ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.Б.05 МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Специальность 38.05.01 Экономическая безопасность
Специализация Экономико-правовое обеспечение экономической безопасности

Форма обучения очная

1. Конспект лекций

1. 1 Лекция №1 (2 часа)

Тема: «Матрицы»

1.1.1 Вопросы лекции:

1. Виды матриц.

2. Действия над матрицами.

1.1.2 Краткое содержание вопросов:

1 Виды матриц.

Матрицей называют таблицу, состоящую из n строк и m столбцов. Элементами матрицы могут быть числа или иные математические объекты.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 4 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}\sin\alpha & \sin\beta\\ \cos\alpha & \cos\beta\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$$

Последняя матрица имеет две строки и два столбца, следовательно, её размер (2х2).

c_{ij} - элемент матрицы C, стоящий в i-ой строке и j-ом столбце.

Если число строк матрицы равно числу столбцов, то такая матрица называется **квадратной**.

Две матрицы одинакового размера называются **равными** ($A=B$), если равны их элементы, стоящие на соответствующих местах.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой.**

Квадратная матрица называется **единичной**, если она имеет вид:

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}_{3x3}\qquad \text{или}\qquad E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}_{4x4}$$

Верхнетреугольной называется матрица у которой все элементы ниже главной диагонали равны нулю.

2 Действия над матрицами.

С матрицами можно производить операции сложения (вычитания), умножения на число, умножения матрицы на матрицу, транспонирования, нахождения матрицы, обратной данной. Для иллюстрации операций будем рассматривать матрицы размера (3х3), если заранее не оговорен другой размер.

Суммой (разностью) двух матриц A и B называется матрица, определяемая равенством:

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}_{3x3}\pm\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}_{3x3}=\begin{pmatrix}a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & a_{13}\pm b_{13}\\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & a_{23}\pm b_{23}\\ a_{31}\pm b_{31} & a_{32}\pm b_{32} & a_{33}\pm b_{33}\end{pmatrix}$$

Произведением числа *m* на матрицу *A* называется матрица, определяемая равенством:

$$m\bullet\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ma_{11} & ma_{12} & ma_{13}\\ ma_{21} & ma_{22} & ma_{23}\\ ma_{31} & ma_{32} & ma_{33}\end{pmatrix}$$

Произведение двух матриц *A* и *B* обозначается символом $A\cdot B$ и определяется **равенством:**

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{3} a_{1j} b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j} b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j} b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{2j} b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j} b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j} b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{3j} b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j} b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j} b_{j3} \end{pmatrix}$$

т.е. элемент матрицы - произведения стоящий в i-ой строке и k -м столбце, равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A и k-го столбца матрицы B.

Отсюда вытекает ограничение на размерность матриц A и B: число элементов в строке матрицы A должно равняться числу элементов в столбце матрицы B, чтобы для каждого элемента i-й строки матрицы A нашелся парный элемент из k-го столбца B.

Пример. Найдите произведение матриц, если это возможно:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \; ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Так как число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B, следовательно, их можно перемножить. Чтобы получить элемент c_{11} произведения, умножим первую строку матрицы A на первый столбец матрицы B. Далее, умножая первую строку A на второй столбец B, получим c_{12}**,** умножая первую строку A на третий столбец B, получим c_{13}.

В результате получится матрица С, состоящая из двух строк и трех столбцов:

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}_{2x3} .$$

По отношению к произведению двух матриц переместительный закон, вообще говоря, не выполняется: AB не равно BA.

1.2. Лекция № 2 (2 часа)
Тема: «Определитель матрицы»

1.2.1. Вопросы лекции:
1. Определители второго порядка.
2. Способы вычисления определителя третьего порядка.
3. Миноры, алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.

1.2.2.. **Краткое содержание вопросов**

1. Определители второго порядка.

Каждой квадратной матрице *A* соответствует число − **определитель** данной матрицы Δ (*det A*).

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \to \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ −определитель второго порядка.

$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \to \Delta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$ −определитель третьего порядка

Формула для вычисления определителя второго порядка:

$$\text{А}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \bullet a_{22} - a_{12} \bullet a_{21} \qquad (1)$$

Свойства определителей:

1. Определитель не изменяется, если его строки поменять местами с соответствующими столбцами,

2. При перестановки двух строк (или столбцов) определитель изменит знак на противоположный, сохраняя абсолютную величину.

3. Определитель с двумя одинаковыми сроками (столбцами) равен нулю.

4. Общий множитель всех элементов строки или столбца можно вынести за знак определителя; если все элементы какой-то строки или столбца равны 0, то и определитель равен 0.

5. Если к элементам какой-либо строки (или столбца) (определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и тоже число, то определитель не изменится.

2 Способы вычисления определителя третьего порядка.

Рассмотрим теперь матрицу размера (3 x 3), то есть имеющую 3 строки и 3 столбца

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

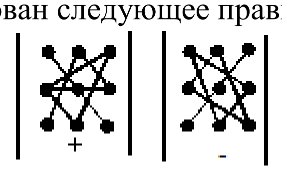
Её определителем (третьего порядка) называют число, обозначаема символом

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

и определяемое равенством

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \qquad (2)$$

Чтобы запомнить, какие произведения в правой части равенства (2) берутся со знаком *«+»,* а какие со знаком *«—»,* полезно использован следующее правило треугольников:



Это правило позволяет легко записать формулу (2) и вычислить данный определитель.

Все свойства определителей второго порядка остаются справедливыми для определителей третьего порядка и доказываются так же непосредственной проверкой.

3. Миноры, алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.

Для вычисления определителей любого порядка широко применяется теорема разложения определителя по элементам строки (столбца). Перед тем как рассмотреть теорему, введем понятия минора и алгебраического дополнения.

Минором M_{ij} некоторого элемента α_{ij} определителя называется определитель, получаемый из данного вычеркиванием 1 строки и] столбца Так минор, соответствующий элементу a_{12} есть определитель:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Он получается, если вычеркнуть первую строку и второй столбец.

Аналогично M_{13} получится вычеркиванием первой строки и третьего столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется минор этого элемента, умноженный на $(—1)^p$, где $p=i+j$.

Например, если элемент a_{12} находится на пересечении первого столбца и второй строки, то для него p=1+2=3 и алгебраическим дополнением является

$$A_{12}=(—1)^3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -(a_{21} \bullet a_{33} - a_{23} \bullet a_{31})$$

Теорема о разложении определителя (Теорема Лапласа):

Определитель равен сумме произведений элементов любого столбца (строки) на соответствующие им алгебраические дополнения, т. е.

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{is}$$

(разложение по элементам 1-й строки; 1=1;2;..,;n);

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{sj}A_{sj}$$

(разложение по элементам j-го столбца; j=1;2;...;n);

Например, разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки записывается так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \bullet A_{11} + a_{12} \bullet A_{21} + a_{13} + A_{13}$$

Значение теоремы разложения состоит в том, что позволяет свести вычисление определителей n-го порядка к вычислению определителей (n-1)-го порядка.

1.3. Лекция № 3 (2 часа)
Тема: «Системы линейных алгебраических уравнений»

1.3.1. Вопросы лекции:
1. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.
2. Правило Крамера

1.3.2. **Краткое содержание вопросов**
1. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

Рассмотрим СЛУ $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ (1)

Метод Гаусса (метод последовательного исключения переменных) заключается в том, что с помощью элементарных преобразований системы переходим к равносильной СЛУ ступенчатого или треугольного вида, из которой последовательно находят все переменные. К элементарным преобразованиям относят: перестановка уравнений, вычеркивание из системы верного равенства, умножение обеих частей одного уравнения на одно и то же число $\neq 0$ и прибавление к соответствующим обеим частям другого уравнения.

Используя метод Гаусса и элементарные преобразования, мы работаем с коэффициентами при неизвестных и свободными членами. Поэтому удобно выписывать расширенную матрицу, соответствующую данной СЛУ и приводить эту матрицу к ступенчатому виду. Использую найденную матрицу записать систему ступенчатого вида, решив которую, найдем решение СЛУ.

Пример: Решить СЛУ методом Гаусса $\begin{cases} x + 2y + 5z = -9 \\ x - y + 3z = 2 \\ 3x - 6y - z = 25 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -2 & 25 \end{array}\right) \begin{matrix} (-1)\ (-3) \\ \hookleftarrow \\ \hookleftarrow \end{matrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ (-4) \\ \hookleftarrow \end{matrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = -9 \\ -3y - 2z = 11 \\ -8z = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = -1 \end{cases}$$

Ответ: (2;-3;-1)

Достоинством метода Гаусса по сравнению с другими в том, что он позволяет однозначно установить совместна система или нет, а в случае совместности, найти её решение (единственное или бесконечное множество).

2. Правило Крамера.

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & \big|\times a_{21} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & \big|\times a_{11} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 = b_1a_{21} \\ a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 = b_2a_{11} \end{cases} (-) \qquad (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})x_2 = b_1a_{21} - b_2a_{11}$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & \big|\times a_{22} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & \big|\times a_{12} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22} \\ a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_2a_{12} \end{cases} (-) \qquad (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Заметим: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ - главный определитель СЛУ $(\Delta \neq 0)$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{21} \end{vmatrix} = b_1a_{21} - a_{12}b_2$ *и* $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$ - вспомогательные определители СЛУ

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} \end{cases}}$$ - *формулы Крамера*

ТЕОРЕМА КРАМЕРА: Система n линейных уравнений с n неизвестными, определитель которой $\Delta \neq 0$ имеет решение и при этом единственное, определяемое по формулам $\boxed{x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}}$ (*) , где Δ_j $(j = 1...n)$-определитель, получаемый из определителя системы Δ заменой j-го столбца столбцом свободных членов.

Замечание: 1) Если $\Delta \neq 0$, то система (1) имеет единственное решение, которое определяется по формулам (*).

2) Если $\Delta = 0$ и хотя бы один из вспомогательных определителей $\Delta_j \neq 0$, то система (1) не имеет решений.

3) Если $\Delta = 0$ и $\Delta_j = 0$, то система либо имеет множество решений, либо не имеет решений. Нужны дополнительные исследования.

Пример: Решить СЛУ по формулам Крамера $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 14$ $\quad \Delta \neq 0 \Rightarrow$ система имеет единственное решение

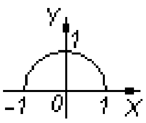
$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -14$ $\quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$ $\quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 14$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} \\ z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

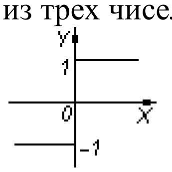
Ответ: (-1;0;1)

1.4. Лекция № 4 (2 часа)
Тема: «Числовые функции. Предел функции»
1.4.1 Вопросы лекции:
1. Числовые функции. Способы задания функций.
2. Область определения и множество значений функции. График функции.
3. Сложная и обратная функции.
4. Элементарные функции.
5. Различные типы пределов: односторонние пределы, пределы в бесконечности, бесконечные пределы.
6. Непрерывность функции. Точки разрыва функции, их классификация.

1.4.2. Краткое содержание вопросов
1. Числовые функции. Способы задания функций.
ОПР: Пусть X и У – некоторые множества. *Функцией* называется зависимость, по которой каждому $x \in X$ ставится в соответствие единственное значение $y \in Y$.
Обозначение: $y = f(x), \quad y = g(x), \quad y = F(x)$ и т.д.
у – значение функции в точке x.
у – зависимая переменная, x – независимая переменная (аргумент).
X – область определения функции, У –область значений функции
Существует три основных способа задания функции:
1) Табличный способ. В таблице по крайней мере одну из переменных принимают за независимую, другие величины являются функциями этого аргумента. Широко используется в бухгалтерской отчетности и банковской деятельности, статистических данных и т.д.
2) Аналитический способ. Состоит в задании связи между аргументом и функцией в виде формулы или набора формул.
Пример: 1) $y = \sqrt{1 - x^2}$. $[-1;1]$ - область определения функции, $[0;1]$ - область значений.



2) $y = \begin{cases} -1, если\ x < 0, \\ 0, если\ x = 0, \\ 1, если\ x > 0. \end{cases}$. $(-\infty;+\infty)$ - область определения функции, -1,0,1 - область значений (состоит из трех чисел).



3) Графический способ. На плоскости функция изображается в виде *графика* – множество точек $(x; y)$, координаты которых связаны соотношением $y = f(x)$, называемым уравнением графика.
2. Область определения и множество значений функции. График функции.
ОПР: Множество значений x, при которых функция существует, называется *областью определения* функции.
Область определения находится по соблюдению законности выполнения математических операций, входящих в формулу $f(x)$. Именно: подкоренное выражение в корне четной степени не отрицательно, знаменатель дроби не равен 0, выражение под знаком логарифма – положительно и т.д.
Пример: 1) $y = \log_2(x^2 - 5x + 6)$
ОДЗ: $x^2 - 5x + 6 > 0$. Корни: x=2 и x=3

$x \in (-\infty;2) \cup (3;+\infty)$
2) $y = \arcsin\frac{1}{x+2}$ ОДЗ: $-1 \le \frac{1}{x+2} \le 1$ и $x \ne -2$ Ответ: $x \in (-\infty;-3] \cup [-1;+\infty)$

ОПР: Функция, все значения которой равны между собой, называется *постоянной* (обозначается: $f(x) = C$).

ОПР: Функция $f(x)$, определенная на некотором множестве X, называется *ограниченной*, если существуют числа A и B такие, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $A \le f(x) \le \hat{A}$. В противном случае - *неограниченной*.

Пример: Функция $y = \sin x$ - ограничена на множестве R, т.к. $|\sin x| \le 1$ для $\forall x \in R$.

