот фактор, не играет ни какой роли, если отсутствует существенное изменение в общем тренде временного ряда. Однако он крайне важен при составлении прогнозов, когда отмечается значимое восхождение или нисхождение общего тренда временного ряда.

Значения, полученные при a = 0,3, лучше отражают общий тренд, чем те, которые рассчитаны при a = 0,1.

Во-вторых, необходимо учитывать то, что при более низких значениях достигается большее сглаживание данных, а это позволяет выделять тренд с большей точностью.

Ряд значений, полученных при сглаживающей константе a = 0,3, более точно характеризует изменение фактических данных, но менее сглажен, то есть сильнее отражает колебания по сравнению с рядом, полученным при сглаживающей константе a = 0,1 (см. рис. 2.3).



	Дата	Котировки акций Сбербанка, руб	Экспоненциальное сглаженное значение (a=0,1)	Экспоненциальное сглаженное значение (a=0,3)
2	01.09.2011	85,09	85,09	85,09
3	02.09.2011	82,40	84,82	85,01
4	05.09.2011	80,20	84,36	83,57
5	06.09.2011	80,45	83,97	82,63
6	07.09.2011	83,67	83,94	82,94
7	08.09.2011	85,57	84,10	83,73
8	09.09.2011	83,20	84,01	83,57
9	12.09.2011	79,63	83,57	82,39
10	13.09.2011	80,41	83,26	81,80
11	14.09.2011	80,04	82,94	81,27
12	15.09.2011	80,90	82,73	81,16
13	16.09.2011	81,49	82,61	81,26
14	19.09.2011	80,07	82,35	80,90
15	20.09.2011	81,80	82,30	81,17
16	21.09.2011	81,72	82,24	81,34
17	22.09.2011	73,80	81,40	79,07
18	23.09.2011	69,99	80,26	76,35

Рисунок 2.3 – Совместный график сглаженных значений

Для каждого конкретного случая придётся выбирать наиболее приемлемое значение сглаживающей константы. Малое значение приводит к большему сглаживанию значений, а большое значение более точно отражает изменения тренда. В большинстве случаев значение сглаживающей константы лежит в пределах от 0,1 до 0,3, однако в ряде случаев возможно использование и других значений *а*, находящихся вне этого диапазона.

2. Использование элемента Пакета анализа Excel «Экспоненциальное сглаживание».

Методы прогнозирования под названием «сглаживание» учитывают эффекты выброса функций намного лучше, чем способы, использующие регрессионный анализ. Excel непосредственно поддерживает один из таких методов с помощью средства *Экспоненциальное сглаживание* в надстройке *Пакет анализа.*

Активизировать средство *Экспоненциальное сглаживание* можно выбрав команду *Сервис⇒Анализ данных* после загрузки надстройки *Пакет анализа.* Если *Пакет анализа* не установлен необходимо выбрать *Сервис⇒Надстройки⇒Пакет анализа*. Если и после этого *Пакет анализа* не работает, следует переустановить Excel.

После того, когда активизировано средство *Экспоненциальное сглаживание*, необходимо заполнить диалоговое окно с одноименным названием так, как показано на рисунке 2.4.

Входные данные отражают диапазон ячеек с исходным динамическим рядом и плюс одна пустая ячейка, т.к. необходимо отобразить и рассчитать прогноз на следующий день.

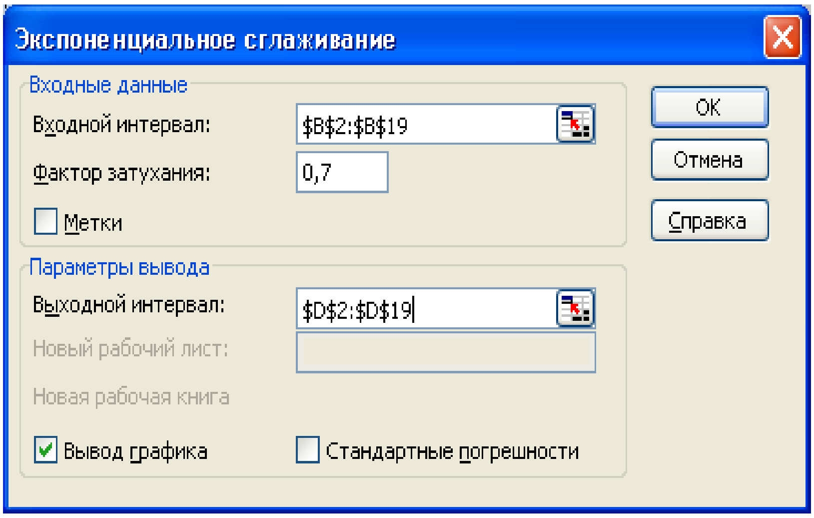


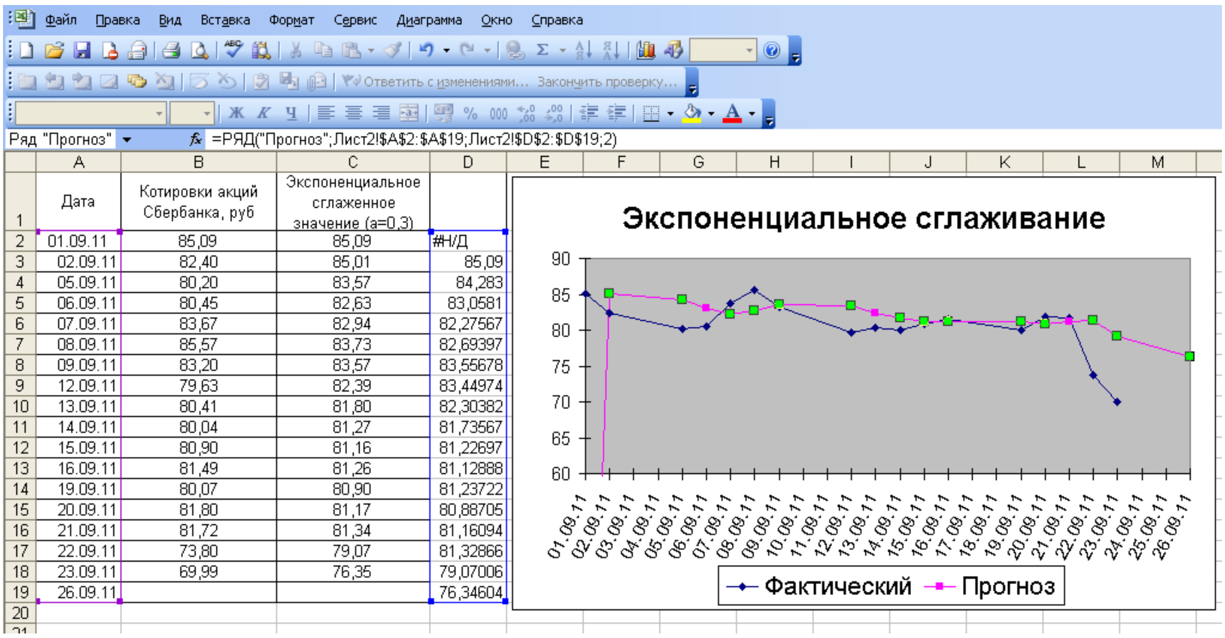
Рисунок 2.4 – Средство «экспоненциальное сглаживание» не требует заполнения всех опций (например, не обязательными являются опции Метки и Стандартные погрешности)

Фактор затухания – это показатель, рассчитываемый как разница между 1 и параметром сглаживания *a*. Для случая при сглаживающей константе *a= 0,3* фактор затухания равен 0,7 (1-0,3). Следует избегать использования параметра *фактор затухания*, который меньше значения 0,7. Если у вас создается впечатление, что при большем значении константы сглаживания средство *Экспоненциальное сглаживание* действует значительно лучше, то, вероятнее всего, это происходит благодаря высокому уровню автокорреляции во временном ряду.

Выходной интервал отражает данные, рассчитанные при экспоненциальном сглаживании Excel. *Вывод графика* позволяет автоматически выводить диаграмму в рабочий лист Excel.

3. Вывод результатов экспоненциального сглаживания.

Результаты применения средства *Экспоненциальное сглаживание* представлены на рисунке 2.5.



	A	B	C	D
1	Дата	Котировки акций Сбербанка, руб	Экспоненциальное сглаженное значение (a=0,3)	
2	01.09.11	85,09	85,09	#Н/Д
3	02.09.11	82,40	85,01	85,09
4	05.09.11	80,20	83,57	84,283
5	06.09.11	80,45	82,63	83,0581
6	07.09.11	83,67	82,94	82,27567
7	08.09.11	85,57	83,73	82,69397
8	09.09.11	83,20	83,57	83,55678
9	12.09.11	79,63	82,39	83,44974
10	13.09.11	80,41	81,80	82,30382
11	14.09.11	80,04	81,27	81,73567
12	15.09.11	80,90	81,16	81,22697
13	16.09.11	81,49	81,26	81,12888
14	19.09.11	80,07	80,90	81,23722
15	20.09.11	81,80	81,17	80,88705
16	21.09.11	81,72	81,34	81,16094
17	22.09.11	73,80	79,07	81,32866
18	23.09.11	69,99	76,35	79,07006
19	26.09.11			76,34604
20				

Рисунок 2.5 – Результаты применения средства «Экспоненциальное сглаживание»

Кроме того, на нем показано прогнозное значение на 26 сентября 2011 года, которое рассчитано на основе сглаженного экспоненциального тренда. При этом использовано фактическое значение за последний период времени (23 сентября 2011 года – ячейка B18) и последнее сглаженное значение (23 сентября 2011 года – ячейка D18).

Сравнивая значения ячеек в столбцах C и D, можно заметить, что их значения примерно равны, но со сдвигом на одну ячейку вниз. Ячейка D2 содержит ошибку #Н/Д, вызванную тем, что отсутствует предыдущее фактическое значение ряда за 31 августа 2011 года, которое необходимо для расчёта.

2.2.3 Результаты и выводы:

В результате выполнения практического занятия ПЗ-2 студенты:

1. Должны усвоить теоретические основы построения: корреляционных моделей связи динамики курсов, доходностей, товарных цен, показателей торговой активности рынков; регрессионных моделей (трендовые модели, факторные модели, устанавливающие зависимость конъюнктуры финансовых рынков от фундаментальных факторов); моделей многофакторной корреляции для оценки кредитного риска и риска ликвидности в зависимости от динамики определяющих их фундаментальных факторов; авторегрессионных моделей оценки рыночного риска.

2. Способны строить сглаженные уровни курсов и доходностей ценных бумаг при различных параметрах сглаживания; использовать элементы Пакета анализа Excel «Экспоненциальное сглаживание» и выводить результаты экспоненциального сглаживания на монитор персонального компьютера.

2.3 Практическое занятие № ПЗ-3 (1 час)

Тема: Оптимизационные модели

2.3.1 Задание для работы:

1. Расчет показателей, характеризующих рискованность финансового инструмента: среднеквадратического (стандартного) отклонения, коэффициента вариации.
2. Расчет показателей, характеризующих взаимосвязь между доходностями акций: ковариация доходности, коэффициент корреляции, положительная и отрицательная корреляции. Использование исторических данных для определения доходности, риска, ковариации.
3. Концепция эффективного рынка.
4. Функция полезности инвестора, инвестиционное решение как максимизация полезности. Кривые безразличия. Склонность к риску, коэффициент допустимости риска. Доходность и рискованность портфеля, веса активов, входящих в портфель.
5. Эффективное множество портфелей. Процедура выбора оптимального портфеля.
6. Оптимизация портфеля, состоящего из двух рискованных активов, с учетом корреляции между ними (включая портфели, содержащие короткие позиции).
7. Оптимизация портфеля, состоящего из рискованного и безрискового активов.
8. Составление линейных прогнозов: функция ТЕНДЕНЦИЯ.
9. Составление нелинейного прогноза: функция РОСТ.
10. Регрессионный анализ с помощью диаграмм.

2.3.2 Краткое описание проводимого занятия

1. Составление линейных прогнозов: функция ТЕНДЕНЦИЯ

Простое скользящее среднее является быстрым, но довольно неточным способом выявления общих тенденций временного ряда. Если вы разобрались с примерами составления прогнозов на основе скользящего среднего, то, очевидно, обратили внимание на то, что они не дают прогноза, выходящего за пределы, в которых данные уже известны. Передвинуть границу оценки будущего по временной оси можно с помощью одной из функций регрессии Excel. Каждый из методов регрессии оценивает взаимосвязь фактических данных наблюдений и других параметров, которые зачастую являются показателями того, когда были сделаны эти наблюдения. Это могут быть как числовые значения каждого результата наблюдения во временном ряду, так и дата наблюдения.

Использование функции рабочего листа ТЕНДЕНЦИЯ – это самый простой способ вычисления регрессионного анализа. Данные по различным ценным бумагам внесены в следующем порядке в ячейках A2:A137 даты, в ячейках B2:B137 расположены значения номера периода, а в ячейках C2:C130 – фактические значения котировок той или иной ценной бумаги, как на рис. 3.1.

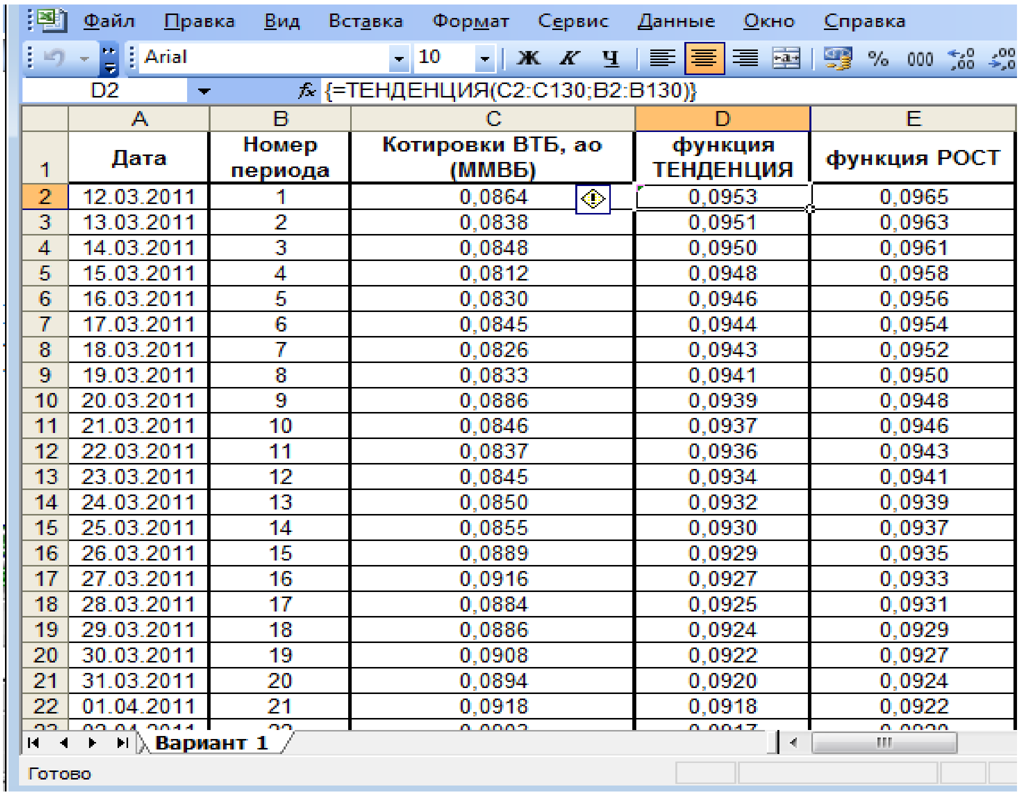
Выделите ячейки D2:D130 и введите следующую формулу, используя формулу массива:

= ТЕНДЕНЦИЯ(C2:C130;B2:B130)

Если значение появилось только в одной первой ячейке, то необходимо произвести следующие действия:

1) Выделить диапазон D2:D130;
2) Нажать F2;
3) Нажать одновременно *Ctrl+Shift+Enter*.

