ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.Б.05 МАТЕМАТИКА

Специальность: 38.05.01 Экономическая безопасность

Специализация: Экономико-правовое обеспечение экономической безопасности

Форма обучения: заочная

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.1 Лекция №1 (2 часа).
Тема: «Элементы линейной алгебры»

1.1.1 Вопросы лекции:
1. Решение системы в матричном виде.
2. Решение системы по формулам Крамера.
3. Метод Гаусса. Ранг матрицы. Исследование решения систем. Однородные системы линейных уравнений.

1.1.2 Краткое содержание вопросов:
1. Решение системы в матричном виде.
ОПР: *Системой n линейных уравнений с m неизвестными* называется система вида
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$
(1), где $a_{ij} \in R$ - коэффициенты при неизвестных, $b_j \in R$ - свободные члены, x_j - неизвестные, i=1…m, j=1…n.

ОПР: *Решением* системы называется такая совокупность чисел $(x_1 = k_1, x_2 = k_2, ..., x_n = k_n)$, которая обращают данную СЛУ в систему верных равенств (тождеств).

ОПР: СЛУ называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение и *несовместной*, если она не имеет решений.

ОПР: Совместная СЛУ называется *определенной*, если она имеет одно решение и *неопределенной*, если она имеет более одного решения.
Этот метод применим для систем n линейных уравнений с n неизвестными.
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$
Введем в рассмотрение матрицы:
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ .... & .... & ... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$$
$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot x_1 + & a_{12}\cdot x_2 + & ... & + a_{1n}\cdot x_n \\ a_{21}\cdot x_1 + & a_{22}\cdot x_2 + & ... & + a_{2n}\cdot x_n \\ .... & .... & ... & .... \\ a_{n1}\cdot x_1 + & a_{n2}\cdot x_2 + & ... & + a_{nn}\cdot x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$$
$\Rightarrow$ $\boxed{A \cdot X = B}$ на основании определений произведения и равенства матриц.
$A \cdot X = B$ -матричное уравнение, которое позволяет записать СЛУ (1) в матричном виде.
Чтобы найти X, умножим равенство с обеих сторон <u>слева</u> на A^{-1}

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

Получили решение СЛУ (1) в матричной форме.

<u>Пример:</u> $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$

Введем в рассмотрение матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}}$$

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 14$$

$A_{11} = -2$ $A_{21} = 11$ $A_{31} = 5$

$A_{12} = 2$ $A_{22} = -4$ $A_{32} = 2$

$A_{13} = 4$ $A_{23} = -1$ $A_{33} = -3$

$$A^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -2 & 11 & 5 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -2 & 11 & 5 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -14 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: (-1;0;1)

2. Решение системы по формулам Крамера.

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & \left| \times a_{21} \right. \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & \left| \times a_{11} \right. \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 = b_1a_{21} \\ a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 = b_2a_{11} \end{cases} (-) \qquad (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})x_2 = b_1a_{21} - b_2a_{11}$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & \left| \times a_{22} \right. \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & \left| \times a_{12} \right. \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22} \\ a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_2a_{12} \end{cases} (-) \qquad (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Заметим: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ - <u>главный определитель</u> СЛУ $(\Delta \neq 0)$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{21} \end{vmatrix} = b_1a_{21} - a_{12}b_2$ *и* $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$ - <u>вспомогательные определители</u> СЛУ

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} \end{cases}}$$ - <u>*формулы Крамера*</u>

ТЕОРЕМА КРАМЕРА: Система n линейных уравнений с n неизвестными, определитель которой $\Delta \neq 0$ имеет решение и при этом единственное, определяемое по формулам $\boxed{x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}}$ (*) , где Δ_j $(j = 1...n)$-определитель, получаемый из определителя системы Δ заменой j-го столбца столбцом свободных членов.

Замечание: 1) Если $\Delta \neq 0$, то система (1) имеет единственное решение, которое определяется по формулам (*).

2) Если $\Delta = 0$ и хотя бы один из вспомогательных определителей $\Delta_j \neq 0$, то система (1) не имеет решений.

3) Если $\Delta = 0$ и $\Delta_j = 0$, то система либо имеет множество решений, либо не имеет решений. Нужны дополнительные исследования.

Пример: Решить СЛУ по формулам Крамера $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 14$ $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ система имеет единственное решение

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -14$ $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$ $\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 14$

$\begin{cases} x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

Ответ: (-1;0;1)

3. Метод Гаусса. Ранг матрицы. Исследование решения систем. Однородные системы линейных уравнений.

Рассмотрим СЛУ $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ (1)

Метод Гаусса (метод последовательного исключения переменных) заключается в том, что с помощью элементарных преобразований системы переходим к равносильной СЛУ ступенчатого или треугольного вида, из которой последовательно находят все переменные. К элементарным преобразованиям относят: перестановка уравнений, вычеркивание из системы верного равенства, умножение обеих частей одного уравнения на одно и то же число$\neq 0$ и прибавление к соответствующим обеим частям другого уравнения.

Используя метод Гаусса и элементарные преобразования, мы работаем с коэффициентами при неизвестных и свободными членами. Поэтому удобно выписывать расширенную матрицу, соответствующую данной СЛУ и приводить эту матрицу к ступенчатому виду. Использую найденную матрицу записать систему ступенчатого вида, решив которую, найдем решение СЛУ.

Пример: Решить СЛУ методом Гаусса $\begin{cases} x+2y+5z=-9 \\ x-y+3z=2 \\ 3x-6y-z=25 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -2 & 25 \end{array}\right)(-1)\,(-3) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right)(-4) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x+2y+5z=-9 \\ -3y-2z=11 \\ -8z=8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \\ z=-1 \end{cases}$$

Ответ: (2;-3;-1)

Достоинством метода Гаусса по сравнению с другими в том, что он позволяет однозначно установить совместна система или нет, а в случае совместности, найти её решение (единственное или бесконечное множество).

ОПР: *Рангом матрицы А* (rangA) называется наивысший порядок отличного от нуля минора матрицы А.

Пример: $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Delta(A)=0 \qquad M_{33}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \quad rangA=2$

С каждой системой можно связать две матрицы:

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ (2) –основная матрица и $B=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_m \end{array}\right)$ (3) – расширенная матрица.

ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА-КАПЕЛЛИ (критерий совместности СЛУ): Для того, чтобы система m линейных уравнений с n неизвестными (1) была совместной (имела решение) необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы (2) был равен рангу расширенной матрицы (3).

Т.е., если rangA $\neq$ rangB, то система несовместна

если rangA=rangB=r, то система совместна, причем:

1) если r=n (n-число неизвестных), то система имеет единственное решение.

2) если r<n, то система имеет бесчисленное множество решение, зависящих от (n-r) параметров.

Пример: $\begin{cases} x+2y+z+t=5 \\ y+z+t=3 \\ x+y=2 \end{cases}$

Составим расширенную матрицу:

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)(-1) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Т.к. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ - минор второго порядка,

то rangA=2 и rangB=2 r=2 $\Rightarrow$ система совместна

n=4 (x, y, z, t) n>r , n-r=4-2=2 $\Rightarrow$ система имеет бесчисленное множество решений, зависящих от двух параметров.

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x+2y+z+t=5 \\ y+z+t=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=2-y \\ t=3-y-z \end{cases} \Rightarrow \quad (2-y;\, y;\, z;\, 3-y-z)$ - общее решение (зависит от двух параметров – y и z).

Ответ: $(2-y;\ y;\ z;\ 3-y-z)$

Однородные системы линейных уравнений (ОСЛУ).

ОПР: СЛУ, свободные члены которой равны нулю, называется *однородной системой линейных уравнений*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Замечание: В ОСЛУ ранг основной матрицы всегда равен рангу расширенной матрицы, т.к. расширенная матрица отличается от основной только нулевым столбцом $\Rightarrow$ ОСЛУ всегда совместна. $(0;0;...;0)$ - очевидно решение ОСЛУ (тривиальное решение).

ТЕОРЕМА: ОСЛУ имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $r<n$, где r- ранг основной и расширенной матрицы, n- число неизвестных.

Пример: $\begin{cases} x+2y+3z+4t=0 \\ 2x+4y-z \quad\quad = 0 \\ x+2y+10z+12t=0 \\ x+2y+6z+4t=0 \end{cases}$ Ответ: (- 2y – 4t; y; 0; t)

1.2 Лекция №2 (2 часа).

Тема: «Функция, ее предел»

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Предел функции в точке и на бесконечности. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.
2. Теоремы о пределах функций.
3. Раскрытие неопределенностей.
4. Два замечательных предела.
5. Эквивалентные бесконечно малые и их использование при вычислении пределов.
6. Левый и правый пределы функции.

1.2.2 Краткое содержание вопросов:

1. Предел функции в точке и на бесконечности. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором множестве X. Пусть $a \in X$ - некоторый элемент множества X. Возьмем из X последовательность чисел, отличных от a и сходящихся к a.

(1) $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ... \to a$

Тогда значения функции $f(x)$ в этих точках тоже образуют последовательность

(2) $f(x_1), f(x_2), f(x_3), ..., f(x_n), ...$

ОПР: Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точки a (или пределом функции при $x \to a$), если для любой сходящейся к a последовательности (1) значений аргумента, отличных от a, соответствующая последовательность значений функции (2) сходится к числу A.

$$A = \lim_{x\to a} f(x), \quad \text{если} \quad \forall\{x_n\}, n \in N: \left.\begin{array}{l} 1)\ \{x_n\} \in X \\ 2)\ x_n \ne a \\ 3)\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

Пример: 1) $f(x)=C=const$ Найти: $\lim\limits_{x\to a} C$

$\{x_n\}\in R: \quad x_1,x_2,x_3,...,x_n,... \quad \to a$

$\{f(x_n)\}: \quad C,C,C,...\to C \qquad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\lim\limits_{x\to a} C = C}}$

2) $f(x)=x$ Найти: $\lim\limits_{x\to a} x$

$\{x_n\}\in R: \quad x_1,x_2,x_3,...,x_n,... \quad \to a$

$\{f(x_n)\}: \quad x_1,x_2,x_3,...,x_n,... \quad \to a$ Т.е. последовательности тождественны и $\Rightarrow \quad \underline{\underline{\lim\limits_{x\to a} x = a}}$

3) $f(x)=\dfrac{x^2-4x+2}{2x-1}$ Найти: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Возьмём $\forall$ послед-ть аргумента, сходящуюся к 0: $\{x_n\}\in R: \; x_1,x_2,x_3,...,x_n,... \quad \to 0$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2-4x_n+2}{2x_n-1}=\frac{(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)^2-4(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)+2}{2(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)-1}=\frac{0-0+2}{0-1}=-2 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2-4x+2}{2x-1}=-2$$

Кроме понятия предела функции в точке, существует также и понятие предела функции при $x\to\infty$. Пусть $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Эта функция имеет предел при $x\to\infty$, равный нулю. Действительно:

$\{x_n\}\in R: \quad x_1,x_2,x_3,...,x_n,... \quad \to \infty$

$\{f(x_n)\}: \quad \dfrac{1}{x_1};\dfrac{1}{x_2};...;\dfrac{1}{x_n};... \quad \to 0$ Т.е. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$

Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

ОПР: Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой функцией* (или просто бесконечно малой) в точке $x=a$, если предел ее в этой точке равен нулю: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$

Аналогично определяются бесконечно малые функции при $x\to\infty$, $x\to\pm\infty$, $x\to a+$, $x\to a-$

ТЕОРЕМА: Алгебраическая сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций в точке a, как и произведение бесконечно малой и ограниченной функций, являются бесконечно малыми функциями в точке a.