ОПР: Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если для любых значений аргумента из области её определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

ОПР: Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если для любых значений аргумента из области её определения выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

3. Сложная и обратная функции.

ОПР: Если на некотором промежутке X определена функция $z = \varphi(x)$ с множеством значений Z и на множестве Z определена функция $y = f(z)$, то функция $y = f(\varphi(x))$ называется *сложной функцией* от x, а переменная z- промежуточной переменной сложной функции.

Пример: $y = \cos(\sqrt{1-x})$ - сложная функция

$y = f(z) = \cos z, \quad z = \varphi(x) = \sqrt{1-x}$ ОДЗ: $x \in (-\infty;1]$

ОПР: Пусть X и У – некоторые множества и задана функция $y = f(x)$, т.е. множество пар чисел *(x;y)*, в которых каждое число x входит в одну и только одну пару. Если в каждой паре поменять местами x и y, то получим множество пар чисел *(y;x)*, которое называется *обратной функцией* φ к функции f $(x = \varphi(y).)$

4. Элементарные функции.

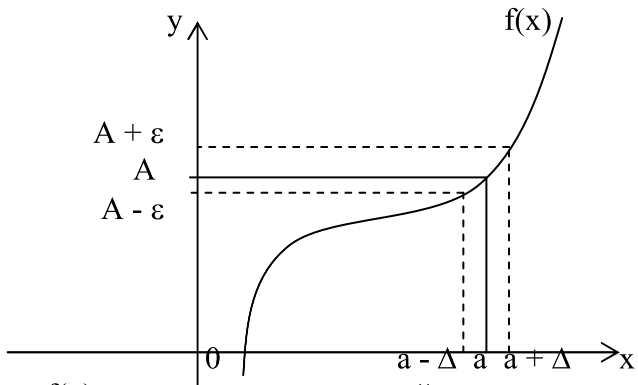
Классификация функций:

- $f(x) = C$ - постоянная функция $C = const$
- $x^{\alpha}, \quad \alpha \in R$ - степенная функция
- $a^x, \quad a > 0$ - показательная функция
- $\log_a x, \quad a > 0, a \ne 1$ - логарифмическая функция
- $\sin x, \cos x, tgx, ctgx$ - тригонометрические функции
- $\arcsin x, \arccos x, arctgx, arcctgx$ - обратные тригонометрические функции

Данные функции являются *простейшими элементарными функциями*. Функции, полученные из простейших элементарных функций с помощью конечного числа арифметических действий, называются *элементарными функциями*.

5. Различные типы пределов: односторонние пределы, пределы в бесконечности, бесконечные пределы.

Предел функции в точке.



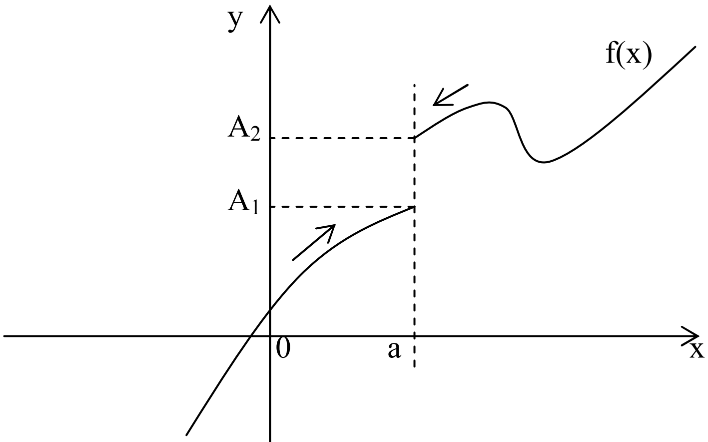
Пусть функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x = a (т.е. в самой точке x = a функция может быть и не определена)

Определение. Число А называется **пределом** функции f(x) при $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\Delta > 0$, что для всех x таких, что $0 < |x - a| < \Delta$ верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

То же определение может быть записано в другом виде:

Если a - Δ < x < a + Δ, x ≠ a, то верно неравенство A - ε < f(x) < A + ε.
Запись предела функции в точке: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

<u>Определение.</u> Если f(x) → A_1 при x → a только при x < a, то $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A_1$ - называется **пределом** функции f(x) в точке x = a **слева**, а если f(x) → A_2 при x → a только при x > a, то $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A_2$ называется **пределом** функции f(x) в точке x = a **справа**.



Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция f(x) не определена в самой точке x = a, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

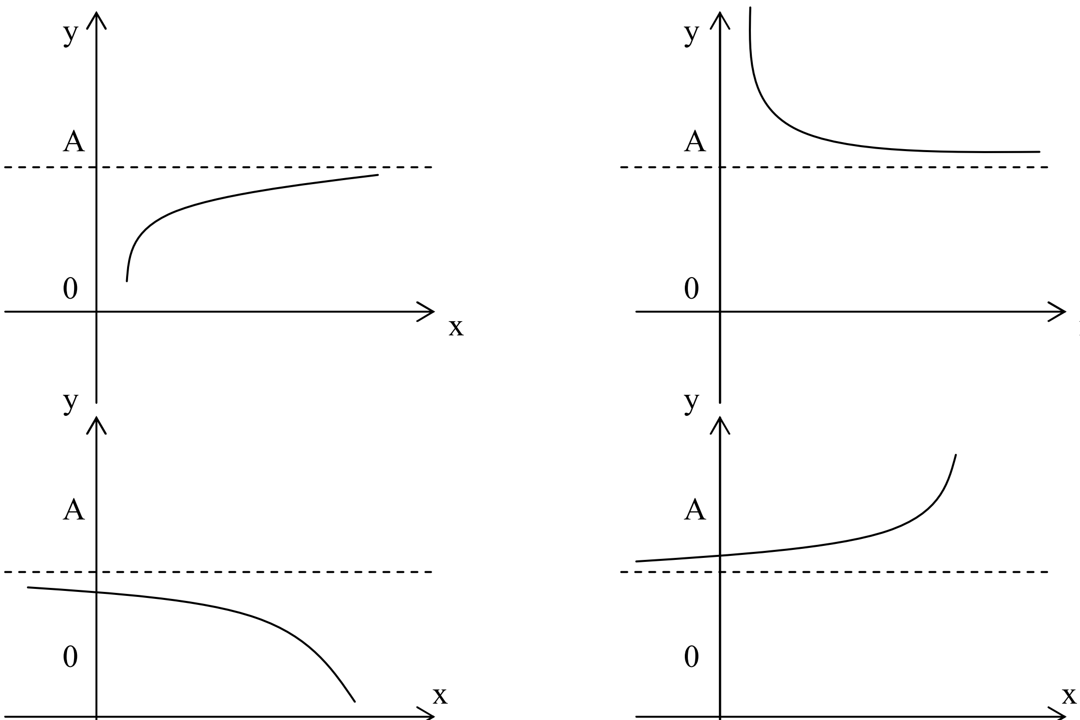
Пределы A_1 и A_2 называются также **односторонними пределами** функции f(x) в точке x = a. Также говорят, что A – **конечный предел** функции f(x).

<u>Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности.</u>

<u>Определение.</u> Число A называется **пределом** функции f(x) при x→∞, если для любого числа ε>0 существует такое число M>0, что для всех x, $|x|$>M выполняется неравенство $|A - f(x)| < \varepsilon$

При этом предполагается, что функция f(x) определена в окрестности бесконечности.
Записывают: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

Графически можно представить:



Аналогично можно определить пределы $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ для любого x>M и

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ для любого x<M.

<u>Основные теоремы о пределах.</u>

Теорема 1. $\lim\limits_{x \to a} C = C$, где C = const.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции f(x) и g(x) имеют конечные пределы при x→a.

Теорема 2. $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$

Теорема 3. $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$

Следствие. $\lim\limits_{x \to a} C \cdot f(x) = C \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$

Теорема 4. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ при $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

Теорема 5. *Если f(x)>0 вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, *то A>0.*

Аналогично определяется знак предела при f(x) < 0, f(x) ≥ 0, f(x) ≤ 0.

Теорема 6. *Если g(x) ≤f(x) ≤u(x) вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} u(x) = A$, *то и* $\lim\limits_{x \to a} = A$.

Определение. Функция f(x) называется **ограниченной** вблизи точки x = a, если существует такое число M>0, что |f(x)|<M вблизи точки x = a.

Теорема 7. *Если функция f(x) имеет конечный предел при x→a, то она ограничена вблизи точки x = a.*

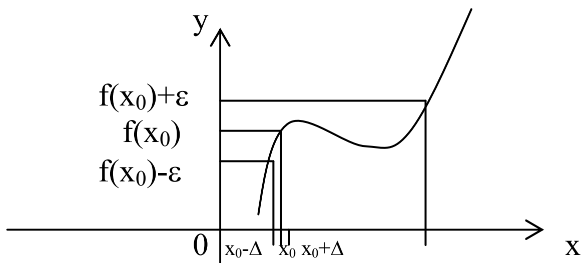
6. Непрерывность функции. Точки разрыва функции, их классификация.

Определение. Функция f(x), определенная в окрестности некоторой точки x_0, называется **непрерывной в точке** x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Тот же факт можно записать иначе: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$

Определение. Если функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0, но не является непрерывной в самой точке x_0, то она называется **разрывной** функцией, а точка x_0 – точкой разрыва.

Пример непрерывной функции:



Пример разрывной функции:

Определение. Функция f(x) называется непрерывной в точке x_0, если для любого положительного числа ε>0 существует такое число Δ>0, что для любых x, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \Delta$$

верно неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Определение. Функция f(x) называется **непрерывной** в точке x = x_0, если приращение функции в точке x_0 является бесконечно малой величиной.

$f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$ где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

Свойства непрерывных функций.

1) Сумма, разность и произведение непрерывных в точке x_0 функций – есть функция, непрерывная в точке x_0.

2) Частное двух непрерывных функций $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ – есть непрерывная функция при условии, что $g(x)$ не равна нулю в точке x_0.

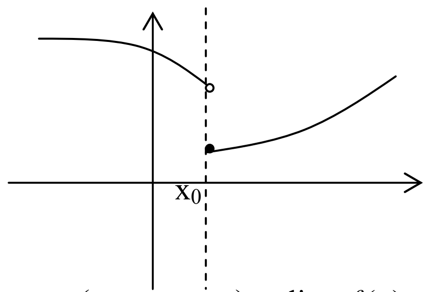
3) Суперпозиция непрерывных функций – есть непрерывная функция.

Это свойство может быть записано следующим образом:
Если $u = f(x)$, $v = g(x)$ – непрерывные функции в точке $x = x_0$, то функция $v = g(f(x))$ – тоже непрерывнаяфункция в этой точке.

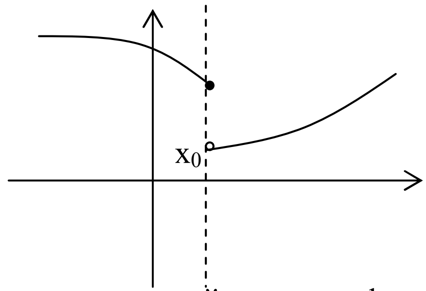
Рассмотрим некоторую функцию $f(x)$, непрерывную в окрестности точки x_0, за исключением может быть самой этой точки. Из определения точки разрыва функции следует, что $x = x_0$ является точкой разрыва, если функция не определена в этой точке, или не является в ней непрерывной.

Следует отметить также, что непрерывность функции может быть односторонней. Поясним это следующим образом.

Если односторонний предел (см. выше) $\lim\limits_{x \to x+0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной справа.



Если односторонний предел (см. выше) $\lim\limits_{x \to x-0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной слева.



<u>Определение.</u> Точка x_0 называется **точкой разрыва** функции $f(x)$, если $f(x)$ не определена в точке x_0 или не является непрерывной в этой точке.

<u>Определение.</u> Точка x_0 называется **точкой разрыва 1- го рода**, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы.

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0-0} f(x)$$

Для выполнения условий этого определения не требуется, чтобы функция была определена в точке $x = x_0$, достаточно того, что она определена слева и справа от нее.

Из определения можно сделать вывод, что в точке разрыва 1 – го рода функция может иметь только конечный скачок. В некоторых частных случаях точку разрыва 1 – го рода еще иногда называют **устранимой** точкой разрыва, но подробнее об этом поговорим ниже.

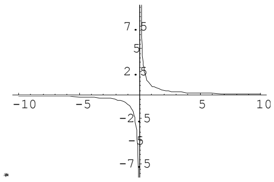
<u>Определение.</u> Точка x_0 называется **точкой разрыва 2 – го рода**, если в этой точке функция $f(x)$ не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

<u>Пример.</u> Функция Дирихле (Дирихле Петер Густав(1805-1859) – немецкий математик, член-корреспондент Петербургской АН 1837г)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{рациональное число} \\ 0, & x - \text{иррациональное число} \end{cases}$$

не является непрерывной в любой точке x_0.

Пример. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ имеет в точке $x_0 = 0$ точку разрыва 2 – го рода, т.к. $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = -\infty$.



Определение. Функция f(x) называется **непрерывной на интервале (отрезке)**, если она непрерывна в любой точке интервала (отрезка).

При этом не требуется непрерывность функции на концах отрезка или интервала, необходима только односторонняя непрерывность на концах отрезка или интервала.

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Свойство 1: (Первая теорема Вейерштрасса (Вейерштрасс Карл (1815-1897)- немецкий математик)). Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке, т.е. на отрезке [a, b] выполняется условие $-M \le f(x) \le M$.

Свойство 2: Функция, непрерывная на отрезке [a, b], принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.

