

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ
ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ**

Б1.Б.11 Методы исследования и моделирования экономики

Специальность: Экономическая безопасность

Специализация: Экономическо-правовое обеспечение экономической безопасности

Форма обучения: заочная

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.1 Лекция №1 (1 час)

Тема: «Линейное программирование. Основная задача линейного программирования»

1.1.1. Вопросы лекции:

1. Классификация методов линейного программирования.
2. Основная задача линейного программирования и её модель в различных формах записи.
3. Графический метод решения задачи линейного программирования.

1.1.2. Краткое содержание вопросов:

1. Классификация методов линейного программирования.

С чисто математической точки зрения задачи линейного программирования интересны тем, что здесь неприменимы методы нахождения экстремумов с помощью производной.

Под *линейным программированием* понимается линейное планирование, т.е. получение оптимального плана-решения в задачах с линейной структурой.

Задачами линейного программирования называются задачи, в которых линейны как целевая функция, так и ограничения в виде равенств и неравенств и для которых методы математического анализа оказываются непригодными. Линейное программирование представляет собой наиболее часто используемый метод оптимизации.

Методы линейного программирования подразделяются на группы:

- 1) группа симплексных методов (точные);
- 2) группа распределительных методов (точные и приближённые).

Точные – методы перебора вариантов решения задачи в итоге дающие оптимальный вариант. Используются при машинном решении задач.

Приближённые – позволяют получить только один из допустимых вариантов решения задачи. Используются для получения первого варианта в точных распределительных методах или для ручного решения задачи.

Каждая группа методов имеет свою базовую задачу. Для группы симплекс-методов базовой является «Основная задача линейного программирования», для группы распределительных методов – «Транспортная задача».

2. Основная задача линейного программирования и её модель в различных формах записи.

Постановка задачи.

Пусть некоторое предприятие имеет m видов производственных ресурсов. Порядковый номер ресурсов – i , т.е. $i=1, 2, \dots, m$.

Наличие каждого вида ресурсов известно и обозначается b_i .

Предположим, что предприятие может производить n видов продукции. Порядковый номер продукции – j , т.е. $j=1, 2, \dots, n$.

Необходимо определить какое количество единиц продукции каждого вида надо производить (x_j), чтобы получить максимум этой продукции в стоимостном выражении, если известны затраты на производство единицы продукции каждого вида ресурса (a_{ij}) и цена реализации (c_j).

Развернутая форма записи модели.

I. Целевая функция – описывает выход продукции в стоимостном выражении:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max.$$

II. Система основных ограничений – описывает с помощью математической зависимости тот факт, что расходы производственных ресурсов не должны превышать их наличие:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2; \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m. \end{aligned}$$

III. Условие неотрицательности переменных величин:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

Замечание: в постановке с выбором другого критерия оптимальности целевая функция может стремиться к минимуму. Кроме того система ограничений может быть смешанной, т.е. содержать не только неравенства (\leq, \geq), но и равенства.

Структурная форма записи модели.

В такой форме модели даются в специализированной литературе. В этой форме записи отражается структура и тип ограничений, структура функции, какие переменные входят в функцию Z и в ограничения.

$$\text{I. } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max.$$

$$\text{II. } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i=1,2,\dots,m.$$

$$\text{III. } x_j \geq 0, j=1,2,\dots,n.$$

Замечание: одной формулой можно описать ограничения, имеющие одинаковую структуру и тип и включающие в себя одни и те же переменные.

Существуют также векторная, матричная и табличная формы записи модели.

3. Графический метод решения задачи линейного программирования

Графический метод основан на геометрической интерпретации задач линейного программирования и применяется в основном при решении задач *двумерного пространства*, так как довольно трудно, а чаще практически невозможно изобразить графически многогранник решений, который образуется в результате пересечения полупространств. Поэтому, сущность графического метода решения задач линейного программирования рассмотрим на примере задачи, заданной в двумерном пространстве, т.е. ее ограничения содержат две переменные.

1.2 Лекция №2 (1 час)

Тема: «Методы решения задач линейного программирования транспортного типа»

1.2.1. Вопросы лекции:

1. Постановка и модель транспортной задачи в различных формах записи.
2. Алгоритм решения задачи.
- 3 Приближенные распределительные методы.

1.2.2. Краткое содержание вопросов:

1. Постановка и модель транспортной задачи в различных формах записи.

Пусть имеем m пунктов, в которых находится известное количество однородных грузов (поставщики). Порядковый номер поставщика обозначается i , то есть $i=1,2,\dots,m$. Наличие грузов у поставщика b_i . Имеется n пунктов испытывающих потребность в этих грузах (потребителей). Порядковый номер потребителя $j=1,2,\dots,n$. Потребность в грузах каждого потребителя a_j . Известна «цена» перевозки единицы груза от каждого поставщика к каждому потребителю (c_{ij}). Необходимо составить план перевозки грузов от

поставщиков к потребителю, т.е. определить: какое количество груза необходимо перевезти от каждого поставщика к каждому потребителю (x_{ij}), причем значения x_{ij} должны отвечать следующим требованиям:

- общие затраты на перевозку грузов должны быть минимальными;
- все грузы от поставщиков должны быть вывезены;
- потребности потребителей в грузах должны быть удовлетворены.

I. Целевая функция описывает затраты на перевозку грузов:

$$Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \dots + c_{2n}x_{2n} + \dots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \dots + c_{mn}x_{mn} \rightarrow \min.$$

II. Система ограничений описывает второе и третье требования для x_{ij} из постановки задачи.

1 группа: условие полного вывоза грузов от поставщиков (сумма грузов, вывезенных от поставщика должна быть равна наличию):

$$x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = b_1,$$

$$x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} = b_2,$$

.....

$$x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = b_m;$$

2 группа: условие удовлетворения потребителя (сумма грузов привезённых потребителю должна быть равна его потребности):

$$x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = a_1,$$

$$x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} = a_2,$$

.....

$$x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = a_n.$$

III. Условие неотрицательности переменных величин $x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, \dots, x_{mn} \geq 0$.

Структурная форма записи модели транспортной задачи.

В специализированной литературе модели даются в структурной форме.

$$\text{I. } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min.$$

$$\text{II. } 1) \sum_{j=1}^n x_{ij} = b_i, i = 1, 2, \dots, m;$$

$$2) \sum_{i=1}^m x_{ij} = a_j, j = 1, 2, \dots, n.$$

$$\text{III. } x_{ij} \geq 0 \text{ } (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n).$$

2. Алгоритм решения задачи.

Математическая модель транспортной задачи относится к задачам линейного программирования и может быть решена симплексным методом. Однако ввиду исключительной практической важности этой задачи и специфики ограничений (ограничения заданы в виде уравнений; каждая неизвестная входит лишь в два уравнения; коэффициенты при неизвестных – единицы) для ее решения созданы специальные алгоритмы. Самым распространенным методом решения транспортной задачи является метод потенциалов.

Решение транспортной задачи разбивается на два этапа:

1) определение начального допустимого базисного решения (первого опорного плана) – первоначальное распределение поставок. Достигается посредством распределительных методов;

2) построение последовательных итераций (шагов), улучшающих опорные планы (каждый новый план не должен увеличивать суммарные затраты при $Z \rightarrow \min$ и уменьшать при $Z \rightarrow \max$). Достигается посредством метода потенциалов.