ОПР: Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой функцией* (или просто бесконечно большой), если для любой сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции является бесконечно большой.

В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ ($\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$) и говорят, что функция имеет в точке a бесконечный предел

ТЕОРЕМА: Произведение бесконечно большой на функцию, предел которой $\neq 0$, есть беск. больш.

Сумма беск. больш. и ограниченной функций есть функция бесконечно большая. Частное от деления беск. больш. на функцию, имеющую предел, есть функция беск. большая.

ТЕОРЕМА: Для того, чтобы функция $f(x)$ была бесконечно большой в точке a необходимо и достаточно, чтобы обратная функция $\frac{1}{f(x)}$ была бесконечно малой в этой точке a.
$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=0$$

2. Теоремы о пределах функций

ТЕОРЕМА 1: Функция $f(x)$ имеет в точке a предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют левый и правый пределы, причем они равны. В таком случае предел функции равен односторонним пределам.

ТЕОРЕМА 2: Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке a пределы A и B. Тогда функции $f(x)\pm g(x),\ \ f(x)\cdot g(x)\ \ и\ \ \frac{f(x)}{g(x)}\ (B\neq 0)$ имеют в точке a пределы, равные, соответственно $A\pm B,\ AB\ \ и\ \ \frac{A}{B}$.

Заметим, что теорема 2 справедлива и в тех случаях, когда a является ∞ ($+\infty$ или $-\infty$).

ТЕОРЕМА 3: Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ определены в некоторой окрестности точки a, причем $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} h(x)=A$ и выполняется неравенство $f(x)\le g(x)\le h(x)$, тогда $\lim_{x\to a} g(x)=A$.

ТЕОРЕМА 4: Постоянный множитель можно вынести за знак предела $\lim_{x\to a} C\cdot f(x)=C\cdot\lim_{x\to a} f(x)$.

ТЕОРЕМА 5: Предел от элементарной функции равен значению функции от предела выражения, стоящего под знаком функции.

Другими словами, для непрерывной функции знак функции и знак предела можно поменять местами. В частности, предел степени для элементарной функции равен степени предела $\lim_{x\to a} f^{\,m}(x)=(\lim_{x\to a} f(x))^m$.

3. Раскрытие неопределенностей

Зачастую вычисление пределов связано с простыми приемами: разложением числителя и знаменателя на множители, делением числителя и знаменателя на степень x и т.д. Может оказаться, что при отыскании предела частного двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x\to a$, числитель и знаменатель стремятся к 0 или числитель и знаменатель стремятся к ∞. В таком случае говорят, что дробь при $x\to a$ представляет собой <u>*неопределенность*</u> вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, а нахождение предела дроби называют <u>*раскрытием неопределенности*</u>.

Пример 1: Найти предел

а) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{x^2-3x+2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-4}{x-2}=3$

б) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2+3x+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(1+\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2})}=\frac{1+0}{1+0+0}=1$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x^2+5}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\,\frac{2}{x}}{x^2(1+\frac{5}{x})}=\dfrac{0}{1+0}=0$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-2x+1}{x^2+5}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3(5-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3})}{x^3(\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3})}=\dfrac{5}{0}=\infty$

Предел обратной дроби =0 $\Rightarrow$ предел данной дроби $=\infty$

Правило: При $x\to\infty$, если имеем:

1) степень числителя и знаменателя равны, то значение предела равно отношению коэффициентов при наибольших степенях.
2) степень числителя больше степени знаменателя, то предел равен ∞.
3) степень числителя меньше степени знаменателя, то предел равен 0.

Другие виды неопределенности: $(\infty-\infty)$, (1^∞) и т.д.

Пример 2: Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})$

Здесь следует умножить и разделить выражение под знаком предела на сопряжённое выражение – в данном случае на $(\sqrt{x+3}+\sqrt{x})$.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})=\lim_{x\to\infty}\frac{x+3-x}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=\frac{3}{\infty}=0$$

4. Два замечательных предела

Данные пределы наиболее широко используются в математике и её приложениях.

ТЕОРЕМА: Предел функции $\dfrac{\sin x}{x}$ в точке x=0 существует и равен единице

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1}$ - *первый замечательный предел.*

Пример: Найти предел

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x)}{5x}\dfrac{5}{3}=\lim\limits_{5x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5}{3}=\dfrac{5}{3}$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2(x/2)}{x^2}=\lim\limits_{5x\to 0}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2=\dfrac{1}{2}1^2=\dfrac{1}{2}$

ТЕОРЕМА: Предел функции $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ при $x\to\infty$ существует и равен e, т.е.

$\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e}$ - *второй замечательный предел.*

Обозначим $\dfrac{1}{x}=\alpha$ - является бесконечно малой при $x\to\infty$, т.е. $\alpha\to 0$. Тогда

$\boxed{\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e}$

Число e является одной из фундаментальных величин в математике. Показательная функция вида e^{ax} называется *экспонентой.*

Пример: Найти предел

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^x=\left(1^\infty\right)=\begin{bmatrix} x=4y \\ x\to\infty\Rightarrow y\to\infty\end{bmatrix}=\lim\limits_{y\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^y\right)^4=e^4$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_3 1+x)}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\log_3(1+x)\right)=\lim\limits_{x\to 0}\log_3(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_3\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\log_3 e=\dfrac{1}{\ln 3}$

5. Эквивалентные бесконечно малые и их использование при вычислении пределов

ОПР: Если функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ определены в некоторой окрестности $U_\varepsilon(a)$, являются бесконечно малыми в точке a, причем $\beta(x)\neq 0$ для $\forall x\in U_\varepsilon(a)$ и выполняется неравенство $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными* между собой *бесконечно малыми* функциями в точке a.

Обозначение: $\alpha(x)\sim\beta(x)$

1) $\boxed{\sin x\sim x}$ при $x\to 0$, т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1\quad\Rightarrow\quad\boxed{\ln(1+x)\sim x,\quad x\to 0}$

3)

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x\ln a}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{matrix} a^x-1=y \\ x\to 0\Rightarrow y\to 0 \\ x=\log_a(1+y)\end{matrix}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\dfrac{\ln(1+y)}{\ln a}\ln a}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\dfrac{\ln(1+y)}{y}}=\frac{1}{\ln e}=1\quad\Rightarrow\quad\boxed{\begin{matrix} a^x-1\sim x\ln a,\quad x\to 0 \\ e^x-1\sim x,\ x\to 0\end{matrix}}$$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha\ln(1+x)}{\alpha x}=1\quad\Rightarrow\quad\boxed{(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x,\quad x\to 0}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=1\quad\Rightarrow\quad\boxed{1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\quad x\to 0}$

Пример:

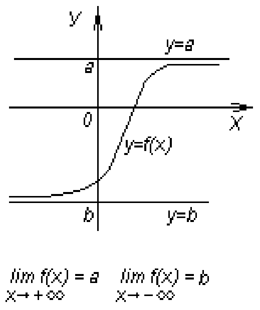
1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a^{\sin x}-1)x}{1-\cos x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\left|\begin{matrix} a^{\sin x}-1\sim\sin x\ln a, \\ m.k.\ \sin x\to 0,\ \text{при}\ x\to 0\end{matrix}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin x\ln a}{\frac{1}{2}x^2}=2\ln a\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=2\ln a$

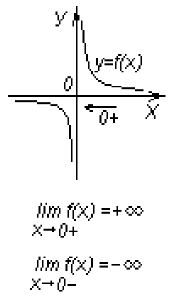
2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{3}}-1}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}x}{x}=\dfrac{1}{3}$

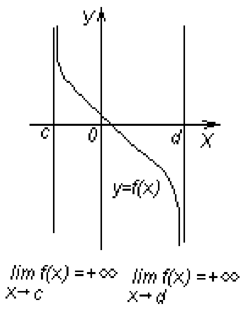
6. Левый и правый пределы функции

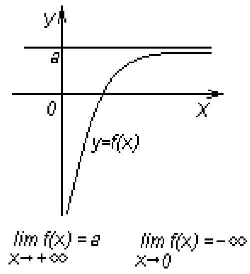
Введем понятие односторонних пределов функции, когда вся последовательность значений аргумента $\{x_n\}$: $x_n\to a$ расположена слева от точки a (*левый предел*), либо справа от неё (*правый предел*). Т.е. либо $x_n<a$, либо $x_n>a$ при всех n. Для правого (левого) предела функции используется символическая запись $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=A\quad\left(\lim\limits_{x\to a-}f(x)=A\right)$.

Геометрически:









<u>Пример:</u>

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty; \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty;$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = e^{+\infty} = +\infty; \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = e^{-\infty} = \dfrac{1}{e^{+\infty}} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

1.3 Лекция №3 (2 часа).
Тема: «Первообразная и неопределенный интеграл»

1.3.1 Вопросы лекции:

1. Первообразная функции и ее свойства.
2. Понятие неопределенного интеграла, основные свойства.
3. Таблица интегралов.
4. Методы интегрирования: непосредственное интегрирование, замена переменной, интегрирование по частям.

1.3.2 Краткое содержание вопросов:
1. Первообразная функция и ее свойства

Одной из основных задач дифференциального исчисления является отыскание производной заданной функции. Обратной задачей является нахождение по данной функции $f(x)$ такой функции $F(x)$, производная которой была бы равна функции $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$.