Затем спрогнозируем значения котировок акций на следующую неделю. Для этого выделяем диапазон D131:D137, затем вводим формулу =ТЕНДЕНЦИЯ(C2:C130;B2:B130;B131:B137).



	A	B	C	D	E
1	Дата	Номер периода	Котировки ВТБ, ао (ММВБ)	функция ТЕНДЕНЦИЯ	функция РОСТ
2	12.03.2011	1	0,0864	0,0953	0,0965
3	13.03.2011	2	0,0838	0,0951	0,0963
4	14.03.2011	3	0,0848	0,0950	0,0961
5	15.03.2011	4	0,0812	0,0948	0,0958
6	16.03.2011	5	0,0830	0,0946	0,0956
7	17.03.2011	6	0,0845	0,0944	0,0954
8	18.03.2011	7	0,0826	0,0943	0,0952
9	19.03.2011	8	0,0833	0,0941	0,0950
10	20.03.2011	9	0,0886	0,0939	0,0948
11	21.03.2011	10	0,0846	0,0937	0,0946
12	22.03.2011	11	0,0837	0,0936	0,0943
13	23.03.2011	12	0,0845	0,0934	0,0941
14	24.03.2011	13	0,0850	0,0932	0,0939
15	25.03.2011	14	0,0855	0,0930	0,0937
16	26.03.2011	15	0,0889	0,0929	0,0935
17	27.03.2011	16	0,0916	0,0927	0,0933
18	28.03.2011	17	0,0884	0,0925	0,0931
19	29.03.2011	18	0,0886	0,0924	0,0929
20	30.03.2011	19	0,0908	0,0922	0,0927
21	31.03.2011	20	0,0894	0,0920	0,0924
22	01.04.2011	21	0,0918	0,0918	0,0922

Рисунок 3.1 – Исходные данные

Если опять значение появилось только в одной первой ячейке, то необходимо произвести следующие действия:

1) выделить диапазон D131:D137;
2) нажать F2;
3) нажать одновременно *Ctrl+Shift+Enter*.

Поскольку все значения прогноза составляются на основе одних и тех же показателей отрезка, отсекаемого на оси ординат, и углового коэффициента, прогноз не отражает происходящих изменений во временном ряду. Например, если данные ряда резко изменяются между восьмым и девятым результатами наблюдений. Это изменение влияет на все значения прогноза, даже значение прогноза временного отрезка 2, хотя и располагается на шесть результатов наблюдений раньше, чем это изменение фактически произошло.

Чтобы увидеть наглядно построим диаграмму, выделив столбцы: дата, котировки ценных бумаг и функция ТЕНДЕНЦИЯ (см. рис. 3.2).

2. Составление нелинейного прогноза: функция РОСТ

Функция ТЕНДЕНЦИЯ вычисляет прогнозы, основанные на линейной связи между результатом наблюдения и временем, когда это наблюдение было зафиксировано. Предположим, что вы составляете линейный график данных, на вертикальной оси которого отмечаете результаты наблюдений, а на горизонтальной фиксируете временные моменты их получения. Если эта взаимосвязь носит линейный характер, то линия на графике будет, либо прямой, либо слегка наклоненной в одну или другую сторону, либо горизонтальной. Это и будет лучшей подсказкой о том, что взаимосвязь является линейной, и потому в данном случае функция ТЕНДЕНЦИЯ – самый удобный способ регрессивного анализа.

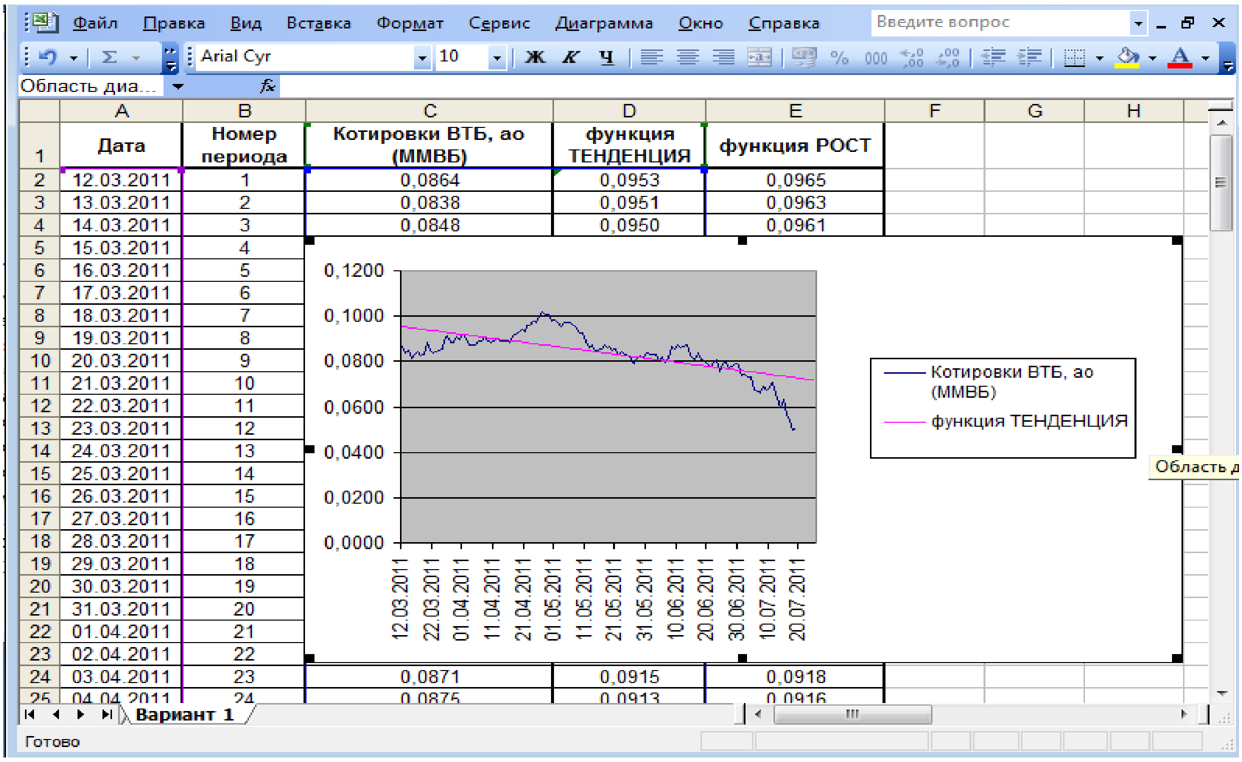


Рисунок 3.2 – Графическое изображение «функция ТЕНДЕНЦИЯ»

Однако если линия резко изгибается в одном из направлений, то это означает, что взаимосвязь показателей носит нелинейный характер. Существует большое количество типов данных, которые изменяются во времени нелинейным способом. Некоторыми примерами таких данных являются объем продаж новой продукции, прирост населения, выплаты по основному кредиту и коэффициент удельной прибыли. В случае нелинейной взаимосвязи функция Excel РОСТ поможет вам получить более точную картину направления развития вашего бизнеса, чем функция ТЕНДЕНЦИЯ.

Рекомендуем иметь в виду следующее.

Если данные, используемые при создании графика переменной, располагаются вблизи прямой линии, то для создания прогноза на будущее лучше всего воспользоваться функцией ТЕНДЕНЦИЯ, без всяких излишеств.

Если анализируемые данные расположены вдоль кривой, то, возможно, наилучший прогноз даст функция РОСТ. Сравните результаты, полученные с помощью функции РОСТ на данной базовой линии, с самой базовой линией. Если они близко, то используйте функцию РОСТ для прогноза на основании базовой линии.

Чтобы рассчитать значения в столбце «функция РОСТ» нужно произвести следующие действия:

Выделите ячейки E2:E130 и введите следующую формулу, используя формулу массива:

= РОСТ(C2:C130;B2:B130).

Если значение появилось только в одной первой ячейке, то необходимо произвести следующие действия:

1) выделить диапазон E2:E130;
2) нажать F2;
3) нажать одновременно *Ctrl+Shift+Enter*.

Затем спрогнозируем значения котировок акций на следующую неделю. Для этого выделяем диапазон E131:E137, затем вводим формулу =РОСТ(C2:C130;B2:B130;B131:B137).

Если опять значение появилось только в одной первой ячейке, то необходимо произвести следующие действия:

1) выделить диапазон E131:E137;

2) нажать F2;

3) нажать одновременно *Ctrl+Shift+Enter*.

Чтобы увидеть наглядно построим диаграмму, выделив столбцы: дата, котировки ценных бумаг и функция РОСТ.

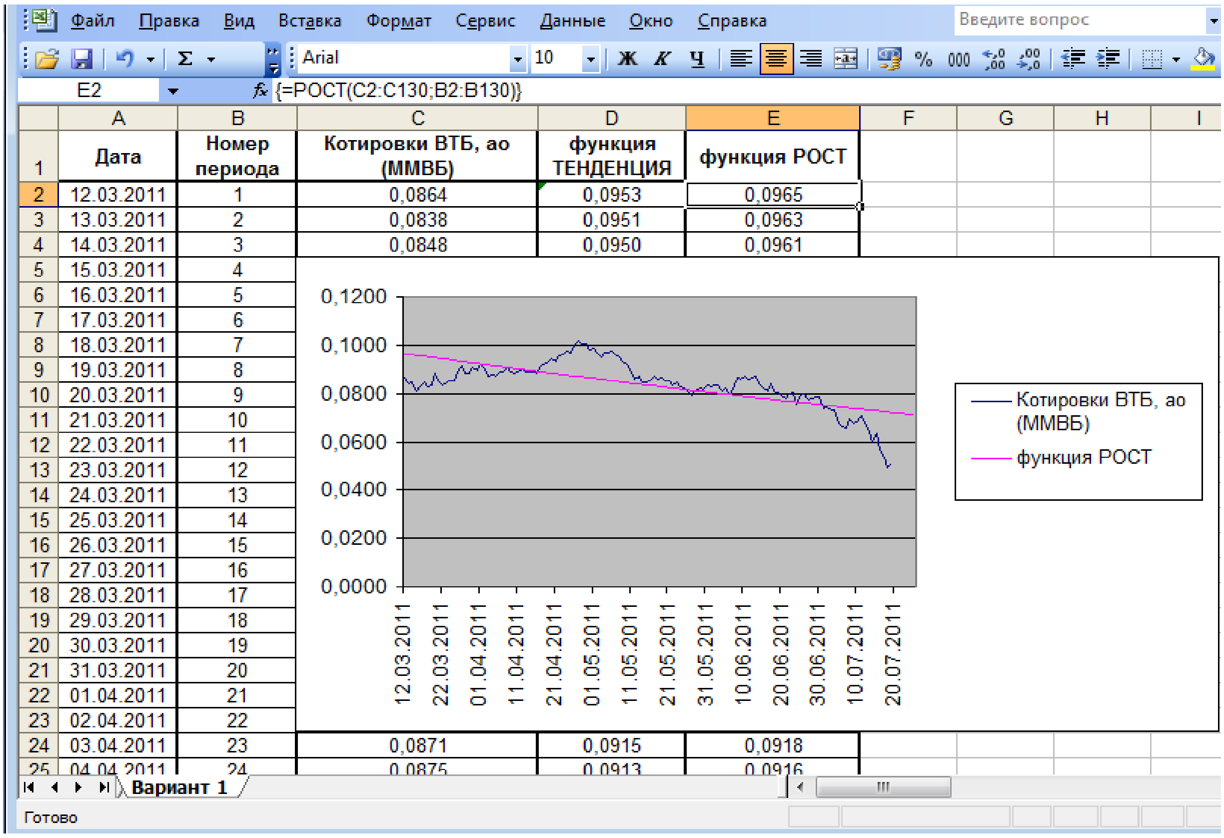


Рисунок 3.3 – Графическое изображение «функция РОСТ»

Проанализируем полученные результаты.

3. Регрессионный анализ с помощью диаграмм

Во многих случаях диаграммы Excel бывают очень полезны при создании прогнозов. Они помогают визуально представить данные. Более того, некоторые методы статистики, используемые в прогнозировании, используют отклонения, т.е. значения, которые необычно далеко отстоят от среднего значения. Если представить данные в виде диаграммы, то гораздо легче определить, влияют ли отклонения на прогноз.

Иногда возникает необходимость провести регрессионный анализ непосредственно на графике, без введения в рабочий лист значений для прогноза. Это можно сделать с помощью графической линии тренда методом, во многом сходным с методом получения прогноза с применением скользящего среднего на основе графика. Постройте диаграмму на основе данных, содержащихся в ячейках C2:C130.

Щелкнув мышью на диаграмме, вы получите возможность ее редактировать. Щелкните правой кнопкой мыши на ряде нужных данных для его выбора. После этого выполните следующие действия.

Выберите из контекстного меню команду: Добавить линию тренда.

Выберите тип линии тренда: Линейная.

Щёлкните на вкладке Параметры.

В поле: «Вперед на» введите количество желаемых периодов, на протяжении которых линия тренда будет прокладываться вперед.

При желании можете установить флажок показывать уравнение на диаграмме. В результате уравнение для прогноза разместится на графике в виде текста. Excel может расположить уравнение таким образом, что оно перекроет некоторые данные графика или линии тренда (либо (частично) само уравнение). В этом случае выделите уравнение, щелкнув на нем мышью, а затем перетащите его в другое, более удобное место.

