ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.Б.05 МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Специальность 38.05.01 Экономическая безопасность

Специализация Экономико-правовое обеспечение экономической безопасности

Форма обучения заочная

1. Конспект лекций

1. 1 Лекция №1 (2 часа)

Тема: «Элементы линейной алгебры и их применение для решения экономических задач»

1.1.1 Вопросы лекции:

1. Определители второго порядка.

2. Способы вычисления определителя третьего порядка.

3. Миноры, алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.

4. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

5. Правило Крамера

1.1.2 Краткое содержание вопросов:

1. Определители второго порядка.

Каждой квадратной матрице *A* соответствует число − **определитель** данной матрицы Δ (*det A*).

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \to \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ −определитель второго порядка.

$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \to \Delta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$ −определитель третьего порядка

Формула для вычисления определителя второго порядка:

$$\text{A}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \bullet a_{22} - a_{12} \bullet a_{21} \qquad (1)$$

Свойства определителей:

1. Определитель не изменяется, если его строки поменять местами с соответствующими столбцами,

2. При перестановки двух строк (или столбцов) определитель изменит знак на противоположный, сохраняя абсолютную величину.

3. Определитель с двумя одинаковыми сроками (столбцами) равен нулю.

4. Общий множитель всех элементов строки или столбца можно вынести за знак определителя; если все элементы какой-то строки или столбца равны 0, то и определитель равен 0.

5. Если к элементам какой-либо строки (или столбца) (определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и тоже число, то определитель не изменится.

2 Способы вычисления определителя третьего порядка.

Рассмотрим теперь матрицу размера (3 x 3), то есть имеющую 3 строки и 3 столбца

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

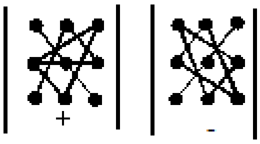
Её определителем (третьего порядка) называют число, обозначаема символом

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

и определяемое равенством

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \qquad (2)$$

Чтобы запомнить, какие произведения в правой части равенства (2) берутся со знаком *«+»,* а какие со знаком *«—»,* полезно использован следующее правило треугольников:



Это правило позволяет легко записать формулу (2) и вычислить данный определитель.

Все свойства определителей второго порядка остаются справедливыми для определителей третьего порядка и доказываются так же непосредственной проверкой.

3. Миноры, алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.

Для вычисления определителей любого порядка широко применяется теорема разложения определителя по элементам строки (столбца). Перед тем как рассмотреть теорему, введем понятия минора и алгебраического дополнения.

Минором M_{ij} некоторого элемента α_{ij} определителя называется определитель, получаемый из данного вычеркиванием 1 строки и] столбца Так минор, соответствующий элементу a_{12} есть определитель:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Он получается, если вычеркнуть первую строку и второй столбец.

Аналогично M_{13} получится вычеркиванием первой строки и третьего столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется минор этого элемента, умноженный на $(—1)^p$, где $p=i+j$.

Например, если элемент a_{12} находится на пересечении первого столбца и второй строки, то для него p=1+2=3 и алгебраическим дополнением является

$$A_{12}=(—1)^3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\,(a_{21} \bullet a_{33} - a_{23} \bullet a_{31})$$

Теорема о разложении определителя (Теорема Лапласа):

Определитель равен сумме произведений элементов любого столбца (строки) на соответствующие им алгебраические дополнения, т. е.

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{is}$$

(разложение по элементам 1-й строки; 1=1;2;..,;n);

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{sj}A_{sj}$$

(разложение по элементам j-го столбца; j=1;2;...;n);

Например, разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки записывается так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \bullet A_{11} + a_{12} \bullet A_{21} + a_{13} + A_{13}$$

Значение теоремы разложения состоит в том, что позволяет свести вычисление определителей n-го порядка к вычислению определителей (n-1)-го порядка.

4. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

Рассмотрим СЛУ
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

Метод Гаусса (метод последовательного исключения переменных) заключается в том, что с помощью элементарных преобразований системы переходим к равносильной СЛУ ступенчатого или треугольного вида, из которой последовательно находят все переменные. К элементарным преобразованиям относят: перестановка уравнений, вычеркивание из системы верного равенства, умножение обеих частей одного уравнения на одно и то же число $\neq 0$ и прибавление к соответствующим обеим частям другого уравнения.