Восстановление функции по известной производной этой функции составляет одну из основных задач интегрального исчисления.

<u>ОПР:</u> Функция $F(x)$ называется <u>*первообразной*</u> для функции $f(x)$ на некотором промежутке X,

если для всех значений x из этого промежутка выполняется равенство

$$F'(x) = f(x)$$

<u>Примеры:</u> 1) $F(x) = \sin x$ - первообразная для функции $f(x) = \cos x$ на множестве R, т. к. $(\sin x)' = \cos x, \ \forall x \in R$

2) $F(x) = x^3$ - первообразная для функции $f(x) = 3x^2$ на множестве R, т. к. $(x^3)' = 3x^2$

<u>Зам:</u> $F(x) = x^3 + C$, где C=const тоже является первообразной для функции $f(x) = 3x^2$, т. к. $(x^3 + C)' = 3x^2$

<u>ТЕОРЕМА:</u> Если $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, то любая другая первообразная для функции $f(x)$ на этом промежутке X, может быть представлена в виде $F(x) + C$, где C- некоторая постоянная.

Доказательство: Пусть $\hat{O}(x)$ - другая первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, т. е. $\hat{O}'(\tilde{o}) = f(x)$

Рассм. $(\hat{O}(\tilde{o}) - F(x))' = \hat{O}'(\tilde{o}) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \Rightarrow$

$\hat{O}(\tilde{o}) - F(x) = C \quad \Rightarrow \quad \hat{O}(x) = F(x) + C$ ч. т. д.

2. Понятие неопределенного интеграла, основные свойства

ОПР: Если функция $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$, то множество функций $F(x)+C$, где C=const, называется *неопределённым интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается символом

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

f(x)- подынтегральная функция, f(x)dx-подынтегральное выражение, x- переменная интегрирования.

Пример: Проверить, что $\int 4x^3 dx = x^4 + C$

Продифференцируем: $(x^4 + C)' = 4x^3$, получим подынтегральную функцию $\Rightarrow$ интегрирование выполнено верно.

Основные свойства неопределённого интеграла:

1) $(\int f(x)dx)' = f(x) \quad u \quad d(\int f(x)dx) = f(x)dx$

Доказательство: 1) $(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)$

2) $d(\int f(x)dx) = (\int f(x)dx)'dx = f(x)dx$

2) $\int dF(x) = F(x) + C$

Доказательство: $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$

3) $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$

4) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

3. Таблица интегралов

1) $\int U^n dU = \frac{U^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$	14) $\int \frac{dU}{\cos U} = \ln\left\|tg\left(\frac{U}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$
2) $\int \frac{dU}{\sqrt{U}} = 2\sqrt{U} + C$	15) $\int \frac{dU}{\cos^2 U} = tgU + C$
3) $\int \frac{dU}{U^2} = -\frac{1}{U} + C$	16) $\int \frac{dU}{\sin^2 U} = -ctgU + C$
4) $\int \frac{dU}{U} = \ln\|U\| + C$	17) $\int \frac{dU}{a^2 + U^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{U}{a} + C$
5) $\int \sqrt{U} dU = \frac{2}{3} U^{\frac{3}{2}} + C$	18) $\int \frac{dU}{1 + U^2} = arctgU + C$
6) $\int dU = U + C$	19) $\int \frac{dU}{\sqrt{a^2 - U^2}} = \arcsin \frac{U}{a} + C$
7) $\int a^U dU = \frac{a^U}{\ln a} + C$	20) $\int \frac{dU}{\sqrt{1 - U^2}} = \arcsin U + C$

8) $\int e^U dU = e^U + C$

9) $\int \sin U dU = -\cos U + C$

10) $\int \cos U dU = \sin U + C$

11) $\int tgU dU = -\ln|\cos U| + C$

12) $\int ctgU dU = \ln|\sin U| + C$

13) $\int \frac{dU}{\sin U} = \ln\left|tg\frac{U}{2}\right| + C$

21) $\int \frac{dU}{a^2 - U^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+U}{a-U}\right| + C$

22) $\int \frac{dU}{U^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{U-a}{U+a}\right| + C$

23) $\int \frac{dU}{\sqrt{U^2 \pm a^2}} = \ln\left|U + \sqrt{U^2 \pm a^2}\right| + C$

24) $\int \frac{dU}{\sqrt{U^2 \pm a}} = \ln\left|U + \sqrt{U^2 \pm a}\right| + C$

25) $\int \frac{dU}{U \pm a} = \ln|U \pm a| + C$

4. Методы интегрирования: непосредственное интегрирование, замена переменной, интегрирование по частям.

Непосредственное интегрирование

Заключается в вычислении интегралов путём непосредственного использования таблицы простейших интегралов и основных свойств интегралов.

Примеры: 1) $\int (5\cos x + 2 - 3x^2 + \frac{4}{x} - \frac{7}{x^2+1})dx$

2) $\int (\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})^2 dx$ 3) $\int tg^2 x dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$

Замена переменной

Часто введение новой переменной позволяет свести нахождение интеграла к нахождению табличного, т. е. перейти к непосредственному интегрированию.

Рассм $\int f(x)dx$

Обозначим

$$x = \varphi(t)$$

тогда $dx = d(\varphi(t)) \Rightarrow dx = \varphi'(t)dt$ подставим в исходный интеграл:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

Зам: На практике обычно обозначают некоторую функцию от x через t $\psi'(x) = t$

Примеры:

1)

$$\int \frac{x^3 dx}{(x-1)^2} = \left| \begin{matrix} x - 1 = t \Rightarrow d(x-1) = dt \\ dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{(t+1)^3 dt}{t^2} = \int \frac{t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{t^2}dt = \frac{t^2}{2} + 3t + 3\ln|t| - \frac{1}{t} + C$$

$=$

$$\frac{(x-1)^2}{2} + 3x - 3 + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

2) $$\int \frac{x^4 dx}{x^5 + 7} = \left| \begin{matrix} x^5 + 7 = t \\ d(x^5 + 7) = dt \\ (x^5 + 7)' dx = dt \\ 5x^4 dx = dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{5}\ln|t| + C = \frac{1}{5}\ln|x^5 + 7| + C$$

3) $\int \sin^2 x \cos x dx = \left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ d(\sin x) = dt \\ (\sin x)' dx = dt \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$

Интегрирование простейших иррациональных выражений

Пример: $\int \frac{\sqrt{x}dx}{2+\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{r} \sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{array} \right| = \int \frac{t \cdot 2tdt}{2+t} = 2\int \frac{t^2 dt}{2+t} =$

$\frac{t^2}{2+t}$ - неправильная дробь (степень числителя ≥ степени знаменателя)

$$\begin{array}{l|l} t^2 & t+2 \\ \cline{2-2} \underline{t^2+2t} & t-2 \\ \quad -2t & \\ \quad \underline{-2t-4} & \\ \qquad\quad 4 & \end{array}$$

-целая часть

остаток

Зам: деление ведём до тех пор, пока степень остатка не станет меньше степени делителя

$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{t^2}{t+2} = t - 2 + \frac{4}{t+2}$

$= 2\int (t - 2 + \frac{4}{t+2})dt = t^2 - 4t + 8\ln|t+2| + C = x - 4\sqrt{x} + 8\ln\left|\sqrt{x}+2\right| + C$

Интегрирование выражений, содержащих квадратный трёхчлен в знаменателе

А) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}} = I_1$ Б) $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{x^2+px+q}} = I_2$

Решаются методом подстановки. Нужно выделить полный квадрат под знаком корня.
Рассм.

$$I_2 = \int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{x^2+px+q}} = \left| \begin{array}{c} x^2+px+q = (x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4}) - \frac{p^2}{4} + q = \\ = (x+\frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4}) = t^2 \pm a^2 \\ \left[\overline{x+\frac{p}{2} = t}\right] \Rightarrow x = t - \frac{p}{2} \quad и \quad q - \frac{p^2}{4} = \pm a^2 \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{(A(t-\frac{p}{2})+B)dt}{\sqrt{t^2 \pm a^2}} = A\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2 \pm a^2}}$$

$+ (B - \frac{Ap}{2})\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm a^2}} = A\sqrt{t^2 \pm a^2} + (B - \frac{Ap}{2})\ln\left|x + \frac{p}{2} + \sqrt{x^2+px+q}\right| + C$

А) $\int \frac{dx}{x^2+px+q} = I_3$ Б) $\int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q} = I_4$

Решаются аналогичной подстановкой

Зам: Выражение $ax^2 + bx + c$ всегда можно свести к $x^2 + px + q$. Такой подстановкой решаем в том случае, если многочлен, стоящий в знаменателе имеет D<0 или представляет собой неточный

квадрат.

Примеры:

1) $$\int\frac{(3x-5)dx}{x^2-2x+4}=\left|\begin{array}{c} ?\ (x^2-2x+4)'=2x-2\ ?\ \text{íå}\quad \text{òàáëè÷íûé}\quad \int\frac{dU}{U} \\ D=4-16\prec 0\quad\Rightarrow \\ \Rightarrow \text{âûäåëÿåì}\quad \text{ïîëíûé}\quad \text{êâàäðàò}\ \text{â}\ \text{çíàìåíàòåëå}\quad \text{å} \end{array}\right|=\dots$$

2) $$\int\frac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2-2x-2}}=\left|\begin{array}{c} ?\int\frac{dU}{\sqrt{U}}=2\sqrt{U}\ ? \\ x^2-2x-2=U \\ (2x-2)dx=dU \\ 2(x-1)dx=dU \end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{2(x-1)dx}{\sqrt{x^2-2x-2}}=\sqrt{x^2-2x-2}+C$$

3) $$\int\frac{(x-1)dx}{\sqrt{2x^2+3x-2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2+\frac{3}{2}x-1}}=\dots$$

Интегрирование по частям

Рассмотрим непрерывные функции $u(x)$ и $v(x)$. Пусть существуют их производные $u'(x)$ и $v'(x)$.