3 Приближенные распределительные методы.

К приближенным распределительным методам можно отнести метод наилучших цен и метод аппроксимации. Приближенными они называются вследствие того, что полученное при помощи этих методов распределение груза в таблице не требует дополнительной проверки на оптимальность, так как либо сразу оказывается оптимальным, либо максимально к нему приближено.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

2.1 Лабораторная работа № 1(2 часа)

Тема: «Симплексный метод решения задачи линейного программирования»

2.1.1 Цель работы: Изучить различные подходы к решению основной задачи линейного программирования.

2.1.2 Задачи работы:

1. Познакомиться с симплексным методом решения задач линейного программирования.
2. Научиться решению задач линейного программирования в MSExcel. Разобрать экономическую интерпретацию результатов решения задач.

2.1.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Калькулятор
2. Компьютер
3. Доска

2.1.4 Описание (ход) работы:

1. Познакомиться с симплексным методом решения задач линейного программирования.

Задача 1

I. Целевая функция:

$$Z = 30x_1 + 35x_2 + 136x_3 \rightarrow \max$$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 1,01x_1 + 1,01x_2 + 9,45x_3 \leq 136 \\ 0,18x_1 + 0,19x_2 \leq 21,4 \\ 3,25x_3 \leq 16,25 \\ x_1 \geq 100 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Решение:

Переходим от системы неравенств к системе уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = -1,01x_1 - 1,01x_2 - 9,45x_3 + 136 \\ y_2 = -0,18x_1 - 0,19x_2 + 21,4 \\ y_3 = -3,25x_3 + 16,25 \\ y_4 = x_1 - 100 \end{cases}$$

Запишем математическую модель в табличной форме:

Таблица 1

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены
$y_1 =$	1,01	1,01	9,45	136
$y_2 =$	0,18	0,19	0	21,4
$y_3 =$	0	0	3,25	16,25
$y_4 =$	-1	0	0	-100
$Z =$	-30	-35	-136	0

Для того, чтобы вести параллельно проверку вычислений необходимо в полученную таблицу 1 добавить столбец Σ (табл. 2)

Выберем разрешающий элемент:

Таблица 2

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены	Σ_1
$y_1 =$	1,01	1,01	9,45	136	146,46
$y_2 =$	0,18	0,19	0	21,4	21,59
$y_3 =$	0	0	3,25	16,25	19,5
$y_4 =$	-1	0	0	-100	-99
$Z =$	-30	-35	-136	0	-171

Сделаем первую итерацию

Таблица 3

	$-y_4$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены	Σ_1	Σ_2
$y_1 =$	1,01	1,01	9,45	35	38,02	46,47
$y_2 =$	0,18	0,19	0	3,4	3,77	3,77
$y_3 =$	0	0	3,25	16,25	16,25	19,5
$x_1 =$	-1	0	0	100	99	99
$Z =$	-30	-35	-136	3000	2935	2799

Получен допустимый, не вырожденный, но не оптимальный вариант.

Сделаем вторую итерацию

Таблица 4

	$-y_4$	$-x_2$	$-y_1$	Свободные члены	Σ_1	Σ_2
$x_3 =$	0,11	0,11	0,11	3,7	3,92	4,03
$y_2 =$	0,18	0,19	0	3,4	4,58	3,77
$y_3 =$	-0,35	-0,35	-0,34	4,21	3,52	3,17
$x_1 =$	-1	0	0	100	99	99
$Z =$	-15,46	-20,46	14,39	3503,7	3502,6 3	3482,17

Получен допустимый, не вырожденный, но не оптимальный вариант.

Сделаем третью итерацию

Таблица 5

	$-y_4$	$-y_2$	$-y_1$	Свободные члены	Σ_1	Σ_2
$x_3 =$	0,01	-0,58	0,11	1,73		1,27
$x_2 =$	0,95	5,26	0	17,89		24,1
$y_3 =$	-0,02	1,84	-0,34	10,47		11,96
$x_1 =$	-1	0	0	100		99
$Z =$	3,92	107,68	14,39	3869,83		3995,82

Получен допустимый вариант, являющийся оптимальным.

$$Z = 3869,83$$

$$\begin{cases} x_1 = 100 \\ x_2 = 17,89 \\ x_3 = 1,73 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 10,47 \\ y_4 = 0 \end{cases}$$

Рассмотренная нами задача в исходном виде была сформулирована следующим образом: продукцией городского молочного завода являются молоко, кефир и сметана. На производство 1 т молока, кефира и сметаны требуется соответственно 1010, 1010 и 9450 кг молока. При этом затраты рабочего времени при разливе 1 т молока и кефира составляют 0,18 и 0,19 машино-ч. На расфасовке 1 т сметаны заняты специальные автоматы в течение 3,25 ч. Всего для производства цельномолочной продукции завод может использовать 136000 кг молока. Основное оборудование может быть занято в течение 21,4 машино-ч, а автоматы по расфасовке сметаны - в течение 16,25 ч. Прибыль от реализации 1 т молока, кефира и сметаны соответственно равна 30, 22 и 136 руб. Завод должен ежедневно производить не менее 100 т молока.

Составьте математическую модель задачи, позволяющую определить объемы выпуска молочной продукции, позволяющие получить наибольшую прибыль.

В результате полученного решения можно сделать вывод, что максимальная прибыль возможна в размере 3869,83 руб. Оптимальный объем выпуска молока – 100 т, кефира – 17,89 т, сметаны – 1,73 т.

Далее рассмотрим задачи для закрепления навыка решения симплексным методом.

Задача 2.

I. Целевая функция:

$$Z = 2x_1 + 8x_2 - 5x_3 + 15x_4 \rightarrow \max$$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 10x_4 \leq 25 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 10 \\ 2x_1 + 10x_2 + 2x_3 - 5x_4 \leq 26 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Задача 3.

I. Целевая функция:

$$Z = x_1 - 8x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \min$$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \leq 2 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \geq 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \geq 2 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Задача 4.

I. Целевая функция:

$$Z = 50x_1 + 40x_2 \rightarrow \max$$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \leq 40 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Задача 5.

I. Целевая функция:

$$Z = x_1 + 4x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$$

II. Система ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \\ 2x_1 - x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 12 \end{cases}$$

III. Условие неотрицательности:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

**ПРИЛОЖЕНИЕ Решение систем линейных уравнений методом МЖИ
(спомогательный алгоритм)**

Метод последовательных исключений, или как его называют также, метод Жордана – Гаусса представляет собой совокупность удобных вычислительных алгоритмов, построенных на последовательном применении эквивалентных преобразований системы уравнений. Этот же метод с некоторыми дополнениями лежит в основе симплексного метода решения задач линейного программирования.

Существуют обыкновенные жордановы исключения (ОЖИ) и модифицированные жордановы исключения (МЖИ). Будем рассматривать метод модифицированных жордановых исключений.

Пусть дана система линейных уравнений:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1s}x_s + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2s}x_s + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots & \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{ks}x_s + \dots + a_{kn}x_n &= b_k \\ \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{ms}x_s + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (1)$$

Условные обозначения:

i – порядковый номер уравнения, $i = 1, 2, \dots, m$;

j – порядковый номер переменной x_j , $j = 1, 2, \dots, n$.