Используя метод Гаусса и элементарные преобразования, мы работаем с коэффициентами при неизвестных и свободными членами. Поэтому удобно выписывать расширенную матрицу, соответствующую данной СЛУ и приводить эту матрицу к ступенчатому виду. Использую найденную матрицу записать систему ступенчатого вида, решив которую, найдем решение СЛУ.

Пример: Решить СЛУ методом Гаусса $\begin{cases} x+2y+5z=-9 \\ x-y+3z=2 \\ 3x-6y-z=25 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -2 & 25 \end{array}\right)\begin{array}{cc} (-1) & (-3) \\ \hookleftarrow & \\ & \hookleftarrow \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ (-4) \\ \hookleftarrow \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x+2y+5z=-9 \\ -3y-2z=11 \\ -8z=8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \\ z=-1 \end{cases}$$

Ответ: (2;-3;-1)

Достоинством метода Гаусса по сравнению с другими в том, что он позволяет однозначно установить совместна система или нет, а в случае совместности, найти её решение (единственное или бесконечное множество).

5. Правило Крамера.

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & |\times a_{21} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & |\times a_{11} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}a_{21}x_1+a_{12}a_{21}x_2=b_1a_{21} \\ a_{11}a_{21}x_1+a_{11}a_{22}x_2=b_2a_{11} \end{cases}(-) \qquad (a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22})x_2=b_1a_{21}-b_2a_{11}$$

$$x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & |\times a_{22} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & |\times a_{12} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}a_{22}x_1+a_{12}a_{22}x_2=b_1a_{22} \\ a_{12}a_{21}x_1+a_{12}a_{22}x_2=b_2a_{12} \end{cases}(-) \qquad (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

$$x_1=\frac{a_{22}b_1-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

Заметим: $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ - главный определитель СЛУ $(\Delta\neq 0)$

$\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{21} \end{vmatrix}=b_1a_{21}-a_{12}b_2$ и $\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}$ - вспомогательные определители СЛУ

$$\boxed{\begin{cases} x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta} \\ x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta} \end{cases}}$$ - *формулы Крамера*

ТЕОРЕМА КРАМЕРА: Система n линейных уравнений с n неизвестными, определитель которой $\Delta\neq 0$ имеет решение и при этом единственное, определяемое по формулам $\boxed{x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}}$ (*) , где Δ_j $(j = 1...n)$-определитель, получаемый из определителя системы Δ заменой j-го столбца столбцом свободных членов.

Замечание: 1) Если $\Delta \neq 0$, то система (1) имеет единственное решение, которое определяется по формулам (*).

2) Если $\Delta = 0$ и хотя бы один из вспомогательных определителей $\Delta_j \neq 0$, то система (1) не имеет решений.

3) Если $\Delta = 0$ и $\Delta_j = 0$, то система либо имеет множество решений, либо не имеет решений. Нужны дополнительные исследования.

Пример: Решить СЛУ по формулам Крамера $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 14$$ $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ система имеет единственное решение

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -14 \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 14$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} \\ z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Ответ: (-1;0;1)

1.2. Лекция № 2 (2 часа)
Тема: «Функция одной и нескольких переменных»

1.2.1. Вопросы лекции:

1. Числовые функции. Способы задания функций.
2. Область определения и множество значений функции. График функции.
3. Признак монотонности функции на интервале. Достаточные условия локального экстремума.
4. Выпуклые (вогнутые) функции. Достаточные условия выпуклости функции. Необходимый и достаточный признаки точки перегиба.
5. Асимптоты графика функции.
6. Общая схема исследования функции и построения ее графика.

1.2.2.. Краткое содержание вопросов

1. Числовые функции. Способы задания функций.

ОПР: Пусть X и У – некоторые множества. *Функцией* называется зависимость, по которой каждому $x \in X$ ставится в соответствие единственное значение $y \in Y$.

Обозначение: $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = F(x)$ и т.д.

у – значение функции в точке х.

у – зависимая переменная, х – независимая переменная (аргумент).