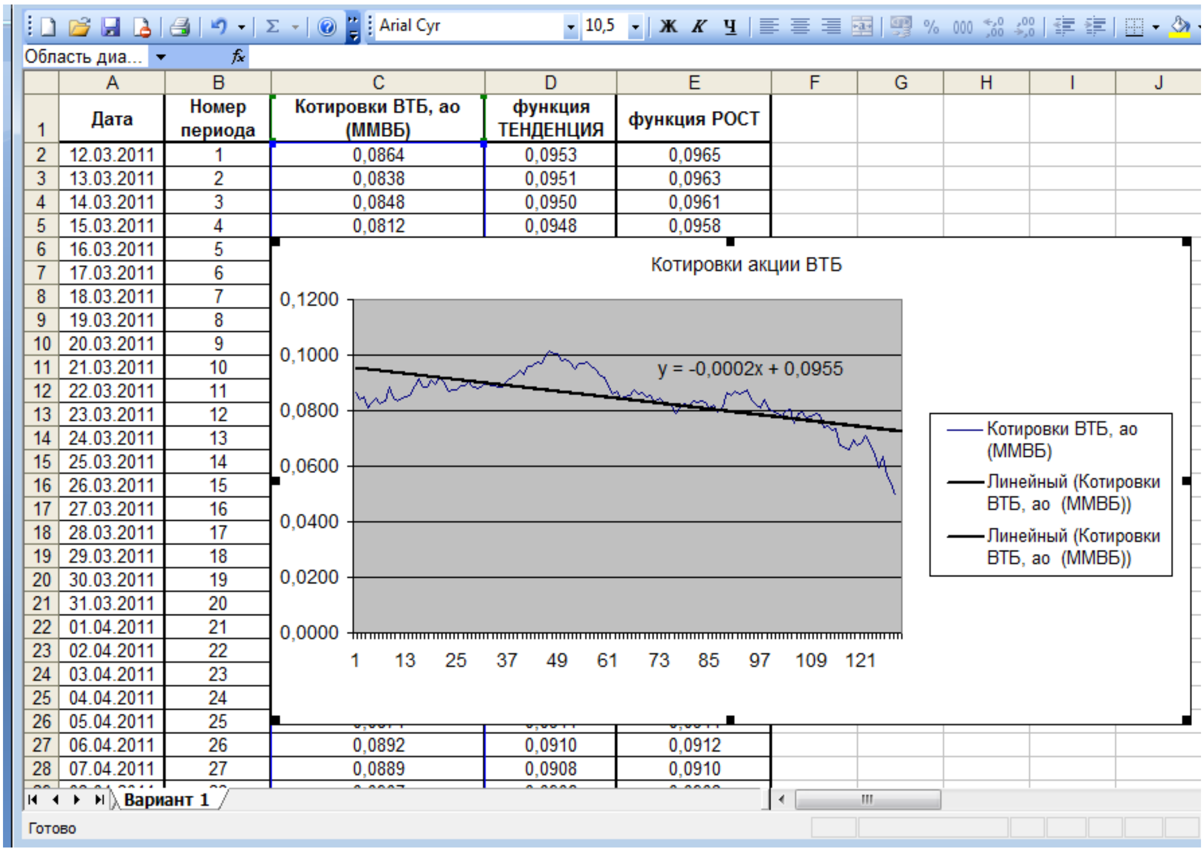


Рисунок 3.4 – Графическое изображение прогнозирования с помощью линейного тренда

Щелкните на кнопке ОК (рис. 3.4).

2.3.3 Результаты и выводы:

В результате выполнения практического занятия ПЗ-3 студенты:

1. Должны усвоить теоретические основы расчета показателей, характеризующих рискованность финансового инструмента: среднеквадратическое (стандартное) отклонение, коэффициент вариации; характеризующих взаимосвязь между доходностями акций: ковариацию доходности, коэффициент корреляции; использования исторических данных для определения доходности, риска, ковариации; построения кривых безразличия, эффективного множества портфелей, оптимальных портфелей, состоящих из рискованного и безрискового активов.

2. Способны составлять линейные прогнозы с помощью функций Excel ТЕНДЕНЦИЯ и РОСТ, проводить регрессионный анализ с помощью диаграмм.

2.4 Практическое занятие № ПЗ-4 (2 часа)

Тема: Равновесные модели

2.4.1 Задание для работы:

1. Модель оценки капитальных активов CAPM (Capital Assets Pricing Model), исходные допущения.
2. Теорема разделения.
3. Рыночный портфель как оптимальный.
4. Расчет коэффициента бета актива.
5. Определение зависимости ожидаемой доходности от коэффициента бета.
6. Определение «выбросов» - причину искажения корреляции.
7. Расчёт параметров уравнения регрессии.
8. Сравнительный анализ доходности и риска ценных бумаг.

2.4.2 Краткое описание проводимого занятия

1. Определение «выбросов» - причину искажения корреляции

Парная регрессия позволяет предсказывать одну переменную на основании другой с использованием прямой линии, характеризующей взаимосвязь между этими двумя переменными. Переменную, поведение которой прогнозируется, принято обозначать буквой *Y*; переменную, которая используется для такого прогнозирования, принято обозначать буквой *X*. Очень важно, что определяется как *X*, а что как *Y*, поскольку *X* предсказывает *Y*, и *Y* предсказывается с помощью *X*.

В факторных моделях на рынке ценных бумаг предполагается, что доходность ценной бумаги реагирует на изменения различных факторов. В случае рыночной модели предполагается, что имеется только один фактор – доходность рыночного индекса.

Под рыночной моделью (*market model*) понимают зависимость между доходностью конкретной акции и доходностью рыночного индекса.

Рыночный индекс (*market index*) – индекс изменения стоимости определенного набора ценных бумаг, цены или доходности которых усредняются для отражения в целом ситуации на конкретном рынке финансовых активов.

Формализованное представление рыночной модели:

$$r_i = a_{iI} + \beta_{iI} r_I + \varepsilon_{iI} \qquad (1)$$

где r_i – доходность ценной бумаги *i* за данный период;
r_I – доходность на рыночный индекс I за этот же период;
a_{iI} – коэффициент смещения;
β_{iI} – коэффициент наклона;
ε_{iI} – случайная погрешность.

Доходность любого финансового актива определяется по формуле:

$$r_i = \frac{y_i}{y_{i-1}} - 1 \qquad (2)$$

где r_i – доходность актива или ценной бумаги;
y_i – стоимость актива или ценной бумаги на конец периода;
y_{t-1} – стоимость актива или ценной бумаги на начало периода.

Определим доходность рыночного индекса ММВБ и доходность обыкновенных акций компании МТС (рис. 4.1).

D3 =B3/B2-1

	A	B	C	D	E
1	**Дата**	**Индекс ММВБ**	**Котировки МТС-ао / MTSI**	**Доходность индекса**	**Доходность акций**
2	21.04.2011	1780,60	255,50		
3	22.04.2011	1793,96	256,99	0,75%	0,58%
4	25.04.2011	1769,94	254,87	-1,34%	-0,82%
5	26.04.2011	1766,28	225,70	-0,21%	-11,45%
6	27.04.2011	1744,95	252,95	-1,21%	12,07%
7	28.04.2011	1749,65	253,77	0,27%	0,32%
8	29.04.2011	1741,84	255,77	-0,45%	0,79%
9	03.05.2011	1691,45	252,50	-2,89%	-1,28%
10	04.05.2011	1657,54	248,70	-2,00%	-1,50%
11	05.05.2011	1644,92	249,72	-0,76%	0,41%
12	06.05.2011	1681,01	253,13	2,19%	1,37%
13	10.05.2011	1678,13	254,30	-0,17%	0,46%
14	11.05.2011	1654,78	243,84	-1,39%	-4,11%
15	12.05.2011	1630,78	238,35	-1,45%	-2,25%
16	13.05.2011	1632,23	237,39	0,09%	-0,40%
17	16.05.2011	1622,98	240,67	-0,57%	1,38%
18	17.05.2011	1608,66	238,17	-0,88%	-1,04%
19	18.05.2011	1627,03	238,86	1,14%	0,29%
20	19.05.2011	1630,72	238,31	0,23%	-0,23%
21	20.05.2011	1603,97	236,01	-1,64%	-0,97%
22	23.05.2011	1573,14	232,32	-1,92%	-1,56%
23	24.05.2011	1598,82	232,31	1,63%	0,00%
24	25.05.2011	1614,86	232,18	1,00%	-0,06%
25	26.05.2011	1606,21	230,59	-0,54%	-0,68%
26	27.05.2011	1638,06	233,49	1,98%	1,26%
27	30.05.2011	1644,99	233,82	0,42%	0,14%
28	31.05.2011	1666,30	235,49	1,30%	0,71%
29	01.06.2011	1650,68	235,20	-0,94%	-0,12%

Лист1 / Лист2 / Лист3

Готово

Рисунок 4.1 – Исходные данные и расчет доходностей

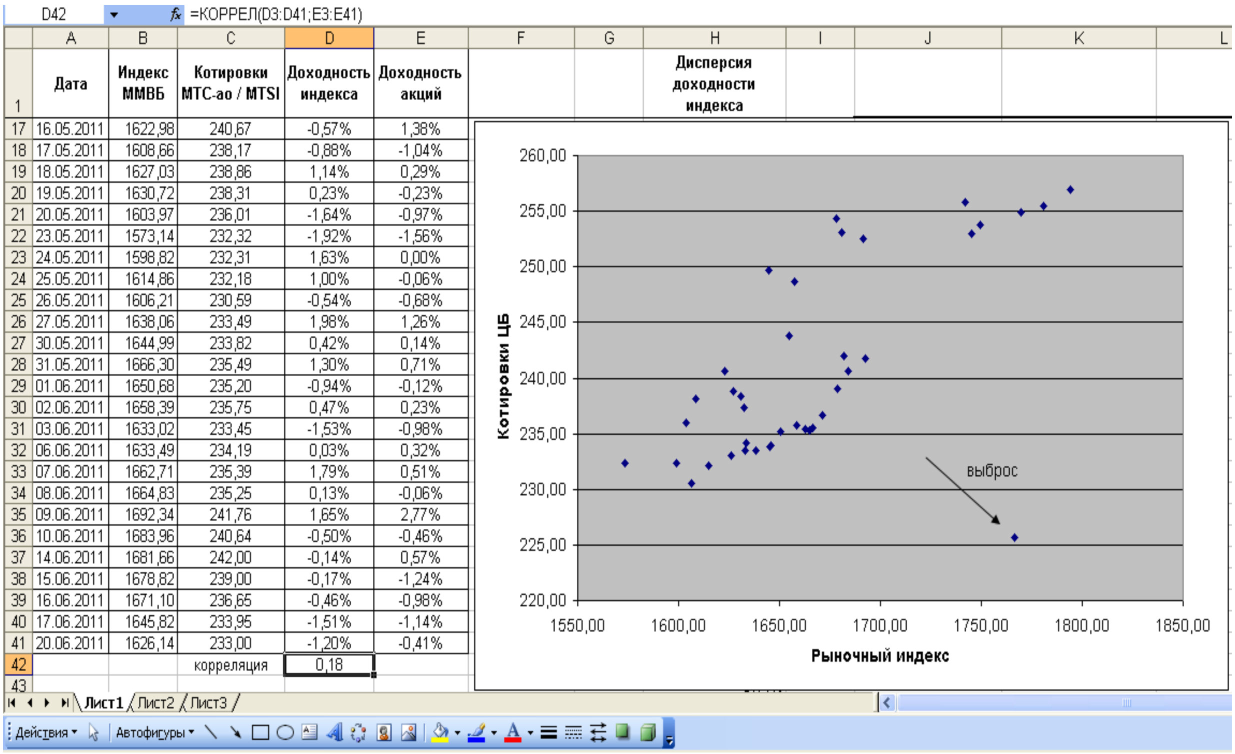
В имеющихся данных присутствует выброс – резко отклоняющееся значение (см. рис. 4.2). Несмотря на то, что с течением времени значение котировки ценной бумаги меняется незначительно, 26 апреля 2011 года ее значение резко изменилось в сторону снижения по необъяснимым причинам. Вследствие чего, корреляция между доходностью рыночного индекса и доходностью ценной бумаги равнялась 0,18, что свидетельствует о наличии слабой связи между изучаемыми признаками.

В ячейке D42 рассчитывается коэффициент корреляции по формуле:

=КОРРЕЛ(D3:D41;E3:E41) (Результат: 0,18).

Результат появления в имеющихся данных выброса нивелирует имеющуюся заметную взаимосвязь между признаками.

На рисунке 4.3 отражены те же данные, но без выброса. Как видно, корреляция, рассчитанная в ячейке D42 положительная и тесная ($r = 0{,}70$).