Т.е. существуют такие значения x_1 и x_2, что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$, причем $m \le f(x) \le M$

Отметим эти наибольшие и наименьшие значения функция может принимать на отрезке и несколько раз (например – f(x) = sinx).

Разность между наибольшим и наименьшим значением функции на отрезке называется **колебанием** функции на отрезке.

Свойство 3: (Вторая теорема Больцано – Коши). Функция, непрерывная на отрезке [a, b], принимает на этом отрезке все значения между двумя произвольными величинами.

Свойство 4: Если функция f(x) непрерывна в точке $x = x_0$, то существует некоторая окрестность точки x_0, в которой функция сохраняет знак.

Свойство 5: (Первая теорема Больцано (1781-1848) – Коши). Если функция f(x)- непрерывная на отрезке [a, b] и имеет на концах отрезка значения противоположных знаков, то существует такая точка внутри этого отрезка, где f(x) = 0.

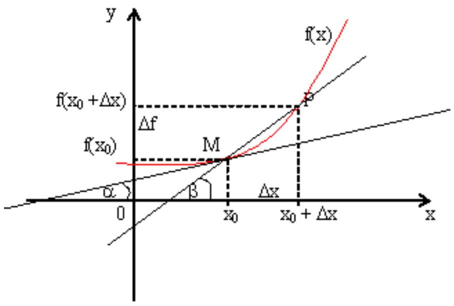
Свойство 7: Если функция f(x) определена, монотонна и непрерывна на некотором промежутке, то и обратная ей функция x = g(y) тоже однозначна, монотонна и непрерывна.

1.5. Лекция № 5 (2 часа)
Тема: «Производная функции»

1.5.1. Вопросы лекции:
1. Производная функции.
2. Дифференцируемость и дифференциал функции.
3. Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного двух функций, сложной и обратной функций.

1.5.2 Краткое содержание вопросов
1. Производная функции.
__**Определение.**__ **Производной** функции *f(x)* в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Пусть *f(x)* определена на некотором промежутке (a, b). Тогда $tg\beta = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ – тангенс угла наклона секущей MP к графику функции.

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\beta = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = tg\alpha$, где α - угол наклона касательной к графику функции *f(x)* в точке (x_0, $f(x_0)$).

Угол между кривыми может быть определен как угол между касательными, проведенными к этим кривым в какой- либо точке.

Уравнение касательной к кривой: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Уравнение нормали к кривой: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Фактически производная функции показывает как бы скорость изменения функции, как изменяется функция при изменении переменной.

Физический смысл производной функции f(t), где t- время, а f(t)- закон движения (изменения координат) – мгновенная скорость движения.

Соответственно, вторая производная функции- скорость изменения скорости, т.е. ускорение.

__**Теорема.**__ (Необходимое условие существования производной) *Если функция f(x) имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.*

Понятно, что это условие не является достаточным.

__**Теорема.**__ *Пусть y = f(x); u = g(x), причем область значений функции u входит в область определения функции f. Тогда* $y' = f'(u) \cdot u'$

Пусть требуется найти производную функции *y = f(x)* при условии, что обратная ей функция *x = g(y)* имеет производную, отличную от нуля в соответствующей точке. $y' = \frac{1}{g'(y)}$

2. Дифференцируемость и дифференциал функции.

Пусть функция y = f(x) имеет производную в точке x: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

Тогда можно записать: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$, при $\Delta x \to 0$.

Следовательно: $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Величина $\alpha\Delta x$- бесконечно малая более высокого порядка, чем $f'(x)\Delta x$, т.е. $f'(x)\Delta x$- главная часть приращения Δy.

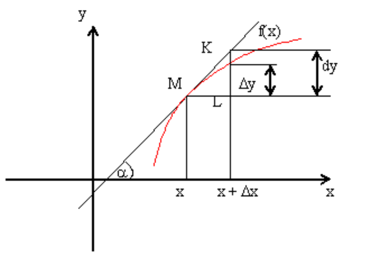
Определение. **Дифференциалом** функции f(x) в точке x называется главня линейная часть приращения функции.

Обозначается dy или df(x).

Из определения следует, что $dy = f'(x)\Delta x$ или $dy = f'(x)dx$.

Можно также записать: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$

Геометрический смысл дифференциала.



Из треугольника ΔMKL: $KL = dy = tg\alpha \cdot \Delta x = y' \cdot \Delta x$

Таким образом, дифференциал функции *f(x)* в точке x равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в рассматриваемой точке.

3. Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного двух функций, сложной и обратной функций.

Если $u = f(x)$ и $v = g(x)$- функции, дифференцируемые в точке x, то непосредственно из определения дифференциала следуют следующие свойства:

1) $d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$
2) $d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = vdu + udv$
3) $d(Cu) = Cdu$
4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

Дифференциал сложной функции. Инвариантная форма записи дифференциала

Пусть $y = f(x)$, $x = g(t)$, т.е y- сложная функция.

Тогда $dy = f'(x)g'(t)dt = f'(x)dx$

Видно, что форма записи дифференциала dy не зависит от того, будет ли x независимой переменной или функцией какой- то другой переменной, в связи с чем эта форма записи называется **инвариантной формой записи дифференциала**.

Однако, если x- независимая переменная, то $dx = \Delta x$, но если x зависит от t, то $\Delta x \neq dx$

Таким образом форма записи $dy = f'(x)\Delta x$ не является инвариантной

1.6. Лекция № 6 (2 часа)
Тема: «Исследование функций»

1.6.1. Вопросы лекции:

1. Признак монотонности функции на интервале.
2. Достаточные условия локального экстремума.
3. Выпуклые (вогнутые) функции. Достаточные условия выпуклости функции. Необходимый и достаточный признаки точки перегиба.
4. Асимптоты графика функции.
5. Общая схема исследования функции и построения ее графика.

1.6.2 Краткое содержание вопросов

1. Признак монотонности функции на интервале.

Установим связь между свойствами функций и их производными. Изучим точные методы исследования функции и построения графиков с помощью первой и второй производных.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$ непрерывную и определенную на некотором промежутке *X.*

<u>ОПР:</u> Функция называется <u>*возрастающей*</u>, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т.е. $x_2 > x_1 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) > f(x_1)$ (рис. 1)

<u>ОПР:</u> Функция называется <u>*убывающей*</u>, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, т.е. $x_2 > x_1 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) < f(x_1)$ (рис. 2)

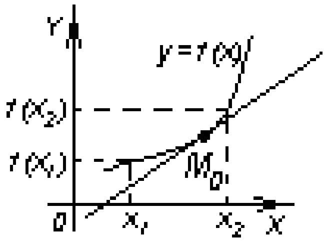


рис. 1

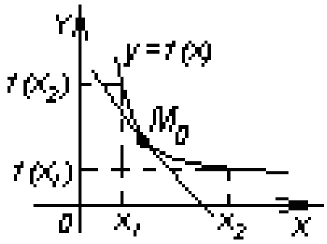


рис.2

Установим связь между возрастанием (убыванием) функции и ее производной.

Рассмотрим возрастающую функцию $y = f(x)$ непрерывную и определенную на некотором промежутке *X.*

Возьмем любую точку $M_0(x_0; y_0)$ на графике и проведем касательную к графику функции в этой точке.

Обозначим α_1 - угол наклона касательной к оси Ox.

Вспомним геометрический смысл производной: $f'(x) = k$, тогда

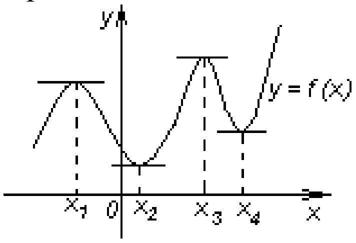
$f'(x_0) = k_{kac} = tg\alpha_1$, α_1 - острый угол, поэтому $tg\alpha_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) > 0$

Аналогично для убывающей функции. Угол α_2 наклона касательной к оси Ox тупой, поэтому $tg\alpha_2 < 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) < 0$

Обобщим сказанное в виде теоремы.

<u>ТЕОРЕМА (*признак монотонности*):</u> Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и внутри интервала $f'(x) > 0$ $\left[\, f'(x) < 0 \,\right]$, то график функции $y = f(x)$ возрастает [убывает] на интервале $(a;b)$.

Рассмотрим функцию, которая имеет несколько интервалов возрастания и убывания, дифференцируемую на всей области определения.



Точки x_1, x_2, x_3, x_4 отделяют интервалы возрастания от интебрвалов убывания.

Заметим, что значение функции в точке x_1 больше значений функции во всех «соседних» точках как слева, так и справа от x_1. Поэтому в точке x_1 функция имеет максимум. В точке x_3 функция тоже имеет максимум, хотя $f(x_1) < f(x_3)$. Аналогично для точек минимума x_2 и x_4.

<u>ОПР:</u> Функция $y = f(x)$ имеет <u>*максимум [минимум]*</u> в точке x_0, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех точек, отличных от x_0 и принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ $\left[f(x) > f(x_0) \right]$.

<u>*Замечание:*</u> Точка x_1 - локальный максимум, x_3 - глобальный максимум,

x_4 - локальный минимум, x_2 - глобальный минимум.

Точки максимума и минимума объединяют под общим названием точек <u>*экстремума*</u>.

2. Достаточные условия локального экстремума.

Установим связь между производной и точками экстремума.

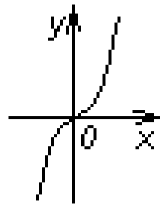
<u>ТЕОРЕМА (*необходимое условие экстремума*):</u> Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то производная функции в этой точке равна нулю или не существует.

Теорема имеет следующий геометрический смысл:

Если x_1, x_2, x_3, x_4 - точки экстремума и функция дифференцируема в этих точках, то можно провести касательные в этих точках, причем $k_1 = f'(x_1) = tg\alpha_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 0$. Аналогично $\alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0$ и $\alpha_4 = 0$. Это означает, что касательные параллельны оси Ox.

Заметим, что обратная теорема не верна. Из того, что $f'(x_0) = 0$ или $\nexists\, f'(x_0)$ не следует, что точка x_0 является точкой экстремума.

<u>Пример:</u> $y = x^3$



$y' = 3x^2 \qquad y' = 0 \quad при \quad x = 0$

Тем не менее, в точке (0,0) нет экстремума, поэтому точки в которых производная равна нулю или не существует называют точками возможного экстремума (<u>*критическими точками*</u>), а условие $f'(x_0) = 0$ или $\nexists\, f'(x_0)$ является лишь *необходимым.*

Чем же отличаются, например, точка x_3 от точки *x=0* ?

В точке x_3 функция меняет характер монотонности (с возрастания на убывание), т.е. производная слева от точки x_3 положительна, а справа отрицательна. В точке *x=0* функция $y = x^3$ характер монотонности не меняет. Слева и справа от критической точки функция возрастает и её производная сохраняет положительный знак. Сформулируем достаточный признак экстремума.

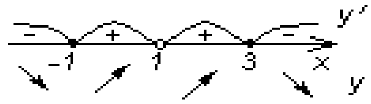
<u>ТЕОРЕМА (*достаточное условие экстремума*):</u> Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема во всех точках своей области определения, и точка x_0 принадлежит области определения. Если производная $f'(x)$ при переходе аргумента слева направо через критическую точку x_0 меняет знак с «+» на «-», то x_0 - точка максимума, если с «-» на «+», то x_0 - точка минимума, а если производная знака не меняет, то в точке x_0 экстремума нет.

<u>Пример:</u> Найти экстремумы функции $y = \dfrac{(3-x)^2}{1-x}$

Решение: $D_y: \quad x \neq 1$

$y' = \dfrac{-x^2 + 2x + 3}{(1-x)^2} \qquad y' = 0$ при $-x^2 + 2x + 3 = 0 \qquad x = -1 \quad и \quad x = 3$ - критические точки.

$$\nexists \ y' \quad \text{при} \quad x = 1 \notin D_y$$



$x \in (-\infty;-1) \cup (3:+\infty)$ - график функции убывает

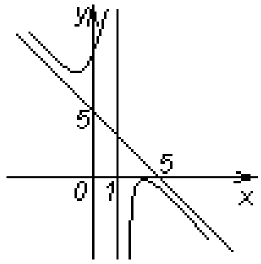
$x \in (-1;1) \cup (1:3)$ - график функции возрастает

$x = -1$ - точка минимума

$x = 3$ - точка максимума

$y_{\min}(-1) = 8$ - минимальное значение функции

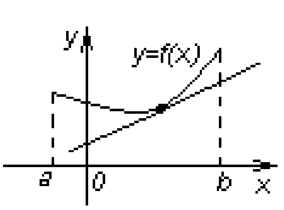
$y_{\max}(3) = 0$ - максимальное значение функции.

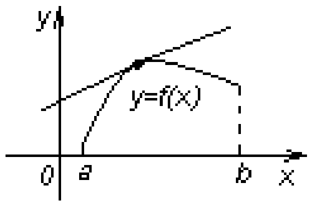


3. Выпуклые (вогнутые) функции. Достаточные условия выпуклости функции. Необходимый и достаточный признаки точки перегиба.

Еще одной важной характеристикой функции является характер её выпуклости.

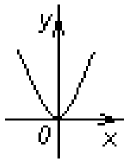
<u>ОПР:</u> График дифференцируемой функции называется <u>*выпуклым [вогнутым]*</u> в интервале $(a;b)$, если он расположен ниже [выше] любой своей касательной в этом интервале.

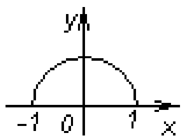




<u>Пример:</u> Функция $y = x^2$ имеет вогнутый график на всей оси R.