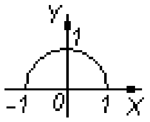
Х – область определения функции, У –область значений функции

Существует три основных способа задания функции:

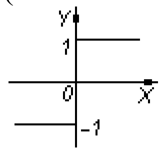
1) Табличный способ. В таблице по крайней мере одну из переменных принимают за независимую, другие величины являются функциями этого аргумента. Широко

используется в бухгалтерской отчетности и банковской деятельности, статистических данных и т.д.
2) <u>Аналитический способ.</u> Состоит в задании связи между аргументом и функцией в виде формулы или набора формул.

<u>Пример:</u> 1) $y = \sqrt{1 - x^2}$. $[-1;1]$ - область определения функции, $[0;1]$ - область значений.



2) $y = \begin{cases} -1, если\ x < 0, \\ 0, если\ x = 0, \\ 1, если\ x > 0. \end{cases}$. $(-\infty;+\infty)$ - область определения функции, -1,0,1 - область значений (состоит из трех чисел).



3) <u>Графический способ.</u> На плоскости функция изображается в виде *<u>графика</u>* – множество точек $(x; y)$, координаты которых связаны соотношением $y = f(x)$, называемым уравнением графика.

2. Область определения и множество значений функции. График функции.

<u>ОПР:</u> Множество значений x, при которых функция существует, называется *<u>областью определения</u>* функции.

Область определения находится по соблюдению законности выполнения математических операций, входящих в формулу $f(x)$. Именно: подкоренное выражение в корне четной степени не отрицательно, знаменатель дроби не равен 0, выражение под знаком логарифма – положительно и т.д.

<u>Пример:</u> 1) $y = \log_2(x^2 - 5x + 6)$

ОДЗ: $x^2 - 5x + 6 > 0$. Корни: x=2 и x=3

$x \in (-\infty;2) \cup (3;+\infty)$

2) $y = \arcsin\frac{1}{x+2}$ ОДЗ: $-1 \le \frac{1}{x+2} \le 1$ и $x \ne -2$ Ответ: $x \in (-\infty;-3] \cup [-1;+\infty)$

<u>ОПР:</u> Функция, все значения которой равны между собой, называется *<u>постоянной</u>* (обозначается: $f(x) = C$).

<u>ОПР:</u> Функция $f(x)$, определенная на некотором множестве X, называется *<u>ограниченной</u>*, если существуют числа A и B такие, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $A \le f(x) \le \hat{A}$. В противном случае - *<u>неограниченной</u>*.

<u>Пример:</u> Функция $y = \sin x$ - ограничена на множестве R, т.к. $|\sin x| \le 1$ для $\forall x \in R$.

<u>ОПР:</u> Функция $y = f(x)$ называется *<u>четной</u>*, если для любых значений аргумента из области её определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

<u>ОПР:</u> Функция $y = f(x)$ называется *<u>нечетной</u>*, если для любых значений аргумента из области её определения выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

3. Признак монотонности функции на интервале. Достаточные условия локального экстремума.

Установим связь между свойствами функций и их производными. Изучим точные методы исследования функции и построения графиков с помощью первой и второй производных.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$ непрерывную и определенную на некотором промежутке X.

<u>ОПР:</u> Функция называется <u>*возрастающей*</u>, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т.е. $x_2 > x_1 \;\Rightarrow\; f(x_2) > f(x_1)$ (рис. 1)

<u>ОПР:</u> Функция называется <u>*убывающей*</u>, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, т.е. $x_2 > x_1 \;\Rightarrow\; f(x_2) < f(x_1)$ (рис. 2)

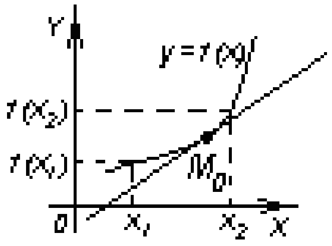


рис. 1

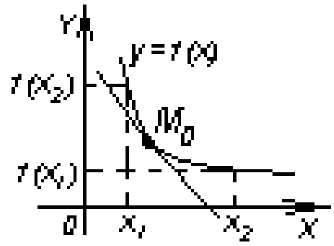


рис.2

Установим связь между возрастанием (убыванием) функции и ее производной.

Рассмотрим возрастающую функцию $y = f(x)$ непрерывную и определенную на некотором промежутке X.