Рассм. $(u\cdot v)'=u'v+uv'$

Рассм. $d(u\cdot v)=(uv)'dx=u'(x)v(x)dx+u(x)v'(x)dx=vdu+udv$

Рассм. $\int d(uv)=\int(vdu+udv)$

$uv=\int vdu+\int udv$ получим <u>*формулу интегрирования по частям*</u>

$$\int udv=uv-\int vdu$$

Выпишем классы интегралов, решаемых этим методом:

I класс: $\left.\begin{array}{l}\int P(x)e^{ax}dx \\ \int P(x)\sin axdx \\ \int P(x)\cos axdx\end{array}\right\}$ $\begin{array}{c} a\in R \\ u=P(x) \\ dv=\left\{\begin{array}{l} e^{ax}dx \\ \sin axdx \\ \cos axdx\end{array}\right.\end{array}$

II класс: $\left.\begin{array}{l}\int P(x)\ln axdx \\ \int P(x)\arcsin axdx \\ \int P(x)\arccos axdx \\ \int P(x)arctgaxdx \\ \int P(x)arcctgaxdx\end{array}\right\}$ $\begin{array}{c} a\in R \\ u=\left\{\begin{array}{c}\ln ax \\ \arcsin ax, \arccos ax \\ arctgax, arcctgax\end{array}\right. \\ dv=P(x)dx\end{array}$

Примеры:

1)

$$\int x^2e^{-2x}dx=\left|\begin{array}{c} u=x^2 \\ dv=e^{-2x}dx \\ du=d(x^2) \\ u=2xdx \\ v=\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}\end{array}\right|=-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}+\int e^{-2x}xdx=\left|\begin{array}{c} u=x \\ dv=e^{-2x}dx \\ du=dx \\ v=\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}\end{array}\right|=-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}+$$

$$+(-\frac{1}{2}xe^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}dx)=-\frac{1}{2}e^{-2x}(x^2+x+\frac{1}{2})+C$$

2)

$$\int \ln(2x-5)dx=\left|\begin{array}{c} u=\ln(2x-5) \\ dv=dx \\ du=d(\ln(2x-5)) \\ du=\dfrac{2}{2x-5}dx \\ v=\int dx=x \end{array}\right|=x\ln(2x-5)-\int\frac{2xdx}{2x-5}=x\ln(2x-5)-x-\frac{5}{2}\ln|2x-5|+C$$

III класс: Под знаком интеграла обе функции не алгебраические

$\int e^{ax}\sin bxdx$ $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$

$\int e^{ax}\cos bxdx$ $\int\sqrt{x^2-a^2}dx$

Без разницы, что обозначать через u и dv. Метод применяется два раза, главное сохранить обозначение.

Примеры:

1)

$$\int e^x\sin 5xdx=\left|\begin{array}{c} u=e^x \\ dv=\sin 5xdx \\ du=e^x dx \\ v=\int\sin 5xdx=-\dfrac{1}{5}\cos 5x \end{array}\right|=-\frac{1}{5}e^x\cos 5x+\frac{1}{5}\int e^x\cos 5xdx=\left|\begin{array}{c} u=e^x-\textit{подстановка} \\ \textit{такая же, как и в первый раз} \\ dv=\cos 5xdx \\ du=e^x dx \\ v=\int\cos 5xdx=\dfrac{1}{5}\sin 5x \end{array}\right|$$

$=-\frac{1}{5}e^x\cos 5x+\frac{1}{25}e^x\sin 5x-\frac{1}{25}\int e^x\sin 5xdx$ Интеграл повторился. Обозначим его через I, получим:

$$I==-\frac{1}{5}e^x\cos 5x+\frac{1}{25}e^x\sin 5x-\frac{1}{25}I$$

$$I=\frac{5}{26}e^x(-\cos 5x+\frac{1}{5}\sin 5x)+C$$

2) $\int\sqrt{x^2-4}dx=\int\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2-4}}dx=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-4}}-4\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}=$

Рассм. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-4}}=\left|\begin{array}{c} u=x \\ dv=\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2-4}} \\ du=dx \\ v=\int\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2-4}}=\left|\begin{array}{c} x^2-4=t \\ 2xdx=dt \end{array}\right|=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{dt}{\sqrt{t}}=\sqrt{x^2-4} \end{array}\right|=x\sqrt{x^2-4}-\int\sqrt{x^2-4}dx$

$$=x\sqrt{x^2-4}-\int\sqrt{x^2-4}dx-4\ln\left|x-\sqrt{x^2-4}\right|\quad\Rightarrow$$

$$I=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4}-2\ln\left|x-\sqrt{x^2-4}\right|+C$$

1.4 Лекция №4 (2 часа).
Тема: «Теория вероятностей»

1.4.1 Вопросы лекции:

1. Сущность и условия применения теории вероятностей.

2. Классическое и статистическое определения вероятности.
3. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
4. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

1.4.2 Краткое содержание вопросов:

1. Классическое и статистическое определения вероятности. Частота и вероятность.

Многие явления в окружающем нас мире носят случайный характер. Если некоторое явление повторяется многократно, то его можно описать с помощью чисел. ТВ помогает составить математические модели описания случайных явлений. Причем при построении модели учитываются главные, наиболее существенные особенности изучаемого явления и отбрасываются второстепенные. К примеру, при подбрасывании монеты считаем, что она может упасть «орлом» или «решкой» и не может упасть ребром, не учитываем окружающей среды. При посадке семян, считаем, что все они одинаковы и высаживаются при одинаковых условиях.

Основным понятием ТВ является «событие».

ОПР: *Испытание* – это осуществление определенного комплекса условий, при которых производится наблюдение.

ОПР: Событие называется *случайным* , если оно в данном испытании может произойти или не произойти.

Обозн.: событие-A,B,C…A_1, A_2…

ОПР: Событие называется *достоверным*, если оно обязательно произойдёт в данном испытании.

Обозн.: достоверное событие- u

Пример: 1) выпадение числа очков ≤ 6 при однократном бросании игральной кости.
2) закипание воды при 100^0 С при н.у.

ОПР: Событие называется *невозможным*, если оно заведомо не произойдёт в данном испытании.

Обозн.: невозможное событие- v

Пример: Выпадение 7 очков при однократном бросании игральной кости.

ОПР: События А и В называются *несовместными*, если в одном и том же испытании появление одного из них исключает появление другого.

Пример: А-«Выпадение 5 очков при однократном бросании игральной кости».
В-«Выпадение 4 очков при однократном бросании игральной кости».

ОПР: События А и В называются *совместными*, если в одном и том же испытании появление одного из них не исключает появление другого.

Пример: А-«Выпадение 2х очков при однократном бросании игральной кости».
В-«Выпадение четного числа очков при однократном бросании игральной кости».

ОПР: Событие $\overline{A}$ называется *противоположным* данному событию А, если оно происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие А.

Перечислим простейшие события при однократном бросании игральной кости:

A_1 –выпадение 1го очка
A_2 –выпадение 2х очков
A_3 –выпадение 3х очков
A_4 –выпадение 4х очков
A_5 –выпадение 5ти очков
A_6 –выпадение 6ти очков

Все эти события единственно возможные, равновозможные, несовместные, элементарные исходы испытания.

События образуют полную группу, если они попарно несовместны и, в результате испытания непременно происходит одно из них. События $A_1,\ldots,A_6$ –полная группа.

<u>ОПР (классическое определение вероятности):</u> <u>*Вероятностью*</u> события А называется отношение

числа исходов испытания, благоприятствующих наступлению события А к общему числу

несовместных, единственно возможных и равновозможных, элементарных исходов испытания.

$\boxed{p(A)=\frac{m}{n}}$, где m-число исходов испытания, благоприятствующих наступлению соб. А

n- общее число исходов испытания.

<u>Пример 1:</u> $p(A_1)=1\backslash 6$

Соб. А- Выпадение четного числа очков на кости.

P(A)=3\6=1\2 (50%)

<u>Пример 2:</u> Игральную кость бросают один раз. Найти вероятность событий

А- выпадение числа очков, кратного 7

В- выпадение числа очков, < 7

p(A)=0\6=0 – это v (невозможное соб.) p(B)=6\6=1 (100%)- это u (достоверное соб.)

$\boxed{0\le p(A)\le 1}$

Свойства вероятности:

1) $0\le p(A)\le 1$
2) $p(v)=0$
3) $p(u)=1$

<u>Пример 3:</u> Игральную кость бросают два раза. Найти вероятность того, что 6 очков выпадет 1 раз.

- В чем состоит испытание?

Дважды подбрасываем кость.

- Что может стать исходом испытания?

Выпадение от 1 до 6 очков при каждом броске.

- Вероятность какого события мы находим?

А- хотя бы 1 раз выпадет 6 очков.

п=36 m=11 p(A)=11\36

Если классическое опр. Вероятности исходит из соображений равновозможности событий при некоторых испытаниях, то статистическая вероятность определяется из опыта или из результатов наблюдений и испытаний. В качестве статистической вероятности принимают относительную частоту.

<u>ОПР:</u> <u>*Относительной частотой*</u> (частостью) события называется число $\boxed{w(A)=\frac{m}{n}}$, где m-число всех

появлений соб. А, n- общее число испытаний.

<u>Пример:</u> Прививка сделана 12 животным. Иммунитет приобрели 9 из них. Найти относительную частоту события А (данное животное приобрело иммунитет).

n=9, n=12 w(a)=9\12=3\4=0,75 (75%)

2. Теоремы сложения и умножения вероятностей

ОПР: Событие С, состоящее в появлении хотя бы одного из событий А или В называется их *суммой.*

$$\begin{vmatrix} C = A + B \\ C = A \cup B \end{vmatrix}$$

Пример 1: соб. А- При однократном изъятии карты из колоды вынута дама

Соб. В- При однократном изъятии карты из колоды вынута пиковая карта.

Найти сумму событий А и В. С=А+В

C_1 – Вынули пиковую даму

C_2 – Извлечена любая дама, но не пиковая (совместные события)

C_3 – Извлечена любая пиковая карта, но не дама.

Пример 2: А- При однократном бросании монеты выпал «герб»

В – При однократном бросании монеты выпала «решка»

C_1 – Выпал «герб»

C_2 –Выпала «решка» (несовместные события)

Пример 3: А – При однократном бросании игральной кости выпало 2 очка.

В - При однократном бросании игральной кости выпало четное очков.

C_1 – Выпало четное число очков (совместные события)

Пример 4: А – Попадание в мишень при первом выстреле.

В - Попадание в мишень при втором выстреле.

C_1 – Попадание только при первом выстреле

C_2 – Попадание только при втором выстреле (совместные события)

C_3 – Попадание при обоих выстрелах

ТЕОРЕМА 1: Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий $\boxed{p(A+B) = p(A) + p(B)}$ А и В-несовместные события.