Полуокружность $y = \sqrt{1 - x^2}$ имеет выпуклый график на $[-1;1]$





За выпуклость и вогнутость графика функции «отвечает» вторая производная.

<u>ТЕОРЕМА:</u> Если функция $y = f(x)$ имеет вторую производную во всех точках интервала $(a;b)$ и если во всех точках этого интервала $f''(x) > 0$, то график функции вогнутый в интервале $(a;b)$, если же $f''(x) < 0$, то график функции выпуклый в интервале $(a;b)$.

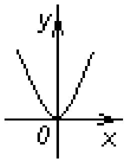
<u>ОПР:</u> Точка $M_0(x_0; f(x_0))$ называется точкой перегиба графика функции $y = f(x)$, если проходя через эту точку функция меняет характер выпуклости / вогнутости.

<u>ТЕОРЕМА (*необходимое условие точки перегиба):*</u> Пусть график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M_0(x_0; f(x_0))$, то вторая производная в этой точке равна нулю или не существует.

<u>Доказательство:</u> Метод от противного. Пусть $f''(x_0) \neq 0 \ \Rightarrow \ f''(x) < 0$ или $f''(x) > 0$. Значит в точке $M_0(x_0; f(x_0))$ функция имеет определенное направление выпуклости / вогнутости, а это противоречит наличию перегиба в точке $M_0(x_0; f(x_0))$.

<u>Замечание:</u> Обратное утверждение не верно. Не всякая точка, в которой $f''(x) = 0$ или $\nexists f''(x)$ является точкой перегиба.

<u>Пример:</u> $y = x^4$



$$y' = 4x^3 \qquad y' = 0 \quad при \quad x = 0$$

Тем не менее, в точке (0,0) нет перегиба, поэтому точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует, называют точками возможного перегиба (*<u>стационарными точками</u>*), а условие $f''(x) = 0$ или $\nexists\, f''(x)$ является лишь *необходимым.* Сформулируем достаточный признак точки перегиба.

<u>ТЕОРЕМА (*достаточное условие точки перегиба*):</u> Пусть x_0 - стационарная точка. Если проходя через стационарную точку вторая производная меняет знак, то график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M_0(x_0; f(x_0))$.

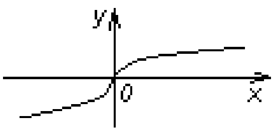
<u>Пример:</u> $y = \dfrac{(3-x)^2}{1-x}$

Ответ: $x \in (-\infty;1)$ - график функции вогнутый

$x \in (1;+\infty)$ - график функции выпуклый

точек перегиба нет.

<u>Пример:</u> $y = \sqrt[3]{x}$



$D_y:\ x \in R \qquad y'' = -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^5}} \qquad y'' \neq 0 \qquad \nexists\, y''$ при *x=0* – стационарная точка

$x \in (-\infty;0)$ - график функции вогнутый

$x \in (0;+\infty)$ - график функции выпуклый

(0,0) - точка перегиба.

4. Асимптоты графика функции.

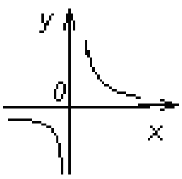
Пусть дана функция $f(x)$. При исследовании функции на бесконечности, т.е. при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$ или вблизи точек разрыва II рода, часто оказывается, что график функции сколь угодно близко приближается к той или иной прямой. Такие прямые называются *<u>асимптотами</u>*.

<u>ОПР:</u> Пряма линия называется *<u>асимптотой</u>* для кривой $y = f(x)$, если расстояние d от точки M, лежащей на кривой до прямой стремится к 0 при удалении точки M от начала координат в бесконечность.

Существует три вида асимптот: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

<u>ОПР:</u> Прямая $x = a$ называется *<u>вертикальной асимптотой</u>* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

<u>Пример:</u> $y = \dfrac{1}{x}$



$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\Rightarrow x=0 \quad \text{вертикальная асимптота}$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Сравним с определением точки разрыва II рода. Значит, если в точке a функция $y = f(x)$ терпит разрыв II рода, то прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой.

<u>ОПР:</u> Если $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} f(x) = A$, то прямая $y = A$ называется *<u>горизонтальной асимптотой</u>* графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$).

Пример: $y = \frac{1}{x}$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{1}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$ - горизонтальная асимптота.

ОПР: Если существуют такие числа k и b, что $\boxed{k = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x}}$, $\boxed{b = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} (f(x) - kx)}$, то

прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$).

Практически целесообразно искать асимптоты в следующем порядке:

1) вертикальные асимптоты
2) горизонтальные асимптоты
3) наклонные асимптоты

Пример: Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x}$

1) Вертикальные асимптоты. Точка $x = 0$ - точка разрыва II рода

$$\lim_{x\to0+} \frac{x^2 + 2x - 3}{x} = -\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x\to0-} \frac{x^2 + 2x - 3}{x} = +\infty \quad \Rightarrow \quad x = 0$$ - разрыв второго рода

$\Rightarrow \quad x = 0$ - вертикальная асимптота.

2) Горизонтальные асимптоты.

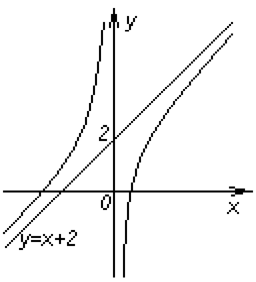
$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{x^2 + 2x - 3}{x} = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} (x + 2 - \frac{3}{x}) = \begin{matrix} +\infty \\ (-\infty) \end{matrix}$$ $\Rightarrow$ горизонтальных асимптот нет.

3) Наклонные асимптоты. $y = kx + b$

$$k = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2} = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} (1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}) = 1$$

$$b = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} (f(x) - kx) = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x} - x \right) = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{2x - 3}{x} = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} (2 - \frac{3}{x}) = 2$$

$\Rightarrow \quad y = x + 2$ - наклонная асимптота



x	-1	-2	1	2
y	4	1,5	0	2,5

5. Общая схема исследования функции и построения ее графика.

Исследование функций и построение графиков следует проводить по следующей схеме:

I. Исследование функции без использования производной.

1) Найти область определения функции D_y.

2) Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва функции, определить их род.

3) Найти асимптоты графика функции.

4) Если возможно, найти пересечение графика функции с осями координат. Если отыскание точек пересечения затруднительно, то посмотреть координаты по графику (приблизительно).

5) Исследовать функцию на четность / нечетность.

II. Исследование функции с помощью первой производной.

6) Определить интервалы монотонности и точки экстремума функции.

III. Исследование функции с помощью второй производной.

7) Определить интервалы выпуклости и вогнутости, найти точки перегиба графика функции.

IV. Построение графика функции.

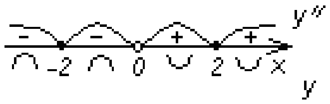
8) Построение по пунктам исследования (построение графика принято начинать с построения асимптот).

9) Определить множество значений функции E_y.

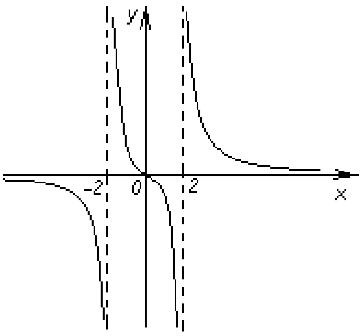
<u>Пример:</u> Исследовать функцию и построить график $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

$x = \pm 2$ - вертикальные асимптоты, $y = 0$ - наклонная асимптота

Функция монотонно убывает на D_y, точек экстремума нет.



(0,0) – точка перегиба.

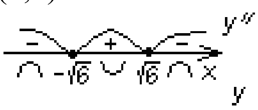


x	-4	-3	$-\frac{5}{2}$	-1	1
y	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{10}{9}$	3	-3

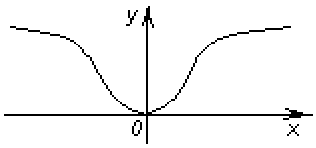
<u>Пример:</u> $y = \ln(x^2 + 1)$

Асимптот нет

(0,0) – точка минимума



$(\sqrt{6}; \ln 7)$ и $(-\sqrt{6}; \ln 7)$ - точки перегиба.



x	1	3	5
y	$\ln 2 \approx 0,7$	$\ln 10 \approx 2,3$	$\ln 26 \approx 3,3$

1.7. Лекция № 7 (2 часа)
Тема: «Неопределенный и определенный интеграл.»

1.7.1. Вопросы лекции:
1. Первообразная и неопределенный интеграл. Таблица неопределенных интегралов.
2. Свойства неопределенного интеграла.
3. Замена переменной в неопределенном интеграле, интегрирование по частям.
4. Формула Ньютона-Лейбница. Геометрические приложения определенного интеграла.

1.7.2 Краткое содержание вопросов
1. Первообразная и неопределенный интеграл. Таблица неопределенных интегралов.
Одной из основных задач дифференциального исчисления является отыскание производной заданной функции. Обратной задачей является нахождение по данной функции $f(x)$ такой функции $F(x)$, производная которой была бы равна функции $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$.

Восстановление функции по известной производной этой функции составляет одну из основных задач интегрального исчисления.

<u>ОПР:</u> Функция $F(x)$ называется <u>*первообразной*</u> для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, если для всех значений x из этого промежутка выполняется равенство

$$\boxed{F'(x)=f(x)}$$

<u>Примеры:</u> 1) $F(x) = \sin x$ - первообразная для функции $f(x) = \cos x$ на множестве R, т. к. $(\sin x)' = \cos x, \forall x \in R$

2) $F(x) = x^3$ - первообразная для функции $f(x) = 3x^2$ на множестве R, т. к. $(x^3)' = 3x^2$

<u>Зам:</u> $F(x) = x^3 + C$, где C=const тоже является первообразной для функции $f(x) = 3x^2$, т. к. $(x^3 + C)' = 3x^2$

<u>ТЕОРЕМА:</u> Если $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, то любая другая первообразная для функции $f(x)$ на этом промежутке X, может быть представлена в виде $F(x) + C$, где C- некоторая постоянная.

<u>Доказательство:</u> Пусть $\hat{O}(x)$ - другая первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке X,

т. е. $\Phi'(x) = f(x)$

Рассм. $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \Rightarrow$

$\Phi(x) - F(x) = C \quad \Rightarrow \quad \Phi(x) = F(x) + C$ ч. т. д.

<u>ОПР:</u> Если функция $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$, то множество функций $F(x) + C$, где C=const, называется <u>*неопределённым интегралом*</u> от функции $f(x)$ и обозначается символом

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}$$

f(x)- подынтегральная функция, f(x)dx-подынтегральное выражение, x- переменная интегрирования.

<u>Пример:</u> Проверить, что $\int 4x^3 dx = x^4 + C$

Продифференцируем: $(x^4 + C)' = 4x^3$, получим подынтегральную функцию $\Rightarrow$ интегрирование выполнено верно.

2. Свойства неопределенного интеграла.

1) $(\int f(x)dx)' = f(x) \quad и \quad d(\int f(x)dx) = f(x)dx$

<u>Доказательство:</u> 1) $(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)$

2) $d(\int f(x)dx) = (\int f(x)dx)'dx = f(x)dx$

2) $\int dF(x) = F(x) + C$

<u>Доказательство:</u> $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$

3) $\int k\cdot f(x)dx = k\cdot\int f(x)dx$

4) $\int (f(x)\pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

3. Замена переменной в неопределенном интеграле, интегрирование по частям.

Часто введение новой переменной позволяет свести нахождение интеграла к нахождению табличного, т. е. перейти к непосредственному интегрированию.

Рассм $\int f(x)dx$ Обозначим $x=\varphi(t)$ тогда $dx = d(\varphi(t)) \Rightarrow dx = \varphi'(t)dt$ подставим в исходный интеграл:

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt}$$

Зам: На практике обычно обозначают некоторую функцию от x через t $\underline{\psi'(x) = t}$

Примеры:

1) $\int \frac{x^3dx}{(x-1)^2} = \left| \begin{matrix} x-1=t \Rightarrow d(x-1)=dt \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{(t+1)^3dt}{t^2} = \int \frac{t^3+3t^2+3t+1}{t^2}dt = \frac{t^2}{2}+3t+3\ln|t| - \frac{1}{t} + C =$
$\frac{(x-1)^2}{2} + 3x - 3 + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$

2) $\int \frac{x^4dx}{x^5+7} = \left| \begin{matrix} x^5+7=t \\ d(x^5+7)=dt \\ (x^5+7)'dx=dt \\ 5x^4dx=dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{5}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{5}\ln|t| + C = \frac{1}{5}\ln|x^5+7| + C$

3) $\int \sin^2 x\cos x dx = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ d(\sin x)=dt \\ (\sin x)'dx = dt \\ \cos xdx = dt \end{matrix} \right| = \int t^2dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$

Рассмотрим непрерывные функции $u(x)$ и $v(x)$. Пусть существуют их производные $u'(x)$ и $v'(x)$.