Возьмем любую точку $M_0(x_0; y_0)$ на графике и проведем касательную к графику функции в этой точке.

Обозначим α_1 - угол наклона касательной к оси Ox.

Вспомним геометрический смысл производной: $f'(x) = k$, тогда

$f'(x_0) = k_{кас} = tg\alpha_1$, α_1 - острый угол, поэтому $tg\alpha_1 > 0 \;\Rightarrow\; f'(x_0) > 0$

Аналогично для убывающей функции. Угол α_2 наклона касательной к оси Ox тупой, поэтому $tg\alpha_2 < 0 \;\Rightarrow\; f'(x_0) < 0$

Обобщим сказанное в виде теоремы.

<u>ТЕОРЕМА (*признак монотонности*):</u> Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и внутри интервала $f'(x) > 0$ $\left[\, f'(x) < 0 \,\right]$, то график функции $y = f(x)$ возрастает [убывает] на интервале $(a;b)$.

Рассмотрим функцию, которая имеет несколько интервалов возрастания и убывания, дифференцируемую на всей области определения.

Точки x_1, x_2, x_3, x_4 отделяют интервалы возрастания от интебрвалов убывания.

Заметим, что значение функции в точке x_1 больше значений функции во всех «соседних» точках как слева, так и справа от x_1. Поэтому в точке x_1 функция имеет максимум. В точке x_3 функция тоже имеет максимум, хотя $f(x_1) < f(x_3)$. Аналогично для точек минимума x_2 и x_4.

<u>ОПР:</u> Функция $y = f(x)$ имеет <u>*максимум [минимум]*</u> в точке x_0, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех точек, отличных от x_0 и принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ $\left[\, f(x) > f(x_0) \,\right]$.

<u>*Замечание:*</u> Точка x_1 - локальный максимум, x_3 - глобальный максимум,

x_4 - локальный минимум, x_2 - глобальный минимум.

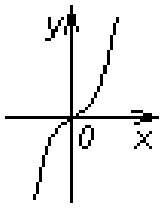
Точки максимума и минимума объединяют под общим названием точек <u>*экстремума*</u>.
Установим связь между производной и точками экстремума.

<u>ТЕОРЕМА (*необходимое условие экстремума*):</u> Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то производная функции в этой точке равна нулю или не существует.

Теорема имеет следующий геометрический смысл:
Если x_1, x_2, x_3, x_4 - точки экстремума и функция дифференцируема в этих точках, то можно провести касательные в этих точках, причем $k_1 = f'(x_1) = tg\alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$. Аналогично $\alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0$ и $\alpha_4 = 0$. Это означает, что касательные параллельны оси *Ox*.

Заметим, что обратная теорема не верна. Из того, что $f'(x_0) = 0$ или $\nexists f'(x_0)$ не следует, что точка x_0 является точкой экстремума.

<u>Пример:</u> $y = x^3$



$$y' = 3x^2 \qquad y' = 0 \quad при \quad x = 0$$

Тем не менее, в точке (0,0) нет экстремума, поэтому точки в которых производная равна нулю или не существует называют точками возможного экстремума (<u>*критическими точками*</u>), а условие $f'(x_0) = 0$ или $\nexists f'(x_0)$ является лишь *необходимым.*

Чем же отличаются, например, точка x_3 от точки $x=0$?

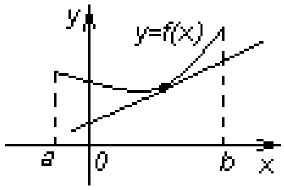
В точке x_3 функция меняет характер монотонности (с возрастания на убывание), т.е. производная слева от точки x_3 положительна, а справа отрицательна. В точке $x=0$ функция $y = x^3$ характер монотонности не меняет. Слева и справа от критической точки функция возрастает и её производная сохраняет положительный знак. Сформулируем достаточный признак экстремума.