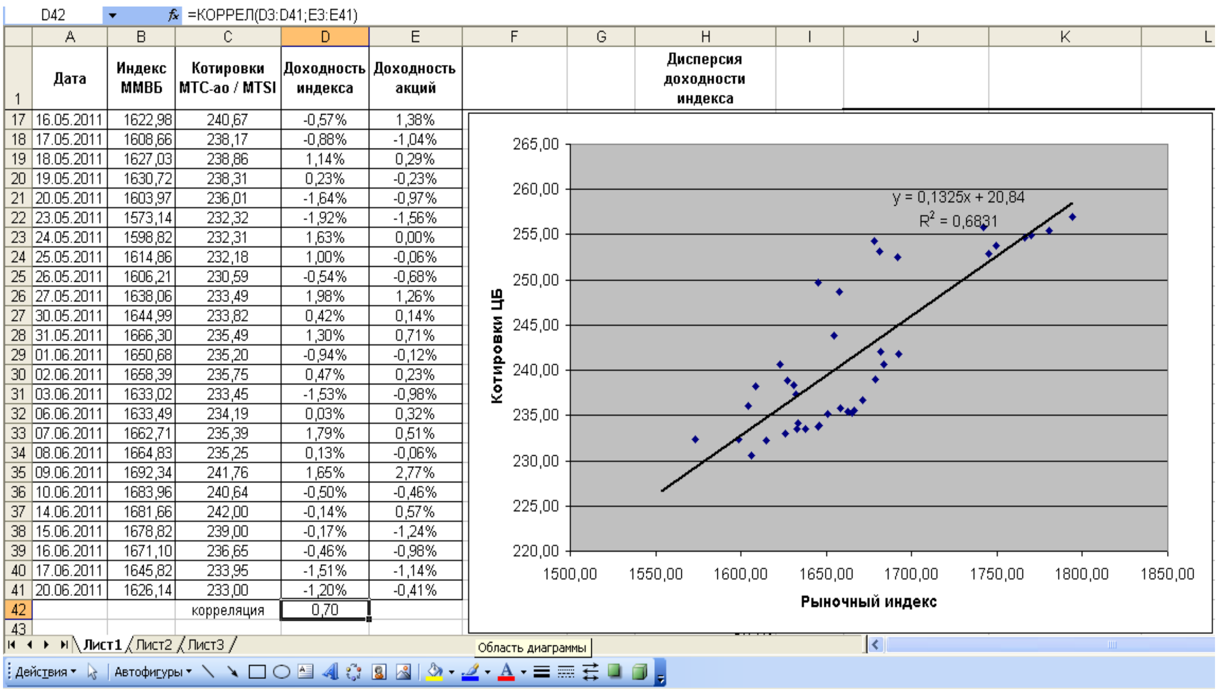


D42 =КОРРЕЛ(D3:D41;E3:E41)

	Дата	Индекс ММВБ	Котировки МТС-ао / MTSI	Доходность индекса	Доходность акций
17	16.05.2011	1622,98	240,67	-0,57%	1,38%
18	17.05.2011	1608,66	238,17	-0,88%	-1,04%
19	18.05.2011	1627,03	238,86	1,14%	0,29%
20	19.05.2011	1630,72	238,31	0,23%	-0,23%
21	20.05.2011	1603,97	236,01	-1,64%	-0,97%
22	23.05.2011	1573,14	232,32	-1,92%	-1,56%
23	24.05.2011	1598,82	232,31	1,63%	0,00%
24	25.05.2011	1614,86	232,18	1,00%	-0,06%
25	26.05.2011	1606,21	230,59	-0,54%	-0,68%
26	27.05.2011	1638,06	233,49	1,98%	1,26%
27	30.05.2011	1644,99	233,82	0,42%	0,14%
28	31.05.2011	1666,30	235,49	1,30%	0,71%
29	01.06.2011	1650,68	235,20	-0,94%	-0,12%
30	02.06.2011	1658,39	235,75	0,47%	0,23%
31	03.06.2011	1633,02	233,45	-1,53%	-0,98%
32	06.06.2011	1633,49	234,19	0,03%	0,32%
33	07.06.2011	1662,71	235,39	1,79%	0,51%
34	08.06.2011	1664,83	235,25	0,13%	-0,06%
35	09.06.2011	1692,34	241,76	1,65%	2,77%
36	10.06.2011	1683,96	240,64	-0,50%	-0,46%
37	14.06.2011	1681,66	242,00	-0,14%	0,57%
38	15.06.2011	1678,82	239,00	-0,17%	-1,24%
39	16.06.2011	1671,10	236,65	-0,46%	-0,98%
40	17.06.2011	1645,82	233,95	-1,51%	-1,14%
41	20.06.2011	1626,14	233,00	-1,20%	-0,41%
42			корреляция	0,18	

Рисунок 4.2 – Резко отклоняющееся значение нарушило корреляцию

Вместо того, чтобы выявить в целом взаимосвязь роста между доходностью ценной бумаги и доходностью рыночного индекса, коэффициент корреляции, r=0,18, указывает на наличие слабой взаимосвязи между рассматриваемыми признаками.



D42 =КОРРЕЛ(D3:D41;E3:E41)

	Дата	Индекс ММВБ	Котировки МТС-ао / MTSI	Доходность индекса	Доходность акций
17	16.05.2011	1622,98	240,67	-0,57%	1,38%
18	17.05.2011	1608,66	238,17	-0,88%	-1,04%
19	18.05.2011	1627,03	238,86	1,14%	0,29%
20	19.05.2011	1630,72	238,31	0,23%	-0,23%
21	20.05.2011	1603,97	236,01	-1,64%	-0,97%
22	23.05.2011	1573,14	232,32	-1,92%	-1,56%
23	24.05.2011	1598,82	232,31	1,63%	0,00%
24	25.05.2011	1614,86	232,18	1,00%	-0,06%
25	26.05.2011	1606,21	230,59	-0,54%	-0,68%
26	27.05.2011	1638,06	233,49	1,98%	1,26%
27	30.05.2011	1644,99	233,82	0,42%	0,14%
28	31.05.2011	1666,30	235,49	1,30%	0,71%
29	01.06.2011	1650,68	235,20	-0,94%	-0,12%
30	02.06.2011	1658,39	235,75	0,47%	0,23%
31	03.06.2011	1633,02	233,45	-1,53%	-0,98%
32	06.06.2011	1633,49	234,19	0,03%	0,32%
33	07.06.2011	1662,71	235,39	1,79%	0,51%
34	08.06.2011	1664,83	235,25	0,13%	-0,06%
35	09.06.2011	1692,34	241,76	1,65%	2,77%
36	10.06.2011	1683,96	240,64	-0,50%	-0,46%
37	14.06.2011	1681,66	242,00	-0,14%	0,57%
38	15.06.2011	1678,82	239,00	-0,17%	-1,24%
39	16.06.2011	1671,10	236,65	-0,46%	-0,98%
40	17.06.2011	1645,82	233,95	-1,51%	-1,14%
41	20.06.2011	1626,14	233,00	-1,20%	-0,41%
42			корреляция	0,70	

Рисунок 4.3 – Исходная совокупность данных без выброса иллюстрирует прямую взаимосвязь между признаками Коэффициент корреляции, $r = 0{,}70$, в этом случае ближе к 1, что указывает на тесную взаимосвязь.

2. Расчёт параметров уравнения регрессии

Уравнение регрессии включает в себя два параметра a и β. Получим точку пересечения тренда с осью Y. Эта точка является параметром a для линейного тренда (также его называют «отрезком» или «сдвигом») и рассчитывается в ячейке G42 по формуле (рисунок 4.4):

=ОТРЕЗОК(E3:E41;D3:D41) (Результат: -0,0008).

1 способ: Параметр β (коэффициент регрессии или «наклон») характеризует крутизну наклона линии регрессии и рассчитывается в ячейке G43:

=НАКЛОН(E3:E41;D3:D41) (Результат: 0,6654).

В ячейке D43 рассчитывается среднее значение доходности рыночного индекса по формуле:

=СРЗНАЧ(D3:D41) (Результат: -0,23%),

а в ячейке E43 – среднее значение доходности акций по формуле:

=СРЗНАЧ(E3:E41) (Результат: -0,23%).

В ячейке D44 рассчитывается среднее квадратическое отклонение (стандартное отклонение) доходности рыночного индекса по формуле:

=СТАНДОТКЛОН(D3:D41) (Результат: 1,22%),

а в ячейке E44 – среднее квадратическое отклонение (стандартное отклонение) доходности акций по формуле:

=СТАНДОТКЛОН(E3:E41) (Результат: 1,16%).

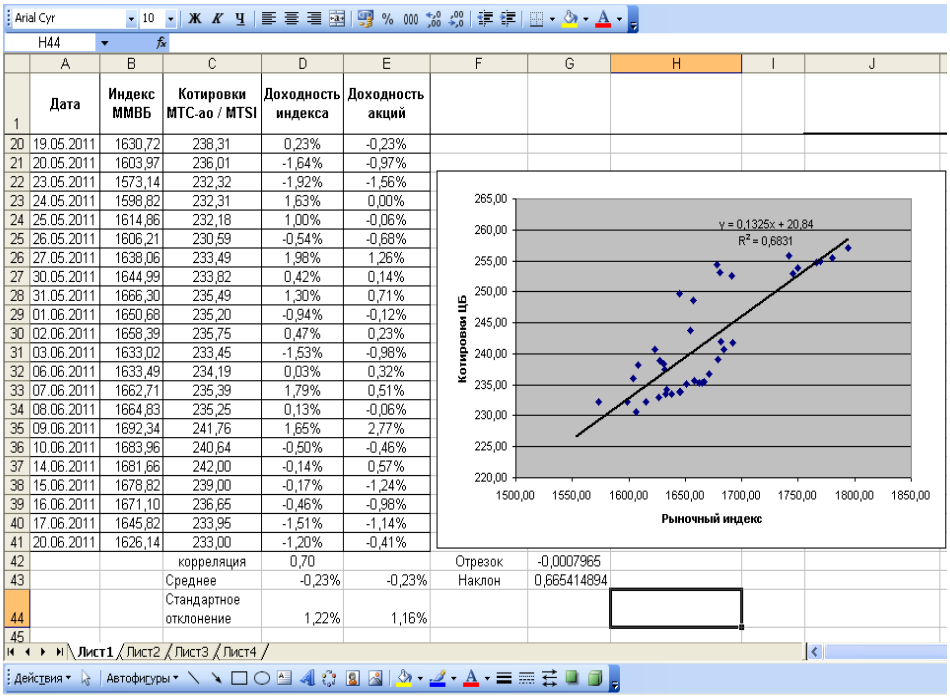
2 способ: Коэффициент β (бэта) в рыночной модели также вычисляется по следующей формуле (рис. 4.6):

$$\beta = \frac{\sigma_i}{\sigma_I^2} \tag{3}$$

где σ_i – ковариация между доходностью акции i и доходностью рыночного индекса;

σ_I^2 – дисперсия доходности рыночного индекса.

Рассчитаем значение ковариации между доходностью акции и доходностью рыночного индекса. Для этого воспользуемся меню *Сервис, Анализ данных, Ковариация.* Открывается следующее диалоговое окно (рисунок 4.5).



	A	B	C	D	E	F	G
1	Дата	Индекс ММВБ	Котировки МТС-ао / MTSI	Доходность индекса	Доходность акций		
20	19.05.2011	1630,72	238,31	0,23%	-0,23%		
21	20.05.2011	1603,97	236,01	-1,64%	-0,97%		
22	23.05.2011	1573,14	232,32	-1,92%	-1,56%		
23	24.05.2011	1598,82	232,31	1,63%	0,00%		
24	25.05.2011	1614,86	232,18	1,00%	-0,06%		
25	26.05.2011	1606,21	230,59	-0,54%	-0,68%		
26	27.05.2011	1638,06	233,49	1,98%	1,26%		
27	30.05.2011	1644,99	233,82	0,42%	0,14%		
28	31.05.2011	1666,30	235,49	1,30%	0,71%		
29	01.06.2011	1650,68	235,20	-0,94%	-0,12%		
30	02.06.2011	1658,39	235,75	0,47%	0,23%		
31	03.06.2011	1633,02	233,45	-1,53%	-0,98%		
32	06.06.2011	1633,49	234,19	0,03%	0,32%		
33	07.06.2011	1662,71	235,39	1,79%	0,51%		
34	08.06.2011	1664,83	235,25	0,13%	-0,06%		
35	09.06.2011	1692,34	241,76	1,65%	2,77%		
36	10.06.2011	1683,96	240,64	-0,50%	-0,46%		
37	14.06.2011	1681,66	242,00	-0,14%	0,57%		
38	15.06.2011	1678,82	239,00	-0,17%	-1,24%		
39	16.06.2011	1671,10	236,65	-0,46%	-0,98%		
40	17.06.2011	1645,82	233,95	-1,51%	-1,14%		
41	20.06.2011	1626,14	233,00	-1,20%	-0,41%		
42			корреляция	0,70		Отрезок	-0,0007965
43			Среднее	-0,23%	-0,23%	Наклон	0,665414894
44			Стандартное отклонение	1,22%	1,16%		

Рисунок 4.4 – Расчет β-коэффициента. Первый способ

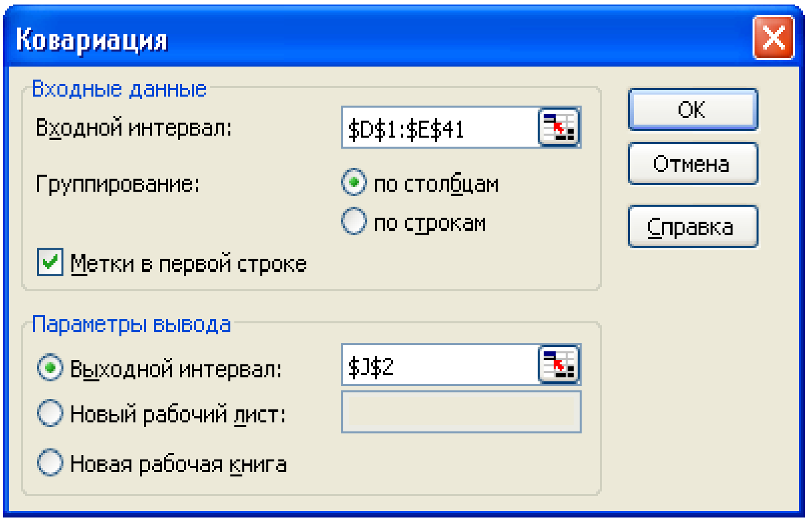


Рисунок 4.5 – Диалоговое окно «Ковариация».

Получаем следующую ковариационную матрицу:

	Доходность индекса	Доходность акций
Доходность индекса	0,000144113	
Доходность акций	9,58947E-05	0,00013104

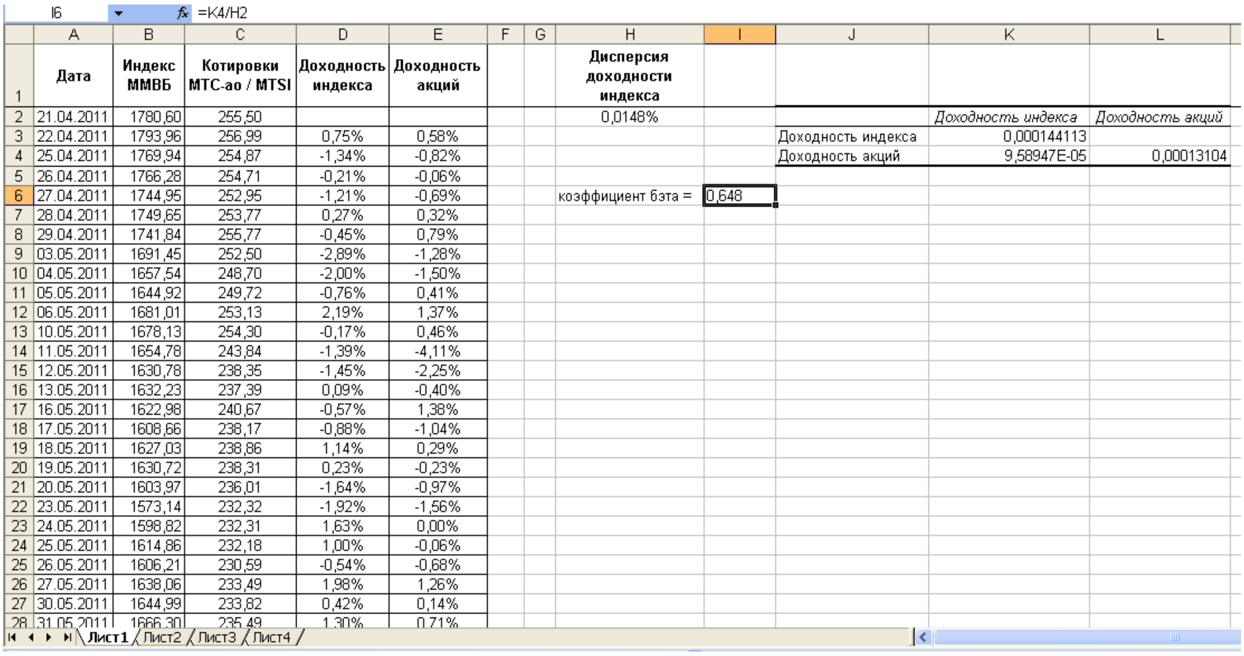
В ячейке H2 найдем дисперсию доходности рыночного индекса при помощи формулы:

=ДИСП(D3:D41) (Результат: 0,0148%)

Теперь рассчитаем коэффициент β в ячейке I6 по формуле:

=K4/H2 (Результат: 0,648)

По результатам проведенных расчетов можно заметить, что значение коэффициента β отличается от значения, рассчитанного по первой формуле, но данное отличие не значительно (рис. 4.6).