Введем дополнительные переменные y_i по каждой строке, перенеся элементы из левой части в правую с противоположным знаком. Получим систему:

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_{11}(-x_1) + \alpha_{12}(-x_2) + \dots + \alpha_{1s}(-x_s) + \dots + \alpha_{1n}(-x_n) + b_1 \\ y_2 &= \alpha_{21}(-x_1) + \alpha_{22}(-x_2) + \dots + \alpha_{2s}(-x_s) + \dots + \alpha_{2n}(-x_n) + b_2 \\ \dots & \\ y_k &= \alpha_{k1}(-x_1) + \alpha_{k2}(-x_2) + \dots + \alpha_{ks}(-x_s) + \dots + \alpha_{kn}(-x_n) + b_k \\ \dots & \\ y_m &= \alpha_{m1}(-x_1) + \alpha_{m2}(-x_2) + \dots + \alpha_{ms}(-x_s) + \dots + \alpha_{mn}(-x_n) + b_m \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (2)$$

Решать систему будем в табличной форме.

Систему (2) запишем в таблицу МЖИ следующего вида (таблица П1).

Таблица П1 – Исходная таблица

	$-x_1$	$-x_2$	\dots	$-x_s$	\dots	$-x_n$	Свободные члены
y_1	α_{11}	α_{12}	\dots	α_{1s}	\dots	α_{1n}	b_1
y_2	α_{21}	α_{22}	\dots	α_{2s}	\dots	α_{2n}	b_2
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
y_k	α_{k1}	α_{k2}	\dots	α_{ks}	\dots	α_{kn}	b_k
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
y_m	α_{m1}	α_{m2}	\dots	α_{ms}	\dots	α_{mn}	b_m

Чтобы решить систему необходимо x_j и y_i поменять местами по алгоритму МЖИ. Выбирая разрешающие элементы, будем проводить расчеты в каждой следующей таблице (таблица П2).

Таблица П2 – Преобразованная таблица

	$-x_1$	$-x_2$...	$-y_k$...	$-x_n$	Свободные члены
y_1	β_{11}	β_{12}	...	$\frac{-\alpha_{1s}}{\alpha_{ks}}$...	β_{1n}	β_1
y_2	β_{21}	β_{22}	...	$\frac{-\alpha_{2s}}{\alpha_{ks}}$...	β_{2n}	β_2
...
x_s	$\frac{\alpha_{k1}}{\alpha_{ks}}$	$\frac{\alpha_{k2}}{\alpha_{ks}}$...	$\frac{1}{\alpha_{ks}}$...	$\frac{\alpha_{kn}}{\alpha_{ks}}$	$\frac{b_k}{\alpha_{ks}}$
...
y_n	β_{m1}	β_{m2}	...	$\frac{-\alpha_{ms}}{\alpha_{ks}}$...	β_{mn}	β_m

Переход от одной таблицы к другой – шаг МЖИ.

В первой таблице k -ая строка будет называться разрешающей строкой, s -ый столбец называется разрешающим столбцом. Коэффициент, который стоит на пересечении α_{ks} – разрешающий элемент. Переменные из левого столбца – базисные. Переменные, оказавшиеся в верхней строке таблицы называются свободными.

Сравнивая первую и вторую таблицы сформулируем правило перехода (алгоритм МЖИ):

1) заполнить свободные и базисные переменные в новой таблице: поменять местами базисную и свободную переменные, оказавшиеся в разрешающих строке и столбце;

2) заполнить клетку, соответствующую разрешающему элементу, взять величину обратную разрешающему элементу;

3) заполнить строку, соответствующую разрешающей; поделить элементы разрешающей строки на разрешающий элемент;

4) заполнить столбец, соответствующий разрешающему: поделить элементы разрешающего столбца на разрешающий элемент с противоположным знаком;

5) оставшиеся клетки таблицы заполняются по выведенной формуле:

$$\beta_{ij} = \frac{\alpha_{ks} \alpha_{ij} - \alpha_{is} \alpha_{kj}}{\alpha_{ks}};$$

где k – номер разрешающей строки;

s – номер разрешающего столбца;

i – номер заполняемой строки;

j – номер заполняемого столбца;

$$\beta_{11} = \frac{\alpha_{ks} \alpha_{11} - \alpha_{is} \alpha_{k1}}{\alpha_{ks}};$$

$$\beta_{n2} = \frac{\alpha_{ks} \alpha_{n2} - \alpha_{is} \alpha_{k2}}{\alpha_{ks}}.$$

Пользоваться для расчета коэффициентов выведенной формулой не удобно, будем ее трактовать как «правило прямоугольника».

Построение прямоугольника.

Для каждой заполняемой клетки строится свой прямоугольник на предыдущей таблице:

3) первую общую для всех прямоугольников вершину ставим в клетке разрешающего элемента;

- 4) противоположную ей вершину ставим в клетке, соответствующей искомому элементу;
- 5) диагональ, соединяющая две вершины называется главной;
- 6) две другие вершины взять в таких клетках, чтобы получился прямоугольник.

Правило прямоугольника

От произведения элементов, стоящих в вершинах по главной диагонали прямоугольника, отнять произведение элементов, стоящих на второй диагонали и разделить на разрешающий элемент.

Для того, чтобы решить систему линейных уравнений, надо делать шаги МЖИ до того, пока все переменные y_i не перейдут из базиса в свободные переменные на место x_i . Перемещать можно в любой последовательности.

Из каждой таблицы МЖИ можно выписать решение системы, для этого надо помнить, что свободные переменные всегда приравниваются к нулю, тогда базисные будут равны соответствующим свободным членам.

Замечания:

- 1) разрешающий элемент не может быть равен нулю;
- 2) целесообразно, если возможно, выбирать разрешающий элемент равным единице, так как при этом упрощаются вычисления. Если же это окажется невозможным, то для уменьшения погрешностей при округлении целесообразно выбирать его большим по абсолютной величине.

Рассмотрим решение систем линейных уравнений методом МЖИ на конкретном примере.

Задача 1

Решить систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Решение:

Введем дополнительную переменную y_i по каждой строке, перенеся элементы из левой части в правую с противоположным знаком:

$$\begin{cases} y_1 = -x_1 - 2x_2 + x_3 + 5 \\ y_2 = -3x_1 - 5x_2 - 4x_3 + 7 \\ y_3 = -2x_1 + x_2 - 2x_3 + 1 \end{cases}$$

Запишем полученную систему в таблицу МЖИ:

Таблица 1.1

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены
y_1	1	2	-1	5
y_2	3	5	4	7
y_3	2	-1	2	1

Выберем разрешающий элемент исходя из упрощения вычислений. Пусть это $a_{11}=1$. Используя алгоритм МЖИ проведем следующие действия.