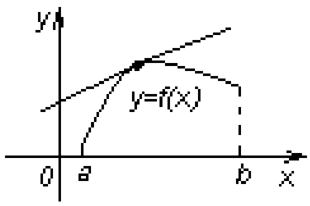
<u>ТЕОРЕМА (*достаточное условие экстремума*):</u> Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема во всех точках своей области определения, и точка x_0 принадлежит области определения. Если производная $f'(x)$ при переходе аргумента слева направо через критическую точку x_0 меняет знак с «+» на «-», то x_0 - точка максимума, если с «-» на «+», то x_0 - точка минимума, а если производная знака не меняет, то в точке x_0 экстремума нет.

4. Выпуклые (вогнутые) функции. Достаточные условия выпуклости функции. Необходимый и достаточный признаки точки перегиба.

Еще одной важной характеристикой функции является характер её выпуклости.

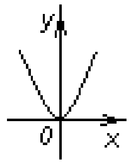
<u>ОПР:</u> График дифференцируемой функции называется <u>*выпуклым [вогнутым]*</u> в интервале $(a;b)$, если он расположен ниже [выше] любой своей касательной в этом интервале.

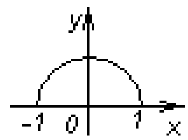




Пример: Функция $y = x^2$ имеет вогнутый график на всей оси R.

Полуокружность $y = \sqrt{1 - x^2}$ имеет выпуклый график на $[-1;1]$





За выпуклость и вогнутость графика функции «отвечает» вторая производная.

ТЕОРЕМА: Если функция $y = f(x)$ имеет вторую производную во всех точках интервала $(a;b)$ и если во всех точках этого интервала $f''(x) > 0$, то график функции вогнутый в интервале $(a;b)$, если же $f''(x) < 0$, то график функции выпуклый в интервале $(a;b)$.

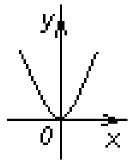
ОПР: Точка $M_0(x_0; f(x_0))$ называется точкой перегиба графика функции $y = f(x)$, если проходя через эту точку функция меняет характер выпуклости / вогнутости.

ТЕОРЕМА (*необходимое условие точки перегиба):* Пусть график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M_0(x_0; f(x_0))$, то вторая производная в этой точке равна нулю или не существует.

Доказательство: Метод от противного. Пусть $f''(x_0) \neq 0 \;\Rightarrow\; f''(x) < 0$ или $f''(x) > 0$. Значит в точке $M_0(x_0; f(x_0))$ функция имеет определенное направление выпуклости / вогнутости, а это противоречит наличию перегиба в точке $M_0(x_0; f(x_0))$.

Замечание: Обратное утверждение не верно. Не всякая точка, в которой $f''(x) = 0$ или $\nexists\, f''(x)$ является точкой перегиба.

Пример: $y = x^4$



$$y' = 4x^3 \qquad y' = 0 \quad при \quad x = 0$$

Тем не менее, в точке $(0{,}0)$ нет перегиба, поэтому точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует, называют точками возможного перегиба (стационарными точками), а условие $f''(x) = 0$ или $\nexists\, f''(x)$ является лишь *необходимым.* Сформулируем достаточный признак точки перегиба.

ТЕОРЕМА (*достаточное условие точки перегиба*): Пусть x_0 - стационарная точка. Если проходя через стационарную точку вторая производная меняет знак, то график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M_0(x_0; f(x_0))$.

5. Асимптоты графика функции.

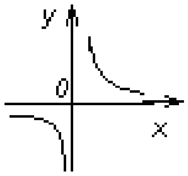
Пусть дана функция $f(x)$. При исследовании функции на бесконечности, т.е. при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$ или вблизи точек разрыва II рода, часто оказывается, что график функции сколь угодно близко приближается к той или иной прямой. Такие прямые называются *асимптотами*.

ОПР: Пряма линия называется *асимптотой* для кривой $y = f(x)$, если расстояние d от точки M, лежащей на кривой до прямой стремится к 0 при удалении точки M от начала координат в бесконечность.

Существует три вида асимптот: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

ОПР: Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

Пример: $y = \dfrac{1}{x}$



$$\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x} = -\infty$$

$$\Rightarrow x=0 \text{ вертикальная асимптота}$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x} = +\infty$$

Сравним с определением точки разрыва II рода. Значит, если в точке a функция $y = f(x)$ терпит разрыв II рода, то прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой.

ОПР: Если $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} f(x) = A$, то прямая $y = A$ называется *горизонтальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$).