I6 =K4/H2

	A	B	C	D	E	H	I	J	K	L
1	Дата	Индекс ММВБ	Котировки МТС-ао / MTSI	Доходность индекса	Доходность акций	Дисперсия доходности индекса				
2	21.04.2011	1780,60	255,50			0,0148%			*Доходность индекса*	*Доходность акций*
3	22.04.2011	1793,96	256,99	0,75%	0,58%			Доходность индекса	0,000144113	
4	25.04.2011	1769,94	254,87	-1,34%	-0,82%			Доходность акций	9,58947E-05	0,00013104
5	26.04.2011	1766,28	254,71	-0,21%	-0,06%					
6	27.04.2011	1744,95	252,95	-1,21%	-0,69%	коэффициент бэта =	0,648			
7	28.04.2011	1749,65	253,77	0,27%	0,32%					
8	29.04.2011	1741,84	255,77	-0,45%	0,79%					
9	03.05.2011	1691,45	252,50	-2,89%	-1,28%					
10	04.05.2011	1657,54	248,70	-2,00%	-1,50%					
11	05.05.2011	1644,92	249,72	-0,76%	0,41%					
12	06.05.2011	1681,01	253,13	2,19%	1,37%					
13	10.05.2011	1678,13	254,30	-0,17%	0,46%					
14	11.05.2011	1654,78	243,84	-1,39%	-4,11%					
15	12.05.2011	1630,78	238,35	-1,45%	-2,25%					
16	13.05.2011	1632,23	237,39	0,09%	-0,40%					
17	16.05.2011	1622,98	240,67	-0,57%	1,38%					
18	17.05.2011	1608,66	238,17	-0,88%	-1,04%					
19	18.05.2011	1627,03	238,86	1,14%	0,29%					
20	19.05.2011	1630,72	238,31	0,23%	-0,23%					
21	20.05.2011	1603,97	236,01	-1,64%	-0,97%					
22	23.05.2011	1573,14	232,32	-1,92%	-1,56%					
23	24.05.2011	1598,82	232,31	1,63%	0,00%					
24	25.05.2011	1614,86	232,18	1,00%	-0,06%					
25	26.05.2011	1606,21	230,59	-0,54%	-0,68%					
26	27.05.2011	1638,06	233,49	1,98%	1,26%					
27	30.05.2011	1644,99	233,82	0,42%	0,14%					
28	31.05.2011	1666,30	235,49	1,30%	0,71%					

Лист1 Лист2 Лист3 Лист4

Рисунок 4.6 – Расчет β-коэффициента. Второй способ

3. Сравнительный анализ доходности и риска ценных бумаг

Под риском понимается вероятность недополучения дохода по инвестициям. Всем известно, что чем выше доля риска, тем выше будет доходность ценной бумаги. Другими словами, доходность ценной бумаги и уровень риска прямо пропорциональны друг другу.

Если имеются временные ряды доходности за достаточно длительный период, то ожидаемую доходность и риск можно оценить, применяя статистические методы прогнозирования на основе временных рядов. В современной математике финансов этот подход является наиболее используемым. Такой подход называют подходом статистика.

Рассчитаем степень риска для двух эмитентов обыкновенных акций: компаний МТС и Роснефть (рис. 4.7).

Для этого на первом этапе рассчитаем доходность акций по формуле:

$$r_i = \frac{y_i}{y_{i-1}} - 1 \qquad (4)$$

По историческим данным за некоторый период выборочное среднее вычисляется по формуле:

$$\bar{r} = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{n} \qquad (5)$$

где r_i – доходность ценно бумаги;

n – количество наблюдений.

Для этого в ячейку D42 введем следующую формулу:

=СРЗНАЧ(D3:D41) (Результат: - 0,14%)

D20 f_x =B20/B19-1

	A	B	C	D	E
1	Дата	Котировки Роснефть, ао	Котировки МТС, ао	Доходность акций Роснефть	Доходность акций МТС
20	19.05.2011	229,99	238,31	1,02%	-0,23%
21	20.05.2011	227,50	236,01	-1,08%	-0,97%
22	23.05.2011	222,31	232,32	-2,28%	-1,56%
23	24.05.2011	227,84	232,31	2,49%	0,00%
24	25.05.2011	231,71	232,18	1,70%	-0,06%
25	26.05.2011	231,70	230,59	0,00%	-0,68%
26	27.05.2011	240,55	233,49	3,82%	1,26%
27	30.05.2011	241,70	233,82	0,48%	0,14%
28	31.05.2011	242,15	235,49	0,19%	0,71%
29	01.06.2011	239,31	235,20	-1,17%	-0,12%
30	02.06.2011	239,11	235,75	-0,08%	0,23%
31	03.06.2011	235,40	233,45	-1,55%	-0,98%
32	06.06.2011	237,54	234,19	0,91%	0,32%
33	07.06.2011	243,21	235,39	2,39%	0,51%
34	08.06.2011	247,08	235,25	1,59%	-0,06%
35	09.06.2011	251,00	241,76	1,59%	2,77%
36	10.06.2011	248,39	240,64	-1,04%	-0,46%
37	14.06.2011	248,30	242,00	-0,04%	0,57%
38	15.06.2011	246,07	239,00	-0,90%	-1,24%
39	16.06.2011	248,00	236,65	0,78%	-0,98%
40	17.06.2011	240,93	233,95	-2,85%	-1,14%
41	20.06.2011	237,10	233,00	-1,59%	-0,41%
42			среднее знач.	-0,14%	-0,23%
43			дисперсия	0,03%	0,01%
44			станд.отклон.	1,64%	1,16%

Рисунок 4.7 – Расчёт степени риска акций

Это значение выборочной средней принимается за среднюю доходность.

Вариация или дисперсия должна быть несмещенной оценкой и вычисляется по формуле:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (r_i - \overline{r_i})^2 / (n-1) \qquad (6)$$

где $\overline{r_i}$ – среднее значение доходности.

Для этого в ячейку D43 введем формулу для расчета дисперсии:

=ДИСП(D3:D41) (Результат: 0,03%)

Степень риска акции за период времени i, в процентах характеризуется стандартным отклонением и рассчитывается по следующей формуле:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (r_i - \overline{r_i})^2 / (n-1)} \qquad (7)$$

В ячейку D44 введем формулу:

=СТАНДОТКЛОН(D3:D41) (Результат: 1,64%)

Для расчета степени риска для акций второй компании в соответствующие ячейки столбца Е вводятся аналогичные формулы.

Сравнивая результаты вычислений для акций компаний Роснефть и МТС, можно отметить, что степень риска акций Роснефти на 0,48% больше, чем МТС. Это обусловлено большим значением показателя вариации (дисперсии) для данных ценных бумаг. Как следствие, доходность акций компании Роснефть будет выше, чем компании МТС.

2.4.3 Результаты и выводы:

В результате выполнения практического занятия ПЗ-4 студенты:

1. Должны усвоить теоретические основы построения: модели оценки капитальных активов CAPM, теоремы разделения, рыночного портфеля как оптимального, коэффициента бета актива, зависимости ожидаемой доходности от коэффициента бета.

2. Способны находить «выбросы» - причину искажения корреляции, выполнять расчёт параметров уравнения регрессии и проводить сравнительный анализ доходности и риска ценных бумаг.

2.5 Практическое занятие № ПЗ-5 (2 часа)

Тема: Факторные модели

2.5.1 Задание для работы:

1. Рыночная (индексная) модель управления портфелем (модель Шарпа). Исходные допущения. Показатели бета и альфа акции.
2. Определение коэффициентов бета и альфа акции на основе ретроспективных данных.
3. Графическая интерпретация рыночной модели. Систематический и несистематический (специфический) риски, коэффициент детерминации.
4. Однофакторные модели. Чувствительность модели к фактору.
5. Многофакторные модели.
6. Арбитражная модель ценообразования (АРТ). Исходные допущения.
7. Арбитражные портфели. Поведение инвесторов: максимизация доходности портфеля при сохранении уровня рискованности и чувствительности к факторам.
8. Реакция рынка: механизм ценообразования для финансового актива в модели АРТ.
9. Расчет стандартной ошибки прогноза и доверительных интервалов.
10. Расчет стандартных ошибок параметров уравнения регрессии.
11. Вывод итогов регрессионной статистики и дисперсионного анализа.
12. Экономическая интерпретация результатов регрессионного и дисперсионного анализа.

2.5.2 Краткое описание проводимого занятия

1. Расчет стандартной ошибки прогноза и доверительных интервалов

Стандартная ошибка (S_e) является приближённым показателем величины ошибок остатков для имеющихся данных, измеряется в тех же единицах, что и Y. Она показывает величину отклонения в большую и меньшую сторону от значений линии регрессии с определенной долей вероятности. Так, если ошибки прогноза имеют нормальное распределение, то можно ожидать, что примерно 2/3 точек данных будут находиться на расстоянии не более величины S_e выше или ниже линии регрессии. При 95% вероятности значения будут сосредоточены вокруг линии регрессии на расстоянии $\pm 2S_e$ и при вероятности близкой к 1 – $\pm 3S_e$.

Используя данные из предыдущей работы, но строя график по данным доходности, а не котировкам, рассчитаем стандартную ошибку прогноза и доверительные интервалы.

На рисунке 5.1 стандартная ошибка прогноза рассчитывается в ячейке H1 по формуле:

=СТОШYX(C3:C40;B3:B40) (Результат: 0,84%).

Тренд (столбец С) рассчитывается при помощи уравнения построенной линии тренда на диаграмме по следующей формуле:

$$y = 0{,}6654x - 0{,}0008$$

Нижняя и верхняя границы рассчитываются как разница и сумма тренда и стандартных ошибок прогноза соответственно. Рассчитаем границы с вероятностью 2/3 (около 67%). Нижняя граница в ячейке E2:

=D2-$H$1 (Результат: -0,42%).

Остальные ячейки столбца E копируем. Верхняя граница в ячейке F2:

=D2+$H$1 (Результат: 1,26%).

Остальные ячейки столбца F копируем.

Arial Cyr 10

H1 =СТОШYX(C2:C40;B2:B40)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Дата	Доходность индекса (x),%	Доходность акций (y),%	Тренд	Нижняя граница y	Верхняя граница y	Стандартная ошибка прогноза, %	0,84%
2	22.04.2011	0,75%	0,58%	0,42%	-0,42%	1,26%		
3	25.04.2011	-1,34%	-0,82%	-0,97%	-1,81%	-0,13%		
4	26.04.2011	-0,21%	-0,06%	-0,22%	-1,06%	0,62%		
5	27.04.2011	-1,21%	-0,69%	-0,88%	-1,73%	-0,04%		
6	28.04.2011	0,27%	0,32%	0,10%	-0,74%	0,94%		
7	29.04.2011	-0,45%	0,79%	-0,38%	-1,22%	0,46%		
8	03.05.2011	-2,89%	-1,28%	-2,00%	-2,85%	-1,16%		
9	04.05.2011	-2,00%	-1,50%	-1,41%	-2,26%	-0,57%		
10	05.05.2011	-0,76%	0,41%	-0,59%	-1,43%	0,26%		
11	06.05.2011	2,19%	1,37%	1,38%	0,54%	2,22%		
12	10.05.2011	-0,17%	0,46%	-0,19%	-1,04%	0,65%		
13	11.05.2011	-1,39%	-4,11%	-1,01%	-1,85%	-0,16%		
14	12.05.2011	-1,45%	-2,25%	-1,05%	-1,89%	-0,20%		
15	13.05.2011	0,09%	-0,40%	-0,02%	-0,86%	0,82%		
16	16.05.2011	-0,57%	1,38%	-0,46%	-1,30%	0,38%		
17	17.05.2011	-0,88%	-1,04%	-0,67%	-1,51%	0,17%		
18	18.05.2011	1,14%	0,29%	0,68%	-0,16%	1,52%		
19	19.05.2011	0,23%	-0,23%	0,07%	-0,77%	0,91%		
20	20.05.2011	-1,64%	-0,97%	-1,17%	-2,01%	-0,33%		
21	23.05.2011	-1,92%	-1,56%	-1,36%	-2,20%	-0,52%		
22	24.05.2011	1,63%	0,00%	1,01%	0,16%	1,85%		
23	25.05.2011	1,00%	-0,06%	0,59%	-0,25%	1,43%		
24	26.05.2011	-0,54%	-0,68%	-0,44%	-1,28%	0,41%		
25	27.05.2011	1,98%	1,26%	1,24%	0,40%	2,08%		
26	30.05.2011	0,42%	0,14%	0,20%	-0,64%	1,04%		
27	31.05.2011	1,30%	0,71%	0,78%	-0,06%	1,62%		
28	01.06.2011	-0,94%	-0,12%	-0,70%	-1,55%	0,14%		
29	02.06.2011	0,47%	0,23%	0,23%	-0,61%	1,07%		

Лист1 Лист2 Лист3

Действия Автофигуры

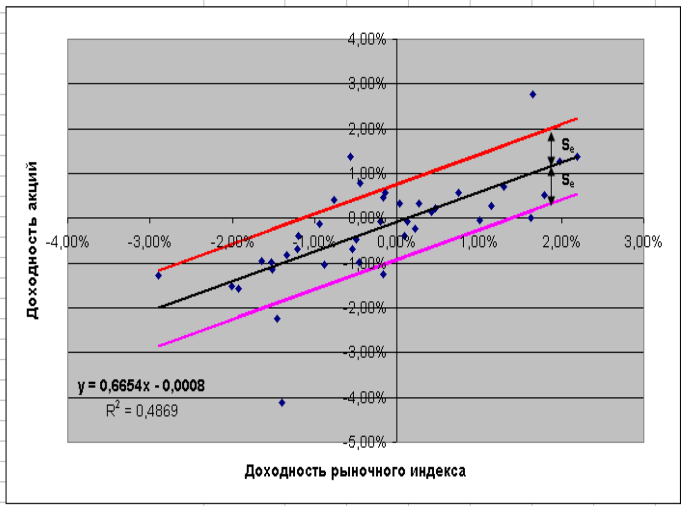


Рисунок 5.1 – Стандартная ошибка прогноза (S_e) показывает приблизительно ошибку какой величины можно допустить, когда вместо фактического значения Y используется прогнозируемое значение Y. Можно ожидать, что в случае обычной линейной связи примерно 2/3 точек данных будут находиться между верхней и нижней границами прогноза.