- 1) Поменяем местами y_1 и x_1
- 2) Вместо разрешающего элемента a_{11} запишем ему обратный $1/a_{11}=1/1=1$
- 3) Элементы разрешающей строки почленно разделим на разрешающий элемент, т.е.: $2/a_{11}=2$; $-1/a_{11}=-1$; $5/a_{11}=5$
- 4) Элементы разрешающего столбца почленно разделим на $(-a_{11})$, т.е.: $3/(-a_{11})=-3$; $2/(-a_{11})=-2$
- 5) Остальные элементы преобразуются с использованием правила прямоугольника, т.е.:

$$\beta_{21} = \frac{1 \cdot 5 - 3 \cdot 2}{1} = -1$$

$$\beta_{31} = \frac{1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2}{1} = -5$$

$$\beta_{23} = \frac{1 \cdot 4 - 3 \cdot (-1)}{1} = 7$$

$$\beta_{24} = \frac{1 \cdot 7 - 3 \cdot 5}{1} = -8$$

$$\beta_{33} = \frac{1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1)}{1} = 4$$

$$\beta_{34} = \frac{1 \cdot 1 - 2 \cdot 5}{1} = -9$$

Таблица 1.2

	$-y_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены
x_1	1	2	-1	5
y_2	-3	-1	7	-8
y_3	-2	-5	4	-9

В качестве разрешающего элемента выберем $\alpha_{22} = -1$.

Используем алгоритм МЖИ.

1. Поменяем местами y_2 и x_2
2. Вместо разрешающего элемента α_{22} запишем ему обратный $1/\alpha_{22} = 1/(-1) = -1$
3. Элементы разрешающей строки почленно разделим на разрешающий элемент, т.е.: $-3/(-1) = 3$; $7/(-1) = -7$; $-8/(-1) = 8$
4. Элементы разрешающего столбца почленно разделим на $(-\alpha_{22})$, т.е.: $2/1 = 2$; $-5/1 = -5$
5. Остальные элементы преобразуются с использованием правила прямоугольника, т.е.:

$$\beta_{11} = \frac{1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-3)}{-1} = -5$$

$$\beta_{13} = \frac{-1 \cdot (-1) - 2 \cdot 7}{-1} = 13$$

$$\beta_{14} = \frac{5 \cdot (-1) - 2 \cdot (-8)}{-1} = -11$$

$$\beta_{31} = \frac{-2 \cdot (-1) - (-5) \cdot (-3)}{-1} = 13$$

$$\beta_{33} = \frac{4 \cdot (-1) - (-5) \cdot 7}{-1} = -31$$

$$\beta_{34} = \frac{-9 \cdot (-1) - (-5) \cdot (-8)}{-1} = 31$$

Таблица 1.3

	$-y_1$	$-y_2$	$-x_3$	Свободные члены
x_1	-5	2	13	-11
x_2	3	-1	-7	8
y_3	13	-5	-31	31

В качестве разрешающего элемента можно взять только α_{33} (т.к. осталось поменять местами только x_3 и y_3). Т.к. все свободные и базисные переменные поменялись местами, тот ответом будут являться числа, стоящие в столбце свободных членов.

Это является следствием того, что переменные y вводились как разность между правой и левой частями каждого из уравнений системы, т.е. $y_1 = y_2 = y_3 = 0$. Поэтому, если на последнем этапе восстановить систему, исходя из получившейся таблицы, то будем иметь:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}^{III}(-y_1) + \alpha_{12}^{III}(-y_2) + \alpha_{13}^{III}(-y_3) + b_1^{III} \\ x_2 = \alpha_{21}^{III}(-y_1) + \alpha_{22}^{III}(-y_2) + \alpha_{23}^{III}(-y_3) + b_2^{III} \\ x_3 = \alpha_{31}^{III}(-y_1) + \alpha_{32}^{III}(-y_2) + \alpha_{33}^{III}(-y_3) + b_3^{III} \end{cases}$$

и если $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, то

$$x_1 = b_1^{III}$$

$$x_2 = b_2^{III}$$

$$x_3 = b_3^{III}$$

Поэтому вычислим только элементы, стоящие в столбце свободных членов, предварительно выполнив пункты 1-4 алгоритма. В результате получим таблицу:

Таблица 1.4

	$-y_1$	$-y_2$	$-y_3$	Свободные члены
x_1	14/31	-3/31	13/31	2
x_2	-82/31	4/31	-7/31	1
x_3	13/(-31)	-5/(-31)	1/(-31)	-1

Таким образом, $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=-1$

Покажем, что выбирая за разрешающие элементы другие числа, получим тот же ответ.

Таблица 1.1'

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены
y_1	1	2	-1	5
y_2	3	5	4	7
y_3	2	-1	2	1

Таблица 1.2'

	$-x_1$	$-y_1$	$-x_3$	Свободные члены
x_2	1/2	1/2	-1/2	5/2
y_2	1/2	-5/2	13/2	-11/2
y_3	5/2	1/2	3/2	7/2

Таблица 1.3'

	$-y_3$	$-y_1$	$-x_3$	Свободные члены
x_2	-1/5	2/5	-8/10	18/10
y_2	-1/5	-13/5	31/5	-31/5
x_1	2/5	1/5	3/5	7/5

Таблица 1.4'

	$-y_3$	$-y_1$	$-y_2$	Свободные члены
x_2	-7/31	2/31	4/31	1
x_3	-1/31	-13/31	5/31	-1
x_1	13/31	14/31	-3/31	2

Из приведенных вычислений видно, что менять x_j с y_i можно в любом порядке, но лучше выбрать за разрешающий элемент 1 или (-1) с целью упрощения вычислений. Если решение приводится в десятичных дробях с округлением до сотых долей, то пользуются замечаниями 1 и 2, а если в обыкновенных дробях, то за разрешающий можно принять любое число из возможно допустимых.

Задание: решите самостоятельно следующие системы и проверьте ответы любым известным Вам способом.

Задача 2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

Задача 3

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

Рассмотрим особенности в решении систем линейных уравнений на примерах задача 4 и 7.

Задача 4

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} y_1 = -x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 1 \\ y_2 = -2x_1 - x_2 + 5x_3 - 1 \\ y_3 = -x_1 + x_2 + x_3 - 2 \end{cases}$$

Таблица 4.1

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены
y_1	1	2	-4	-1
y_2	2	1	-5	-1
y_3	1	-1	-1	-2

Таблица 4.2

	$-y_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены
x_1	1	2	-4	-1
y_2	-2	-3	3	1
y_3	-1	-3	3	-1

Таблица 4.3

	$-y_1$	$-x_2$	$-y_2$	Свободные члены
x_1	$-5/3$	-2	$4/3$	$1/3$
x_3	$-2/3$	-1	$1/3$	$1/3$
y_3	1	0	-1	-2

За разрешающий элемент можно выбрать только элемент, стоящий на пересечении y_3 и x_2 , но он равен 0. Попробуем восстановить систему по последней таблице:

$$\begin{cases} x_1 = 5/3 y_1 + 2x_2 - 4/3 y_2 + 1/3 \\ x_3 = 2/3 y_1 + x_2 - 1/3 y_2 + 1/3 \\ y_3 = -y_1 + 0x_2 + y_2 - 2 \end{cases}$$

Рассмотрим последнее уравнение:

Т.к. $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, то $0 = -2$.