Рассм. $(u\cdot v)' = u'v + uv'$

Рассм. $d(u\cdot v) = (uv)'dx = u'(x)v(x)dx + u(x)v'(x)dx = vdu + udv$

Рассм. $\int d(uv) = \int (vdu + udv)$

$uv = \int vdu + \int udv$ получим *<u>формулу интегрирования по частям</u>*

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

Выпишем классы интегралов, решаемых этим методом:

I класс: $\left. \begin{matrix} \int P(x)e^{ax}dx \\ \int P(x)\sin axdx \\ \int P(x)\cos axdx \end{matrix} \right\}$ $\quad a\in R \quad u = P(x) \quad dv = \left\{ \begin{matrix} e^{ax}dx \\ \sin axdx \\ \cos axdx \end{matrix} \right.$

II класс: $\left. \begin{matrix} \int P(x)\ln axdx \\ \int P(x)\arcsin axdx \\ \int P(x)\arccos axdx \\ \int P(x)arctgaxdx \\ \int P(x)arcctgaxdx \end{matrix} \right\}$ $\quad a\in R \quad u = \left\{ \begin{matrix} \ln ax \\ \arcsin ax, \arccos ax \\ arctgax, arcctgax \end{matrix} \right. \quad dv = P(x)dx$

Примеры:

$$1)\ \int x^2 e^{-2x}dx = \left| \begin{array}{c} u = x^2 \\ dv = e^{-2x}dx \\ du = d(x^2) \\ u = 2xdx \\ v = \int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{array} \right| = -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} + \int e^{-2x}xdx = \left| \begin{array}{c} u = x \\ dv = e^{-2x}dx \\ du = dx \\ v = \int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{array} \right| = -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} +$$

$$+(-\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx) = -\frac{1}{2}e^{-2x}(x^2 + x + \frac{1}{2}) + C$$

$$2)\ \int \ln(2x-5)dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln(2x-5) \\ dv = dx \\ du = d(\ln(2x-5)) \\ du = \frac{2}{2x-5}dx \\ v = \int dx = x \end{array} \right| = x\ln(2x-5) - \int \frac{2xdx}{2x-5} = x\ln(2x-5) - x - \frac{5}{2}\ln|2x-5| + C$$

III класс: Под знаком интеграла обе функции не алгебраические

$$\int e^{ax}\sin bxdx \qquad \int \sqrt{a^2 - x^2}dx$$
$$\int e^{ax}\cos bxdx \qquad \int \sqrt{x^2 - a^2}dx$$

Без разницы, что обозначать через u и dv. Метод применяется два раза, главное сохранить обозначение.

Примеры:

1)

$$\int e^x \sin 5xdx = \left| \begin{array}{c} u = e^x \\ dv = \sin 5xdx \\ du = e^x dx \\ v = \int \sin 5xdx = -\frac{1}{5}\cos 5x \end{array} \right| = -\frac{1}{5}e^x\cos 5x + \frac{1}{5}\int e^x \cos 5xdx = \left| \begin{array}{c} u = e^x - \textit{подстановка} \\ \textit{такая же, как и в первый раз} \\ dv = \cos 5xdx \\ du = e^x dx \\ v = \int \cos 5xdx = \frac{1}{5}\sin 5x \end{array} \right|$$

$= -\frac{1}{5}e^x\cos 5x + \frac{1}{25}e^x \sin 5x - \frac{1}{25}\int e^x \sin 5xdx$ Интеграл повторился. Обозначим его через I, получим:

$$I = = -\frac{1}{5}e^x\cos 5x + \frac{1}{25}e^x\sin 5x - \frac{1}{25}I$$

$$I = \frac{5}{26}e^x(-\cos 5x + \frac{1}{5}\sin 5x) + C$$

$$2)\ \int \sqrt{x^2-4}dx = \int \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2-4}}dx = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-4}} - 4\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} =$$

Рассм. $\displaystyle \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-4}} = \left| \begin{array}{c} u = x \\ dv = \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4}} \\ du = dx \\ v = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4}} = \left| \begin{array}{l} x^2 - 4 = t \\ 2xdx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{x^2-4} \end{array} \right| = x\sqrt{x^2-4} - \int \sqrt{x^2-4}dx$

$$= x\sqrt{x^2-4} - \int \sqrt{x^2-4}dx - 4\ln\left|x - \sqrt{x^2-4}\right| \quad \Rightarrow$$

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} - 2\ln\left|x - \sqrt{x^2-4}\right| + C$$

4. Формула Ньютона-Лейбница. Геометрические приложения определенного интеграла.

Вычисление определённого интеграла с помощью $\lim\sigma$ затруднительно, поэтому существует другой метод, основанный на теореме.

<u>ТЕОРЕМА</u> <u>*(Ньютона-Лейбница):*</u> Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и F(x)- некоторая её первообразная на этом отрезке, то справедлива формула: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

<u>формула Ньютона- Лейбница</u>

<u>Доказательство:</u> $\int_a^x f(x)dx = \Phi(x) - \text{по определению}$ $\quad \int_a^b f(x)dx = F(x) + C - \text{по условию теоремы}$

Т. к. разность двух первообразных есть const , то Ф(x)-F(x)=C

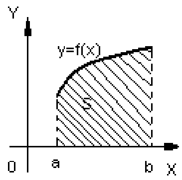
Ф(x)=F(x)+C $\Rightarrow \int_a^x f(x)dx = F(x) + C$

Пусть x=a: $\int_a^a f(x)dx = F(a) + C \Rightarrow 0 = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a) \Rightarrow \int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a)$

Пусть x=b: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

<u>Пример:</u> $\int_1^3 x^2 dx = 8\frac{2}{3}$

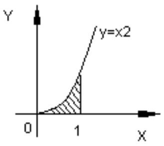
Пусть в ПДСК задана криволинейная трапеция, ограниченная отрезком $[a;b]$ на оси OX, прямыми x=a и x=в и сверху графиком функции $y = f(x)$ непрерывной на этом отрезке , её площадь вычисляется по формуле $S = \int_a^b f(x)dx$



Определённый интеграл от неотрицательной непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ численно равен площади криволинейной трапеции с основанием $[a;b]$, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$.

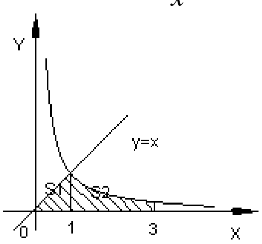
<u>Примеры:</u> Найти площадь фигуры, ограниченной

1) $y = x^2, x = 1$ *и осью OX*



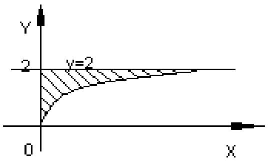
$$S = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

2) $y = x, y = \frac{1}{x^2}, y = o, x = 3$



$$S = S1 + S2 = \int_0^1 xdx + \int_1^3 \frac{1}{x^2}dx = 1\frac{1}{6}$$

3) $y = \sqrt{x}, y = 2, x = 0$



$$S = \int_0^4 (2-\sqrt{x})dx = 2\frac{2}{3}$$

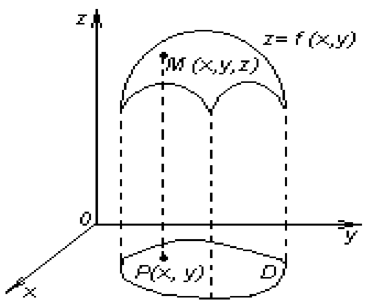
1.8. Лекция № 8 (2 часа)
Тема: «Функции нескольких переменных»

1.8.1. Вопросы лекции:
1. Функции нескольких переменных. Поверхности (линии) уровня функции. Элементарные функции нескольких переменных.
2. Частные производные
3. Экстремум функции нескольких переменных.

1.8.2 Краткое содержание вопросов
1. Функции нескольких переменных. Поверхности (линии) уровня функции. Элементарные функции нескольких переменных.
ОПР: *Функцией f двух переменных* $z = f(x,y)$ называется зависимость (закон), по которой каждой паре значений (x,y) из некоторой области $D(x,y)$ соответствует единственное значение $z \in E$.

Тогда x и y – независимые переменные (аргументы),
D – область определения (или существования) функции,
E – область значений функции.

Рассмотрим ПДСК. Если каждой точке на плоскости с координатами (x,y) поставить в соответствие аппликату $z = f(x,y)$, то получим некоторую поверхность в пространстве. Т.о. под *графиком функции двух переменных* будем понимать поверхность, образованную множеством точек $M(x,y,z)$.

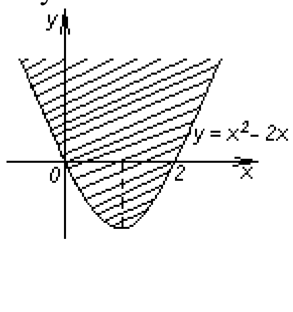


Область определения функции D геометрически представляет собой некоторую часть плоскости Oxy, ограниченную линиями, которые могут принадлежать или не принадлежать этой области. В первом случае область D называется *замкнутой* и обозначается $\overline{D}$, во втором – *открытой*.

Пример: Найти область определения D и область значений E функции $z = \ln(y - x^2 + 2x)$.

$D_Z: \; y - x^2 + 2x > 0$

Построим границу области *D:* $y = x^2 - 2x$. Данное уравнение задает параболу, т.к. парабола не принадлежит области *D*, то она изображается пунктиром. Легко убедиться в том, что любая точка внутри параболы удовлетворяет данному неравенству, в то время, как любая точка, расположенная за параболой - не удовлетворяет. Заштрихуем область *D*.



Т.к. выражение под знаком логарифма может принимать сколь угодно малые и сколь угодно большие положительные значения, то область значений функции $E: z \in (-\infty; +\infty)$

Обобщим сказанное выше.

ОПР: Функцией n- переменных $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется зависимость (закон), по которой каждой совокупности $(x_1, x_2, ..., x_n)$ из некоторой области n – мерного пространства, ставится в соответствие единственное значение u.

Линии уровня.

Пусть дана функция $z = f(x, y)$. Будем придавать переменной z некоторые значения $c_1, c_2, ..., c_n$ из области значений функции. Получим функции одной переменной $f(x, y) = c_1$, $f(x, y) = c_2, \ldots$, $f(x, y) = c_n$, графиками которых будут являться некоторые линии на плоскости, называемые *линиями уровня*. Графически это означает, что поверхность $z = f(x, y)$, пересекается плоскостями $z = c_1$, $z = c_2, ...$, $z = c_n$ параллельными друг другу и плоскости Oxy.

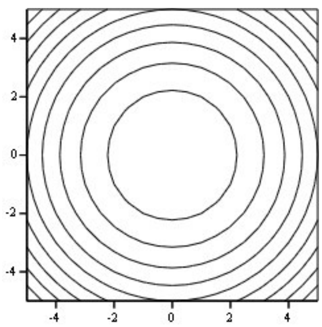
Пример: Построить линии уровня и изображение поверхности $z = x^2 + y^2$

$z = 0$: $x^2 + y^2 = 0$ - точка $(0,0)$

$z = 1$: $x^2 + y^2 = 1$ - окружность

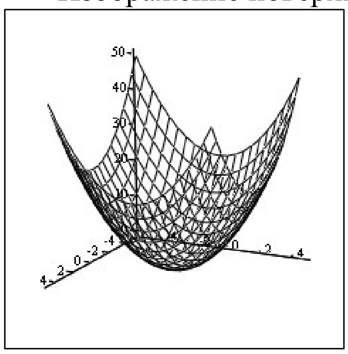
$z = 4$: $x^2 + y^2 = 4$ и т. д.

Линии уровня



z

Изображение поверхности



z

2. Частные производные.

Если переменной x дать некоторое приращение Δx, y оставить постоянной, то функция $z = f(x, y)$ получит приращение $\Delta_x z$, называемое *частным приращением функции z по переменной x.*

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Аналогично, если переменная y получает приращение Δy, а x остается постоянной, то *частным приращением функции z по переменной y:*

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

ОПР: Если существуют пределы

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = f'_x(x, y)$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = f'_y(x, y),$$

то они называются *частными производными функции* $z = f(x, y)$ по переменным x и y соответственно.

Аналогично определяются частные производные функций любого числа независимых переменных.

Т.к. частная производная по любой переменной является производной по этой переменной, найденной при условии, что остальные переменные – постоянны, то все правила и формулы дифференцирования одной переменной применимы для нахождения частных производных функций любого числа переменных.

Пример: Найти частные производные функции $z = arctg \dfrac{y}{x}$.

Пример: Найти частные производные функции $u = \ln^2(x^2 + y^2 + z^2)$.

3. Экстремум функции нескольких переменных.

Пусть задана некоторая функция z=f(x, y).

Определение 1. Точка M_0 (x_0; y_0) называется точкой максимума функции z=f(x, y), если можно указать такую окрестность с центром в точке M_0 (x_0; y_0), что для любой точки (x, y) из этой окрестности будет выполняться неравенство $f(x_0, y_0) > f(x, y)$.

Определение 2. Точка M_0 (x_0; y_0) называется точкой минимума функции z=f(x,y), если можно указать такую окрестность с центром в точке M_0 (x_0; y_0), что для любой точки (x, y) из этой окрестности будет выполняться неравенство $f(x, y) > f(x_0, y_0)$.

Определение 3. Точки максимума и минимума функции z=f(x, y) называются точками экстремума, а значение функции в этих точках называются экстремальными.

Рассмотрим необходимый признак существования экстремума функции двух переменных:

Теорема: Если функция z=f(x, y) в данной точке (x_0, y_0) имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю, т.е.

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=0 \quad и \quad \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=0$$

Заметим, что экстремум функции z = f(x ,y) может наблюдаться как в стационарных точках так и в точках, где не существуют частные производные. Такие точки называются *критическими.*

Рассмотрим достаточное условие (признак) существования экстремума функции двух переменных.