Чтобы построить диаграмму, как на рис. 5.1 необходимо выполнить следующие действия:

1) выделить диапазон ячеек B1:C40;

2) выбрать *Вставка* ⇒ *Диаграмма* ⇒ *Точечная* и оформить в соответствии с рисунком;

3) затем добавить линию тренда при помощи правой кнопки мыши *Добавить линию тренда* ⇒ *Линейная; Параметры* ⇒ *Показывать уравнение на диаграмме;*

4) для добавления нижней границы открываем меню *Диаграмма* ⇒ *Исходные данные* ⇒ *Ряд* ⇒ *Добавить;*

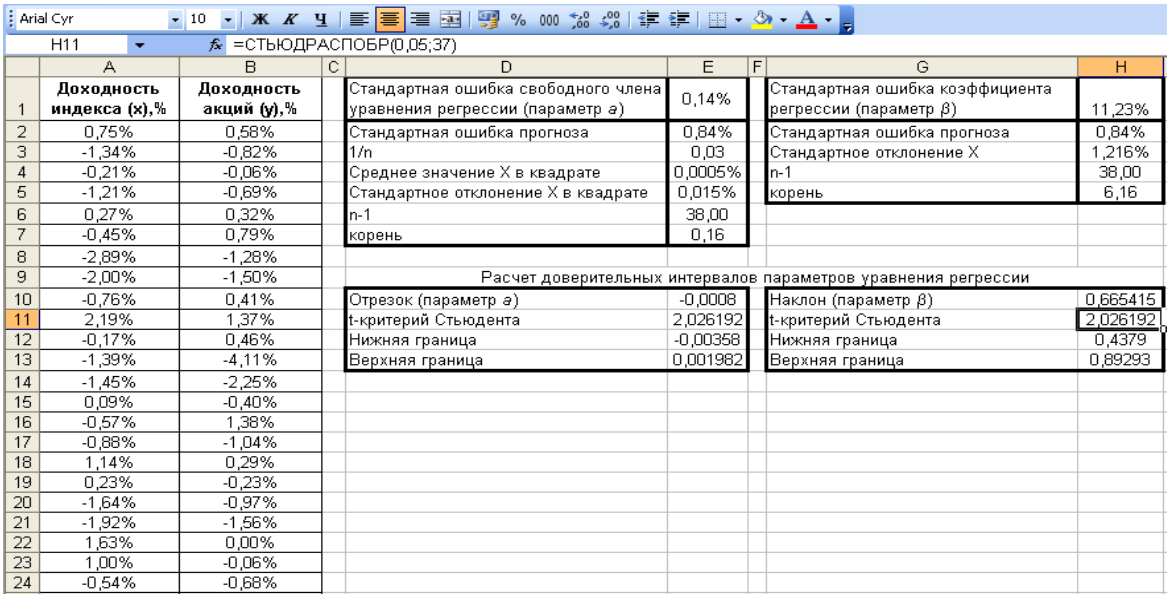
5) В качестве *значения X* выбрать диапазон ячеек B2:B40, *значения Y* – диапазон ячеек E2:E40

6) щёлкнув на диаграмме по появившимся ниже линии тренда точкам и выбрав *Формат рядов данных* ⇒ *Вид* ⇒ *Линия* ⇒ *Обычная; Маркер*⇒ *Отсутствует,* получите на диаграмме нижнюю границу прогноза.

Аналогично строится верхняя граница прогноза.

2. Расчет стандартных ошибок параметров уравнения регрессии

На рисунке 5.2 показан расчёт стандартных ошибок параметров уравнения регрессии. Для этого введем следующие формулы:



Arial Cyr | 10

H11 | =СТЬЮДРАСПОБР(0,05;37)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Доходность индекса (x),%	Доходность акций (y),%		Стандартная ошибка свободного члена уравнения регрессии (параметр a)	0,14%		Стандартная ошибка коэффициента регрессии (параметр β)	11,23%
2	0,75%	0,58%		Стандартная ошибка прогноза	0,84%		Стандартная ошибка прогноза	0,84%
3	-1,34%	-0,82%		1/n	0,03		Стандартное отклонение X	1,216%
4	-0,21%	-0,06%		Среднее значение X в квадрате	0,0005%		n-1	38,00
5	-1,21%	-0,69%		Стандартное отклонение X в квадрате	0,015%		корень	6,16
6	0,27%	0,32%		n-1	38,00			
7	-0,45%	0,79%		корень	0,16			
8	-2,89%	-1,28%						
9	-2,00%	-1,50%		Расчет доверительных интервалов параметров уравнения регрессии				
10	-0,76%	0,41%		Отрезок (параметр a)	-0,0008		Наклон (параметр β)	0,665415
11	2,19%	1,37%		t-критерий Стьюдента	2,026192		t-критерий Стьюдента	2,026192
12	-0,17%	0,46%		Нижняя граница	-0,00358		Нижняя граница	0,4379
13	-1,39%	-4,11%		Верхняя граница	0,001982		Верхняя граница	0,89293
14	-1,45%	-2,25%						
15	0,09%	-0,40%						
16	-0,57%	1,38%						
17	-0,88%	-1,04%						
18	1,14%	0,29%						
19	0,23%	-0,23%						
20	-1,64%	-0,97%						
21	-1,92%	-1,56%						
22	1,63%	0,00%						
23	1,00%	-0,06%						
24	-0,54%	-0,68%						

Рисунок 5.2 – Для расчёта доверительных интервалов параметров уравнения регрессии используются стандартные ошибки параметров *a* и *β*.

в ячейку E2:
=СТОШYX(B2:B40;A2:A40)
в ячейку E3:
=1/СЧЁТ(B2:B40)
в ячейку E4:
=(СРЗНАЧ(A2:A40))^2
в ячейку E5:
=(СТАНДОТКЛОН(A2:A4)^2
в ячейку E6:
=СЧЁТ(B2:B40)-1
в ячейку E7:
=КОРЕНЬ(E3+E4/(E5*E6))
в ячейку E1: =E2*E7

в ячейку H2:
=СТОШYX(B2:B40;A2:A40)
в ячейку H3:
=СТАНДОТКЛОН(A2:A40)
в ячейку H4:
=СЧЁТ(B2:B40)-1
в ячейку H5:
=КОРЕНЬ(H4)
в ячейку H1:
=H2/(H3*H5)

Они показывают вероятное отклонение соответствующих параметров в генеральной и выборочной совокупностях. Расчёт доверительных интервалов осуществляется вводом следующих формул:

в ячейку E10: =ОТРЕЗОК(B2:B40;A2:A40)
в ячейку E11:
=СТЬЮДРАСПОБР(0,05;37)
в ячейку E12: =E10-E11*E1
в ячейку E13: =E10+E11*E1

в ячейку H10: =НАКЛОН(B2:B40;A2:A40)
в ячейку H11:
=СТЬЮДРАСПОБР(0,05;37)
в ячейку H12: =H10-H11*H1
в ячейку H13: =H10+H11*H1

Функция СТЬЮДРАСПОБР позволяет определить *t*-статистику Стьюдента, которая придаёт доверительным интервалам вероятностный характер. В данном случае параметр *вероятность*, равный 0,05, говорит о 95% вероятности, а параметр *степени_свободы*, равный 37, о том, что из 39 степеней свободы 2 степени свободы теряются из-за двух параметров в уравнении регрессии.

3. Вывод итогов регрессионной статистики и дисперсионного анализа

В *Excel* для расчёта параметров уравнения регрессии в *Пакете анализа* существует средство *Регрессия.* Его можно активировать следующим образом: выбрать *Сервис* ⇒ *Анализ данных* ⇒ *Регрессия.* Появится диалоговое окно, показанное на рисунке 5.3.

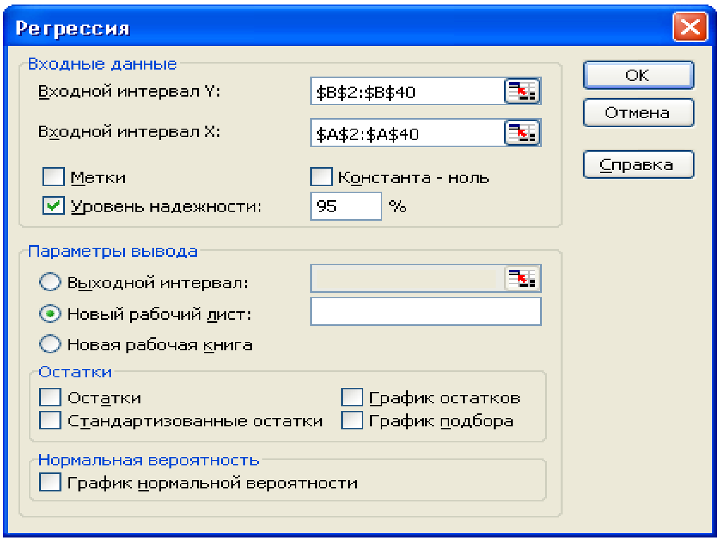
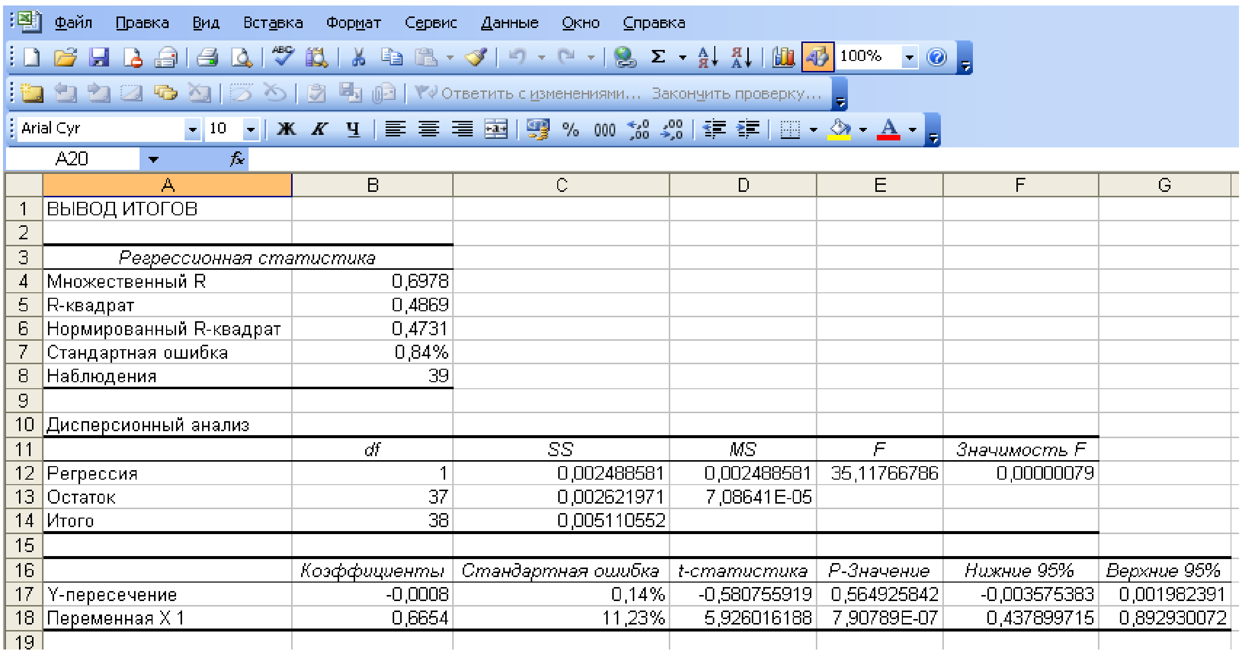


Рисунок 5.3 – Средство *Пакета анализа «Регрессия»* позволяет рассчитать большинство параметров регрессионной статистики и дисперсионного анализа

Если заполнить диалоговое окно *Регрессия* так, как показано на рисунке, в новом рабочем листе будет выведен перечень основных показателей регрессионной статистики и дисперсионного анализа (рис. 5.4).



	A	B	C	D	E	F	G
1	ВЫВОД ИТОГОВ						
2							
3	*Регрессионная статистика*						
4	Множественный R	0,6978					
5	R-квадрат	0,4869					
6	Нормированный R-квадрат	0,4731					
7	Стандартная ошибка	0,84%					
8	Наблюдения	39					
9							
10	Дисперсионный анализ						
11		*df*	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*	
12	Регрессия	1	0,002488581	0,002488581	35,11766786	0,00000079	
13	Остаток	37	0,002621971	7,08641E-05			
14	Итого	38	0,005110552				
15							
16		*Коэффициенты*	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*
17	Y-пересечение	-0,0008	0,14%	-0,580755919	0,564925842	-0,003575383	0,001982391
18	Переменная X 1	0,6654	11,23%	5,926016188	7,90789E-07	0,437899715	0,892930072
19							

Рисунок 5.4 – Результаты компьютерных вычислений при использовании пакета «Регрессия»

4. Экономическая интерпретация результатов регрессионного и дисперсионного анализа

В ячейке B4 рассчитан множественный коэффициент корреляции (множественный $R = 0{,}70$).

В ячейке B5 рассчитан множественный коэффициент детерминации (R-квадрат = 0,4869). Это же значение можно увидеть на диаграмме рис. 5.1.

В ячейке B6 рассчитан скорректированный множественный коэффициент детерминации (нормированный R-квадрат), который содержит поправку на число степеней свободы и всегда меньше множественного коэффициента детерминации (R-квадрат).

В ячейке B7 рассчитана стандартная ошибка прогноза. Её значение соответствует результатам, полученным на рис.5.1 (ячейка H1) и рис. 5.2 (ячейки E2 и H2). В ячейке B8 содержится количество наблюдений (объём изучаемой совокупности).

В ячейках B11:B14 (df) содержатся данные о количестве степеней свободы. Одна степень свободы в ячейке B12 говорит о непредсказуемости направления связи (прямая или обратная), число 37 в ячейке B13 представляет количество наблюдений минус число параметров уравнения регрессии.