ТЕОРЕМА 2: Вероятность события, противоположного данному, равна разности между 1 и вероятностью данного события. $\boxed{p(\overline{A}) = 1 - p(A)}$

ОПР: Событие С, состоящее в совместном появлении в данном испытании событий А и В называется *произведением* этих событий.

$$\begin{vmatrix} C = A \cdot B \\ C = A \cap B \end{vmatrix}$$

Пример 1: С- Пиковая дама.

Пример 2: С- невозможное событие (v)

Пример 3: С- Выпадение двух очков.

Пример 4: С- Попадание при обоих выстрелах.

Пример: В корзине 2 яблока, 6 груш, 7 слив и 5 абрикосов. Какова вероятность того, что наудачу выбранный плод не окажется яблоком?

Решение: В данном примере могут возникнуть следующие элементарные события:

А-извлечено яблоко

В- извлечение груши

С- извлечение сливы

D- извлечение абрикоса

n=20

Нас интересует появление событий В+С+D-несовместные.

p(B+C+D)=p(B)+p(C)+p(D)=6\20+7\20+5\20=9\10 (90%)

ОПР: Два события называются *зависимыми*, если вероятность появления одного из них зависит от наступления или не наступления другого. В противном случае события называются *независимыми*

ОПР: *Условной вероятностью* события В при условии, что соб. А произошло, называется вероятность события В, вычисленная в предположении, что событие А уже наступило. (обозначение: $Đ_{\grave{A}}(\hat{A})$).

ТЕОРЕМА 3: Вероятность совместного наступления двух независимых событий, равна произведению вероятностей этих событий. $\boxed{p(A\cdot B)=p(A)\cdot p(B)}$ A и B- независимые события.

Пример: Имеется 2 ящика с деталями. В первом ящике 10 деталей, из которых 8 стандартных. Во втором ящике 15 деталей, из которых 12 стандартных. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали, найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

Решение: Испытание- из ящика вынимают по одной детали

Исходы испытаний-	ст.	ст.
	ст.	нест.
	нест.	ст.
	нест.	нест.

С-обе детали стандартные

А-деталь из первого ящика стандартная

В- деталь из второго ящика стандартная

С=АВ

p(C)=p(AB)=p(A)p(B)=8\10*12\15=16\25

Пример: В урне находятся 3 белых и 2 черных шара. Из нее последовательно вынули 2 шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.

Решение: А-первый взятый шар белый

В-второй взятый шар белый

$Đ_{\grave{A}}(\hat{A})$ =3\5*2\4=3\10 после первого испытания в урне осталось 4 шара, из которых 2 белых.

ТЕОРЕМА 4: Вероятность совместного наступления двух зависимых событий, равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже произошло. $\boxed{\begin{aligned}p(A\cdot B)=p(A)\cdot p_A(B)\\ p(A\cdot B)=p(B)\cdot p_B(A)\end{aligned}}$ A и B- зависимые события.

ТЕОРЕМА 5: Вероятность появления одного из двух совместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.

$\boxed{p(A+B)=p(A)+p(B)-p(A\cdot B)}$ A и B- совместные события.

4. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Пример: Студент знает 25 вопросов из 30ти. Преподаватель задает студенту последовательно 2 вопроса. Какова вероятность того, что студент знает ответ: а) на первый вопрос

б) на второй вопрос

Решение: А-студент знает ответ на первый вопрос

В-студент знает ответ на второй вопрос

а) p(A)=25\30=5\6

б) $B = A\cdot B + \overline{A}\cdot B$ -несовместные события

$$p(B) = p(AB) + p(\overline{A}B) \underset{зависимые}{=} p(A)p_A(B) + p(\overline{A})p_{\overline{A}}(B) = \frac{5}{6}\cdot\frac{24}{29} + \frac{1}{6}\cdot\frac{25}{29} = \frac{5}{6}$$

ТЕОРЕМА 6: Вероятность события А, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$ равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события А.

$$\boxed{p(A) = p(H_1)p_{H_1}(A) + \ldots + p(H_n)p_{H_n}(A)}$$ -формула полной вероятности

ТЕОРЕМА 7: Пусть событие А может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, тогда вероятность события H_i , $i=1\ldots n$, вычисленная при условии, что событие А уже произошло, вычисляется по формуле Байеса. $$\boxed{p_A(H_i) = \frac{p(H_i)p_{Hi}(A)}{p(A)}}$$

Пример: В институте идет назначение на премии. Разрешено охватить премиями 90% всех отличников, 60% -хорошистов и 30%-троишников.

В группе 25 студентов, из них 3 отличника, 12 хорошистов и 10 троишников. Известно, что студентам этой группы начислена премия. Какова вероятность того, что этот студент:

а) отличник

б) хорошист

в) троишник

Решение: А-студенту группы присуждена стипендия

H_1-студент-отличник

H_2-студент-хорошист

H_3-студент-троишник

$A=H_1A+H_2A+H_3A$

$p(A)=p(H_1A+H_2A+H_3A)=p(H_1)p_{H1}(A)+p(H_2)p_{H2}(A)+p(H_3)p_{H3}(A)=$

$p(H_1)=3\backslash 25$ $p(H_2)=12\backslash 25$ $p(H_3)=10\backslash 25$

$p(A)=\frac{3}{25}\frac{9}{10}+\frac{12}{25}\frac{6}{10}+\frac{10}{25}\frac{3}{10}=0{,}516$

$p(AH_1)=p(H_1)p_{H1}(A)=p(A)p_A(H_1)$

$$p_A(H_1) = \frac{p(H_1)p_{H1}(A)}{p(A)} \qquad p_A(H_2) = \frac{p(H_{21})p_{H2}(A)}{p(A)}$$

$$p_A(H_1) = \frac{\frac{3}{25}\cdot\frac{9}{10}}{\frac{3}{25}\cdot\frac{43}{10}} = \frac{9}{43} \qquad p_A(H_2) = \frac{\frac{12}{25}\cdot\frac{6}{10}}{\frac{3}{25}\cdot\frac{43}{10}} = \frac{24}{43} \qquad p_A(H_1) = \frac{10}{43}$$

Формула Бернулли

Будем проводить n независимых повторных испытаний, в каждом из которых событие А может появиться или не появиться.

В дальнейшем будем считать, что вероятность события А в каждом испытании одна и та же p, тогда и вероятность не наступления будет постоянной q=1-p.

Вероятность появления события А к раз в n повторных независимых испытаниях находит по формуле Бернулли

$\boxed{P_n(k) = C_n^k\, p^k\, q^{n-k}}$ - *формула Бернулли*

ОПР: *Сочетанием без повторений из n элементов по к* .называют всевозможные комбинации, содержащие по к элементов и различающихся хотя бы одним элементом.

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Пример: Монета подбрасывается 4 раза. Найти вероятность того, что «герб» выпал 3 раза

Решение: $P_4(3) = C_4^3 (0{,}5)^3 (0{,}5)^1 = \frac{4!}{3!\cdot 1!}\frac{1}{16} = \frac{1}{4}$

Локальная теорема Лапласа

Пример: При производстве деталей на некором предприятии вероятность того, что отдельная деталь будет бракованной 0,2. Какова вероятность того, что в партии из 400 деталей окажется 80 бракованных.

Решение: А-одна отдельно взятая деталь является бракованной.

p(A)=0,2=p значит q=1-p=0,8

$P_{400}(80) = C_{400}^{80} (0{,}2)^{80} (0{,}8)^{320}$

В случае, когда вычисления слишком громоздки, формуле Бернулли предпочитают приближенную формулу из теоремы Лапласа.

ТЕОРЕМА (*локальная теорема Лапласа):* Если вероятность p появления события А в каждом испытании постоянна и $\neq 0$ и $\neq 1$, то вероятность того, что событие А появится к раз в n независимых испытаниях приблизительно равна (тем точнее, чем больше n) значению функции $y = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, при $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$

$\boxed{P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)}$, где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ - табличная функция.

$\varphi(x)$ -четная, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$

Замечание: Теорема Лапласа используется при больших значениях n и дает наиболее точный результат когда произведение $\boxed{npq \geq 10}$

Пример: Вернемся к примеру: $x = \frac{80 - 400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 0$

$P_{400}(80) = \frac{1}{8} \cdot \varphi(0) = \frac{1}{8} \cdot 0{,}3989 = 0{,}05$

Интегральная теорема Лапласа

Продолжим задачу про детали.

Пример: Какова вероятность того, что в партии из 400 деталей бракованных окажется не менее 70 и не более 100?

$P_{400}(70 \leq x \leq 100) = P_{400}(70) + P_{400}(71) + ... + P_{400}(100)$, где x- число бракованных деталей (сумма несовместных событий)

ТЕОРЕМА (*интегральная теорема Лапласа):* Если вероятность p наступления события А в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность того, что событие

А появится в n испытаниях от $к_1$ до $к_2$ раз, равна

$$P_n(k_1;k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}}dz \quad \text{ïðè} \quad x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

$\boxed{P_n(k_1 \le x \le k_2) = \hat{O}(x_2) - \hat{O}(x_1)}$, где Ф(х)-функция Лапласа

Ф(х)- табличная функция, нечётная, т е Ф(-х)= - Ф(х) и для значений $x \ge 5$, значение функции принимают равным 0,5.

4. Теорема Пуассона

Локальная теорема Лапласа дает хорошие результаты в тех случаях, когда вероятность события А в каждом из n независимых повторных испытаниях значительно отличается от 0 и 1. Теорема Пуассона применяется для редких событий.

ОПР: Событие называется *редким*, если вероятность его появления очень мала ≈ 0.

Пусть вероятность события А в каждом из n независимых повторных испытаниях выражается формулой $p = \frac{\lambda}{n}, \lambda > 0, \lambda = const.$ То $\boxed{P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}}$, $\lambda = np$ - *формула Пуассона.*

Пример: Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится =0,0002. Найти вероятность того, что на базу придут три негодных изделия.

n=5000 p=0,0002 k=3

$\lambda = np = 5000 \cdot 0{,}0002 = 1 = const$

$P_{5000}(3) = \frac{1}{3!}e^{-1} = \frac{1}{6e} \approx 0{,}06$

5. Наивероятнейшее число наступлений события при повторении испытаний

ОПР: Число $к_0$ наступлений события А в n независимых повторных испытаниях называется *наивероятнейшим*, если вероятность того, что событие А наступит в этих испытаниях $к_0$ раз превышает или не < вероятности остальных возможных исходов испытаний.

$\boxed{n \cdot p - q \le k_0 < n \cdot p + p}$

Можно доказать, что если np-q дробное число, то имеем только одно значение $к_0$, а если np-q целое число, то имеется к значений $к_0$.