Это ложное равенство. Если в системе имеется хотя бы одно неверное равенство, то система решений не имеет. Проанализировав последнюю таблицу, получим *правило*: если разрешающий элемент равен нулю (при этом другой выбрать нельзя, т.к. все замены уже произведены), а свободный член в этой строке отличен от нуля, то система решений не имеет.

Заметим, что исход решения системы не зависит от последовательности выбора разрешающего элемента на каждом этапе.

Ответ: система решений не имеет.

Задача 5

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 4 \end{cases}$$

Задача 6

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$$

Задача 7

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

Решение:

В результате решения получим таблицу.

Таблица 7.1

	$-y_1$	$-x_2$	$-y_3$	Свободные члены
x_1	1/3	-2	-4/3	-3
y_2	-1	0	-1	0
x_3	-1/3	-1	-1/3	-1

Единственно возможный разрешающий элемент равен нулю.

Восстановим систему:

$$\begin{cases} x_1 = -1/3y_1 + 2x_2 + 4/3y_3 - 3 \\ y_2 = y_1 + 0(-x_2) + y_3 + 0 \\ x_3 = 1/3y_1 + x_2 + 1/3y_3 - 1 \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение и при условии, что $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ получим: $0 = 0$, т.е. истинное равенство, а это значит, что система уравнений линейно зависима. Т.е. содержит бесчисленное множество решений, зависящих от параметра. В данном случае параметром будет являться x_2 (при другой последовательности выбора разрешающих элементов параметром может стать или x_1 , или x_3).

Таким образом, получим *правило*: если разрешающий элемент равен нулю и свободный член в этой строке также равен нулю, то система имеет бесчисленное множество решений, зависящее от стольких параметров, сколько x -ов не перешло в базис.

Тогда общее решение системы выглядит следующим образом:

$$x_1 = 2x_2 - 3$$

$$x_3 = x_2 - 1$$

Ответ: система имеет бесчисленное множество решений зависящих от x_2 : $x_1 = 2x_2 - 3$, x_2 , $x_3 = x_2 - 1$.

Задача 8

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 6x_4 = - \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Задача 9

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}$$

Заметим, что при получении единственного решения, возможна проверка путем подстановки найденных значений в исходную систему и проверки истинности. В случае отсутствия решений или бесчисленного множества, организация проверки затруднена. Поэтому приведем правило, которое позволяет осуществлять контроль за расчетом таблиц МЖИ:

Правило:

1. В таблице 1 берется дополнительный столбец, обозначаемый Σ_1 . Этот столбец заполняется после выбора разрешающего элемента.

В Σ_1 заносятся числа, представляющие собой сумму элементов каждой строки без элементов разрешающего столбца. При этом к величине, полученной в строке, где стоит разрешающий элемент, прибавляется 1 (вне зависимости от значения самого разрешающего элемента).

Пояснения проведем для первого примера решаемого вторым способом.

Таблица 1.1"

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	Свободные члены	Σ_1
y_1	1	2	-1	5	6
y_2	3	5	4	7	14
y_3	2	-1	2	1	5

$$\begin{aligned} &= 1 + (-1) + 5 + 1 \\ &= 3 + 4 + 7 \\ &= 2 + 2 + 1 \end{aligned}$$

2. Во всех последующих таблицах МЖИ берется два столбца сумм Σ_1 и Σ_2 . Элементы Σ_1 предыдущей таблицы как бы проектируются в столбец Σ_2 новой таблицы в виде чисел, полученных в результате вычислений по алгоритму МЖИ (при этом новый столбец Σ_1 пока остается свободным).

Таблица 1.2"

	$-x_1$	$-y_1$	$-x_3$	Свободные члены	Σ_1	Σ_2
x_2	1/2	1/2	-1/2	5/2		3
y_2	1/2	-5/2	13/2	-11/2		-1
y_3	5/2	1/2	3/2	7/2		8

Таблица МЖИ будет рассчитана верно, если суммы всех без исключения элементов по каждой строке таблицы будут равны соответствующему элементу столбца Σ_2 . Т.е.:

$$\begin{aligned}
 1/2 + 1/2 - 1/2 + 5/2 &= 3 \text{ ист.} \\
 1/2 - 5/2 + 13/2 - 11/2 &= -1 \text{ ист.} \\
 5/2 + 1/2 + 3/2 + 7/2 &= 8 \text{ ист.}
 \end{aligned}$$

Это значит, что переход от таблицы 1.1" к таблице 1.2" осуществлен верно. Далее значения, стоящие в столбце Σ_2 нам не понадобятся.

3. Повторяется последовательность действий, начиная с пункта 1.

Таблица 1.2"

	$-x_1$	$-y_1$	$-x_3$	Свободные члены	Σ_1	Σ_2	
x_2	1/2	1/2	-1/2	5/2	5/2	3	$= 1/2 - 1/2 + 5/2$
y_2	1/2	-5/2	13/2	-11/2	-3/2	-1	$= -5/2 + 13/2 - 11/2$
y_3	5/2	1/2	3/2	7/2	13/2	8	$= 1/2 + 3/2 + 7/2 + 1$

Таблица 1.3"

	$-y_3$	$-y_1$	$-x_3$	Свободные члены	Σ_1	Σ_2	
x_2	-1/5	2/5	-8/10	18/10	2	6/5	$= -1/5 + 2/5 + 18/10$
y_2	-1/5	-13/5	31/5	-31/5	-8	-14/5	$= -1/5 + 13/5 - 31/5 + 1$
x_1	2/5	1/5	3/5	7/5	2	13/5	$= 2/5 + 1/5 + 7/5$

Таблица 1.4"

	$-y_3$	$-y_1$	$-y_2$	Свободные члены	Σ_1	Σ_2	
x_2	-7/31	2/31	4/31	1		30/31	
x_3	-1/31	-13/31	5/31	-1		-40/31	
x_1	13/31	14/31	-3/31	2		86/31	

Таким образом, мы делаем проверку по ходу решения примера, что позволяет вовремя заметить ошибку и устраниить ее.

Использование Σ_1 и Σ_2 также дает уверенность в ответе при бесчисленном множестве решений или при отсутствии решений вообще.

Решить системы линейных уравнений с использованием Σ_1 и Σ_2 .

Задача 10

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -3 \\ 6x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 2 \\ 5x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

Задача 11

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_4 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Задача 12

$$\begin{cases} 4x_1 - 17x_2 - 6x_3 - 5x_4 = -17 \\ 43x_1 + 24x_2 - x_3 + 3x_4 = 28 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 9 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Ответы

№2 $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -2$; **№3** $x_1 = 79/15, x_2 = -67/15, x_3 = -16/15$; **№5** система решений не имеет; **№6** система решений не имеет; **№8** $x_1 = -x_3 + 2x_4 + 3, x_2 = 2x_4 - 3$, при x_3 и x_4 – любое число; **№9** $x_1 = x_3 + 4, x_2 = -2x_3 - 1$, при x_3 – любое число; **№10** $x_1 = -5/116, x_2 = -1/116, x_3 = 64/116$; **№11** $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$; **№12** $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 3, x_4 = 4$.

2. Научиться решению задач линейного программирования в MSExcel. Разобрать экономическую интерпретацию результатов решения задач.