В ячейках C11:C14 (*SS* – сумма квадратов) рассчитаны: объяснённая (факторная) – ячейка C12, остаточная – ячейка C13, и общая – ячейка C14, дисперсии. В ячейках D11:D13 (*MS* – сумма квадратов на одну степень свободы) рассчитаны объяснённая (факторная) и остаточная дисперсии на 1 степень свободы.

В ячейке E12 рассчитана *F*-статистика Фишера (путём деления ячейки D12 на ячейку D13), а в ячейке F12 её значимость. Полученные данные позволяют с очень высокой степенью вероятности говорить о значимости построенной регрессионной модели. Лишь в 79 случаях из 100000000 модель не значима.

В ячейках B17:B18 рассчитаны коэффициенты уравнения регрессии. В ячейках C17:C18 рассчитаны стандартные ошибки, соответствующие значениям E1 и H1 на рисунке 5.2.

Если разделить коэффициент уравнения регрессии на стандартную ошибку, то будет получено значение *t*-статистики. Так, если B17 разделить на C17, получим ячейку D17. Значения ячеек D17:D18 превосходят табличные значения *t*-статистики. Это означает, что коэффициенты уравнения регрессии значимо отличаются от нуля. *P-значения* в ячейках E17:E18 говорят о средней вероятности получения нулевого результата. В ячейках F17:G18 содержатся доверительные интервалы коэффициентов уравнения регрессии при 95% уровне вероятности, которые совпадают с данными рис. 5.2.

2.5.3 Результаты и выводы:

В результате выполнения практического занятия ПЗ-5 студенты:

1. Должны усвоить теоретические основы: построения рыночной (индексной), однофакторной, многофакторной и арбитражных моделей управления портфелем ценных бумаг; определения коэффициентов бета и альфа акции на основе ретроспективных данных; графического отражения построенных моделей и их экономической интерпретации.
2. Способны рассчитывать стандартные ошибки параметров уравнения регрессии, прогноза и доверительных интервалов; выводить итоги регрессионной статистики и дисперсионного анализа на монитор компьютера и давать экономическую интерпретацию результатам регрессионного и дисперсионного анализа.

2.6 Практическое занятие № ПЗ-6 (1 час)

Тема: Модель определения «стоимости под риском» (VaR-модель)

2.6.1 Задание для работы:

1. Расчет показателя «стоимости под риском» на базе параметрического метода.
2. Определение показателя «стоимости под риском» на основе исторического моделирования.
3. Использование статистического моделирования и метода Монте-Карло для определения «стоимости под риском».
4. Использование VAR-модели для оценки рыночного риска (один финансовый актив, портфель финансовых активов).
5. Развитие VAR-модели для оценки устойчивости к экстремальным событиям (стресс-тестирование).
6. Подбор трендовой кривой.
7. Определение сезонности.
8. Мультипликативная декомпозиция.

2.6.2 Краткое описание проводимого занятия

1.Подбор трендовой кривой

Прежде чем, перейти к прогнозу динамики временного ряда необходимо подобрать трендовую кривую, наиболее точно описывающую представленный динамический ряд курсовой стоимости акций по результатам торгов на ММВБ. Для анализа возьмем наиболее распространенные тренды: линейный, полиномиальный и экспоненциальный, и сравним полученные результаты (см. рис. 6.1, 6.2, 6.3).

Для этого выделяем диапазон B1:B50, нажимаем Вставка→Диаграмма→Линейная→ОК. После этого щелкнув мышью по линии котировок, выбираем добавить линию тренда (линейную, полиномиальную и экспоненциальную) и ставим галочки: «показывать уравнение на диаграмме» и «поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации *R*ˆ2».

Тренд представляет собой долговременные изменения во временных рядах, которые иногда можно описать с помощью прямой линии или гладкой кривой. Если грубо представить тренд в виде прямой линии, т.е. если рост или спад похожи на прямую линию. В линейной модели предполагается, что переменная возрастает или убывает на постоянную величину за каждый промежуток времени. Коэффициент детерминации тренда и исследуемого временного ряда достаточно высокий, и равен: R^2=54,2 %. Однако, из рисунка 6.1, можно сделать вывод, что прямая не достаточно точно описывает динамический ряд, и значения часто колеблются выше или ниже прямой линии тренда.

Для того чтобы смоделировать тренд с учетом цикличности фондового рынка, нужна кривая, отличная от прямой линии. Простой функцией, учитывающей кривизну, является квадратичный тренд:

$$Y=0{,}0848x^2-1{,}6047x+202{,}71$$

Так как временной ряд является возрастающим, а относительное изменение данных – достаточно постоянно, рассмотрим также модель экспоненциального (показательного) тренда.

Значение критерия R^2=63,2 %. выше всего у полиномиального тренда так, как у линейного и экспоненциального трендов значения ниже. Следовательно, квадратичная кривая объясняет дополнительную долю вариации курсовой стоимости данных акций.

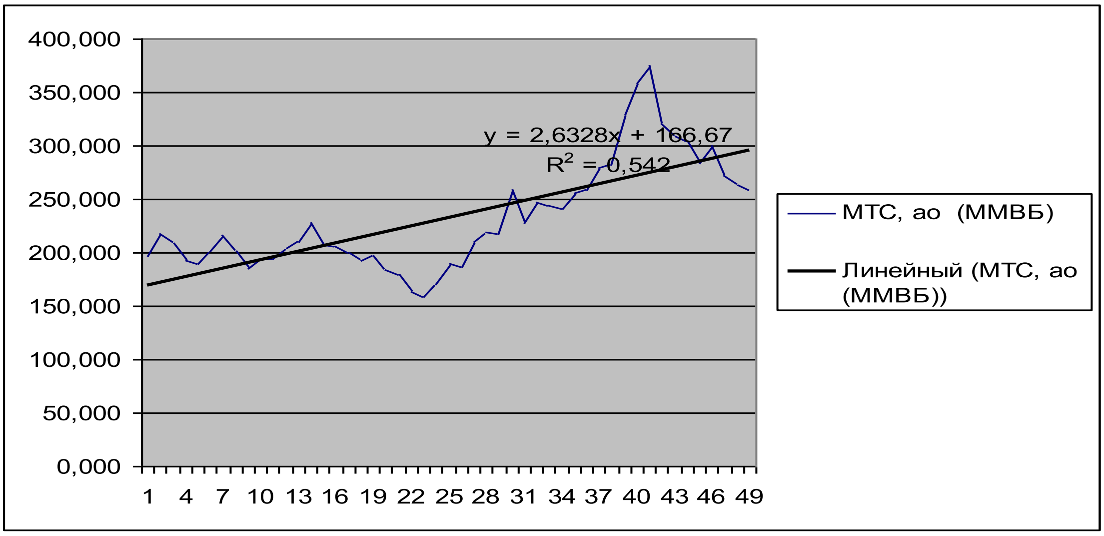


Рисунок 6.1 – Линейный тренд для временного ряда

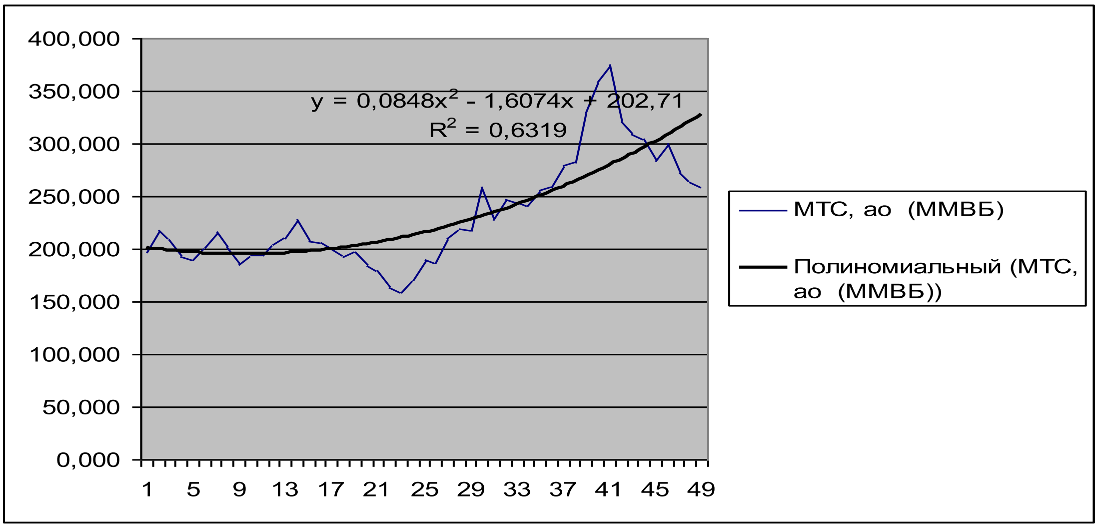


Рисунок 6.2 – Квадратичная кривая для временного ряда

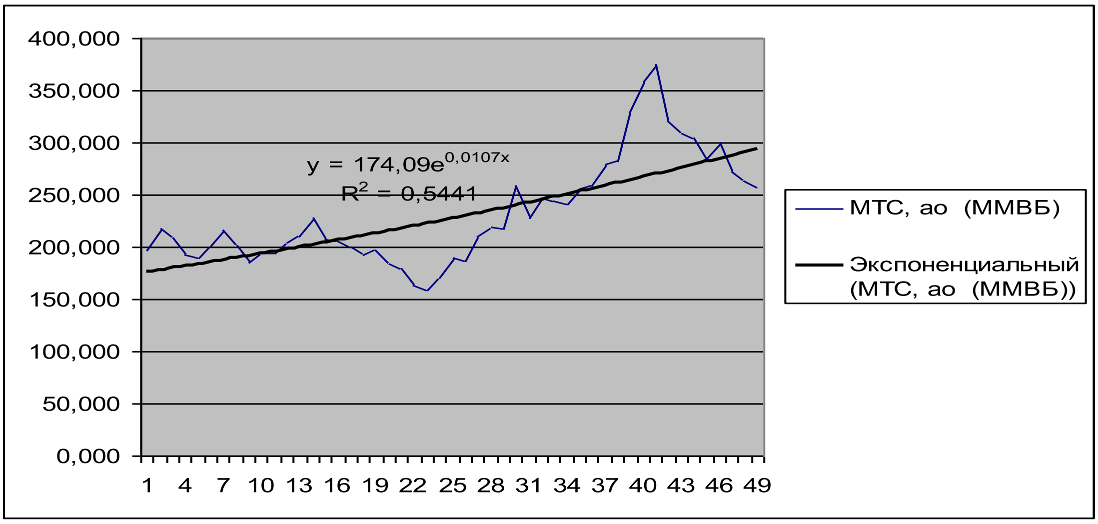


Рисунок 6.3 – Экспоненциальный тренд для временного ряда

2.Определение сезонности

Сезонная структура имеет место при наличии явлений, повторяющихся из года в год. На годичных данных сезонность никак не отражается, поскольку нет возможности смоделировать внутригодовую структуру данных, значения которых регистрируются лишь один раз в год. Однако во временных рядах, содержащих недельные, месячные или квартальные наблюдения, сезонность проявляется очень часто.

Анализ сезонной компоненты временных рядов имеет непосредственные краткосрочные последствия и весьма важен для решений, принимаемых в течение года,

Существует несколько методов для оценки сезонных вариаций. Основная идея всех этих методов заключается в том, что в реальном ряду сначала оценивается и убирается тренд, а потом сглаживается возможная нерегулярная компонента.

Если используется мультипликативная, как в нашем случае, декомпозиция, то для того чтобы восстановить исходную последовательность, отдельные компоненты перемножаются. В этом случае сезонная компонента представляется набором числовых индексов. Эти числа показывают, какие периоды в году характеризуются относительно низкими показателями, а какие - относительно высокими. Сезонная структура проявляется в сезонных индексах.

Для месячных данных сезонный индекс для одного месяца означает, что ожидаемое значение для него составляет 1/12 общего значения для всего года (см. табл. 6.1). Значение индекса выше 1 подразумевает, что ожидаемые наблюдения для данного месяца превышают 1/12 годичного целого. Месячный индекс меньше 1 указывает на то, что ожидаемый уровень активности для этого месяца будет меньше 1/12 годичного целого, и т.д. Сезонные индексы указывают на ожидаемые подъемы и спады уровня активности в течение года после того, как трендовая (или тренд-циклическая) и нерегулярная компоненты были удалены.

В таблице 6.1 сезонный индекс рассчитан на основе четырех этапов:

Этап 1. Начиная с первого члена ряда, рассчитывается 12-месячная скользящая сумма. То есть в столбце «12-месячная скользящая сумма» Расчет значений мы начинаем проводить с февраля 2007 года.

Вводим формулу в ячейку G8:

=СУММ(F3:F14), и протягиваем ее до ячейки G45.

Этап 2. Рассчитывается двухгодичная скользящая сумма, и результат помещается в таблицу в строку марта 2007 года.

2401,740+ 2414,740= 4816,480.

Этап 3. Двухгодичная скользящая сумма делится на 24 для получения 12-месячного центрированного скользящего среднего:

4816,480/24 = 200,687.

Этап 4. Сезонный индекс для июля получается в результате деления реального значения для июля на 12-месячное центрированное скользящее среднее. Эта операция деления на скользящее среднее и дала данной процедуре ее название: 216,000/200,687= 1,076.

Этапы 1-4 повторяются, начиная со второго месяца ряда и т.д. Процесс заканчивается, когда нельзя вычислить 12-месячную скользящую сумму.

Таблица 6.1 – Расчет сезонных индексов

Год	Период	Стоимость акций, руб.	12- месячная скользящая сумма, руб.	Двухгодичная скользящая сумма, руб.	12 месячное центрированное скользящее среднее	Сезонный индекс
		этап 1	этап 2	этап 3	этап 4	этап 5
2008	сентябрь	197,000				
2008	октябрь	216,990				
2008	ноябрь	209,500				
2008	декабрь	192,000				
2009	январь	189,000				
2009	февраль	202,000	2401,740			
2009	март	216,000	2414,740	4816,480	200,687	1,076
2009	апрель	201,000	2426,250	4840,990	201,708	0,996
2009	май	185,600	2424,740	4850,990	202,125	0,918
2009	июнь	193,650	2438,700	4863,440	202,643	0,956
2009	июль	194,500	2450,200	4888,900	203,704	0,955
2009	август	204,500	2440,200	4890,400	203,767	1,004
2009	сентябрь	210,000	2421,510	4861,710	202,571	1,037
2009	октябрь	228,500	2404,900	4826,410	201,100	1,136
2009	ноябрь	207,990	2399,200	4804,100	200,171	1,039
2009	декабрь	205,960	2368,550	4767,750	198,656	1,037
…	…	…	…	….	….	….
2012	январь	374,750	3673,940	7332,900	305,538	1,227
2012	февраль	320,000	3677,650	7351,590	306,316	1,045
2012	март	309,000	3655,590	7333,240	305,552	1,011
2012	апрель	304,990				
2012	май	284,220				
2012	июнь	299,960				
2012	июль	271,480				
2012	август	262,750				
2012	сентябрь	257,440				

После того как получено несколько оценок (соответствующих разным годам) сезонных индексов для каждого месяца, их надо тем или иным образом обобщить, чтобы получилось одно значение. Как обобщенную меру более предпочтительно использовать медиану, а не среднее значение. Использование медианы исключает влияние тех месячных данных в году, которые являются необычайно большими или малыми. Сводка сезонных отношений вместе со значением медианы для каждого месяца показана в табл. 6.2.