Теорема: Пусть в некоторой области, содержащей критическую точку (x_0, y_0) функции z=f(x, y), z = f(x ,y) - непрерывна и имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно. Тогда в точке (x_0, y_0)

1) функция f(x, y) имеет максимум, если
$$f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot f''_{yy}(x_0,y_0)-\left[f''_{xy}(x_0,y_0)\right]^2\succ 0 \quad и \quad f''_{xx}(x_0,y_0)\prec 0;$$
2) функция f(x, y) имеет минимум, если
$$f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot f''_{yy}(x_0,y_0)-\left[f''_{xy}(x_0,y_0)\right]^2\succ 0 \quad и \quad f''_{xx}(x_0,y_0)\succ 0;$$
3) функция f(x, y) в точке (x_0, y_0) не имеет ни максимум ни минимум, если
$$f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot f''_{yy}(x_0,y_0)-\left[f''_{xy}(x_0,y_0)\right]^2\prec 0;$$
4) если $f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot f''_{yy}(x_0,y_0)-\left[f''_{xy}(x_0,y_0)\right]^2=0,$ то нельзя сказать, есть или нет в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремум. Нужны специальные более тонкие методы исследования.

1.9 Лекция № 9 (2 часа)
Тема: «Дифференциальные уравнения. Числовые ряды. Степенные ряды»

1.9.1. Вопросы лекции:

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения *n* -го порядка, основные понятия.
2. Дифференциальные уравнения первого порядка, нормальная форма.
3. Уравнения с разделяющимися переменными.
4. Однородные уравнения.
5. Линейные уравнения. Уравнения Бернулли.
6. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимый признак сходимости.
7. Числовые ряды с положительными членами: критерий сходимости.
8. Достаточные признаки сходимости: первый и второй признаки сравнения, признак Даламбера и Коши в предельной форме, интегральный признак Коши.
9. Степенные ряды. Теорема Абеля.
10. Область, интервал и радиус сходимости степенного ряда.

1.9.2. **Краткое содержание вопросов**

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения *n* -го порядка, основные понятия.

Раньше мы встречались с такими зависимостями:

Дано: $v(x)=t^2+5t-3$

Найти: закон движения S(t)

$S'(t) = v(t) = t^2 + 5t - 3 \Rightarrow \quad \frac{dS}{dt} = t^2 + 5t - 3$ - находим S интегрированием.

Т е мы получаем уравнение, содержащее производную, а производная есть отношение дифференциалов. Такое уравнение называется *дифференциальным.* Решением таких уравнений является искомая функция.

ОПР: *Дифференциальным уравнением* называется равенство, выражающее зависимость между аргументом, искомой функцией и её производными.

$$F(x; y; y'; y''; ...; y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

Запишем это уравнение в виде: $\quad y^{(n)} = F_1(x; y; y'; y''; ...; y^{(n-1)}) \quad (2)$

ОПР: *Порядком* ДУ называется наивысший порядок входящей в него производной.

Уравнения (1) и (2) называются *ДУ n-го порядка.*

2. Дифференциальные уравнения первого порядка, нормальная форма.

Рассмотрим ДУ I порядка:

$F(x; y; y') = 0 \quad или \quad y' = f(x; y)$

ОПР: *Решением ДУ* называется функция, обращающая его в верное равенство, т е в тождество.

Пример: Проверить является ли функция $y = e^{-x}$ решением ДУ $y'' + 2y' + y = 0$

$y' = -e^{-x} \qquad y'' = e^{x}$

$e^{-x} - 2e^{-x} + e^{-x} = 0$

$0 \equiv 0 \Rightarrow \quad y = e^{-x} - решение\ ДУ$

Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = f(x)$

$\frac{dy}{dx} = f(x) \Rightarrow dy = f(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int dy = \int f(x)dx \Rightarrow \quad y = \int f(x)dx + C$ - *общее решение* дифференциального

уравнения представляет собой множество функций.

ОПР: *Общим решением ДУ* n-го порядка называется функция, зависящая от аргумента и n произвольных постоянных. $\quad y = \varphi(x; C_1; C_2 : ... : C_n) \quad (3)$

ОПР: *Частным решением ДУ* называется решение, полученное из общего при определенных значениях постоянных

3. Уравнения с разделяющимися переменными.

$\boxed{M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0}$ (4) –уравнение с разделяющимися переменными.

Разделим переменные, т е приведем уравнение к такому виду, чтобы в левой части равенства были функции, зависящие только от y, а в правой- только от x.

$M_2(y)N_2(y)dy = -M_1(x)N_1(y)dx \quad |: M_2(x)N_1(y) \neq 0$

$$\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = -\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx - уравнение\ с\ разделенными\ переменными$$

Проинтегрируем обе части равенства

$$\int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = -\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx$$

Решив интегралы, найдем решение ДУ

Пример: Решить ДУ 1-го порядка

$(xy - x)y' - (xy + 2y) = 0 - ДУ\ 1\ пор.$

$(xy - x)\frac{dy}{dx} - (xy + 2y) = 0 \quad |\cdot dx$

$\underbrace{x}_{M_2(x)}\underbrace{(y-1)}_{N_2(y)}dy - \underbrace{y}_{N_1(y)}\underbrace{(x+2)}_{M_1(x)}dx = 0 - ДУ\ с\ \ разделяющимися\ переменными\ |:xy$

$$\int \frac{y-1}{y}dy = \int \frac{x+2}{x}dx$$

$y = x + \ln|x^2 y| + C - общее\ решение$

Решим задачу Коши при начальном условии $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{cases}$

1=1+ln1+C

C=0 $\Rightarrow y = x + \ln\left|x^2 y\right|$ - частное решение, удовлетворяющее начальным условиям.

4. Однородные уравнения.

<u>ОПР:</u> ДУ $y' = f(x;y)$ называется <u>*однородным ДУ 1 порядка ,*</u> если функция $f(x;y)$ удовлетворяет

условию: $\boxed{f(tx;ty) = f(x;y)}$ (5) , где t-произвольный параметр.

Рассмотрим однородное ДУ $y' = f(x;y)$

Обозначим $\boxed{z = \frac{y}{x}}$ $\Rightarrow y = xz$, z-функция от x

$$y' = z'x + zx' = z'x + z$$

Подставим в исходное уравнение:

$z'x + z = f(x;zx)$
- можно свести к уравнению с разделяющимися переменными.

$z'x = f(x;zx) - z$

<u>Пример:</u> Решить ДУ 1-го порядка

$$xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx \quad \Big|: dx$$

$$(*)\ y' = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} - однородное\ ДУ, тк$$

$$f(tx;ty) = \frac{ty + \sqrt{(tx)^2 + (ty)^2}}{tx} = f(x;y)$$

$$обозначим: z = \frac{y}{x} \quad y = zx \quad y' = z'x + z \quad подставим\ в\ (*)$$

$$z'x = \sqrt{1 + z^2}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln\left|z + \sqrt{1 + z^2}\right| = \ln|x| + \ln|C|$$

$$z + \sqrt{1 + z^2} = Cx$$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = Cx$$

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2 - общий\ интеграл$$

Выбираем в какой части равенства записываем const и в какой форме. Если нет других функций, кроме ln, то записываем const в виде ln/C/.

Дополнительно: Решить задачу Коши с начальными условиями $x_0=1$ и $y_0=3$

C=3+$\sqrt{10}$

$y + \sqrt{x^2 + y^2} = (3 + \sqrt{10})x^2$ - частное решение.

5. Линейные уравнения. Уравнения Бернулли.

<u>ОПР:</u> <u>*Линейным ДУ 1 порядка*</u> называется уравнение вида $\boxed{y' + p(x)y = q(x)}$ (6) , где $p(x)\ и\ q(x)$ - некоторые функции от x.

Одним из методов решения таких уравнений является <u>*метод Бернулли.*</u>

Решение ДУ ищут в виде $y = u(x) \cdot v(x),$ ãäå $u(x)\ и\ v(x)$ -неизвестные функции от x.

$y = uv$

$y' = u'v + uv'$

подставим в (6)

$u'v + \underline{\underline{uv'}} + \underline{\underline{p(x)uv}} = q(x)$ вынесем u за скобку

$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$

Подберём v(x) так, чтобы $v' + p(x)v = 0$, получим систему

$\begin{cases} v' + p(x)v = 0 \\ u'v = q(x) \end{cases}$ -это уравнения с разделяющимися переменными

Из первого уравнения найдём v(x), подставим его во второе уравнение и найдём u(x). Т.о. найдём $y = u(x)\cdot v(x)$ - общее решение ДУ.

Пример: $xy' - 5y - (x+1) = 0$ Разделить переменные нельзя. Это не однородное ДУ Приведём к линейному ДУ:

$xy' - 5y = x+1 \quad |: x$

$y' - \frac{5}{x}y = \frac{x+1}{x}$

$y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$

$u'v + uv' - \frac{5}{x}uv = \frac{x+1}{x}$

$u'v + u(v' - \frac{5}{x}v) = \frac{x+1}{x}$

$$\begin{cases} v' - \frac{5}{x}v = 0 \\ u'v = \frac{x+1}{x} \end{cases} \Rightarrow v = x^5, u = -\frac{1}{4x^4} - \frac{1}{5x^5} + C$$

$y = uv \Rightarrow y = -\frac{x}{4} - \frac{1}{5} + Cx^5 - \textit{общее решение ДУ}$

При решении методом Бернулли, промежуточное значение const берём =0

6. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимый признак сходимости.

Пусть задана последовательность действительных чисел (a_n): $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

Опр; Символ $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ называется *числовым рядом* , а числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ его *членами,* a_n $(n \in N)$ называется *.общим членом.*

Обозначим: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots (1)$

Опр: Суммы $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, ... $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ .... называются *частичными суммами* ряда (1).

Опр: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *сходящимся,* если последовательность его частичных сумм сходится к какому-нибудь числу S (т е $\exists$ конечный предел $\lim_{n\to\infty} S_n = S$), при этом S- *сумма ряда.*

В этом случае $S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ или S=$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\boxed{S = \lim_{n\to\infty} S_n}$ -сумма ряда

Опр: Если не существует $\lim_{n\to\infty} S_n$ или $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$, то ряд (1) называется *расходящимся.*

Пример: Выяснить, сходится ли данный ряд, если сходится, найти его сумму. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$

$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$

$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \quad \Rightarrow \textit{ряд сходится и его сумма } S = 1$

ТЕОРЕМА (*Необходимое условие сходимости ряда):* Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его общий член стремится к 0 (т е $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$)

Замечание: Обратная теорема не верна.

СЛЕДСТВИЕ: Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Пример: Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{3n+2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n}{3n+2} = \frac{4}{3} \neq 0 \Rightarrow$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{3n+2}$ *расходится*

7. Числовые ряды с положительными членами: критерий сходимости.

1) Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится (расходится), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Ca_n$, где $\tilde{N} \in R$ тоже сходится (расходится). Обратное верно при $C \neq 0$

2) Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, который называется суммой данных рядов, тоже сходится.

Гармонический ряд.

Это ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, *где* $p \in R$

1) если p>1, то ряд сходится.

2) если p$\leq$ 1, то ряд расходится.

В частности, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - расходится.

ОПР: Ряд, все члены которого положительны, называется *знакоположительным.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0 \quad (n \in N) \qquad (2)$$

8. Достаточные признаки сходимости: первый и второй признаки сравнения, признак Даламбера и Коши в предельной форме, интегральный признак Коши.

1) ТЕОРЕМА (*Признак сравнения*): Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0$ (A) и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n, b_n > 0$ (B), $(n \in N)$.и выполняется неравенство $a_n \leq b_n, \forall n \in N$,

тогда из сходимости ряда (B)$\Rightarrow$ сходимость ряда (A),
а из расходимости ряда (A) $\Rightarrow$ расходимость ряда (B).

ТЕОРЕМА (*Предельный признак сравнения):* Пусть даны два знакоположительных ряда (A) и (B). Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, где $k > 0$, то оба знакоположительных ряда (A) и (B) в плане сходимости ведут себя одинаково (т. е. либо оба сходятся, либо оба расходятся).

Пример: Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ (A)

Сравним с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (B)-ряд сходится, т к p=2>1

$K = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n \cdot n^2}{n^3+1} = 1, K > 0 \Rightarrow$ ряды (A) и (B) в плане сходимости ведут себя одинаково, $\Rightarrow$ ряд (A) -сходятся.

2) ТЕОРЕМА (*Признак Даламбера)*: Пусть дан знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0$ (2). Если начиная с некоторого значения n члены ряда (2) удовлетворяют неравенству $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$, то ряд (2) сходится, а если начиная с некоторого значения n выполняется неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то ряд (2) расходится

ТЕОРЕМА (*Предельная форма признака Даламбера):* Пусть дан знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0$ Если $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$, то $\begin{cases} \text{если } D<1 - \text{ряд сходится} \\ \text{если } D>1\ (D=\infty) - \text{ряд расходится} \\ D=1 - \text{вопрос о сходимости ряда не решён, признак не подходит.} \end{cases}$

Пример: Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n^2}$

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}; \quad a_n = \frac{9^n}{n^2}; \quad a_{n+1} = \frac{9^{n+1}}{(n+1)^2} = \frac{9\cdot 9^n}{(n+1)^2}$$

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{9\cdot 9^n \cdot n^2}{(n+1)^2 \cdot 9^n} = 9 > 1 \Rightarrow \text{ряд расходится.}$$

3) ТЕОРЕМА (*Признак Коши*): Пусть дан знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0$ (2). Если начиная с некоторого значения n выполняется неравенство $\sqrt[n]{a_n} \le 1$, то ряд (2) сходится, а если $\sqrt[n]{a_n} > 1$, то ряд (2) расходится

ТЕОРЕМА 2 (*Предельная форма признака Коши):* Если $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = K$, то

$$\begin{cases} \text{если } K<1 - \text{ряд сходится} \\ \text{если } K>1\ (D=\infty) - \text{ряд расходится} \\ K=1 - \text{вопрос о сходимости ряда не решён, признак не подходит.} \end{cases}$$

Примеры: Исследовать на сходимость ряды

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

$$4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24; \quad n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n; \quad (2n)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2n$$

$$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}; \quad a_{n+1} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}$$

Применим предельный признак Даламбера:

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\cdot(n+1)!\cdot(2n)!}{(2n+2)!\cdot n!\, n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} = \frac{1}{4}, \quad D = \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится.}$$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$

Применим предельный признак Коши:

$$K = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n}} = \frac{2}{1} = 2, \quad K = 2 > 1 \Rightarrow \text{ряд расходится}$$

9. Степенные ряды. Теорема Абеля.