Чтобы решить задачу, используя табличный редактор MSEExcel необходимо:

- Открыть табличный редактор (Пуск → Программы → Microsoft Excel).
 - Запишем числовую модель задачи на рабочий лист (рисунок 1.1). Для этого необходимо выбрать ячейки в которых будут находиться переменные. Допустим $x_1 \rightarrow C1$ $x_2 \rightarrow C2$ (выбор ячеек произволен).

В ячейке A1 запишем целевую функцию $Z = 2x_1 + 3x_2$: A1:=2 · C1+3 · C2

Примечание: запись формул всегда начинается со знака «=».

В ячейку В1 запи

B1:=C1 + 3 · C2

В ячейку B2 з

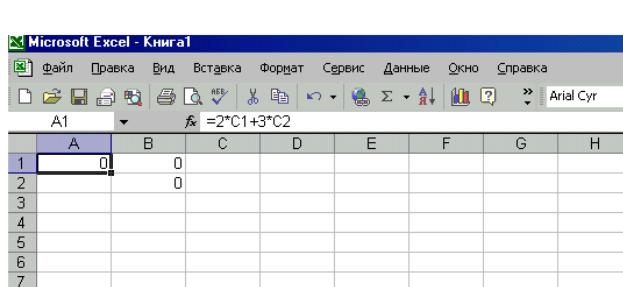


Рисунок 1.1 – Запись числовой модели на рабочем листе MSEExcel

- После как числовая модель записана, необходимо установить курсор в ячейку A1 (в ней расположена целевая функция). Выбираем вкладку «Сервис» → «Поиск решения...», при этом откроется диалоговое окно функции «Поиск решения».
 - В открывшемся окне необходимо установить целевую ячейку, а поскольку у вас курсор стоял на ячейке A1, то значение целевой ячейки будет правильным. В противном случае установите в ручную адрес целевой ячейки (в данном случае программа использует абсолютные адреса т.е. ячейка A1 имеет абсолютный адрес \$A\$1) (рисунок 1.2).
 - Установите маркер в положение, соответствующие критерию оптимальности: максимальному или минимальному значению.
 - В окне «Изменяя ячейки» нужно указать адреса ячеек соответствующие переменным. Для этого необходимо выделить диапазон ячейки с C1 по C2 (рисунок 1.2).

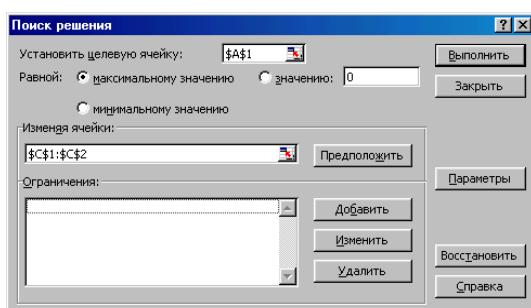


Рисунок 1.2 – Работа в диалоговом окне «Поиск решения»

- В окне «Ограничения» активировать кнопку «Добавить». Откроется окно «Добавить ограничения» (рисунок 1.3). Вводим первое ограничение: в окне «Ссылка

на ячейку» указывают адрес ячейки, где находится левая часть 1-го ограничения - \$B\$1, затем выбирают знак ограничения « \leq » и значение – 300.

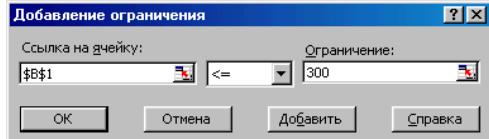


Рисунок 1.3 – Диалоговое окно «Добавление ограничения»

– Активируем клавишу «добавить» и аналогично вводим второе ограничение. Затем вводим условие неорицательности. Для этого в окне «Ссылка на ячейку» указываем диапазон ячеек, в которых находятся переменные (\$C\$1:\$C\$2). После добавления всех ограничений выбираем «OK». Программа возвращается в диалоговое окно «Поиск решения». Ввод числовой модели закончен (рисунок 1.4).

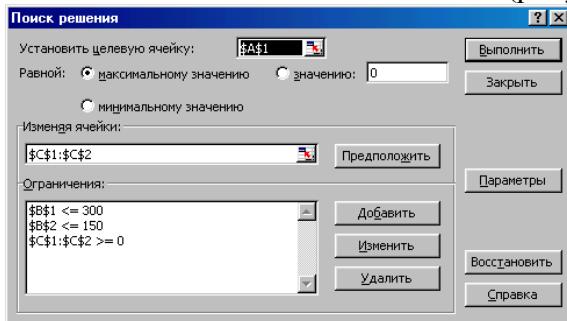


Рисунок 1.4 – Завершение ввода числовой модели в диалоговом окне «Поиск решения»

– Выбираем команду «Выполнить». На экране появится окно «Результаты поиска решения» (рисунок 1.5). Если модель составлена правильно и имеет решение, в открывшемся окне будет сообщение: «Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены». В окне «Тип отчета» выберите «Результаты» и нажмите «OK».

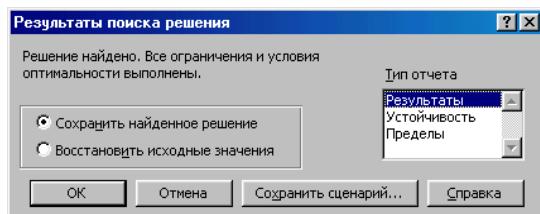


Рисунок 1.5 – Окно «Результаты поиска решения»

Результат решения задачи представлен в «Отчете по результатам» (рисунок 1.6). Решение задачи окончено.

Microsoft Excel - Книга1					
Microsoft Excel 10.0 Отчет по результатам					
Рабочий лист: [Книга1]Лист1					
Отчет создан: 22.03.05 20:54:36					
Целевая ячейка (Максимум)					
Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат		
\$A\$1		0	375		
Изменяемые ячейки					
Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат		
\$C\$1		0	75		
\$C\$2		0	75		
Ограничения					
Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
\$B\$1		300	\$B\$1<=300	связанное	0
\$B\$2		150	\$B\$2<=150	связанное	0
\$C\$1		75	\$C\$1>=0	не связан.	75
\$C\$2		75	\$C\$2>=0	не связан.	75

Рисунок 1.6 – Отчет по результатам

– Решение задачи окончено, результаты можно распечатать.

Примечание

Если поиск не может найти оптимальное решение, в диалоговом окне **Результаты поиска решения** выводится одно из следующих сообщений.

Поиск не может улучшить текущее решение. Все ограничения выполнены.

В процессе поиска решения нельзя найти такой набор значений влияющих ячеек, который был бы лучше текущего решения. Приблизительное решение найдено, но либо дальнейшее уточнение невозможно, либо погрешность, заданная в диалоговом окне **Параметры поиска решения** слишком высока. Измените погрешность на меньшее число и запустите процедуру поиска решения снова.

Поиск остановлен (истекло заданное на поиск время).

Время, отпущенное на решение задачи, исчерпано, но достичь удовлетворительного решения не удалось. Чтобы при следующем запуске процедуры поиска решения не повторять выполненные вычисления, установите переключатель **Сохранить найденное решение** или **Сохранить сценарий**.

Поиск остановлен (достигнуто максимальное число итераций).