Пример: Производится 6 независимых повторных испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А =0,2. Найти наивероятнейшее число появлений события А.

Решение: n=6, p=0,2, q=0,8

$6*0{,}2-0{,}8 \le к_0 < 6*0{,}2+0{,}2$

$0{,}4 \le к_0 < 1{,}4$

$к_0 = 1$

Дискретные случайные величины. Закон распределения вероятностей дискретной с.в.

ОПР: *Случайная величина* – это величина, которая в результате испытания примет одно и только одно из возможных значений, причем заранее не известно какое. (Обозн: X, Y, Z,…)

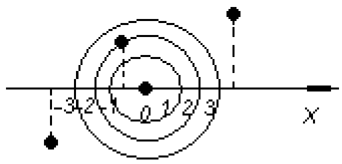
С каждой с. в. Связывают численное множество *(множество значений случ. величины)* (Обозн: x_1, x_2, x_3,…)

Пример: 1) X_1-число появлений «герба» при трех подбрасываниях монеты. $\{0,1,2,3\}$

2) Y- число выпадений 6 очков при одном бросании игральной кости. $\{0,1\}$

3) Z-число попаданий в самолет для вывода его из строя. $\{0,1,2,3,...,n\}$

4) X-абсцисса точки попадания при выстреле по мишени. Множество значений R $(-\infty;+\infty)$



ОПР: *Дискретной* называется с.в., которая принимает отдельные изолированные значения с определенными вероятностями (примеры 1-3). *Непрерывной* называется с.в., которая принимает все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Различные с.в. могут принимать одинаковые значения, но иметь различные вероятности для этих значений.

Пример: 1) X-число появлений «герба» при одном подбрасываниях монеты.

$\{0,1\}$ $p(X=0)=0{,}5$ $p(X=1)=0{,}5$

2) У- число выпадений 6 очков при одном бросании игральной кости.

$\{0,1\}$ $p(X=0)=\frac{5}{6}$ $p(X=1)=\frac{1}{6}$

Поэтому с.в. задают законом распределения.

ОПР: *Законом распределения вероятностей дискретной с.в.* называют перечень всех возможных её значений и соответствующих им вероятностей.

1)

X	0	1
p	0,5	0,5

2)

Y	0	1
p	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

X	x_1	x_2	..	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

причем: $p_1+p_2+...+p_n=1$

Пример: В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается: 1 выигрыш в 50 рублей и 10 выигрышей по 1 рублю. Найти закон распределения с.в. X-стоимость возможного выигрыша для владельца одного билета.

Решение:

Возможные значения X: $x_1=50$ соответствующая $p_1=1\backslash100=0{,}01$

$x_2=1$ соответствующая $p_2=10\backslash100=0{,}1$

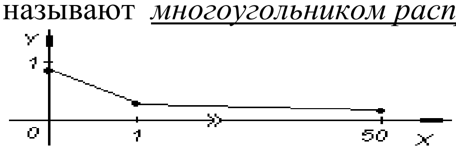
$x_3=0$ соответствующая $p_3=1-(p_1+p_2)=1-0{,}11=0{,}89$.

Составим закон распределения:

X	50	1	0
p	0,01	0,1	0,89

Проверка: 0,01+0,1+0,89=1

Для наглядности закон распределения можно изобразить графически. Для этого в ПДСК строят точки (x_i ; y_i), а затее соединяют их отрезками прямых. Полученную фигуру называют *многоугольником распределения.*



Числовые характеристики дискретной случайной величины

1) Математическое ожидание.

ОПР: *Математическим ожиданием дискретной с.в.* называют сумму произведений всех её

возможных значений на их соответствующие вероятности.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} X & x_1 & x_2 & .. & x_n \\ \hline p & p_1 & p_2 & ... & p_n \end{array} \qquad M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n \qquad \boxed{M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i}$$

Пример: вернемся к предыдущему примеру. Подсчитаем математическое ожидание выигрыша владельца одного лотерейного билета
$M(X) = 50 \cdot 0{,}01 + 1 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}89 = 0{,}6$

Свойства математического ожидания:

1) M(C)=C, где C- постоянная
2) M(CX)=CM(X)
3) M(XУ)=M(X)M(У)
4) M(X+У)=M(X)+M(У) и M(X-У)=M(X)-M(У)

2) Дисперсия.

Пусть X-случайная величина. M(X)- ее математическое ожидание.
С.в. X-M(X) называется *отклонением* между с.в. и её математич. ожиданием.
ОПР: *Дисперсией* (рассеянием) дискретной с.в. называется матаематич. Ожидание квадрата отклонения с.в. от её математического ожидания.

$$\boxed{D(X) = M(X - M(X))^2}$$

Чаще более удобно пользоваться другой формулой
ТЕОРЕМА: Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата с.в. X и квадратом её математического ожидания. $\boxed{D(X) = M(X^2) - (M(X))^2}$

Пример: Найти дисперсию с.в. X, заданной законом распределения

$$\begin{array}{c|c|c|c} X & 1 & 2 & 5 \\ \hline p & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{array}$$

Решение: M(X)=0,3+1+1=2,3

$$\begin{array}{c|c|c|c} X^2 & 1 & 4 & 25 \\ \hline p & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{array} \qquad M(X^2)=0{,}3+2+5=7{,}3 \qquad (M(X))^2=(2{,}3)^2=5{,}29$$

D(X)=7,3-5,29=2,01

Свойства дисперсии:

1) D(C)=0, где C- постоянная
2) D(CX)=C^2 D(X)
3) D(X+C)=D(X)
4) D(X+У)=D(X)+D(У) и D(X-У)=D(X)+D(У)

3) Среднее квадратическое отклонение

Для оценкирассеивания возможных значений с.в. служит также среднее квадратическое отклонение $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{D(X)}}$

Пример: $\sigma(X) = \sqrt{2{,}01} = 1{,}42$

Непрерывная случайная величина. Функция распределения и её свойства.

Рассм. непрер. с.в. X, все значения которой заполняют некоторый интервал (a,b). Очевидно, что перечислить все возможные значения этой величины нельзя (т.к. их бесконечно много). Следовательно закон распределения в виде таблицы составить нельзя. Для создания закона распределения введем функцию распределения вероятности с.в.

Пусть x- действительное число.
ОПР: *Функцией распределения с.в.X* (интегральной функцией) называется вероятность события, состоящего в том, что с.в. X примет значение меньше x.

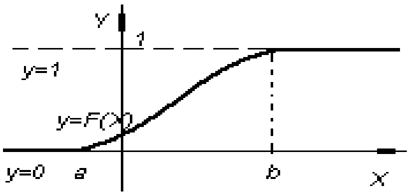
F(X)=p(X<x)
Заметим: если рассмотреть значения с.в. на числовой прямой, F(X)=p(X<x) определяет вероятность попадания с.в. X левее точки x.

Свойства функции распределения:
1)значения функции распределения принадлежат отрезку (0,1), включая концы отрезка. $0 \le F(X) \le 1$
2) функция распределения неубывающая, т.е. если $x_2 > x_1 \Rightarrow F(x_2) \ge F(x_1)$
Следствия: 1) вероятность того, что с.в. примет значение из интервала (a,b)

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

2)вероятность того, что с.в. X примет одно конкретное значение =0
3) $F(X) = 0, \quad \text{ïðè} \;\; x \le a \quad \text{è} \quad F(X) = 1, \text{ïðè} \;\; x \ge b$

Изобразим график F(X) по её свойствам:



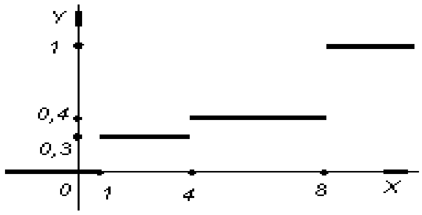
Замечание: Интегральную функцию можно составить и для дискретной случ. величины

$$F(X) = \sum_{x_i < x} p(X = x_i)$$ График имеет ступенчатый вид.

Пример: Построить график дискр. с. в. X, заданной законом распределения.

X	1	4	8
p	0,3	0,1	0,6

1)$x \le 1 \quad F(X) = 0 - св - во\ 3$
2)$1 < x \le 4 \quad F(X) = p(X = 1) = 0{,}3$
3)$4 < x \le 8 \quad F(X) = p(X = 1) + p(X = 4) = 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4$
4)$x > 8 \quad F(X) = 1 - св - во\ 3$



На графике скачки=0,3; 0,1 и 0,6 и = вероятностям значений с. в. $\Rightarrow$ если задана F(X), то можно составить закон распределения с. в. X.

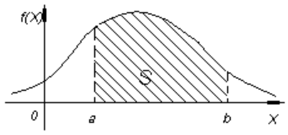
Плотность распределения вероятности непрерывной случайной величины

ОПР: *Плотностью распределения вероятностей НСВ X* (дифференциальная функция) называют функцию f(X)=F'(X), т.е. первую производную от функции распределения.
Замечание: Для ДСВ плотность распределения не применима.

ТЕОРЕМА: Вероятность того, что НСВ X примет значение, принадлежащее интервалу (a;b) равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b.

$$\boxed{P(a < X < b) = \int_a^b f(X)dx = F(b) - F(a)}$$

Геометрически это означает, что вероятность того, что НСВ примет значение из (a;b) равна площади криволин. трапеции, ограниченной осью OX, кривой распределения f(X) и прямыми x=a и x=b.
ОПР: Кривая, соответствующая функции y=f(X) называется *кривой распределения.*



Зная плотность распределения f(X) можно найти функцию распределения F(X) по формуле

$$F(X)=\int_{-\infty}^{x} f(X)dx$$

Свойства плотности распределения:

1) $f(X)\geq 0$, геометрически: график расположен выше оси OX или на ней.

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(X)dx=1$, геометрически: вся площадь криволин. трап., ограниченная осью OX и кривой распределения =1.

Числовые характеристики непрерывной случайной величины

1. Математическое ожидание. $M(X)=\int_{a}^{b} x\cdot f(X)dx$ или $M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(X)dx$

2. Дисперсия. $D(X)=\int_{a}^{b} (X-M(X))^2\cdot f(X)dx$ или $D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} (X-M(X))^2\cdot f(X)dx$

$D(X)=\int_{a}^{b} X^2\cdot f(X)dx-(M(X))^2$ или $D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} X^2\cdot f(X)dx-(M(X))^2$

3. Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$

Вероятность попадания нормально распределенной с. в. в заданный интервал

Нормальный закон распределения наиболее часто встречается в жизни. Ему подчиняется рост людей и животных, их масса.