ОПР: Ряд вида $a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$, где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, x_0 \in R$ -заданные действительные числа, х-переменная, называется *степенным рядом.*

Обозначение $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ (4)

ТЕОРЕМА (*Признак Даламбера для рядов с произвольными членами):* Если $\exists \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = D$, то

$$\begin{cases} \text{если } D<1 \Rightarrow \text{ряд сходится абсолютно} \\ \text{если } D>1 \Rightarrow \text{ряд расходится} \\ \text{если } D=1 \Rightarrow \text{вопрос о сходимости ряда не решен} \end{cases}$$

Найем интервал и радиус сходимости степенного ряда, воспользовавшись признаком Даламбера

$$D = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a^n(x-x_0)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)}{a_n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}(x-x_0)\right|$$

Пусть D<1, то степенной ряд абсолютно сходится.

Теоремы Абеля. (Нильс Хенрик Абель (1802 – 1829) – норвежский математик)

Теорема. *Если степенной ряд* $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *сходится при* $x = x_1$, *то он сходится и притом абсолютно для всех* $|x| > |x_1|$.

$$\Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}(x - x_0)\right| < 1 \quad \Rightarrow |x - x_0| < \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x - x_0 < \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \Rightarrow x < \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| + x_0 \\ x - x_0 > -\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \Rightarrow x > x_0 - \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \end{array}\right. . \quad \text{Т е} \quad \begin{array}{l} x_0 - \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| < x < x_0 + \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \\ \text{обозн.}\ c_1 < x < c_2 \end{array}$$

Значит, на интервале $(c_1; c_2)$ ряд абсолютно сходится.

10. Область, интервал и радиус сходимости степенного ряда.

$R = \left|\frac{c_1 - c_2}{2}\right|$-*радиус сходимости ряда.*

Также нужно выяснить вопрос о сходимости ряда на концах интервала, т е при x= c_1 и x=c_2. Таким образом, получим *область сходимости.*

Пример: Найти область и радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+2} \cdot x^n$

$u_n = \frac{3^n}{n+2} x^n; \quad a_n = \frac{3^n}{n+2}; \quad x_0 = 0$

$D = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3x(n+2)}{n+3}\right| = |3x|$

Ряд абсолютно сходится, если D<1, т е $|3x| < 1$, $|x| < \frac{1}{3}$

$x \in (-\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ -**интервал сходимости ряда.**

R=1\3-**радиус сходимости**.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости:

1) $x = \frac{1}{3} \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+2} \cdot \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$

Сравним с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – гармонический ряд, расходится

Применим предельный признак сравнения $K = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1 > 0 \Rightarrow$ оба ряда в плане сходимости ведут себя одинаково $\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ - расходится. $\Rightarrow$ $x = -\frac{1}{3}$ не входит в область сходимости ряда.

2) $x = -\frac{1}{3} \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+2} (-\frac{1}{3})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$

$D = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{-n-2}{n+3}\right| = 1 \Rightarrow$ признак Даламбера не подходит

Рассмотрим признак Лейбница:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ |u_n|\ \text{строго убывает} \\ 2)\ \lim_{n\to\infty}|u_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2} \text{ сходится, причем условно, т к.}$$

Рассмотрим ряд, составленный из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ -расходится

$x \in [\ -\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ - **область сходимости ряда**

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

.1 Практическое занятие №1 (2 часа).
Тема: «Матрицы»

2.1.1 Задание для работы:

1. Входной контроль.
2. Виды матриц.
3. Действия над матрицами.

2.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Провести входной контроль.

Примерный вариант входного контроля

1. Вычислить: $2\frac{3}{4}:\left(1\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right)\cdot 1\frac{17}{19}$.
2. Найти a, если $\frac{a}{600}=\frac{1{,}25+\frac{1}{4}}{0{,}4\cdot 4{,}5}$
3. Из равенства $(x-a)(y-b)=x$ выразить x.
4. Решить неравенство: $x^2(1+3x)\le 0$.
5. Преобразовать: $\left(-\frac{2}{3}a^4b^3c^2\right)^3:\left(-\frac{1}{3}a^2bc^3\right)^2$.
6. Вычислить: $\frac{-2^4\cdot 2^{-2}-5^5\cdot(25^{-1})^2+12^0}{2^{-1}}$
7. Определить знак $\cos(\lg 600)$.
8. Построить график $y=-ctgx$.

2. Виды матриц.

Привести примеры основных видов матриц (устно). Провести устный опрос теоретического материала.

3. Действия над матрицами.

1. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 3 & 5 & -2\\ 6 & -1 & -4\end{pmatrix}$. Записать:

а) сумму элементов, стоящих на главной диагонали;
б) произведение элементов, стоящих на побочной диагонали;
в) элементы a_{13}, a_{21}, a_{32};
г) транспонированную матрицу.

2. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 9 & 4\end{pmatrix}$. Найти:

а) $A+B$; б) $B-A$; в) $-3B$; г) $A\cdot B$; д) $B\cdot A$; е) A^2.

3. Даны две матрицы $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -6\\ 2 & 4 & 3\\ -3 & 1 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & 8 & -5\\ -3 & -1 & 0\\ 4 & 5 & -3\end{pmatrix}$.

Найти: $A+B$; $A-B$; $3A-2B$; $A\cdot B$; $B\cdot A$; A^2-B^2; $(A-B)(A+B)$.

4. Даны две матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Найти $B \cdot A$.

5. Даны две матрицы $A=\begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$. Найти произведение $A \cdot B$ и $B \cdot A$.

6. Проверить равенство: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$; если:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.1.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Матрицы», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Матрицы», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

2.2 Практическое занятие №2 (2 часа).
Тема: «Определитель матрицы»

2.2.1 Задание для работы:

1. Определители второго порядка.
2. Способы вычисления определителя третьего порядка.
3. Миноры, алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.

2.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Определители второго порядка.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Вычислить определитель:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & -8 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} e^x & e^{3x} \\ e^x & 3e^{3x} \end{vmatrix}$.

2. Найти α, если: а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & \alpha \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} -4 & \alpha \\ 10 & -1 \end{vmatrix} = 24$.

2. Способы вычисления определителя третьего порядка.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Вычислить определители по правилу треугольника и приписыванием столбцов:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \\ 8 & 7 & 0 \end{vmatrix}$.

2. Найти *x*, если: а) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1$.

3. Вычислить: а) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 1 & -7 & 0 & 6 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 9 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

3. Миноры, алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Для определителя $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 6 & 5 & 12 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ найти: а) миноры M_{23}, M_{11}, M_{31}; б) алгебраические дополнения A_{12}; A_{13}; A_{32}; в) значение определителя.

2. Вычислить определители по правилу треугольника, приписыванием столбцов и по теореме Лапласа: а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \\ 8 & 7 & 0 \end{vmatrix}$.

2.2.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Определитель матрицы», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Определитель матрицы», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

2.3 Практическое занятие №3 (2 часа).
Тема: «Системы линейных алгебраических уравнений»

2.3.1 Задание для работы:

1. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.
2. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Крамера.

2.3.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

Провести устный опрос теоретического материала.

Вопросы для самопроверки

1 Какая система линейных уравнений называется определенной?
2 Какая система линейных уравнений называется несовместной?
3 Какая система линейных уравнений называется неопределенной?
4 Что называется решением системы линейных уравнений?
5 Какая система линейных уравнений называется однородной?
6 Какая система линейных уравнений называется неоднородной?
7 Сколько решений имеет неопределенная система линейных уравнений?
8 Решить СЛУ методом Гаусса: а) $\begin{cases} 3x-2y+4z=21 \\ 3x+4y-2z=9 \\ 2x-y-z=10 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x+2y-6z+3t=6 \\ 8x+4y-13z+t=24 \\ 2x+y-3z+t=5 \\ 12x+6y-19z+t=36 \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x-7y-2z=0 \\ 2x-3y-4z=6 \\ 2x-4y+2z=2 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-y+2z=3 \\ 3x-y+3z=13 \\ -5x+y-4z=-23 \end{cases}$ д) $\begin{cases} -6x+10y-2z+t=-7 \\ 24x-43y+5z-7t=13 \\ -8x+15y-z+3t=-1 \\ 4x-7y+z-t=3 \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x+y+z+t+p=7 \\ x+2y+z+t+p=9 \\ x+y+2z+t+p=8 \\ x+y+z+2t+p=5 \\ x+y+z+t+2p=7 \end{cases}$

2. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Крамера.

1. Решить СЛУ методом Крамера: а) $\begin{cases} 4x+y-3z=9 \\ x+y-z=-2 \\ 8x+3y-6z=12 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+3y+z=12 \\ 2x+y+3z=16 \\ 3x+2y+z=8 \end{cases}$

2. Имеются три банка, каждый из которых начисляет вкладчику определенный годовой % (свой для каждого банка). Вкладчик имеет сумму размером 6000 ден. ед. В начале года $1/3$ вклада он положил в 1 банк, $1/2$ - вклада во 2 банк и оставшуюся – в банк 3 и к концу года сумма этих вкладов возросла до 7250 ден. ед. Если бы первоначально $1/6$ вклада он положил в банк 1, $2/3$ - в банк 2 и $1/6$ вклада - в банк 3, то к концу года сумма вклада составила бы 7200 ден. ед. Если бы $1/2$ вклада он положил в банк 1, $1/6$ - в банк 2 и $1/3$ вклада – в банк 3, то сумма вкладов в конце года составила бы вновь 7250 ден. ед. Какой % выплачивает каждый банк?

2.3.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Системы линейных алгебраических уравнений», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Системы линейных алгебраических уравнений», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала и навыки применения современного математического инструментария для решения экономических задач.

2.4 Практическое занятие №4 (2 часа).
Тема: «Числовые функции. Предел функции»

2.4.1 Задание для работы:

1. Числовые функции. Способы задания функций. Область определения и множество значений функции. График функции.
2. Характеристики функций: четность и нечетность, периодичность, монотонность, ограниченность.
3. Сложная и обратная функции.
4. Различные типы пределов.
5. Формула непрерывных процентов.

2.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Числовые функции. Способы задания функций. Область определения и множество значений функции. График функции.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Найти область определения следующих функций:

а) $y=\sqrt{6-x}+\dfrac{1}{x+5}$; б) $y=\sqrt[7]{3-x^2}$; в) $y=\log_5(4-x^2)$; г) $y=\dfrac{\sqrt{9-x}}{\ln(4+x)}$.

2. Найдите $E(y)$: а) $y=4\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\sin(\pi+x)$; б) $y=x^2-6x+5$.

3. Для функции $f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ \dfrac{x^2}{49} & при \quad 0<x\le 7\\ 1 & при \quad x>7\end{cases}$ найти $f(-2), f(0), f(5), f(8)$. Построить график функции.

2. Характеристики функций: четность и нечетность, периодичность, монотонность, ограниченность.

Провести устный опрос теоретического материала.

Исследовать функцию на четность (нечетность), периодичность, монотонность, ограниченность:

а) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$; б) $f(x)=x^5\cdot\cos x$; в) $f(x)=\sqrt{6x-x^2}$; г) $f(x)=\lg\dfrac{x+2}{x-2}$.

д) $y=x^3\sin x$ е) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ ж) $y=x\dfrac{2^x+1}{2^x-1}$

3. Сложная и обратная функции.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Найти функцию обратную для $y=3x+2$, $y=2^x$.
2. Построить графики функций и указать их свойства:

а) $y=3\sqrt{x}$; б) $y=|x+2|$; в) $y=\sin 0{,}5x$.

4. Различные типы пределов.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Найти предел функции: а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-5x+8}{x+x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{1-\cos x}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{7}{2x-6}$.

2. Найти: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+6x}{5x^3-12x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{7-x^2-6x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-49}{\sqrt{9+x}-4}$.

3.Вычислить: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+3x-9}{7x^2+x-11}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+3x-9}{7x^2+x^5-11}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+3x-9}{7x^2+x-11}$.

4. Найти значение: 1) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{12}{x^3-8}-\dfrac{1}{x-2}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$.

5. Формула непрерывных процентов.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Кредит в размере на 100 тыс. долларов получен сроком на 3 года под 8% годовых. Определить сумму подлежащего возврату в конце срока кредита, если проценты будут начисляться:

а) один раз в год; б) ежедневно; в) непрерывно.

2. Сила роста банковского вклада $\delta=0,03$. Найти сумму на счете через 2 года, если первоначальная сумма вклада составляет 9000 руб.

2.4.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Числовые функции. Предел функции», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Числовые функции. Предел функции» и применять математические методы для решения экономических задач, сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала и навыки применения современного математического инструментария для решения экономических задач

2.5 Практическое занятие №5 (2 часа).
Тема: «Производная функции»

2.5.1 Задание для работы:

1. Производная функции. Дифференцируемость и дифференциал функции.
2. Непрерывность дифференцируемой функции.
3. Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного двух функций, сложной и обратной функций.
4. Предельные величины в экономике.
5. Эластичность функции, ее свойства и геометрический смысл.
6. Задача о распределении налогового бремени.