Произведено разрешенное число итераций, но достичь удовлетворительного решения не удалось. Увеличение числа итераций может помочь, однако следует рассмотреть результаты, чтобы понять причины остановки. Чтобы при следующем запуске процедуры поиска решения не повторять выполненные вычисления, установите переключатель **Сохранить найденное решение** или нажмите кнопку **Сохранить сценарий**.

Значения целевой ячейки не сходятся.

Значение целевой ячейки неограниченно увеличивается (или уменьшается), даже если все ограничения соблюдены. Возможно следует в задаче снять одно ограничение или сразу несколько. Изучите процесс расхождения решения, проверьте ограничения и запустите задачу снова.

Поиск не может найти подходящего решения.

В процессе поиска решения нельзя сделать итерацию, которая удовлетворяла бы всем ограничениям при заданной точности. Вероятно, ограничения противоречивы. Исследуйте лист на предмет возможных ошибок в формулах ограничений или в выборе ограничений.

Поиск остановлен по требованию пользователя.

Нажата кнопка **Стоп** в диалоговом окне **Текущее состояние поиска решения** после прерывания поиска решения в процессе выполнения итераций.

Условия для линейной модели не удовлетворяются.

Установлен флажок **Линейная модель**, однако итоговый пересчет порождает такие значения, которые не согласуются с линейной моделью. Это означает, что решение недействительно для данных формул листа. Чтобы проверить линейность задачи, установите флажок **Автоматическое масштабирование** и повторно запустите задачу. Если это сообщение опять появится на экране, снимите флажок **Линейная модель** и снова запустите задачу.

При поиске решения обнаружено ошибочное значение в целевой ячейке или в ячейке ограничения.

При пересчете значений ячеек обнаружена ошибка в одной формуле или в нескольких сразу. Найдите целевую ячейку или ячейку ограничения, порождающие ошибку, и измените их формулы так, чтобы они возвращали подходящее числовое значение.

Набрано неверное имя или формула в окне **Добавить ограничение** или в окне **Изменить ограничение**, либо в поле **Ограничение** было задано целое или двоичное ограничение. Чтобы ограничить значения ячейки множеством целых чисел выберите

оператор **целого** ограничения в списке условных операторов. Чтобы установить двоичное ограничение, выберите оператор для **двоичного** ограничения.

Интерпретация результатов задачи

Полученные значения в ячейках, содержащих формулы целевой функции или ограничений, являются результатом расчета целевой функции и соответствующих ограничений.

Результат, полученный в ячейке A1 означает прибыль, полученную от производства продукции.

Ячейки C1, C2 указывают нам на количество произведенной продукции.

В ячейке B1 записано 1-ое ограничение, характеризующее расход сырья C1 на производство всех видов продукции. При этом получился результат равный 300, разница равна 0, что указывает на полный расход сырья данного вида.

В ячейке B2 записано второе ограничение, характеризующее расход сырья C2 на производство продукции П1 и П2. Результат равен 150, разница равна 0, что полностью соответствует заданному ограничению (т.е. сырье C2 израсходовано полностью).

Значение ячеек C1, C2 превышают 0, т.е. условие неотрицательности переменных выполнено.

Ответ

Максимальная прибыль возможна в размере 375 единиц.

Объем выпуска продукции: П1 – 75 штук, П2 – 75 штук.

Сырье C1 и C2 израсходовано полностью, условие неотрицательности выполнено.

5. Контрольная работа.

(Варианты заданий представлены в ФОС дисциплины)

2.2Лабораторная работа № 2 (2 часа).

Тема: «Методы решения задач линейного программирования транспортного типа»

2.2.1 Цель работы: Изучить методы решения задач линейного программирования транспортного типа

2.2.2 Задачи работы:

1. Изучить постановку и модель транспортной задачи.
2. Научиться решению транспортных задач в MSExcel.
3. Разобрать экономическую интерпретацию результатов решения задач.

2.2.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Калькулятор
2. Компьютер
3. Доска

2.2.4 Описание (ход) работы:

1. Изучить постановку и модель транспортной задачи.

(Опора на конспекты лекций)

2. Научиться решению транспортных задач в MSExcel.

Для решения данной задачи в Excel необходимо:

- 1) под запись целевой функции отвести ячейку A1;
- 2) под запись ограничений – ячейки столбца В (количество ячеек совпадает с количеством ограничений): B1, B2, B3, B4, B5, B6;

3) под запись искомых переменных отвести ячейки столбцов С, D, Е (количество потребителей совпадает с количеством столбцов, количество поставщиков – с количеством строк).

Примечание: искомые переменные x_{ij} будут находиться в следующих ячейках:

$$\begin{aligned} x_{11} &\rightarrow C1 & x_{12} &\rightarrow D1 & x_{13} &\rightarrow E1 \\ x_{21} &\rightarrow C2 & x_{22} &\rightarrow D2 & x_{23} &\rightarrow E2 \\ x_{31} &\rightarrow C3 & x_{31} &\rightarrow D2 & x_{33} &\rightarrow E3. \end{aligned}$$

Порядок выполнения работы:

1. Ввести в ячейку A1 формулу целевой функции (рисунок 3.1):
 $=15*C1+17*D1+23*E1+$
 $+ 9*C2+19*D2 + 8*E2+$
 $+24*C3+21*D3+32*E3;$

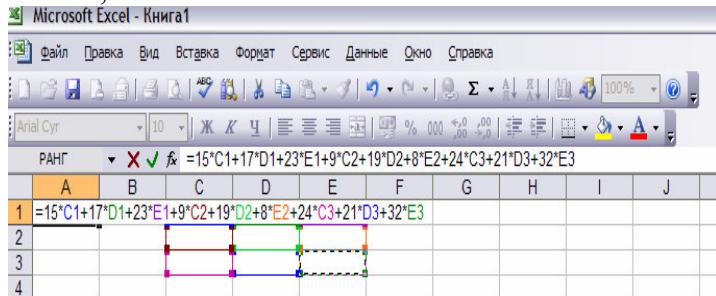


Рисунок 3.1 – Ввод целевой функции в Excel

2. а) Ввести в ячейку B1 левую часть 1-го ограничения: $=C1+D1+E1$ (рисунок 3.2)

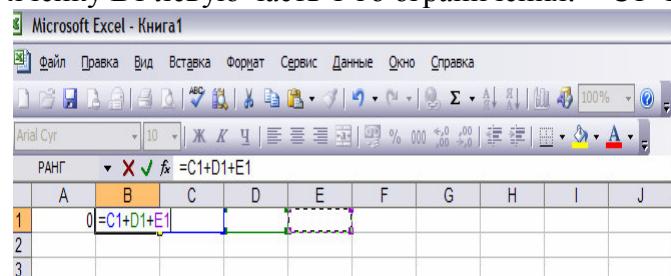


Рисунок 3.2 – Ввод ограничений в Excel

- б) Ввести в ячейку B2 левую часть 2-го ограничения:

$$=C2+D2+E2$$

- в) Ввести в ячейку B3 левую часть 3-го ограничения:

$$=C3+D3+E3$$

- г) Ввести в ячейку B4 левую часть 4-го ограничения:

$$=C1+C2+C3$$

- д) Ввести в ячейку B5 левую часть 5-го ограничения:

$$=D1+D2+D3$$

- е) Ввести в ячейку B6 левую часть 6-го ограничения:

$$=E1+E2+E3$$

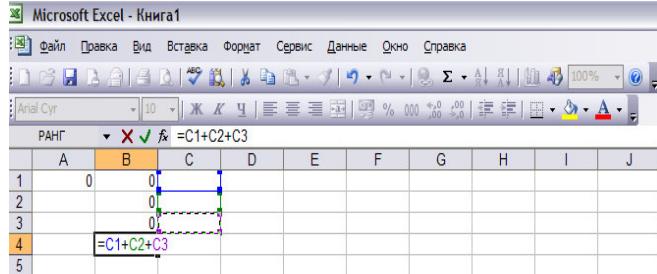


Рисунок 3.3 – Ввод ограничений в Excel

3. На панели инструментов выбрать опцию "Сервис", а в ней вкладку "Поиск решения"