Пример: $y = \dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \dfrac{1}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$ - горизонтальная асимптота.

ОПР: Если существуют такие числа k и b, что $\boxed{k = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \dfrac{f(x)}{x}}$,

$\boxed{b = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} (f(x) - kx)}$, то прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$).

Практически целесообразно искать асимптоты в следующем порядке:

1) вертикальные асимптоты
2) горизонтальные асимптоты
3) наклонные асимптоты

Пример: Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x}$

1) Вертикальные асимптоты. Точка $x = 0$ - точка разрыва II рода

$\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x} = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x} = +\infty \quad \Rightarrow \quad x = 0$ - разрыв второго рода

$\Rightarrow \quad x = 0$ - вертикальная асимптота.

2) Горизонтальные асимптоты.

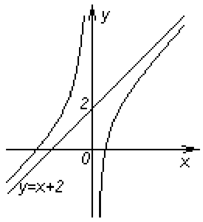
$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} (x + 2 - \dfrac{3}{x}) = \begin{matrix} +\infty \\ (-\infty) \end{matrix} \quad \Rightarrow$ горизонтальных асимптот нет.

3) Наклонные асимптоты. $y = kx + b$

$$k = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2} = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} (1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}) = 1$$

$$b = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} (f(x) - kx) = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x} - x \right) = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{2x - 3}{x} = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} (2 - \frac{3}{x}) = 2$$

$\Rightarrow \quad y = x + 2$ - наклонная асимптота



x	-1	-2	1	2
y	4	1,5	0	2,5

5. Общая схема исследования функции и построения ее графика.

Исследование функций и построение графиков следует проводить по следующей схеме:

I. Исследование функции без использования производной.

1) Найти область определения функции D_y.

2) Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва функции, определить их род.

3) Найти асимптоты графика функции.

4) Если возможно, найти пересечение графика функции с осями координат. Если отыскание точек пересечения затруднительно, то посмотреть координаты по графику (приблизительно).

5) Исследовать функцию на четность / нечетность.

II. Исследование функции с помощью первой производной.

6) Определить интервалы монотонности и точки экстремума функции.

III. Исследование функции с помощью второй производной.

7) Определить интервалы выпуклости и вогнутости, найти точки перегиба графика функции.

IV. Построение графика функции.

8) Построение по пунктам исследования (построение графика принято начинать с построения асимптот).

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

2.1 Практическое занятие №1 (2 часа).
Тема: «Элементы линейной алгебры и их применение для решения экономических задач»

2.1.1 Задание для работы:

1. Определители второго порядка.
2. Способы вычисления определителя третьего порядка.
3. Миноры, алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.
4. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.
5. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Крамера.

2.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Определители второго порядка.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Вычислить определитель:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & -8 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} e^x & e^{3x} \\ e^x & 3e^{3x} \end{vmatrix}$.

2. Найти α, если: а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & \alpha \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} -4 & \alpha \\ 10 & -1 \end{vmatrix} = 24$.

2. Способы вычисления определителя третьего порядка.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Вычислить определители по правилу треугольника и приписыванием столбцов:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \\ 8 & 7 & 0 \end{vmatrix}$.

2. Найти x, если: а) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1$.

3. Миноры, алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Для определителя $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 6 & 5 & 12 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ найти: а) миноры M_{23}, M_{11}, M_{31}; б) алгебраические дополнения A_{12}; A_{13}; A_{32}; в) значение определителя.
2. Вычислить определители по правилу треугольника, приписыванием столбцов и по теореме Лапласа: а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \\ 8 & 7 & 0 \end{vmatrix}$.

4. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

Провести устный опрос теоретического материала.