ОПР: Н.с.в. подчинена *нормальному закону распределения*, если её плотность распределения имеет следующий вид $f(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где

$a=M(X), \sigma=\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$

ОПР: График плотности нормально распределенной величины называется *нормальной кривой или*
кривой Гаусса.

Он обладает следующими свойствами:

1) $x\in R$

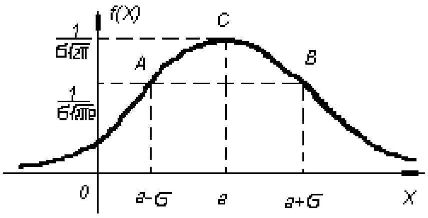
2) для всех x , функция принимает положительные значения (её график выше оси OX)

3) кривая симметрична относит. прямой x=a.

4) точка $(a;\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}})$ - точка максимума.

5) по мере удаления x от точки a, график функции убывает, приближается к оси OX, но не пересекает её.

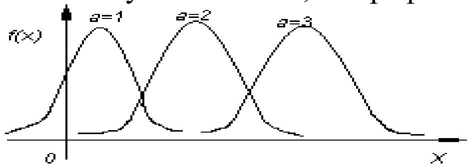
6) при $x\in(a-\sigma;a+\sigma)$ -график функции выпуклый, $x\in(-\infty;a-\sigma)\cup(a+\sigma;+\infty)$ - график функции вогнутый. Точки перегиба: $A(a-\sigma;\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\, e}})$ и $B(a+\sigma;\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\, e}})$



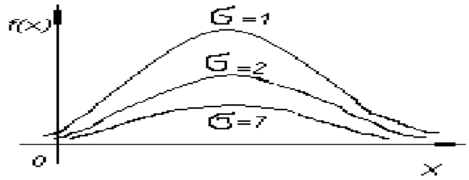
<u>Влияние параметров нормального распределения на вид нормальной кривой:</u>

1) если а увеличивается, то график сдвигается вправо вдоль оси OX

если а уменьшается, то график сдвигается влево вдоль оси OX



2) с увеличением σ, максимум ордината норм. Кривой уменьшается, а сама кривая становится более пологой (сжимается к оси OX). При уменьшении σ, нормальная кривая растягивается по оси OY.



Вероятность попадания нормально распределенной с. в. в заданный интервал

$$\boxed{P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)}, \text{ где}$$

Ф(X)- функция Лапласа

а- математическое ожидание

σ -ср. квадр. Отклонение

<u>Пример:</u> Найти вероятность того, что с. в. X примет значение, принадлежащее интервалу (10;50), если с.в. X распределена по нормальному закону и M(X)=30, σ (X)=10.

$$P(10 < X < 50) = \hat{O}(\frac{50-30}{10}) - \hat{O}(\frac{10-30}{10}) = \hat{O}(2) - \hat{O}(-2) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544$$

Часто требуется вычислить вероятность того, что отношение норм. распр. с.в. X по модулю меньше заданного положительного числа δ, т.е. требуется найти вероятность осуществления неравенства

$$|x-a| < \delta$$
$$-\delta < x - a < \delta$$
$$\underbrace{a-\delta}_{\alpha} < x < \underbrace{a+\delta}_{\beta}$$

$$P(|x-a| < \delta) = \Phi\left(\frac{(a+\delta)-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(a-\delta)-a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

$$\boxed{P(|x-a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)}$$

Правило «трёх сигм»

Вычислим вероятности:

$$1) P(|x-a| < \sigma) = 2\Phi\left(\frac{\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(1) = 2 \cdot 0{,}34134 = 0{,}6827$$

$$2) P(|x-a| < 2\sigma) = 2\Phi\left(\frac{2\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0{,}47725 = 0{,}9545$$

$$3) P(|x-a| < 3\sigma) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0{,}49865 = 0{,}9973$$

<u>ПРАВИЛО:</u> Практически достоверно, что при однократном испытании отклонение нормально распределенной с. в. От ее математического ожидания не превышает утроенного среднего квадр. отклонения, т.е. значение любой норм. распред. с.в. расположены в интервале (а-3σ ; а+3σ).

<u>Пример:</u> Средний диаметр стволов на некот. Участке является с. в., распределенной по нормальному закону. D(X)=16, M(X)=25 (см). Найти границы, в которых заключается диаметр ствола наудачу взятого дерева.

D(X)=16	$\lvert x-a \rvert < 3\sigma$	$\sigma = \sqrt{D}$
a=25 см	$\lvert x-25 \rvert < 3\cdot 4$	$\sigma = \sqrt{16} = 4$
$(\alpha;\beta) = ?$	$-12 < x-25 < 12$	
	$13 < x < 37 \quad см$	

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

2.1 Практическое занятие №1 (2 часа)
Тема: «Элементы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве»

2.6.1 Задание для работы:
1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
2. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с угловым коэффициентом.
3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.
4. Уравнение прямой в отрезках.
5. Угол между двумя прямыми.
6. Условие параллельности и перпендикулярности прямых.
7. Общее уравнение прямой, его частные случаи.
8. Расстояние от точки до прямой.
9. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с нормальным вектором.
10. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с направляющим вектором.

2.6.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Определение прямой линии.
2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с угловым коэффициентом.
4. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.
5. Уравнение прямой в отрезках.
6. Угол между двумя прямыми.
7. Условие параллельности и перпендикулярности прямых.
9. Общее уравнение прямой.
10. Частные случаи общего уравнения прямой.
11. Формула расстояния от точки до прямой.
12. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с нормальным вектором.
13. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с направляющим вектором.

Решение задач:
1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;3)$: а) параллельно оси Ox; б) параллельно оси Oy; в) составляющей с осью Ox угол 45^0.
2. Составить уравнения прямых, проходящих через точки: а) $A(3;1)$ *и* $B(5;4)$; б) $A(3;1)$ *и* $C(3;5)$; в) $A(3;1)$ *и* $D(-4;1)$.
3. Стороны AB, BC и AC треугольника ABC заданы соответственно уравнениями $4x+3y-5=0$, $x-3y+10=0$, $x-2=0$. Определить координаты его вершин.
4. Найти уравнение множества точек, равноудаленных от точек $A(-4;2)$ *и* $B(-2;-6)$.
5. Составить уравнения прямых, проходящих через точку пересечения прямых $2x-3y+1=0$ и $3x-y-2=0$ параллельно и перпендикулярно прямой $y = x+1$.

6. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(4;3)$ и отсекающей от координатного угла треугольник площадью 3 кв. ед.
7. Дан треугольник с вершинами $A(-2;0), B(2;4)\; и\; C(4;0)$. Найти уравнения сторон треугольника, медианы AE, высоты AD и длину медианы AE.
8. В треугольнике ABC даны уравнения: стороны AB: $3x+2y-12=0$, высоты BM: $x+2y-4=0$, высоты AM: $4x+y-6=0$, где M – точка пересечения высот. Найти уравнение сторон $AC,\ BC$ и высоты CM.
9. Две стороны параллелограмма заданы уравнениями $y=x-2$ и $x-5y+6=0$. Диагонали его пересекаются в начале координат. Найти уравнения двух других сторон параллелограмма и его диагоналей.
10. Даны уравнения сторон треугольника $AB: 3x-4y+24=0,$ $BC: 4x+3y+32=0,\ AC: 2x-y-4=0$. Составить уравнение высоты, медианы и биссектрисы, проведенных из вершины B, и найти их длины.
11. Составить уравнение высоты, проведенной через вершину A треугольника ABC, зная уравнения его сторон: $AB: 2x+y+3=0,\ \ AC: x-5y+7=0,\ \ BC: 3x+2y-13=0$.
12. Дан треугольник с вершинами $A(3;1), B(-3;-1), C(5;-12)$. Найти уравнение и вычислить длину его медианы, проведенной из вершины C.
13. Найти уравнения перпендикуляров к прямой $3x+5y-15=0$, проведенных через точки пересечения данной прямой с осями координат.
14. Через точку пересечения прямых $2x-5y-1=0\; и\; x+4y-7=0$ провести прямую, делящую отрезок между точками $A(4;-3)$ и $B(-1;2)$ в отношении $\lambda = 2/3$.
15. По цене $p_1 = 2$ ден. ед. потребители готовы купить $q_1 = 4$ ед. товара, а по цене $p_2 = 4$ ден. ед. только $q_2 = 2$ ед. товара. Найти: а) зависимость спроса q от цены товара p и максимальное значение спроса; б) цену, при которой спрос на товар пропадет; в) объем рынка $Q = p \cdot q$ и его максимальное значение.
16. По цене $p_1 = 2$ ден. ед. предложение составляет $s_1 = 1$ ед. товара, а при цене $p_2 = 5$ ден. ед., предложение вырастает до $s_2 = 4$ ед. товара. Найти: а) зависимость предложения s от цены товара p и цену, при которой производство прекратится; б) с учетом условия задачи 121, найти равновесную цену p_0 и объем рынка для этой цены.
17. Спрос и предложение на некоторый товар на рынке описываются зависимостями вида $D(P) = 15-3P$, $S(P) = 0{,}5P+1$. Определить равновесную цену. Найти графическим способом, является ли модель паутинного рынка «скручивающейся».
18. Спрос и предложение на некоторый товар на рынке описываются зависимостями вида $D(P) = 5-0{,}5P$, $S(P) = 1{,}5P+1$. Определить равновесную цену. Найти графическим способом, является ли модель паутинного рынка «скручивающейся».

2.1.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, основных математических моделей принятия решений; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику, решать типовые математические задачи, используемые при принятии управленческих решений.

2.2 Практическое занятие №2 (2 часа)
Тема: «Дифференциальное исчисление, его приложения»

2.2.1 Задание для работы:

1. Возрастание и убывание графика функции.
2. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.
3. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точка перегиба.
4. Алгоритм исследования функции.
5. Исследование функции. Построение графика.

2.2.2 Краткое описание проводимого занятия:
Вопросы:
1. Определение возрастающего и убывающего графика функции.
2. Определение точек экстремума.
3. Определение выпуклого и вогнутого графика функции.
4. Определение точки перегиба.
5. Определение возрастающего и убывающего графика функции.
6. Определение точек экстремума.
7. Определение выпуклого и вогнутого графика функции.
8. Определение точки перегиба.