2.5.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Производная функции. Дифференцируемость и дифференциал функции.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Что можно сказать о дифференцируемости суммы $f(x)+g(x)$ в точке $x=x_0$, если в этой точке:

а) функция $f(x)$ дифференцируема, а функция $g(x)$ недифференцируема;

б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ недифференцируемы.

2. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f(x_0)\neq 0$, а функция $g(x)$ недифференцируема в этой точке. Доказать, что произведение $f(x)g(x)$ является недифференцируемым в точке x_0

2. Непрерывность дифференцируемой функции.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Выразить дифференциал d^3y от сложной функции $y=y(u(x))$ через производные от функции $y(u)$ и дифференциалы от функции $u(x)$.

2. Пусть $y(x)$ и $x(y)$ дважды дифференцируемые взаимно обратные функции. Выразить x'' через y' и y''

3. Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного двух функций, сложной и обратной функций.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Найти производную: а) $y=\dfrac{2x-7}{3}$; б) $y=x^4-\dfrac{1}{12x^4}+6\cdot\sqrt[5]{x^2}+\sin 4$; в) $y=\dfrac{5}{x^7}-\sqrt[9]{x^4}+3^x$;

   г) $y=(x^3+2)\cdot\sin x$; д) $y=\dfrac{\ln x}{x-4}$.
2. Найдите $f'(1)+3f(1)$ для функции $f(x)=(3x+4)\cdot\sqrt{x}$.
3. Найдите значение производной функции $f(x)=\dfrac{x^3-64}{x^2+4x+16}$ в точке $x_0=2009$.
4. При каких значениях *x* функция $f(x)=\sqrt{1-2x^2+x}$ не дифференцируема?
5. Продифференцировать функции: а) $y=\sqrt{1-x^2}$; б) $y=3\sin\left(3x+5\right)$; в) $y=\dfrac{x^2-2}{x^2+3}$; г) $y=\cos^2 x$; д) $y=\ln\left(x^4-4x\right)$; е) $y=10^{2x-3}$.
6. Найти производную от функции и упростить полученное выражение: а) $x\cdot\sin x+\cos x-8$; б) $x\cdot\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$; в) $x\cdot arctg\dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{2}\ln(x^2+9)$.
7. Найти производную: а) $\lg\left(5-x^2\right)$; б) $ctg^3\dfrac{x}{3}$; в) $3^{\cos x}$; г) $\cos 3^x$; д) $\log_5 x^2$.

4. Предельные величины в экономике.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Объем продукции u (усл. ед.) цеха в течение рабочего дня представляет функцию $u = -t^3 - 5t^2 + 75t + 425$, где t – время (ч.). Найти производительность труда через 2 ч после начала работы.
2. Зависимость между издержками производства y (ден. ед.) и объемом выпускаемой продукции x (ед.) выражается функцией $y = 10x - 0{,}04x^3$. Определить средние и предельные издержки при объеме продукции, равном 5 ед.

5. Эластичность функции, ее свойства и геометрический смысл.
Провести устный опрос теоретического материала.
Функции спроса q и предложения s от цены p выражаются соответственно уравнениями $q = 7 - p$ и $s = p + 1$. Найти: а) равновесную цену; б) Эластичность спроса и предложения для этой цены; в) изменение дохода (в %) при увеличении цены на 5% от равновесной.

6. Задача о распределении налогового бремени.
Провести устный опрос теоретического материала.
Кривые спроса на магнитофоны и предложения магнитофонов фирмы «Электрик» марки А-2000 имеют линейный вид и заданы формулами: $Q_d = 300 \quad 2 * P, Q_s = 3 * P \quad 200$, где Р измеряется в долларах, Q – в тысячах штук.
Правительство ввело акциз, равный пяти долларам за каждый проданный магнитофон.
а) Определите сумму налога, которую соберёт налоговая служба.
б) Вычислите налоговое бремя покупателей.
в) Вычислите налоговое бремя продавцов.
г) Найдите чистые общественные потери.

2.5.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Производная функции», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Производная функции» и применять математические методы для решения экономических задач, сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала и навыки применения современного математического инструментария для решения экономических задач, а так же методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических явлений и процессов

2.6 Практическое занятие №6 (2 часа).
Тема: «Исследование функций»

2.6.1 Задание для работы:

1. Признак монотонности функции на интервале. Достаточные условия локального экстремума.
2. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.
3. Выпуклые (вогнутые) функции. Достаточные условия выпуклости функции. Необходимый и достаточный признаки точки перегиба.
4. Асимптоты графика функции.
5. Общая схема исследования функции и построения ее графика.

2.6.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Признак монотонности функции на интервале. Достаточные условия локального экстремума.
Провести устный опрос теоретического материала.
Найти промежутки монотонности, точки экстремума функций

1) $y = \dfrac{2x^2}{1+x^2}$ 2) $y = x \cdot e^x$ 3) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

2. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.
Провести устный опрос теоретического материала. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $y = 2x^2 + \ln x$ $\left[1, e^5\right]$

3. Выпуклые (вогнутые) функции. Достаточные условия выпуклости функции. Необходимый и достаточный признаки точки перегиба.
Провести устный опрос теоретического материала.
Найти промежутки выпуклости / вогнутости, точки перегиба функций

1) $y = \dfrac{2x^2}{1+x^2}$ 2) $y = x \cdot e^x$ 3) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

4. Асимптоты графика функции.
Провести устный опрос теоретического материала.
Найти асимптоты графиков функций:

1) $y = \dfrac{3-4x}{2+5x}$

2) $y = \dfrac{3x^5}{16-x^4}$

3) $y = \dfrac{2x^3 \ln x}{x^2+1}$

4) $y = xe^{-x}$

5) $y = \dfrac{2x^2}{x+1}$

6) $y = \sqrt[3]{27x^3 + 5x^2}$

5. Общая схема исследования функции и построения ее графика.
Провести устный опрос теоретического материала.
Выполнить полное исследование функций и построить графики.

1) $y = 2x^2 + \ln x$ 2) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ 3) $y = e^{\sqrt[3]{x^2}}$

2.6.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Исследование функций», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Исследование функций», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

2.7 Практическое занятие №7 (2 часа).
Тема: «Неопределенный и определенный интеграл»

2.7.1 Задание для работы:

1. Первообразная и неопределенный интеграл. Таблица неопределенных интегралов.
2. Свойства неопределенного интеграла.
3. Замена переменной в неопределенном интеграле, интегрирование по частям.
4. Формула Ньютона-Лейбница.
5. Геометрические приложения определенного интеграла.

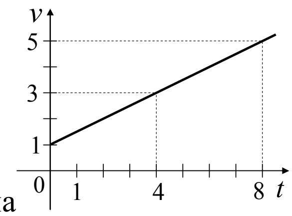
2.7.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Первообразная и неопределенный интеграл. Таблица неопределенных интегралов.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Для функции $f(x) = \cos x$ найти ту первообразную, которая проходит через точку $(0;3)$.

2. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $(-2;8)$, если угловой коэффициент касательной в любой точке касания x равен $2x-4$.



3. На чертеже изображен график скорости тела. Найти по графику уравнение движения, если тело за первые $2\ с$ прошло путь, равный $10\ м$.

2. Свойства неопределенного интеграла.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Найти: $\int 8dx$; $\int \frac{dx}{4}$; $\int dx$; $\int x^{11}dx$; $\int x^{-3}dx$; $\int \frac{1}{z^6}dz$; $\int \sqrt[5]{x}dx$; $\int \frac{1}{4t}dt$; $\int \frac{6}{x\cdot\sqrt[3]{x}}dx$.

2. Вычислить: а) $\int\left(2x-\frac{5}{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$; б) $\int\left(7x^6-\frac{6}{x^7}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$.

3. Замена переменной в неопределенном интеграле, интегрирование по частям.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Вычислить интеграл: а) $\int(5x-1)^7dx$; б) $\int e^{-5x}dx$; в) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^6+1}}$.

2. Преобразовать и вычислить: а) $\int\frac{3tg^2x+4}{\sin^2 x}dx$; б) $\int\frac{2^x+5^x}{10^x}dx$.

3. Вычислить: а) $\int arccrgxdx$; б) $\int(6x+1)\cdot\sin\frac{x}{3}dx$; в) $\int e^x\sin 2xdx$.

4. Вычислить: а) $\int e^{2x}\cos xdx$; б) $\int e^{\sqrt{x}}dx$; в) $\int\frac{xdx}{\cos^2 x}$; г) $\int\frac{\ln x}{\sqrt[5]{x}}dx$.

4. Формула Ньютона-Лейбница.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Вычислить: а) $\int_2^3 3x^2dx$; б) $\int_0^2\frac{dx}{4+x^2}$; в) $\int_1^4(x^2+3)dx$.

2. Вычислить определенные интегралы: а) $\int_{0,5}^{3}\left(\frac{1}{x^5}\right)dx$; б) $\int_{-1}^{2}(2x-4)(3x+2)dx$.

3. Найти: а) $\int_2^{-13}\frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$; б) $\int_0^{T/2}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}-\varphi_0\right)dt$; в) $\int_0^4\sqrt{2x+1}\,dx$

4. Найти: а) $\int\limits_0^1 \frac{3x^2dx}{x^3+1}$; б) $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; в) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$.

5. Геометрические приложения определенного интеграла.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=e^x$, $y=0$, $x=-2$, $x=1$; б) $y=x^2-4$, $y=0$, $x=-3$;

в) $y=-x^2+4x+6$, $y=6-x$; г) $y=\ln x$, $y=\ln^2 x$.

2.7.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Неопределенный и определенный интеграл», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Неопределенный и определенный интеграл», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

2.8 Практическое занятие №8 (2 часа).
Тема: «Функции нескольких переменных»

2.8.1 Задание для работы:

1. Функции нескольких переменных. Поверхности (линии) уровня функции. Элементарные функции нескольких переменных.
2. Экстремум функции нескольких переменных.

2.8.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Функции нескольких переменных. Поверхности (линии) уровня функции. Элементарные функции нескольких переменных.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Составить таблицу значений функции $z = 2x - 3y + 1$, давая независимым переменным значения от 0 до 3 через единицу.

2. Найти значения функции: а) $u = e^{\sin(x+4y+z)}$ при $x = y = \dfrac{\pi}{2}$ и $z = -\pi$; б) $z = y^{x-1} + x^{y}$ в точках $M_1(2;2)$; $M_1(1;2)$; $M_1(2;1)$.

3. Найти области определения функции двух переменных: а) $z = \dfrac{1}{3y - x}$; б) $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$; в) $z = \dfrac{\ln x}{25 - x^2 - y^2}$; г) $z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$; д) $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$.

4. Построить линии уровней и примерное изображение поверхностей для функций двух переменных.

$а) z = \dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16}$ $\qquad$ $б) z = x + y^2$

2. Экстремум функции нескольких переменных.

Провести устный опрос теоретического материала.

Исследовать на экстремум функции:

а) $z = -4 + 6x - x^2 - xy - y^2$;

б) $z = x^2 - xy + y^2 + 8x - 4y + 15$;

в) $z = 2x^2 - 14xy + y^2 + 2x - 9y + 1$.

2.8.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Функции нескольких переменных», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Функции нескольких переменных», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

2.9 Практическое занятие №9 (2 часа).
Тема: «Дифференциальные уравнения»

2.9.1 Задание для работы:

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения n -го порядка, основные понятия.
2. Уравнения с разделяющимися переменными.
3. Однородные уравнения.
4. Линейные уравнения. Уравнения Бернулли.

2.9.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения n -го порядка, основные понятия.

Провести устный опрос теоретического материала.

Определить порядок ДУ: а) $y'' + 2x^2 \cdot y' = y^5$; б) $y''' - 5xy'' = y \cdot y'$.

2. Уравнения с разделяющимися переменными.

Провести устный опрос теоретического материала.

1) Известно, что функция $y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = \dfrac{3}{2+x} \cdot y$ и $y(-3) = 5$. Найти $y(1)$.
2) Скорость распада радия пропорциональна количеству радия в данный момент времени. Вычислить, через сколько лет от 100 г радия останется 65 г, если период полураспада равен 1600 лет.
3) Вода в открытом резервуаре сначала имела температуру $70^0 C$, через 10 минут температура воды стала $65^0 C$, температура окружающей резервуар среды $15^0 C$. Определить температуру воды в резервуаре через 30 минут от начального момента. (Скорость охлаждения воды пропорциональна разности температур воды в резервуаре и в окружающей его среде).

3. Однородные уравнения.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Определить порядок однородности функции $f(x; y) = \dfrac{x^4 - 2y^4}{x^3}$
2. Решить дифференциальные уравнения первого порядка

а) $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$; б) $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{2x^2}$; в) $\left(1 - \dfrac{y}{x^2}\right)dx + \left(y^2 + \dfrac{1}{x}\right)dy = 0$.

3. Решить: а) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$; б) $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$; в) $y' = \dfrac{y - 3x^2}{4y - x}$.

4. Линейные уравнения. Уравнения Бернулли.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Решить дифференциальные уравнения: а) $(1-x)(y' + y) = e^{-x}$; б) $y' - 4xy = x$.

2. Найти частное решение: $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$, $y_0 = 5, x_0 = -2$

3. Решить: а) $xy' + y = 2x^2y^2$, б) $y' + yctgx = y^2 \sin x \cos x$.

4. Решить задачу Коши: а) $xy' - 2y = x^2\sqrt{y}$, $y(1) = 1$; б) $y' - \dfrac{3y}{x} = y^2$, $y_0 = -4, x_0 = 1$.

2.9.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Дифференциальные уравнения», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Дифференциальные уравнения», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

Разработал(а): ___________________________________ В.А.Ротова