Вопросы для самопроверки

1 Какая система линейных уравнений называется определенной?
2 Какая система линейных уравнений называется несовместной?
3 Какая система линейных уравнений называется неопределенной?
4 Что называется решением системы линейных уравнений?
5 Какая система линейных уравнений называется однородной?
6 Какая система линейных уравнений называется неоднородной?
7 Сколько решений имеет неопределенная система линейных уравнений?
8 Решить СЛУ методом Гаусса: а) $\begin{cases} 3x-2y+4z=21 \\ 3x+4y-2z=9 \\ 2x-y-z=10 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x+2y-6z+3t=6 \\ 8x+4y-13z+t=24 \\ 2x+y-3z+t=5 \\ 12x+6y-19z+t=36 \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x-7y-2z=0 \\ 2x-3y-4z=6 \\ 2x-4y+2z=2 \end{cases}$

г) $\begin{cases} x-y+2z=3 \\ 3x-y+3z=13 \\ -5x+y-4z=-23 \end{cases}$ д) $\begin{cases} -6x+10y-2z+t=-7 \\ 24x-43y+5z-7t=13 \\ -8x+15y-z+3t=-1 \\ 4x-7y+z-t=3 \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x+y+z+t+p=7 \\ x+2y+z+t+p=9 \\ x+y+2z+t+p=8 \\ x+y+z+2t+p=5 \\ x+y+z+t+2p=7 \end{cases}$

5. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Крамера.

1. Решить СЛУ методом Крамера: а) $\begin{cases} 4x+y-3z=9 \\ x+y-z=-2 \\ 8x+3y-6z=12 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+3y+z=12 \\ 2x+y+3z=16 \\ 3x+2y+z=8 \end{cases}$

2. Имеются три банка, каждый из которых начисляет вкладчику определенный годовой % (свой для каждого банка). Вкладчик имеет сумму размером 6000 ден. ед. В начале года $1/3$ вклада он положил в 1 банк, $1/2$ - вклада во 2 банк и оставшуюся – в банк 3 и к концу года сумма этих вкладов возросла до 7250 ден. ед. Если бы первоначально $1/6$ вклада он положил в банк 1, $2/3$ - в банк 2 и $1/6$ вклада - в банк 3, то к концу года сумма вклада составила бы 7200 ден. ед. Если бы $1/2$ вклада он положил в банк 1, $1/6$ - в банк 2 и $1/3$ вклада – в банк 3, то сумма вкладов в конце года составила бы вновь 7250 ден. ед. Какой % выплачивает каждый банк?

2.1.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Определитель матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Определитель матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала и навыки применения современного математического инструментария для решения экономических задач.

2.2 Практическое занятие №2 (2 часа).
Тема: «Функция одной и нескольких переменных»

2.2.1 Задание для работы:

1. Числовые функции. Способы задания функций. Область определения и множество значений функции. График функции.

2. Характеристики функций: четность и нечетность, периодичность, монотонность, ограниченность.

3. Общая схема исследования функции и построения ее графика.

2.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Числовые функции. Способы задания функций. Область определения и множество значений функции. График функции.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Найти область определения следующих функций:

а) $y=\sqrt{6-x}+\dfrac{1}{x+5}$; б) $y=\sqrt[7]{3-x^2}$; в) $y=\log_5(4-x^2)$; г) $y=\dfrac{\sqrt{9-x}}{\ln(4+x)}$.

2. Найдите $E(y)$: а) $y=4\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\sin(\pi+x)$; б) $y=x^2-6x+5$.

3. Для функции $f(x)=\begin{cases} 0 \quad при \quad x\le 0 \\ \dfrac{x^2}{49} \quad при \quad 0<x\le 7 \\ 1 \quad при \quad x>7 \end{cases}$ найти $f(-2), f(0), f(5), f(8)$. Построить график функции.

2. Характеристики функций: четность и нечетность, периодичность, монотонность, ограниченность.

Провести устный опрос теоретического материала.

Исследовать функцию на четность (нечетность), периодичность, монотонность, ограниченность:

а) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$; б) $f(x)=x^5\cdot\cos x$; в) $f(x)=\sqrt{6x-x^2}$; г) $f(x)=\lg\dfrac{x+2}{x-2}$.

д) $y=x^3\sin x$ е) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ ж) $y=x\dfrac{2^x+1}{2^x-1}$

3. Общая схема исследования функции и построения ее графика.

Провести устный опрос теоретического материала.

Выполнить полное исследование функций и построить графики.

1) $y=2x^2+\ln x$ 2) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 3) $y=e^{\sqrt[3]{x^2}}$

2.2.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Исследование функций», приобретены умения формулировать и доказывать основные результаты по теме «Исследование функций», сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

Разработал(а): ________________________________ В.А. Ротова