Примечание

Если "Поиск решения" отсутствует, нужно выполнить команду "Сервис"—"Надстройки". В окне диалога "Надстройки" нужно установить флажок напротив строки "Поиск решения".

4. В окне диалога "Поиск решения" в поле ввода "Установить целевую ячейку" нужно ввести ссылку на ячейку A1. Необходимо выбрать способ адресации ячеек в абсолютной системе координат (т.е. указать не A1, а \$A\$1). Также нужно поступать с другими переменными.

5. В окне диалога "Поиск решения" нужно установить переключатель (рисунок 3.4).

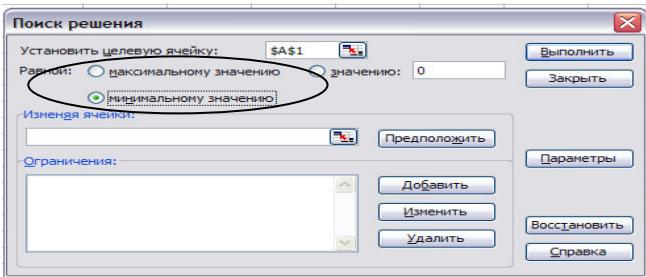


Рисунок 3.4 – Работа в диалоговом окне «Поиск решения»

6. В поле ввода "Изменяя ячейки" нужно указать ссылки на ячейки, содержащие искомые переменные, т.е. диапазон ячеек \$C\$1 : \$E\$3 (рисунок 3.5).

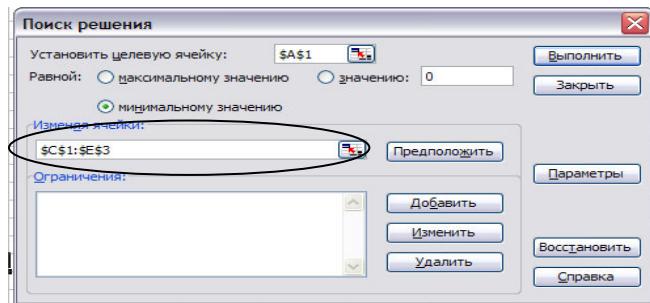


Рисунок 3.5 – Поле ввода ячеек, обозначающих искомые переменные

7. В поле ввода "Ограничения" при нажатии кнопки "Добавить" появляется окно диалога "Добавить ограничения". В поле ввода "Ссылка на ячейку" вводится \$B\$1. В поле ввода "Ограничение" вводится = и число 900. При помощи кнопки "Добавить" таким же образом вводятся все остальные ограничения (ячейки \$B\$2:\$B\$6) (рисунок 3.6).

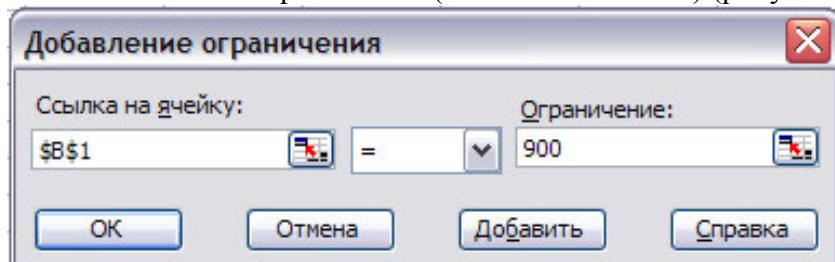


Рисунок 3.6 – Диалоговое окно «Добавление ограничения»

8. Для ввода ограничений на неотрицательность искомых переменных в окне диалога "Добавить ограничения" в поле ввода "Ссылка на ячейку" нужно ввести ссылку на ячейку \$C\$1, а в поле ввода "Ограничение" нужно ввести \geq и число 0. При помощи кнопки "Добавить" таким же образом вводятся условия неотрицательности оставшихся искомых переменных. Либо выделяется диапазон ячеек \$C\$1: \$E\$3 и задается \geq и число 0. После ввода последнего ограничения нажмите «OK».

Примечание

Если в задаче имеется условие целочисленности искомых переменных, то в диалоговом окне «Добавление ограничений» в поле ввода "Ссылка на ячейку" нужно ввести ссылку на ячейку $\$C\1 , а в поле ввода знака ограничения нужно ввести «цел». При помощи кнопки "Добавить" таким же образом вводятся условия целочисленности оставшихся искомых переменных. Либо выделяется диапазон ячеек $\$C\$1: \$E\3 и задается «цел». После ввода последнего ограничения нажмите «OK».

9. После нажатия кнопки "Выполнить" Excel рассчитывает результат и открывает окно диалога "Результаты поиска решения". В этом диалоге в окне "Тип отчета" нужно выбрать "Результаты" и нажать Ok. Перед листом, где записана постановка задачи, будет вставлен лист "Отчет по результатам 1", а на экране будет выдан результат решения задачи (рисунок 3.7).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	32000	900	650	250	0					
2		800	50	0	750					
3		550	0	550	0					
4		700								
5		800								
6		750								
7										

Рисунок 3.7 – Результаты решения задачи

3. Разобрать экономическую интерпретацию результатов решения задач.

Интерпретация результатов задачи

Полученные значения в ячейках, содержащих формулы целевой функции и ограничений, являются результатом расчета целевой функции и соответствующих ограничений.

Результат, полученный в ячейке A1, означает общую сумму объема грузоперевозок в ткм.

Ячейки B1, B2, B3 показывают выполнение условия полного вывоза груза от поставщика. Ячейки B4, B5, B6 показывают выполнение условия полного удовлетворения потребностей потребителя.

Значения ячеек в диапазоне $\$C\$1: \$E\3 показывают количество груза (в т), перевезенного от соответствующего поставщика, соответствующему потребителю. Значения данного диапазона превышают 0, следовательно условие неотрицательности искомых переменных выполнено.

Ответ. Оптимальные перевозки грузов предусматривают перевозку от 1-го поставщика 1-му потребителю 650 т, от 1-го поставщика 2-му потребителю – 250 т, от 2-го поставщика 1-му потребителю – 50 т, а 3-му потребителю – 750 т. 3-й поставщик отвезет свой груз только 2-му потребителю в количестве 550 т. Минимальный объем перевозок составит 32000 т км.

Разработал(и): _____

Д.А. Андриенко