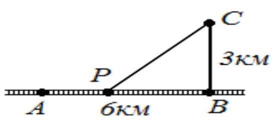
Решение задач:
1. Найти промежутки монотонности, точки экстремума функций, наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке, если он указан.

1) $y = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2, \quad [1;3]$; 2) $y = \dfrac{x}{\ln x}$; 3) $y = \dfrac{x+2}{x-3}$.

2. Найти промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба функций:

1) $y = x^3 - 6x^2 + 1$; 2) $y = (3+x)\cdot e^{-x}$; 3) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

3. Стоимость железнодорожной перевозки груза на 1 км равна 4 у.е., а автомобильной – 5 у.е. В каком месте надо начать строить шоссе, чтобы как можно дешевле доставлять груз из пункта A в пункт C. Какова наименьшая стоимость перевозки груза? Известно, что $|AB| = 6$ км, $|BC| = 3$ км.



4. Цементный завод производит X т. цемента в день. По договору он должен ежедневно поставлять строительной фирме не менее 20 т. цемента. Производственные мощности завода таковы, что выпуск цемента не может превышать 90 т. в день. Определить, при каком объеме производства удельные затраты K/x будут наибольшими (наименьшими), если функция затрат имеет вид: $K = -x^3 + 98x^2 + 200x$.
5. Предприятие производит X единиц некоторой однородной продукции в месяц. Установлено, что зависимость финансовых накоплений предприятия от объема выпуска выражается формулой $f(x) = -0{,}02x^3 + 600x - 1000$ (ден. ед.). Исследовать потенциал предприятия.

6. Суточные расходы при плавании судна вычисляются по формуле $f(v) = \dfrac{aS}{v} + kSv^2$, где S - расстояние между портами; v - скорость; a, k - постоянные параметры, причем $a > 0, \quad k > 0$. При какой скорости плавание судна будет наиболее выгодным?

7. Исследовать функции, построить их графики.

а) $y = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$; б) $y = 2x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$; в) $y = \sqrt{1 - \ln^2 x}$; г) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$.

8. Под посевы элитных культур выделили земельный участок прямоугольной формы площадью 3,24 га и вдоль всей границы окопали рвом. Найти размер участка, чтобы стоимость рва была наименьшей. Вычислить стоимость рва, если погонный метр его обходится в 50 руб.

9. Прямоугольный участок земли, примыкающий к стене заводскою здания, нужно оградить забором. Часть забора, параллельная стене, должна быть каменной, а остальная часть деревянной. Площадь участка 90 м^2. Стоимость 1 м каменного забора 10 руб., а деревянного - 8 руб. Найдите такие размеры участка, чтобы стоимость всей ограды была наименьшей? Какова эта стоимость?

2.2.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа, основных математических моделей принятия решений; приобрели умения решать типовые математические задачи, используемые при принятии управленческих решений, использовать математический язык и математическую символику при построении организационно-управленческих моделей.

2.3 Практическое занятие №3 (2 часа)
Тема: «Дифференциальные уравнения»

2.3.1 Задание для работы:

1. Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными.
2. Линейные дифференциальные уравнения. Уравнения Бернулли. Метод Бернулли.
3. Линейные дифференциальные уравнения. Уравнения Бернулли. Метод Бернулли.
4. Однородные дифференциальные уравнения.
5. Разностные уравнения.

2.3.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Определение дифференциального уравнения.
2. Определение общего решения дифференциального уравнения.
3. Определение частного решения дифференциального уравнения.
4. Определение линейного дифференциального уравнения.
5. Определение уравнения Бернулли.
6. Определение дифференциального уравнения.
7. Определение общего решения дифференциального уравнения.
8. Определение частного решения дифференциального уравнения.
9. Определение однородного дифференциального уравнения.
10. Определение разностного уравнения.

Решение задач:

1. Найти общее решение (интеграл) дифференциального уравнения, построить интегральные кривые, решить задачу Коши:

1) $3y - xy' = 0;\quad \left(1;\frac{1}{3}\right),\ (1;1)$;

2) $xy' - y = 0,\quad y(4) = 2$.

2. Найти общее решение (интеграл) дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, решить задачу Коши:

1) $xyy' = 1 - x^2,\quad y(1) = 2$;

2) $xydx + (x+1)dy = 0,\quad y(0) = 1$;

4) $\sqrt{y^2+1}dx = xydy,\quad y(1) = \sqrt{3}$;

5) $(1+x^2)yy' = x(1+y^2),\quad y(2) = 5$;

3) $xyy' = x + 1, \quad y(1) = 2$; 6) $y' = 10^{x+y}, \quad y(0) = 0$.

3. Найти общее решение (интеграл) линейных дифференциальных уравнений:

1) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$; 4) $xy' - \frac{y}{x+1} = x$;

2) $y' + \frac{2y}{x} = x^3$; 5) $y' + y = 2xe^{-2x}$;

3) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$; 6) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$.

4. Найти общее решение (интеграл) уравнений Бернулли:

1) $y' - \frac{y}{x} = x^2 y^2$; 3) $y' + y = xy^3$;

2) $y' + \frac{y}{x} = xy^3$; 4) $xy' + 2y = x^5 y^2$.

5. Найти общее решение (интеграл) уравнений Бернулли:

1) $y' + xy = xy^3$; 3) $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$;

2) $xy' + y = -xy^2$; 4) $xy' + y = y^2 \ln x$.

6. Найти общее решение (интеграл) однородных дифференциальных уравнений, решить задачу Коши:

1) $y' = \frac{y}{x} - 1$; 6) $2xy' = x + 3y$;

2) $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$; 7) $(x + 2y)dx - xdy = 0$;

3) $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$; 8) $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$;

4) $y' = \frac{x+y}{x-y}$; 9) $x^2 y' = y(x + y)$;

5) $y^2 + x^2 y' = xyy'$; 10) $(xy' - y)arctg\frac{y}{x} = x$.

2.3.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику.

2.4 Практическое занятие №4 (2 часа)
Тема: «Математическая статистика»

2.4.1 Задание для работы:

1. Вариационные ряды, их характеристики и графическое изображение.
2. Функция распределения.
3. Числовые характеристики.
4. Статистическое оценивание параметров, методы нахождения оценок.
5. Точность оценки, надежность, доверительный интервал.

2.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вопросы:

1. Определение вариационного ряда.
2. Характеристики вариационного ряда.

3. Определение полигона и гистограммы.
4. Определение функции распределения.
5. Определение статистической оценки параметров.
6. Методы нахождения оценок.
7. Определение точности оценки.
8. Определение надежности оценки.
9. Определение доверительного интервала.

Решение задач:
1. Найти эмпирическую функцию по данному распределению выборки и построить ее график.

а)

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

;

б)

x_i	2	5	7	8
n_i	1	3	2	4

;

в)

x_i	4	7	8
n_i	5	2	3

.

2. Построить полигон частот и относительных частот по данному распределению выборки:

а)

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

;

б)

x_i	15	20	25	30	35
n_i	10	15	30	20	25

;

в)

x_i	2	4	5	7	10
n_i	15	20	10	10	45

.

3. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки:

а)

1-5	5-9	9-13	13-17	17-21
10	20	50	12	8

;

б)

2-7	7-12	12-17	17-22	22-27
5	10	25	6	4

.

4. Построить гистограмму относительных частот по данному распределению выборки:

а)

0-2	2-4	4-6
20	30	50

;

б)

10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
2	4	8	4	2

.

5. Из генеральной совокупности извлечена выборка:

x_i	2	5	7	10
n_i	16	12	8	14

Найти: а) выборочное среднее; б) выборочную и исправленную дисперсию; в) выборочное и исправленное среднее квадратическое отклонение; г) коэффициент вариации; д) моду; е) медиану выборки.

6. Из генеральной совокупности извлечена выборка:

x_i	1	3	6	26
n_i	8	40	10	2

Найти: а) выборочное среднее; б) выборочную и исправленную дисперсию; в) выборочное и исправленное среднее квадратическое отклонение; г) коэффициент вариации; д) моду; е) медиану выборки.

7. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,99неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если известны генеральное среднее квадратическое отклонение σ, выборочная средняя $\overline{x_B}$ и объем выборки n: а) $\sigma = 4$, $\overline{x_B} = 10{,}2$, $n = 16$.

8. Выборка из большой партии электроламп содержит 100 ламп. Средняя продолжительность горения лампы оказалась равной 1000 ч. Найти с надежностью 0,95 доверительный интервал для средней продолжительности a горения лампы всей партии, если известно, что среднее квадратическое отклонение продолжительности горения лампы $\sigma = 40$ ч. Предполагается, что продолжительность горения ламп распределена нормально.

9. Из генеральной совокупности извлечена выборка:

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание a нормально распределенного признака генеральной совокупности по выборочной средней при помощи доверительного интервала.

10. По данным девяти независимых равноточных измерений некоторой физической величины найдены среднее арифметическое результатов измерений $\overline{x_B} = 30{,}1$ и исправленное среднее квадратическое отклонение $s = 6$. Оценить истинное значение измеряемой величины с помощью доверительного интервала с надежностью 0,99. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

11. По данным 16 независимых равноточных измерений некоторой физической величины найдены среднее арифметическое результатов измерений $\overline{x_B} = 42{,}8$ и исправленное среднее квадратическое отклонение $s = 8$. Оценить истинное значение измеряемой величины с помощью доверительного интервала с надежностью 0,999. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

12. По данным выборки объема $n = 16$ из генеральной совокупности найдено исправленное среднее квадратическое отклонение $s = 1$ нормально распределенного количественного признака. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение σ с надежностью 0,95.

13. Произведено 12 измерений одним прибором (без систематических ошибок) некоторой физической величины, причем исправленное среднее квадратическое отклонение s случайных ошибок измерения оказалось равным 0,6. Найти точность прибора с надежностью 0,99. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

14. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,99неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если известны генеральное среднее квадратическое отклонение σ, выборочная средняя $\overline{x_B}$ и объем выборки *n*: а) $\sigma = 5$, $\overline{x_B} = 16{,}8$, $n = 25$.

2.4.3 Результаты и выводы:

На данном практическом занятии студенты получили знания основных понятий и инструментов математического анализа, теории вероятностей, математической и социально-экономической статистики; приобрели умения решать типовые математические задачи, использовать математический язык и математическую символику, обрабатывать эмпирические и экспериментальные данные; сформировали навыки математических, статистических и количественных методов решения типовых организационно-управленческих задач.

Разработала: ________________________________ В. А. Ротова