Таблица 6.2 – Сводка сезонных индексов для месячных величин стоимости акций

Месяц	2009 год	2010 год	2011 год	2012 год	Медиана	Скорректированный сезонный индекс
январь		1,024	0,997	1,227	1,024	1,038
февраль		0,995	1,144	1,045	1,045	1,059
март	1,076	1,035	0,975	1,011	1,023	1,037
апрель	0,996	0,980	1,026		0,996	1,010
май	0,918	0,965	0,977		0,965	0,978
июнь	0,956	0,872	0,923		0,923	0,936
июль	0,955	0,842	0,938		0,938	0,951
август	1,004	0,887	0,917		0,917	0,930
сентябрь	1,037	0,968	0,969		0,969	0,982
октябрь	1,136	0,937	0,961		0,961	0,974
ноябрь	1,039	1,024	1,106		1,039	1,053
декабрь	1,037	1,036	1,184		1,037	1,051
СУММА					11,836	12,000
КОЭФФИЦИЕНТ					1,014	

Чтобы свести данные в таблицу, мы переносим туда значения по годам. А чтобы рассчитать медиану, в ячейку Q2 вводим формулу:

=МЕДИАНА(M2:P2), и протягиваем значения до ячейки Q13. Сумма месячных сезонных индексов для всего года должна равняться 12, чтобы получить результирующий набор сезонных индексов и ожидаемый годичный итог равнялся реальному годовому итогу. Значение медиан следует соответствующим образом подогнать. Необходимый множитель должен быть больше единицы, если сумма медиан до подгонки оказалась меньше 12, и меньше единицы, если сумма медиан была больше 12. Поэтому необходимый множитель определяется следующей формулой:

Множитель = 12/Действительная сумма.

Множитель =12/11,836=1,014

В табл. 6.2, изначально, сумма медиан была неравна 12, поэтому был использован множитель 1,014. Для расчета последнего столбца необходимо было ввести формулу в ячейку R2: =Q2*$Q$15, и протянуть значения до ячейки R13. На рис. 6.4 вычисленные сезонные индексы показаны графически. Они представляют сезонную компоненту в мультипликативной декомпозиции временного ряда ежемесячных объемов инвестиций в основной капитал.

Сезонность, как видно на графике, в динамике акций нечетко выражена. Минимальные значения сезонных индексов приходятся на летние месяцы, а с сентября по декабрь наблюдается рост стоимости акций, но достаточно нестабильный, то есть значения последующего индекса не обязательно выше предыдущего, а могут колебаться в течение этого периода.

При анализе ряда данных о стоимости акций за исходный период, предполагалось, что их сезонная структура постоянна из года в год. Если сезонная структура претерпевает изменения, то оценка сезонной компоненты на полном наборе данных может дать ошибочные результаты. В этом случае для оценки сезонной компоненты лучше использовать либо только самые свежие данные (за последние несколько лет), либо модель временных рядов, допускающую выделение сезонности.

Результаты сезонного анализа могут быть использованы для исключения сезонности из данных, а также для предсказания будущих значений и оценки текущего состояния дел.

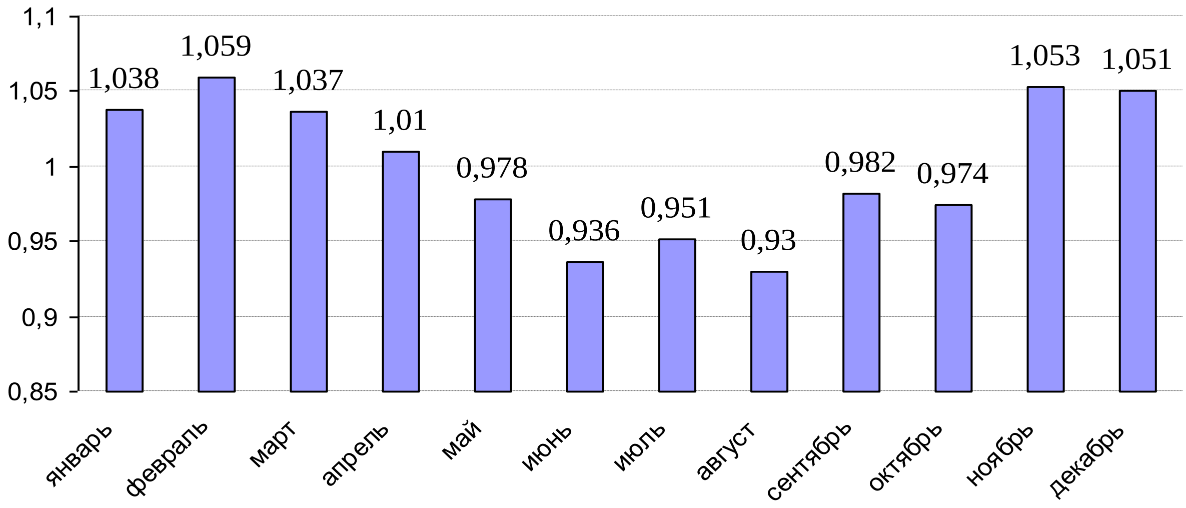


Рисунок 6.4 – Скорректированные сезонные индексы котировок акции

3.Мультипликативная декомпозиция

Циклы – это долговременные волнообразные колебания, которые чаще всего встречаются в макропоказателях экономической деятельности. Как говорилось ранее, в тех пределах, в которых они могут быть измерены, циклы обычно не имеют устойчивой структуры. Однако определенное понимание циклического поведения временных рядов может быть получено путем исключения из них трендовой и сезонной компонент с использованием метода мультипликативной декомпозиции.

Чтобы лучше понять поведение нашего временного ряда, применим метод декомпозиции для месячной динамики стоимости акций. Полученные результаты приведены в таблице 6.3.

Тренд при этом будет вычисляться по формуле:

$$T = 0{,}0848x^2 - 1{,}6074x + 202{,}71$$

Данные в графе SCI рассчитываются, как *Y*, деленное на *T*.

Данные с устраненными сезонными колебаниями в графе TCI равны отношению стоимости акций Y к сезонным данным S.

Циклическая нерегулярная компонента вычисляется по формуле:

$$CI = \frac{Y}{T * S}$$

Для расчета столбца циклической компоненты было использовано 7-элементное центрированное скользящее среднее, причем первый и последний элемент делили пополам. Таким образом, усреднялся полугодовой объем инвестиций, а «половинки» первого и седьмого месяцев сглаживали переход одного скользящего среднего к другому. Был использован именно шестимесячный период для усреднения данных, потому что, если вернуться к сезонной волне, представленной на рисунке 6.4.

По этим причинам в табл. 6.3 отсутствуют данные по циклической и нерегулярной компоненте в сентябре-октябре 2008 г. и июле-сентябре 2012 г., а первое значение рассчитано для сентября 2012 г. и равно:

C=(0,5*AA9+AA10+AA11+AA12+AA13+AA14+0,5*AA15)/6

Таблица 6.3 – Мультипликативная декомпозиция месячных величин стоимости акций

t	Год	Стоимость акции, Y	Тренд, T	Исключенный тренд, SCI	Сезонные данные, S	Исключенная сезонность, TCI	Цикличность и нерегулярность, CI	Цикличность, C	Нерегулярность, I
1	2007:9	197,000	201,187	0,979					
2	2007:10	216,990	199,834	1,086					
3	2007:11	209,500	198,651	1,055					
4	2007:12	192,000	197,637	0,971					
5	2008:1	189,000	196,793	0,960					
6	2008:2	202,000	196,118	1,030					
7	2008:3	216,000	195,613	1,104	1,076	200,687	1,026	-	-
8	2008:4	201,000	195,278	1,029	0,996	201,708	1,033	-	-
9	2008:5	185,600	195,112	0,951	0,918	202,125	1,036	-	-
10	2008:6	193,650	195,116	0,992	0,956	202,643	1,039	1,037	1,002
…	…	…	…	…	…	….	….	….	…
40	2010:12	358,200	274,094	1,307	1,184	302,457	1,103	1,096	1,006
41	2011:1	374,750	279,355	1,341	1,227	305,538	1,094	-	-
42	2011:2	320,000	284,786	1,124	1,045	306,316	1,076	-	-
43	2011:3	309,000	290,387	1,064	1,011	305,552	1,052	-	-
44	2011:4	304,990	296,157	1,030					
45	2011:5	284,220	302,097	0,941					
46	2011:6	299,960	308,206	0,973					
47	2011:7	271,480	314,485	0,863					
48	2011:8	262,750	320,934	0,819					
49	2011:9	257,440	327,552	0,786					

Обратите внимание на то, как сглажены значения в столбце C, по сравнению со столбцом CI. По сути, использование скользящего среднего сглаживает (т.е. устраняет) всю нерегулярность. Для сентября 2012 г. расчет значения в столбце I будет таким:

I=AA12/AB12

Очищенный от случайных колебаний временной ряд дает представление о структуре циклической волны. Здесь четко прослеживаются периоды роста и снижения уровней относительно среднего уровня циклической волны, принятого за единицу. Нижние (минимальные) и верхние (максимальные) значения уровней определяют длину цикла.

Прогноз сезонного временного ряда

В прогнозировании сезонных временных рядов используется процесс, обратный процессу декомпозиции. После разбиения ряда на отдельные компоненты для их раздельного изучения его компоненты собираются для построения прогноза на будущие периоды. Для составления прогноза месячного изменения котировок акций применим мультипликативную модель и воспользуемся результатами полиноминального тренда.

1. Тренд. Уравнение месячного тренда будет таким:

$$\widehat{T}_t = 0{,}0848x^2 - 1{,}6074x + 202{,}71$$

Исходным периодом для прогнозирования является октябрь 2011 г. или период времени $t = 49$. Стоимость обыкновенных акций в октябре определяется для периода времени $t = 49 + 1 = 50$. Тогда, полагая, что $t = 50$, прогноз тренда определяется следующим образом:

$$\widehat{T_{50}} = 0{,}0848 * 50^2 - 1{,}6074 * 50 + 202{,}71 = 164{,}91\, руб.$$

2. Сезонность. Значение сезонного индекса по сводке сезонных индексов для октября равно 0,974

3. Цикличность. Прогноз циклической структуры на будущие периоды времени является неопределенным и, будет скорее предположением, поэтому при прогнозировании следует включить его в тренд. Для полноты нашего примера примем циклический индекс равным 1,0.

4. Нерегулярность. Нерегулярные флуктуации представляют случайные изменения, которые нельзя отнести к другим компонентам. В прогнозе среднее значение нерегулярной компоненты полагается равным 1,0.

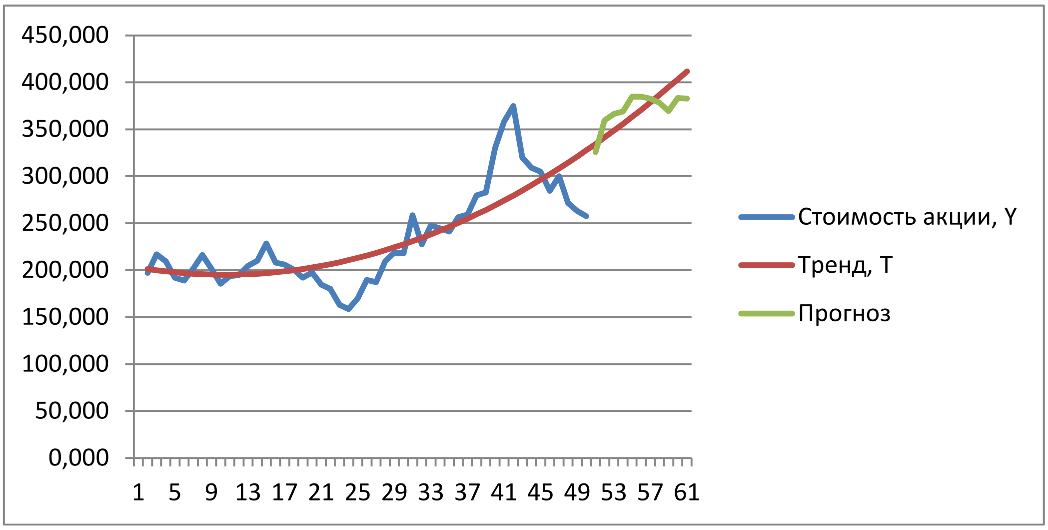


Рисунок 6.5 – Прогноз стоимости обыкновенных акций на основе полиноминального тренда

Прогноз на октябрь 2011 г. будет следующим, формулу вводим в ячейку AD52:

$$\widehat{Y_{50}} = \widehat{T_{50}} \cdot S_{50} \cdot C_{50} \cdot I_{50} = W52 * R11 * 1 * 1 = 325{,}617$$

Прогноз на остальные месяцы 2011-2012 г., руб.:

$$\widehat{Y_{51}} = 359{,}537$$
$$\widehat{Y_{52}} = 366{,}234$$
$$\widehat{Y_{53}} = 369{,}152$$
$$\widehat{Y_{54}} = 384{,}662$$
$$\widehat{Y_{55}} = 384{,}643$$
$$\widehat{Y_{56}} = 382{,}521$$
$$\widehat{Y_{57}} = 378{,}260$$
$$\widehat{Y_{58}} = 369{,}444$$
$$\widehat{Y_{59}} = 383{,}332$$
$$\widehat{Y_{60}} = 382{,}536$$

Теперь построим диаграмму, отражающую фактические изменения котировок акций, тренд и прогноз. Для этого последовательно выделяем столбцы: Стоимость акции, *Y*; Тренд, *T*; Прогноз (см. рис. 6.5).

2.6.3 Результаты и выводы:

В результате выполнения практического занятия ПЗ-6 студенты:

1. Должны усвоить теоретические основы: расчета показателя «стоимости под риском» на базе параметрического метода; определения показателя «стоимости под риском» на основе исторического моделирования; использования статистического моделирования и метода Монте-Карло для определения «стоимости под риском»; использования VAR-модели для оценки рыночного риска (один финансовый актив, портфель финансовых активов).
2. Способны находить сезонность во временных рядах финансовых показателей, осуществлять подбор трендовой кривой и мультипликативную декомпозицию уровней ряда динамики.